Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita

Uma análise dos erros e das dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade

Eulália da Conceição Canada Barbeiro

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário

2012

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita

Uma análise dos erros e dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade

Eulália da Conceição Canada Barbeiro

Orientador: Prof. Doutor Henrique Guimarães

Co-orientadora: Prof.ª Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário

2012

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Henrique Guimarães, pelas sugestões, pelo interesse e disponibilidade manifestados.

À Professora Doutora Suzana Nápoles, minha co-orientadora, pelos seus comentários e ajuda ao longo do ano letivo.

Ao Professor Paulo Alvega, por ter estado sempre disponível e pela natureza e qualidade dos, sempre oportunos, comentários e sugestões.

À Escola Secundária Padre Alberto Neto, por me ter permitido a realização deste trabalho.

Aos alunos que participaram neste estudo, pela simpatia com que me receberam, pela sua colaboração e disponibilidade.

Aos meus colegas de Mestrado pelos bons momentos partilhados, pelo apoio e companheirismo.

À minha família pelo incentivo e apoio, e por estarem sempre presentes.

Resumo

Este estudo procura analisar os erros e dificuldades dos alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade na resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita, em particular na resolução de problemas envolvendo equações. São também analisadas as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos nas tarefas propostas ao longo da unidade. Com este intuito, procurei responder a duas questões: Quais as dificuldades e os erros mais significativos que os alunos do 7º ano apresentam na resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita? Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos do 7º ano na resolução de problemas envolvendo equações?

O estudo segue uma abordagem de investigação qualitativa, tendo por base a lecionação de seis aulas. A recolha de dados inclui uma entrevista semi-estruturada, realizada a seis alunos no final da unidade, durante a qual foram realizadas algumas tarefas matemáticas. Fazem ainda parte dos dados, a observação participante das aulas, de onde resultaram notas reflexivas, e as produções escritas dos alunos.

No que refere à resolução de equações, os resultados revelam que algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos estão relacionadas com a crescente complexidade das expressões envolvidas nos dois membros da equação, em particular nas que envolvem o uso de parêntesis. Alguns dos erros mais evidentes resultam de erros nas operações aritméticas e algébricas, e também na utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Na resolução de problemas os alunos tendem a utilizar estratégias aritméticas. As dificuldades mais significativas encontram-se a nível da interpretação do enunciado, e na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Palavras-Chave: Álgebra, Equações, Resolução de problemas, Erros, Dificuldades de Aprendizagem

Abstract

This study aims to analyze the errors and difficulties of students attending 7th degree, when solving first degree equations, specially on problem solving. The study checks also the strategies related to first degree equations, used by students. I've tried to answer the following two questions: What are the major difficulties and the most significant errors, of the 7th degree students, when they try to solve first degree equations? What strategies and difficulties they have on problem-solving that involve first degree equations?

The study follows a qualitative methodology, and it is based on six classes teaching experience. The instruments of data retrieval are an interview semi-structured, reflexive notes and written productions from students. The interview was applied to six students in the end of the study subject, where they were proposed to solve some mathematical tasks. The other data was taken during class observation.

Results show that the student's difficulties are related with growing complexity of the expressions in both terms of the equation, specially when they have brackets. The main errors result from difficulties on arithmetic and algebraic operations and also from the usage of distributive property of multiplication related to adding. On problem solving, involving equations, students tend to use arithmetic strategies. In this case, the major difficulties are on problem interpretation and on transition between natural and algebraic languages.

Key words: Algebra, Equations, Problem-solving, Errors, Learning difficulties

Índice

Índice de anexos

Índice de figuras

Índice de quadros

1. *Introdução*

A Álgebra, devido à sua linguagem própria e às regras e procedimentos que lhes estão associados, constitui um tema onde, geralmente, os alunos apresentam grandes dificuldades e pelo qual não revelam muito entusiasmo. Um dos motivos que me levou a optar pela realização deste trabalho foi procurar compreender melhor os problemas que se colocam ao nível da aprendizagem da Álgebra, em particular das equações. Para o professor, uma das maiores preocupações é tentar proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa, pelo que, espero que o contributo deste estudo me auxilie na procura de estratégias que visem ultrapassar as dificuldades dos alunos, e que simultaneamente possam conduzir a uma maior motivação e interesse da sua parte.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o principal objetivo da aprendizagem da Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Para que tal seja possível, é necessário que os alunos entendam a linguagem algébrica, sendo de grande importância para o professor, compreender a natureza e a origem das suas dificuldades.

Pesquita (2007) afirma que, "O conhecimento dos erros básicos dados pelos alunos é muito importante dado que fornece informação ao professor relativamente a más interpretações por eles realizadas, bem como das dificuldades de interpretação e manipulação simbólica" (p. 16).

Assim, este estudo tem como objetivo perceber quais as dificuldades dos alunos do 7º ano de escolaridade ao trabalharem com situações que envolvem o pensamento algébrico, em particular, as dificuldades e os erros cometidos na resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita. Tendo em conta o objetivo do estudo, formulei as seguintes questões:

i) Quais as dificuldades e os erros mais significativos que os alunos do 7º ano apresentam na resolução de equações do 1º grau a uma incógnita?
ii) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos do 7º ano na resolução de problemas usando equações?

O estudo apresentado neste relatório foi desenvolvido no âmbito da lecionação da unidade curricular Equações do 1º grau a uma incógnita, no 7º ano de escolaridade, no decurso do ano letivo de 2010/2011.

No que respeita à estrutura, este trabalho é composto por diversos capítulos desenvolvidos tendo em conta os objetivos do estudo e a unidade didática em que se enquadra. Um capítulo que engloba o "Enquadramento teórico" do estudo, tendo em conta alguma literatura de referência, assim como, as orientações curriculares da unidade que lhe servem de base. No capítulo seguinte é feita a apresentação da "Unidade de ensino", no âmbito da qual foi desenvolvido o estudo, onde são explicitadas e justificadas todas as opções tomadas, atendendo às orientações curriculares vigentes e onde é, também, apresentada uma síntese das aulas lecionadas. De seguida surge a explicitação dos processos e procedimentos de "Recolha de dados" utilizados no decorrer da investigação. No quinto capítulo é apresentada a "Análise de dados". Finalmente, no sexto capítulo procuro responder às questões formuladas, e refletir um pouco sobre a minha prática letiva.

2. *Enquadramento da problemática*

O presente estudo foca-se essencialmente nos erros e dificuldades dos alunos do 7º ano de escolaridade, no tema da Álgebra, no tópico Equações do 1º grau a uma incógnita.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o principal objetivo do ensino da Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Tendo em vista a promoção de uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, que lhes possibilite desenvolver o seu pensamento algébrico, é importante identificar os obstáculos que se colocam ao nível da aprendizagem da Álgebra.

Este capítulo apresenta algumas perspetivas teóricas sobre a Álgebra e a crescente importância atribuída ao pensamento algébrico no processo de ensino-aprendizagem, e passa em revista um conjunto de investigações sobre a resolução de equações e a resolução de problemas. Para além disso, é também dada particular visibilidade às dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem da Álgebra, e em particular, no estudo das Equações.

2.1. Álgebra e pensamento algébrico

As origens da Álgebra situam-se na Antiguidade, com a resolução de problemas, de Aritmética e Geometria, inicialmente expressos em linguagem natural.

Terá sido Diofanto (200 – 284 d.C) a introduzir o método de linguagem sincopada na sua forma primitiva, utilizando uma escrita com base em pequenas abreviações, marcando assim a passagem da Álgebra retórica, caracterizada pelo uso de linguagem corrente no processo de resolução de problemas e por uma ausência de símbolos, para a Álgebra sincopada (Silva & Paulo, 1958).

O termo Álgebra surge alguns séculos mais tarde e provém do nome do tratado "Al-jabr w'al-muqabala", do matemático e astrónomo Mahommed Ibn Musa Al-Kharizmi, no ano 830 d.C., que sistematizava quase tudo o que tinha sido feito até aquele momento com equações. O termo "Al-jabr", do qual deriva a palavra Álgebra, significa "restauração", ou "reposição", do equilíbrio mediante a transposição de termos de uma equação, de um membro para o outro. “Al-muqabala” significa “comparação” e traduz a simplificação de uma equação por redução dos termos semelhantes.

Na continuidade do trabalho iniciado por Diofanto entra-se numa nova etapa, a da Álgebra simbólica tendo sido Viéte (1540 – 1603) o seu grande impulsionador. Viéte considerou fundamental a escrita de letras para representar quantidades desconhecidas em problemas geométricos, transformando-os assim em problemas algébricos (Aairer & Wanner, 1996).

A utilização de símbolos assume um papel importante no desenvolvimento da Matemática enquanto ciência, tal como é reconhecido por Keith Devlin (citado em Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 8), “sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria”. Ainda, segundo Ponte, Branco e Matos (2009) os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e “tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas”(p. 8). Há, contudo, que ter em atenção a forma como é utilizada a simbologia algébrica, uma vez que esta quando utilizada de modo abstrato, sem referentes significativos, pode tornar-se incompreensível para o aluno. Como defendem Davis e Hersh (1995) se não se entender o significado dos símbolos e apenas se der atenção à forma de os manipular, corremos o risco de cair num formalismo desprovido de qualquer sentido. Foi o que sucedeu durante o movimento da Matemática Moderna e que foi bastante criticado por Hans Freudenthal, citado em Ponte, Branco e Matos (2009), que defende que, numa fase inicial, os símbolos literais devem ter algum significado.

A partir da década de oitenta do século passado, vários estudos têm-se focado no modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébricos. Têm também sido discutidas diferentes visões da Álgebra, procurando delimitar o que faz, ou não, parte deste campo, em particular no que respeita à Álgebra escolar (Ponte, Branco & Matos, 2009).

A visão, redutora, da Álgebra como tratando-se “simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações” (Ponte, 2006, p.10) tem vindo a ser contrariada, sendo cada vez mais valorizada a perspetiva da Álgebra como “forma de pensar”. Kieran (2007) defende que a Álgebra escolar não se resume ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas. De acordo com a autora, a Álgebra escolar assume duas perspetivas, a *processual* e a *estrutural*. Os alunos encontram-se na fase *processual* se, para compreenderem a manipulação simbólica, necessitam de concretizar variáveis por números. Quando os alunos trabalham com as estruturas e com os procedimentos, com compreensão, já possuem uma perspetiva *estrutural*.

A par da crescente valorização da Álgebra surge o conceito de pensamento algébrico, que constitui atualmente uma das grandes finalidades do ensino da Matemática.

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) definem o pensamento algébrico como algo que diz respeito ao estudo das estruturas (compreender padrões, relações e funções), à simbolização (representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos), à modelação (usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas) e ao estudo da variação (analisar mudança em diversas situações). Por sua vez, James Kaput, citado em (Ponte, Matos & Branco, 2009) considera que “o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais” (p. 9).

Arcavi (2006) defende que ao pensamento algébrico, para além da capacidade de atribuir significado aos símbolos e operações algébricas, é também associado o sentido de símbolo (*symbol sense*). Segundo este autor, o sentido de símbolo envolve aspetos como: *(i)* compreensão dos símbolos; *(ii)* capacidade de manipular símbolos e de ler através de expressões simbólicas; *(iii)* consciência de que é possível exprimir informação dada, através de relações simbólicas; *(iv)* capacidade de selecionar uma determinada representação simbólica, e de melhorá-la caso seja necessário; *(v)* consciência da importância de rever o significado dos símbolos durante a aplicação de um procedimento, a resolução de um problema e da verificação de um resultado, comparando os resultados obtidos com os esperados, tendo em conta a nossa intuição e o contexto do problema; *(vi)* consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos distintos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças. Promover o desenvolvimento do pensamento algébrico só será possível, segundo Arcavi, desenvolvendo nos alunos o sentido do símbolo, e tal só acontece se tivermos a capacidade de criar atividades e práticas de sala de aula cujo objetivo seja desenvolver:

(i) A procura do sentido do símbolo paralelamente com a resolução de problemas (rotineiros ou não) antes de se iniciar a aplicação automática de regras;

(ii) A paciência para a aprendizagem em geral e, mais precisamente, a capacidade de aceitar aprendizagens parciais;

(iii) O sentido do propósito do significado dos símbolos e o poder que o seu uso e compreensão nos confere sobre uma "multidão" de situações (p. 46).

Cabe assim ao professor, através das suas práticas, encontrar estratégias que permitam ao aluno desenvolver o pensamento algébrico. Para Ponte (2005) "a solução terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização" (p. 40).

2.2. Equações e resolução de problemas

Segundo Ponte (2004), com a aprendizagem das equações os alunos iniciam uma nova etapa no seu estudo da Matemática. O aparecimento de novas expressões, que envolvem novos símbolos e novas regras de manipulação, remetem para outro nível de abstração, representando, para o aluno, uma rutura com a Matemática "concreta" da Aritmética.

No que respeita à resolução de equações, Kieran (1992) identifica alguns métodos utilizados pelos alunos, na resolução de equações do 1º grau, e classifica-os da seguinte forma:

(i) *Uso de factos numéricos*, por exemplo, na resolução da equação $5 + n = 8$ os alunos usam conhecimentos anteriores da adição, $5 + 3 = 8$;

(ii) *Uso de técnicas de contagem*, permitem compreender que, considerando a equação anterior, para obter 8, e partindo do número 5, são contados três números inteiros;

(iii) *Cobertura (cover–up)*, por exemplo, na equação $6x = 2x + 4$, *4* tem que ser equivalente a $4x$, uma vez que $6x = 2x + 4x$. Sendo assim, se $4x = 4$, x é igual a *1*;

(iv) *Desfazer (undoing),* por exemplo, no caso da equação $2x + 4 = 18$, tendo em conta as operações do 1º membro, para resolver a equação, "desfaz-se" cada operação, usando a ordem da direita para a esquerda, ou seja, temos primeiro a adição de *4*, logo começar-se-ia por subtrair *4* a *18*, de seguida, surge a multiplicação por *2*, pelo que, o resultado obtido anteriormente seria dividido por *2*;

(v) *Substituição por tentativa e erro*, substitui-se o valor da incógnita por vários valores, até encontrar o valor que permita obter uma proposição verdadeira. Por exemplo, para resolver a equação, $2x + 5 = 13$, testam-se diversos valores, como *2*, *6* e depois *4*, chegando à conclusão que só o *4* poderá ser solução da equação;

(vi) *Transposição*, que consiste em deslocar termos de um membro para o outro, trocando o sinal;

(vii) *Realização da mesma operação em ambos os membros*, por aplicação dos princípios de equivalência de equações.

Os três primeiros métodos referidos pela autora são considerados informais, ao contrário dos dois últimos, que requerem um maior grau de formalização. A realização de substituições por tentativa erro é uma estratégia bastante informal e que, caso não sejam conhecidas as propriedades dos números, pode tornar a resolução da equação num processo muito moroso. Contudo, a autora refere que os alunos que utilizam este método no inicio da aprendizagem da resolução de equações têm mais desenvolvida a noção de equilíbrio entre os lados, direito e esquerdo, da equação e do papel da equivalência do sinal de igual, do que os alunos que nunca adotaram este método. No que respeita ao método de transposição, a autora defende que este pode levar os alunos a aplicar "mecanicamente" a regra: muda de membro - muda de sinal, não operando as equações como objetos matemáticos. Por sua vez, o método que consiste na realização da mesma operação em ambos os membros é o mais complexo uma vez que implica a operação sobre a própria estrutura da equação. Este método consiste na aplicação formal dos princípios de equivalência de equações. Através destes princípios é possível, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir ambos os membros de uma equação por um mesmo número, que no caso da multiplicação e da divisão, terá que ser diferente de zero.

Como afirmam Ponte, Branco e Matos (2009) "As equações são uma ferramenta fundamental para resolver problemas" (p. 106).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere a resolução de problemas como uma capacidade transversal a toda a aprendizagem da Matemática e, "uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (p. 6). *Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) acrescentam que, o aluno ao aprender a resolver problemas em matemática está a adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que certamente lhe serão úteis na vida futura, enquanto cidadão ativo.

Estando a resolução de problemas no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática é importante salientar o que se entende por problema. Segundo Ponte (2005) um problema é uma tarefa fechada com elevado desafio, sendo fechada por nela ser "claramente dito o que é dado e o que é pedido"(pp. 7, 8) e um desafio porque, segundo o autor "um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável" (p. 13). Já, de acordo com Pires (2001) um problema "é uma tarefa com um objectivo bem definido e um método de resolução desconhecido" (p. 141). Podemos então afirmar que estamos perante um problema quando sabemos quais os dados a utilizar e o objetivo a atingir, mas desconhecemos o caminho para lá chegar.

Para Polya (2003), resolver um problema envolve a passagem por quatro fases:

(i) *Compreensão do problema*: interpretar o enunciado, identificar os dados, as condições e o que se pretende determinar;

(ii) *Estabelecimento de um plano*: delinear uma estratégia que permita chegar à solução;

(iii) *Execução do plano*: seguir a estratégia delineada e assegurar que esta é adequada verificando cada passo efetuado;

(iv) *Verificação*: analisar a solução encontrada tendo em conta o contexto do problema. (p. 27)

Um aspeto fundamental na aprendizagem da Álgebra diz respeito à transição da linguagem natural para a linguagem algébrica. Nesse sentido, Kieran (1992) denomina como "*word problems*" e subdivide-os em três tipos:

(i) *Problemas tradicionais*: são problemas que se traduzem matematicamente por uma equação. A abordagem consiste em escrever uma equação envolvendo incógnitas e operações, de acordo com algumas relações matemáticas, seguindo-se depois a resolução da equação onde, por meio de manipulação algébrica, se isola a incógnita e se determina o seu valor;

(ii) *Problemas segundo uma perspetiva funcional*: não são muito diferentes dos "*word problems*" tradicionais tendo, no entanto, um modo de apresentação e uma abordagem de resolução diferentes. Geralmente, as relações entre duas variáveis são estabelecidas antes da resolução do problema, de modo a que a expressão que representa essa relação funcional torne explícita a interpretação do problema;

(iii) *Problemas de generalização*: nestes problemas, a letra assume o papel de variável, sendo utilizada como ferramenta para expressar relações numéricas.

A resolução de problemas requer a adoção de estratégias adequadas que permitam obter as soluções procuradas, o NCTM (2008) apresenta algumas estratégias usadas na matemática escolar "utilização de esquemas, a identificação de padrões, a listagem de todas as possibilidades, a experimentação com valores ou casos particulares, o trabalho do fim para o princípio, a tentativa erro, a criação de um problema equivalente e a simplificação de um problema" (p. 59).

As estratégias dos alunos devem ser valorizadas, pois tal como refere Pesquita (2007) o conhecimento do raciocínio algébrico dos alunos pode ajudar os professores a identificar os erros mais comuns e orientar os alunos para a compreensão do que constitui uma generalização algébrica válida e vantajosa. Torna-se assim importante que o professor estimule os alunos a elaborar, de modo claro e organizado, um registo escrito das suas ideias e pensamentos.

2.3. Erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra

A Álgebra é considerada por muitos alunos como um ramo da Matemática particularmente difícil pois, muitas vezes, quando o aluno tem com ela um contato formal, já parte de crenças e preconceitos próprios (Pesquita, 2007). Muitas das dificuldades dos alunos estão relacionadas com o aparecimento de novos símbolos e com a mudança de significado de alguns símbolos já existentes, como acontece por exemplo com o símbolo "=". Em Aritmética o símbolo de "=" realça mais o seu sentido operacional, ou seja, $5 + 7 = 12$. Em Álgebra, $x + 5 = 7$, não se refere a uma operação, mas sim a uma condição, o sinal "obriga" a procura de um valor que torne a expressão verdadeira (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Por outro lado, as letras são símbolos usados em diversos contextos e com distintas interpretações. Como referem Davis & Hersh (1995) "reaparecem as letras usuais, mas num contexto absolutamente novo e surpreendente: no papel de incógnita e variável" (p.123). Kieran (1992), tendo por base o trabalho de Kuchemann, descreve seis níveis de interpretação da letra:

- *(i)* *Letra avaliada:* é atribuído um valor numérico à letra logo no início, sem qualquer operação sobre ela, enquanto incógnita;
- *(ii)* *Letra não considerada:* a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida mas não lhe é atribuído significado;
- *(iii)* *Letra como objeto:* a letra é vista como abreviatura para objetos ou como objetos concretos;
- *(iv)* *Letra como incógnita:* a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido;
- *(v)* *Letra como número generalizado:* a letra é entendida como uma representação de vários números;
- (vi) *Letra como variável:* a letra é entendida como representando um conjunto de valores desconhecidos e é vista a existência de uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores.

Existem, no entanto, outros obstáculos para além dos mencionados. Booth (1994) e Rojano (2002), citado em Ponte (2006), identificam, outro tipo de dificuldades sentidas pelos alunos, na passagem da Aritmética para a Álgebra, entre elas:

(i) Dar sentido a uma expressão algébrica;
(ii) Não ver a letra como representante de um número;
(iii) Atribuir significado concreto às letras;
(iv) Pensar numa variável como representante de um certo número;
(v) Traduzir informação de linguagem natural para linguagem algébrica;
(vi) Compreender as mudanças de significado, da Aritmética para a Álgebra, de determinados símbolos;
(vii) Simplificação de expressões.

Relativamente à resolução de equações, Ponte, Branco e Matos (2009) referem que, as dificuldades "surgem devido aos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência" (p. 96).

Muitos autores se têm debruçado no estudo dos erros e das dificuldades dos alunos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações do 1º grau. Com base em alguns desses estudos, Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam uma sistematização dos erros e dificuldades mais comuns, que podemos observar no quadro seguinte:

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+"e "=" como indicadores de uma ação	$3 + 4n = 7n$ $2a + 5b = 7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1985, 1992 Kuchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorreta de monómios de 1º grau	Interpretação de *4y* como: • quatro "*y*'s"; • um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; • $4 + y$ por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	Booth, 1984

Uso de parêntesis	*3(x + 2) = 7x* ⇔ *3x + 2 = 7x*	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes	$-2x + 5x = 8 \Leftrightarrow -7x = 8$	Kieran, 2006
Adição incorreta de termos não semelhantes	$2x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow 7x = 9$	Kieran, 1985
Transposição incorreta de termos	$16x - 215= 265 \Leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \Leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x +5 = 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x +8 \Leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x + 5 = 8 \Leftrightarrow -2x +5-5 = 8 +5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992
Conclusão incorreta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ (i) $x = 4 - 2$; (ii) $x = -\frac{4}{-2}$; (iii) $x = \frac{2}{4}$ $-x = -17 \Leftrightarrow ??$ $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

Quadro 1 – Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1º grau (adaptado de (Ponte, Branco e Matos, 2009))

Ponte, Branco e Matos (2009) fazem também referência a outros erros, entre eles, a *Separação entre parte literal e parte numérica numa expressão algébrica* (p. 99).

Relativamente à questão dos parêntesis, Booth (1984, 1988), refere que, os alunos, em geral, não fazem uso de parêntesis, pois partem do princípio que a sequência de operações indica a ordem pela qual o cálculo deve ser efetuado.

O conhecimento das dificuldades sentidas pelos alunos permite ao professor atuar no sentido de proporcionar uma aprendizagem significativa, propondo tarefas que contribuam para os ajudar a ultrapassá-las.

2.4. Orientações curriculares para o ensino da Álgebra

As perspetivas curriculares sobre o ensino da Álgebra têm sofrido diversas alterações, e atualmente este é um tema que tem tido uma crescente valorização. No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) a Álgebra surge como grande tema, o que representa uma grande mudança relativamente ao Programa anterior (ME, 1991), no qual, este tema se encontrava integrado no grande tema dos Números e Cálculo e, no grande tema da Estatística e Funções.

Como propósito principal do ensino da Álgebra para o 3º ciclo, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) apresenta:

> Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. (ME, 2007, p. 55)

No referido documento, o pensamento algébrico surge como algo a ser trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade, "a Álgebra é introduzida como tema programático nos 2º e 3º ciclos, e no 1º ciclo tem já lugar uma iniciação ao pensamento algébrico" (p. 1).

De acordo com o Programa de Matemática, os alunos no final do 3º ciclo devem:

- Ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- Compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade direta e inversa;
- Ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;
- Ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos. (ME, 2007, p. 55)

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) defendem que os alunos devem "compreender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os próprios símbolos podem ser usados" (p. 39). Para além disso, consideram a Álgebra como "um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade" (idem) no qual os professores "poderão ajudar os alunos a construir uma base sólida baseada na compreensão e nas suas experiências" (ibidem). Destaca a importância da competência algébrica, e defende que a Álgebra é mais que a manipulação de símbolos, referindo que os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica.

Neste estudo, o tópico lecionado dentro deste grande tema da Álgebra, diz respeito às "Equações do 1º grau com uma incógnita". As equações são um tópico relevante no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). No 1º e 2º ciclos faz-se uma primeira abordagem à resolução de equações em igualdades em que num dos membros há quantidades desconhecidas. O objetivo é a compreensão das propriedades das operações e a relação de cada operação com a sua inversa. A aprendizagem da resolução de equações do 1º grau a uma incógnita, e o seu uso na resolução de problemas será objeto de trabalho do terceiro ciclo (Ponte, Matos & Branco, 2009).

Ao longo do 3º ciclo é exigido um maior nível de abstração, os alunos iniciam o estudo das equações, inequações e funções. O tópico equações do 1º grau a uma incógnita tem, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) os seguintes objetivos específicos:

- Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes.
- Resolver equações do 1º grau utilizando as regras de resolução (ME, 2007, p. 56)

3. <u>Unidade de ensino</u>

A planificação da unidade de ensino foi realizada atendendo aos objetivos a atingir, às orientações curriculares e também às características específicas da turma.

Neste capítulo serão apresentados, a caracterização da turma, os objetivos programáticos e os conceitos matemáticos envolvidos. Para além disso, são apresentadas, a sequência das aulas e as estratégias de ensino adotadas em função destas. Para terminar, será feita uma breve descrição de cada uma das aulas realizadas.

3.1. Caracterização da turma

O estudo desenvolveu-se na Escola Secundária Padre Alberto Neto, em Queluz, sendo os participantes, os alunos da turma do 7ºC. A turma é constituída por vinte e nove alunos, dos quais quinze pertencem ao sexo masculino e catorze ao sexo feminino. A média de idades dos alunos, no início do ano letivo, situava-se entre os 11 e os 15 anos. No que respeita à situação escolar, dez alunos já ficaram retidos ao longo do seu percurso escolar, sendo que cinco estão a repetir o 7º ano.

Segundo a análise aos resultados obtidos pelos alunos, nas várias disciplinas, no 1º período verificou-se que o aproveitamento da turma foi satisfatório, havendo no entanto alguns casos "preocupantes" de alunos com três ou mais níveis inferiores a 3, numa escala de 1 a 5. No gráfico que se segue (*Figura 1),* encontram-se as classificações dos alunos nas várias disciplinas, no primeiro período.

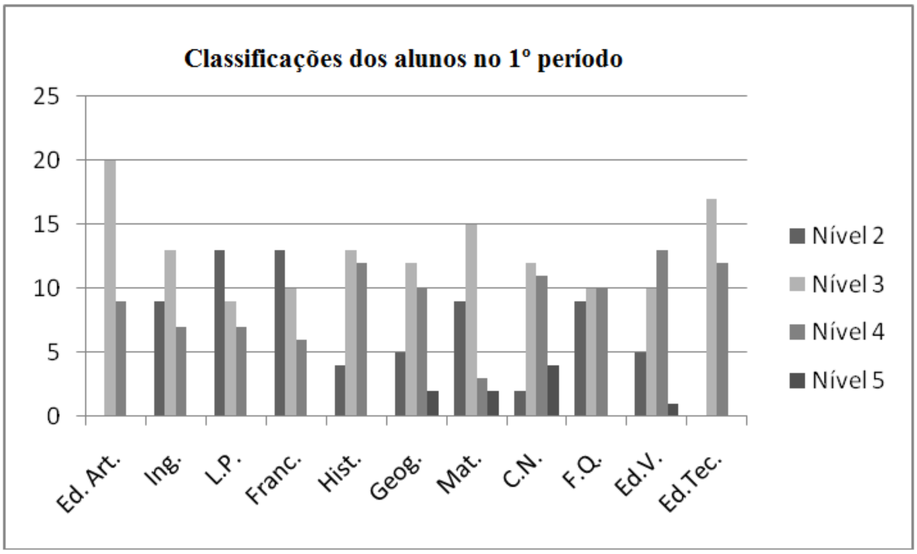


Figura 1 – Classificações dos alunos no 1º Período.

No que diz respeito ao 2º período, não se registaram melhorias a nível das classificações, mantendo-se alguns dos alunos com vários níveis inferiores ao nível 3, conforme se confirma no gráfico abaixo (*Figura 2*).

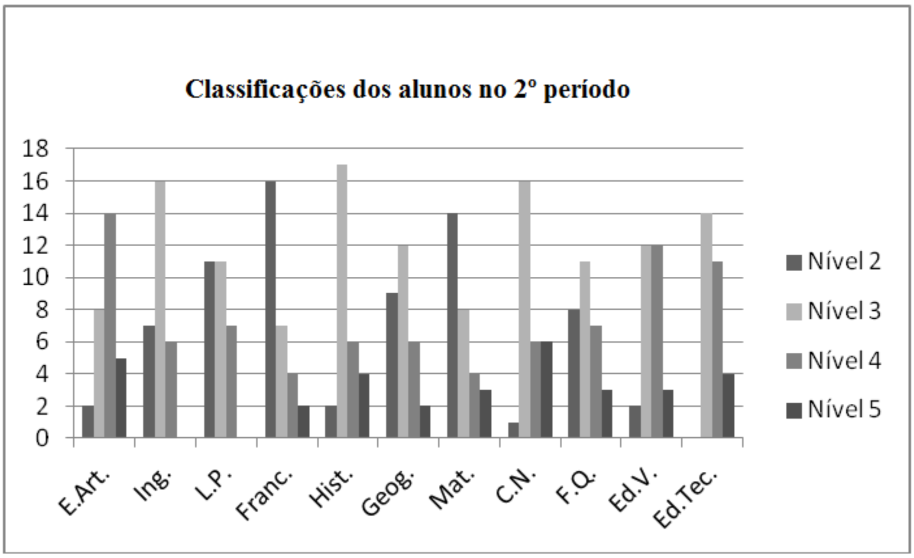


Figura 2 – Classificações dos alunos no 2º Período.

Em relação à disciplina de Matemática houve uma descida da média das notas, sendo a média no 1º período de 2,93 numa escala de 1 a 5, e no 2º período de 2,86. Apesar da descida da média das notas dos alunos na disciplina de Matemática, foi atribuído mais um nível 5, e dois níveis 4, comparativamente ao 1º período.

De um modo geral, a turma é bastante heterogénea, não só no que respeita ao aproveitamento, mas também no trabalho em sala de aula. Alguns alunos são interessados e participativos, enquanto outros, revelam uma certa tendência para a dispersão. Percebe-se também, que a maioria não apresenta, ainda, uma grande autonomia, solicitando sistematicamente, o apoio e a ajuda do professor. Para além disso, a turma apresenta algumas fragilidades, onde se incluem, a falta de hábitos de trabalho e de organização por parte de alguns alunos.

Quanto a expetativas relativamente ao futuro, alguns destes alunos, cerca de metade, pretendem prosseguir os estudos e concluir um curso superior. Os restantes apenas pretendem terminar o ensino secundário ou enveredar por um curso profissional.

O nível socioeconómico e cultural dos pais dos alunos da turma é médio baixo, e as habilitações literárias são diversificadas. Uma parte significativa dos pais frequentou ou completou o segundo e terceiro ciclos do Ensino Básico, alguns completaram o ensino secundário, um caso que concluiu um curso médio e cinco possuem uma licenciatura.

Segundo a diretora de turma, em reunião de conselho de turma, os encarregados de educação são atentos e costumam acompanhar os seus educandos no processo educativo, tendo comparecido às reuniões convocadas.

3.2. A unidade de ensino

A prática letiva que serviu de base a este estudo foi desenvolvida numa turma do 7º ano de escolaridade, na Unidade Didática - Equações do 1º grau a uma incógnita. A planificação da unidade teve por base as orientações e sugestões preconizadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).

No âmbito do tópico "Equações do 1º grau a uma incógnita", o Programa refere que se deve procurar atingir os seguintes objetivos específicos:

- Compreender a noção de equação
- Compreender a noção de solução de uma equação
- Identificar equações equivalentes
- Resolver equações do 1º grau a uma incógnita utilizando as regras de resolução. (p. 56)

Pretende-se ainda, atendendo aos objetivos gerais do referido documento, que os alunos aprendam a resolver equações interpretando e representando situações em diferentes contextos e sejam capazes de resolver problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

De forma a atingir os objetivos a que se propõe, são indicadas algumas orientações metodológicas. Ao nível da abordagem, é sugerido que no desenvolvimento dos conceitos e procedimentos algébricos sejam proporcionadas aos alunos, experiências informais antes da manipulação algébrica formal. No que respeita a tarefas, destaca-se a importância para a diversificação das mesmas, devendo ser privilegiada a resolução de problemas, tendo sempre em atenção, a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina. É também recomendado que, devem ser estabelecidas conexões com a Geometria e os Números e Operações de forma a evitar a abordagem à Álgebra apenas como um conjunto de regras e procedimentos a memorizar. (ME, 2007 p. 55, 56)

No quadro que se segue (Quadro 2) será apresentado o tópico lecionado, assim como os objetivos específicos a alcançar.

Tópico	**Objetivos específicos**
Equações do 1º grau a uma incógnita	• Compreender a noção de equação • Compreender a noção de solução de uma equação • Identificar equações equivalentes • Resolver equações do 1º grau a uma incógnita utilizando as regras de resolução

Quadro 2 – Tópico lecionado – “Equações do 1.º grau a uma incógnita”

3.3. Conceitos matemáticos relativos à unidade

Ao longo da lecionação desta unidade de ensino foram utilizados vários conceitos matemáticos relacionados com o tópico Equações do 1º grau a uma incógnita. Para além disso, são também aqui apresentados conceitos que, embora não tendo sido abordados no decorrer das aulas, estão relacionados com o tema e foram tidos em atenção na planificação deste tópico.

Equação

Uma equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas onde aparece pelo menos um valor desconhecido. Aos valores desconhecidos chamamos ***Incógnitas***. Na unidade que lecionei foi tratado apenas o caso em que existe apenas um valor desconhecido.

Membros de uma equação

A expressão algébrica à esquerda do sinal de “igualdade” designa-se por ***primeiro membro***. A expressão algébrica à direita do sinal de “igualdade” designa-se por ***segundo membro***.

Monómio

Um monómio é um número, ou um produto de números em que alguns podem ser representados por letras. Quando estão presentes letras, podemos distinguir duas partes num monómio, uma parte numérica, ***coeficiente***, e a ***parte literal***, constituída essa por letras.

Termos

Cada um dos membros de uma equação pode ser constituído por um ou mais monómios, que se designam por ***termos*** da equação. ***Termos semelhantes*** são termos que têm a mesma parte literal.

Solução

Ao valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade numérica verdadeira chama-se ***solução*** ou ***raiz*** da equação.

Equações equivalentes

Uma equação diz-se ***equivalente*** a outra, quando toda a solução da primeira é solução da segunda e reciprocamente, toda a solução da segunda é solução da primeira, ou quando são ambas impossíveis.

Para a resolução de equações há que ter em conta diversas transformações, também chamadas de transformações elementares de equivalência, que se baseiam nos seguintes princípios:

1º Princípio de equivalência

Quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente à dada.

Deste princípio de equivalência surge a seguinte regra prática:

- Numa equação podemos mudar um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal.

2º Princípio de equivalência

Quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial.

3.4. Estratégias de ensino

"O que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam e a reflexão que sobre ela efectuam" (Ponte, 2005, p.11). Cabe ao professor a escolha de tarefas que proporcionem aos alunos oportunidades de aprendizagem diversificadas, indo de encontro ao que é referido no (NCTM, 2008) "Num ensino efectivo, são utilizadas tarefas matemáticas para introduzir conceitos importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos" (p. 19). A proposta de tarefas de diferente natureza, exploratória e investigativa, resolução de problemas e de exercícios é necessária uma vez que, cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares, (Ponte, 2005).

Ao longo da minha intervenção procurei construir e/ou escolher tarefas de natureza diversificada, tendo em atenção vários aspetos, como os conhecimentos prévios dos alunos, os conteúdos a lecionar, os objetivos a alcançar, as características específicas da turma, e também o objetivo deste estudo. Para a introdução dos conceitos em estudo, foram propostas tarefas de carácter exploratório e investigativo, indo ao encontro do que defendem Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) quando referem que, no que respeita ao estudo da Álgebra, "actividades de tipo exploratório e investigativo, que apelem à descoberta e comunicação de generalizações, podem desempenhar um papel central no desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 119).

A resolução de problemas é uma capacidade transversal no Programa de Matemática, e é vista como fundamental. Durante a lecionação da unidade procurei apresentar diversas tarefas de carácter problemático, indo ao encontro do que é defendido por Polya, citado em Ponte (2005), ao afirmar que o professor deve propor problemas aos seus alunos com o objetivo de desafiar as suas capacidades matemáticas e experimentar o gosto pela descoberta.

No que respeita ao trabalho nas aulas foi privilegiado o trabalho realizado a pares, opção que foi tomada por ser algo já frequente nas aulas desde o início do ano letivo, e por ter verificado que apesar de inicialmente os alunos apresentarem alguma dificuldade em colaborar com o respetivo par, é uma forma de trabalho que funciona bem na turma. Para além disso, esta forma de trabalho possibilita a partilha e troca de ideias entre os pares, permitindo aos alunos trabalharem mais autonomamente. Inicialmente também estava previsto proporcionar momentos de trabalho em pequenos grupos, no entanto, optei por não o fazer, devido a limitações de tempo, e também por considerar que, tendo em conta as características da turma, poderia gerar alguma "dispersão" por parte de alguns alunos.

Quanto à dinâmica, as aulas centraram-se essencialmente nas atividades realizadas pelos alunos. Todas as aulas seguiram uma estrutura semelhante, com momentos bem definidos. Um primeiro momento para a apresentação da tarefa e indicação do tempo para a realização da mesma, seguido de um momento para os pares desenvolverem a tarefa. No decorrer deste momento o meu papel enquanto professora, foi o de prestar apoio aos alunos, enquanto circulava pela sala, esclarecendo eventuais dúvidas que fossem surgindo e colocando questões para que fossem eles próprios a tirar as suas conclusões. Simultaneamente fui observando o trabalho dos pares para selecionar algumas estratégias que pudessem ser interessantes para a discussão com a turma. De acordo com Fonseca (2000), quando o professor encontra alunos com dificuldades deverá instigá-los a pensar ou dar algumas pistas de estratégias, tomando o cuidado para não dar opiniões concretas. Deverá para além disso, encorajar a interação entre alunos, incentivar o registo dos dados e estimular a partilha de ideias, opiniões e argumentação.

Após a realização das tarefas seguiu-se sempre um momento de discussão com toda a turma, depois do qual se procedeu à sistematização dos conteúdos trabalhados. Nos momentos de discussão foram exploradas várias resoluções, tendo sido chamados alguns alunos a apresentar os resultados obtidos pelo seu grupo, explicando também o seu raciocínio.

Segundo Ponte (2005), os momentos de discussão desempenham um papel fundamental, uma vez que permitem ao aluno refletir sobre a sua atividade, contribuindo assim para a sua aprendizagem. Durante este momento, como referem Stein & Smith (1998), é necessário que o professor acompanhe e valorize o raciocínio dos alunos, estimule justificações, explicações e significados através dos seus comentários e do feedback que dá.

3.5. Sequência de tarefas

A lecionação da unidade didática decorreu no segundo período entre 18 de Março e 6 de Abril do ano de 2011. Foram lecionadas cinco aulas de noventa minutos e uma aula de quarenta e cinco minutos.

A planificação da unidade lecionada foi pensada de modo a criar uma sequência coerente dos conteúdos matemáticos inerentes ao tópico Equações do 1º grau a uma incógnita. Para tal, foi elaborado um conjunto de tarefas, distribuídas por cinco fichas de trabalho (Anexo I, p. 67), que foram trabalhadas ao longo das seis aulas, tendo algumas delas sido abordadas em mais do que uma aula. Para além das fichas de trabalho foi também elaborado um mini-teste (Anexo I, p. 80), que se realizou no dia 30 de Março de 2011 numa aula de 45 minutos. É de salientar que esta aula não estava incluída na sequência de aulas previstas, sendo que foi atribuída à turma no início do ano letivo.

No quadro abaixo, é possível observar a forma como foram distribuídas as fichas de trabalho:

Calendarização	Conteúdo da aula	Ficha de trabalho
18 de Março de 2011 (90 min.)	• Noção de Equação. • Noção de solução de uma equação.	• Equações 1
22 de Março de 2011 (90 min.)	• Equações equivalentes. • Princípios de equivalência de equações.	• Equações 2
25 de Março de 2011 (90 min.)		
29 de Março de 2011 (90 min.)	• Resolução de problemas.	• Problemas 1
1 de Abril de 2011 (90 min.)	• Resolução de equações e resolução de problemas.	• Equações 3
6 de Abril de 2011 (45 min.)	• Resolução de problemas.	• Problemas 1 • Problemas 2

Quadro 3 – Calendarização das fichas de trabalho

De seguida serão apresentadas as tarefas, assim como, os objetivos de cada uma delas.

3.5.1. Ficha de trabalho "Equações 1"

A ficha de trabalho "Equações 1" (Anexo I, p.67) destina-se a iniciar o estudo das equações. As primeiras quatro tarefas são de natureza exploratória, tendo por base os conhecimentos prévios dos alunos. Com estas tarefas pretende-se introduzir a noção de equação e a terminologia associada à mesma.

Relativamente à primeira tarefa, o que me levou à sua escolha foi o facto de, não exigindo muitos pré-requisitos, ser uma tarefa desafiante para os alunos e por considerar que seria interessante a ideia de retomá-la após a sistematização, identificando a incógnita, fazendo a sua tradução por uma equação, e também para reforçar a noção de solução de uma equação.

Com a tarefa seguinte pretende-se que os alunos comecem por construir igualdades numéricas verdadeiras e que atribuam ao sinal de igual o significado de equivalência, e não o encarem apenas como um símbolo que tem por única missão "produzir um resultado". A terceira tarefa estabelece conexão com a geometria e é constituída por duas alíneas em que surge um número escondido, que os alunos devem descobrir de modo a obterem igualdades numéricas verdadeiras.

No que diz respeito à tarefa 4, tal como na tarefa anterior, existe conexão com a geometria. Nesta tarefa os alunos terão que recorrer aos seus conhecimentos prévios com expressões algébricas. Na alínea 4.1 procura-se que os alunos, através de estratégias informais, encontrem os valores correspondentes às medidas da largura, e do comprimento do retângulo. Na alínea 4.2, é dada a indicação aos alunos para que utilizem a letra L como representando a medida da largura, e pretende-se que os alunos escrevam uma expressão matemática para o perímetro. Partindo da expressão algébrica encontrada na alínea 4.2 e do valor indicado para o perímetro na alínea 4.1, pretendia-se, no momento da discussão, escrever uma equação, e testar a solução encontrada pelos alunos na alínea 4.1.

As duas últimas tarefas foram pensadas para serem realizadas após a sistematização e têm como objetivo a consolidação de conhecimentos.

3.5.2. Ficha de trabalho "Equações 2"

Esta ficha de trabalho (Anexo I, p. 70) é constituída por várias tarefas onde se recorre ao modelo da balança, e também por uma tarefa final que consiste na resolução de duas equações simples.

A tarefa 1 e as duas primeiras questões da tarefa 2 são situações simples de balanças em equilíbrio onde se pretende que os alunos descubram o peso desconhecido, de modo intuitivo, ou através de operações elementares, e de seguida traduzam cada uma dessas situações por uma equação.

Com as duas últimas questões da tarefa 2 e com a tarefa 3 procura-se que os alunos compreendam que, se colocarmos ou retirarmos peso de um dos pratos da balança então teremos que colocar, ou retirar, o equivalente a esse peso no outro prato, para que esta se mantenha em equilíbrio.

Ao estabelecer um paralelismo entre a noção de equação, na qual o equilíbrio é traduzido pelo sinal de igual, e o equilíbrio dado pelos pratos de uma balança, pretende-se reforçar o significado do sinal de igual como representando "equivalência" e também, que os alunos compreendam que, tal como acontece na situação da balança, também na resolução de equações é necessário realizar a mesma operação em ambos os membros para que a equação conserve o "equilíbrio". Com base no modelo da balança pretende-se levar os alunos a compreender, intuitivamente, as operações que devem realizar para encontrar o valor desconhecido.

3.5.3. Ficha de trabalho "Problemas 1"

A ficha de trabalho "Problemas 1" (Anexo I, p. 74) é composta por várias tarefas de natureza problemática. Na primeira tarefa pretende-se que os alunos identifiquem a equação que pode representar cada uma das situações.

As tarefas seguintes são problemas em que se pretende que os alunos façam uma interpretação adequada de cada uma das situações, identifiquem a incógnita, e de seguida representem a situação por uma equação. Por fim, devem resolver a equação e analisar o resultado obtido à luz do problema.

3.5.4. Ficha de trabalho “Equações 3”

Inicialmente esta ficha de trabalho (Anexo I, p. 76) era constituída apenas por problemas, contudo, e apesar de considerar que o estudo das equações não deve ser feito resolvendo equações de forma descontextualizada, nesta ficha de trabalho resolvi colocar algumas equações, por ter verificado que muitos dos alunos se mostravam desmotivados perante as dificuldades que sentiam na resolução de equações. Para além disso, durante a resolução da ficha de trabalho anterior apercebi-me que a nível da interpretação dos enunciados dos problemas, e da sua tradução por uma equação, também surgiram muitas dificuldades, tendo mesmo alguns alunos desistido da sua resolução, condicionando dessa forma a resolução da respetiva equação associada. A primeira tarefa da ficha, é assim, constituída por quatro equações, que os alunos devem resolver utilizando as regras práticas baseadas nos princípios de equivalência. Nestas equações estão incluídas equações possíveis, impossíveis e, possíveis e indeterminadas.

A segunda tarefa é um problema em que se estabelece conexão com a geometria. Pretende-se que os alunos façam a interpretação, e a adoção de uma estratégia, adequadas, que permitam responder ao problema. Na primeira questão da tarefa, após identificarem a incógnita, os alunos devem representar a situação por meio de uma equação. De seguida, os alunos devem resolver a equação onde devem concluir que se trata de uma equação impossível. Finalmente pretende-se que os alunos interpretem a solução da equação à luz do problema, e compreendam que sendo a equação impossível então o problema não terá solução.

3.5.5. Ficha de trabalho “Problemas 2”

Esta ficha (Anexo I, p. 79) é composta por dois problemas. O primeiro problema apresenta uma primeira questão onde se pretende que os alunos façam a correta interpretação das expressões algébricas que lhes são apresentadas, de acordo com o enunciado do problema. Na segunda questão espera-se que os alunos percebam que, se igualarem a expressão algébrica $3(C - 10) + 2C + 50$ a 220 ficam com a equação que lhes permite chegar à solução do problema.

O segundo problema é um pouco mais complexo e envolve, também, o conhecimento de propriedades geométricas dos triângulos. Nesta situação é apresentado um triângulo onde em vez das amplitudes dos ângulos surgem expressões algébricas. Pretende-se que os alunos formulem a respetiva equação e encontrem a amplitude de cada um dos ângulos. De seguida, espera-se que os alunos confirmem se as soluções que encontraram estão corretas.

3.6. As aulas lecionadas

Seguidamente será apresentada uma breve descrição de cada uma das aulas lecionadas, onde serão explicitados os objetivos específicos que se consideram atingidos, e onde são salientadas as diferenças entre o que foi planeado e o que foi concretizado.

3.6.1. Primeira aula (18 de Março de 2011)

Esta foi a primeira aula destinada à unidade Equações do 1º grau a uma incógnita e foi planeada de modo a que fosse introduzida a noção de equação, e de solução de uma equação, partindo dos conhecimentos prévios dos alunos com expressões numéricas. Para além disso, estava também previsto que no momento da discussão fosse introduzida a terminologia associada ao conceito de equação.

À medida que os alunos foram entrando na sala pedi-lhes que se sentassem nos devidos lugares, dois a dois, de acordo com o que havia sido estabelecido na aula anterior. Comecei de seguida a distribuir a ficha de trabalho "Equações 1" a todos os pares, dando a indicação de que deveriam resolver apenas a questão 1 e indicando o tempo que dispunham para tal. Os alunos iniciaram o trabalho, não demonstrando grandes dificuldades. Terminado o tempo destinado à realização da tarefa seguiu-se a discussão com toda a turma, tendo sido solicitada a participação dos alunos, e exploradas as diferentes resoluções. As estratégias apresentadas pelos grupos durante a discussão incluíram o método de tentativa e erro, e o recurso ao uso das operações inversas. Nos pares que recorreram às operações inversas constatei que, na generalidade, utilizaram corretamente a prioridade das operações.

De seguida, dei novamente instruções aos alunos para resolverem as questões até à 4.2, indicando também o tempo que dispunham para o fazer. Uma vez mais, seguiu-se um momento de trabalho autónomo por parte dos alunos, no qual estes se mostraram empenhados, não revelando dificuldades significativas até à questão 4 em que tinham que, na primeira alínea, calcular o perímetro do retângulo, e na alínea seguinte, escrever uma expressão algébrica. Na escrita da expressão algébrica, foi onde surgiram as maiores dificuldades, tendo inclusive alguns alunos referido não se recordar o que é uma expressa algébrica. Perante as dificuldades dos alunos resolvi dar mais algum tempo para a realização desta tarefa e, resolvi também colocar algumas questões de forma a desbloquear esta situação de impasse.

Depois de me certificar que a maioria dos pares haviam resolvido todas as questões, dei início à discussão geral. Para a discussão das tarefas 2 e 3, fui questionando diferentes grupos, e as respostas foram sendo dadas verbalmente. Ao terminar, apercebi-me que tinha perdido demasiado tempo a tentar explorar diferentes resoluções, quando não havia essa necessidade, uma vez que todos os pares tinham respondido corretamente. Por esse motivo, e também, pelas dificuldades que surgiram na questão 4, o momento da discussão demorou mais que o previsto, o que levou a que a introdução dos conceitos não decorresse como desejado, tendo havido alguma tendência da minha parte para acelerar o ritmo da aula. Assim, as questões 5 e 6 da ficha de trabalho foram indicadas para resolver em casa.

Relativamente aos objetivos propostos para esta aula, considero que não terão sido totalmente cumpridos, uma vez que os novos conceitos não foram explorados com a devida atenção.

Quanto ao cumprimento da planificação, também não foi cumprida na totalidade, pois o facto de, desnecessariamente, ter trazido algumas resoluções para a discussão, levou a que faltasse tempo para terminar de resolver a ficha de trabalho.

3.6.2. Segunda aula (22 de Março de 2011)

O facto de os novos conceitos terem sido introduzidos de uma forma um pouco acelerada na aula anterior, e por ter verificado que não ficaram muito claros para os alunos, fez com sentisse a necessidade de incluir nesta aula uma revisão dos conceitos. A aula teve, assim, início recordando a noção de equação e de solução de uma equação, bem como do conceito de incógnita. Para tal recorri à ficha de trabalho da aula anterior.

De seguida, foi feita a correção das duas tarefas que os alunos levaram como trabalho de casa, após a qual foi distribuída a ficha de trabalho “Equações 2”. Os alunos foram informados de que deveriam resolver apenas as três primeiras tarefas.

Ao circular pela sala enquanto os alunos realizavam as tarefas, verifiquei que a grande maioria manifestava dificuldades em traduzir cada uma das situações por uma equação, como tal, senti necessidade de atribuir mais tempo do que o inicialmente previsto para a sua realização. Também durante a discussão, verificando que algumas dúvidas por parte dos alunos se mantinham, acabei por alongar este momento. O facto de ter feito uma revisão no início da aula, que não estava inicialmente prevista, e de ter alongado os momentos de realização da tarefa e da sua discussão, levou a que não fossem resolvidas as restantes questões. A aula terminou sem que fosse efetuada a síntese, na qual se formalizariam as regras de resolução de equações baseadas nos princípios de equivalência. Ficou assim por cumprir o plano estabelecido para esta aula.

3.6.3. Terceira aula (25 de Março de 2011)

Inicialmente tinha elaborado para esta aula a ficha de trabalho “Problemas 1”, no entanto, esta não foi colocada em prática, uma vez que os objetivos propostos para a aula anterior não foram todos cumpridos, tendo sido necessário integrá-los nesta aula. Optei então, por iniciar a aula com a discussão de algumas questões da ficha “Equações 2” que tinham ficado pendentes, e de seguida continuar com a realização das restantes tarefas desta mesma ficha. Para além disso, acrescentei uma tarefa extra, constituída por três equações simples, para serem resolvidas no final da aula, caso restasse algum tempo disponível.

Realizada a discussão de resultados, passou-se ao momento de sistematização, onde foram enunciados os princípios de equivalência. De seguida, optei por reforçar a noção de equações equivalentes, utilizando como exemplo algumas equações simples.

Para colocar em prática as regras baseadas nos princípios de equivalência, foi proposta aos alunos a realização da tarefa 4 da ficha de trabalho. Durante a resolução desta tarefa, observei muitas dificuldades por parte dos alunos, não estando muito claro para eles, os procedimentos a efetuar. Decidi, então, chamar dois alunos ao quadro, para que no momento em que fossem resolvidas as equações, fossem sendo justificadas cada uma das operações realizadas, tendo em conta as regras de resolução baseadas nos princípios de equivalência. Antes de terminar a aula, foi resolvida uma das alíneas da tarefa extra.

Relativamente ao que havia sido planificado para esta aula, tendo já em conta a readaptação da planificação inicial, considero que os objetivos foram cumpridos.

3.6.4. Quarta aula (29 de Março de 2011)

O plano para esta aula consistia na resolução da ficha de trabalho "Problemas 1". Trata-se de uma ficha composta por várias tarefas de carácter problemático, cujo objetivo principal era a resolução de equações em contexto de problemas.

Após a entrada dos alunos na sala, distribui as fichas de trabalho pelos pares, dando a indicação de que deveriam resolver apenas a primeira tarefa, e do tempo que dispunham para o fazer.

Enquanto resolviam a tarefa, percorri as várias mesas, e ao observar o trabalho dos pares verifiquei que a maioria dos alunos não demonstrava muitas dificuldades, o que veio a verificar-se no momento da discussão. A única situação que suscitou algumas dúvidas foi a *Situação E: O dobro da soma de um número com 18 unidades é igual a 3*, onde os alunos ficaram divididos entre a alínea *(e)* $2(s + 18) = 3$ e a alínea *(h)* $2\,h + 18 = 3$, por envolver o uso de parêntesis.

Terminada a discussão da primeira tarefa, houve novamente um momento de trabalho autónomo por parte dos alunos, para que fossem resolvidas as restantes tarefas. Estas tarefas trouxeram bastantes dificuldades a todos os níveis. Alguns alunos não conseguiram interpretar os enunciados, não entendendo sequer o que se pretendia com as tarefas, outros interpretaram corretamente o enunciado, mas não conseguiram fazer a tradução por uma equação. Desta forma, o tempo que tinha estipulado para a realização da tarefa pareceu-me demasiado "curto", e como tal, optei por conceder mais algum tempo para a realização das tarefas.

Envolvida no trabalho dos alunos, só quando me apercebi que o final da aula se aproximava, e que alguns dos alunos continuavam numa situação de impasse, é que dei instruções para que parassem e tomei a iniciativa de me aproximar do quadro e começar a discussão geral, solicitando a participação dos alunos, à medida que lhes ia colocando questões.

A aula acabou por não decorrer de acordo com o que estava planeado, uma vez que não foram cumpridos os tempos previstos, e também não foi concluída a realização da tarefa. Contudo, para mim serviu como aprendizagem, pois ao refletir sobre a aula percebi que numa situação como a que aconteceu, em vez de ter dado mais tempo aos alunos para resolverem as tarefas, deveria ter pedido a todos que parassem, assim que me apercebi que as dúvidas persistiam, e devia ter começado logo a questionar a turma, para em conjunto ser feita a resolução da tarefa 2.1, e só depois dar "novo" tempo para continuarem com as restantes tarefas.

3.6.5. Quinta aula (1 de Abril de 2011)

Apesar de na aula anterior não terem sido resolvidas todas as tarefas, foi decidido, em conjunto com o professor titular da turma, que não seria continuada a ficha de trabalho "Problemas 1", sendo concluída na última aula desta unidade. Como tal, o plano para esta aula não sofreu alteração ao que havia sido planeado inicialmente.

Esta aula teve um início diferente das restantes aulas. Antes da entrada dos alunos na sala, dividi o quadro em três partes. À esquerda do quadro, numa das partes escrevi uma equação *possível e determinada*, ao centro uma equação p*ossível e indeterminada*, e de seguida uma equação *impossível*. Solicitando a participação dos alunos, foram testados alguns valores, no sentido de ver se poderiam servir como solução das equações. De seguida, foram resolvidas as equações, e feita a discussão de resultados com a turma, após a qual, foi entregue a ficha de trabalho "Equações 3".

Durante a realização desta ficha de trabalho voltaram a surgir dificuldades na resolução do problema, como tal, contrariamente ao que sucedeu na aula anterior, decidi pedir aos alunos que parassem a resolução. Coloquei algumas questões à turma, para facilitar a interpretação do problema e a identificação da incógnita. Após este momento, os alunos prosseguiram com a resolução da tarefa e de seguida foi feita a discussão.

Considero que foi cumprido o plano para esta aula, tanto a nível de conteúdo, como do tempo estipulado.

3.6.6. Sexta aula (6 de Abril de 2011)

Inicialmente esta aula havia sido planeada para ter a duração de 90 minutos, tal como as aulas anteriores, no entanto, a turma participante neste estudo, tinha agendado para o dia 5 de Abril, data inicial prevista para a aula, uma visita de estudo da qual não tivemos conhecimento antecipadamente. Como esta aula decorreu na última semana do 2º período, a hipótese que restou, foi alterar a aula para o dia seguinte, para uma aula de 45 minutos, cedida à turma em oferta de escola no início do ano letivo.

Após a devida alteração ao plano inicial, optei por iniciar a aula com a discussão da tarefa 2.4 da ficha de trabalho “Problemas 1” que havia ficado por fazer, seguida pela realização da ficha de trabalho “Problemas 2”.

Sendo uma aula de apenas 45 minutos, o plano previa-se bastante ambicioso. Com um ligeiro atraso relativamente ao previsto, uma vez que se perderam alguns minutos com a entrada dos alunos que vinham um pouco agitados com a proximidade das férias escolares, a aula iniciou com a discussão da tarefa 2.4. Apesar do burburinho inicial, os alunos mostraram-se interessados e participativos durante a discussão da tarefa, e não evidenciaram dificuldades significativas. Contudo, a discussão das resoluções demorou um pouco mais que o previsto e a juntar ao atraso inicial, a realização da ficha de trabalho “Problemas 2” ficou comprometida. Ainda assim, os alunos iniciaram a resolução da primeira tarefa.

De um modo geral considero que, apesar de não terem sido cumpridos os tempos previstos, a aula foi bem conseguida, tendo os alunos evidenciado alguns progressos.

Não tendo sido possível resolver a ficha de trabalho “Problemas 2” nesta aula, foi acordado com o professor titular da turma, que seria concluída a resolução no início da aula do dia 8 de Abril de 2011. Como o dia 8 de Abril coincidia com o ultimo dia de aulas do 2º período, o professor da turma tomou a decisão de ser ele próprio a realizar a discussão geral, contudo, durante a resolução das tarefas acompanhei os alunos como habitualmente.

4. Recolha de dados

Este estudo foi realizado em ambiente de sala de aula, numa perspetiva de investigação da própria prática. A seleção dos processos de recolha de dados constituiu uma fase importante do trabalho realizado.

Tratando-se de um estudo qualitativo é recomendada a utilização de métodos de recolha diversificados (Bogdan & Biklen, 1994), de forma a cruzar informação proveniente de diferentes fontes. Deste modo, e de acordo com o objetivo e questões de estudo, optei pelos seguintes instrumentos: a observação, análise documental e entrevista.

De seguida será apresentada uma breve descrição das características de cada um dos procedimentos de recolha de dados utilizados.

4.1. Observação

A observação incidiu sobre a atividade dos alunos, durante a resolução das tarefas e nos momentos de discussão das resoluções.

O facto de assumir, simultaneamente, o papel de professora e investigadora, não me permitiu efetuar registos descritivos de situações relevantes no próprio momento, como tal, após cada uma das aulas, procurei recordar, descrever e registar alguns dos episódios presenciados, fazendo de seguida uma reflexão sobre esses momentos. Como referem Bogdan e Biklen (1994), "Depois de cada momento de investigação, o investigador regista o que ouve, pensa, vê ou experiencia" (p.150).

Para completar a minha descrição, e conforme previamente combinado, considerei algumas notas registadas pela minha colega de trabalho no decorrer das aulas, nomeadamente no que diz respeito a dificuldades evidenciadas pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, e às suas intervenções durante os momentos de discussão com a turma.

4.2. Recolha documental

Neste estudo, os documentos escritos consistiram nas resoluções das fichas de trabalho por parte dos alunos ao longo das aulas, e também de um mini-teste, realizado no dia 30 de Março de 2011. As fichas de trabalho foram distribuídas aos pares no início de cada aula e foram usadas para registar todas as respostas. No final das aulas foram recolhidas para fotocopiar e posteriormente devolver aos alunos, de modo a não comprometer o estudo individual. A juntar às fichas das aulas, foram também recolhidas as resoluções da ficha de trabalho apresentada aos seis alunos entrevistados.

Todos estes documentos assumiram um papel essencial, uma vez que a partir deles pretendia identificar as estratégias adotadas pelos alunos, as dificuldades apresentadas e os erros mais comuns.

Para além dos documentos mencionados anteriormente, foram analisados alguns documentos produzidos pela escola, e que foram utilizados com o objetivo de caracterizar a turma. Destes documentos fazem parte: as fichas biográficas da turma, preenchidas pelos alunos no início do ano letivo e as pautas de avaliação.

4.3. Entrevista

A entrevista teve como objetivo obter maior compreensão e detalhe em relação às estratégias a que os alunos recorriam e às dificuldades que manifestavam ao resolver equações do 1º grau com uma incógnita, e problemas envolvendo esse tipo de equações. A obtenção destas descrições "na linguagem do próprio sujeito", pretendia "desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 134). Após uma análise às produções dos alunos nas aulas, selecionei previamente os aspetos a aprofundar na entrevista e preparei as tarefas da ficha de trabalho (Anexo II, p. 81). Para além disso, pensei, e anotei, algumas das questões que pretendia colocar aos alunos, entre as quais: "podes dizer-me como chegaste a esta solução?", "gostaria de perceber como pensaste.", "em qual das questões sentiste mais dificuldades?", "sentes-te à vontade a trabalhar com expressões onde aparecem letras?"

Além das questões previamente definidas, foram surgindo novas questões no decorrer da entrevista, elaboradas a partir das ações de cada aluno, que permitiram um melhor conhecimento das aprendizagens dos alunos, eventuais conceções erróneas e dificuldades. Tratou-se assim, de uma entrevista semiestruturada, uma vez que estavam previstas alterações na sequência planeada, e questões não planeadas motivadas pelas intervenções dos entrevistados.

A entrevista foi realizada no horário reservado ao apoio da disciplina de Matemática, de forma a não prolongar a permanência dos alunos na escola. As tarefas foram resolvidas com todos os alunos em simultâneo, para economizar tempo, e de seguida foram questionados os alunos individualmente. Teve uma duração média de 30 minutos, foi gravada em áudio e, posteriormente, transcrita. Durante as entrevistas tomei breves anotações a propósito do que os alunos iam realizando.

4.4. Os participantes

No decorrer da unidade letiva todos os alunos participaram através das suas produções escritas e da sua participação nas aulas, tendo tido um papel fundamental para a realização deste trabalho. Para um conhecimento mais aprofundado relativamente às questões de estudo, foram selecionados seis alunos, de acordo com alguns critérios, que apresento a seguir.

Durante o ano letivo, o facto de estar presente em todas as aulas de Matemática da turma, permitiu-me saber um pouco mais acerca de cada um dos alunos, facilitando o processo de escolha. Os alunos foram escolhidos tendo em conta o seu desempenho na disciplina de Matemática, o empenho na realização das tarefas propostas, e também a sua participação nas aulas.

O Tomás é um aluno muito bom a Matemática, tendo obtido nível 5 no final do 2º período. É um aluno perspicaz a analisar as tarefas e tem uma participação bastante ativa nas aulas de Matemática.

A Margarida e a Rosa são alunas de nível 4, e são alunas muito empenhadas nas tarefas. Quanto à participação nas aulas, a Margarida é muito tímida e como tal não é muito participativa, por sua vez, a Rosa gosta de apresentar as suas estratégias e sempre que tem dúvidas não hesita em expô-las.

Por último, optei por selecionar a Joana, a Teresa e o Alexandre, por serem alunos que apresentam mais dificuldades na disciplina de Matemática. Estes alunos obtiveram uma classificação de nível 3 no final do 2º período. Apesar das dificuldades que demonstram, estes alunos são muito interessados e trabalhadores.

5. *Análise de dados*

Neste capítulo serão apresentados e analisados os dados recolhidos, sendo a análise feita tendo em conta o objetivo do estudo e de acordo com as questões que estabeleci. Depois de examinar os trabalhos que os alunos realizaram nas aulas, optei por centrar a análise deste estudo, nas produções dos alunos na ficha de trabalho realizada para apoio das entrevistas, por considerar que espelham a grande parte dos erros e dificuldades que se manifestaram durante as aulas.

A ficha de trabalho que usei nas entrevistas, (Anexo II, p. 81), foi proposta no final das aulas, e foi elaborada com o propósito de me fornecer informação relativamente às aprendizagens realizadas pelos alunos, e à forma como mobilizam essas aprendizagens, nomeadamente na resolução de problemas. Permitiu-me conhecer alguns dos erros e dificuldades dos alunos no trabalho com equações, perceber como é que interpretam o enunciado de um problema, que estratégias utilizam, se recorrem, ou não, a equações para a sua resolução, e como verificam a adequação dos resultados obtidos, ao contexto do problema. As tarefas foram realizadas individualmente pelos seis alunos.

5.1. Resolução de equações

A primeira tarefa da ficha da entrevista é constituída pelas quatro equações apresentadas de seguida.

1. *Resolve as seguintes equações:*

a) $24 + 3x = 216$

b) $4p - 3p = -2 + 6$

c) $2(n - 4) + 20 = 1$

d) $25b - 4 = b + 20$

Figura 3 – Questões da 1ª tarefa da ficha da entrevista

Ao analisar as resoluções desta tarefa constatei que os alunos cometem vários erros, que irei procurar evidenciar com alguns exemplos. Começando pela alínea a), a Joana apresentou a seguinte resolução:

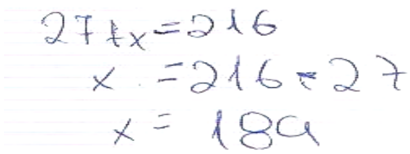


Figura 4 – Resolução da Joana - alínea a)

Na sua resolução, a aluna comete um erro, ao adicionar o termo 24 ao coeficiente do termo 3 *x*, na expressão *24 + 3 x*, obtendo no primeiro membro, *27 + x*. Ao questioná-la para tentar compreender o seu raciocínio, a Joana responde:

> **Joana:** Somei o 24 com o 3 por serem números, depois ficou só o *x*, que é o que nós queremos encontrar.

Da resposta dada pela Joana, percebe-se que o erro que comete se deve ao facto de a aluna entender que deve separar a parte literal da parte numérica da expressão. Apesar do erro cometido, os procedimentos que efetua de seguida estão corretos: utiliza a metodologia da transposição de termos de um membro para o outro trocando o sinal (Kieran, 1992).

Na equação da alínea b) surgiram também alguns erros. Observemos por exemplo, a resolução da Margarida:

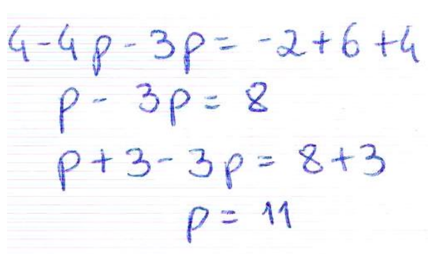


Figura 5 – Resolução da Margarida – alínea b)

No primeiro passo a Margarida comete dois erros, em vez de adicionar os termos semelhantes *4p* e *-3p*, começa por adicionar, desnecessariamente, *4* a ambos os membros e por alterar, também, o sinal ao termo *4p*, passando a ter *-4p*. O passo que efetua de seguida dá a entender que o intuito da aluna seria "retirar" o coeficiente ao termo *4p*. Ao efetuar este procedimento a aluna comete um erro de eliminação (Kieran, 1992). Procede de forma análoga relativamente ao termo *3p*, voltando a repetir o erro, ao adicionar 3 a ambos os membros. Contudo, neste caso, ao adicionar os termos *3* e *-3p* anula por completo o termo *-3p*. Desta forma, a Margarida fica apenas com o termo *p* no primeiro membro, o que a leva a considerar ter encontrado a solução da equação, dando assim por concluída a resolução.

Para tentar compreender a sua estratégia, questionei a aluna quanto à sua resolução:

> **Professora:** Pelo que percebi da tua resolução, começaste por adicionar 4 a ambos os membros.
> **Margarida:** Sim...
> **Professora:** E porque é que adicionaste *4*?
> **Margarida:** Então... porque tinha que tirar os números...
> **Professora:** Tinhas que tirar os números... e adicionaste *4* para ficares só com o *p*?
> **Margarida:** Sim, porque nós temos que subtrair os números e a incógnita é só o *p*.
> **Professora:** Depois voltaste a fazer o mesmo para o termo *-3p*.
> **Margarida:** Sim.

Para resolver a equação, a aluna utiliza a estratégia que consiste em adicionar o mesmo número em ambos os membros, no entanto, adota um procedimento incorreto baseado numa regra, que aparentemente utiliza mecanicamente, e que adapta a esta situação.

Relativamente à equação da alínea c), foram várias as dificuldades e os erros cometidos. Conforme constatei ao questionar os alunos, o facto de existirem parêntesis na equação terá estado na origem dessas dificuldades.

O Tomás foi um dos alunos que referiu a questão dos parêntesis, como algo que o levou a desistir da resolução da equação.

> **Professora:** Vejo aqui na tua ficha que não resolveste a alínea c). Ficou esquecida ou significa que sentiste algumas dificuldades?

Tomás: Eu sei que para resolver tem que se usar a propriedade distributiva, mas não consigo perceber a certo modo a propriedade distributiva.
Professora: Tens sentido sempre dificuldades em utilizar a propriedade distributiva?
Tomás: Eu acho que sei, mas aqui tem uma letra… depois não dá para fazer os cálculos que eu estava a pensar fazer…
Professora: E que cálculos estavas a pensar fazer? Essa letra tem um significado. O que é que a letra representa?
Tomás: A letra é a incógnita, é o número que nós queremos saber.
Professora: Se no lugar da letra tivesses um número como é que fazias?

O aluno fica um bocado em silêncio até que finalmente responde:

Tomás: Ah… então era só multiplicar o *2* pelo *n* e depois pelo *-4*, e aí já ficava $2\,n - 8 + 20 = 1$
Professora: É isso mesmo.
Tomás: Até era fácil, eu é que estava a fazer confusão e resolvi passar para as outras perguntas.

Para o Tomás o facto da distributividade neste caso se aplicar também a um binómio com uma letra, constituiu um entrave à resolução da equação, no entanto, após refletir um pouco, acaba por afirmar que “até era fácil”. Isto mostra que, por vezes, os alunos perante uma dificuldade optam por desistir da resolução.

Outra aluna que apresentou dificuldades foi a Joana. A aluna iniciou a resolução acabando por desistir após efetuar o primeiro passo:

Figura 6 – Resolução da Joana - alínea c)

A Joana não reconhece a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como tal não encara o *2* como estando a multiplicar pelo que está entre parêntesis e, perante o sinal “+” adiciona-o a *20*. A partir daqui a Joana não escreve mais nada, dizendo que começou a sentir-se “baralhada”. Quando lhe perguntei porquê, respondeu:

Joana: Não sei como é que tiro os parêntesis…e o *n* está dentro dos parêntesis. Comecei-me a baralhar…

A Margarida foi uma das alunas que resolveu a equação cometendo no entanto vários erros que podemos observar de seguida:

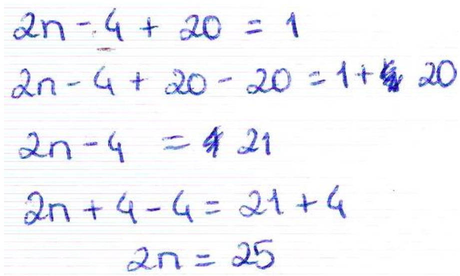


Figura 7 – Resolução da Margarida – alínea c)

Na sua resolução, a Margarida comete um erro na eliminação dos parêntesis (Kieran, 1992), não aplica a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, multiplica o 2 apenas pelo n. No passo seguinte, comete mais um erro, neste caso trata-se de um erro de redistribuição (Kieran, 1992), a aluna adiciona o simétrico de 20 no primeiro membro, enquanto no segundo membro adiciona 20. Os passos que efetua de seguida estão corretos, no entanto, a aluna não conclui a resolução da equação.

Um facto que considerei curioso, é que nesta resolução a Margarida volta a optar pela estratégia que utilizou anteriormente, adiciona o mesmo número a ambos os membros, mas nesta equação, ela fá-lo para eliminar os termos independentes e não o termo que contém a incógnita como na alínea b). Para tentar compreender o seu procedimento, questionei-a:

Professora: Nesta equação resolveste de forma diferente... não tiraste o *2* ao *2n*... Porque é que o fizeste na outra equação [alínea b] e nesta não?

Margarida: Porque nesta o *n* só aparecia uma vez...na outra aparecia duas vezes...

A aluna refere-se ao facto de na alínea b) aparecerem dois termos com incógnita no primeiro membro. Como nesta equação a incógnita surge apenas uma vez, então, a Margarida considera que não deverá ser utilizada a mesma estratégia.

Professora: Mas foste adicionando números aos dois membros. Primeiro - 20 depois 4…

Margarida: Sim, porque era para tirar os números e ficar só com a letra num lado.

Professora: Estavas a tentar isolar a incógnita no primeiro membro, **é** isso?

Margarida: Sim.
Professora: Mas acabaste por não concluir a tua resolução. Ficaste com *2n* no primeiro membro. Para encontrares a solução da equação devia ficar só *n*, não é?
Margarida: Sim, mas não me lembro como é que se tira o 2…

A aluna demonstra algumas dificuldades na simplificação de expressões algébricas, que se percebem através da resolução das equações da alínea b) e c) e pelas respostas apresentadas nos excertos.

Analisando a resolução do Alexandre da mesma equação, podemos identificar também alguns erros:

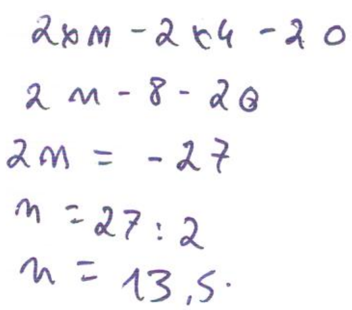


Figura 8 – Resolução do Alexandre - alínea c)

Nos dois primeiros passos simplifica o primeiro membro da equação tratando-o separadamente do segundo membro. Começa por aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, no entanto, comete um erro ao alterar o sinal ao termo 20. No terceiro passo, já com a expressão do primeiro membro simplificada, o aluno passa à resolução da equação. Do que podemos observar, o aluno provavelmente terá efetuado alguns dos procedimentos mentalmente, cometendo alguns erros de cálculo.

No que respeita ao facto de ter tratado os membros da equação separadamente o aluno não consegue justificar porque o fez:

Professora: Começaste por aplicar corretamente a propriedade distributiva, mas… onde é que está o segundo membro?
Alexandre: Ah… pois é…
Professora: Deixaste de ter uma equação, não é?
Alexandre: Pois…tinha que fazer ao mesmo tempo, mas comecei a fazer e não me apercebi…na outra [alínea a)] fiz bem…

Atribuo este erro a uma possível distração, pois no decorrer das aulas o aluno não revelou grandes dificuldades na resolução de equações, no entanto, no momento da entrevista o Alexandre mostrou-se bastante nervoso e ansioso, e quando lhe entreguei a ficha de trabalho não conseguia começar a resolução, afirmando não se lembrar de nada.

No que diz respeito à última alínea, surgiram muitas dificuldades, havendo casos de alunos que, desistiram da sua resolução. De acordo com as declarações dos alunos, o facto de aparecerem termos com incógnita nos dois membros e, também, por a incógnita surgir no segundo membro com coeficiente 1 (ver dialogo com a Margarida na página seguinte), terão estado na origem dessas dificuldades.

Apresento de seguida os excertos em que o Alexandre e a Joana justificam o que os levou a desistir da resolução da equação:

Professora: Não resolveste a questão da alínea d). Que dificuldades sentiste quando "olhaste" para a equação?
Alexandre: Os dois *b*'s…
Professora: Tiveste dificuldade por haver dois termos com incógnita?
Alexandre: Sim, como eram dois eu não sabia como era para fazer.

A Joana referiu o facto de a incógnita surgir nos dois "lados" como ela diz, como estando na origem das suas dificuldades:

Joana: Não consegui resolver porque tinha a incógnita nos dois lados, e eu fiquei sem saber o que fazer. Não sabia como é que podia passá-la para o outro lado.

Uma outra aluna que demonstrou dificuldades foi a Margarida. Ainda assim, a aluna tenta resolver a equação, mas comete alguns erros como podemos observar:

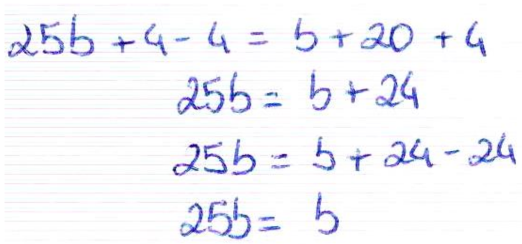


Figura 9 – Resolução da Margarida - alínea d)

A Margarida começa por “anular”, corretamente, o termo *-4* do primeiro membro, adicionando *4* a ambos os membros. De seguida, comete um erro pois decide “anular” o termo *24*, que está no segundo membro. Aparentemente, a aluna pretende isolar a incógnita em cada um dos membros. Procurei questioná-la para perceber o seu procedimento:

Professora: Pelo que percebi sentiste algumas dificuldades ao resolver esta equação...
Margarida: Sim... acho que a primeira parte estava bem, mas a seguir...
Professora: Pois, o primeiro passo está correto... mas depois adicionaste – 24 ao segundo membro... porquê?
Margarida: então... temos que tirar os números para ficarem só as letras.
Professora: Mas repara… quando “tiraste” o *-4* do primeiro membro adicionaste *4* aos dois membros, não foi? E o que é que aconteceu? O *-4* que estava no primeiro membro foi “eliminado” e no segundo membro adicionamos 4 à expressão que já lá estava. Mas com o *24* não foi o que fizeste. Ou seja, deixaste de ter uma equação equivalente, não é? Lembras-te da balança?
Margarida: Pois, quando tiramos de um lado temos que tirar do outro...mas eu pensava que tinha que ficar só a incógnita como no primeiro membro, e assim tinha que tirar o *24*.
Professora: Mas já percebeste que como fizeste, deixaste de ter uma equação equivalente.
Margarida: Pois, mas eu fiquei confusa. Apareciam letras dos dois lados, e eu fiquei sem saber como fazer. E, também, aqui (aponta para o primeiro membro) a incógnita está acompanhada, e aqui não (aponta o segundo membro).
Professora: Quando dizes que a incógnita está “acompanhada” o que estás a tentar dizer é que no primeiro membro temos *25b*, ou seja, temos um termo com coeficiente *25*, certo?
Margarida: Sim...
Professora: E no segundo membro? Será que no segundo membro a incógnita não está também “acompanhada”? Qual achas que será o coeficiente do b?
Margarida: Ah... pois é... é como se estivesse lá um *1*, não é?
Professora: Exatamente. É como se estivesse lá um *1*... Para resolver uma equação temos que isolar a incógnita num dos membros, não é? [a aluna permanece em silêncio, movendo apenas a cabeça afirmativamente] E os termos independentes no outro... mas não foi isso que fizeste... acabaste por ficar com termos com incógnita nos dois membros e eliminar o termo independente.
Margarida: pois foi... e depois já não consegui acabar...

Também a Rosa apresenta uma resolução incorreta da mesma equação. A aluna começa por realizar vários passos em simultâneo, o que leva a que cometa alguns erros *(Fig. 10).*

$$20-4+4=26b$$
$$20=26b$$
$$b=\frac{26}{20}$$
$$b=1,3.$$

Figura 10 – Resolução da Rosa - alínea d)

A Rosa adiciona *4* ao primeiro membro mas não o faz no segundo membro, não obtendo assim uma equação equivalente. De seguida efetua uma incorreta transposição de termos (Kieran, 1985, 1992), muda os termos *25b* e *20*, de membro no entanto não lhes troca o sinal. Volta a cometer novo erro quando tenta isolar a incógnita. Não compreendendo o procedimento efetuado pela aluna questionei-a, ao que a Rosa responde:

> **Rosa:** Tinha que passar a incógnita para o primeiro membro, por isso ficava *20b = 26*. Depois para saber quanto dava o *b* era só dividir o *26* pelo *20*.
>
> **Professora:** E era necessário passar a incógnita para o primeiro membro? Pensa lá um bocadinho.
>
> **Rosa:** Não sei. Eu pensava que a incógnita tinha que estar deste lado. [aponta para o primeiro membro]
>
> **Professora:** Para encontrar o valor da incógnita é necessário isolá-la num dos membros, e nós já tínhamos o termo com incógnita no segundo membro e o termo independente no primeiro membro. No entanto, não é incorreto passar a incógnita para o primeiro membro desde que se tenha cuidado ao fazê-lo. Desde que se utilizem os procedimentos corretos. Tu antes tinhas *26* a multiplicar pelo *b*, depois quando fizeste a troca ficaste com 20 a multiplicar pelo *b*. Não é a mesma coisa pois não?
>
> **Rosa:** Pois não. Então nesse caso só era preciso fazer o *20* a dividir pelo *26*. Ficava ao contrário, ficava $\frac{20}{26} = b$.
>
> **Professora:** Exatamente, isso mesmo.

O facto de a incógnita aparecer no segundo membro fez com que a Rosa ficasse um pouco confusa.

Outra resolução desta equação que apresenta vários erros é a do Tomás *(Fig. 11)*.

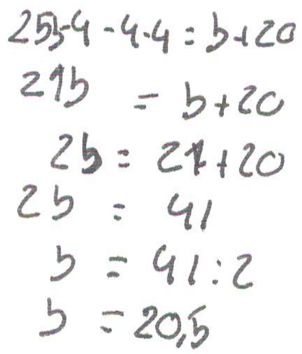


Figura 11 – Resolução do Tomás - alínea d)

O Tomás começa por cometer um erro quando tenta "eliminar" o termo *-4* do primeiro membro. Em vez de *4*, adiciona, apenas no primeiro membro, duas vezes o termo *-4*, deixando deste modo de ter uma equação equivalente. No passo seguinte, "elimina" os valores que adicionou anteriormente, e comete novo erro ao adicionar termos não semelhantes (Kieran, 1992), adiciona o coeficiente do termo *25b* ao *-4*, obtendo *21b*. De seguida o aluno procede de forma a isolar os termos com incógnita no primeiro membro, voltando a cometer alguns erros. Coloca o coeficiente do termo *21b* no segundo membro recorrendo à adição, e muda para o primeiro membro o termo *b*, não lhe trocando o sinal.

Intrigou-me o facto do Tomás, sendo um bom aluno, cometer estes erros, como tal, resolvi fazer-lhe algumas questões para tentar perceber o seu raciocínio:

Professora: Tomás achas que consegues explicar-me os passos que foste realizando para resolver a equação?
Tomás: Penso que sim... então, primeiro tinha que eliminar o 4 do primeiro membro para ficar só com a incógnita, por isso adicionei *-4*...
Professora: Sim, mas tinhas lá *-4*, por isso para neutralizares o *-4* que lá estava o que é que tinhas que fazer?
Tomás: Ah, pois é... tinha que ser *4*... Ah... e também tinha que adicionar no segundo membro para a equação ficar equivalente...
Professora: Exatamente... e o outro *-4* que adicionaste?
Tomás: Esse era para... pois... está mal... adicionei ao *25b*, mas está mal...
Professora: Pois está mal... não podes adicionar termos com incógnita com termos sem incógnita, não é?
Tomás: é verdade...

Neste momento o aluno pediu-me para olhar novamente para a resolução com mais atenção e concluiu que tinha cometido vários erros.

Tomás: Pois é... isto está tudo mal... Acho que devia ter tido mais cuidado a resolver...

De seguida o Tomás, verbalmente, explicou-me corretamente como deveria resolver a equação, não apresentando grandes dificuldades, pelo que atribuí esta sua resolução à falta de atenção e ao facto querer resolver rapidamente todas as questões da ficha de trabalho.

Em síntese: Os alunos revelaram muitas dificuldades na resolução de equações e na simplificação de expressões algébricas. Estas dificuldades acentuam-se com a crescente complexidade das expressões envolvidas nos dois membros da equação, levando os alunos a cometer mais erros ou, até mesmo, a desistir da sua resolução. Os erros mais frequentes consistiram na adição de termos não semelhantes e na aplicação incorreta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tendo também surgido com frequência erros na transposição de termos de um membro para o outro e no cálculo com operações aritméticas e algébricas.

Há, no entanto, casos de alunos, que quando confrontados com o erro, não só o identificam, como o corrigem, às vezes autonomamente.

5.2. Resolução de problemas

A segunda parte da ficha de trabalho da entrevista é composta por três problemas, em que se espera que os alunos interpretem corretamente o enunciado, traduzam a situação por meio de uma equação, e que a resolvam, analisando a solução à luz do problema.

Problema 1

Neste problema é apresentada uma situação onde surgem várias operações encadeadas. Esperava que os alunos traduzissem a situação para linguagem algébrica, através de uma equação, e a utilizassem para responder à questão do problema.

2.1 Pensei num número e adicionei-lhe 6. Multipliquei o resultado por 3 e por fim subtraí o número em que tinha pensado. Obtive o valor 32. Qual o número em que pensei?

Figura 12 – Problema 1 – Ficha da entrevista.

Esta foi uma tarefa onde, a nível de interpretação, os alunos não mostraram muitas dificuldades. Na resolução da Joana pode verificar-se que compreendeu o enunciado do problema, no entanto, relativamente à tradução para linguagem algébrica a aluna comete um erro, quando, ao escrever a equação não faz uso de parêntesis *(Fig. 13)*. A Joana vai escrevendo a equação à medida que vai retirando os dados do enunciado e não reconhece a prioridade das operações, o que a leva, inevitavelmente, a uma resolução incorreta e a uma resposta errada ao problema.

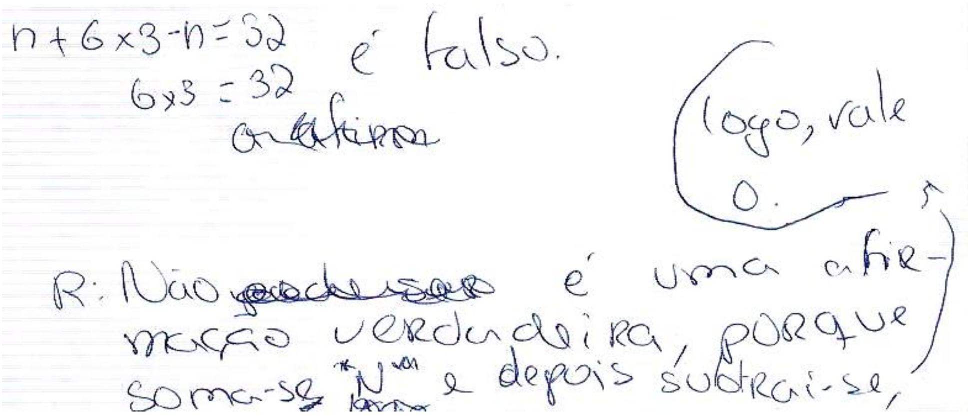


Figura 13 – Resolução da Joana – Problema 1

De acordo com a equação que escreve, a aluna, ao tentar resolvê-la, percebe que ao adicionar os termos com incógnita, vai ficar sem termo com incógnita, por ter $n - n$. Chega à expressão $6 \times 3 = 32$, e escreve que se trata de uma afirmação é falsa. A resposta que a Joana apresenta, mostra que a aluna se limitou a resolver a equação, não tentando verificar a sua adequação ao contexto do problema.

Por sua vez, a Teresa apresenta uma tentativa de resolução, em que revela grandes dificuldades (*Fig. 14*). A aluna começa por identificar a incógnita, mas não consegue traduzir o problema por uma equação. Recorre à linguagem algébrica, da qual acaba por desistir, tentando recorrer, de seguida, a uma estratégia aritmética.

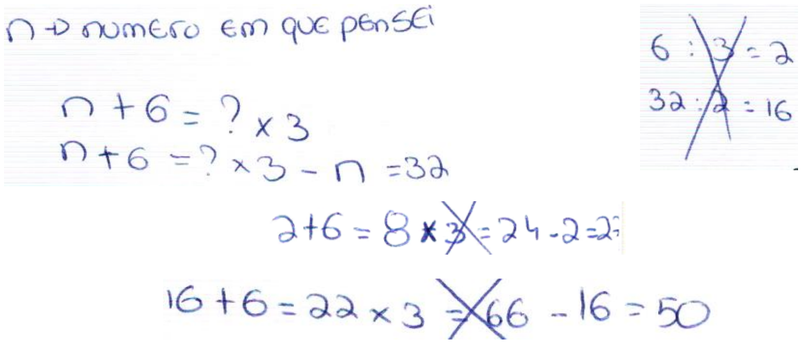


Figura 14 – Resolução da Teresa – Problema 1

A Teresa representa por *n* o número que desconhece, ao qual adiciona *6*. De seguida, seguindo de acordo com os dados do problema, designa por "?" o resultado da primeira operação realizada, e multiplica-o por *3*. No passo seguinte, a Teresa, subtrai *n* igualando tudo a *32*. A Teresa cometeu um erro habitual, que ocorre na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica. Ao sinal de "=", a aluna associa a necessidade de obter um resultado, em vez de o estabelecimento de uma igualdade.

Não sabendo como resolver a questão, a Teresa abandona esta estratégia e tenta a resolução através do método tentativa e erro, mas mesmo com este processo volta a sentir dificuldades e acaba por desistir da resolução. Para tentar perceber as suas dificuldades, questiono-a, mas a Teresa mostrou-se sempre muito confusa não conseguindo responder com clareza às minhas questões:

Professora: Aqui neste problema tiveste alguma dificuldade?
Teresa: Sim.
Professora: O que é começaste por fazer?
Teresa: Eu dei uma incógnita ao valor desconhecido.
Professora: E depois como é que escreveste a equação?
Teresa: 'tão, fiz como estava no…
Professora: Foste seguindo o enunciado?
Teresa: Sim.
Professora: E depois? Não conseguiste resolver. Qual foi a dificuldade aqui?
Teresa: Ahhh… [a aluna mostra-se pensativa] não sabia se tinha de fazer *32* menos…

Problema 2

Esta questão tem por base uma situação geométrica. É apresentada uma situação onde se pede aos alunos que indiquem a medida de cada um dos lados de um triângulo, sendo dado o valor do perímetro, e onde as medidas de dois lados podem ser encontradas tomando como referência um dos lados.

2.2 Os três lados de um triângulo têm comprimentos diferentes. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro lado e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Se o perímetro do triângulo for 31 cm, qual a medida de cada um dos lados do triângulo?

Figura 15 – Problema 2 – Ficha da entrevista

No caso da Joana, a aluna interpreta corretamente o enunciado do problema e manifesta capacidade para traduzir a informação de linguagem corrente para linguagem matemática.

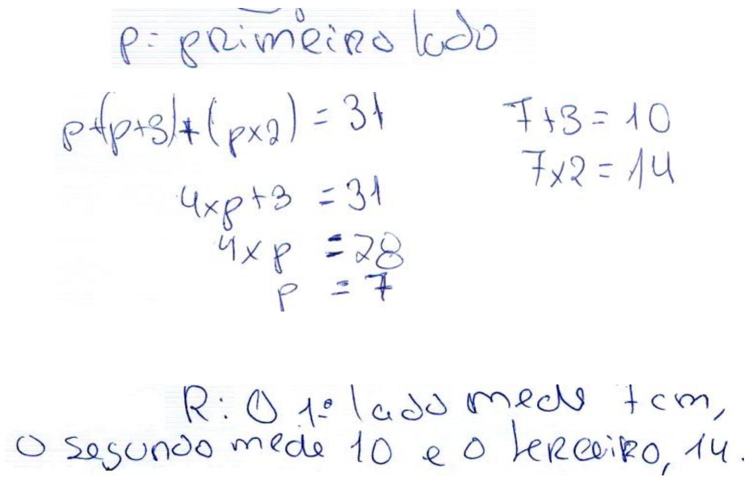


Figura 16 – Resolução da Joana – Problema 2

Como se pode ver (Fig. 16), a Joana começa por identificar o primeiro lado do triângulo como sendo a incógnita, representando-a pela letra *p*. De seguida, sem revelar grandes dificuldades, traduz a situação por uma equação, recorrendo ao uso de parêntesis para identificar o segundo e terceiro lados do triângulo. Após resolver a equação, e encontrar a medida do primeiro lado, substitui o valor que encontrou nas expressões dos outros dois lados, para assim encontrar as respetivas medidas.

No final a Joana apresenta a sua resposta ao problema. Repare-se no entanto, que a aluna não revela preocupação em escrever a unidade de medida em dois dos lados.

Apresento de seguida, a resolução da Rosa para este problema *(Fig. 17)*. A Rosa sente a necessidade de recorrer a uma representação pictórica, começando por desenhar um triângulo, que, tal como me respondeu quando a questionei, utiliza-a apenas para se orientar. É este motivo que apresenta para o facto de não fazer, nesta representação, a identificação dos lados de acordo com as indicações dadas pelo enunciado do problema. À medida que vai interpretando o enunciado, a Rosa vai retirando os dados que lhe permitem escrever a expressão que representa cada uma das medidas dos outros dois lados, recorrendo a linguagem natural para indicar o que cada uma das expressões significa.

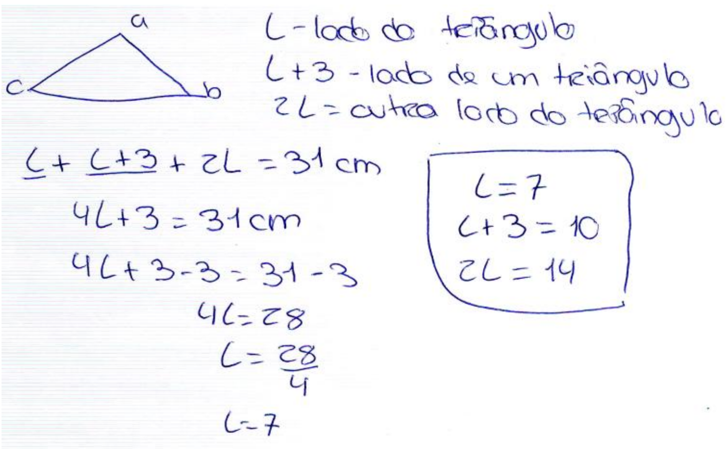


Figura 17 – Resolução da Rosa – Problema 2

A aluna faz corretamente a tradução da situação por uma equação que resolve sem dificuldades, chegando à solução. Substitui o valor encontrado nas expressões que utilizou para cada um dos lados e encontra as medidas dos restantes lados. Para dar resposta ao problema, a Rosa satisfaz-se em circunscrever os valores encontrados por uma linha de forma a isolá-los dos cálculos efetuados.

Neste problema, a Teresa, tal como no problema 1, manifestou grandes dificuldades. A interpretação que faz do enunciado é correta, no entanto, uma vez mais, começa por iniciar a sua resolução recorrendo a um processo aritmético, neste caso utilizando a estratégia de tentativa e erro *(Fig. 18)*. Recorre à representação de um triângulo, e atribui uma medida a um dos lados, a partir do qual, calcula a medida dos outros dois lados.

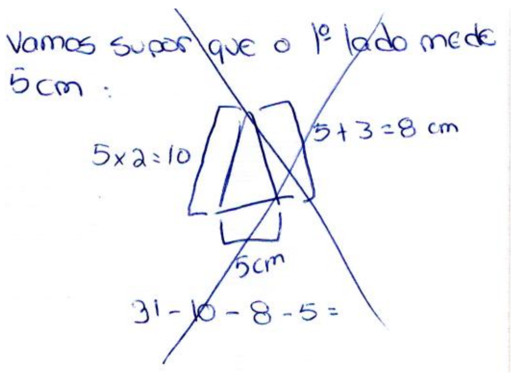


Figura 18 – Resolução da Teresa – Problema 2

A Teresa, riscando o que tinha feito, abandona esta forma de resolução e, após um momento de pausa, desenha outro triângulo *(Fig. 19)* no qual identifica a base como sendo a incógnita que, embora inicialmente não a represente por uma letra, deixa subentendido ao desenhar uma seta partindo de cada um dos outros dois lados, escrevendo num deles *+3*, e no outro x*2*. De seguida, resolve designar por *x* a medida desconhecida e tenta traduzir, erradamente, a situação por uma expressão, não considerando sequer a medida que lhe é indicada para o perímetro. Para além disso, a Teresa revela também dificuldades na simplificação de expressões algébricas, como se pode observar no cálculo (circunscrito na figura 19) que apresenta na sua resolução do problema 2.

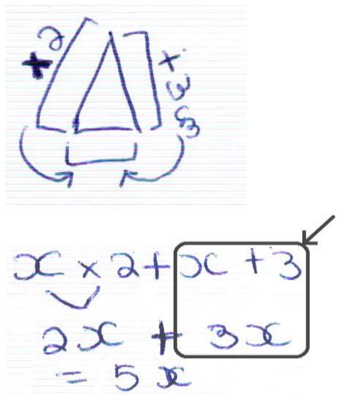


Figura 19 – Resolução da Teresa – Problema 2

As dificuldades que Teresa revela não lhe permitem continuar a resolução do problema, pelo que questionei a aluna para tentar compreender a sua estratégia e as suas dificuldades:

Professora: Teresa, achas que consegues dizer-me as dificuldades que sentiste ao tentar resolver este problema?

Teresa: Eu primeiro não estava a ver como é que escrevia a equação, por isso experimentei com números para ver se depois já conseguia.
Professora: A primeira tentativa foi então para te ajudar a chegar a uma equação? Não foi para encontrar os valores das medidas?
Teresa: É assim... até podia encontrar logo os valores e aí ficava resolvido, mas eu queria escrever uma equação...
Professora: Que foi o que tentaste fazer de seguida.
Teresa: Sim, mas não consegui, fiquei baralhada...
Professora: Pois porque tu adicionaste corretamente o *2x* e *x + 3*, que eram o terceiro, e o segundo lado, mas esqueceste-te do primeiro lado. E também tinhas que ter atenção à questão do perímetro como estava indicado no enunciado, não é?
Teresa: Pois é... eu fiquei baralhada e já não consegui.

Como se pode verificar no diálogo, a Teresa perante a dificuldade em fazer a tradução do enunciado por uma equação, começa por partir de uma situação numérica para procurar compreender a relação geral que pode estabelecer, e daí tentar chegar a uma expressão algébrica.

A resolução do problema 2 pelo Tomás foi a seguinte:

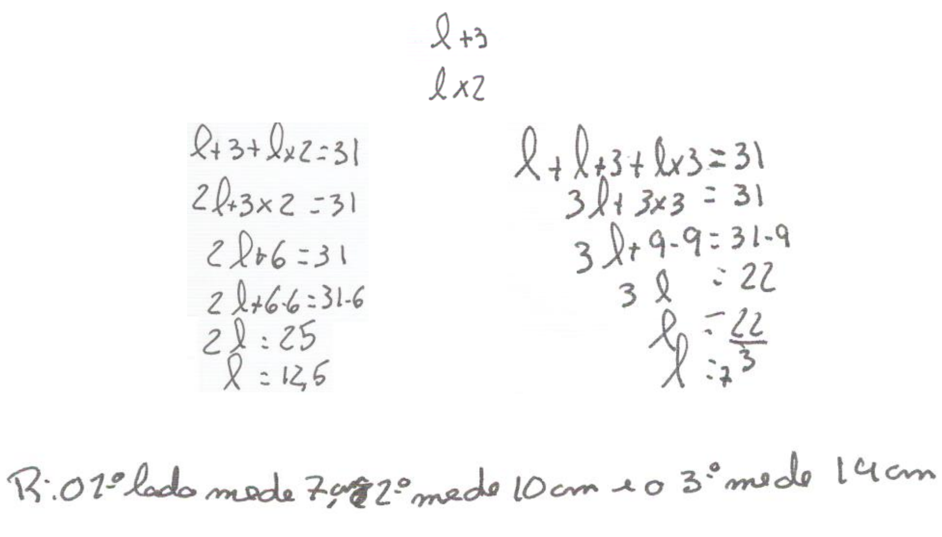


Figura 20 – Resolução do Tomás – Problema 2

O Tomás começa por escrever as expressões do segundo e terceiro lados do triângulo. De seguida, passa à resolução do problema, cometendo um erro ao não adicionar a medida do primeiro lado (*Fig. 20* – resolução da esquerda). Pelo que se entende da sua resolução, o aluno ter-se-á apercebido do erro cometido, o que o terá levado a resolver novamente o problema (*Fig. 20* – resolução da direita), adicionando à expressão, o lado que faltava. Ao chegar à solução, o Tomás verifica se está correta, no entanto, em vez de substituir o valor encontrado para a incógnita na expressão, fá-lo por meio de cálculos aritméticos como se pode observar na figura seguinte:

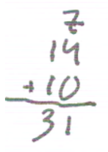


Figura 21 - Verificação da solução do Problema 2 pelo Tomás

Após confirmar a solução o aluno responde ao problema, indicando a medida de cada um dos lados *(Fig. 20)*.

O Tomás, como já se tinha verificado em tarefas anteriores, é um aluno que, embora não demonstre muitas dificuldades, comete alguns erros. Muitos desses erros devem-se sobretudo à distração, sendo ele próprio, na maioria das vezes, a identificá-los e a corrigi-los de forma autónoma.

Problema 3

Neste problema, os alunos dispõe de uma figura onde são representadas três casas, e onde está indicada, em km, a distância entre as casas mais afastadas. Pretende-se que os alunos escrevam uma equação que lhes permita encontrar a distância entre as casas A e B.

2.3 Na figura abaixo está representada uma estrada em que existem 3 casas: A, B e C. A distância entre a casa A e a casa B é o triplo da distância entre a casa B e a casa C. Qual a distância entre A e B?

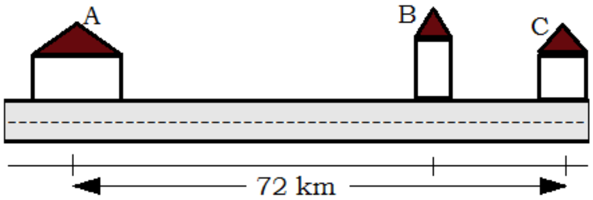


Figura 22 – Problema 3 – Ficha da entrevista.

Na resolução deste problema o Tomás começa por seguir uma estratégia algébrica *(Fig. 23)*. À medida que vai fazendo a interpretação do enunciado vai anotando os dados. Começa por identificar a incógnita como sendo a distância entre a casa A e a casa B, e representa-a pela letra *n*. A interpretação correta que faz do enunciado permite-lhe concluir que a distância entre a casa B e a casa C corresponde a um terço da distância entre as casas A e B, representando-a por *n:3*. Finalmente, com base na imagem, toma nota da distância entre as casas A e C, escrevendo que esta é igual a 72 (não faz no entanto referência à unidade de medida).

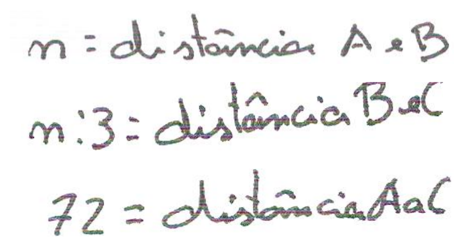


Figura 23 – Resolução do Tomás – Problema 3

Ao chegar a este ponto, em vez de traduzir a situação por uma equação, o aluno envereda por uma resolução aritmética *(Fig. 24)*. Começa por dividir os 72 km por 4 para encontrar a distância entre as casas B e C, e depois como sabe que a distância entre a casa A e a casa B é o triplo dessa distância, multiplica o valor encontrado por 3 e chega à solução do problema.

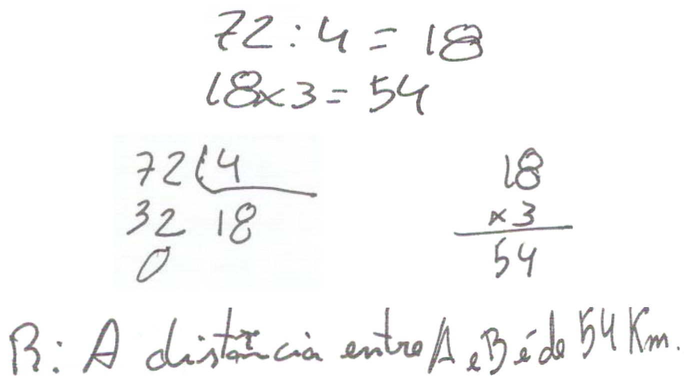


Figura 24 – Resolução do Tomás – Problema 3

Ao questionar o Tomás relativamente ao motivo que o levou a não recorrer a uma equação, o aluno respondeu:

Tomás: Eu primeiro pensei resolver com uma equação, mas pensei que assim era mais rápido e acabei por fazer assim.

Como o aluno refere neste excerto, para este problema não sentiu necessidade de recorrer à escrita de uma equação para traduzir o problema, pois na sua opinião assim é "mais rápido".

Em relação a este problema, os outros alunos mostraram dificuldades e não o conseguiram resolver. Um desses casos foi o da Joana:

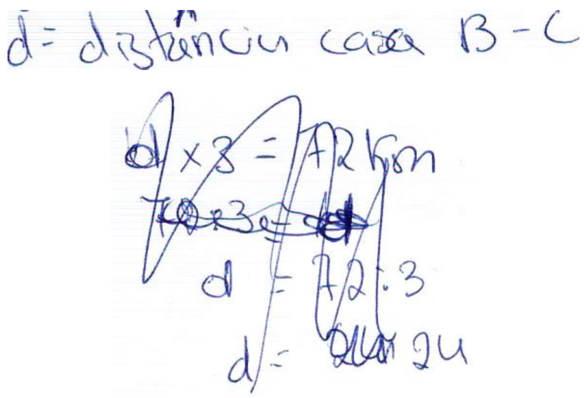


Figura 25 – Resolução da Joana – Problema 3

A Joana começa por identificar, corretamente, a incógnita como sendo a distância entre as casa B e C, representando-a pela letra *d*. De seguida, tentou fazer a tradução da situação por uma equação, contudo apenas considerou a distância entre as casas A e B, ao escrever *d* x *3 = 72*, o que não lhe permitiu chegar à solução do problema. Ao verificar o valor obtido apercebeu-se que não estaria correto e, não conseguindo corrigir a situação, resolveu abandonar a tarefa.

Em síntese: Os alunos apresentaram dificuldades na resolução de problemas, sobretudo na compreensão do enunciado do problema e, particularmente, na sua tradução por uma equação. Outra das dificuldades manifestadas surge na interpretação da solução de uma equação que traduz um problema, no contexto desse problema traduzido pela equação. No que respeita a estratégias, com alguma frequência, os alunos recorrem a uma abordagem aritmética, por lhes ser a mais intuitiva. Alguns alunos já recorrem ao uso de equações para resolver problemas, embora nem todos o consigam fazer com sucesso.

6. <u>Reflexão final</u>

Neste capítulo apresento os resultados obtidos, partindo da análise de dados efetuada, de modo a dar resposta às questões formuladas. Termino com uma reflexão pessoal sobre as aprendizagens que este estudo me proporcionou.

6.1. Síntese do estudo

As dificuldades que os alunos demonstram no estudo das Equações sugerem a necessidade de uma reflexão profunda sobre a aprendizagem deste tópico. Nesta investigação procuro identificar os erros e as dificuldades mais evidentes na resolução de equações do 1º grau a uma incógnita, assim como as estratégias que os alunos utilizam para resolver problemas. Especificamente, procuro dar resposta às seguintes questões:

(i) Quais as dificuldades e os erros mais significativos que os alunos do 7º ano apresentam na resolução de equações do 1º grau a uma incógnita?

(ii) Que estratégias e dificuldades apresentam os alunos do 7º ano na resolução de problemas usando equações?

A experiência decorre num contexto natural, ao longo da unidade de ensino Equações do 1º grau a uma incógnita, e assenta na realização de tarefas diversificadas, com especial enfoque em tarefas de tipo exploratório/investigativo e na resolução de problemas.

O estudo que realizei seguiu uma abordagem qualitativa, envolvendo os alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade, entre os quais foram escolhidos os seis alunos participantes para realizar o estudo. Para a recolha de dados foram utilizados vários instrumentos, nomeadamente, as produções escritas dos alunos e entrevistas com base nestas produções, observação e notas reflexivas sobre as aulas.

6.2. Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita

No que respeita à resolução de equações, os alunos revelaram bastantes dificuldades no decorrer da unidade letiva. Estas dificuldades evidenciaram-se mais à medida que o grau de complexidade das expressões envolvidas nos dois membros da equação foi aumentando. De acordo com Socas (2007), muitos dos erros cometidos em Álgebra têm origem em situações de aprendizagem não resolvidas em Aritmética. Na análise efetuada neste estudo foram observados vários erros. Erros de natureza aritmética, uso inadequado de parêntesis (Kieran, 1992), aplicação incorreta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, e adição de termos não semelhantes (Booth, 1988; Kieran, 1992), foram alguns dos erros que surgiram com bastante frequência no processo de resolução de equações por parte dos alunos. Também a prioridade das operações constitui um entrave. Os alunos, tendencialmente, efetuam as operações pela ordem em que aparecem nas expressões. Outros erros que surgiram, embora com menos frequência, foram: erros de redistribuição (Kieran, 1992), erros de eliminação (Kieran, 1992) e também, casos de conclusão incorreta da resolução da equação (Kieran, 1992; Lima e Tall, 2008; Vlassis, 2001). Para além disso, houve casos de alunos que perante as dificuldades sentidas, desistiram da resolução, por não saberem como começar a resolver a equação (Kieran, 1985).

Os processos de resolução de equações mais adotados pelos alunos, neste estudo, foram a transposição de termos de um membro para o outro com mudança de sinal e a realização da mesma operação em ambos os membros, por aplicação dos princípios de equivalência (Kieran, 1992). A não compreensão do processo de resolução adotado, e a aplicação "mecanizada" das regras de manipulação algébrica, terão estado na origem de muitos dos erros cometidos pelos alunos.

Um facto que percebi durante a realização das entrevistas foi que os alunos muitas vezes são capazes de fazer mais do que revelam nas produções escritas que apresentam. Apercebi-me que alguns alunos se mostraram ansiosos e inseguros, durante a realização das tarefas, motivo que, aliado à falta de atenção, os terá, possivelmente, levado a cometer vários erros. Também me foi possível perceber que, o facto de serem questionados relativamente ao trabalho que realizaram, permitiu-lhes "olhar" para a sua resolução de uma forma mais reflexiva, e à medida que comunicavam, explicando a estratégia utilizada, e o seu raciocínio, tiveram oportunidade de rever a sua resolução, o que levou a que, por vezes, se apercebessem de alguns erros cometidos, acabando eles próprios, por corrigi-los. Isto leva-me a pensar que, sendo a Álgebra um tópico que requer um grande nível de abstração, e onde os alunos revelam muitas dificuldades, é necessário levar os alunos a refletir sobre o seu trabalho, questionando-os, e dando-lhes algum feedback. Deste modo será possível, não só, conseguir que eles tomem consciência dos seus erros, como, aprendam a corrigi-los autonomamente.

6.3. Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas usando equações

Ao longo da unidade de ensino foram propostos vários problemas que, de acordo com Kieran (1992), podem ser considerados como "word problems" tradicionais.

Relativamente às dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas, constatei que, tendo em atenção uma análise efetuada às resoluções das tarefas propostas nas entrevistas e na unidade letiva, muitas das dificuldades surgem logo na interpretação do enunciado, e na selecção de informação relevante para a resolução do problema.

As dificuldades que os alunos apresentaram na interpretação dos enunciados devem-se à falta de vocabulário geral e também à não compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Estas dificuldades condicionam a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica. Muitos alunos revelaram, assim, grandes dificuldades na escrita da equação que traduz simbolicamente o problema. Isto vai ao encontro do que defende Kieran (2007) ao referir que, escrever uma equação que traduz um problema da linguagem natural para a linguagem algébrica é, uma área "habitual" de dificuldades, por parte dos alunos em Álgebra. Outra dificuldade na resolução de problemas prende-se com a verificação e adequação dos resultados obtidos. Alguns alunos limitaram-se a resolver o problema, sem analisar ou interpretar a solução obtida, e sem ter a preocupação de verificar se esta se adequa ao contexto do problema dado.

Quanto às estratégias utilizadas na resolução de problemas, temos casos de alunos que recorrem à escrita de uma equação para resolver o problema, no entanto, sempre que a situação permite, os alunos continuam a recorrer a estratégias aritméticas, entre elas a tentativa e erro, aparentemente por lhes serem mais intuitivas, e por ser algo que já lhes é “familiar”. De acordo com Kieran (1996, 2007), os processos aritméticos não devem ser desvalorizados, uma vez que não inibem o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo que os alunos, apesar de não utilizarem a linguagem algébrica, estabelecem relações adequadas que lhes permitem obter soluções.

Por vezes os alunos recorreram a representações pictóricas como forma de superar dificuldades, tendo sido uma estratégia utilizada, tanto no decorrer da unidade como nos problemas apresentados neste estudo.

6.4. Considerações finais

A realização deste estudo, assim como a lecionação da unidade letiva, constituíram duas experiências bastante enriquecedoras para o meu percurso a nível profissional e, também, para a minha realização pessoal.

Quanto ao meu desempenho durante a lecionação, considero que existem ainda vários aspetos que preciso de trabalhar de modo a proporcionar uma melhor aprendizagem aos alunos. Fazendo um balanço global das aulas, penso que poderia ter “aproveitado” melhor os momentos de discussão. Poderia ter-lhes dado uma dinâmica diferente dando mais oportunidade aos alunos de participar, de apresentar os seus resultados, e poderia, também, ter explorado melhor as produções por eles desenvolvidas. Considero que se for dada maior importância ao raciocínio dos alunos e se a aula for orientada pela sua atividade a aprendizagem terá maior eficácia.

Através da análise de dados percebi que as produções de cada aluno fornecem informação importante sobre o seu modo de pensar e também sobre as dificuldades que manifestam. Foi importante, para mim, ter feito esta análise ao trabalho dos alunos, pois permitiu-me estar mais atenta às aprendizagens por eles realizadas, e também às suas dificuldades.

Também as reflexões após as aulas foram extremamente importantes, pois permitiram-me compreender melhor o modo como decorreram as aulas, dando-me uma noção dos pontos em que deveria melhorar, de forma a aperfeiçoar a minha performance de ensinar.

A realização deste trabalho teve um grande contributo para a minha formação, proporcionando-me momentos de reflexão relativamente às opções tomadas antes do período de lecionação, tais como a metodologia de trabalho e a escolha das tarefas, e também num período posterior, levando-me a refletir sobre a minha prática letiva, as aprendizagens dos alunos e as minhas próprias aprendizagens. De uma maneira geral, levou-me a reforçar a ideia de que o ensino deve ser reflexivo, dinâmico e deve ser orientado pela atividade dos alunos.

Referências Bibliográficas

Aairer E., Wanner G. (1996). *Analysis by its History*. New York: Springer.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 29-47). Caminha: SEM-SPCE.

Bogdan, R. & Biklen S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Fonseca H. (2000). *Os Processos Matemáticos e o Discurso em Actividades de Investigação na Sala de Aula*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: INCM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM. (obra original publicada em 2000).

Pesquita, I. & Ponte, J. (2006). Dificuldades dos alunos do 8º ano no trabalho com Álgebra. In Actas de 6XV Encontro de Montegordo da SPCE. Lisboa: SPCE.

Pesquita, I. (2007). *Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8.º ano* (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Trad.). Lisboa: Gradiva (Obra original publicada em 1945).

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História* da *Matemática*, 4(8), 149-170.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação. *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J.P. (2006). *Números e álgebra no currículo escolar*. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, e P. Canavarro. Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp.5-27). Lisboa. SEM-SPCE.

Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de* aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Professores das turmas- piloto do 7.º ano de escolaridade (2009). *Equações: materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC-ME.

Silva, J. S., Paulo, J. (1958). *Compêndio de Álgebra, 3º ciclo dos liceus*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 268-275.

Manuais consultados

Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Exercícios de matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Leite, A., Silva, A. P. & Silva, J. N. (2010). *Matemática – parte 2: matemática 7.ºano.* Porto.: Porto Editora.

Anexos

Anexo I – Fichas de trabalho

Ficha de trabalho “Equações 1”

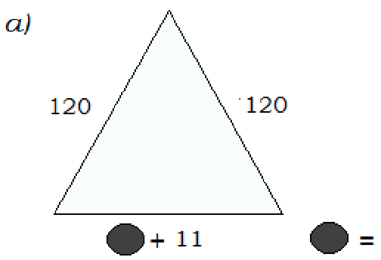
1. O João pensou num número e adicionou-lhe 6 unidades. Multiplicou o resultado por 3 e obteve 30. Qual foi o número em que o João pensou? Escrevam como pensaram.

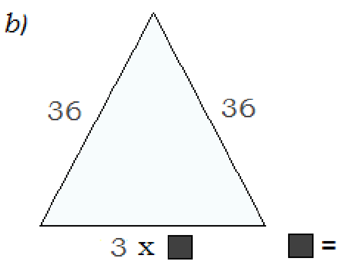
2. Em cada uma das alíneas seguintes descubram o número de modo a obterem afirmações verdadeiras:

a) 6 + ___ =15   b) ___ - 200 = 120

c) 3 x ___ +6 = 30   d) 3 x (___ + 6) = 30

3. Descubram em cada caso o valor desconhecido de modo que os triângulos sejam equiláteros. Expliquem o vosso raciocínio.





4. Considerem um rectângulo em que a medida do comprimento é igual à medida da largura mais 5 cm.

4.1 Se o perímetro do rectângulo for igual a 38 cm, quanto medem, a largura e o comprimento do rectângulo? Escrevam como pensaram.

4.2 Utilizem a letra L para representar a largura do rectângulo. Escrevam uma expressão matemática que represente o perímetro do rectângulo.

5. Completem o quadro:

Equação	1º membro	2º membro	Termos independentes	Termos com incógnita
5 L + 3 = 7				
	x - 200	120		

6. Dos valores que se indicam, qual é solução de cada uma das seguintes equações? Coloquem um círculo à volta da resposta certa.

6.1) a + 9 = 4

5
3
- 5

6.2) b – 3 = - 9

- 12
- 6
6

6.3) - 3 + 3 c = 15

- 5
6
4

- Uma _______________ é uma igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos um valor desconhecido. Ao valor desconhecido chamamos _______________.

  Exemplo: a expressão **3 x __ +6 = 30** é uma equação

- Ao valor que, colocado no lugar da incógnita, transforma a equação numa afirmação verdadeira chama-se ____________ da equação.

- À expressão que temos à esquerda do sinal de "igualdade" chamamos _________________; à expressão à direita do sinal de " igualdade" chamamos _________________.

- Cada membro da equação é constituído por vários _____________.

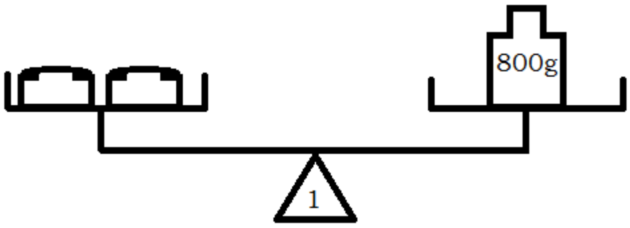
  Os termos que não têm incógnita chamam-se _____________________________.

Ficha de trabalho “Equações 2”

Resolvam as questões seguintes, escrevendo em todas elas a forma como pensaram.

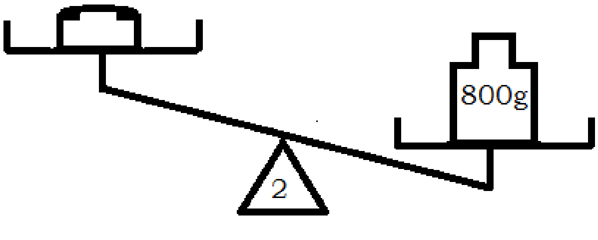
1. A Joana e a Maria foram comprar bolos para uma festa. Decidiram comprar 2 bolos de chocolate, que a empregada da pastelaria pesou numa balança de pratos. Vamos considerar que os bolos de chocolate têm o mesmo peso.

   1.1 A empregada colocou os 2 bolos no prato esquerdo da balança, e para que a balança ficasse em equilíbrio colocou um peso de 800g no outro prato, como podem ver na figura:

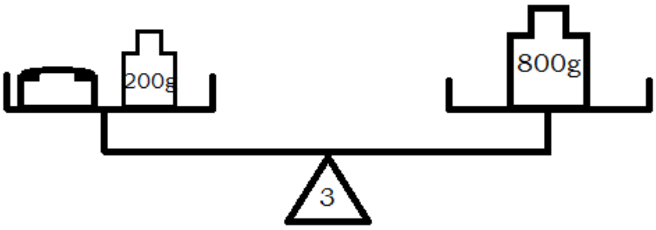


   Escrevam uma equação que traduza a situação representada na balança 1.

   1.2 A Joana decidiu comprar também, um bolo inglês. A empregada colocou o bolo no prato esquerdo, mantendo o peso de 800g no prato direito, mas a balança não ficou em equilíbrio.



Para equilibrar a balança a empregada teve que colocar um peso de 200g no prato esquerdo.



a) Quanto pesa o bolo de inglês?

b) Traduzam a situação da balança 3 por meio de uma equação.

2. Desenhem a balança 3 em equilíbrio com 6 pastéis de nata e um peso de 80g no prato esquerdo e, no prato direito um peso de 380g. Vamos considerar que todos os pastéis de nata têm o mesmo peso.

a) Quanto pesa cada pastel de nata?

b) Traduzam a situação da balança por meio de uma equação.

c) Se colocarem um peso de 250g no prato direito da balança, quantos pastéis de nata terão que colocar no prato esquerdo para que a balança fique em equilíbrio?

d) E se no prato direito para além dos 250g colocarem mais 5 pastéis de nata, quantos pastéis de nata terão que colocar no prato esquerdo para que a balança fique em equilíbrio?

3. Vamos agora considerar uma balança em equilíbrio com 6 pastéis de nata no prato esquerdo e 300g no prato direito.
   a) Se duplicarem o número de pastéis de nata no prato esquerdo, quantos gramas têm que colocar no prato direito para que a balança continue em equilíbrio?

   b) E se triplicarem o peso no prato direito da balança, quantos pastéis de nata terão que colocar no prato esquerdo?

   c) Se mudarem um pastel para o prato direito o que é que acontece?

Equações equivalentes: Duas equações dizem-se equivalentes quando têm as mesmas soluções.

Quando somamos ou subtraímos o mesmo número a ambos os membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à inicial.

Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação por um número qualquer, diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial.

4. Resolvam as seguintes equações, completando os espaços em branco:

a) 7 = 5 a – 3
 7 + ____ = 5 a – 3 + ____
 ____ = 5 a
 ____ : ____ = 5 a : ____
 ____ = a
 a = ____

b) 13 + 4 y = 21
 13 - ___ + 4 y = 21 - ___
 4 y = ___
 4 y : ___ = ___ : ___
 y=____

(Tarefa adaptada de Professores das turmas piloto do 7º ano de escolaridade (2009). *Equações: Materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3ºciclo – 7º ano*. Lisboa: DGIDC-ME)

Ficha de trabalho “Problemas 1”

1. Considera as seguintes situações:

Situação A

Se a um número tirarmos 18, obtemos 3 unidades.

Situação B

Se a um número adicionarmos o seu triplo obtemos 18 unidades.

Situação C

A soma de um número com 18 unidades é igual ao seu triplo

Situação D

Se multiplicarmos um número por 3 e tirarmos 18 unidades ao resultado, obtemos o próprio número.

Situação E

O dobro da soma de um número com 18 unidades é igual a 3.

Das equações a seguir apresentadas, escolhe uma que traduza cada uma das situações acima, colocando à frente de cada alínea a letra da situação correspondente:

a) $n + 18 = 3\ n$	b) $m – 18 = 3$
c) $3\ t - 18 = 3\ t$	d) $y + 3\ y = 18$
e) $2(s + 18) = 3$	f) $3\ b – 18 = b$
g) $b – 18 = 3\ b$	h) $2\ h + 18 = 3$

(Tarefa adaptada de Professores das turmas piloto do 7º ano de escolaridade (2009). *Equações: Materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3ºciclo – 7º ano*. Lisboa: DGIDC-ME)

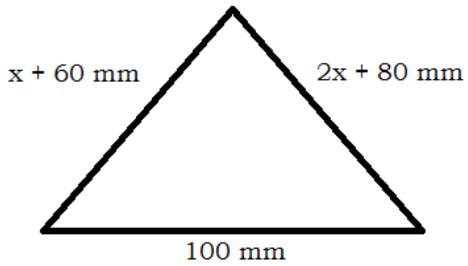
2. Resolvam cada um dos problemas que se seguem, começando por escrever uma equação que traduza cada um deles. Indiquem como pensaram.

2.1 O António tem mais 5 euros que o João. Juntos têm 30 euros. Quanto dinheiro tem cada um?

2.2 Dois amigos compraram, em conjunto, 10 livros. A Ana comprou o dobro dos livros do Pedro. Quantos livros comprou o Pedro?

2.3 Se eu somar a idade que tinha há 3 anos com a idade que a minha irmã terá daqui a 5 anos, obtenho 33. Sabendo que ela é 3 anos mais velha do que eu, que idade tenho actualmente?

2.4 Observem o triângulo abaixo. Poderá este triângulo ser equilátero?



Ficha de trabalho "Equações 3"

1. Resolvam as seguintes equações:

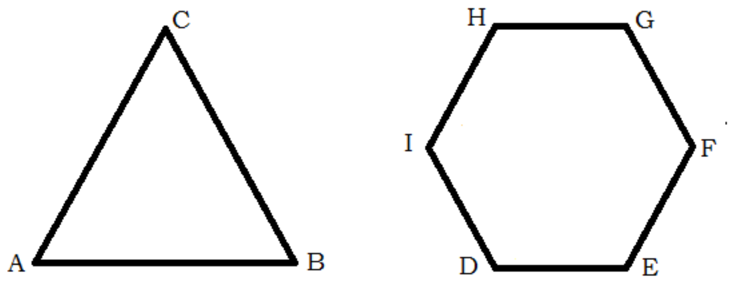
   a) $- 6 p - 4 + 12 p = - 16$

   b) $3 t - 50 = 3 t$

   c) $3 \times (n + 3) = 3 n + 9$

   d) $10 b - 30 = 10 - 10 b$

2. Na figura estão representados um triângulo equilátero e um hexágono regular.
A medida dos lados do triângulo tem mais 1cm que a dos lados do hexágono e o perímetro do hexágono é duplo do perímetro do triângulo.



a) Traduzam a situação por meio de uma equação.

b) Resolvam a equação.

c) Resolvam o problema.

(Tarefa adaptada de Professores das turmas piloto do 7º ano de escolaridade (2009). *Equações: Materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3ºciclo – 7º ano*. Lisboa: DGIDC-ME)

- Se uma equação tem uma só solução dizemos que é **possível e determinada.**

- Se uma equação tem mais que uma solução dizemos que é **possível e indeterminada.**

- Se uma equação não tem solução dizemos que é **impossível**.

Ficha de trabalho “Problemas 2”

1. Comprei três vestidos, dois pares de calças e uns sapatos. Cada vestido custou menos 10 euros que cada par de calças e, os sapatos custaram 50 euros. Considerem C o preço de um par de calças.

   a) Digam o que representa cada uma das seguintes expressões:

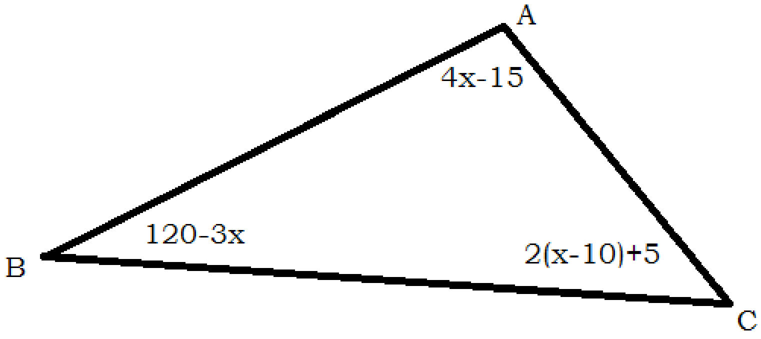
   $2C$

   $C - 10$

   $3(C - 10) + 2C + 50$

   b) Sabendo que, no total, gastei 220 euros, quanto custou cada uma das peças de vestuário?

2. Considerem o triângulo:



Determinem a amplitude de cada um dos ângulos do triângulo.

(Adaptado de Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa)).

Mini - teste Equações

1. Quais das seguintes expressões são equações? Justifiquem a resposta.

   (a) $24 + 12 = 36$

   (b) $-3f - 5 = 1$

2. Verifiquem se 6 é solução das seguintes equações:

   (a) $1 + 5w = 6w$

   (b) $8 = 3a - 10$

   (c) As equações anteriores são equivalentes? Justifiquem a resposta.

   (d) Resolvam a equação:

   $8 = 3a - 10$

Anexo II – Entrevista

___ de Abril de 2011

1. Nesta unidade didáctica aprendeste a resolver equações. Recordas-te de alguma tarefa realizada nas aulas em que tenhas sentido mais dificuldades?
2. Sentes-te à vontade a trabalhar com expressões onde aparecem letras?
3. Das tarefas que acabaste de realizar em qual sentiste mais dificuldade?
4. De qual gostaste mais, ou em qual das tarefas te sentiste mais à vontade? Porquê?

Ficha de trabalho da entrevista

1. Resolve as seguintes equações:

   e) $24 + 3x = 216$

   f) $4p - 3p = -2 + 6$

   g) $2(n - 4) + 20 = 1$

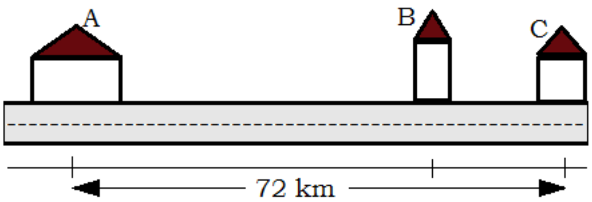
   h) $25b - 4 = b + 20$

2. Resolve cada um dos seguintes problemas, começando por escrever uma equação que traduza cada um deles.

   2.1 Pensei num número e adicionei-lhe 6. Multipliquei o resultado por 3 e por fim subtraí o número em que tinha pensado. Obtive o valor 32. Qual o número em que pensei?

   2.2 Os três lados de um triângulo têm comprimentos diferentes. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro lado e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Se o perímetro do triângulo for 31 cm, qual a medida de cada um dos lados do triângulo?

2.3 Na figura abaixo está representada uma estrada em que existem 3 casas: A, B e C. A distância entre a casa A e a casa B é o triplo da distância entre a casa B e a casa C. Qual a distância entre A e B?



Anexo III – Planos de aula

Aula 1 – 18 Março 2011 (90 minutos)

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo/Conceitos:

- Noção de Equação
- Noção de solução de uma equação
- Incógnita, Membros e Termos de uma equação

Pré-Requisitos:

- Usar expressões numéricas para representar situações
- Compreender o significado dos parêntesis e a prioridade das operações
- Conceito de perímetro
- Expressões algébricas

Objetivos específicos:

- Compreender a noção de equação
- Compreender a noção de solução de uma equação

Ficha de trabalho: ***"Equações 1"*** (de cariz exploratório, para realizar em ***díade***)

Desenvolvimento da aula

1. Entrega e apresentação da ficha de trabalho ***"Equações 1"***, para resolver a ***pares***, dando a indicação aos alunos que inicialmente só deverão realizar a questão 1 ***(5minutos)***
2. Resolução da questão 1 da ficha de trabalho ***(10 minutos)***

   Durante a realização da tarefa, circularei pela sala para esclarecer eventuais dúvidas e observar o trabalho dos alunos.
3. Discussão (em grande grupo – turma) ***(5 minutos)***
   - Reflexão em grande grupo, onde serão exploradas diferentes resoluções por parte das díades.
4. Resolução das questões 2, 3 e 4 da ficha de trabalho ***(20 minutos)***
5. Discussão (em grande grupo – turma) ***(20 minutos)***
   - Reflexão em grande grupo, onde serão exploradas diferentes resoluções por parte das díades.

6. Síntese ***(15 minutos)***
   - Formalizar a noção de equação, incógnita e solução de uma equação, e da terminologia associada à mesma, recorrendo às questões trabalhadas anteriormente na aula e, exemplificando de seguida através da questão ***2. c) 3* x __ + 6 = 30.**
   - Levar os alunos a distinguir "expressão algébrica" e "equação"
   - Voltar ao desafio, questão 1, com que foi introduzida a unidade para fazer a tradução por uma equação. Questionar os alunos: Qual será a incógnita nesta situação?
   - Relativamente à questão 4.2, igualar a expressão encontrada para o perímetro, a 38 (valor indicado como medida do perímetro na questão 4.1) e depois fazendo a substituição da letra L por 7, fazer a confirmação de que 7 (medida encontrada para a largura na questão 4.1) é a solução da equação. De seguida perguntar: E se a medida do perímetro fosse 42 cm? Como escreveríamos a equação? E para esse caso, qual será a medida da largura?
7. Resolução das questões 5 e 6, e discussão de resultados. ***(15 minutos)***
   Caso não haja tempo para a realização da questão 6, os alunos deverão resolvê-la em casa e a discussão será feita na aula seguinte.

Aula 2 – 22 de Março 2011 (90 minutos)

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo/Conceitos:

- Princípios de equivalência de equações
- Equações equivalentes

Pré-Requisitos:

- Interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem natural e procedimentos algébricos

Objetivos específicos:

- Usar equações para traduzir situações problemáticas
- Compreender os princípios de equivalência de equações

- Identificar equações equivalentes

- Resolver equações utilizando as regras baseadas nos princípios de equivalência

Ficha de trabalho: ***“Equações 2”*** (de cariz exploratório, para realizar em ***díade***)

Desenvolvimento da aula

1. Iniciar a aula recordando a noção de equação, com base na questão 2 da ficha de trabalho ***“Equações 1” (10 minutos)***

2. Correção das questões 5 e 6 da ficha de trabalho ***“Equações 1”***, que os alunos levaram para fazer em casa ***(5 minutos)***

- Cada uma das questões será corrigida oralmente por um aluno
- Levar os alunos a compreender que para saber se um valor é solução de uma equação, substituímos na equação a letra, que representa a incógnita, por esse valor de forma a transformar a equação numa igualdade verdadeira

3. Entrega e apresentação da ficha de trabalho ***“Equações 2”***. Resolução das questões 1, 2 e 3, a ***pares (30 minutos)***

- Trabalho autónomo por parte dos alunos em que circularei pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir

4. Discussão (em grande grupo – turma) ***(30 minutos)***

- Reflexão em grande grupo, onde serão exploradas as diferentes resoluções por parte dos grupos
- Na questão 2, os alunos devem concluir que, quando adiciona o mesmo peso a ambos os pratos da balança (quer seja em número de pasteis, quer seja com um peso), esta se mantém em equilíbrio
- Na questão 3, os alunos devem concluir que, se duplicarem (ou triplicarem) o peso num dos pratos da balança, têm que duplicar (ou triplicar) também o peso no outro prato, para que a balança se mantenha em equilíbrio
- Perguntar como se deveria proceder para que a balança na questão 3.a) se mantivesse em equilíbrio, se em vez de se duplicar o número de pastéis se reduzisse para metade?

5. Síntese ***(5 minutos)***

- Utilizarei as equações:

  6 + a = 15

2 x a = 18

como exemplo de duas equações equivalentes

- Serão enunciados os princípios de equivalência de equações, recorrendo à tarefa das balanças

6. Resolução, e discussão (grande grupo – turma) da questão 4 ***(10 minutos)***

- Esta será a primeira vez que os alunos resolvem uma equação formalmente, como tal, deve ser explicado aos alunos que para encontrar a solução de uma equação, deve isolar-se o termo com incógnita num dos membros. Para facilitar a utilização dos princípios de equivalência na resolução da equação, utilizarei o exemplo da balança

7. Caso a aula se desenvolva mais rapidamente que o previsto, será indicada a seguinte questão extra:

Questão extra: Resolvam as seguintes equações:

a) 12 = 3 p + 3

b) 2 x 4 a = 24

c) 2 + 4 a = 24

Aula 3 – 25 de Março 2011 (90 minutos)

Unidade Temática: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo/Conceitos:

- Princípios de equivalência
- Noção de equações equivalentes

Pré-Requisitos:

- Interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem natural e procedimentos algébricos

Objetivos específicos:

- Usar equações para traduzir situações problemáticas
- Compreender os princípios de equivalência
- Resolver equações utilizando as regras baseadas nos princípios de equivalência

Ficha de trabalho: ***"Equações 2"***

Desenvolvimento da aula
1. A aula inicia-se dando continuação à discussão da ficha de trabalho ***“Equações 2”*** de acordo com o que estava planeado para a aula anterior ***(25 minutos)*** • Discussão da questão 3 onde será solicitada a participação dos alunos 2. Síntese da ficha de trabalho ***“Equações 2”***, que seguirá de acordo com o que estava previsto na aula anterior, sendo enunciados os princípios de equivalência, utilizando o exemplo das balanças, e dada a noção de equações equivalentes, dando de seguida como exemplo as equações: ***(10 minutos)*** **6 + a = 15** **2 x a = 18** 3. Resolução da questão 4 da ficha de trabalho ***“Equações 2” (15 minutos)*** • Escrever as alíneas a) e b) da questão 4 no quadro, e pedir a dois alunos para irem resolver 4. Resolução da questão indicada como extra para a aula anterior e, que considerei importante realizar nesta aula, como exercício de consolidação, pondo em prática as regras baseadas nos princípios de equivalência. ***(20 minutos)*** **Questão 5:** Resolvam as seguintes equações: a) 12 = 3 p + 3 b) 2 x 4 a = 24 c) 2 + 4 a = 24 • Enquanto os alunos resolvem as alíneas, circularei pela sala para esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir e, para observar o trabalho dos alunos. Nesta questão espero que alguns alunos já consigam fazer uso das regras baseadas nos princípios de equivalência, para resolver as equações 5. Correcção da questão extra ***(20 minutos)*** • Pedir a três alunos para irem ao quadro resolver cada uma das equações.

Aula 4 – 29 de Março 2011 (90 minutos)

Unidade Temática: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo da aula: Equações e resolução de problemas

Pré-Requisitos:

- Usar equações como meio de representar situações problemáticas
- Classificar triângulos

Objetivos específicos:

- Interpretar um enunciado de um problema e traduzi-lo por meio de uma equação
- Resolver equações usando as regras de resolução ou, os princípios de equivalência
- Interpretar e criticar as soluções de uma equação no contexto de um problema

Ficha de trabalho: ***“Problemas 1”***

Desenvolvimento da aula

1. Entrega e apresentação da ficha de trabalho ***“Problemas 1”***, para resolver a ***pares*** em que dou a indicação de que só deverão realizar a questão 1 ***(5 minutos)***
2. Resolução da questão 1 da ficha de trabalho ***(15 minutos)***
   - Momento de trabalho autónomo por parte dos alunos em que esclarecerei algumas dúvidas que possam surgir por parte das díades
3. Discussão (grande grupo – turma) ***(15 minutos)***
   - Pedirei a diferentes alunos que respondam a cada uma das alíneas oralmente, explicando como pensaram, de seguida pergunto aos restantes alunos se alguém discorda e, se sim, qual foi a sua resposta e como chegaram a ela
   - Na resolução desta tarefa poderão surgir dificuldades nas situações C e D, pelo facto de a incógnita aparecer em ambos os membros
   - Na situação E, possivelmente os alunos ficarão divididos entre as alíneas e) e h), devido à questão dos parêntesis. Deve por isso ser chamada a atenção, no momento da discussão, para a importância dos parêntesis em situações deste tipo
4. Resolução das questões 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 ***(35 minutos)***

- Durante o momento de resolução das tarefas, circularei pela sala tentando perceber as dificuldades dos alunos e, observando as diferentes estratégias, para seleccionar as que possam gerar uma discussão mais "rica"

5. Discussão (grande grupo – turma) ***(20 minutos)***
   - Para cada um dos problemas será chamado um aluno ao quadro para apresentar a resolução do seu par, e explicar a estratégia utilizada
   - Serão exploradas diferentes resoluções, caso se verifique que possam levantar questões, ou dúvidas pertinentes
   - Com as questões 2.1 e 2.2, pretendo que os alunos compreendam que na questão 2.1 o resultado poderá não ser um número inteiro, uma vez estamos a falar de dinheiro, já na questão 2.2 o mesmo não se verifica, uma vez que ninguém poderá comprar meio livro
   - No final da discussão da questão 2.4, pergunto à turma:

     - Poderá o triângulo ser isósceles? (surgem duas soluções possíveis, quando $2x + 80 = 100$ e quando $x + 60 = 100$)

Aula 5 – 1 de Abril de 2011 (90 minutos)

Unidade Temática: Álgebra

Tópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo da aula:

- Classificação de equações
- Equações e resolução de problemas

Pré-Requisitos:

- Usar equações como meio de representar situações problemáticas
- Conceito de perímetro

Objetivos específicos:

- Classificar equações
- Resolver equações
- Interpretar o enunciado de um problema e traduzi-lo por meio de uma equação
- Criticar a solução de uma equação no contexto de um problema

Ficha de trabalho: ***"Equações 3"***

Desenvolvimento da aula
1. No início da aula divido o quadro em três partes e escrevo em cada uma delas as seguintes equações: ***(15 minutos)*** **2 t + 4 = 2** **2 t + 4 = 2 x (t + 2)** **2 t + 4 = 2 t** • Começo por pedir aos alunos que verifiquem se **1** e **– 1** são solução da primeira equação • De seguida, resolvo cada uma das equações, pedindo aleatoriamente a alguns alunos que me vão indicando os passos a efetuar • Após terem sido resolvidas as equações discutem-se os resultados obtidos. Questiono os alunos: - Em relação à primeira equação. Existirá mais algum valor que possa ser solução desta equação? Quanto à segunda, podem dar-me exemplos de valores que possam ser solução dessa equação? E a terceira? Existirá alguma solução para a terceira equação? 2. Síntese ***(5 minutos)*** - Referir que no caso da primeira equação, temos uma equação ***possível e determinada*** (admite uma única solução), a segunda é uma equação ***possível e indeterminada*** (admite várias soluções) e, a terceira é uma ***equação impossível*** (não admite soluções) 3. Entrega da ficha de trabalho ***"Equações 3"***, e resolução da questão 1, a ***pares (15 minutos)*** 4. Discussão da questão 1 (grande grupo – turma) ***(20 minutos)*** • Divido o quadro em quatro e peço a dois alunos para irem ao quadro resolver duas das alíneas, as outras duas alíneas serão rapidamente corrigidas por mim com as indicações dadas pelos alunos 5. Resolução da questão 2 ***(15 minutos)*** • Neste momento circularei pela sala observando o trabalho dos alunos, para verificar as diferentes estratégias e para esclarecer alguma dúvida que possa surgir 6. Discussão (grande grupo – turma) ***(20 minutos)*** • Pedir a um aluno para ir ao quadro apresentar a sua resolução,

explicando à turma a sua estratégia

- De seguida perguntar aos alunos se algum dos pares resolveu de forma diferente para que possam ser exploradas outras resoluções
- Os alunos devem concluir que uma vez que se trata de uma equação impossível, o problema não terá solução
- No final da discussão coloco as seguintes questões extra aos alunos:

a) O que acontece caso o perímetro do triângulo seja igual ao perímetro do hexágono? (neste caso ficamos com uma equação possível e determinada)
Com esta questão pretendo que os alunos concluam que se os perímetros das duas figuras forem iguais, o problema terá solução: a medida dos lados do triângulo será 2cm e a medida dos lados do hexágono será 1cm.

b) O que acontece se a medida dos lados do triângulo tiver menos 1 cm que a dos lados do hexágono?
Com esta questão pretendo que os alunos concluam que a equação tem solução, $x = -1$, mas o problema não tem solução, uma vez que não existem medidas negativas.

Aula 6 – 06 de Abril 2011 (45 minutos)

Unidade Temática: Álgebra

Tópico: Equações do 1º grau a uma incógnita

Conteúdo da aula: Equações e resolução de problemas

Pré-Requisitos:

- Usar equações como meio de interpretar situações
- Classificar triângulos
- Saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º

Objetivos específicos:

- Interpretar um enunciado de um problema
- Traduzir um problema por meio de uma equação
- Resolver equações

Ficha de trabalho: ***"Problemas 1"*** e ***"Problemas 2"***

Desenvolvimento da aula
1. Discussão da tarefa 2.4 da ficha de trabalho ***“Problemas 1” (10 minutos)*** 2. Entrega e apresentação da ficha de trabalho ***“Problemas 2”,*** para resolver a pares ***(5 minutos)*** 3. Resolução da ficha de trabalho ***(15 minutos)*** 4. Discussão (grande grupo – turma) ***(15 minutos)*** • Se surgirem dificuldades na expressão C – 10 perguntar: - O que significa o C? De seguida perguntar: Se C é o preço de um par de calças, então temos, o preço de um par de calças menos 10 euros, certo? Nesse caso, se voltarem a ler o enunciado o que acham que poderá ser representado por essa expressão? • Se na resolução da equação $3\ (C - 10) + 2C + 50 = 220$ surgirem dificuldades no cálculo $3\ (C - 10)$ perguntar: - Qual é a propriedade que se utiliza para fazer esta multiplicação? Algum de vocês consegue explicar como é que se aplica essa propriedade? • Na questão 2, caso surjam dificuldades em traduzir a situação por uma equação, perguntar: - O que é que vocês sabem acerca dos ângulos internos de um triângulo? Quanto dá a soma das suas amplitudes? Então como é que vocês faziam se em vez de expressões (como nesta situação) tivéssemos a amplitude de dois ângulos e quiséssemos saber a amplitude do terceiro ângulo?

Anexo IV – Autorizações

Ex^{mo}. Sr.

Presidente do Conselho Executivo

da Escola Secundária Padre Alberto Neto

No âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV do Mestrado em Ensino de Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (e sob a orientação do professor doutor Henrique Guimarães), estamos a realizar um trabalho de investigação. Nesse sentido, entre 16 de Março e 5 de Abril as aulas de Matemática das turmas do 7º C e 7º D serão por nós leccionadas, com co-docência do professor Paulo Alvega.

Solicitamos autorização para obter gravações áudio de entrevistas a alguns alunos da turma, fora da sala de aula. É garantida a privacidade dos alunos, pois em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação do nosso estudo serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes.

Aos Encarregados de Educação será pedida autorização e dada toda a informação sobre estes procedimentos.

Com os melhores cumprimentos e disponíveis para prestar qualquer esclarecimento

Pedem deferimento

Queluz, 14 de Março de 2011

Ex^{mo}. Sr. Encarregado de Educação

No âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV do Mestrado em Ensino de Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (e sob a orientação do professor doutor Henrique Guimarães), estou a realizar um trabalho de investigação.

Para a realização deste trabalho gostaria de obter gravações áudio de entrevistas a alguns alunos da turma, fora da sala de aula. As respostas não serão consideradas na avaliação. É garantida a privacidade do seu educando, pois em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação do estudo serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes. A Direcção da Escola autorizou a realização deste trabalho e está informada dos procedimentos necessários relativos às entrevistas.

A realização destas entrevistas está prevista para a última semana do 2º Período, para não prejudicar o trabalho dos alunos, em horário acordado com todos.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder à entrevista, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço a sua atenção

____

(Eulália Barbeiro)

____

(Paulo Alvega)

...... de Março de 2011

Autorização

Autorizo/ Não autorizo (riscar o que não interessa) que o meu educando participe nas entrevistas e consequentes gravações áudio necessárias para a realização do trabalho acima referido.

O Encarregado de Educação do aluno

…………………………………………………………………...……. N °….., 7°C

………………………………………………………………………… (Assinatura do Encarregado de Educação)