UNIVERSIDADE DE LISBOA

O RACIOCÍNIO FUNCIONAL DE ALUNOS DE 8.º ANO NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS

ANÁLIA FERNANDA ALVES RODRIGUES

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA
ORIENTADO PELA PROF.ª DOUTORA LEONOR SANTOS
COORIENTADO PELA PROF.ª DOUTORA SUZANA NÁPOLES

2016

Agradecimentos

À Prof.ª Doutora Leonor Santos pela orientação, pelas suas preciosas sugestões e comentários e, pela sua disponibilidade em todas as fases deste trabalho.

À Prof.ª Doutora Suzana Nápoles pela orientação científica, pela disponibilidade e, por toda a ajuda na concretização dos vários conceitos.

À Prof.ª Doutora Cláudia Torres, pela oportunidade de acompanhar o seu trabalho, pelas oportunidades de aprendizagem e pelo apoio dedicado à minha formação, pela sua disponibilidade e amizade.

À Direção da escola cooperante e a toda a sua comunidade por tão bem me terem recebido e aos alunos da turma participante neste estudo.

Aos grandes professores de Matemática com os quais tive a oportunidade de conviver desde minha formação básica até a conclusão deste Mestrado pelos saberes e competências que em mim desenvolveram.

A todos os meus colegas de Mestrado pela amizade, partilha de experiências e conhecimentos, em especial à minha colega Vanda, pela sua amizade, ajuda e apoio em todas as etapas deste trabalho.

Um agradecimento muito especial para a minha amiga Carla, que me incentivou a fazer esta nova reciclagem de conhecimentos, e por todo apoio no decurso este processo.

À minha família, pela paciência e apoio prestado, incentivando-me e oferecendo-me todo o suporte necessário para que pudesse dedicar-me a este trabalho.

Resumo

Este trabalho teve por objetivo compreender como o desenvolvimento do raciocínio funcional conduz à aprendizagem do conceito de função numa turma do 8.º ano numa escola do distrito de Lisboa. Para dar resposta a esta problemática formulei três questões orientadoras que se prendem com a interpretação que os alunos fazem da relação entre variável independente e variável dependente, com o significado que atribuem ao declive de uma reta não vertical e dificuldades sentidas e, por fim, com as representações privilegiadas na resolução de problemas que envolvem funções e o porquê da sua escolha.

A metodologia do trabalho seguiu um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa. Na recolha de dados foram utilizados: observação de aulas, recolha das produções dos alunos resultantes das tarefas propostas, e entrevistas. Toda a turma esteve envolvida nas tarefas propostas, contudo, para uma análise mais aprofundada selecionei três pares de alunos aos quais realizei duas entrevistas, em duas fases distintas da lecionação.

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos realizaram aprendizagens ao nível da compreensão da relação entre as variáveis, identificando essa relação nos vários tipos de representação, e identificando os diferentes tipos de funções. A maioria dos alunos aplicou a fórmula de cálculo do declive e determinou corretamente o seu valor. Atribui significado ao declive, relacionando o seu sinal com a inclinação da reta, revelando aprendizagens significativas deste conceito. As principais dificuldades sentidas ao nível da aprendizagem do conceito de declive prendem-se com a troca das variáveis e o seu cálculo numérico, comprometendo a atribuição de significado. A transição entre diferentes representações com compreensão foi conseguida, mas a representação algébrica levantou mais dificuldades. A turma privilegiou o recurso à representação gráfica na resolução de problemas, referindo como justificação a facilidade na visualização dos dados do problema, conseguindo contextualizá-lo. A evolução e confiança na conversão entre as diferentes representações permitiram à turma uma maior compreensão do conceito de função, contribuindo para um progressivo desenvolvimento do seu raciocínio funcional.

Palavras-chave: Raciocínio funcional, funções, declive, dificuldades, representações.

Abstract

This study aimed to understand how the development of functional reasoning leads to the learning of the concept of function in a class of 8th grade in a school district of Lisbon. To address this issue I've formulated three guiding questions that relate to the interpretation that the students make of the relationship between independent variable and dependent variable, the meaning they give to the slope of a non-vertical line and experienced difficulties and finally with the privileged representations in solving problems involving functions and the why of it's choice.

The work methodology followed an interpretative paradigm and a qualitative approach. In data collection were used: classroom observation, collection of productions of the students resulting from proposed tasks, and interviews. The whole class was involved in the proposed tasks, however, for further analysis I've selected three pairs of students to whom I made two interviews in two distinct phases of teaching.

The results show that students made learning at the level of understanding of the relationship between the variables, identifying this relationship in various types of representation, and identifying the different types of functions. Most students applied the slope calculation formula and correctly determined its value. Assigning meaning to the slope relating your signal with the slope, revealing significant learning on this concept. The main difficulties learning the concept of slope are related to the exchange of variables and their numerical calculation, compromising the attribution of meaning. The transition between different representations with understanding was achieved, but the algebraic representation raised more difficulties. The group favored the use of graphic representation in problem solving, referring as justification to ease the problem of data visualization, managing to contextualize it. The evolution and trust in the conversion between different representations allowed the group a better understanding of the concept of function, contributing to the progressive development of functional reasoning.

Keywords: functional reasoning, functions, slope, difficulties, representations.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1
INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faço uma apresentação global do trabalho, onde apresento os objetivos do mesmo, dando especial ênfase às razões que o orientaram e suportaram, tanto ao nível pessoal como curricular.

Objetivos e questões

O trabalho de cariz investigativo que realizei sobre a prática letiva teve como objetivo compreender como o desenvolvimento do raciocínio funcional conduziu à aprendizagem do conceito de função numa turma do 8.º de uma escola no distrito de Lisboa. Para alcançar este objetivo utilizei um conjunto de tarefas, nomeadamente, tarefas de exploração e problemas entre outras. O estudo decorre durante a lecionação da unidade didática "Gráficos de Funções Afins", no ano letivo 2015/2016, recorrendo principalmente ao método de ensino exploratório. Este estudo decorreu durante o 2.º período, ao longo de duas semanas no mês de março.

Com o intuito de dar resposta a esta problemática formulei as seguintes questões orientadoras:

1) Que interpretação fazem os alunos da relação entre variável independente e variável dependente no estudo das funções?

2) Que significado os alunos atribuem ao conceito de declive de uma reta não vertical? Quais as principais dificuldades evidenciadas na aprendizagem deste conceito?

3) Quais as representações mais usadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo funções? Quais as razões apontadas pelos alunos na escolha de uma representação em detrimento de outra?

Ao longo deste trabalho foi interessante perceber quais as dificuldades e estratégias usadas pelos alunos. Analisei o seu raciocínio e as aprendizagens desenvolvidas no tema das funções afins, com o intuito de melhorar metodologias de ensino e contribuir para o sucesso das aprendizagens. Esta minha preocupação foi ao encontro das de muitos professores e investigadores de Matemática, como por exemplo quando se questionam se: "Fará sentido perguntar que tipos de representações matemáticas são mais úteis para responder a determinada questão ou resolver determinado problema?" (Carreira, 2015, p. 33).

Motivações Pessoais

A Matemática nem sempre foi a minha disciplina preferida, mas lembro-me de alguns dos meus professores desta disciplina, foram eles os impulsionadores do meu despertar pelo gosto da Matemática, principalmente os meus professores do 8.º e do 12.º anos. A sua sabedoria e forma de ensino motivaram e desafiaram a minha curiosidade pela Matemática, instigando o gosto e o prazer pelo seu estudo.

Na minha experiência letiva, deparo-me com frequência com alunos que não gostam do domínio da Álgebra, nomeadamente do tema das funções. Os alunos sentem, por exemplo, dificuldades na interpretação dos problemas, na passagem de linguagem natural para a linguagem algébrica, na interpretação das suas representações, entre outras.

As funções são um dos meus temas preferidos, logo a escolha deste tema não foi difícil, estando de acordo com a planificação proposta pela Professora Cooperante, assim como o tempo disponível para a realização deste trabalho. O tema das funções, permite estabelecer ligações entre a Matemática e a realidade, tratando de um vasto leque de situações práticas. Revela facilmente a utilidade da Matemática e assim, contribui para o despertar do gosto e de uma atitude mais positiva relativamente à Matemática nos nossos alunos (NCTM, 2007). Atualmente, nos meios de comunicação, existe uma grande quantidade de informação sobre diversos fenómenos. Essa informação é geralmente apresentada por meio de tabelas, gráficos e, expressões algébricas (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999), sendo de extrema importância que os alunos adquiram formação que lhes permita fazer uma leitura adequada e uma interpretação crítica de toda essa informação, contribuindo para que se tornem cidadãos matematicamente literatos.

O uso de novas ferramentas promotoras de aprendizagens, adquiridas ao longo deste Mestrado em Ensino, como são exemplo, o ensino exploratório, uso de tarefas desafiadoras e o recurso a novas tecnologias, permitiram-me fazer uma nova abordagem para este domínio da Álgebra. Salientam, Ponte, Branco e Matos (2009) que se deve trabalhar a Álgebra através da criação de ambientes propícios, que permitam captar a atenção dos alunos e que promovam efetivamente as suas aprendizagens.

A Álgebra é um tema fundamental no ensino da Matemática, fazendo a ligação desde os primeiros anos de escolaridade até ao secundário. Cabe a nós professores ajudar os alunos a construir bases sólidas para a preparação de um trabalho algébrico mais aprofundado (NCTM, 2007). Destaco a importância de procuramos estar sempre atualizados, aprendendo novos métodos de ensino, promotores de tarefas desafiadoras que maximizem o potencial de aprendizagem dos alunos, ajudando-os a ultrapassar as suas dificuldades e a criar bases sólidas para o seu desenvolvimento como futuros cidadãos conscientes e autónomos.

Estrutura do relatório

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. Na introdução apresento a problemática deste trabalho, assim como as questões que o orientam. No segundo capítulo, apresento o Enquadramento Curricular e Didático deste trabalho, que serve de suporte teórico a este estudo. É baseado em leituras de referência e reflexões, focando-se no raciocínio funcional, no conceito de função e na importância das representações. No terceiro capítulo Unidade de Ensino, apresento a proposta pedagógica, onde faço uma breve referência ao contexto escolar, a ancoragem da unidade didática no programa em vigor, a planificação, as fichas de trabalho, uma breve síntese das aulas e aspetos da avaliação. No quarto capítulo, Métodos e Procedimentos de recolha de Dados, explícito as metodologias utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho, os participantes e os métodos de recolha de dados utilizados para a análise. No quinto capítulo, Análise de Dados, apresento a análise realizada, de acordo com os objetivos do estudo. Por fim, no sexto capítulo apresento as principais conclusões, assim como uma breve reflexão sobre todo o trabalho realizado.

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo, baseada nas orientações curriculares para o ensino da Álgebra e na literatura de referência, apresento as principais orientações que norteiam o ensino da unidade das funções afins, focando-me fundamentalmente no estudo do raciocínio funcional. Começo com uma breve introdução ao raciocínio matemático, em seguida apresento a definição de raciocínio funcional, salientando algumas dificuldades no desenvolvimento deste tipo de raciocínio, na ótica de alguns investigadores. De seguida, apresento o conceito de função e as principais dificuldades sentidas pelos alunos na compreensão deste conceito. Termino referindo a importância do papel das representações matemáticas, para o desenvolvimento do raciocínio funcional, e consequente compreensão do conceito de função. Evidencio as dificuldades sentidas pelos alunos no trabalho com múltiplas representações de acordo com estudos empíricos desenvolvidos, e a importância de conhecer as principais dificuldades, como forma de definir estratégias que promovam a aprendizagem da Matemática.

Raciocínio funcional

O principal objetivo do ensino da Matemática é promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos "o que justifica o importante papel da matemática em todos os sistemas educativos" (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012, p. 2). Assim, o raciocínio tem um papel muito importante na aprendizagem dos alunos já que é a partir desta capacidade que os alunos adquirem conhecimento, através de um processo evolutivo e do uso dos conhecimentos prévios para alcançarem o novo conhecimento (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012).

> Ao raciocínio matemático estão associadas diversas formas de pensamento importantes para todos aqueles que fazem Matemática, tais como: prever resultados, essenciais para a formulação de conjeturas; questionar soluções, mesmo as corretas; procurar padrões; recorrer a representações alternativas; analisar e sintetizar. (Domingos, Saraiva, & Ferreira, 2013, p. 8)

A resolução de problemas ou a demonstração de uma conjetura torna-se impossível sem a mobilização do raciocínio matemático, e ambos são formas através das quais os alunos desenvolvem o seu próprio raciocínio matemático (Barbosa, 2013). Esta autora salienta que a comunicação, as conexões e as representações utilizadas pelos alunos servem de suporte ao raciocínio desenvolvido, levando a uma tomada de decisões no processo de aprendizagem.

Perspetivando o raciocínio matemático como uma certa "atividade intelectual", Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) afirmam a necessidade da existência de conteúdos para este desenvolvimento, surgindo uma multiplicidade de tipos de raciocínio associados respetivamente a cada domínio; Aritmética, Álgebra, Geometria entre outros.

O domínio da Álgebra remete-nos para o pensamento algébrico, que inclui a capacidade de manipular símbolos, mas vai muito para além desta. O pensamento algébrico, segundo o NCTM (2007), diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação. Assim, são identificadas as seguintes normas para a aprendizagem da Álgebra:

- Compreender padrões, relações e funções, (estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos (simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (modelação),
- Analisar a variação em diversos contextos (estudo da variação) (NCTM, 2007).

O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com cálculo algébrico e com as funções. Inclui, igualmente, a aptidão de trabalhar com outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é a capacidade de interpretar, e de o usar de forma criativa, tanto na resolução de diferentes problemas, como na modelação de situações matemáticas (Arcavi A. , 1994).

Kaput (2008) associa ao pensamento algébrico dois aspetos essenciais: formular e expressar generalizações gradualmente das formais para as convencionais e raciocinar com representações simbólicas através da sua manipulação. Estes dois aspetos integram três abordagens longitudinais da álgebra escolar: (1) a Álgebra como o estudo das estruturas e sistemas generalizados dos cálculos e das relações numéricas (aritmética generalizada); (2) a Álgebra como o estudo das funções, relações e variações (relações funcionais) e; (3) a sua aplicação em situações de modelação para exprimir e formalizar generalizações. Também

Canavarro (2007) partilha esta divisão do pensamento algébrico em duas das suas principais vertentes, com particular interesse na aprendizagem, a aritmética generalizada e o raciocínio funcional. No entanto, Kaput (2008) aponta como uma das principais dificuldades evidenciadas pelos alunos neste tema, a transição abrupta da Aritmética para a Álgebra, sendo esta uma das razões para o insucesso neste tema.

Se é certo que um dos principais eixos do pensamento algébrico referido por Kaput (2008) é o raciocínio funcional, sendo um dos conteúdos principais na investigação em Álgebra, poder-se-á perguntar: mas o que é o raciocínio funcional? O raciocínio funcional é descrito por Blanton (2008) como um processo de raciocínio que é utilizado na construção e generalização de padrões e relações. Para este processo utilizam-se recursos, como ferramentas linguísticas e representacionais, explorando as relações generalizadas ou as funções que o constituem. Esta mesma autora refere que o centro do raciocínio funcional é a relação entre duas grandezas particulares, usando uma regra (lei de formação) de correspondência. Também Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem o trabalho com padrões generalizados como forma de desenvolver o raciocínio funcional nos alunos, partindo de dados em situações familiares. Desta forma, os alunos ao explorarem relações que envolvem correspondências e variações desenvolvem este tipo de raciocínio. Encontrar esta relação funcional entre dois conjuntos de números permite passar da Aritmética para a Álgebra. Igualmente Smith (2008) salienta que o uso do raciocínio funcional inclui a utilização do pensamento relacional, centrado em especial, na relação entre duas quantidades variáveis, saindo de relações particulares para a sua generalização. Este autor considera três formas distintas de analisar estas relações:

(1) o pensamento recursivo, na descoberta da variação de valores;

(2) o pensamento covariacional, analisando a forma como duas quantidades variam simultaneamente e considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função e;

(3) a relação de correspondência, compreendendo a relação existente entre cada valor da variável independente e da variável dependente.

A compreensão das variáveis numa relação funcional, segundo Ursini e Trigueros (2001), envolve um conjunto de capacidades que devem ser trabalhadas com os alunos:

1. reconhecer a correspondência entre quantidades, independentemente da representação utilizada;
2. determinar qual o valor da variável independente dado o valor da variável dependente e vice-versa;
3. reconhecer a variação conjunta das variáveis da relação, independentemente da representação usada;
4. determinar o intervalo de variação de uma das variáveis quando é conhecido o da outra;
5. expressar a relação funcional apresentada, com base nos dados do problema proposto, nas diferentes formas de representação.

Uma vez definido o raciocínio funcional, é relevante analisar a sua importância e a forma como pode contribuir para melhorar as aprendizagens dos alunos. No estudo das funções é essencial compreender de que modo as duas variáveis em jogo se relacionam, com o objetivo de conseguir explicitar uma relação funcional entre elas (Matos, 2007; Matos & Ponte, 2008). Vários autores indicam como forma de desenvolver e analisar o raciocínio funcional, a utilização de tarefas que possibilitem o uso de múltiplas representações de uma função. A análise da forma como cada representação é feita e a transição entre as diferentes representações permitem inferir sobre o raciocínio que está a ser desenvolvido pelos alunos (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Kaput, 1999; NCTM, 2007; Ponte, Branco, & Matos 2009).

Kieran (1992) distingue três modos de representar relações funcionais:

(1) geometricamente, usando esquemas, diagramas, gráficos, entre outros;

(2) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados e;

(3) algebricamente, com o uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências.

O uso de tarefas que permitam recorrer a vários tipos de representações, interpretando e analisando as relações existentes entre as variáveis permitem o desenvolvimento do raciocínio funcional nos alunos (Kieran, 1992)

A compreensão experienciada do conceito de função pelas crianças começa a desenvolver-se antes da introdução formal das funções e o professor pode ajudar os alunos a desenvolver o seu raciocínio funcional (NCTM, 2007), facilitando a construção e compreensão do conceito de função desde os primeiros ciclos. Esta opinião é partilhada pelos autores Blanton e Kaput (2005), que salientam a importância do raciocínio funcional começar a ser trabalhado desde os primeiros anos, justificada pela oportunidade que cria para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, tão essencial para os anos seguintes. A melhor forma de evidenciar a importância deste raciocínio é a afirmação que o raciocínio funcional é um caminho para o pensamento algébrico. Esta perspetiva é partilhada por vários investigadores, sendo até identificada como um dos principais eixos para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Barbosa, 2013; Blanton & Kaput, 2008; McEldoon & Rittle-Johnson, 2010, Kaput, 2008).

O conceito de função e dificuldades na sua compreensão

Conceito de função

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes da Matemática. É considerado uma poderosa ferramenta para representar e interpretar diversos fenómenos naturais, assim como fenómenos que decorrem da ação do homem, por exemplo nas áreas da engenharia e da tecnologia, economia, administração, etc.

Atualmente, a Matemática ensinada nas escolas é o resultado da evolução de conceitos estudados e desenvolvidos ao longo de vários séculos. A definição de função que tem vindo a ser adotada é idêntica, na sua essência, à apresentada por Dirichelet em 1837, onde ele separou o conceito de função da sua representação analítica, e formulo-o em termos de correspondência entre conjuntos numéricos. (Ponte, 1990). Apresento em seguida a definição de função dada na Brochura de Álgebra:

> Uma função f, definida num conjunto D e com valores num conjunto E, pode ser vista como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D (chamado objeto) um único elemento de E, que se designa por y ou $f(x)$ (chamado imagem). O conjunto D é designado por domínio de f e o conjunto C, de todas as imagens dos elementos do domínio, é designado por contradomínio. Deste modo, o contradomínio C é um subconjunto de E, o conjunto onde a função toma valores. As variáveis x e $f(x)$ são, respetivamente, as variáveis independente e dependente (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 117)

Kaput (1999) refere o estudo das funções e relações como uma das vertentes onde o pensamento algébrico se manifesta. A construção, interpretação e manipulação de representações de uma relação funcional entre duas variáveis, sejam de carácter simbólico, tabelar ou geométrico, proporcionam o contacto com vários aspetos de natureza algébrica. Assim, o conceito de função apresenta-se como um conceito organizador e central no currículo da Matemática. Para este autor, o estudo das relações funcionais, como sejam a identificação de padrões e regularidades, a utilização de múltiplas formas de representação, e os processos de generalização e particularização, são aspetos fundamentais nos quais se pode alicerçar a compreensão do conceito de função. A noção de função tem origem no senso de crescimento e variação, onde uma quantidade varia em conjunto com a outra (Kaput, 1999). Esta opinião é igualmente partilhada por Ponte (1990), referindo que o conceito de função é um dos mais importantes de toda a Matemática, sendo um instrumento de excelência para estudar problemas de variação e o modo como essa variação ocorre:

> Uma dada grandeza pode variar no tempo, variar no espaço, variar segundo outras grandezas, e mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos. (p. 5)

De igual forma, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e as normas NCTM (2008) salientam que os alunos devem ser capazes de associar o conceito de função às ideias de variação e de mudança: “a compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias” (NCTM, 2008, p. 42). É fundamental que os alunos trabalhem com casos de variação constante, como o caso de todas as funções afins, bem como de situações de variação não constante.

Mas para analisar o raciocínio matemático na aprendizagem do conceito de função, é necessário compreender o processo de desenvolvimento deste conceito. Uma função, segundo a perspetiva de Sfard (1991), pode ser entendida de duas formas diferentes:

(1) conceção operacional, onde as noções são concebidas como um produto de certos processos, ou são identificadas com os próprios processos (a função é um processo computacional ou um método para obter um valor a partir de outro valor dado);

(2) conceção estrutural, as noções são tratadas como objetos matemáticos (a função é um conjunto de pares ordenados e envolve trabalhar com diferentes representações, e correspondência simbólica de certos parâmetros).

Estas duas formas de entender funções completam-se, construindo uma nova forma de dar significado a um novo conceito. Para esta autora, o conceito de função é adquirido em primeiro lugar de forma operacional. Só posteriormente é feita a transição para a forma estrutural (encarando uma função como um objeto matemático) através da interiorização dos processos. Este desenvolvimento realiza-se em três etapas contínuas:

(i) interiorização (quando aprende a noção de variável e adquire a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente, usando manipulações algébricas);

(ii) condensação (quando o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, estabelecendo comparações, generalizações e alterna entre diferentes representações de um conceito). Nas funções quanto mais o aluno for capaz de trabalhar com uma função como um todo, mais avançado está no processo de condensação;

(iii) reificação (quando o aluno consegue ver a nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo com significado). Nas funções, o conceito é reificado quando o aluno consegue compreender as diversas representações que a função pode assumir, passando facilmente de uma representação para a outra, tendo capacidade de resolver equações funcionais, quando revela capacidade de falar sobre as propriedades gerais dos diferentes processos realizados com funções e que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem as funções.

Apresento um esquema do modelo hierárquico cuja natureza está implícita nas definições de interiorização, condensação e reificação (Fig. 2.1).

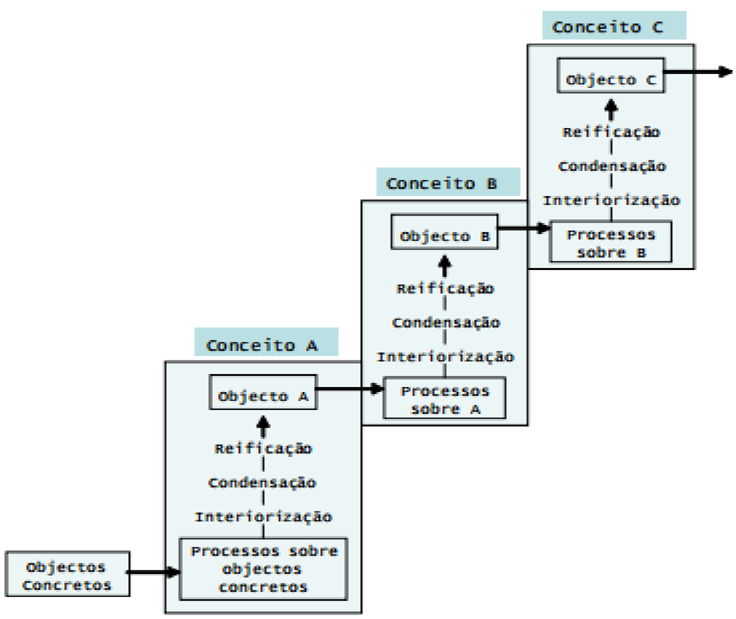


Figura 2.1 - Modelo de formação de conceitos (Sfard, 1991, p. 22)

Esta evolução é lenta, e nenhuma das etapas pode ser alcançada sem que a anterior tenha sido ultrapassada (Sfard, 1991). Mas esta evolução permite ao aluno ver um objeto matemático enquanto tal, e não apenas como um processo, deixando de confundir um objeto matemático com a sua representação.

Orientações curriculares

Em Portugal, os documentos curriculares, como a Brochura Álgebra no ensino básico (Ponte, Branco, & Matos, 2009), o Programa de Matemática do ensino Básico (M.E., 2013) e o caderno de apoio do 3.º ciclo (M.E., 2013), recomendam que o estudo das funções seja feito através da correspondência entre conjuntos e como relação entre as variáveis.

A aprendizagem deste conceito começa desde os 1.º e 2.º ciclos, envolvendo correspondências entre duas variáveis, trabalhando com funções de variável natural, que se podem representar em tabelas e gráficos. No 2.º ciclo, este conceito é utilizado na resolução de problemas envolvendo correspondências que representam situações de proporcionalidade direta, envolvendo relações funcionais. Neste ciclo ainda não se faz referência ao conceito de função, trabalhando com correspondências representadas por diagramas, tabelas e gráficos. Na Brochura de Álgebra é salientada a importância do conhecimento sobre as funções na formação dos alunos, de modo a torná-los cidadãos literatos matematicamente:

> Ao longo do ensino básico, os alunos devem desenvolver a sua capacidade de ler e interpretar gráficos de funções, que constitui uma capacidade importante para o seu futuro enquanto cidadãos. Para isso, necessitam de trabalhar com gráficos que apresentam vários tipos de variação. (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 127)

Mas o conceito de função só é estudado de forma explícita no 3.º ciclo, visando a "compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como uma correspondência unívoca entre dois conjuntos" (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p. 119). Neste ciclo, o estudo das funções ganha especial destaque, saindo do tema da Álgebra e tendo um domínio próprio, Gráficos de funções afins. Neste domínio é feito apelo à diversidade de representações e às situações problema contextualizadas como forma de mostrar aos alunos que a Matemática é indispensável para uma compreensão adequada dos diversos fenómenos do mundo que nos rodeia. Os professores devem ainda ter em conta na escolha das tarefas a propor, que o grau de complexidade das estratégias que possam ser escolhidas pelos alunos seja crescente. Os alunos devem iniciar o seu estudo começando por abordagens mais informais, como o uso de representações em esquema, diagrama ou tabela, mas com a orientação do professor serem conduzidos para processos mais formais e métodos sistemáticos (M.E., 2013).

Dificuldades dos alunos e Práticas do professor

No domínio das Funções, são utilizados diferentes tipos de representação: tabela, gráfico e expressão algébrica. Tal como acontece com a Álgebra em geral, existem dificuldades bem identificadas, resultantes da introdução da linguagem própria dos processos algébricos, em particular no estabelecer e definir relações entre variáveis (Canário, Amado, & Carreira, 2011).

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam como principais dificuldades dos alunos no domínio das funções, o uso de terminologia própria - domínio, objeto, imagem - principalmente quando aparecem em contexto exclusivamente matemático. Referem dificuldades na utilização correta da simbologia *x, y,* ***e*** *f(x)*; na passagem da informação de uma representação para a outra; na utilização da informação dada para a resolução de problemas e na interpretação das soluções obtidas de acordo com o contexto dado. Tendo em conta as dificuldades referidas, os autores apontam como estratégias para ajudar os alunos, a utilização da modelação de situações da realidade e a resolução de problemas. Desta forma, a escolha das tarefas deve evitar a dependência exclusiva de aspetos puramente matemáticos (abstração), para evitar a manipulação simbólica das expressões algébricas sem significado (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

Num estudo realizado por Matos (2007), os alunos evidenciaram dificuldades na análise e descrição na forma como se processava a variação assim como na construção e na interpretação das representações gráficas. Situações como escolha de escalas inadequadas e falta de visão global da representação gráfica promoveram a falta de coerência na contextualização da situação descrita pelos alunos.

Por outro lado, Smith (2003) considera que a noção de variável é uma das principais dificuldades dos alunos. Defende que a discussão em sala de aula deve incluir este conceito, por exemplo em tarefas que promovam a generalização. Refere, ainda, que as discussões permitem dar corpo às representações internas dos alunos e, assim, superar os obstáculos que possam surgir pelo uso das variáveis. Domingos (1994) reforça esta ideia, referindo que as dificuldades estão relacionadas com a identificação das variáveis envolvidas e com a compreensão do conceito de variável.

Outras dificuldades são evidenciadas por Sfard (1991) quando os alunos trabalham o conceito de função, tais como: (i) conceber a função como um processo de cálculo; (ii) atribuir uma variação à função constante (devido à falta da variável *x* na sua expressão algébrica); (iii) o considerar verdadeiras afirmações do tipo: *toda a função expressa uma certa regularidade* e *toda a função pode ser expressa por uma fórmula algébrica* e (iv) confundir o conceito com uma das suas representações.

Num outro estudo, realizado por Saraiva e Teixeira (2009), a dificuldade sentida é atribuída à memorização do conceito de função. Desta forma, apenas referem que *a um objeto corresponde uma e só uma imagem*, associando-a a representações que não eram função. Por outro lado, Sajka (2003) atribui a dificuldade na compreensão do conceito de função à dualidade da sua natureza. Refere que uma função pode ser entendida numa perspetiva estrutural (como um objeto) ou numa perspetiva processual (como um processo). Na primeira, uma função é um conjunto de pares ordenados enquanto na segunda é entendida como um processo computacional. Contudo as duas perspetivas complementam-se, pois, $f(x)$ representa simultaneamente quer a função f, quer o seu valor (imagem). Ou seja, no contexto das funções, quando escrevemos y, por vezes estamos a referir-nos à ordenada de um certo ponto do sistema de coordenadas, e, outras vezes, estamos a referir-nos a um certo valor da função. Em suma, a interpretação depende do contexto, o que pode confundir o aluno (Prates, Tavares, Dias, & Nunes, 2011).

A manipulação das expressões algébricas e a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática são outras dificuldades evidenciadas pelos alunos. À lista das dificuldades junta-se o reconhecimento da variação conjunta e o reconhecimento das relações entre as variáveis. As formas de representar a relação funcional (tabelar, gráfica e algébrica) são também dificuldades acrescidas que proporcionam dificuldades na atribuição de significado ao símbolo $f(x)$. A dificuldade em adquirir o conceito de função aumenta se se tiver em conta que não há só uma representação, mas sim uma grande variedade (Duval, 2006). Da mesma forma, Elia, Panaoura, Eracleous e Gagatsis (2007) evidenciam dificuldades na resolução de problemas, identificando como pontos críticos a tradução da representação verbal, e a construção da representação gráfica a partir da expressão algébrica, estas dificuldades estão associadas à transição entre diferentes tipos de representação. Contudo salientam que, normalmente, os alunos revelaram melhor desempenho nas tarefas que envolvem a representação gráfica da função do que nas tarefas onde partiam das respetivas representações algébricas.

Vinner (1983) refere duas principais dificuldades na aprendizagem do conceito de função: (i) a noção do próprio conceito, e (ii) a identificação de quando é que o conceito está corretamente formado para o aluno. A explicação deste processo cognitivo baseia-se nas noções de conceito imagem e de conceito definição. Na primeira, inclui-se todas as imagens mentais formadas pelo aluno, as propriedades e processos que ele lhe associa. A segunda, refere-se à definição verbal que explica o conceito de modo exato. Conhecer a definição não basta para garantir a perfeita compreensão do conceito, é necessário ter um conceito imagem, combinando uma ação recíproca dos dois conceitos. Para que isto seja possível, é necessário que os alunos contactem com as diversas representações de uma função ou família de funções, estabeleçam relações entre elas, aproximando-se cada vez mais do conceito definição. Tal como Sfard (1991), considera que os alunos necessitam de ser acompanhados na sua aprendizagem, proporcionando atividades que estabeleçam relações entre os vários sistemas de representação, sendo orientados nas várias fases da sua evolução (interiorização, condensação e reificação). Deste modo, a definição pretendida para interiorização e a imagem que formaram se completem e permitam aprendizagens significativas.

Kaput (1999), identifica a dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as diferentes formas de representação que constituem obstáculos na aprendizagem das funções. Este autor defende que os professores devem criar ambientes de sala de aula que possibilitem aos alunos aprender com compreensão, defendendo a realização de tarefas que envolvam diversos tipos de representação. Mostrando, assim, a importância destas estratégias na aprendizagem das funções e na exploração dos diferentes tipos de pensamento algébrico. A dificuldade no uso do conjunto de símbolos, na compreensão do conceito de função, é partilhada por Saraiva e Teixeira (2009). Destacam a realização de tarefas de natureza diversa como estratégia para ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico, promovendo a capacidade de interpretação e manipulação dos símbolos bem como a procura de relações existentes entre as variáveis. Deste modo, os alunos poderão alcançar, de uma forma progressiva, conhecimentos mais abstratos. Sajka (2003) acrescenta, ainda, que o conceito de função está muitas vezes ligado a uma fórmula, e, às vezes os alunos associam o conceito de função ao processo gráfico, onde a fórmula é necessária para construir o seu desenho. A resolução de tarefas de natureza diversificada pode ajudar a promover nos alunos a capacidade de interpretar, de manipular os símbolos e de estabelecer relações existentes entre eles. Deste modo, os alunos desenvolvem a capacidade de trabalhar com estruturas algébricas, de representar e de raciocinar de forma progressivamente mais abstrata.

O estudo das funções deve iniciar-se recorrendo à representação gráfica (Ponte, 1984, 1992) seguindo-se o respetivo estudo analítico, apoiado em atividades sistemáticas realizadas a partir da representação numérica (tabela) e da gráfica.

Em suma, as principais dificuldades evidenciadas pelos investigadores anteriormente mencionados são o uso incorreto da terminologia própria das funções e a transição entre as várias representações. Com menor frequência a identificação da relação entre as variáveis, a definição do conceito de função, e o estudo da variação de uma função. As principais estratégias apontadas para ultrapassar as dificuldades referidas são a utilização de tarefas de natureza diversificada, privilegiando a resolução de problemas, e que permitam estabelecer relações entre vários sistemas de representação. O uso destas estratégias conduz a uma interiorização do conceito de função.

A importância das representações

O NCTM (2007) refere que as representações são tanto um processo como um resultado. Assim, a importância das representações matemáticas justifica-se pelo facto destas, permitirem que os alunos organizem as suas ideias e desenvolvam a comunicação matemática. Logo, o uso que os professores fazem das várias representações influencia o que os alunos conseguem fazer e compreender com elas. Assim, os professores necessitam proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que os ajude a dar sentido às representações que utilizam, procurando interligar os vários tipos de representações. O uso da discussão coletiva acerca das várias representações para lidar com uma mesma situação matemática, ajuda os alunos a compreender a estrutura matemática por detrás de cada representação e a perceber como é que as várias representações se relacionam entre si.

Como as representações desempenham um importante papel no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, os alunos devem ser capazes de usar flexível e fluentemente as diferentes representações matemáticas e perceberem quais as mais adequadas a cada situação problema. Assim, os professores devem proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem ricas, que os ajudem dar significado à variedade de representações utilizadas. "A utilização das representações pelos alunos poderá ajudar a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão" (NCTM, 2007, p. 76).

Pode afirmar-se que o tema das representações tomou particular relevância na agenda da educação matemática nas últimas décadas. O NCTM (2007) e Santos (2015) dão às representações matemáticas um destaque especial, referindo que as representações matemáticas não são apenas meios de comunicação, mas igualmente, de construção de conhecimento. "As representações matemáticas constituem um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, uma vez que podem potenciar o acesso de todos os alunos a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio matemáticos." (Santos, 2015, p. 3). Um aspeto essencial para a aprendizagem das funções é o diferente modo de as observar e representar, estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas, que permite aos alunos desenvolver múltiplos tipos de conexões, ajudando-os a entender e compreender o conceito de função (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

Friedland e Tabach (2001) distinguem quatro formas de representações essenciais no ensino da Matemática:

- Representação verbal, associada à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados, permitindo a conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento;
- Representação numérica, que é uma representação natural para os alunos quando iniciam o estudo da Álgebra, e normalmente precede outros tipos de representação, sendo importante na compreensão inicial de um problema;
- Representação gráfica, que proporciona uma imagem clara de uma função, sendo intuitiva e apelativa;
- Representação algébrica, que é concisa, geral, sendo por vezes a única ferramenta para justificar ou efetuar generalizações.

Estes autores referem que devem ser propostas aos alunos tarefas que realcem a utilidade de cada uma das representações, e a conversão entre as diferentes representações. Dependendo da informação que se pretende, pode ser mais vantajoso para a determinada aprendizagem, o uso da tabela, gráfico ou da expressão algébrica. O uso de cada uma das representações apresenta vantagens e desvantagens. Estas devem ser usadas e combinadas de forma a propiciarem ferramentas eficazes para a aprendizagem dos objetos matemáticos, em particular das funções.

Smith (2003), também partilha a opinião dos autores referidos anteriormente, e defende a importância de ser dada liberdade aos alunos para criarem as suas próprias representações, favorecendo a atribuição de sentido às variáveis, por parte dos alunos. Através da discussão sobre os diferentes tipos de representação do mesmo objeto matemático, por vários alunos, contribui-se para a compreensão do conceito de variável e consequentemente de função.

Um dos autores que mais se tem debruçado sobre as representações matemáticas é Gerard Goldin (2008). Caracteriza uma representação como “uma configuração que representa algo, de alguma forma” (p. 180). Salienta que os sistemas de representação têm uma estrutura muito elaborada e complexa, mas aberta e em constante mudança. Para aceder às representações mais complexas é necessário relacioná-las com outras representações mais simples, às quais é necessário ter atribuído significado. Assim, Goldin (2008) distingue dois tipos de representações:

(1) Externas - têm existência física em papel, no ecrã do computador, ou noutro suporte. Por exemplo: símbolos, figuras (representações pictóricas), expressões algébricas, gráficos cartesianos etc.

(2) Internas - não têm existência física, sendo categorizadas em cinco subsistemas:

(i) sistema verbal/ sintático (utilização da linguagem e significado das palavras, incluindo as componentes gramaticais e sintáticas);

(ii) sistema sensorial (perceção visual, tátil e auditiva);

(iii) sistema de registos formais (conhecimentos prévios de símbolos e representações);

(iv) sistema de planeamento e execução cognitivo (raciocínio matemático e estratégias de resolução, capacidade de analisar e avaliar-se);

(v) sistema afetivo/emocional (sentimentos, atitudes e crenças).

Estes subsistemas de representação interna não existem de forma isolada, estando intrinsecamente relacionados, interagindo entre si. Goldin (2008) refere a dificuldade de analisar a forma como cada representação interna se desenvolve em cada indivíduo. Logo, o professor apenas pode fazer inferências sobre elas, baseando-se na forma como os alunos trabalham com as representações externas, nas interações com os colegas, na participação das tarefas propostas e nos registos produzidos pelo aluno, referindo que as representações externas podem revelar o processo de representação interna de cada aluno.

Um outro autor, que se tem dedicado ao estudo das representações é Raymond Duval, que afirma que os objetos matemáticos apenas são acessíveis através de representações em registos adequados (Duval, 2006). Segundo este autor, são necessárias diversas representações para a apreensão do objeto matemático. A apreensão de um objeto ocorre quando a conceitualização (*noesis*) ocorre através de significativas representações (*semiosis*). Mas para compreender o processo de apreensão dos objetos matemáticos é necessário o entendimento das representações. Duval (2003) destaca três noções de representação com funções distintas:

(1) Representação subjetiva e mental (ligada a crenças e explicações do sujeito), tem a função de objetivação.

(2) Representação interna e computacional (execução de tarefas não conscientes do sujeito), tem a função de tratamento.

(3) Representações semióticas (é algo externo e consciente do sujeito, referindo-se a um sistema particular de signos: língua natural; expressão algébrica; gráfico cartesiano, …) tem a função de objetivação, expressão e tratamento.

Destaca, ainda que, as representações semióticas são intencionais e essenciais para a aprendizagem humana, definindo-as como produções construídas pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representação. Na apreensão de um objeto matemático é necessário a mobilização de distintas representações semióticas.

Duval (2003) classifica as diferentes representações semióticas em dois tipos de registos: os multifuncionais (onde os tratamentos de dados não são algoritmizáveis, recorrendo por exemplo a linguagem natural e figuras geométricas) e monofuncionais (onde os tratamentos são algoritmizáveis, recorrendo à escrita numérica, algébrica, simbólica e gráfica). Segundo o autor, qualquer atividade matemática exige a coordenação das suas representações semióticas, existindo dois tipos de transformação destas representações. Estas transformações são o tratamento e a conversão. No tratamento, as transformações são dentro do mesmo sistema de representação (por exemplo na manipulação algébrica), na conversão as transformações consistem numa mudança de sistema, conservando os objetos (por exemplo a passagem da representação algébrica para a gráfica). Do ponto de vista cognitivo, o autor considera que as tarefas de conversão são mais complexas do que os tratamentos. As conversões requerem o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações, salientando que as conversões nos seus dois sentidos são mais relevantes para a aprendizagem em matemática (Duval, 2003; 2006).

Mas articular os diferentes registos de representações semióticas, em tarefas de tratamento e conversão, não é suficiente para a compreensão global do conceito de função. Vergnaud (1996) refere que é também imprescindível dar significado às situações de aprendizagem, referindo-se à Teoria dos Campos Conceituais. Segundo Vergnaud (1996), o processo de conceitualização implica uma relação conceitual (campos conceituais), como sendo um conjunto de situações que dão sentido ao conceito e que determinam os processos cognitivos que o desenvolvem. Conforme, Tinoco (2009) o campo conceitual das funções envolve as noções: padrões, sequencias, regularidades, proporcionalidade, dependência, generalização e variável, conforme. Assim, a articulação das diferentes representações semioticas, em situações distintas, promove uma aprendizagem significativa do conceito de função.

Os investigadores do Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, da University of Uttrecht desenvolveram um modelo que denominaram *Iceberg*, para apoiar os professores a pensar em processos e estratégias utilizadas pelos alunos no processo de aprendizagem quando utilizam as representações. Este modelo é uma metáfora, distinguindo três tipos de representações: informal; preformal e formal. As representações informais e preformais (encontram-se debaixo de água), mas são muito importantes para a aquisição de conhecimento e estratégias. Cada aluno tem o seu ritmo, na passagem por cada um destes tipos de representação. Para o professor, estas representações são muito importantes, sendo o ponto de partida para promover as futuras aprendizagens. A representação formal é o objetivo final, estando na ponta do *iceberg*. Este modelo implica que as representações formais vão sendo construídas sobre as menos formais, mas não significa que assim que os alunos alcancem o entendimento formal, não voltem a usar as representações preformais. Qualquer aluno deve ser capaz de revisitar as representações preformais, especialmente quando novos e desconhecidos contextos são encontrados. Os autores deste modelo (Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008) salientam que muitas vezes as representações formais são consideradas o único objetivo importante, pelos professores, logo recebem atenção excessiva na avaliação, mas as representações menos formais são de valor inestimável na avaliação de um conhecimento prévio do aluno e revelam potenciais pontos de partida para a instrução e intervenção do professor.

A importância das representações na aprendizagem do conceito de função é também referida por Kieran (2001, 2007), salientando o discurso e a forma em que ocorre o desenvolvimento do raciocínio matemático na sala de aula, com o trabalho a pares na resolução de tarefas que envolvem a interpretação e resolução de problemas. Salienta a importância da representação gráfica na compreensão do conceito de função, referindo que, através da visualização do gráfico das funções, os alunos tornam-se mais hábeis na sua compreensão, nomeadamente na representação gráfica da função linear, no estudo do declive e ordenada na origem.

Uma das principais dificuldades, apontadas no ensino e aprendizagem da noção de função é a existência de várias formas de representar uma função, e de estabelecer a ligação entre as diferentes representações (Arcavi, 2003; Carvalho, Ferreira, & Ponte, 2011; Duval, 2006).

Ponte (1984) no seu estudo sobre representações gráficas, sugere que a leitura, construção e interpretação de gráficos cartesianos, têm sido fonte de dificuldades, nomeadamente, o uso e construção de escalas, determinação de valores da função, dado o objeto, a variação, interpretação e discussão das relações funcionais. Kieran (1992) ainda salienta a passagem da representação gráfica para a algébrica como considerada a mais difícil. Outros estudos apontam dificuldades de leitura e de interpretação das representações em gráficos cartesianos. Esta dificuldade deve-se à falta de correspondência semiótica entre o registo da representação gráfica e o registo da representação algébrica. A prática sistemática de abordagem ponto por ponto não favorece a interpretação global, criando dificuldades na passagem da representação gráfica para a expressão algébrica (Duval, 2011).

O uso da representação tabelar é muito útil no estudo das funções (Brown & Mehilos, 2010, citado por Canavarro & Gafanhoto, 2013). Neste tipo de representação, que é concretizada pela construção de uma tabela de duas colunas, relacionam-se diretamente a variável independente x e a variável dependente y, através da concretização numérica do par *(x, y)*. Este tipo de representação, usando um número significativo de pares, ajudam os alunos a identificar as relações entre as variáveis, a encontrar regularidades e a expressá-las de forma mais abstrata, chegando à generalização. "A tabela atua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra, onde as variáveis não são concretizadas e expressam relações gerais" (Canavarro & Gafanhoto, 2013, p. 4).

Candeias (2010) confirmou no seu estudo os resultados de Goldin (2003) e Duval (2002, 2004). Os alunos do 3.º ciclo, no estudo das funções, utilizam frequentemente uma ou mais representações e é na mudança de representação que mostram sentir mais dificuldades. É a ligação entre fórmulas, gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, como na interpretação de gráficos, e na manipulação de símbolos, que residem as dificuldades sentidas. Relativamente à globalidade das representações é notório que a representação algébrica é a que apresenta mais dificuldades, já que exige um maior nível de conhecimentos matemáticos (variável dependente, independente, conceito de função).

Carvalho, Ferreira e Ponte (2011) referem dificuldades na conversão da forma gráfica para a algébrica, indicando dificuldades no trabalho com expressões algébricas, bem como no seu significado. Estas dificuldades na manipulação algébrica e na sua ligação com outras representações vão ao encontro do que refere Kaput (1989) sobre dificuldades dos alunos em álgebra.

Canavarro e Gafanhoto (2013), num estudo sobre a utilização e conciliação de diversas representações no 9º ano, concluíram que:

- a representação numérica e a algébrica eram usadas essencialmente para determinar a imagem, dado o objeto, a representação numérica foi também usada para determinar objetos dadas as imagens;

- a representação gráfica foi mais utilizada no estudo comparativo de funções, quando se pretendia uma imagem global sobre o comportamento da função;

- os alunos recorrem à representação em tabela essencialmente nas questões onde era pedido para analisarem a relação entre as variáveis.

O uso de representações múltiplas de funções no ensino e na aprendizagem da Matemática tem um forte aliado nas novas tecnologias, porque permite aos alunos obterem gráficos, tabelas ou usarem a expressão algébrica de uma função para obterem um determinado ponto, estabelecerem a relação entre as variáveis levando a uma aprendizagem mais significativa e eficaz dos conceitos envolvidos (Canavarro & Gafanhoto, 2013). A utilização das novas tecnologias pelo professor potencia as aprendizagens. Permitem uma rápida conversão entre representações de uma função, simplificando alguns procedimentos e proporcionando uma maior concentração, naquilo que é verdadeiramente importante, a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução e análise crítica dos problemas, permitindo a aprendizagem significativa para a compreensão das noções associadas ao conceito de função (Ponte, 1990).

De um modo geral, todos os autores já referidos salientam o uso das diferentes representações de uma função como bastante significativo para a compreensão deste conceito, dado que permite aos alunos uma maior compreensão e aprendizagens mais significativas. Friendland e Tabach, (2001) acrescentam que as tarefas onde se exploram as múltiplas representações devem ter as questões de forma sequencial, por forma a permitir: a familiarização com a representação inicial; transição entre representações; e por fim a exploração dessas representações. Assim, os alunos, que têm presente as diferentes representações e a transição de uma representação para outra, podem encarar o uso das representações como uma necessidade natural para a compreensão e resolução das questões propostas.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Neste capítulo, começo por apresentar a caracterização da escola e da turma em estudo, seguida dos conteúdos fundamentais presentes na subunidade didática a lecionar e o seu enquadramento no Programa de Matemática em vigor. Faço também uma breve descrição das estratégias de ensino seguidas nas aulas lecionadas.

Contexto escolar

Caraterização da escola

A escola cooperante está localizada no distrito de Lisboa, com uma população de diferentes estratos sociais. Esta escola é a sede de agrupamento e é um Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), cujo projeto visa atenuar os problemas sociais dos territórios que as escolas servem. É uma escola de 2.º e 3.º ciclos, mas existe também, oferta educativa de ensino articulado da música, programa de currículos alternativos de 3.º ciclo e o Programa Individual de Educação e Formação (PIEF) com 1.º, 2.ª e 3.ª ciclos. Em termos de espaço físico, esta escola tem sete pavilhões, distribuídos por um terreno com muitos espaços verdes, mas com um declive acentuado. Esta geografia do terreno dificulta o encontro entre professores. Este foi o primeiro ano em que foi implementado o *software* Inovar, neste agrupamento.

Caraterização da turma

A turma em estudo é uma turma de 8.ºano, constituída por 30 alunos, sendo 12 raparigas e 18 rapazes. A idade dos alunos, situa-se entre os 12 e 15 anos ver quadro 3.1.

Quadro 3.1: *Idades dos alunos da turma 8.º*

Idades	Nº de alunos
12-13	20
14-15	10

Nesta turma, existem oito alunos repetentes, que já frequentavam esta escola no ano anterior, e um aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE). A turma em questão tem alguns alunos com problemas comportamentais, falta de pontualidade e uma aluna em risco de abandono escolar.

Em termos de aproveitamento apenas 12 alunos não tiveram qualquer negativa no ano anterior, e 12 tiveram negativa na disciplina de Matemática, sendo esta a disciplina com resultados menos bons no ano transato. Segundo a Professora Cooperante esta é uma turma com grandes dificuldades, principalmente devido à falta de maturidade dos alunos e à falta de empenho para reverter os resultados negativos. O insucesso em Matemática nos anos anteriores, provoca nos alunos desinteresse relativamente à disciplina. Existe um grupo de alunos que não participou na aula, não realizou os trabalhos de casa e teve imensas dificuldades em acompanhar as aulas. Estes alunos foram o alvo da Professora Cooperante, com o intuito de os estimular e ajudar a reverter esta situação. Os resultados do 1.º Período (figura 3.1.) não foram bons dadas as características já referidas.

Figura 3.1 - Gráfico das percentagens de aproveitamento da turma no 1.º Período.

A maioria do grupo de alunos repetentes não mostrou mudança de atitude face ao passado, contribuindo para engrossar o fraco aproveitamento da turma. A percentagem de insucesso referente ao 1.º Período foi de 46,7%. Contudo, existiu um pequeno grupo de alunos com aprendizagens sólidas e com hábitos de trabalho já adquiridos. Estes são alunos que na sua maioria já conheciam a professora Cooperante do ano transato, estiveram interessados em aprender e foram participativos. Este grupo, em aulas de trabalho colaborativo, trabalhou com os colegas com maiores dificuldades, ajudando-os a superar as suas dificuldades de aprendizagem.

No decorrer do 2.º Período a turma começou a definir-se claramente em termos de prosperidade, os alunos que queriam ir mais além, investiram, tentaram recuperar e os resultados foram positivos. Mas existiu um grupo de sete alunos, muito desinteressados do contexto escolar, não por uma questão de capacidades, mas sim por um desinvestimento ao nível pessoal, para o qual contribuiu a não existência de qualquer tipo de investimento por parte das famílias para reverter esta situação. Citando a professora Cooperante, numa conversa informal, "As famílias não valorizam as medidas adotadas pela escola para ajudar os alunos, e o envolvimento das famílias é preponderante". A percentagem de insucesso do 2.º Período (figura 3.2) foi de 53,3%.

Figura 3.2 - Gráfico das percentagens de aproveitamento da turma no 2.º Período.

Ao longo do 3.º Período (figura 3.3), os alunos que tinham começado a investir melhoraram nos seus resultados e alguns dos alunos desinteressados, mas com uma postura familiar de interesse pela escola, fizeram um esforço e também recuperaram. Logo a percentagem de insucesso ficou nos 40%.

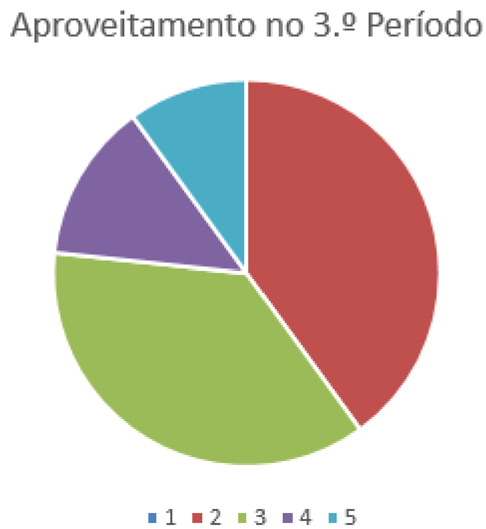


Figura 3.3 - Gráfico das percentagens de aproveitamento da turma no 3.º Período.

Tal como a Professora Cooperante referiu, em conversa informal, no que respeita à relação com a matemática, nesta turma, existiu um grupo de alunos que mostrou gostar de matemática, esteve interessado e quis participar sempre durante as aulas, um outro grupo que tentou recuperar as falhas, e com o apoio prestado revelaram melhorias significativas nas suas aprendizagens, chegando a resultados positivos. Por fim, um grupo, que devido aos sucessivos anos de insucesso e com uma atitude face à escola menos positiva não conseguiu progredir, alguns destes alunos dado o seu número de retenções foram encaminhados para outras ofertas educativas, nomeadamente cursos CEF (curso de educação e formação), numa tentativa de os estimular e orientar.

Ancoragem da unidade didática no programa

A intervenção letiva foi desenvolvida no âmbito da unidade didática "Gráficos de funções afins" no 8.º ano. Tendo como base os objetivos de aprendizagem estabelecidos no Programa e nas Metas Curriculares para o Ensino Básico (ME, 2013).

Neste ciclo, os alunos devem começar a compreender os diferentes significados e a utilização de variáveis, através da representação de quantidades, numa diversidade de problemas e contextos. Devem estabelecer ligações entre as suas aprendizagens e o conceito de função, distinguindo relações lineares e não lineares, fazendo uso de tabelas, gráficos, palavras e expressões simbólicas para representar e analisar funções, e padrões de variação. “Os alunos deverão desenvolver uma compreensão alargada e manusear os conceitos de declive e ordenada na origem, bem como reconhecê-los em tabelas, gráficos e equações” (NCTM, 2007, p. 264).

A importância do tema das funções é bastante evidente quando se analisa o Programa de Matemática e se observa que este domínio FSS (Funções, Sequencias e Sucessões), está separado de ALG (Álgebra) mais concretamente, dando destaque ao estudo dos gráficos de funções afins. (ME, 2013). O conceito de função só é estudado de forma explícita no 3. Ciclo, sendo introduzido no 7.ºano, na unidade de Funções. Nesta unidade é definido o conceito de função, operações com funções numéricas e sequências e sucessões, ver figura 3.4.

FSS7 25 tempos	**Funções** **Definição de função** - Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções; - Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente; - Funções numéricas; - Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano. **Operações com funções numéricas** - Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas; - Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos; - Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica; - Funções de proporcionalidade direta; - Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta. **Sequências e sucessões** - Sequências e sucessões como funções; - Gráficos cartesianos de sequências numéricas; - Problemas envolvendo sequências e sucessões.

Figura 3.4: Unidade das Funções-7.º ano (ME, 2013 p.21)

Estes são conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem da unidade didática de “Gráficos de funções afins” do 8.ºano. Contudo, na turma em questão, não foi trabalhado o tópico das “Operações com funções” no ano anterior, assim, este tópico foi desenvolvido na subunidade de “Gráficos de funções afins” no 8.ºano. No entanto, no ano anterior foram muito trabalhadas as diferentes representações de uma função, bem como, a identificação dos diferentes tipos de funções. Este trabalho foi muito importante como base para o desenvolvimento desta subunidade. O domínio da Álgebra no 8.º ano, segundo a planificação feita na Escola Cooperante, iniciou-se com o estudo dos Monómios e Polinómios, onde foram trabalhados: a identificação e simplificação de monómios; o reconhecer e operar com polinómios. O estudo deste tópico facilitou a revisão/introdução ao estudo das funções, assim como, a atribuição de significado às variáveis.

Os subdomínios desenvolvidos durante a lecionação das aulas, no 8.º ano estão apresentados na figura 3.5.

FSS8 15 tempos	**Gráficos de funções afins** - Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; - Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; - Relação entre declive e paralelismo; - Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; - Equação de reta vertical; - Problemas envolvendo equações de retas.

Figura 3.5: Unidade das Funções-8.º ano (ME, 2013 p.23)

O domínio da Álgebra no 8.º ano terminou com o estudo das Equações Literais e Sistemas. Esta ordem na planificação letiva, ajudou os alunos a perceberem a Matemática como um todo interligado, pois facilitou as conexões entre os diferentes temas, e a consolidação das aprendizagens já realizadas. Facto verificado aquando do trabalho desenvolvido nas representações gráficas em que os alunos para resolverem um sistema de equações graficamente mobilizaram as aprendizagens realizadas anteriormente no estudo das funções.

Estratégias de ensino

Os alunos precisam de oportunidades para raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva de tarefas propostas em sala de aula (NCTM, 2007). Assim, pretendi que as minhas tarefas fossem de carácter diversificado, utilizando tarefas de exploração, exercícios e problemas, por forma a desafiar os alunos na procura do seu próprio conhecimento. Na construção das tarefas tive em atenção duas dimensões fundamentais, o grau de desafio matemático (reduzido/elevado) e o grau de estrutura (aberto/ fechado).

A necessidade de criar boas oportunidades para raciocinar matematicamente exige do professor uma abordagem de ensino exploratória, centrada no trabalho dos alunos, quando estes se envolvem na exploração matemática das tarefas (Ponte, 2005). Logo uma das características principais deste tipo de ensino, é que o professor não procura explicar tudo, mas deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem, transformando-se numa atividade mais interessante, onde o aluno tem um papel ativo no seu processo de ensino-aprendizagem. (Ponte, 2005). Este tipo de ensino tem como principais vantagens, ser desafiante para os alunos e proporcionar aprendizagens mais duradouras.

Neste sentido, a abordagem de ensino que propus foi predominantemente exploratória, Ensino Dialógico, com recurso a tarefas intuitivas tanto em contexto real como matemático, permitindo o desenvolvimento do pensamento crítico nos alunos. De acordo com esta abordagem de ensino, as aulas centraram-se fundamentalmente no trabalho realizado pelos alunos, implicando uma nova dinâmica na sala de aula dividida em quatro fases distintas: (1) apresentação da tarefa; (2) trabalho autónomo; (3) discussão coletiva e (4) síntese com sistematização de conceito utilizados/lecionados, (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014; Ponte, Quaresma & Branco,2011). Em relação ao primeiro momento da aula, introdução da tarefa, a professora explica o modo como vai decorrer a tarefa, clarificando objetivos e esclarecendo eventuais dúvidas levantadas pelos alunos, informa os alunos acerca da duração da tarefa. A apresentação da tarefa é especialmente importante porque faz com que os alunos partam para a sua resolução com maior motivação (Ponte, Quaresma, & Branco, 2011). No segundo momento, trabalho autónomo dos alunos, a professora tem uma intervenção reduzida, a sua função é mais de incentivo, não adiantando, no entanto, nenhuma resposta, mas sim apoiá-los, por exemplo, através do questionamento para que sejam eles a chegar ao pretendido, incentivando a discussão em grupo. No momento da discussão coletiva, a professora, assume o papel de moderadora, promovendo a discussão entre os vários grupos, neste momento os alunos são confrontados com estratégias de resolução diferentes das suas e têm que fundamentar e argumentar os seus pontos de vista. O último momento é o da síntese final em que com a colaboração de todos se sintetizam os aspetos mais relevantes abordados durante a realização da tarefa proposta.

Saliento, que privilegiei o método de trabalho em pares, e tive como vantagem a turma já estar habituada a este tipo de trabalho, aqui agradeço à Professora Cooperante que recorre com frequência a este método de ensino. Através deste método e de uma boa orientação por parte do professor, os alunos ganham autonomia, responsabilidade e motivação, ultrapassando mais facilmente as suas dificuldades e adquirindo conhecimentos mais duradouros, através da reflexão feita do seu trabalho. Esta reflexão ocorre principalmente na fase de discussão coletiva, onde a exposição e confronto das resoluções efetuadas durante o trabalho autónomo, em conjunto com as suas justificações, permite avaliar as potencialidades de cada estratégia desenvolvida, potenciando a aquisição de conhecimentos. A sistematização também merece especial atenção, pois tanto permite o foco de ideias matemáticas ou procedimentos relativos à exploração da tarefa como permite fazer conexões com aprendizagens já realizadas anteriormente (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). O Professor tem um papel fundamental para promover esta reflexão, trabalho este, que começa na fase de planificação da aula, onde o professor deve antecipar diferentes estratégias, assim como as possíveis dificuldades dos alunos. Continua na fase de trabalho autónomo, com a monotorização e orientação do trabalho autónomo, permitindo selecionar e sequenciar as diferentes produções dos alunos, de forma a poder explorar com toda a turma, as potencialidades de cada estratégia, corrigir erros comuns e justificar corretamente todas as resoluções. Usando as diferentes produções é possível estabelecer as conexões entre os diferentes temas matemáticos, permitindo um desenvolvimento coletivo e mostrando a Matemática como um todo interligado (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014).

Planificação da unidade de ensino

A lecionação da subunidade de “Gráficos e funções afins” decorreu durante duas semanas, correspondendo a 10 aulas, divididas por quatro tempos de 90 minutos e dois tempos de 45 minutos. Estas aulas foram lecionadas no 2.º período, entre os dias 29 de fevereiro e 11 de março. A planificação destas aulas teve em conta os objetivos preconizados no Programa de Matemática para o 8.º ano, as características da turma, e a planificação a médio/longo prazo da Professora Cooperante. A estrutura da minha planificação é apresentada no quadro 3.2

Quadro 3.2 - *Planificação da subunidade didática de Gráficos de funções afins e a respetiva calendarização das aulas*

Data	Ficha de trabalho	Conteúdos
29 de fevereiro (90 minutos) 2.ªfeira 10h05	"De volta às funções"	Revisão dos conceitos de FSS7
03 de março (90 minutos) 5.ªfeira 8h05	"A distância percorrida"	Estudo da função de proporcionalidade direta e da função linear
04 de março (45 minutos) 6.ªfeira 12h30	"A visita do Martim"	Função linear e função afim
07 de março (90 minutos) 2.ªfeira 8h05	"Declive e paralelismo"	Declive e paralelismo de retas
10 de março (90 minutos) 5.ªfeira 8h05	"Declive de uma reta"	Fórmula de cálculo do declive
11 de março (45 minutos) 6.ªfeira 12h30	"Trabalho de verão"	Consolidação dos conceitos trabalhados

Na planificação desta subunidade de ensino privilegiei dois tipos de tarefas: as exploratórias e os problemas. Durante a planificação de cada aula tive o cuidado de elaborar planos detalhados (Apêndice B), onde integrei vários elementos: objetivos gerais, estratégia, metodologia, estrutura da aula, recursos a usar, atividades da professora, atividades dos alunos, slides de síntese, avaliação, entre outros. O conhecimento prévio das características da turma e a planificação realizada possibilitaram a definição de um fio condutor para as ações e decisões a tomar no decurso das aulas lecionadas. Segundo Abrantes (1985), a necessidade deste fio condutor, prevendo todas as ações a desenvolver no decurso de cada aula, ajudam o professor a tomar as decisões mais corretas, tendo confiança para alterar ou adaptar a planificação realizada em cada momento de aula. Este foi um trabalho muito exigente, mas foi muito importante prever as diferentes dificuldades e estratégias dos alunos, prevendo quais deveriam ser as minhas ações no decurso de cada aula.

As fichas de trabalho

Nesta sequência de aulas foram propostas seis fichas de trabalho (quadro 3.2). Na sua elaboração foram tidas em conta três preocupações principais: exploração de situações que permitissem à turma a aquisição de conhecimentos relativos à unidade de gráficos de funções afins; atender ao meu objetivo de investigação do presente estudo e adquirir ferramentas que melhorassem a minha forma de ensino, salvaguardando sempre as aprendizagens dos alunos.

Nas fichas de trabalho propostas, as tarefas que propus oscilam principalmente, entre problemas e explorações sendo selecionadas/adaptadas de várias fontes, desde manuais escolares de Matemática aos Exames de Ensino Básico de anos anteriores. Na secção seguinte, apresento uma descrição breve destas fichas, incluindo os objetivos definidos para cada uma delas e os recursos planeados na sua execução.

Ficha de trabalho "De volta às funções"

A ficha "De volta às funções" tem um conjunto de tarefas (Apêndice A), onde se pretende rever alguns dos conceitos já trabalhados no 7.º ano, relacionados com o tema funções. Assim, para a tarefa 1, foram apresentadas várias correspondências, onde se pretendia que os alunos identificassem quais representavam funções justificando as suas respostas. Nesta tarefa, tive o cuidado de apresentar os três tipos de representações de uma função mais utilizados, desde o diagrama de setas, a tabela e a representação gráfica. Esta tarefa permitia rever não só o conceito de função, algumas formas de representação, como também as noções de domínio, contradomínio, conjunto de partida e conjunto de chegada.

A tarefa 2 foi um problema contextualizado, usando uma função de proporcionalidade direta, situação trabalhada no ano anterior. Neste problema é apresentada uma tabela com alguns dados, que era necessário preencher de acordo com os dados do enunciado. A necessidade de justificar porque se trata de uma função, identificar as variáveis envolvidas, classificando-as, independente ou dependente e posteriormente fazer a sua representação gráfica numa folha de papel milimétrico, concluindo com a representação da expressão algébrica correspondente. A escolha desta tarefa permite consolidar/rever conceitos ligados ao tema das funções, e despertar a turma para a necessidade de contextualizar o problema, estimulando a turma no sentido de serem críticos quando é apresentado um problema em contexto real.

Na tarefa 3, escolhi apresentar um gráfico com diferentes retas, com o objetivo de relembrar os diferentes tipos de funções que já tinham trabalhado: função constante, função linear e função afim. Fazendo uma correta leitura do gráfico, associar a imagem, dado o objeto, ou dada a imagem reconhecer o seu respetivo objeto. A correta leitura do gráfico é importante para a compreensão do conceito de uma função. Esta tarefa termina pedindo aos alunos para estabelecerem a correspondência entre cada uma das funções representadas à sua respetiva expressão algébrica, passando da representação gráfica para a algébrica.

Os recursos planeados foram a ficha de trabalho, um enunciado para cada grupo, papel milimétrico, o projetor e um conjunto de slides com a síntese final.

Esta ficha é a base para o trabalho que pretendo desenvolver nesta subunidade de gráficos de funções afins.

Ficha de trabalho "A distância percorrida"

Nesta ficha de trabalho, a tarefa 1 foi construída de raiz e os objetivos eram: ajudar a compreender que o coeficiente de uma função linear é a constante de proporcionalidade direta, designando-o por declive, e compreender a relação entre uma função de proporcionalidade direta e uma função linear. Para alcançar estes objetivos elaborei uma tarefa em contexto semirreal, descrevendo uma situação problema com três automóveis que circulavam a velocidades diferentes. Na primeira questão desta tarefa eram pedidas quais as distâncias percorridas por cada um dos automóveis para um determinado número de tempos, permitindo a conclusão de que cada uma das funções que representavam a distância percorrida pelos carros, eram funções de proporcionalidade direta. No problema foram pedidas as três representações gráficas numa folha de papel milimétrico, entregue aos alunos com a tarefa. Usando estas representações queria que os alunos estabelecessem a relação entre função linear e proporcionalidade direta. Posteriormente, partindo destas representações, pretendia fazer a exploração da variação do parâmetro *a* (declive) para o caso geral da função linear, usando como recurso o Geogebra. Na segunda parte da ficha, tarefa 2 o recurso à calculadora gráfica foi considerado para a turma reconhecer que o gráfico de uma função afim se obtém do gráfico de uma função linear por uma translação de um vetor, mas por falta de tempo, esta tarefa acabou por não ser aplicada. Este objetivo foi alcançado numa aula posterior.

Os recursos planeados para esta aula foram o quadro, a ficha de trabalho para cada par de alunos, papel milimétrico, ambiente de geometria dinâmica - o Geogebra, a calculadora gráfica e slides com síntese final a apresentar. Saliento que o recurso da calculadora gráfica é obrigatório apenas no Ensino Secundário, mas não sendo possível ter acesso à sala de informática para que os grupos de trabalho pudessem utilizar o Geogebra a calculadora gráfica pareceu-me uma ideia bastante adequada.

Ficha de trabalho "A visita do Martim"

A ficha de trabalho "A visita do Martim" foi selecionada/adaptada dos Exames Nacionais de Ensino Básico. Esta ficha é composta por duas tarefas, sendo a primeira um problema e a segunda uma exploração. Os objetivos desta ficha são: interpretar e compreender a relação entre a variável independente e dependente; interpretar o conceito de declive e ordenada na origem numa função afim e, por fim, resolver problemas aplicando os conhecimentos adquiridos, desenvolvendo o raciocínio e a comunicação matemáticos.

O problema proposto na tarefa 1 conjuga dois tipos de representação, a natural e a gráfica. Neste problema, os alunos precisam de interpretar e compreender os dados fornecidos nos dois tipos de representação tendo em atenção o contexto real do problema. Desta forma, e usando os conhecimentos sobre a função de proporcionalidade direta, devem estabelecer qual a relação entre as variáveis e determinar o valor em falta para poderem responder qual a distância percorrida pelo Martim.

Na tarefa 2, é apresentada uma função na forma algébrica e duas representações gráficas, pedindo para apresentar as razões que permitem garantir que as duas representações gráficas não correspondem à função dada na forma algébrica. Esta tarefa permite que os alunos abordem os conhecimentos sobre a função afim, tais como a sua variação e a noção de ordenada na origem. A apresentação das justificações pedidas promove o desenvolvimento da comunicação matemática, tanto oral como escrita.

Nesta aula os recursos a usar foram um enunciado da ficha de trabalho, para cada par e o projetor.

Esta ficha foi também pensada com o objetivo de, no final da aula, realizar entrevistas a três pares de alunos e aprofundar, através do questionamento, os raciocínios realizados e averiguar as principais dificuldades sentidas na realização de cada uma das tarefas.

Ficha de trabalho "Declive e paralelismo"

Defini como objetivos para esta ficha de trabalho: compreender como é feita a transição entre as diferentes formas de representar uma função; reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando, e apenas quando, têm o mesmo declive; determinar a equação de uma reta paralela a outra, dado um ponto dessa reta e compreender a relação entre o declive e o paralelismo de duas retas. Assim a ficha "Declive e Paralelismo" foi pensada para ser uma continuação da tarefa 2 proposta na ficha anterior, usando a representação gráfica da função $h(x)$. Na tarefa 1 começo por pedir para os alunos verificarem se dois pares ordenados pertencem ou não ao gráfico da função h, usando a expressão algébrica da função e posteriormente a sua representação gráfica. Aqui é necessário que os alunos tenham a noção que a representação gráfica, dado que é um esboço, não permite a validação da resposta. Na questão 1.2. é pedida a expressão algébrica de duas novas funções, cujas representações gráficas correspondem a retas paralelas à reta que representa a função h, mas com diferentes valores de ordenada na origem. O objetivo é permitir que compreendam que retas estritamente paralelas têm o mesmo declive, variando apenas a ordenada na origem. Na tarefa 2 é dado o declive e a ordenada na origem de uma reta e é pedida a expressão algébrica da função cujo gráfico corresponda a essa reta, reforçando a compreensão destas duas noções. Na tarefa 3 apresento a expressão algébrica de quatro funções, afins e lineares, pedindo justificações sobre as suas representações gráficas. O objetivo é trabalhar e consolidar os conhecimentos adquiridos sobre o paralelismo, mostrando que a representação gráfica da função linear é um caso particular da função afim com a respetiva ordenada na origem nula.

Os recursos planeados para esta ficha foram: quadro; projetor; documentos a projetar; Geogebra; enunciado da ficha e folha de papel quadriculado para cada grupo.

Ficha de trabalho "Declive de uma reta"

O objetivo desta ficha de trabalho é possibilitar a exploração, por meio de uma tarefa exploratória, da relação existente entre a noção de paralelismo entre retas e o conceito de declive. Compreendida esta relação, de forma intuitiva, o meu objetivo é introduzir a fórmula de cálculo do declive de uma reta dados dois pontos distintos dessa reta.

Na tarefa 1 é apresentado a representação gráfica de duas retas estritamente paralelas, correspondendo a uma função linear e uma função afim. O objetivo é levar os alunos a escrever a expressão algébrica de uma das retas e identificando o paralelismo, (mesmo declive), a obter a expressão algébrica da função afim, com ordenada na origem diferente da primeira. Nas questões seguintes, usando as coordenadas de dois pares de pontos de uma das retas é pedido para determinar o valor de uma expressão numérica e comparar o valor obtido com o declive da reta em questão. Através desta tarefa tentarem conjeturar a fórmula de cálculo do declive de uma reta. Posteriormente, na fase de discussão, e recorrendo ao Geogebra, pretendia fazer a generalização e formalizar esta fórmula explicando porque é válida, usando conhecimentos já adquiridos em anos anteriores e relacionando-os, por exemplo os critérios de semelhança de triângulos. Nesta fase, preparei um conjunto de slides para me apoiar nas explicações a dar.

Esta ficha de trabalho termina com a tarefa 2, composta por três alíneas, onde em cada uma delas são dados dois pontos distintos de uma função, apresentados de diferentes formas. Pede-se para determinar as respetivas expressões algébricas de cada função, usando os resultados aprendidos na tarefa anterior.

Como recursos, planeei, o enunciado da tarefa; projetor; documentos a projetar e o Geogebra.

Ficha de trabalho "Trabalho de verão"

A ficha "Trabalho de verão" tem como objetivos, consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos sobre as funções de proporcionalidade direta e da função afim, usando problemas que envolvem equações de retas.

Esta ficha inicia-se com um problema, onde é necessário que os alunos façam uma interpretação da informação dada no enunciado, apoiada pela sua representação gráfica, recorrendo aos conhecimentos adquiridos sobre funções, nomeadamente a função de proporcionalidade direta e que determinem os valores desconhecidos. Termina com a escrita da respetiva expressão algébrica da função que o representam, tendo o cuidado de responder ao problema pedido.

Na tarefa 2 é proposto um novo problema, em linguagem natural e é pedido que os alunos relacionem a interpretação que fazem com o conhecimento de funções que possuam. Pretende-se que concluam que este problema pode ser representado por uma função afim, dado que a Laura recebe 3 euros para o bilhete de autocarro, logo 3 é a ordenada na origem da função, e que o preço a pagar por cada hora de trabalho corresponde ao valor do declive. O problema termina pedindo para representar algebricamente a função em causa e usar outro tipo de representação da função em causa, apresentando as razões para essa escolha.

Os recursos planeados para esta ficha de trabalho foram, além do quadro e marcadores, o enunciado da ficha para cada um dos grupos e o projetor.

Síntese das aulas

Aula 1. Dia 29 de fevereiro (90min)

Iniciei a aula informando a turma que iriamos iniciar a unidade das funções, questionando a turma sobre o conceito de função. A turma foi respondendo alguns conceitos ligados ao tema e relembrando alguns conceitos chave do tema. Durante este questionamento, eu fui registando no quadro alguns dos conceitos relembrados pela turma, por forma a orientar e focar a turma. Esta pequena introdução foi muito importante para que a turma aderisse à tarefa proposta. Informei os alunos que o método de trabalho iria ser a pares, que deveriam fazer os registos a caneta na folha das tarefas, apresentar as respostas e justificar os seus raciocínios por escrito. Na fase de discussão todas as eventuais correções deveriam ser feitas no caderno diário, e que no final, a ficha iria ser recolhida.

Na 1.ª e 2.ª tarefas houve uma boa adesão da turma. A discussão inicial ajudou e as dúvidas que surgiram foram sendo discutidas entre os pares, com partilha de ideias e de opiniões e com minha orientação. O ritmo de trabalho da turma foi bom, de tal forma que foi difícil passar para a fase de discussão, porque os grupos de trabalho queriam continuar a discutir as suas conclusões. Na discussão coletiva, foram discutidos os conceitos referidos na fase introdutória e esclarecidas as dúvidas, ligadas à tarefa 1.

Conceitos revistos nesta fase da aula:

-Dados os conjuntos A e B, define-se uma **função *f*** (ou aplicação) de A em B, quando a cada elemento x de A se associa um único elemento de B que se representa por *f(x).* Aos elementos do conjunto A chamamos objetos e aos seus correspondentes, no conjunto de chegada, chamamos imagens.

-Designa-se uma função *f* de A em B por $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ou por *f.*

-O **domínio** de uma função é o conjunto dos objetos, representa-se por D.

-O **contradomínio** de uma função é o conjunto das imagens, representa-se por CD ou D´.

-O **gráfico** de uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ é o conjunto dos pares ordenados *(x; y)* com $x \in A$ e $y = f(x)$. A variável *x* designa-se por variável independente e *y* por variável dependente.

-Função **constante** $f: IR \to IR$, tal que $f(x) = b, com\ b \in IR$, para cada $x \in IR$.

-Função **linea**r $f: IR \to IR$, tal que $f(x) = ax,\ com\ a \in IR$, para cada $x \in IR$.

-Função **afim** $f: IR \to IR$, tal que $f(x) = ax + b, com\ a, b \in IR$, para cada $x \in IR$, onde a é o coeficiente de *x* e b é o termo independente.

Na minha opinião a tarefa 1 foi adequada ao objetivo a que me propus, contudo, a representação gráfica correspondente a uma parábola (função (D) da tarefa 1) levantou dificuldades aos alunos. Na tarefa 2, não foi imediato para os alunos se o consumo de combustível era ou não função da distância percorrida. Esta dificuldade foi ultrapassada e a turma chegou à conclusão que pelo menos o consumo era função da distância. Na discussão desta tarefa foi tido em conta o contexto do problema apresentado, tanto na representação gráfica como na algébrica; ajudando a turma a compreender, a relação entre as variáveis e a transição entre os diferentes tipos de representações.

Conceitos revistos nesta fase da aula:

-Uma função numérica *f* definida para valores positivos é de proporcionalidade direta quando (e apenas quando) é constante o quociente entre *f(x)* e *x*, para qualquer *x* pertencente ao domínio de *f.*

-Uma função *f*, é **função de proporcionalidade direta**, quando é igual no seu domínio, a uma função linear de coeficiente $a = f(1)$, com $f(x) = ax,$ sendo a a constante de proporcionalidade direta. (Note-se que a função *f* é igual à restrição de uma função linear ao domínio de *f)*

OBSERVAÇÃO: Nesta fase a turma foi orientada a concluir que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem do referencial, isto é no gráfico de uma função linear.

Na tarefa 3, tomei a decisão de dar um pouco menos tempo para a fase de trabalho autónomo do que o que tinha previsto na planificação, dado que a discussão das tarefas 1 e 2 foi um pouco mais longa que o previsto. Esta decisão levou à não conclusão da tarefa por um grande grupo de alunos. Foi na fase de discussão final que foi possível rever a distinção entre os diferentes tipos de função apresentadas e fazer uma leitura e interpretação mais aprofundados dos dados do enunciado.

Para esta aula, estava planeado apresentar no final uma síntese dos conceitos trabalhos, usando um conjunto de slides, mas não foi possível. Se voltar a usar esta tarefa, numa turma com as características da turma observada, terei de considerar a possibilidade de retirar algumas alíneas, por exemplo na tarefa 1, a 1.1. (D), porque o estudo da função quadrática vai ser trabalhado no 9.º ano. Sem esta alínea (D) posso alcançar o objetivo que me propus de igual forma para a 1.1. Retirando a 1.2. os conceitos de conjunto de partida e de conjunto de chegada que já foram trabalhados no 7.º ano podem ser revistos apenas na fase de discussão desta tarefa, não prejudicando o processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Na minha análise pós aula, sinto que deveria ter aberto mais a discussão à turma, não deixando que os alunos que respondem sejam sempre os mesmos, tendo o cuidado de questionar diretamente alunos que são menos participativos, ou mais distraídos, de modo a criar a oportunidade de sentir mais toda a turma, promovendo aprendizagens mais significativas em todos os alunos. Mas a opção de utilizar a projeção das tarefas no quadro nos momentos de discussão coletiva, facilitou os registos escritos apresentados pela turma, assim como a sua organização e justificação, permitindo expor os raciocínios e estratégias utilizadas sem desperdiçar tempo.

Aula 2. Dia 03 de março (90min)

Iniciei, ao primeiro tempo da manhã, a segunda aula dedicada ao tema das funções ditando o sumário. A falta de pontualidade de muitos alunos e a falta da escrita do sumário no quadro não ajudou os alunos presentes a focarem-se de imediato no trabalho.

Como planeado, comecei por questionar a turma sobre o que tinha sido trabalhado na aula anterior. A turma foi acalmando e respondendo, permitindo fazer uma breve síntese dos conceitos trabalhados na primeira aula. Esta síntese foi acompanhada de um registo no quadro sobre as funções trabalhadas e quais as principais características das respetivas representações gráficas e algébricas. Nesta fase referi que uma função se caracteriza pelo seu domínio e contradomínio, mas devia ter referido que era o domínio e a sua expressão algébrica. Nas aulas seguintes, este foi um ponto que tive o cuidado de reformular, atendendo ao rigor científico da comunicação matemática. Depois desta síntese, distribui a ficha de trabalho, informando que o método de trabalho iria ser o mesmo da aula anterior. Informei a turma relativamente aos objetivos para a tarefa 1 e o tempo que iríamos dedicar para a sua resolução, iniciando-se assim a fase de trabalho autónomo, o qual fui orientando conforme o planeamento executado.

A turma aderiu bem à tarefa embora alguns alunos tenham tido dificuldades em perceber como iam indicar uma hora e meia, isto é, se o objeto a usar era 1,5 ou 1,3. Nesta aula, todas as professoras foram circulando e apoiando a turma. Todo este trabalho foi bastante enriquecedor para as aprendizagens da turma, motivando-os positivamente. Saliento que, mesmo os alunos que normalmente se mostram mais distraídos e desinteressados aderiram à proposta de trabalho e a fase de trabalho autónomo foi bastante produtiva.

A fase de discussão não foi tão bem conseguida, porque a estratégia de resolução por mim selecionada para ser apresentada foi a construção de uma tabela onde estavam os valores pedidos para todos os automóveis, o que não ajudou a uma perfeita compreensão e organização dos resultados obtidos. Teria sido mais vantajoso apresentar uma estratégia de resolução com uma tabela distinta para cada automóvel, facilitando assim o cálculo da função de proporcionalidade direta para cada um dos casos e a sua respetiva expressão algébrica, explorando separadamente cada um dos casos. O uso do papel milimétrico para as representações gráficas das funções pedidas ajudou na compreensão dos conceitos e da relação existente entre as variáveis envolvidas. Nesta representação, a turma não mostrou dificuldades em contextualizar o problema pedido e a grande maioria dos alunos fez a representação gráfica do problema no contexto proposto. Quando fiz a generalização da função de proporcionalidade direta para uma função linear tive o cuidado de referir que já não estava a trabalhar no contexto do problema e, assim, estendi o domínio da função de IR_0^+

para IR e foi possível a turma compreender que a relação entre as variáveis (independente e dependente) se mantinha, introduzindo o conceito de declive de uma reta. Na discussão utilizei o seletor do Geogebra para permitir a visualização da variação do parâmetro a (declive), comprometendo a compreensão do que era previsto. As reações dos alunos foram esclarecedoras da falta compreensão dessa variação, mostrando dificuldades em acompanhar os raciocínios efetuados. A minha escolha, em usar o seletor para fazer variar o parâmetro a, não foi a mais adequada. Deveria ter feito a representação de várias funções e não de apenas uma. Assim, os alunos poderiam comparar as diferentes representações e perceber melhor a variação do parâmetro a. Ter feito uma síntese com registo no quadro das conclusões obtidas na variação do parâmetro a ajudou, mas não foi suficiente. Mostrar as diferentes representações gráficas e correspondentes expressões algébricas em simultâneo teria permitido à turma tirar conclusões por si, sobre a variação com mais facilidade e maior compreensão. Este será um ponto a melhorar na minha planificação numa posterior utilização desta tarefa.

Para esta aula estava planeada uma segunda tarefa, com o objetivo de reconhecer que o gráfico de uma função afim se obtém do gráfico da função linear por uma translação de um vetor usando o recurso da calculadora gráfica. Este objetivo não foi alcançado nesta aula por falta de tempo. O trabalho com a calculadora gráfica já tinha sido implementado por mim numa aula anterior na qual foi aplicada uma tarefa. A turma, fazendo uso de um pequeno manual e com a minha orientação e da Professora Titular, aderiu muito bem a esta nova experiência. Saliento ainda que a Escola Cooperante tem este e outros recursos disponíveis que podem melhorar a dinâmica da sala de aula.

Um dos aspetos a melhorar após esta aula, é não ser tão ambiciosa nos objetivos que pretendo alcançar, dar o tempo necessário à turma para as aprendizagens ocorrerem. Devo ter o cuidado de não validar logo as questões colocadas, deixando a turma tirar as suas próprias conclusões e aprender também com os seus erros, ou seja, devo abrir a discussão a toda a turma permitindo a construção das suas próprias aprendizagens. Relativamente aos aspetos positivos, o uso de diferentes recursos, tal como o papel milimétrico, o Geogebra ou mesmo a calculadora gráfica (que acabou por não ser utilizada nesta aula), tornam a aula bastante dinâmica, mantendo a turma sempre interessada, quebrando rotinas e, simultaneamente, criando contextos facilitadores de aprendizagem.

Aula 3. Dia 04 de março (45 min)

Dado que esta era uma aula de apenas 45 minutos, planeei uma proposta de trabalho com duas tarefas, usando o mesmo método trabalho das aulas anteriores.

Na planificação desta aula, dividi a aula em duas fases: a introdução e o trabalho autónomo. Deixei a fase de discussão para a aula seguinte, que me permitiu realizar entrevistas a três pares de alunos (previamente selecionados), por forma aceder aos raciocínios realizados e pedindo maior pormenor nas justificações, em cada uma das estratégias desenvolvidas, compreendendo quais as dificuldades sentidas ao longo da realização desta ficha.

Iniciei a aula escrevendo o sumário no quadro e fazendo uma breve introdução onde expliquei o método de trabalho e a forma como se iria desenvolver a aula. Tive o cuidado de informar a turma que o tempo dedicado à realização da proposta de trabalho iria ser de 20 minutos. Desta forma, evitei que a turma pensasse que o trabalho desta aula era apenas a ficha. Os alunos, embora com alguma agitação, começaram logo a trabalhar. Os grupos que foram terminando as tarefas propostas antes do término da aula começaram a realizar tarefas do manual, conforme o previsto na planificação.

Durante a fase de trabalho autónomo, a tarefa 1 (função de proporcionalidade direta) não colocou grandes dificuldades à turma. Os pares de trabalho fizeram uma boa interpretação do problema proposto, embora na sua estratégia de resolução quase todos tenham usado a regra de três simples, parecendo, no entanto, não perceberem muito bem porque pode ser usada neste caso.

Sendo a tarefa 2 uma tarefa de exploração, os alunos manifestaram mais dificuldades e solicitaram maior apoio dos professores presentes. As dificuldades manifestaram-se sobretudo a nível das justificações a apresentar nas relações estabelecidas entre as representações gráficas dadas e a função *h* representada algebricamente. Este foi um grande desafio para os grupos de trabalho. Embora a turma já tivesse trabalhado a função afim, a transição entre as diferentes representações e o estudo da variação e da ordenada na origem, ainda não estavam consolidados. Para ultrapassar estas dificuldades, fui questionando qual era o tipo de funções que estavam apresentadas e se outra representação da função inicial iria ajudar. A resposta foi afirmativa e alguns grupos tentaram fazer a representação gráfica da função representada algebricamente. Esta estratégia permitiu que alguns grupos conseguissem apresentar as razões que justificavam o pedido da tarefa.

Na realização da tarefa 2 a turma teve muitas dificuldades na transição entre representações. Uma grande maioria não aplicou os raciocínios feitos na aula anterior para o estudo da variação do parâmetro a. Se o tivessem feito, teriam conseguido apresentar a justificação que invalidava um dos gráficos apresentados. Verifiquei, assim, que este seria um ponto a trabalhar nas próximas aulas. Alguns grupos usaram o conhecimento da ordenada na origem e conseguiram apresentar as razões para um dos gráficos.

Aula 4. Dia 07 de março (90min)

A aula iniciou-se ditando o sumário e com a entrega da ficha 3 realizada na aula anterior. Informei a turma que iríamos começar por fazer a discussão das tarefas realizadas em trabalho autónomo na aula anterior. Para esta discussão preparei dois slides, apenas com as representações gráficas dadas, um para cada tarefa, tendo o cuidado de arrumar estas representações por forma a gerir o espaço útil necessário para serem feitos os registos escritos das estratégias e conclusões obtidas pela turma, por forma que tudo ficasse organizado no quadro.

Para a discussão da tarefa 1, selecionei um par de alunos que escolheu a regra de três simples como estratégia, usada pela maioria dos pares de alunos. Assim, foi possível questionar sobre o porquê desta escolha, levando a turma a compreender que só podem usar esta estratégia porque estão perante uma função de proporcionalidade direta. Como tive oportunidade de analisar detalhadamente os registos escritos foi possível discutir as estratégias utilizadas e aproveitar para discutir qual o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema exposto. Na realização da tarefa 2 confirmei que existiam muitas dificuldades na transição entre representações. Tentei, por meio de questionamento, fazer com que as dúvidas fossem ultrapassadas, mas acabei por sugerir aos pares a possibilidade de fazerem outro tipo de representação para a função $h(x) = x + 2$, que os ajudasse a apresentar as razões pedidas. O uso do slide com as representações gráficas dadas no enunciado foi um bom método para gerir o espaço no quadro e ter a possibilidade de construir a representação gráfica da função h, fazendo a comparação entre as representações gráficas dadas, registando por baixo de cada uma delas as conclusões obtidas. A representação gráfica da função h foi apresentada por um aluno com explicações e justificações passo a passo para que a turma fosse ultrapassando as suas dificuldades. A discussão destas duas tarefas foi muito rica, embora um pouco mais longa que o previsto na planificação, mas consegui envolver toda a turma usando o questionamento direcionado a cada grupo sobre os diferentes raciocínios e estratégias desenvolvidos. Optei por estender o tempo previsto nesta fase de discussão, mas todo o tempo dispensado foi valioso visando as aprendizagens dos alunos.

A aula continuou, conforme a planificação, com a distribuição da ficha de trabalho sobre "Declive e Paralelismo". Informei a turma que o método de trabalho era a pares e que dispunham de 15 minutos para a realização da tarefa. O objetivo desta segunda parte da aula era conduzir os alunos à relação entre o declive e o paralelismo entre retas, utilizando uma tarefa de exploração. A ficha proposta tinha duas partes, mas apenas entreguei a primeira parte com duas tarefas, como tinha planeado, se o tempo útil de aula não permitisse não iria passar para a segunda parte da ficha (tarefa 3). Isto foi o que acabou por se verificar, pois a primeira discussão foi mais longa que o previsto.

A turma estava motivada e o trabalho autónomo correu bem, embora tenham surgido algumas dificuldades a verificarem se os pontos dados pertenciam ou não à função *h*. Contudo, o questionamento previsto na planificação permitiu que as dúvidas fossem ultrapassadas e fazer a transição para a representação gráfica e posteriormente algébrica das funções pedidas.

A turma ofereceu alguma resistência em passar para a fase da discussão coletiva porque o tempo dado para o trabalho autónomo não permitiu que todos os grupos conseguissem terminar as duas tarefas propostas, alguns alunos queriam continuar a trabalhar. O tempo útil de aula fez-me avançar, pedindo à turma para discutirmos em grande grupo. A representação gráfica da função *h*, já estava registada no quadro (da discussão da tarefa anterior), conforme previsto na planificação. Para a questão 1.1. foi apresentada uma representação em tabela por uma aluna e feita sua conversão para a representação gráfica da função *h*. Posteriormente pedi que outro aluno fosse ao quadro registar as representações gráficas das retas pedidas, paralelas à representação da função *h*. Nesta fase recorremos ao material de desenho, permitindo maior rigor nas representações gráficas. Foram discutidas e justificadas as conclusões sobre a relação entre o declive e o paralelismo de duas retas e foi feita a representação algébrica das respetivas funções, consolidando as noções de declive e de ordenada na origem.

Conceitos revistos nesta fase da aula:

-Dada uma reta de equação $y = ax + b$, a designa-se por declive da reta e b por ordenada na origem (ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo dos yy).

-Duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive.

No final desta discussão, como o tempo útil não permitia passar para a segunda parte da ficha de trabalho, e usando as representações realizadas no quadro, optei por orientar a turma a reconhecer que o gráfico de uma função afim se obtém do gráfico de uma função linear por meio de uma translação de um vetor, definido pelo segmento de reta orientado de origem $(0,0)$ e de extremidade $(0, b)$. Não estava prevista a discussão deste aspeto nesta aula, mas com os registos que tinha no quadro foi oportuno abordar este conteúdo, este objetivo fazia parte da segunda aula. Conclui, focando a turma na questão 2 e, fazendo eu os registos no quadro, escrevi a expressão algébrica pedida, devidamente justificada e validada pela turma.

Nesta aula, senti que a turma esteve mais envolvida nas fases de discussão coletiva. Consegui fazer uma boa triangulação da turma com o meu questionamento. Conhecer ao pormenor todas as dificuldades e estratégias desenvolvidas na realização da ficha 3 (aula anterior), permitiu-me direcionar questões muito específicas a cada grupo e ter a opinião da turma para cada uma delas. A possibilidade de analisar os registos escritos dos vários grupos de uma aula para a outra foi bastante útil, tanto para mim, pois verifiquei as dificuldades sentidas e quais as estratégias usadas, como para os alunos, que tiveram a oportunidade de explicar as suas estratégias e aprender as estratégias usadas pelos outros grupos, compreendendo quais as potencialidades de cada uma delas.

Ter planificado uma sequência de tarefas permitiu usar a representação gráfica realizada na tarefa anterior, e o construir três formas de representar a mesma função, levando a turma a compreender melhor como pode ser feita a transição entre diferentes tipos de representações. Também permitiu ganhar tempo, sem repetir o processo de representar graficamente outra função.

Numa futura utilização desta ficha de trabalho, considerarei a possibilidade de não realizar a segunda parte da ficha de trabalho (tarefa 3) dado que é mais benéfico para a turma ter tempo para consolidar as aprendizagens realizadas. No caso de conclusão antecipada da tarefa, poderei recorrer a tarefas do manual; dando tempo aos alunos para realizarem as suas próprias aprendizagens.

Aula 5, Dia 10 de março (90min)

A aula, ao primeiro bloco da manhã, iniciou-se com a escrita do sumário no quadro com o objetivo de focar os alunos para começarem a trabalhar. Em seguida, distribui a tarefa e expliquei o método de trabalho; dando-se início à fase de trabalho autónomo, realizado a pares.

Na resolução da tarefa 1, a maioria da turma sentiu muitas dificuldades para determinar as expressões algébricas pedidas, concluindo que não estavam a recorrer aos conceitos já trabalhados. Então tomei a decisão de interromper o trabalho autónomo e questionar a turma sobre quais os tipos de funções cujas representações gráficas eram apresentadas na ficha. A turma ofereceu alguma resistência em parar, mas com o questionamento e alertando que todos estavam a sentir dificuldades, a turma começou a responder, concluindo que existia uma função linear, e qual a sua expressão geral, indicando posteriormente o seu declive, usando a razão entre a variável dependente e a independente. Colocada a questão sobre qual a posição relativa das retas apresentadas, alertou-os para usarem a relação sobre o paralelismo e o declive trabalhado na última aula. Assim, foi possível concluir quais as expressões algébricas das funções apresentadas. Nesta fase da aula tentei ultrapassar uma das minhas dificuldades que é envolver toda a turma na discussão. Foi necessário chamar à atenção e pedir a colaboração da turma, mas os alunos queriam voltar rapidamente ao trabalho autónomo. Esta paragem no trabalho autónomo não foi planeada, mas foi importante, porque os alunos estavam a sentir muitas dificuldades em avançar. Os grupos retomaram o trabalho autónomo, concluindo com sucesso as questões em falta. Na discussão coletiva da última parte desta tarefa, pedi aos alunos que normalmente não trabalham nem participam para apresentarem as suas conclusões à turma. A professora Titular observou que esta era uma das poucas vezes que estes alunos iam ao quadro. Penso que, dado que este grupo de alunos estava a aderir muito bem ao trabalho proposto, esta foi uma ótima oportunidade de os valorizar e mantê-los motivados.

A sala onde decorreu esta aula tem um quadro para fazer as projeções e outro para fazer os registos escritos, o que permitiu ter sempre visível as representações gráficas da tarefa, e no quadro ao lado apresentar os cálculos para determinar as expressões algébricas. Usando estes dois recursos foi fácil relacionar os resultados obtidos nas expressões numéricas com o valor do declive obtido nas expressões algébricas e observar as respetivas representações gráficas. Esta tarefa terminou com a apresentação de uma conjetura para a fórmula de cálculo do declive quando são conhecidos dois pontos distintos de uma mesma reta.

No final da discussão apresentei um conjunto de slides, consultar planificação (Apêndice B) onde foi generalizada a fórmula de cálculo para o declive, que. foi posteriormente registada nos cadernos diários da turma.

Conceito trabalhado nesta fase da aula:

-Dada uma reta r determinada por dois pontos, A de coordenadas (x_A, y_A) e B de coordenadas (x_B, y_B), com $x_A \neq x_B$, **o declive de *r*** é igual a $\boldsymbol{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Nesta explicação, mais expositiva, estabeleci conexões com conceitos e resultados já trabalhados anteriormente, recorrendo à semelhança de triângulos e ao Teorema de Tales para explicitar aos alunos o porquê da fórmula.

Na planificação do trabalho autónomo da tarefa 2, não antecipei dificuldades na leitura e interpretação dos dados do enunciado, contudo verifiquei que parte da turma manifestou dificuldades neste sentido, não compreendendo quais os pontos dados. Com alguma orientação esta dificuldade foi ultrapassada, foram avançando para a expressão algébrica pedida. Na fase de discussão foi apresentada uma resolução realizada por um dos pares, que tinha utilizado a fórmula de cálculo do declive, começando por apresentar à turma a sua forma de interpretação dos dados do enunciado para ter os dois pontos da reta. Para o cálculo da ordenada na origem também foi possível aplicar como estratégias o uso do ponto A ou do ponto B levando a turma a concluir que é indiferente o ponto usado, obtendo em qualquer das duas formas o mesmo valor para a ordenada na origem. Como o tempo de aula já era pouco, optei por ser eu a fazer os registos para a questão 2.2. pedindo ao grupo turma as justificações dos raciocínios a efetuar, explorei neste caso particular qual o significado de $f(0) = -3$ e a turma concluiu que não era necessário fazer nenhum cálculo para determinar a respetiva ordenada na origem dado que ela já era dada. Não foi possível discutir com a turma a questão 2.3. dado que a aula terminou, mas esta questão era muito análoga às anteriores não prejudicando o processo de ensino-aprendizagem da turma.

O balanço global que faço desta aula é positivo. Fiquei satisfeita com as opções tomadas na minha planificação e no decurso da aula. Saliento o facto de ter deixado a turma trabalhar sozinha na fase inicial, permitindo-lhes sentir as próprias dificuldades. Foi também importante mostrar à turma o porquê da fórmula de cálculo do declive, pois ficaram com uma ideia dos conceitos envolvidos na construção deste conceito matemático. Relativamente à ficha de trabalho, apenas completava o enunciado na tarefa 1 referindo que as retas apresentadas são estritamente paralelas facto que não ficou registado na ficha de trabalho.

Aula 6. Dia 11 de março (45 min)

Sendo esta uma aula de 45 minutos, ditei o sumário para iniciar a aula e informei a turma que o método de trabalho iria ser o mesmo das aulas anteriores. Informei que teriam 20 minutos para realizar a ficha e passei à distribuição dos enunciados. A turma esteve um pouco barulhenta, existindo conversas paralelas, que foram acalmando com as chamadas de atenção.

A tarefa 1 não levantou grandes dificuldades, embora uma das questões tivesse um valor representado na forma decimal. O trabalho autónomo decorreu como antecipado na planificação, mas foi necessário relembrar a necessidade de registarem os raciocínios e as justificações para as questões.

Na tarefa 2, a interpretação do enunciado do problema levantou algumas dúvidas sobre o valor do bilhete do autocarro da Laura. Alguns grupos interpretaram o preço de ida e volta com valor de 3€ e outros de 6€, resultado da soma das duas viagens. Neste caso, a minha orientação foi no sentido de alertar para a necessidade de fazerem uma leitura cuidada do enunciado do problema. A maioria da turma percebeu que a função que representava o problema descrito era uma função afim, dado que o valor a receber era acrescido do valor do bilhete, mas nem todos conseguiram escrever corretamente a sua expressão algébrica. Na última questão desta tarefa era pedida outra forma de representação da função (sem referir que tipo de representação deveriam usar), embora as justificações para as escolhas efetuadas nem sempre tenham sido registadas. Nesta questão eu esperava que a grande maioria da turma escolhesse a representação gráfica da função, dado que esta representação foi trabalhada ao longo de quase todas as aulas dedicadas ao tema das funções e era adequada ao contexto do problema, mas alguns grupos apresentaram a representação tabelar, referindo que esta era mais fácil.

Dado que não estava planeado realizar a discussão destas tarefas apresentadas nesta aula, os grupos que terminaram a proposta de trabalho mais cedo realizaram alguns exercícios do manual escolar. A opção de não fazer a discussão coletiva durante esta aula deveu-se ao facto de no final desta aula realizar entrevistas a três pares de alunos, para aceder aos raciocínios realizados pedindo justificações mais detalhadas e perceber quais as dificuldades sentidas.

Avaliação

A minha lecionação foi pautada pela avaliação reguladora, quer para mim como professora, quer para os alunos. No primeiro caso, para que eu pudesse identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos, permitindo-me refletir sobre a minha prática letiva. Para aceder ao raciocínio dos alunos, utilizei o questionamento, a observação das intervenções dos alunos na aula e a sua forma de adesão à tarefa. Enquanto no segundo caso, ao circular pela sala entre os pares de alunos, durante o trabalho autónomo, fui dando *feedback* aos alunos e privilegiando o questionamento orientado, para que estes se apercebessem dos seus raciocínios, aprendizagens e dificuldades.

Para além da avaliação reguladora, existiu também uma componente formativa, através da recolha, análise e devolução de produções realizadas pelos alunos nas aulas, bem como do questionamento intencional durante as aulas e na fase de entrevistas. A avaliação sumativa traduzir-se-á na realização de parte de dois testes sumativos, contruídos pela Professora Cooperante, aplicados à turma.

Capítulo 4

Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

Neste capítulo, indico os métodos e procedimentos, definidos para a recolha de dados deste trabalho. Caracterizo a forma como vai ser feita a escolha dos participantes envolvidos no trabalho, evidenciando os critérios de seleção. Termino, apresentando os instrumentos para a recolha de dados e o método de análise.

Opções metodológicas

Para este trabalho elegi uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, onde o investigador não interfere com a situação, descrevendo-a tal como ela ocorre, baseada na recolha de dados recolhidos na sala de aula. Este tipo de investigação, segundo Bogdan e Biklen (1994), é especialmente adequado quando as questões são "formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural" (p. 16). Para este autores a investigação qualitativa é caraterizada segundo cinco caraterísticas: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, no meu caso a sala de aula, e o investigador é o instrumento principal na recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são de natureza qualitativa descritiva; (iii) o investigador visa sobretudo o modo como os fenómenos ocorrem, isto é, são mais importantes os processos e menos os produtos; (iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva, ou seja, as hipóteses vão sendo construidas à medida que a análise vai sendo realizada; e (v) é dada especial importância ao significado que os participantes atribuem às suas experiências.

A observação promenorizada e delineada da interação entre os participantes, permitiu estudar os processos cognitivos utilizados nas situações problemáticas propostas, identificando as variáveis relevantes neste trabalho. Assim, (Fernandes, 1991), considera a investigação qualitativa como a melhor forma de obter informações relativamente a processos de ensino e aprendizagem.

Segundo Ponte (2002), são as questões formuladas que orientam a natureza da investigação e dos dados a recolher. Dado que a unidade de ensino é lecionada numa turma de 30 alunos, onde, todos são participantes, tomei a decisão de seleccionar três grupos de trabalho que me permitaram aprofundar com maior consistência as questões em estudo.

Participantes

Como já referi, neste trabalho participaram os alunos de uma turma do 8.º de uma escola do distrito de Lisboa. Com a ajuda da Professora Cooperante, selecionei um grupo de alunos de pequena dimensão de forma a aprofundar e refinar a recolha de dados, (Bogdan & Biklen, 1994). Esta seleção privilegiou os seguintes critérios: (i) heterogeneidade nos processos matemáticos associados ao raciocínio funcional; (ii) facilidade de comunicação. Esta opção produziu uma maior diversidade de registos, que tornou o trabalho em causa mais rico e significativo na sua concretização. O contacto com a turma desde o início do ano, permitiu estabelecer uma relação de proximidade, que facilitou a comunicação, principalmente com os alunos entrevistados.

Em seguida apresento os grupos de alunos selecionados e as suas caraterísticas mais relevantes.

Guilherme e Catarina

O Guilherme é um aluno que gosta muito da disciplina de matemática e com um desempenho acima da média, muito participativo e de fácil comunicação. Este aluno aderiu com muita facilidade às tarefas propostas, correspondendo a todos os desafios propostos, apresentando bom raciocínio matemático.

A Catarina é uma aluna com um desempenho mediano para alto, pouco participativa e introvertida, no entanto, quando foi solicitada a sua participação, não apresentou resistência e correspondeu de forma positiva ao pedido.

Em termos de grupo de trabalho os alunos apresentavam uma boa comunicação oral e escrita, preocupando-se com a justificação das estratégias utilizadas para a resolução da tarefa. Contudo, o Guilherme é o líder do grupo, incentivando constantemente a sua colega na realização das tarefas.

Beatriz e Leonel

A Beatriz é uma aluna muito comunicativa, mas revelava um desempenho médio-fraco na disciplina de matemática, o Leonel apresentava resultados ainda mais baixos nos testes e maiores dificuldades de aprendizagem. Este grupo não investia muito no estudo da matemática, como era muito comunicativo, distraia-se com muita facilidade, conversando quer entre eles quer com os colegas do lado. Na realização das tarefas, o grupo esforçou-se, discutiam entre si sobre o que era pedido e como resolver o pedido, mas as dificuldades eram muitas. Por este facto solicitavam a minha presença com frequência para tentarem compreender o que era pedido com as tarefas e para esclarecer as suas dúvidas. Quando os questionava sobre a estratégia que estavam a desenvolver, tinham imensas dificuldades em justificar o porquê das suas opções, revelando grande insegurança nas suas produções. Ao longo das várias aulas, foram começando a justificar as estratégias seguidas, evidenciando uma ligeira evolução nas aprendizagens realizadas.

Sara e Maria

A Sara é uma aluna média-alta, pouco faladora, nunca referiu se gostava de matemática, mas mostrava-se sempre predisposta e empenhada na resolução das tarefas, auxiliando sempre a sua colega.

A Maria é aluna introvertida, mas mostrou desde o início do ano uma grande empatia comigo, solicitando com frequência a minha ajuda, quer apenas para ela, ou para ela e para a colega. Este facto foi determinante na seleção deste grupo, porque as duas alunas se sentiam muito à vontade quando pediam a minha orientação. A Maria era uma aluna mediana, mas muito empenhada e trabalhadora.

Este grupo tinha uma boa comunicação oral e escrita, preocupando-se sempre em justificar as suas ideias e resoluções. Embora não sendo um grupo participativo, sempre que lhes era solicitado correspondiam positivamente, apresentado as suas ideias e justificando as suas estratégias.

A Sara era a líder do grupo em termos de conhecimentos matemáticos, mas a Maria era a porta-voz do grupo, quando surgiam dúvidas ou era necessário explicar como pensaram.

Recolha de dados

Para o trabalho de cariz investigativo é necessário proceder a uma recolha de dados. A sua qualidade informativa depende, em parte, da qualidade dos instrumentos que vão ser utilizados nessa recolha, (Bogdan & Biklen, 1994). Como investigadora utilizei: a observação, a recolha documental e entrevistas aos pares de alunos selecionados.

Observação

A observação é, claramente, um método de recolha de dados essencial numa investigação, dado que, consiste na observação e descrição de comportamentos dos sujeitos no seu ambiente natural. Segundo Bogdan e Biklen (1994), na observação naturalista, o observador deverá passar algum tempo com os sujeitos de forma a conquistar a sua confiança, criando um ambiente de partilha de ideias e opiniões.

A observação foi feita por mim e os dados foram recolhidos usando notas de campo, através de um guião pré-definido (Apêndice C), com o intuito de focar a atenção para os aspetos mais relevantes do meu estudo. Colmatei as informações recolhidas com registos vídeo e áudio, de forma, a captar os raciocínios desenvolvidos e das dificuldades evidenciadas. As notas de campo têm na sua essência duas componentes a descritiva e a reflexiva. Na componente descritiva, pretendi descrever o mais objetivamente possível o que observei e na componente reflexiva fiz uma análise pessoal da observação. As notas de campo surgem depois de cada aula, aquando do meu processo de reflexão sobre a minha prática.

Recolha documental

A recolha documental que realizei refere-se às produções escritas dos alunos das tarefas propostas e aos testes pós intervenção letiva. Segundo Guba e Lincoln (1981, citados por Lüdke & André, 1986), a recolha documental é uma fonte de informação estável, constituindo uma base de fundamentação de outros dados. Lüdke e André, consideram que estes documentos, constituem uma fonte natural de informação de onde podem ser retiradas evidencias que fundamentam afirmações e declarações do investigador. Os documentos escritos, podem ser pessoais, que englobam "qualquer narrativa feita na primeira pessoa que descreve ações, experiências e crenças do individuo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 177); e oficiais nos quais se incluem os documentos internos, a comunicação externa, os registos sobre os alunos e ficheiros pessoais (Bogdan & Biklen, 1994).

Neste trabalho, utilizei os dois tipos de documentos referidos por Bogdan e Biklen (1994). Como documentos pessoais, recolhi as produções escritas dos alunos referentes às tarefas e como documentos oficiais as fichas de registo dos alunos que constam no dossier de direção de turma.

Entrevista

A entrevista é um instrumento muito utilizado nas investigações qualitativas para a recolha de dados, e consiste na interação verbal entre o entrevistador e o entrevistado (Afonso, 2005). Este instrumento foi muito importante, porque permite obter de forma mais fidedigna qual o raciocínio desenvolvido pelos alunos, quais as principais dificuldades, e como interpretaram e desenvolveram a tarefa proposta (Bogdan & Biklen, 1994). As entrevistas podem ser estruturadas, não-estruturadas e semiestruturadas. Neste trabalho optei por a entrevista semiestruturada, que segundo Afonso (2005), obedece a um formato entre a entrevista estruturada e a não estruturada. Este tipo de entrevista é conduzido a partir de um guião que foi construído tendo por base as questões de investigação, organizado em objetivos, questões e tópicos.

Neste trabalho foram realizadas duas entrevistas a cada par de alunos selecionados, com registo de vídeo. As entrevistas foram efetuadas nas aulas de 45 minutos, antes da fase de discussão coletiva das tarefas propostas nessas aulas, e a discussão coletiva só teve lugar no início da aula seguinte. Desta forma, tive uma visão mais aprofundada dos processos de raciocínio funcional desenvolvidos pelos alunos, o porquê das suas escolhas nos diferentes tipos de representações e não menos importante, as principais dificuldades evidenciadas nesse trabalho.

Refiro que, foi pedida autorização aos encarregados de educação para a recolha de dados, as questões de ética foram salvaguardadas e, assim, foi possível assegurar o consentimento de todos os alunos para participarem neste trabalho de cariz investigativo.

Análise de dados

A análise de dados corresponde à organização sistemática de todos os dados recolhidos e tem como objetivo a sua compreensão e interpretação (Bogdan & Biklen, 1994). Sendo esta uma investigação de natureza qualitativa, a análise de dados teve por base aspetos teóricos revistos na literatura, o objetivo e questões orientadoras deste estudo.

Os dados analisados são referentes às seis fichas de trabalho, ao teste de avaliação, às seis entrevistas e registos vídeo e áudio das aulas lecionadas. Depois de organizados os dados recolhidos, e posterior triangulação, facilitou a análise de padrões relevantes, reduzindo e agrupando a informação disponível, emergiram três categorias de análise.

As categorias de análise, resumidas no quadro 4.1 são: (i) Conceito de função; (ii) Conceito de declive e (iii) Resolução de problemas e representações.

Quadro 4.1 – *Categorias e subcategorias de análise*

Categorias	Subcategorias
Conceito de função	1) Reconhece a função em vários tipos de representação 2) Estabelece a relação entre as variáveis
Conceito de declive	1) Significado do declive e dificuldades no início da intervenção letiva 2) Significado do declive e dificuldades durante a intervenção letiva 3) Significado do declive e dificuldades após a intervenção letiva
Resolução de problemas e representações	1) Mudança entre representações de uma função 2) Razões apontadas na escolha da representação usada

Capítulo 5

Apresentação e Análise de Dados

Neste capítulo apresento os resultados obtidos que visam dar resposta às três questões orientadoras deste trabalho. A análise dos dados assume um carácter descritivo e interpretativo, onde as minhas interpretações são baseadas na análise de vários documentos; na observação das aulas, nas produções escritas pelos alunos, nas gravações áudio e, nas entrevistas. Para a realização desta análise e por forma a obter uma informação mais esclarecedora dos dados, considerei três categorias de análise indo ao encontro das questões de investigação por mim definidas: (i) conceito de função; (ii) conceito de declive; e (iii) representações de funções.

Conceito de função

Com esta categoria pretendo dar resposta à primeira questão de investigação, procurando perceber como os alunos interpretam a relação entre variável independente e variável dependente no estudo das funções. Para tornar a análise dos dados mais explícita emergiram duas subcategorias de análise: (i) reconhece a função em vários tipos de representação; (ii) estabelece a relação entre as variáveis.

Reconhece a função em vários tipos de representações

No início da unidade de ensino, selecionei para a ficha de trabalho 1 um conjunto de tarefas, com o objetivo de avaliar o nível de conhecimentos dos alunos no tema das funções, dado que este tema já tinha sido iniciado no 7.º ano. Na tarefa 1 era dado um conjunto de correspondências usando representações em diagrama de setas, tabela e gráfico. Foi pedido aos alunos para indicarem qual ou quais representavam funções, justificando as escolhas. Pela análise das respostas a esta questão, verifiquei que no geral os alunos reconhecem os vários tipos de representações de uma função. A título de exemplo pode-se observar nas resoluções seguintes o tipo de resposta dada pelos alunos.

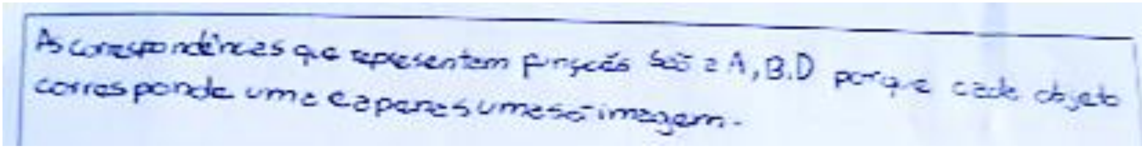

As correspondências que representam funções são a A, B.D porque cada objeto corresponde uma e apenas uma só imagem.

Figura 5.1 - Resposta da alínea 1.1. da ficha de tralho 1, do par Ana e Ricardo

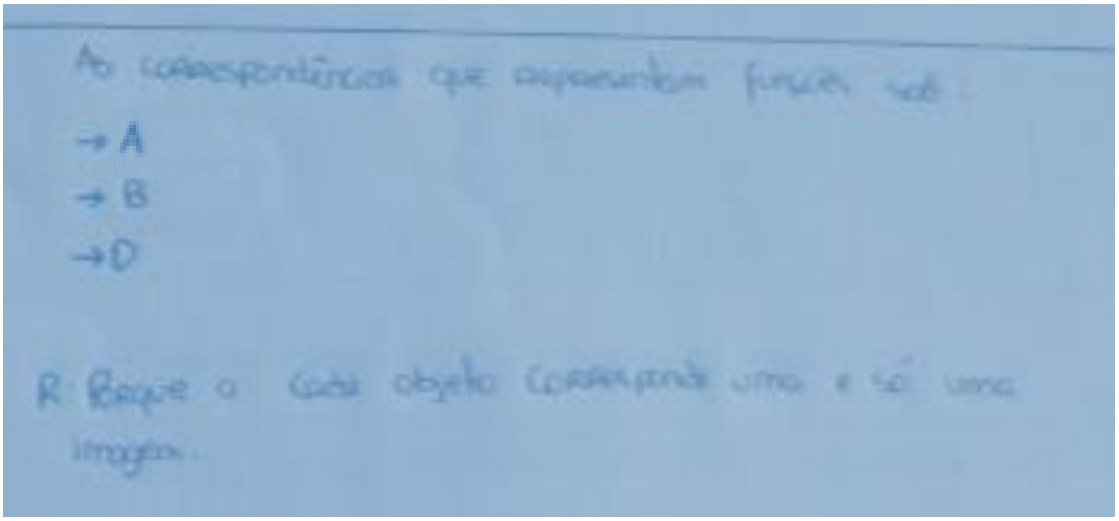

As correspondências que representam funções são:
→ A
→ B
→ D
R: Porque o cada objeto corresponde uma e só uma imagem.

Figura 5.2– Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 1, do par Beatriz e Leonel

No geral, os alunos da turma identificam as correspondências que representam funções nos diferentes tipos de representações e justificam corretamente as suas escolhas. Contudo, alguns pares identificam somente as correspondências sem nenhum tipo de justificação, como se observa na resolução seguinte:

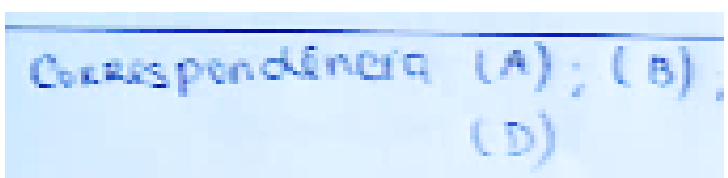

Correspondência (A); (B); (D)

Figura 5.3– Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 1, do par Mafalda e André

Este par apenas indica as correspondências que são função e não apresentam qualquer justificação para a sua escolha.

Em contraste com este par existiu um outro que identificou as correspondências que são função, justificando a sua escolha e também o porquê de ter eliminado uma das outras correspondências. A resposta deste par é apresentada na resolução seguinte:

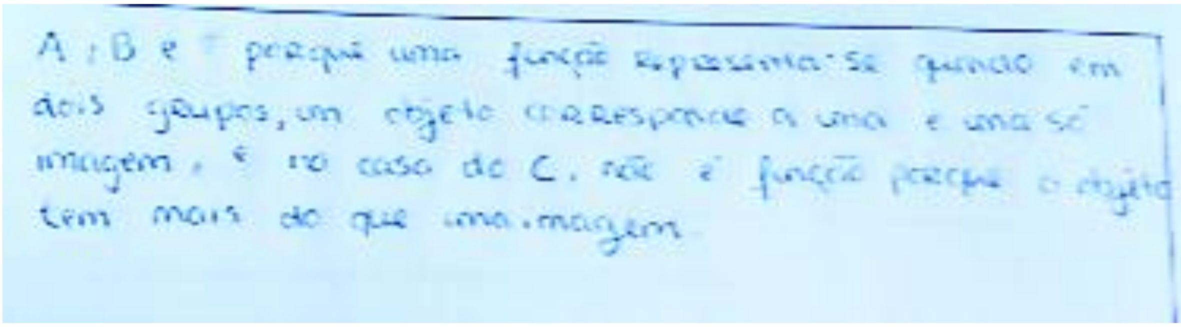

A, B e porque uma função representa-se quando em dois grupos, um objeto corresponde a uma e uma só imagem, e no caso do C, não é função porque o objeto tem mais do que uma imagem

Figura 5.4 – Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 1, do par Cristina e António

Este par identificou e justificou, ainda que com pouca correção matemática, duas das correspondências que são funções e tentou ainda explicar por que a correspondência C não é função, referindo que "porque o objeto tem mais do que uma imagem", não explicitando que ao objeto 1 correspondia -1 e 0.

O reconhecimento de uma função através da sua representação gráfica traz consigo algumas dificuldades que foram notórias na tarefa 1. Uma das resoluções que apresento em seguida evidência algumas dessas dificuldades:

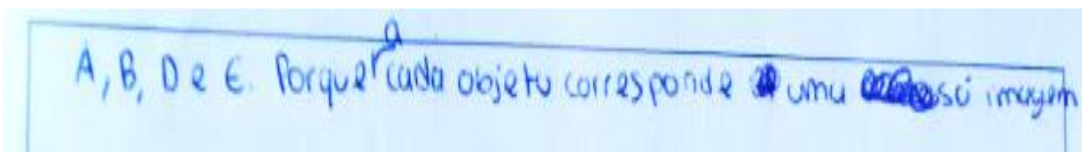

A, B, D e E. Porque a cada objeto corresponde uma só imagem

Figura 5.5 – Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 1, do par Sónia e David

Nesta resolução os alunos apesar de responderem com correção matemática, identificam a correspondência E como função, sendo que esta correspondência está representada graficamente através de uma reta vertical ($x = 2$), pelo que não é a representação gráfica de uma função. Posso concluir que apesar de apresentarem uma justificação correta, não a conseguem compreender pois escolheram uma correspondência errada. Também pela análise áudio dos diálogos entre outro par, durante a resolução da alínea 1.1, são evidentes as dificuldades na resolução, principalmente nas representações gráficas.

1 Beatriz – Com o gráfico é mais difícil! Como fazemos?
2 Leonel – Eu acho que este é. [o aluno está a referir-se à correspondência D] 1 corresponde ao 1; -2 acho que não interessa.
3 [os alunos passam para a correspondência F]
4 Beatriz – Temos de voltar aos gráficos! Mas com os gráficos é mais difícil!
5 Professora – Porquê? Vamos pensar neste. [correspondência D] Onde estão os objetos?

6 Leonel – Aqui [aponta para o eixo das ordenadas]

7 Professora – A colega concorda?

8 Beatriz – Não, é aqui! [aponta para o eixo das abcissas]

9 Professora – Parece que estamos num impasse. Pensem lá.

10 Leonel – Ok, concordo com a Beatriz é este. [aponta para o eixo das abcissas]

11 Professora – Muito bem! Então escolhe um objeto qualquer.

12 Leonel – Escolho o -1

13 Professora – Qual é a imagem?

14 Leonel – O -2.

15 Professora – Os objetos estão aqui, certo?

16 [risos]

17 Professora – Qual é a piada?

18 (…)

19 Professora – Imagina aqui o objeto, como encontras a imagem?

20 Leonel – Humm …

21 Professora – Então vamos lá escolher outro objeto. Por exemplo o 1. Como conseguem descobrir a sua imagem?

22 Beatriz – Vamos aqui. [aponta para o eixo das ordenadas]

23 Professora – E agora?

24 Leonel – Agora não sei.

25 Beatriz – Então temos que ver aqui.

26 Professora – Sim, ok, mas continuam sem me dizer qual é o valor da imagem. Tem de olhar para o eixo das ordenadas, como já me disseram, mas como fazem a correspondência entre o objeto e a imagem?

27 Leonel – Oh professora é difícil …

28 Professora – Então localizem no eixo das abcissas o 1. Desloquem o dedo até intersectarem o eixo das ordenadas. Vá façam lá.

29 Professora – Agora já me conseguem dizer qual é a imagem?

30 Beatriz – É o zero.

31 Professora – Isso mesmo. Então vamos lá recapitular. Expliquem-me como é que conseguem num gráfico localizar a imagem de um dado objeto.

32 Leonel – Então, procuro um objeto, subo ou desço para encontrar a linha e depois procuro o cruzamento com este. [apontando para o eixo das ordenadas]

(Registo áudio da aula 1)

Pela análise deste diálogo constatei que os alunos têm muitas dificuldades em *aplicar o conceito de função quando deparados com a sua representação gráfica*. Estas dificuldades prendem-se em primeiro lugar com a identificação de que os objetos se leem no eixo das abcissas (fala 6), e de que as imagens se leem no eixo das ordenadas (falas 20, 24 e 27). Em segundo lugar, o cuidado na escolha do ponto que tem de pertencer à representação gráfica da função (fala 24). Por fim, relacionarem que tem de existir interseção entre a reta vertical no valor objeto com a reta horizontal do valor da imagem (fala 27), identificando desta forma a correspondência entre objeto e imagem.

Outra dificuldade encontrada relaciona-se com a *representação da função em tabela*:

1 Maria – Aqui [B] se calhar é mais fácil se fizermos igual [A].
2 Sara – Como as bolinhas?
3 Maria – Sim, isso mesmo.
4 Maria – Na primeira bolinha colocamos o 0, -1, -2, -3 e -4 e depois na segunda bolinha o 3, o 3, o 6, o 9 e o 12 e agora ligamos.
5 Sara – Liga o 0 ao 3, o -1 ao outro 3, -2 para o 6 …
6 Maria – Vês, então é função.

(Registo áudio da aula 1)

Este par utilizou a estratégia de passar da representação em tabela, que para elas representava uma dificuldade, para a representação em diagrama de setas, e conseguiu identificar a correspondência B como função. No entanto repetiram no conjunto de chegada o algarismo 3. De referir que na análise que efetuaram da correspondência F utilizaram a mesma estratégia, o que lhes permitiu concluir que esta não era função.

Sendo a temática deste trabalho o raciocínio funcional, o conceito de função é trabalhado em todas as tarefas da intervenção. Outra forma de representação da função é a sua representação em expressão algébrica. Na ficha de trabalho 5, na tarefa 1, questão 1.1. é pedido aos alunos que escrevam a expressão algébrica de uma função dada a sua representação gráfica, justificando a sua resposta. Como exemplo das respostas dadas, mostra-se o seguinte exemplo:

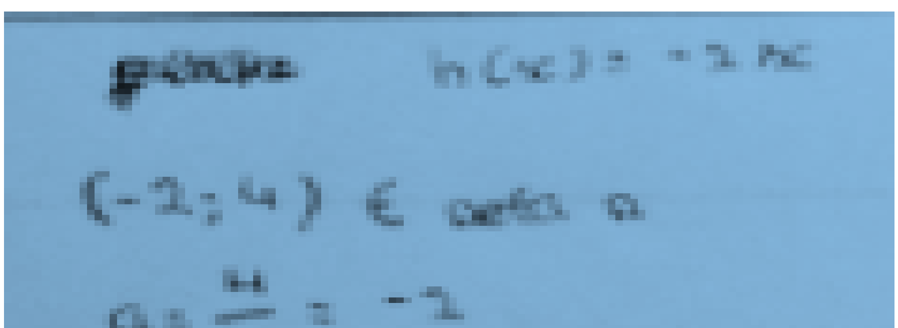


Figura 5.6 – Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 5, do par Miguel e Luís

No exemplo anterior é possível perceber que este par fez leitura correta da representação gráfica da reta *r*, escolhendo um ponto que pertence à reta. Identifica o tipo de função, função linear, e a partir do ponto determina o coeficiente do *x* escrevendo corretamente a expressão algébrica, estabelecendo a relação entre as variáveis.

Na ficha de trabalho 6, no problema 1, alínea 1.3, é pedido os alunos para escreverem a expressão algébrica da função, dada a sua representação gráfica:

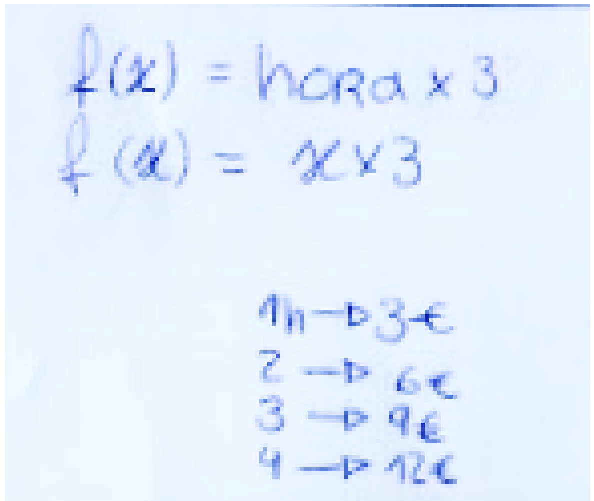


Figura 5.7 – Resposta da alínea 1.3. da ficha de trabalho 6, do par Ana e Ricardo

Pela análise deste exemplo é possível verificar que os alunos utilizam a estratégia multiplicativa para confirmarem a expressão algébrica da função representada, estabelecendo que a hora vezes três corresponde à quantia a receber pelo Carlos.

Contudo, também neste tipo de representação da função existiram dificuldades. Na ficha de trabalho 1, tarefa 2, alínea 2.5, verifiquei que existiram dificuldades na *construção da expressão algébrica*. Neste problema os alunos tinham de escrever uma expressão algébrica de uma função através da interpretação de uma função representada em linguagem natural e tabelar:

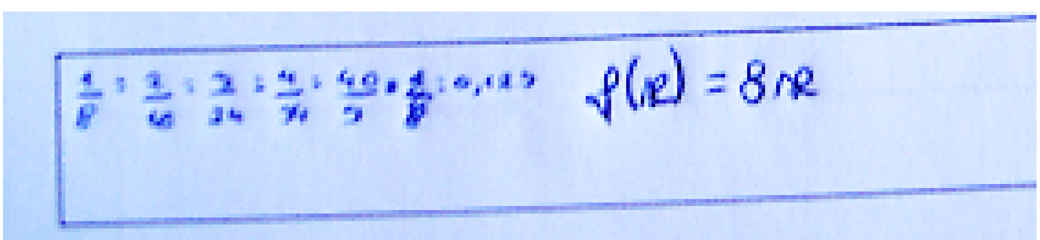


Figura 5.8 – Resposta da alínea 2.5. da ficha de trabalho 1, do par Catarina e Guilherme

Este par procurou relacionar as duas variáveis, dado que a função dada é de proporcionalidade direta, conseguindo determinar a constante de proporcionalidade direta, no entanto, quando escrevem a expressão algébrica fazem o inverso da constante de proporcionalidade, e desta forma a expressão algébrica fica incorreta. Saliento que em nenhum momento o par referiu que a função que modelava este problema era uma função de proporcionalidade direta.

Após a minha intervenção a turma realizou o teste de avaliação, construído pela Professora Cooperante, onde os alunos aplicaram os seus conhecimentos relativos a esta unidade de ensino. Na questão 9. do teste eram dadas afirmações pedindo para indicar as verdadeiras e as falsas, apresentando a justificação das falsas:

> *"9.4. A correspondência que a cada país faz corresponder a sua bandeira não é uma função.*
> *9.5. A equação da reta $x = 5$ representa uma função.*
> *9.6. Aos elementos do domínio chamamos imagens e aos elementos do contradomínio chamamos objetos."*

(retirado do 1.º teste de avaliação)

Ao analisar as respostas a esta questão, constatei que 73% responderam corretamente na alínea 9.4; 38% responderam corretamente na alínea 9.5 e 65% responderam corretamente na alínea 9.6. Verifiquei que existe um grupo considerável de alunos que identificam uma função e os seus conceitos base, mas a alínea 9.5 foi a que colocou mais dificuldades. A título de exemplo pode observar-se nos registos seguintes o tipo de resposta dada pelos alunos.

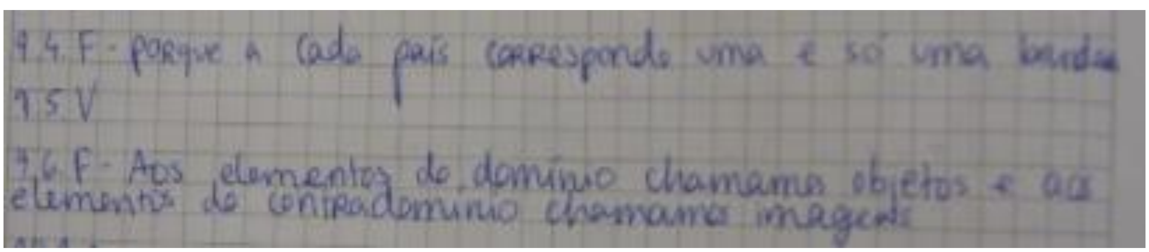


Figura 5.9 – Resposta da questão 9. do teste de avaliação 1 do Alberto

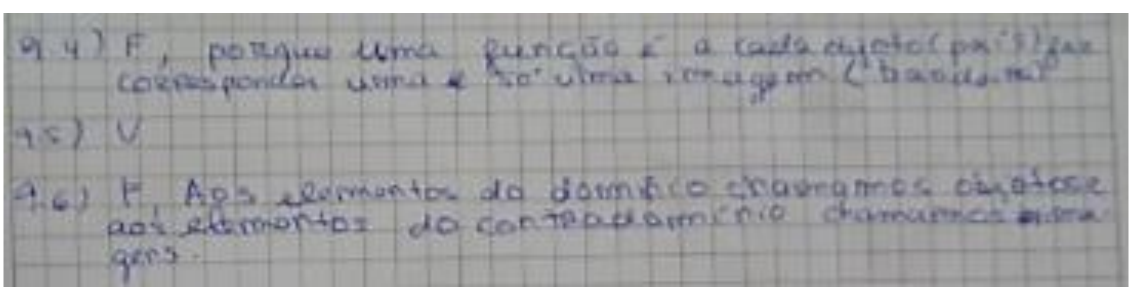
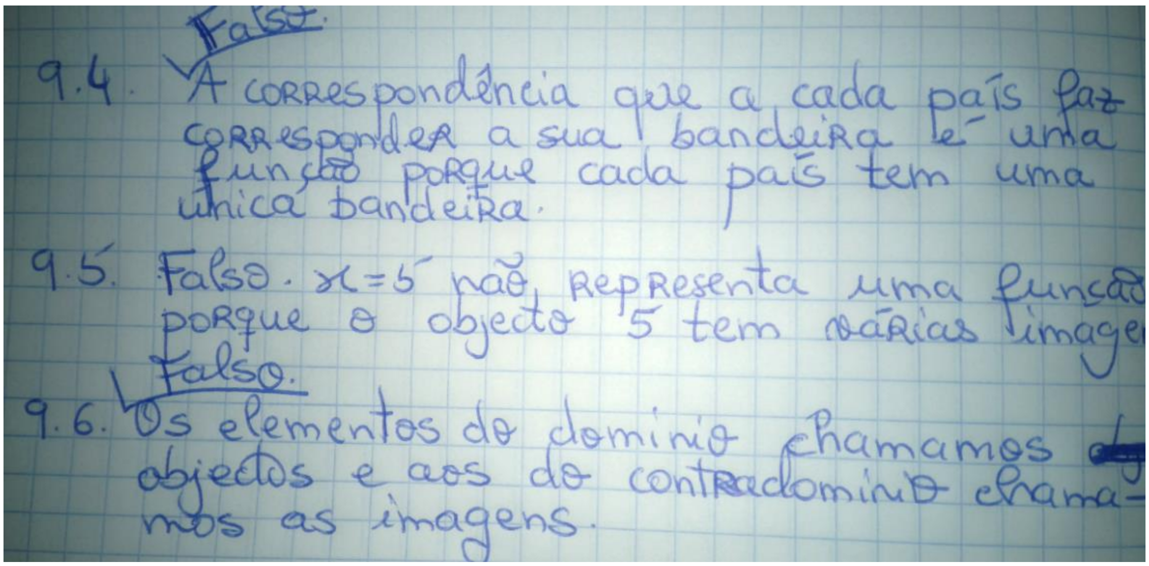


Figura 5.10 – Resposta da questão 9. do teste de avaliação 1 da Sónia

Nas respostas apresentadas, é possível observar que os alunos se preocupam em explicar as suas respostas, tendo o cuidado de usar a terminologia própria das funções. Sónia (figura 5.10) refere que o objeto é o país e a imagem a correspondente bandeira. No entanto, continuam a existir dificuldades na questão 9.5 uma vez que consideraram verdadeira a afirmação da "reta $x = 5$ representar uma função".

Uma das alunas, a Carlota, respondeu a estas questões do seguinte modo:



Falso.
9.4. A correspondência que a cada país faz corresponder a sua bandeira é uma função porque cada país tem uma única bandeira.
9.5. Falso. $x=5$ não representa uma funçã porque o objecto 5 tem várias imagen
Falso.
9.6. Os elementos do domínio chamamos ~~de~~ objectos e aos do contradomínio chamamos as imagens.

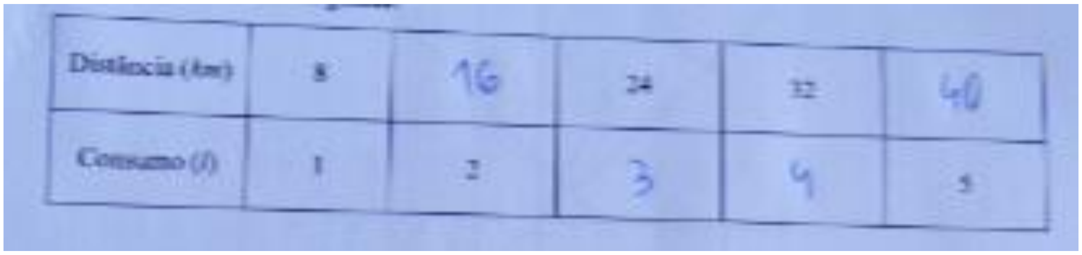
Figura 5.11 – Resposta da questão 9. do teste de avaliação 1 da Carlota

Na resolução destas três alíneas a aluna procurou justificar as suas respostas, usando uma linguagem matemática adequada ao tema das funções, conseguiu mostrar que conhece os conceitos base de função, assim como a definição de função, apresentando compreensão quando aplica essa definição na alínea 9.5 ao justificar o porquê de não ser a representação de uma função.

Pela análise das respostas dadas e dificuldades detetadas, verifico que existe um grupo alunos que consegue identificar as funções nas suas várias representações, revelando uma melhoria na compreensão do conceito de função ao longo da intervenção, desenvolvendo, deste modo, o seu raciocínio funcional.

Estabelece a relação entre as variáveis

Na ficha de trabalho 1, propus um problema dado em linguagem natural. Neste, os alunos tinham de completar uma tabela em que constavam alguns objetos (distância) e imagens (consumo). Apresento em seguida uma das resoluções de um par de alunos.



Distância (km)	8	16	24	32	40
Consumo (l)	1	2	3	4	5

Figura 5.12 – Resposta da alínea 2.1. da ficha de trabalho 1, do par Afonso e Alberto

O preenchimento da tabela não levantou grandes dificuldades aos alunos. De um modo geral, todos os pares completaram a tabela, recorrendo a duas estratégias, o *método aditivo* ou o *método multiplicativo*, estabelecendo desta forma a relação entre as duas variáveis (distância e consumo).

Um exemplo do método multiplicativo utilizado por um par de alunas é evidente no seguinte diálogo.

1 Professora – Expliquem lá como fizeram o vosso raciocínio?
2 Sara – O dobro de 1 é 2
3 Professora – Sim…
4 Sara – Logo o dobro de 8 é 16
5 Professora – E as restantes, como fizeram?
6 Sara – Usamos a tabuada, foi fácil.

(Registo áudio da aula 1)

Na alínea 2.2, foi proposto aos alunos que justificassem se o consumo era função da distância percorrida. No exemplo que apresento em seguida o par de alunos conseguem identificar que a correspondência é função, no entanto, não o justificam corretamente.

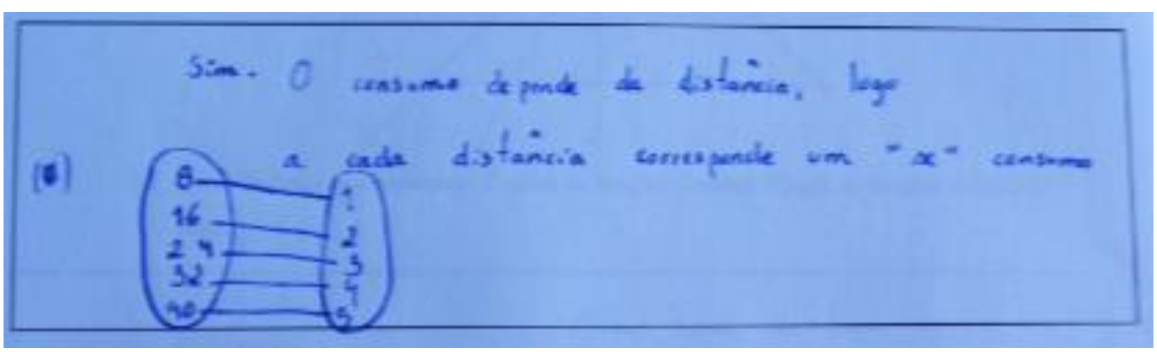


Figura 5.13 – Resposta da alínea 2.2. da ficha de trabalho 1, do par Pedro e Anabela

É evidente a dificuldade em justificar o porquê de a correspondência ser uma função. Este par começa por dizer que "o consumo depende da distância", mas em seguida refere que “a cada distância corresponde um *x* consumo” e na representação em diagrama de setas faz a ligação entre cada par de valores, mas não indica o sentido da correspondência.

A *confusão entre a variável independente e dependente* (objeto e imagem) é também sentida por outros alunos na realização da tarefa 2 (alínea 2.4. da ficha de trabalho 1):

1 Professora - Então, qual é a vossa dúvida?
2 Catarina - Como fazer esta. [alínea 2.4 - representar graficamente a tabela construída].
3 Professora - Quais são as variáveis?
4 Catarina - A distância e o consumo.
5 Professora - Qual a variável independente?
6 Guilherme - O consumo é independente.
7 Professora - Queres dizer que a distância depende do consumo?
8 Guilherme - Não sei…
9 Professora - Então, o que respondeste na alínea anterior?
10 Guilherme - Que o consumo em litros depende da distância percorrida em quilómetros.
11 Professora - Porquê?
12 Guilherme - No enunciado diz que o automóvel consome 1 litro de combustível a cada 8 km.
13 Professora - Então o que depende de quê, neste problema?
14 Guilherme - O consumo depende da distância.
15 Professora: - Concordas Catarina?
16 Catarina - Sim, o consumo varia em função da distância.
17 Professora - Então qual é a variável independente?
18 Guilherme - A distância.
19 Professora - Então existe alguma relação entre o consumo e a distância?
20 Guilherme - Sim.
21 Professora - Qual?
22 Guilherme - Aquela coisa do 1 a dividir por 8

(Registo áudio da aula 1)

Da análise deste diálogo, os alunos sentem dificuldade na identificação da variável independente e dependente (fala 6 e fala 8), mas ao relerem as suas respostas anteriores e o enunciado do problema, concluem que a variável independente é a distância (fala18). Depois desta discussão os alunos registam na ficha de trabalho que a variável independente é a distância e a dependente o consumo. Como se verifica no exemplo seguinte.

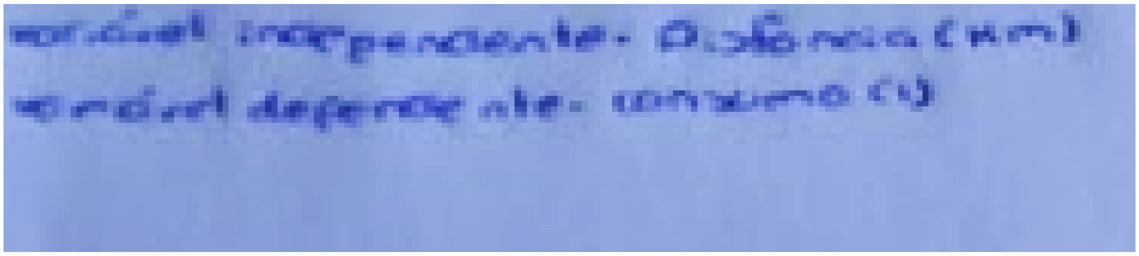


Figura 5.14 – Resposta da alínea 2.3. da ficha de trabalho 1, do par Guilherme e Catarina

Ao fazerem a correspondente representação gráfica, a dificuldade na *identificação das variáveis* volta a surgir, tendo este par colocado o consumo no eixo horizontal e a distância no eixo vertical.

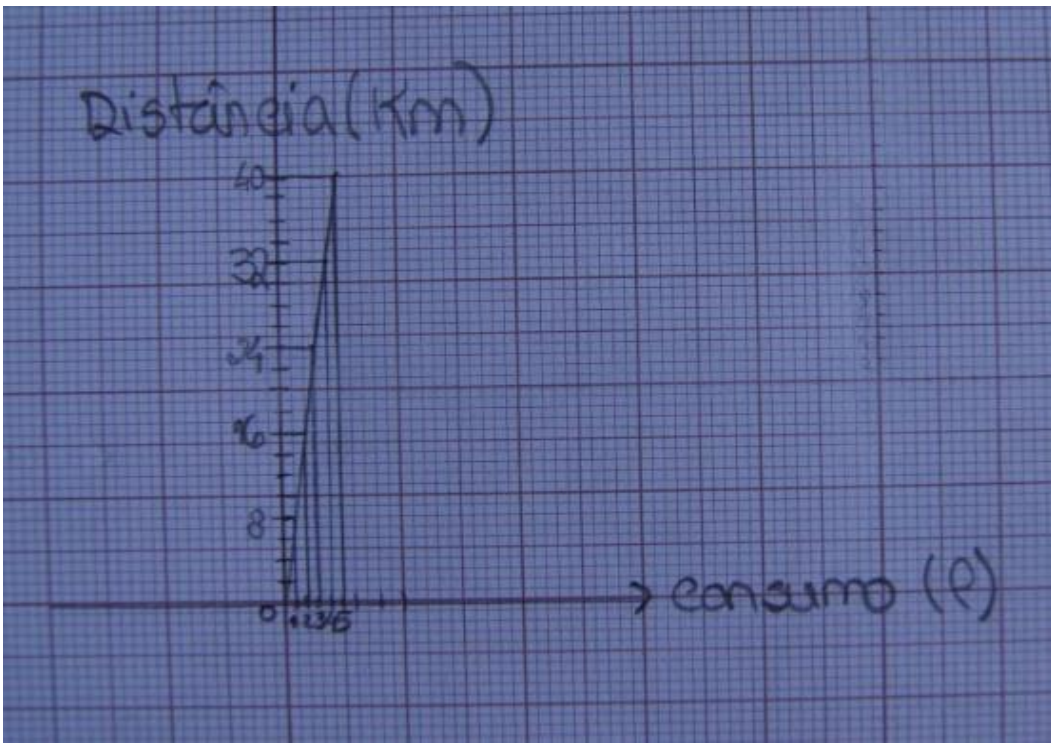


Figura 5.15 – Resposta da alínea 2.4. da tarefa 1, do par Guilherme e Catarina

Como se pode observar na passagem para a representação gráfica, este par não consegue identificar corretamente qual dos eixos corresponde à variável independente e à dependente, contudo identifica cada um dos eixos e escolhe uma escala adequada ao problema.

Na ficha de trabalho 3, foi proposto um novo problema, onde era necessário perceber qual a relação entre as variáveis para determinar uma distância desconhecida num dado intervalo de tempo. Assim, o exemplo seguinte mostra como, em geral, a turma resolveu esta tarefa:

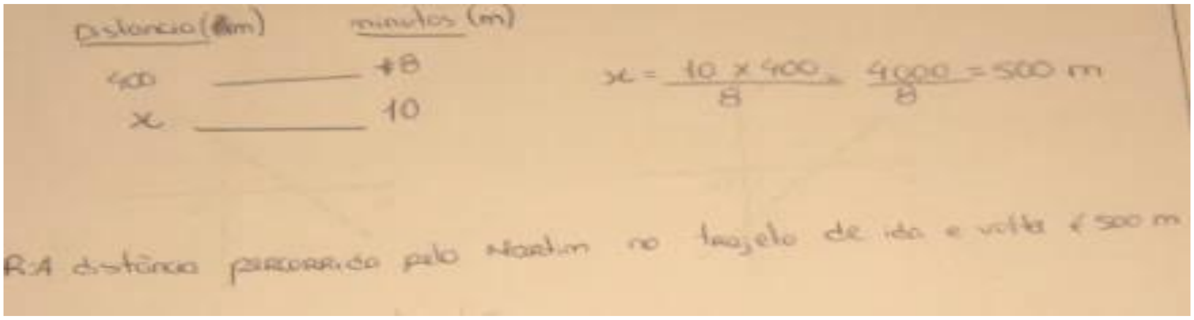


Figura 5.16 – Resposta do problema 1. da ficha de trabalho 3, do par Beatriz e Leonel

A maioria da turma usou como estratégia de resolução a *regra de três simples,* fazendo uma correta leitura e interpretação dos dados no gráfico apresentado. Como ao objeto 8 (tempo em minutos) correspondia 400 (posição do Martim em metros), então a 10 minutos corresponde *x* metros. Obtiveram desta forma a imagem desconhecida. A produção deste par acaba por ficar incompleta dado que, na sua resposta, apenas se referem ao trajeto de ida do Martim para casa da avó, e era pedido o trajeto de ida e volta. Mas ao questionar este par sobre o porquê de utilizarem a estratégia da regra de três simples, foi possível identificar algumas dificuldades, como se expõem no excerto seguinte:

1 Professora - Expliquem-me lá como pensaram.
2 Beatriz - No enunciado temos que em 10 metros, o Martim faz 400…não… Não, enganei-me! Em 8 metros o Martim fez 400 Km. Professora - Concordas! Leonel.
3 Leonel - Não concordo.
4 Professora – Então.
5 Leonel - Ela disse 8 metros e é 8 minutos.
6 Professora - Onde é que vocês leram os minutos?
7 Leonel - Aqui [aponta para o gráfico no eixo das abcissas].
8 Professora - E o que é isso?
9 Beatriz – É as abcissas.
10 Professora - Ok, então as abcissas correspondem a que variável?
11 Beatriz - Tempo, independente.
12 Professora - Concordas, Leonel?
13 Leonel - Sim.
14 Professora – E depois é que foram ver que a 8 minutos…
15 Beatriz - Corresponde a 400 metros.
16 Professora - 400 metros é o quê?
17 Leonel – É a distância que são as ordenadas.
18 Professora - Concordas Beatriz?
19 Beatriz – Sim.

20 Professora - Onde foram ler a informação que me estão a dizer?
21 Leonel - No gráfico.
22 Professora - Sim e agora.
23 Beatriz – Para saber a distância usámos a regra de três simples.
24 Professora - O que traduz essa regra, digam-me lá.
25 Beatriz - Nós queríamos saber a distância percorrida em 10 minutos [pensa].
26 Então fizemos x é a distância que não sabemos e $x = \frac{10*400}{8} = 500.$
27 Professora – 500 quê?
28 Beatriz – Metros.
29 Professora – Porque é que puderam utilizar a regra de três simples.
30 Beatriz - Porque é mais fácil.
31 Professora - Nós podemos usar a regra de três simples em qualquer circunstância?
32 Beatriz – Não, só nas funções …para descobrir…
33 Leonel – Não sei. Para descobrir caminhos e trajetos.
34 Beatriz- Eu acho que é só nas funções.
35 Professora – O que significa isto $\frac{4000}{8}$?
36 Beatriz - É os 4000 metros a dividir por 8 minutos.
37 Professora – Que tipo de gráfico é este? [apontando para o gráfico dado]
38 Beatriz - É cartesiano.
39 Professora - Sim, e é um gráfico de quê?
40 Beatriz – Afim.
41 Leonel – Eu acho que é linear.
42 Professora- Em que ficamos é afim ou linear?
43 Leonel - É linear.
44 Beatriz - É uma semirreta.
45 Professora – Sim.
46 Beatriz - E passa pelo zero.
47 Professora – Eu só estou a perguntar que tipo de função está aí representada, e porque podem vocês usar a regra de três simples?
48 Beatriz – Porque é mais fácil.

(registo áudio da aula 3)

Na análise deste diálogo é possível verificar que este par tem facilidade a interpretar os dados do enunciado e em fazer uma correta leitura do gráfico apresentado, percebendo que para responder ao problema necessita determinar a imagem do objeto 10. Assim a estratégia usada é a *regra de três simples*, sendo adequada para obter a correspondência de 10 minutos com 500 metros de distância. Mas ao serem questionados porque podem usar esta regra neste caso a resposta é “porque é mais fácil” (fala 30), não justificando que estão numa relação de proporcionalidade direta. E quando questionados se podem utilizar sempre esta estratégia (fala 31), respondem “para descobrir caminhos e trajetos” (fala 33). Não reconhecem a constante de proporcionalidade, ficando indecisos se a representação dada é de uma função linear ou afim. Outra dificuldade surge na fala 46, quando a aluna se refere ao ponto de origem apenas referindo-o como o valor zero, sem usar as coordenadas do ponto *(0; 0).*

Nesta tarefa (problema 1 da ficha de trabalho 3), surgiu uma outra estratégia de resolução, apresentado por um aluno que estava a trabalhar sozinho.

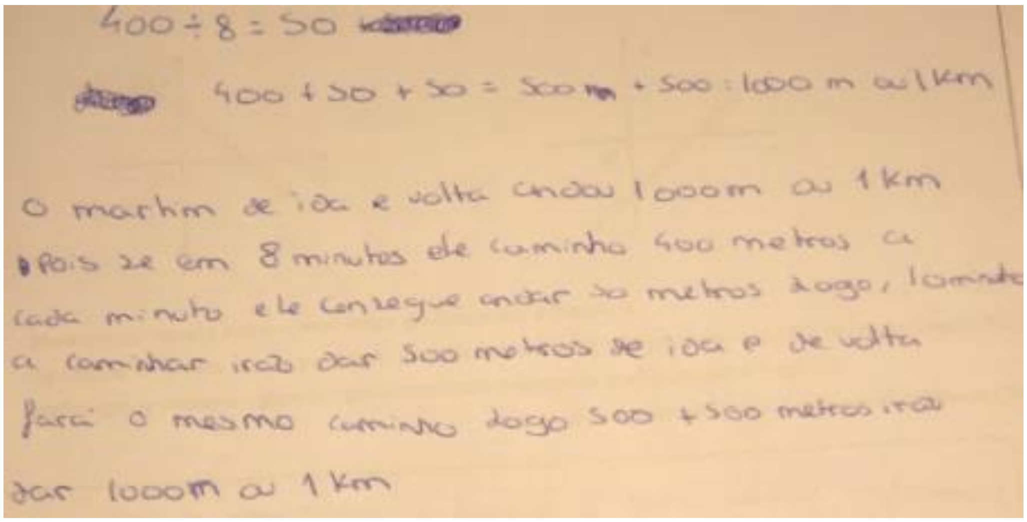


Figura 5.17 – Resposta do problema 1. da ficha de trabalho 3, do Helder

Neste exemplo, o aluno *determina a relação entre as variáveis*, utilizando os dados do gráfico, sem referir que determina a constante de proporcionalidade. Contudo, faz uma correta interpretação do valor obtido, referindo que a "cada minuto ele consegue andar 50 metros", depois utiliza uma estratégia aditiva, adicionando a distância percorrida em 8 minutos (400) com a distância percorrida nos dois minutos (50+50), obtendo assim os 500 metros do percurso. Apenas existem algumas incorreções quando o aluno decide adicionar os 500 metros do percurso de volta, diretamente na expressão numérica que representa o caminho de ida, obtendo o valor de "1000 metros ou 1 km" para o percurso total. Na justificação da sua resposta fica evidente o significado do valor 50 obtido na razão calculada (constante de proporcionalidade), mas nunca é referido o tipo de função que está representada. Ao justificar a sua resposta, o aluno desenvolve a sua capacidade de comunicar matematicamente por escrito o que o obriga a iniciar o uso da terminologia própria das funções.

Na ficha de trabalho 6, foi proposto um problema dado em linguagem natural e apoiado pela sua representação gráfica, onde era pedido o valor da variável dependente dado o valor da variável independente, e vice-versa. Como este problema pedia a determinação de um valor desconhecido como no caso exposto anteriormente é possível analisar as diferenças ocorridas no processo de aprendizagem de alguns alunos. Apresento um exemplo das produções escritas de um par de alunos:

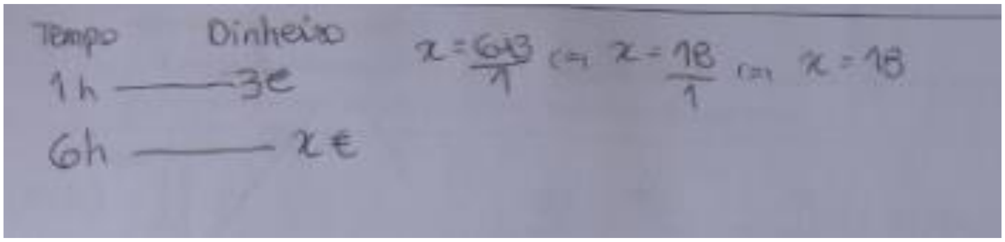


Figura 5.18 – Resposta da alínea 1.1. da ficha de trabalho 6, do par Mário e João

Da análise desta resolução, a *regra de três simples* continua a ser a estratégia preferida pelos alunos, e com o seu uso este par fez uma correta interpretação dos dados determinando a imagem pedida. Assim, determinaram que o Carlos por 6 horas de trabalho iria receber a quantia de 18 euros. Apenas refiro que não existe uma preocupação em apresentar uma resposta ao pedido.

Outra estratégia utilizada na resolução desta questão foi a *construção de uma tabela*, como se apresenta de seguida.

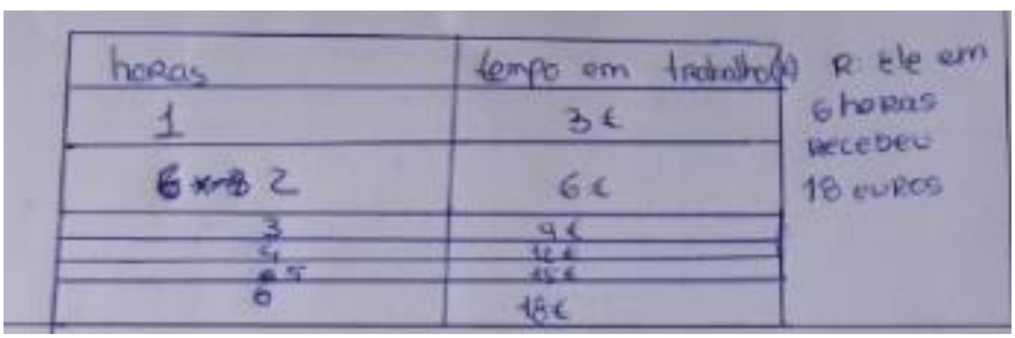


Figura 5.19 – Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 6, do par Beatriz e Leonel

Este par de alunos (figura 5.19), normalmente utiliza a regra de três simples, mas na resolução desta alínea, optou por construir uma tabela usando uma estratégia multiplicativa, determinando todos os valores a receber. Teve o cuidado de apresentar a sua resposta escrita.

Na alínea 1.2, o par de alunos Mário e Afonso utiliza também a regra de três simples para determinar o objeto (horas) dada a imagem (quantia a receber).

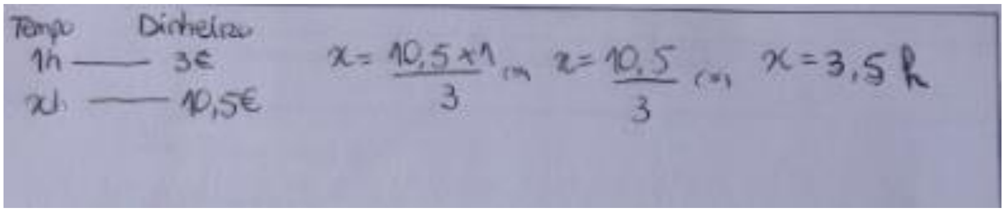


Figura 5.20 – Resposta da alínea 1.2. da ficha de trabalho 6, do par Mário e João

A estratégia utilizada mantém-se viável, e determinam que o número de horas de trabalho terá de ser 3,5 horas. O trabalhar com casa decimais não levantou dificuldades, embora outro par de alunos tivessem a preocupação de responder a esta questão em horas e minutos, como é evidenciado no exemplo seguinte (figura 5.21):

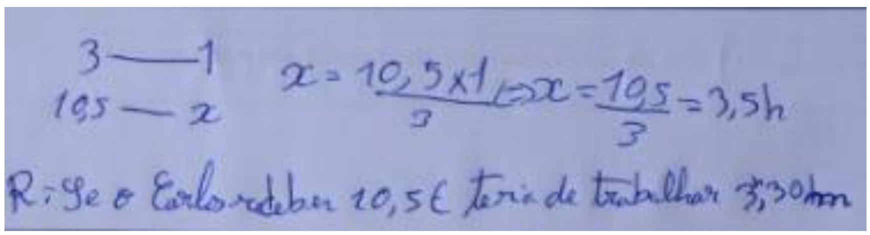


Figura 5.21 – Resposta da alínea 1.2. da ficha de trabalho 6, do par Miguel e Rui

Este par respondeu corretamente ao pedido, e preocupou-se em apresentar a sua resposta onde referiu que 3,5 horas são 3 horas e 30 minutos.

Como verifiquei que a maioria da turma continuava a utilizar a regra de três simples, durante a entrevista decidi questionar os pares selecionados sobre o porquê da utilização desta estratégia neste tipo de problema, com o intuito de perceber se realmente os alunos percebem em que situações no contexto das funções é possível utilizar esta estratégia e porquê. Apresento de seguida um excerto da entrevista onde se percebe que os alunos compreendem a utilização desta estratégia:

1 Professora – Que relação existe entre as variáveis?
2 Leonel – Relação?
3 Professora – Quero saber como se relacionam as variáveis.
4 Beatriz – É 3 vezes as horas.
5 Professora – Então como determinaram quanto tempo tem o Carlos de trabalhar para receber 10,5 euros?
6 Beatriz – Usamos a regra de três simples.
7 Professora – Porquê?
8 Beatriz –Porque é mais fácil do que fazer todos. E é uma P.D:
9 Professora – P.D.?
10 Leonel – Professora é a função de proporcionalidade direta.

11 Professora – E a regra de três simples pode ser utilizada em todos os tipos de funções?
12 Beatriz – Não, só nesta.
13 Professora – E porquê?
14 Beatriz – Porque os valores aumentam da mesma maneira.
15 Professora – Podes explicar melhor?
16 Beatriz – Então professora olhe para a nossa tabela [questão 1.1] (…). Está a ver, está sempre a aumentar de 3 em 3.
17 Professora – Muito bem. Então neste caso qual é a constante de proporcionalidade?
18 Leonel – É o 3.
19 Professora – Então, para concluir posso utilizar a regra de três simples em que casos e porquê?
20 Beatriz – Nas funções de proporcionalidade direta porque os valores aumentam da mesma forma.

(Entrevista da aula 6)

Na aula 3, observei que este par utilizou esta estratégia, mas quando questionados acerca do porquê, não conseguiam explicar e respondiam apenas porque era mais fácil. Na discussão coletiva da tarefa 1 da ficha de trabalho 3, foi discutida esta dificuldade. Pela análise do excerto anterior, é possível perceber que os alunos conseguem identificar em que tipo de função a utilização desta estratégia é viável (fala 10) e explicar o porquê do seu uso (fala 20), desta forma é clara a aprendizagem realizada.

No 1.º problema da ficha de trabalho 6 era ainda pedida a expressão algébrica da função dada. Neste caso foi evidente a necessidade de ser estabelecida uma relação entre as variáveis em causa, como é mostrado no exemplo seguinte:

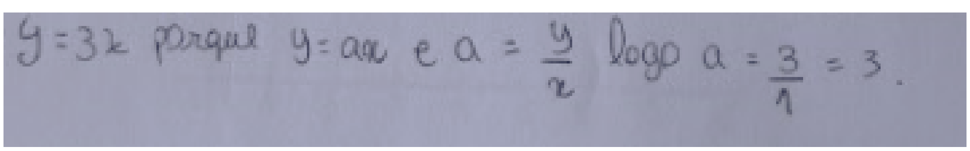


Figura 5.22 – Resposta da alínea 1.3. da ficha de trabalho 6, do par Mário e João

Este par de alunos não refere que a função é de proporcionalidade direta, mas estabelece a razão entre as variáveis corretamente, indicando o que é o a, e determinando o seu valor, apresentando corretamente a expressão algébrica pedida.

Da análise das respostas do 1.º teste de avaliação, é possível observar que os alunos estabelecem a relação entre as variáveis usando diferentes tipos de representação de uma função. Um exemplo é a leitura que uma aluna faz da expressão $h(0) = -4$ e $h(3) = -1$.

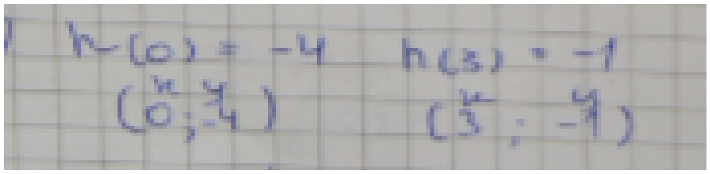


Figura 5.23 – Parte da resposta da questão 8.3 do 1.º teste de avaliação da Sónia

Neste exemplo, a aluna faz a correta leitura dos dados apresentados, mostrando compreensão do conceito de função, identifica as variáveis x e y e escreve as coordenadas dos pontos da reta que representa a função dada, estabelecendo a correta relação entre as variáveis.

Na questão 14 do 1.º teste de avaliação é dada a expressão algébrica de uma função afim, $f(x) = 3x + 7$, e é pedido o cálculo de uma expressão numérica, usando duas imagens da função.

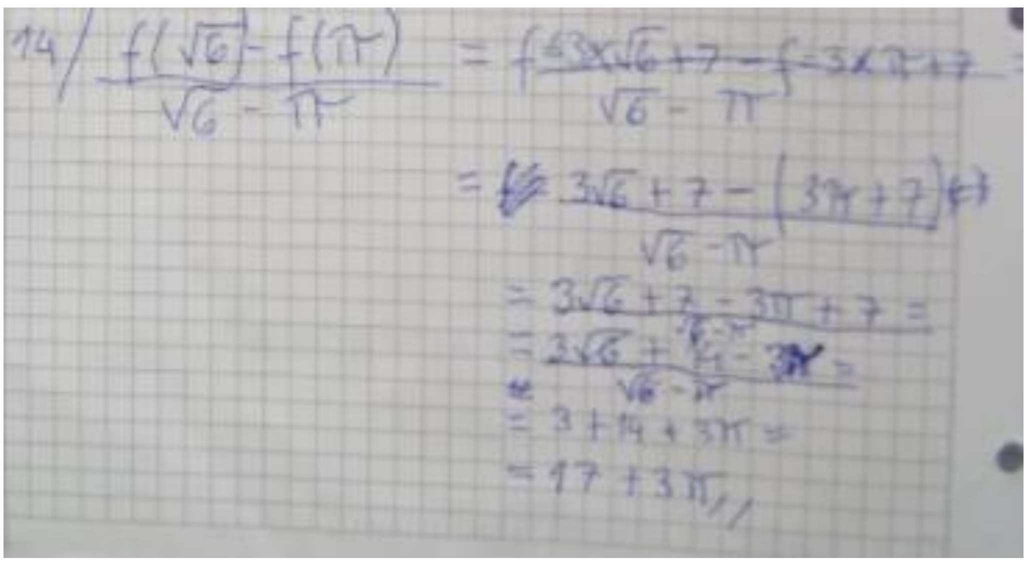


Figura 5.24 – Resposta da questão 14. do 1.º teste de avaliação da Sara

Nesta resolução é possível verificar alguma hesitação da aluna quando começa a determinar as imagens, riscando o primeiro cálculo que efetua onde coloca $f = 3 \times \sqrt{6}$+7. No cálculo seguinte, escreve a imagem de $\sqrt{6}$ por *f* e a imagem de π por *f,* tendo o cuidado de usar parênteses para separar uma das imagens, mas não usando a propriedade distributiva, pelo que os cálculos ficam incorretos. Contudo, é evidente a dificuldade em simplificar a expressão numérica obtida eliminando a $\sqrt{6}\ e\ o\ \pi$ do numerador com os do denominador, não conseguindo determinar corretamente o valor pedido.

Segue-se outra resolução onde também são evidentes as *dificuldades de cálculo numérico*.

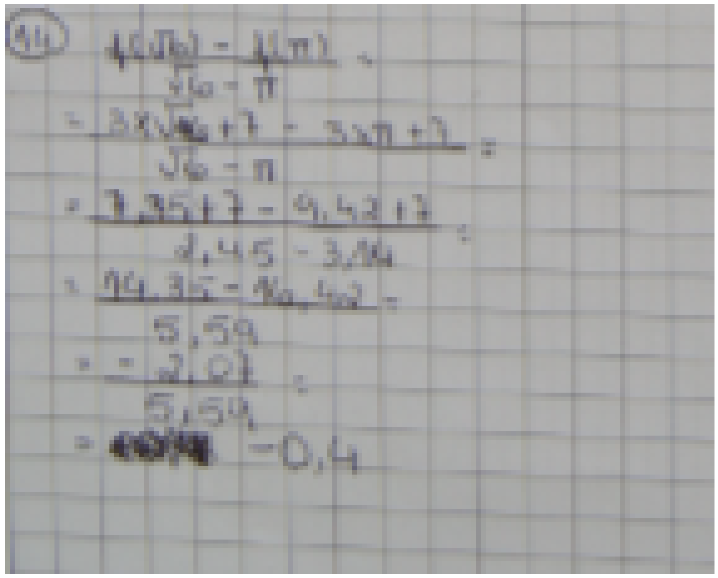


Figura 5.25 – Resposta da questão 14. do 1.º teste de avaliação da Maria

Da análise desta resolução é possível perceber que as dificuldades sentidas pela aluna não são ao nível dos conceitos base das funções, mas no cálculo numérico e em trabalhar com números irracionais.

Um outro exemplo de resolução desta questão é o seguinte:

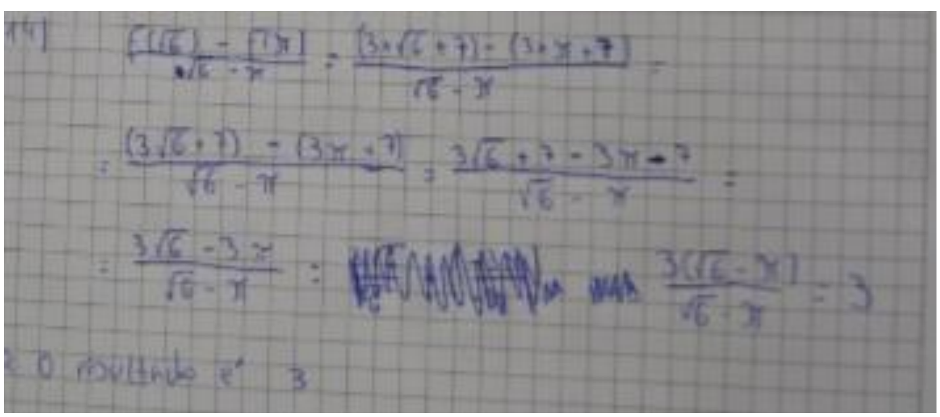


Figura 5.26 – Resposta da questão 14 do 1.º teste de avaliação do Mário

Neste exemplo é evidente que o aluno não teve qualquer tipo de dificuldade em determinar as imagens pedidas nem a efetuar os cálculos numéricos necessários para simplificar a expressão obtida, tendo o cuidado de apresentar a resposta ao pedido corretamente.

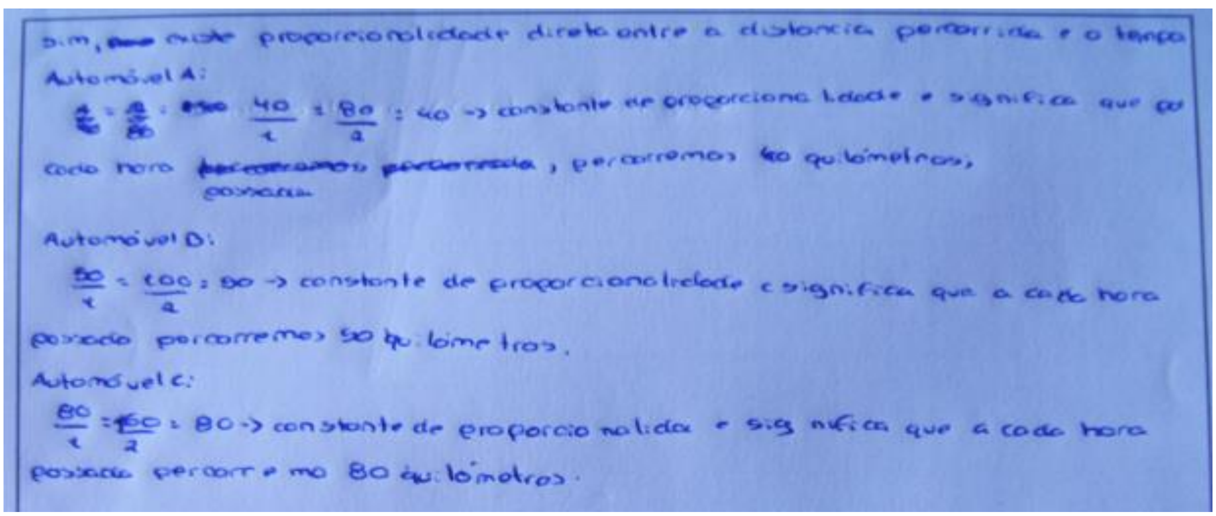
Pela análise das respostas dadas, posso afirmar que os alunos realizaram aprendizagem ao nível da relação entre variáveis, reconhecendo a partir desta os diferentes tipos de função (proporcionalidade direta, linear e afim). Conseguiram ultrapassar um conjunto de dificuldades sobre o conceito de função ao longo das várias tarefas propostas.

Conceito de declive

Esta categoria emerge com o intuito de dar resposta à segunda questão de investigação deste trabalho. Nesta questão pretendo perceber qual o significado que os alunos atribuem ao conceito de declive, bem como as dificuldades que sentem na compreensão deste conceito. Deste modo, emergiram três subcategorias de análise: (i) significado do declive e dificuldades no início da intervenção letiva; (ii) significado do declive e dificuldades durante a intervenção letiva; (iii) significado do declive e dificuldades após a intervenção letiva.

Significado do declive e dificuldades no início da intervenção letiva

O conceito de declive foi introduzido na ficha de trabalho 2 "Distância percorrida", que consistia na interpretação e posterior representação de três funções de proporcionalidade direta. Na alínea 1.2. desta tarefa comecei por questionar se existia proporcionalidade direta entre a distância percorrida e o tempo para cada um dos automóveis e qual o significado da constante de proporcionalidade para cada caso, no contexto do problema. Apresento algumas das respostas tipo dadas pelos alunos.


Sim, existe proporcionalidade direta entre a distância percorrida e o tempo

Automóvel A:

$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = 40$ -> constante de proporcionalidade e significa que a cada hora ~~percorremos percorrida~~, percorremos 40 quilómetros, passada

Automóvel B:

$\frac{50}{1} = \frac{100}{2} = 50$ -> constante de proporcionalidade e significa que a cada hora passada percorremos 50 quilómetros.

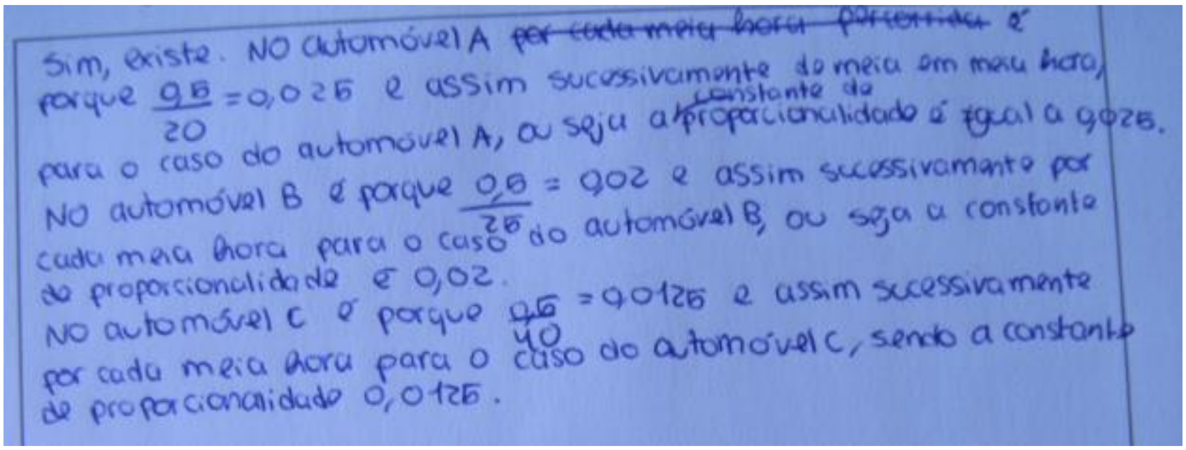
Automóvel C:

$\frac{80}{1} = \frac{160}{2} = 80$ -> constante de proporcionalidade e significa que a cada hora passada percorremos 80 quilómetros.

Figura 5.27 – Resposta da alínea 1.2. da ficha de trabalho 2 do par Guilherme e Catarina

Este par de alunos identificou que para os três automóveis, as relações entre a distância percorrida e o tempo eram funções de proporcionalidade direta, calculou as correspondentes constantes de proporcionalidade e justificou corretamente qual o seu significado para cada caso.

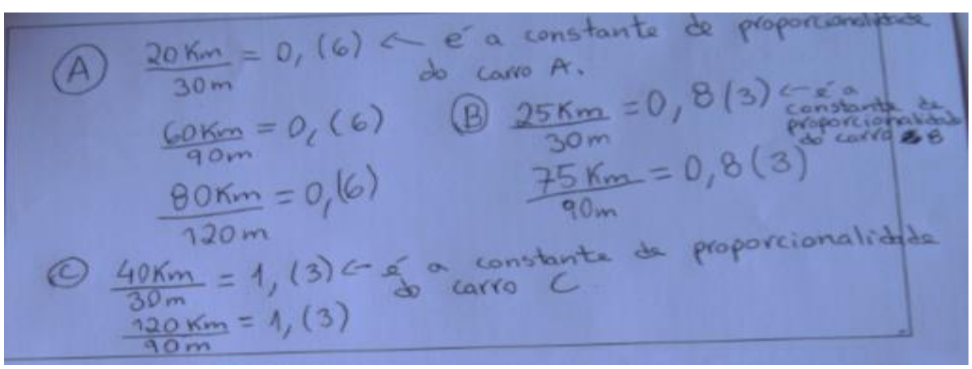
Mas alguns alunos sentiram dificuldades na identificação das constantes de proporcionalidade e não conseguiram atribuir significado aos valores encontrados, como é evidenciado nos dois exemplos seguintes:



Sim, existe. No automóvel A ~~por cada meia hora percorrida é~~ porque $\frac{0,5}{20} = 0,025$ e assim sucessivamente de meia em meia hora, para o caso do automóvel A, ou seja a constante da proporcionalidade é igual a 0,025.
No automóvel B é porque $\frac{0,5}{25} = 0,02$ e assim sucessivamente por cada meia hora para o caso do automóvel B, ou seja a constante da proporcionalidade é 0,02.
No automóvel C é porque $\frac{0,5}{40} = 0,0125$ e assim sucessivamente por cada meia hora para o caso do automóvel C, sendo a constante de proporcionalidade 0,0125.

Figura 5.28 – Resposta da alínea 1.2. da ficha de trabalho 2 do par David e Sónia

Na resolução da figura 5.28. os alunos determinaram que o automóvel *A* em meia hora percorreu a distância 20 km, e fizeram a razão entre $\frac{0,5}{20} = 0,025$. Apesar de os alunos compreenderem que existe uma razão entre as variáveis que se mantém constante, não a determinam corretamente, invertendo a sua ordem. Assim, não conseguiram atribuir o significado ao valor obtido, no contexto do problema.



A $\frac{20 Km}{30m} = 0,(6) \leftarrow$ é a constante de proporcionalidade do carro A.
$\frac{60 Km}{90m} = 0,(6)$
$\frac{80 Km}{120m} = 0,(6)$
B $\frac{25 Km}{30m} = 0,8(3) \leftarrow$ é a constante da proporcionalidade do carro B
$\frac{75 Km}{90m} = 0,8(3)$
C $\frac{40 Km}{30m} = 1,(3) \leftarrow$ é a constante da proporcionalidade do carro C
$\frac{120 Km}{90m} = 1,(3)$

Figura 5.29 – Resposta da alínea 1.2. da ficha de 2 do par Sara e Maria

Na resposta anterior, as alunas identificam que existe uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis, determinam a razão entre as variáveis, contudo, pelo facto de não utilizarem as unidades corretas de tempo, conduziu a um valor incorreto para a constante de proporcionalidade. Desta forma, não conseguem atribuir significado ao valor encontrado no contexto do problema proposto.

No final da resolução desta tarefa foi feita a discussão coletiva explorando a variação das funções representadas, e definindo que a constante de proporcionalidade é o declive das retas. Constatei que os alunos não têm grande dificuldade em identificar a função de proporcionalidade direta, no entanto, revelam dificuldades no cálculo da constante de proporcionalidade, invertendo a ordem das variáveis para o cálculo da razão, e não utilizam as unidades dadas no problema. Estas dificuldades não permitiram que os alunos atribuíssem significado ao valor do declive.

Significado do declive e dificuldades durante a intervenção letiva

Na ficha de trabalho 3 extrapolei o conceito de declive para a função afim, introduzindo também a noção de ordenada na origem. Na ficha de trabalho 4 os alunos começaram a aplicar os conhecimentos adquiridos na aula anterior sobre o conceito de declive. Apresento de seguida em exemplo de uma resolução concretizada nessa aula.

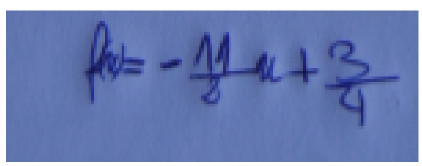


Figura 5.30 – Resposta do exercício 2 da ficha de trabalho 4 do par André e Afonso

Para este exercício era dado o valor do declive e da ordenada na origem de uma reta que representava uma função afim. Este par, apesar de não referir que o a é o declive e o b a ordenada na origem, reconhece a expressão algébrica de uma função afim e substitui corretamente o declive e a ordenada na origem, apresentado corretamente a expressão pedida.

Ainda na ficha de trabalho 4, pretendia que os alunos estabelecessem a relação entre o paralelismo e o declive de duas retas. No exemplo seguinte o par de alunos identifica que duas retas paralelas têm o mesmo declive.

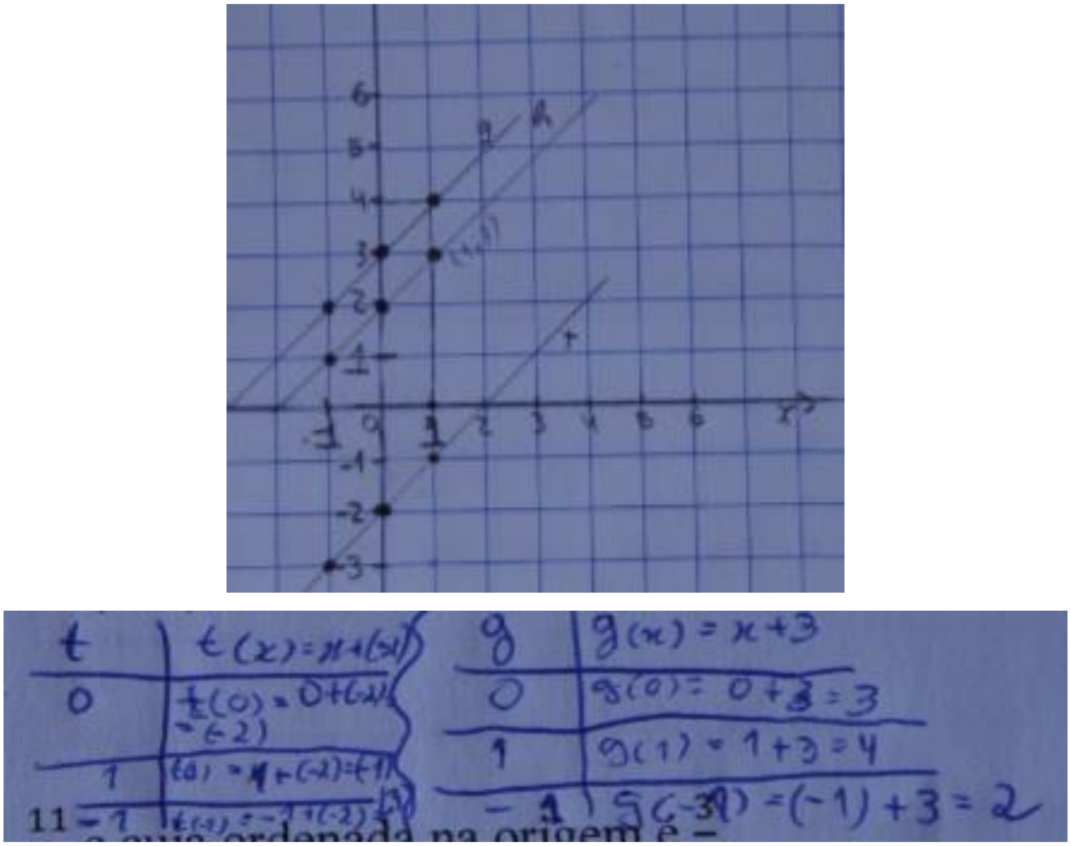


Figura 5.31 – Resposta da alínea 1.2 da ficha de trabalho 4 do par Sónia e David

Da análise à resposta dada por este par posso inferir que estes alunos começaram por representar graficamente a função *h*, fazendo-a passar no ponto *(1;3)* e *(-1;1)*. Seguindo-se o traçar das retas que representam a função *g* e a função *t*, respeitando a sua ordenada na origem (que era dada no enunciado) e o seu paralelismo com a representação da função *h*. Em seguida escreveram as respetivas expressões algébricas e para confirmarem que estas estavam corretas, constroem uma tabela em que utilizam como objetos o valor de 0, 1 e -1, determinam as correspondentes imagens usando as respetivas expressões, confirmando assim que os pontos obtidos pertencem às retas que representam as funções *g* e *t*, (estes pontos estão assinalados nas representações com “pintas”). Assim, confirmam a conjetura de que o declive da reta que representa a função *h* mantém-se nas retas que lhe são paralelas. Constatei que estes alunos conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos e mostram compreender que duas retas estritamente paralelas têm o mesmo declive. De salientar que este tipo de raciocínio foi o mais utilizado na turma.

Na ficha de trabalho 5, tive como objetivo introduzir a fórmula de cálculo do declive de uma reta não vertical, dados dois pontos distintos. A primeira tarefa desta ficha de trabalho apresenta a representação gráfica de duas funções, duas retas estritamente paralelas (uma função linear e uma função afim). Recorrendo à relação entre as variáveis, os alunos podiam determinar o declive da função linear, e usar o paralelismo entre as duas para escrever as suas expressões algébricas. Apresento de seguida, a título de um exemplo, a resolução efetuada por um dos pares:

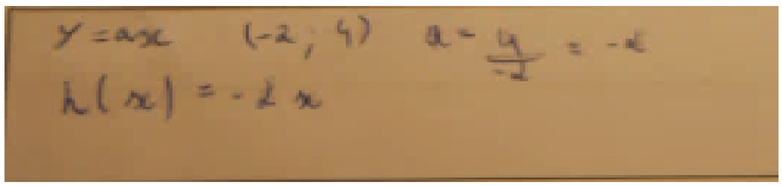


Figura 5.32 – Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 5 do par Pedro e Anabela

Este par identifica que a função h é uma função linear, escreve a sua expressão genérica, faz a leitura da sua representação gráfica e escolhe um ponto da reta r (que é a representação gráfica de h) e estabelece a relação entre as variáveis determinando o valor do declive. Assim, os alunos escrevem a expressão algébrica da função h, tendo o cuidado de indicarem $h(x) = -2x$, mas não referem qual o declive e qual a ordenada na origem. Contudo, não recorrem aos conteúdos trabalhados na aula anterior e não determinam a expressão algébrica da função w.

Segue-se a resolução escrita de outro par, acompanhada do diálogo entre as alunas durante a resolução, onde se verifica que apesar de aplicarem corretamente os conhecimentos ao nível dos conteúdos aprendidos, revelam dificuldades na terminologia das funções.

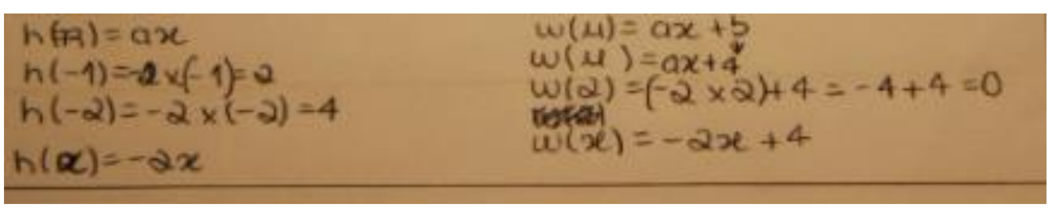


Figura 5.33 – Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 5 do par Sara e Maria

1. Sara – *h* é representada pela reta *r*. Primeiro vamos descobrir que função é *h*.
2. Maria – Para mim é linear.
3. Sara – Ahhh, pois passa aqui no ponto *(0;0)*.
4. Maria – E esta é afim [referindo-se à função *w*].
5. Sara – Vamos escrever isso.

6. (…)
7. Sara – Querem a expressão algébrica, ok. Se esta aqui é linear a expressão algébrica é ax.
8. Maria – Então temos de descobrir o a.
9. Maria – Escrevemos h de r? [$h(r)$]
10. Sara – Não, eu acho que é x. -1 vai dar 2, pelo menos é o que parece.
11. Maria – Está aqui, olha os quadrados e -2 dá 4.
12. Sara – Temos de ver que número multiplicado por -1 vai dar 2.
13. Maria – o -4 não dá.
14. Sara – É o -2.
15. Maria – O quê?
16. Sara – Tem de ser o -2, porque -2 vezes -1 dá 2. Deixa verificar para outro. -2 vezes -2 dá 4.
17. Maria – Ahhh e -3 vai dar 6.
18. Sara – Põe assim $h(x) = -2x$.
19. Maria – Posso por $h(r)$?
20. Sara – Não é x. O declive é o -2, já descobrimos.

(registo áudio da aula 5)

As alunas identificam corretamente as duas funções representadas (falas 2 e 4), com compreensão, fazem a correta leitura dos dados no gráfico, conseguem estabelecer a relação entre as variáveis indicando o declive da reta que representa a função linear (fala 14). Mas sentem necessidade de confirmar o valor obtido procurando um ponto diferente no gráfico (fala 16). Esta necessidade de confirmar foi importante para uma das alunas, porque só depois desta confirmação compreendeu o valor calculado do declive pela colega (fala 17). Contudo, verifico que ainda existem dificuldades ao nível da terminologia das funções porque no registo escrito começaram por indicar $h(r)$ e só depois $h(x)$ atribuindo o mesmo significado às duas expressões. Saliento que este par identificou o declive da reta r, mas não fez o seu registo escrito como pedido. Relativamente à ordenada na origem, não foi efetuado qualquer tipo de observação.

Este par continuou a sua discussão, passando para a função w, como se pode observar no diálogo seguinte:

1. Maria – A outra é afim, é $ax+b$.
2. Sara – Puseste u … O declive acho que é este. -2.
3. Maria – Agora este aqui… [referindo-se à ordenada na origem].
4. Sara – Acho que é o 4.
5. Maria – Sim porque está nas ordenadas.
6. Sara – Então pões $ax + 4$. O 2 dá zero.
7. Maria – Como vamos indicar isso?
8. Sara – Espera que eu quero ver outros pares?
9. Maria – Sim, vê nos quadradinhos.

10. Sara - -2 vezes 1 dá -2 mais 4 dá 2 e -2 vezes 2 dá 4 mais 4 dá zero. Percebeste porque é -2 aqui? [refere-se ao declive]
11. Maria – Sim, são paralelas.
12. Sara – Sim têm declive igual. Escreve a expressão algébrica.
13. Maria - É $-2x + 4$.

(registo áudio da aula 5)

As alunas recorrem aos conhecimentos anteriores para determinarem o declive da reta *u* (fala 11) usando o paralelismo entre retas e identificam pela leitura do gráfico a correta ordenada na origem (fala 4). Continuam a sentir necessidade de verificar a expressão algébrica, e mantêm dificuldades na linguagem própria das funções, iniciando a sua resposta com *w(u).* Apresentam a expressão algébrica pedida corretamente, mas não indicam o declive nem a ordenada na origem.

Noutra resolução desta questão, realizada por outro par de alunos, verifica-se que tiveram o cuidado de apresentar toda a resposta ao pedido, e justificaram o seu raciocínio.

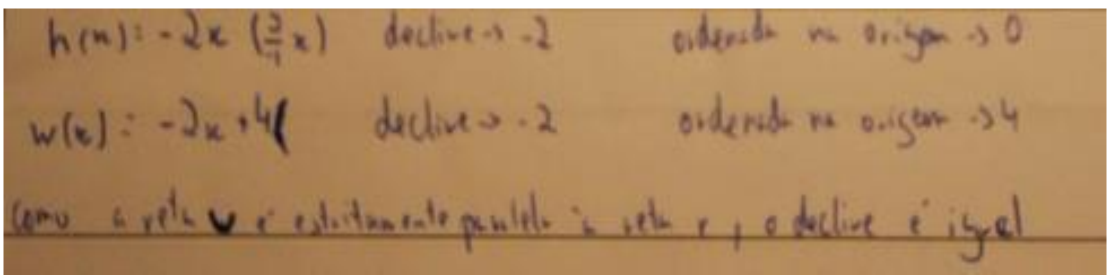


Figura 5.34 - Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 5 do par Mário e João

Da análise desta produção, verifiquei que este par de alunos determinou corretamente as expressões algébricas pedidas. Estabelecem a relação entre as variáveis na função linear, indicando entre parênteses "($\frac{2}{-1}x$)", embora tenham colocado a variável *x* a mais nesta razão, indicam corretamente o declive e a ordenada na origem das duas retas. Existiu a preocupação em justificar, usando a terminologia correta o porquê de as duas retas terem o mesmo declive, "Como a reta *u* é estritamente paralela à reta *r*, o declive é igual". Verifiquei que este par de alunos mostra compreensão dos conceitos trabalhados atribuindo significado ao declive.

Nas alíneas 1.3 e 1.4 da ficha de trabalho 5, pedi aos alunos o cálculo de duas expressões numéricas, usando para cada uma, dois pontos distintos. Apresento em seguida um exemplo da resolução de um par de alunos.

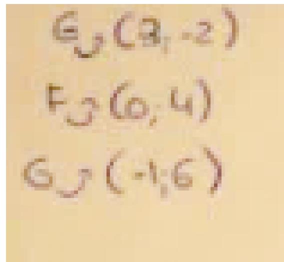


Figura 5.35 – Resposta da alínea 1.2 da ficha de trabalho 5 do par António e Afonso

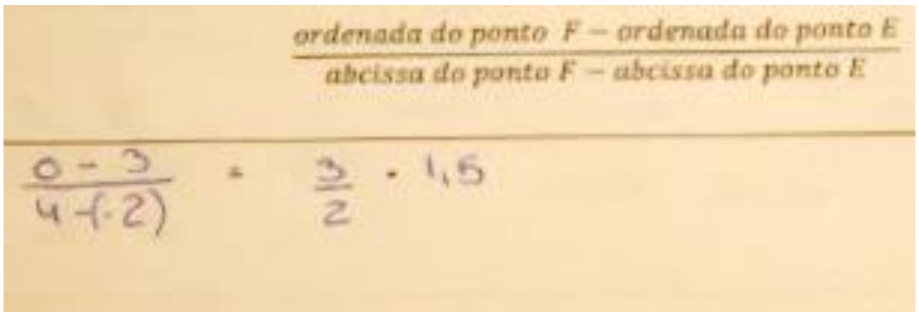


Figura 5.36 – Resposta da alínea 1.3 da ficha de trabalho 5 do par António e Afonso

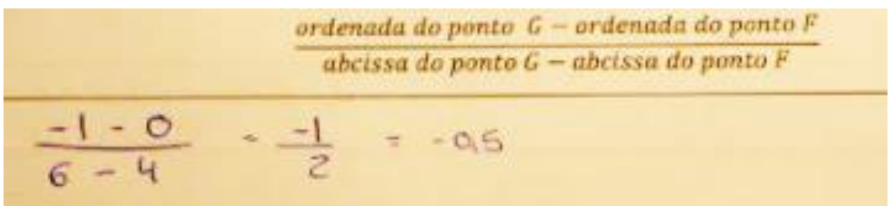


Figura 5.37 – Resposta da alínea 1.4 da ficha de trabalho 5 do par António e Afonso

Este par de alunos fez uma correta leitura da informação dada no gráfico, determinando os três pontos pedidos (figura 5.35). Nas alíneas 1.3 e 1.4. (figura 5.36 e figura 5.37) quando calcularam as expressões numérica pedidas. Contudo não reconheceram corretamente quais as ordenadas e quais as abcissas, obtendo valores incorretos que não permitiram estabelecer posteriormente a conjetura pedida na alínea 1.5. Assim, a identificação das ordenadas e das abcissas foi uma dificuldade para este par.

No geral, a grande maioria dos pares determinou o valor correto para estas expressões numéricas, permitindo responder à alínea 1.5. Nesta alínea pedia para comparar os valores obtidos com o declive da reta *u*, com o objetivo de os alunos concluírem que o valor do declive de uma reta dados dois quaisquer pontos dessa reta, se mantinha inalterado. Apresento em seguida alguns exemplos das respostas a esta questão:

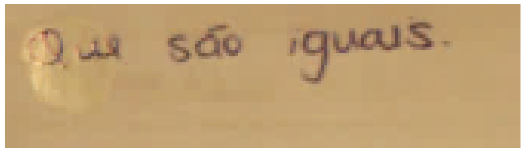


Figura 5.38 – Resposta da alínea 1.5 da ficha de trabalho 5 do par André e Mafalda

Figura 5.39 – Resposta da alínea 1.5 da ficha de trabalho 5 do par David e Sónia

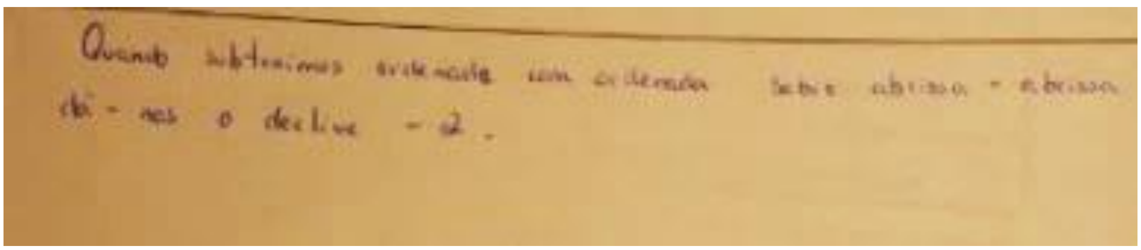


Figura 5.40 – Resposta da alínea 1.5 da ficha de trabalho 5 do par Pedro e Anabela

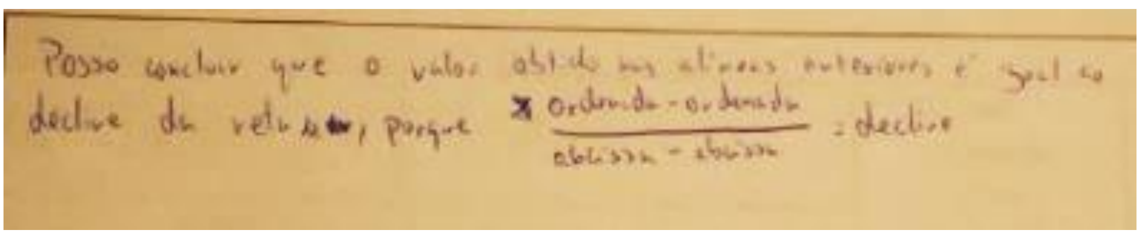


Figura 5.41 – Resposta da alínea 1.5 da ficha de trabalho 5 do par Mário e João

Da análise das resoluções anteriores, verifiquei que alguns pares deram respostas bastante simples, dizendo apenas que os valores deram iguais ao declive da reta *u* (figura.5.38 e figura 5.39). Contudo, nas duas últimas resoluções apresentadas (figura 5.40 e figura 5.41) surgiram respostas muito interessantes: os pares apresentaram uma conjetura para a fórmula de cálculo do declive dados dois pontos da reta. Estas conjeturas não estão escritas numa forma matematicamente correta, mas estão bastante próximas da fórmula de cálculo do declive que apenas foi introduzida no final desta tarefa.

Após a formalização da fórmula de cálculo do declive de uma reta dados dois pontos distintos que pertencem ao gráfico de uma função, ainda na ficha de trabalho 5, pedi aos alunos para escreverem a representação algébrica de uma dada função. Na aprendizagem deste novo conceito, surgiram algumas dificuldades como se pode verificar na resolução seguinte:

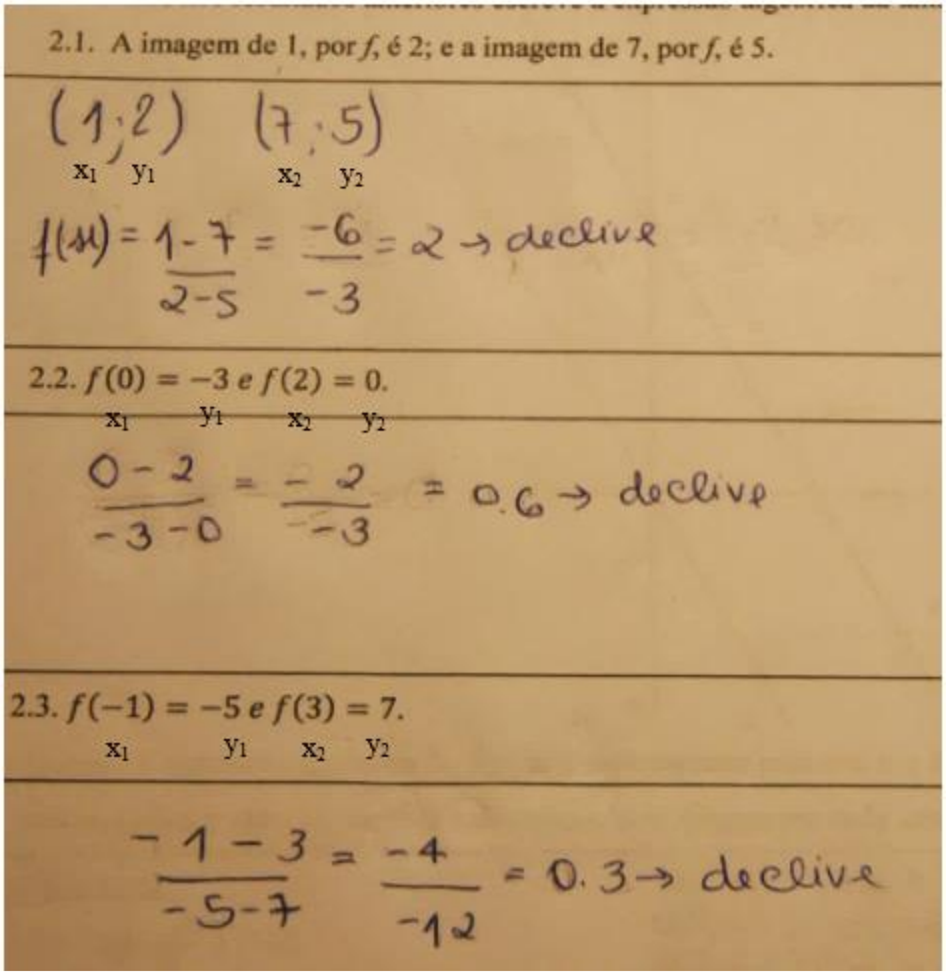
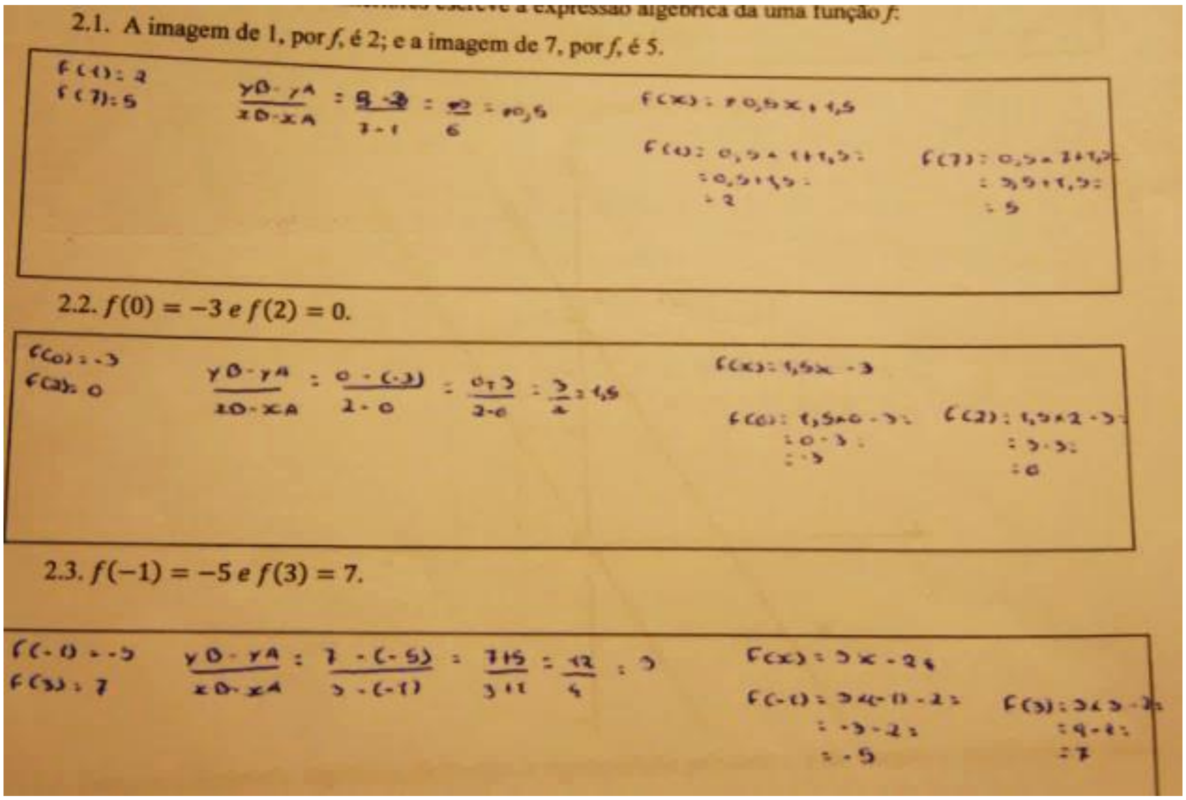


Figura 5.42 – Resposta do exercício 2 da ficha de trabalho 5 do par André e Mafalda

Este par de alunos na alínea 2.1. faz uma correta interpretação dos dados do enunciado escrevendo os dois pontos, mas ao aplicar a fórmula de cálculo do declive confunde abcissa com ordenada e faz a razão entre a diferença das abcissas pela diferença das ordenadas. Assim, obtém o inverso do declive chamando-lhe $f(x)$ e quando deveria definir que o valor obtido é o declive. Esta dificuldade mantém-se na resolução das alíneas seguintes. Saliento que este par na sua resolução apenas se cingiu ao cálculo do declive não chegando à expressão algébrica pedida, mas quando faz o cálculo das diferenças tem o cuidado de fazer x_1-x_2 para a diferença das abcissas e y_1-y_2 para a diferença das ordenadas, o que representa uma aprendizagem.

A aplicação da fórmula de cálculo não foi uma dificuldade sentida por muitos alunos, no entanto, a representação algébrica foi uma dificuldade evidente em vários alunos da turma. Ainda assim, existiu um grupo relevante de alunos que consegui atingir as aprendizagens pretendidas, conseguindo calcular corretamente o declive e escrever a expressão algébrica da função. Em seguida apresento um registo escrito onde se verifica o anterior exposto.


...escreve a expressão algébrica da uma função f:

2.1. A imagem de 1, por f, é 2; e a imagem de 7, por f, é 5.

f(1)=2
f(7)=5
$\frac{yB-yA}{xB-xA} = \frac{5-2}{7-1} = \frac{3}{6} = 0,5$
f(x) = 0,5x + 1,5
f(1) = 0,5×1+1,5 = 0,5+1,5 = 2
f(7) = 0,5×7+1,5 = 3,5+1,5 = 5

2.2. $f(0) = -3$ e $f(2) = 0$.

f(0)=-3
f(2)=0
$\frac{yB-yA}{xB-xA} = \frac{0-(-3)}{2-0} = \frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2} = 1,5$
f(x) = 1,5x - 3
f(0) = 1,5×0-3 = 0-3 = -3
f(2) = 1,5×2-3 = 3-3 = 0

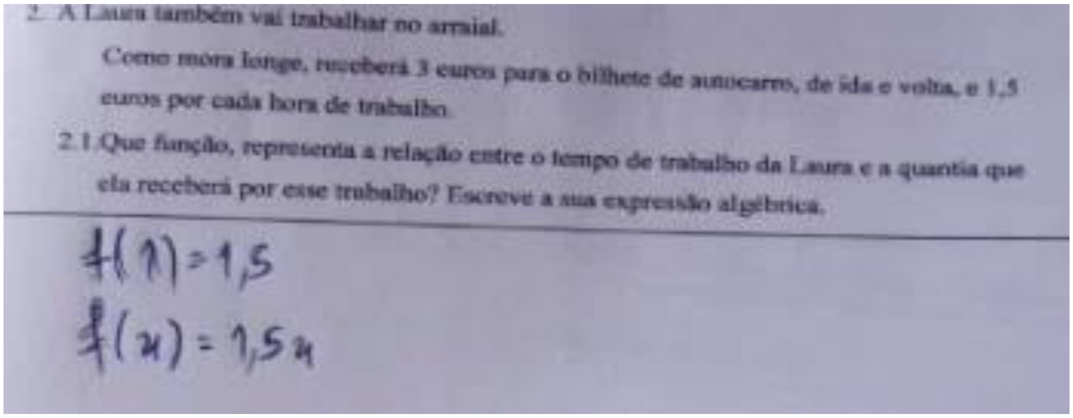
2.3. $f(-1) = -5$ e $f(3) = 7$.

f(-1)=-5
f(3)=7
$\frac{yB-yA}{xB-xA} = \frac{7-(-5)}{3-(-1)} = \frac{7+5}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$
f(x) = 3x - 2
f(-1) = 3×(-1)-2 = -3-2 = -5
f(3) = 3×3-2 = 9-2 = 7

Figura 5.43 – Resposta do exercício 2 da ficha de trabalho 5 do par Guilherme e Catarina

Estes alunos reconhecem que os pontos dados pertencem a funções afins, calculam o valor do declive através da aplicação da sua fórmula de cálculo, e recorrem ao cálculo mental para determinar o valor da ordenada na origem. Este par (figura 5.43) sente necessidade de fazer a verificação da expressão obtida para os dois pontos dados. Na sua resolução, apresenta cuidadosamente a fórmula que aplica para determinar o valor do declive, mas sem indicar que se refere ao declive.

Na ficha de trabalho 6, é dado um problema em linguagem natural que pode ser representado por uma função afim. Assim, na alínea 2.1 é pedida a expressão algébrica que representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho. A *representação algébrica da função que traduz os dados do problema* foi uma dificuldade para alguns alunos, como se verifica na resolução seguinte:

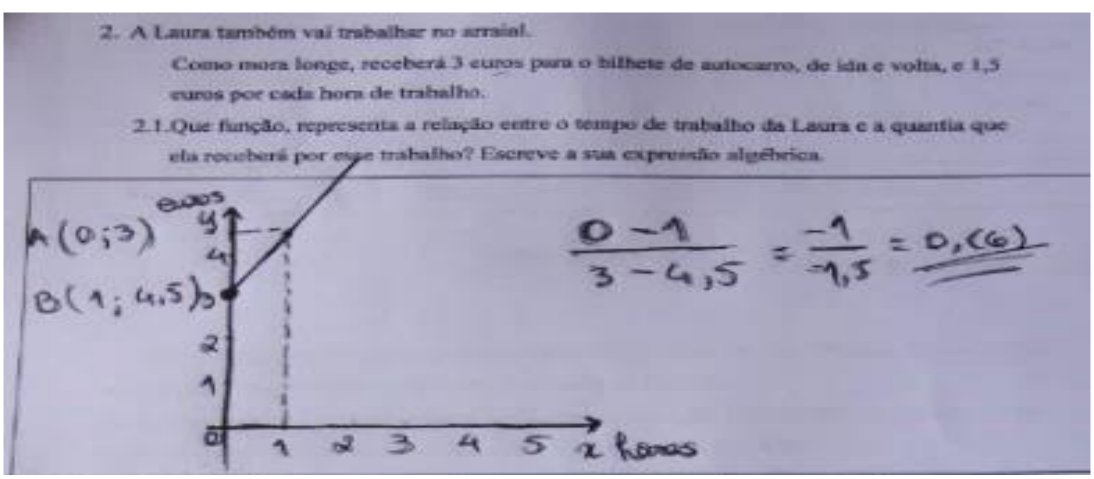

2. A Laura também vai trabalhar no arraial.
Como mora longe, receberá 3 euros para o bilhete de autocarro, de ida e volta, e 1,5 euros por cada hora de trabalho.
2.1. Que função, representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho? Escreve a sua expressão algébrica.

$f(1)=1,5$
$f(x)=1,5x$

Figura 5.44 – Resposta da alínea 2.1 da ficha de trabalho 6 do par Alberto e Daniel

Na resolução apresentada, este par identifica que a imagem de 1 por f é 1,5, e assim escreve como expressão algébrica da função $f(x) = 1{,}5x$, substitui valor do declive corretamente, mas ignora os restantes dados do problema. Não chega à expressão algébrica completa, ou seja, os alunos não conseguem identificar o tipo de função representada no problema. O facto deste par considerar corretamente que 1,5 é o declive, mostra que estes compreendem que 1,5 é o valor que a Laura recebe por cada hora de trabalho, o que evidencia que compreende o significado do declive no contexto do problema.

Outra forma de interpretar os dados deste enunciado (problema 2 da ficha de trabalho 6) é apresentada por outro par de alunos, que começa por fazer uma representação gráfica dos dados do enunciado.

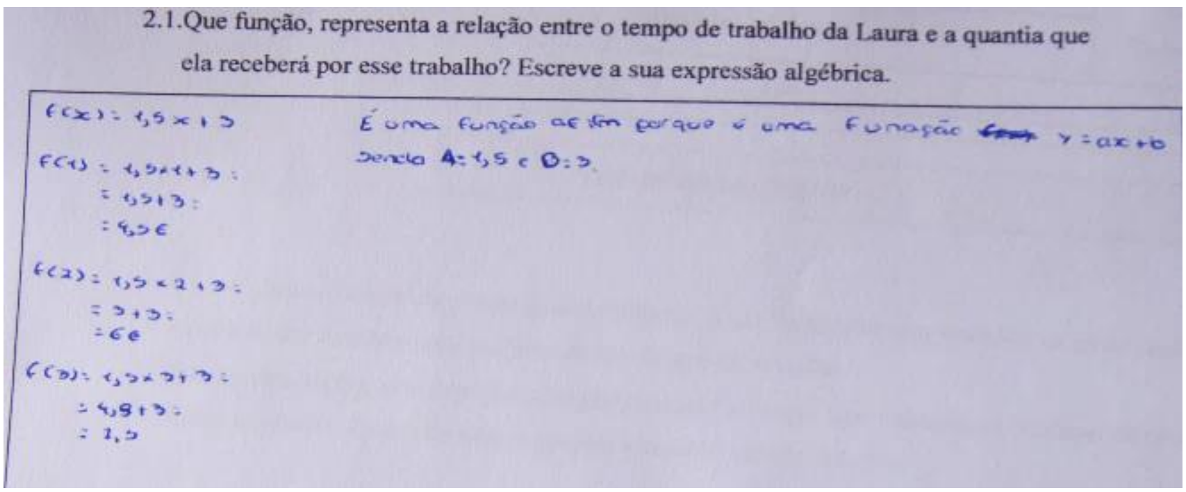

2. A Laura também vai trabalhar no arraial.
Como mora longe, receberá 3 euros para o bilhete de autocarro, de ida e volta, e 1,5 euros por cada hora de trabalho.
2.1. Que função, representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho? Escreve a sua expressão algébrica.

$\frac{0-1}{3-4,5} = \frac{-1}{-1,5} = 0,(6)$

Figura 5.45 – Resposta da alínea 2.1 da ficha de trabalho 6 do par Manuela e Afonso

Este par de alunos apresenta uma representação gráfica dos dados correta e contextualizada com o problema dado, tem o cuidado de indicar os pontos, e identificar os eixos corretamente. Quando calcula o valor do declive, usando os pontos determinados anteriormente, troca as ordenadas com as abcissas e obtém um valor de *0,(6)* para o declive. Posso deste modo inferir que os alunos não reconhecem o valor ganho por hora como o declive da função e não escrevem a expressão algébrica pedida. Verifica-se que estes alunos revelam dificuldade quer em atribuir o significado correto do declive quer no seu cálculo e ainda na escrita da expressão algébrica.

Apresento em seguida as resoluções de dois pares de alunos que fizeram boas interpretações dos dados do enunciado e conseguiram fazer uma correta utilização dos conhecimentos trabalhados, nomeadamente no tema das funções.


2.1.Que função, representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho? Escreve a sua expressão algébrica.

f(x) = 1,5x + 3

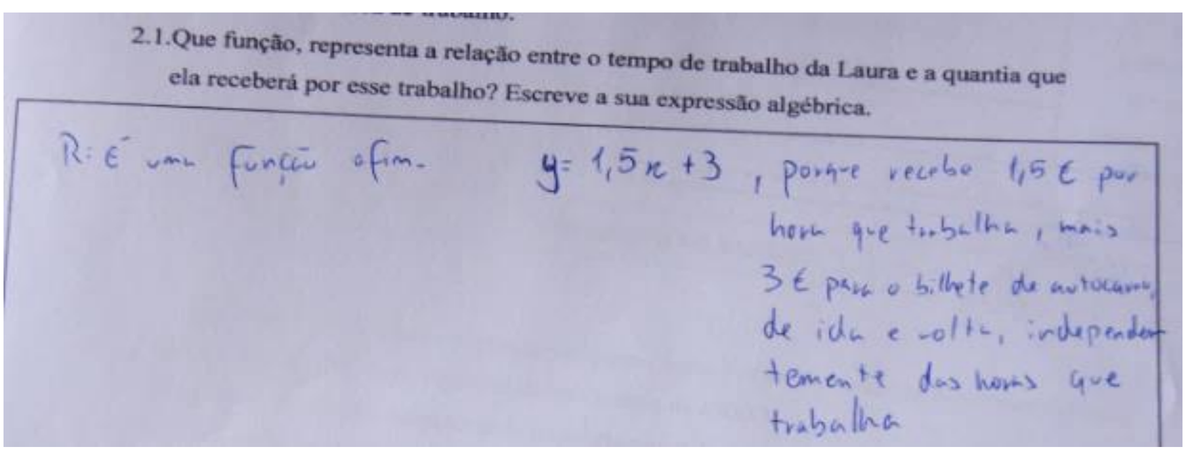
f(1) = 1,5×1+3 =
= 1,5+3 =
= 4,5 €

f(2) = 1,5×2+3 =
= 3+3 =
= 6 €

f(3) = 1,5×3+3 =
= 4,5+3 =
= 7,5

É uma função afim porque é uma função ~~com~~ y = ax+b sendo A=1,5 e B=3

Figura 5.46 – Resposta da alínea 2.1 da ficha de trabalho 6 do par Guilherme e Catarina


2.1.Que função, representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho? Escreve a sua expressão algébrica.

R: É uma função afim. y = 1,5x + 3, porque recebe 1,5 € por hora que trabalha, mais 3 € para o bilhete de autocarro de ida e volta, independentemente das horas que trabalha

Figura 5.47 – Resposta da alínea 2.1 da ficha de trabalho 6 do par Mário e João

Nas resoluções apresentadas, os alunos não sentiram necessidade de usar a fórmula de cálculo do declive, mas identificaram corretamente que o seu valor é o valor a receber por uma hora de trabalho da Laura, atribuindo desta forma significado ao declive. Identificaram que o valor da ordenada na origem correspondia ao valor a receber pela viagem de ida e volta. Na primeira resolução apresentada (figura 5.46), o par de alunos sentiu necessidade de confirmar a expressão algébrica e para isso determinou as imagens de uma, duas e três horas de trabalho. Os dois pares apresentaram a sua resposta explicando o significado dos valores utilizados. Constato que estes dois pares de alunos conseguiram tanto interpretar o enunciado do problema, bem como aplicar os conhecimentos adquiridos, escrevendo corretamente as expressões algébricas pedidas.

Da análise realizada anteriormente, posso concluir que na turma existem dois grupos de alunos que evidenciam aprendizagens e dificuldades distintas. Um primeiro grupo, que aplica a fórmula de cálculo do declive, mas confunde as variáveis (independente e dependente), não conseguindo atribuir significado ao valor obtido. O outro grupo revela domínio na determinação do valor do declive, usando ou não a sua fórmula de cálculo, atribuindo significado ao valor encontrado no contexto da tarefa.

Significado do declive e dificuldades após a intervenção letiva

Por último, da análise das respostas do 1.º teste de avaliação, apresento alguns exemplos onde é possível observar as aprendizagens realizadas acerca deste novo conceito (declive) e as dificuldades que os alunos sentiram no processo de aprendizagem. Neste teste analisei as respostas da turma em duas questões, a questão 8 e a questão 12, dado serem aquela onde este conceito foi considerado. Começo pela questão 8, apresentando o seu enunciado.

Questão 8: Escreve a expressão algébrica e representa graficamente as funções f, g e h.
8.1. a reta da função f passa pelos pontos R e S (-1;3) e (2;-2).
8.2. a reta g tem declive $-\sqrt{9}$ *e a ordenada na origem é* $\frac{1}{2}$.
8.3. h(0)=-4 e h(3)=-1

Analiso em seguida a resolução de um aluno onde são evidentes as aprendizagens realizadas.

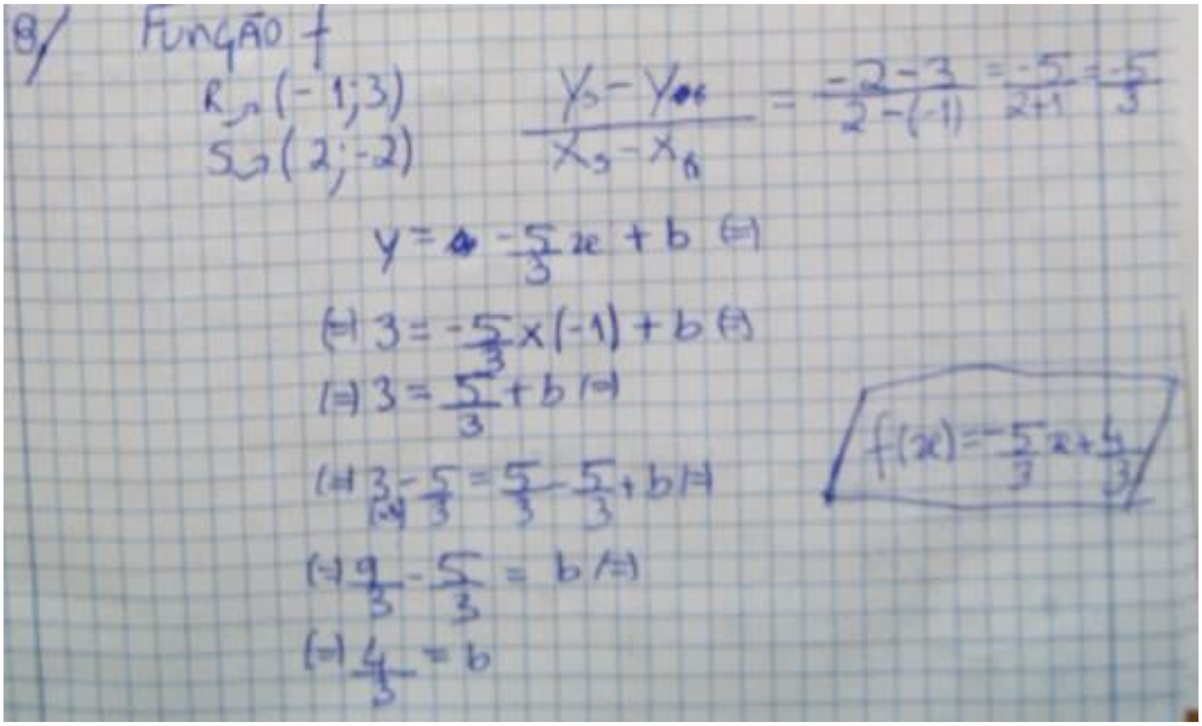
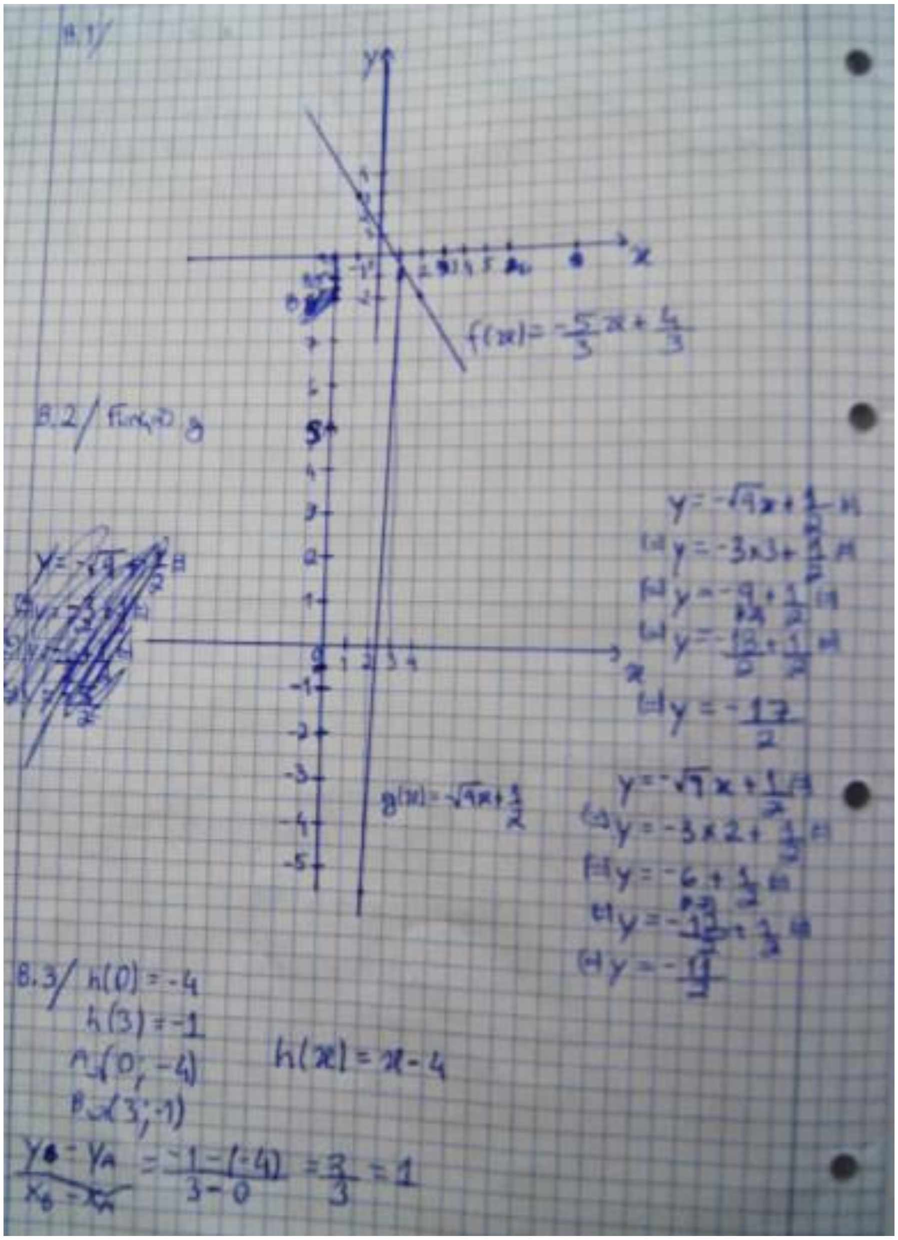


Figura 5.48 – Resposta da questão 8 do 1.º teste de avaliação da Sara

A aluna inicia a sua resolução determinando o valor do declive através do uso da sua fórmula de cálculo, dado que eram dados dois pontos distintos da função. Para o cálculo do valor da ordenada na origem utiliza um dos pontos dados e o valor que determinou para o declive. Apenas saliento que não indica o que está a calcular quando determina o declive, e coloca um sinal de equivalente entre as equações $y = -\frac{5}{3}x + b \Leftrightarrow 3 = -\frac{5}{3} \times (-1) + b$, sem referir que está a utilizar o ponto de coordenadas *(-1; 3)*. Apresenta a representação gráfica correta da função, marcando os dois pontos dados e identificando os eixos e a função.



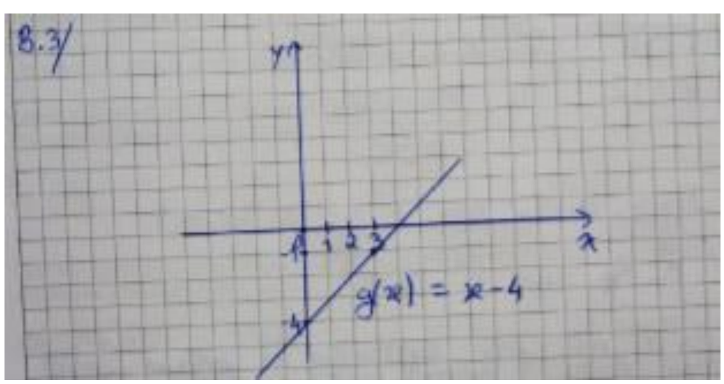
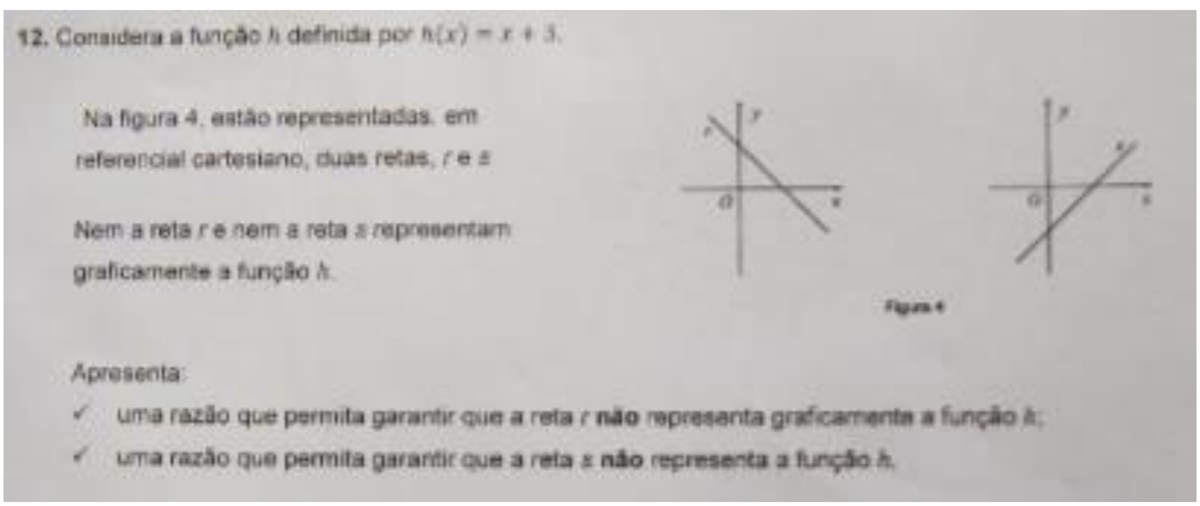


Figura 5.49 – Resposta da questão 8 do 1.º teste de avaliação da Sara

Na questão 8.2 (figura 5.49) indica corretamente a correspondente expressão algébrica substituindo os valores dados para o declive e ordenada na origem, embora não sinta necessidade de simplificar o valor do declive de $-\sqrt{9}$ para -3. Na representação gráfica determina a imagem de 2 e de 3 pela função g, utilizando a expressão algébrica obtida e marca os respetivos pontos no referencial cartesiano, mas considera uma das ordenadas obtidas positiva e marca de forma incorreta um dos pontos, traçando a reta que representa g com uma inclinação positiva quando o seu declive é negativo. Na questão 8.3, utiliza o mesmo raciocínio da primeira questão, obtém os pontos, determina o declive e compreende que $h(0) = -4$ lhe dá o valor da ordenada na origem substituindo diretamente esse valor na expressão algébrica da função h. Para a representação gráfica utiliza os pontos dados e traça a reta que representa a função. A aluna revela compreensão no uso da terminologia das funções, este facto é evidente quando ao escrever a expressão algébrica passa para o cálculo de uma imagem substitui o *f(x)* por *y* para substituir o objeto e determinar a correspondente imagem. Depois de analisadas as resoluções anteriores posso afirmar que esta aluno compreendeu e sabe aplicar os conteúdos lecionados.

A outra questão do 1.º teste que analisei é a questão 12, cujo enunciado é o seguinte:



12. Considera a função h definida por $h(x) = x + 3$.

Na figura 4, estão representadas, em referencial cartesiano, duas retas, r e s.

Nem a reta r e nem a reta s representam graficamente a função h.

Figura 4

Apresenta:

✓ uma razão que permita garantir que a reta r **não** representa graficamente a função h;

✓ uma razão que permita garantir que a reta s **não** representa a função h.

Figura 5.50 – Questão 12 do 1.º teste de avaliação realizado pela Professora Cooperante

Uma questão muito semelhante a esta foi utilizada por mim na ficha de trabalho 3. Nessa altura, a noção de declive ainda não tinha sido trabalhada com a turma. As razões apresentadas nas respostas dadas pelos alunos para responder a este tipo de questão foram o uso do valor da ordenada na origem, o determinarem alguns pontos da função *h* e fazer a sua representação gráfica, comparando a representação obtida de *h* com as representações dadas. Como o teste de avaliação foi realizado após a minha intervenção letiva, a Professora Cooperante achou interessante colocar esta questão para eu poder analisar a evolução da turma. Apresento em seguida as respostas dadas por alguns alunos.

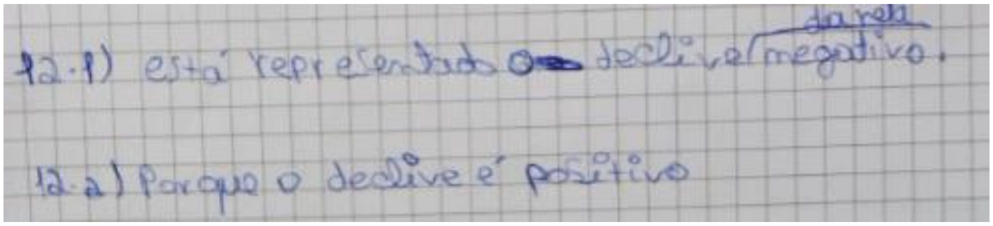


Figura 5.51 – Resposta da questão 12 do 1.º teste de avaliação do João

Na resolução anterior (figura 5.51), o aluno apenas recorre ao sinal do valor do declive. Assim, a razão apresentada para excluir a reta *r* é correta, embora o aluno não tenha referido que o declive da reta que representa a função *h* é positivo. A razão apresentada para excluir a reta *s* não é válida porque o declive da reta que representa a função *h* também é positivo. Deveria ter justificado a sua escolha com o valor da ordenada na origem.

Nas duas resoluções seguintes é evidente a evolução realizada pelos alunos neste tipo de questão:

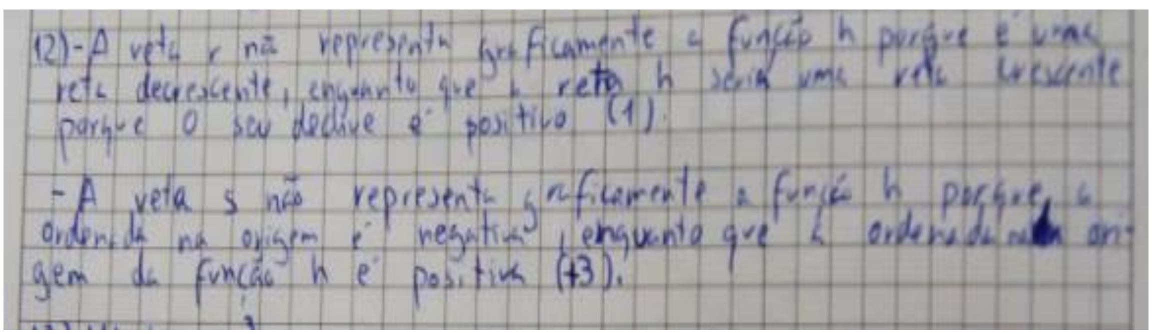


Figura 5.52 – Resposta da questão 12 do 1.º teste de avaliação do Mário

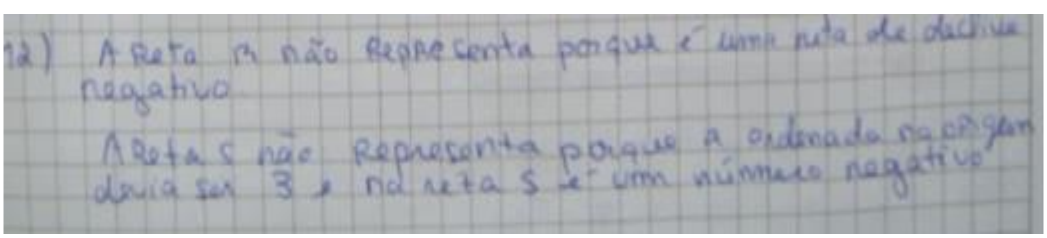


Figura 5.53 – Parte da resposta da questão 8 do 1.º teste de avaliação da Sónia

Estes dois alunos relacionaram os conhecimentos adquiridos no tema das funções, aplicando os conhecimentos, quer do declive, quer da ordenada na origem, apresentando razões válidas para excluir as duas representações gráficas apresentadas. Na primeira resolução (figura 5.52) foi conjugado o estudo da monotonia de uma função (tema que não é do 8.º ano, mas os alunos já começam a estabelecer relações entre a monotonia e o sinal do declive) com o sinal do declive, referindo que "a reta *h* seria uma reta crescente porque o seu declive é positivo". A comunicação matemática foi desenvolvida, apenas refiro que o aluno indicou a representação da função *h* como a "reta *h*", devendo referir-se à reta que representa a função *h*. Na segunda resolução apresentada (figura 5.53) o aluno deu respostas simples, mas evidenciou conhecimentos sólidos e concisos na interpretação e análise dos parâmetros que definem uma função, nomeadamente o declive e a ordenada na origem.

Da análise anterior dos dados verifica-se que a maioria dos alunos aplica a fórmula do cálculo do declive sem grandes dificuldades. Existe um grupo de alunos que conseguem atribuir-lhe significado atendendo ao contexto da tarefa proposta, escrevem a representação algébrica e gráfica das funções, mostrando que ultrapassaram as dificuldades sentidas durante o processo de aprendizagem.

Representações de funções

Nesta categoria pretendo compreender qual ou quais as representações de uma função mais utilizadas na resolução de problemas e quais as razões da sua escolha. Assim, para facilitar a análise dos dados recolhidos emergiram duas subcategorias de análise: (i) Mudança entre representações de uma função; (ii) razões apontadas pelos alunos na escolha da representação usada.

Mudança entre representações de uma função

Esta subcategoria permite-me analisar como os alunos fazem a transição entre as várias formas de representar uma função. Como as representações desempenham um importante papel no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, os alunos devem ser capazes de usar flexível e fluentemente as diferentes representações matemáticas para perceberem quais as mais adequadas a cada situação problema. Da análise dos dados foram identificadas diversas transformações entre representações que a seguir se ilustram.

Representação natural (verbal) para tabela. Na ficha de trabalho 2, propus um problema dado em linguagem natural, onde três automóveis circulavam com velocidade constante de *40km/h*, *50km/h* e *80km/h*. Pedia para determinarem a distância percorrida por cada um deles para: meia hora; uma hora; uma hora e meia e duas horas. Analiso em seguida duas das respostas realizadas pelos alunos:

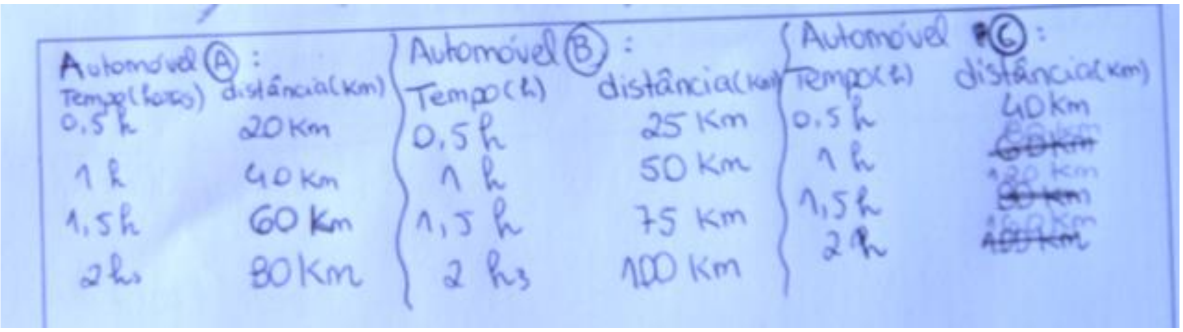
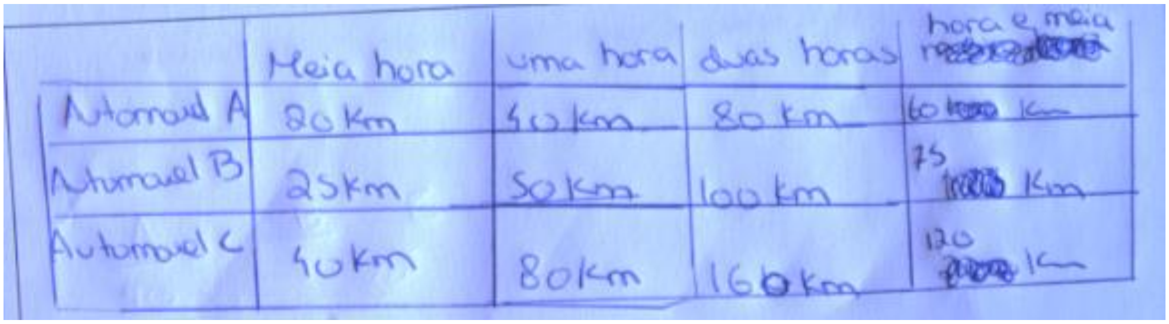


Figura 5.54 – Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 2 do par Manuela e Ricardo



	Meia hora	uma hora	duas horas	hora e meia
Automovel A	20 Km	40 km	80 km	60 km
Automovel B	25 Km	50 Km	100 km	75 Km
Automovel C	40 km	80 km	160 km	120 km

Figura 5.55 – Resposta da alínea 1.1 da ficha de trabalho 2 do par Helder e Vitor

Ambos os pares interpretaram a informação dada no enunciado e apresentaram os valores pedidos para as distâncias percorridas em km, por cada um dos automóveis. Na figura 5.54. os dados não são apresentados numa tabela formal, mas para cada um dos automóveis, *A*, *B* e *C*, foi indicado o tempo em horas e a correspondente distância percorrida em km. Na figura 5.55. o par constrói uma única tabela onde as linhas indicam os diferentes automóveis e as colunas os tempos. Estes alunos passam da *representação natural (verbal) para a representação em tabela*.

Representação natural para algébrica. Dado que as funções que modelam o problema são funções de proporcionalidade direta, era pedido a sua representação algébrica. Um exemplo da transformação entre a representação em linguagem natural e a representação em expressão algébrica é apresentado em seguida;

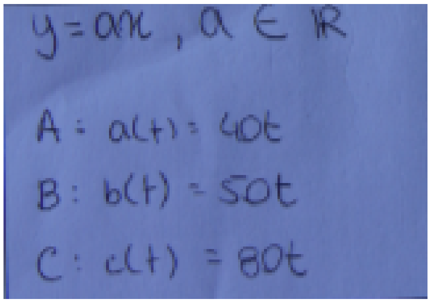


Figura 5.56 – Resposta da alínea 1.2 da ficha de trabalho 2 do par Manuela e Ricardo

Como se pode verificar este par identifica a constante de proporcionalidade, o que revela compreensão do enunciado do problema, escreve a expressão genérica deste tipo de funções referindo que *a* é um parâmetro real e apresenta corretamente as expressões algébricas que representam as funções que traduzem o problema proposto. Verifico deste modo que este para faz uma correta transformação da *representação natural para a algébrica*.

Representação algébrica para gráfica. Foi possível encontrarem-se resoluções de alunos que passaram da representação algébrica para a gráfica. No entanto foram identificadas algumas dificuldades como ilustro na resolução da alínea 1.4. da ficha de trabalho 2.

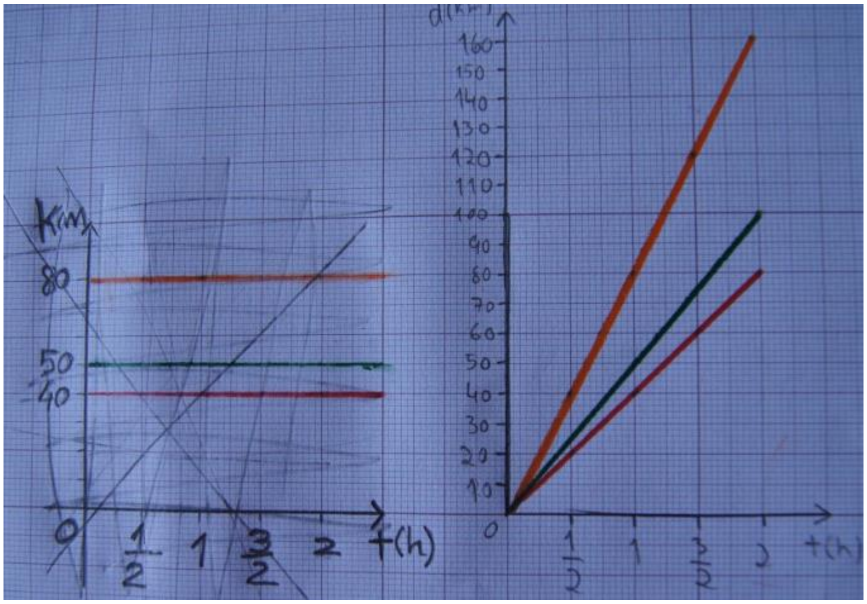


Figura 5.57 – Resposta da alínea 1.4 da ficha de trabalho 2 do par João e Mário

Ao fazerem a transformação entre a expressão algébrica e a gráfica este par começou por traçar não três funções de proporcionalidade direta, mas três funções constantes usando o valor da constante de proporcionalidade direta. Contudo, constataram que as representações não eram semirretas com início no ponto *(0; 0)* e refizeram a sua representação, tendo o cuidado em qualquer dos dois casos de identificar os eixos e escolher uma escala adequada para o conjunto das representações. Nesta resolução a dificuldade sentida acabou por ser ultrapassada. Apenas refiro que este par não identificou as representações obtidas, mas teve o cuidado de utilizar cores diferentes para cada uma delas.

Na ficha de trabalho 3 no problema 2 era dada a expressão algébrica de uma função afim, $h(x) = x + 2$.

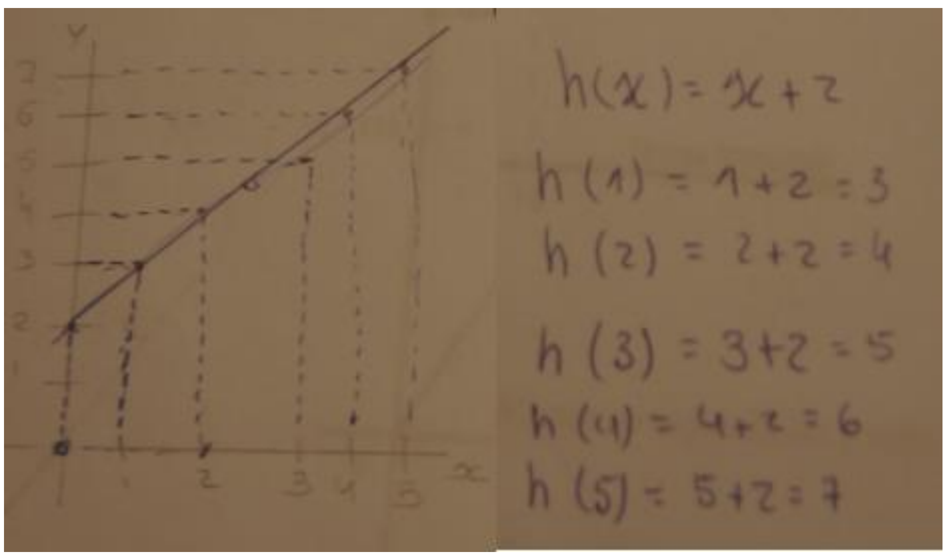


Figura 5.58 – Parte da resposta do problema 2 da ficha de trabalho 3 do par Afonso e Carlota

Na resolução apresentada (figura 5.58), o par de alunos sentiu necessidade de fazer a representação gráfica da função *h* para poder responder às questões que lhe eram propostas. Focando no raciocínio efetuado por este par na transformação da representação algébrica para a representação gráfica, pode afirmar-se que os alunos começaram por determinar as imagens dos objetos 1, 2, 3, 4, e 5, determinando as coordenadas para 5 pontos. Marcaram os pontos obtidos no referencial cartesiano, identificando cada um dos seus eixos e traçaram a reta que representa a função *h*. É ainda visível a necessidade de um conjunto de pontos para se sentirem seguros a traçar a reta que representa a função. Esta necessidade é também evidente nas resoluções apresentadas por outros pares.

No momento de avaliação os progressos são evidentes. A transformação da representação algébrica para a gráfica é realizada usando os conhecimentos adquiridos ao longo das aulas verificando-se um desempenho mais eficiente, como se ilustra no exemplo seguinte:

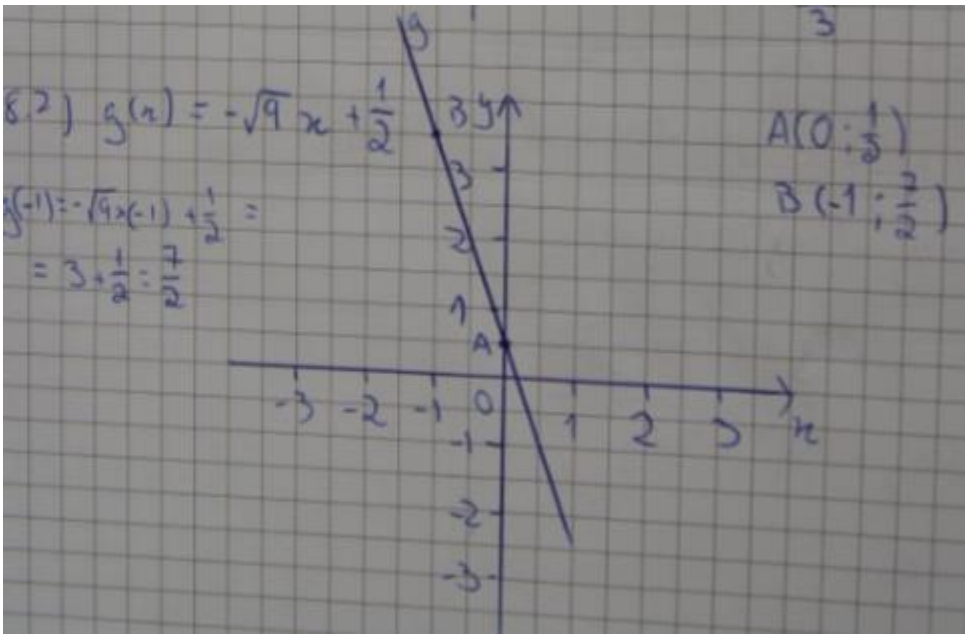


Figura 5.59 – Resposta da questão 8 do 1.º teste de avaliação do Mário

Este aluno escreve a expressão algébrica de uma função dado o seu valor de declive e de ordenada na origem. Reconhece que o valor da ordenada na origem se pode representar através de um ponto e escreve o ponto $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$, e como necessita apenas de dois pontos para fazer a representação gráfica da função g, determina a imagem de -1, usando a expressão algébrica obtida, assim escreve o novo ponto $B\left(-1;\ \frac{7}{2}\right)$. Segue-se o traçar do referencial cartesiano onde marca os dois pontos, identifica os eixos e traça a reta que representa a função g identificando-a. Verifica-se que o aluno faz a representação gráfica pedida utilizando o número mínimo de pontos necessários para a sua representação, nota-se a evolução nas aprendizagens realizadas.

O uso de diferentes formas de representação de uma função foi trabalhado ao longo de todas as aulas dedicadas ao estudo das funções. A evolução e confiança na transição entre as diferentes representações de uma função permitiu que um grande número de alunos realizasse aprendizagens significativas neste tema desenvolvendo o seu raciocínio funcional.

Razões apontadas pelos alunos na escolha da representação usada

Na aula 6 propus à turma uma tarefa com dois problemas. O problema 2 é apresentado em linguagem natural e podia ser modelado por uma função afim. Neste problema era pedido aos alunos a representação algébrica da função. Na alínea 2.2 pedi para os alunos fazerem outra representação dessa função e explicarem o seu raciocínio. O meu objetivo era perceber qual ou quais representações os alunos escolheriam e porquê.

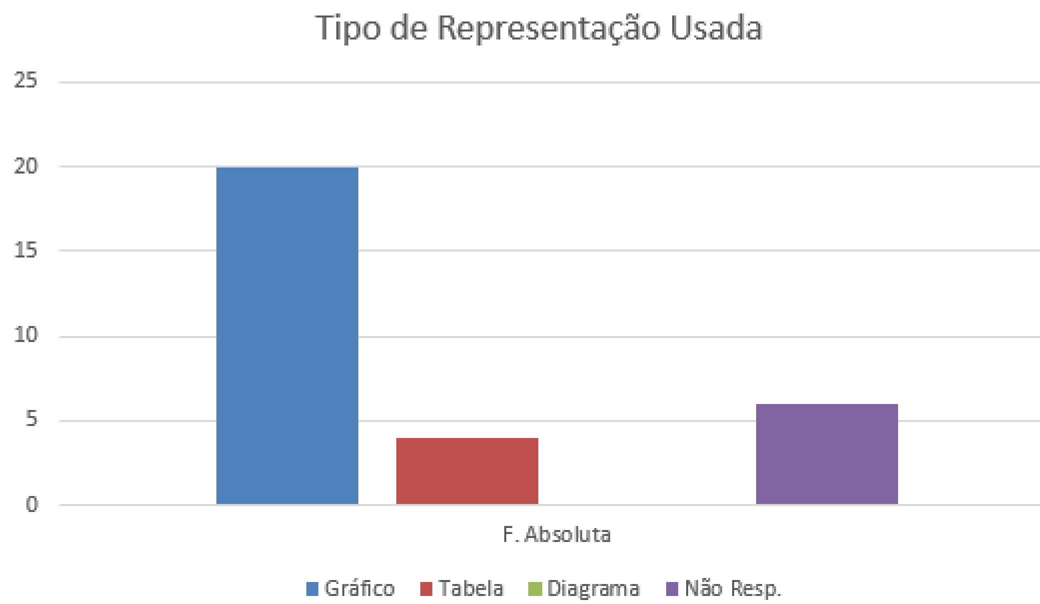


Figura 5.60 – Gráfico das representações mais usadas pelos alunos na ficha de trabalho 6

Como se verifica, na figura anterior a representação privilegiada pela maioria dos alunos foi a representação gráfica (20 alunos), seguindo-se-lhe a representação em tabela utilizada por 4 alunos. Existiram ainda 6 alunos que não apresentaram nenhum tipo de resposta.

Começo por apresentar a representação gráfica de um par de alunos, que fez uma correta interpretação do enunciado e modelou o problema apresentado pela seguinte expressão algébrica: $f(x) = 1{,}5x + 3$.

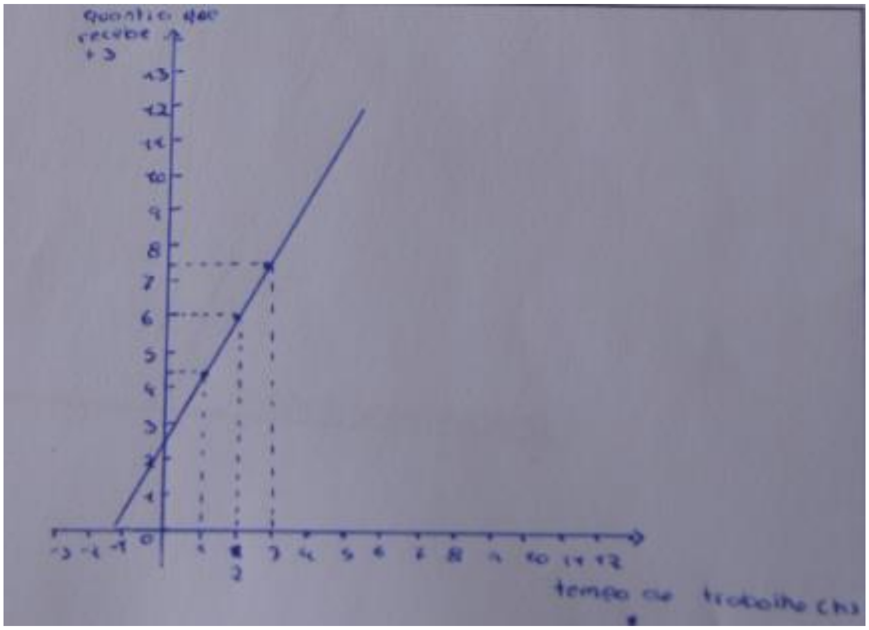


Figura 5.61 – Parte da resposta do problema 2 da ficha de trabalho 6 do par Guilherme e Catarina

Este par de alunos utilizou os três pontos que tinha determinado na primeira parte do problema, marcou-os no referencial cartesiano e traçou a reta que representava a função. Fez uma correta identificação dos eixos, teve o cuidado de identificar que o eixo das abcissas representava o tempo de trabalho em horas e o eixo das ordenadas a quantia a receber, orientado cada um dos eixos. Apenas na fase de entrevista pude questionar este par sobre o porquê da escolha da representação gráfica. Apresento em seguida um excerto dessa entrevista.

1. Professora – Que representação escolheram fazer?
2. Catarina – O gráfico.
3. Professora – E porquê?
4. Guilherme – Sei lá, porque eu gosto mais do gráfico.
5. Professora – E tu Catarina?
6. Catarina – A tabela é mais fácil…
7. Professora – Então porque fizeram o gráfico?
8. Catarina – Eu pensava que pedia outra expressão algébrica…
9. Professora – Então existe mais do que uma expressão algébrica para representar a mesma função?
10. Guilherme – Eu acho que não.
11. Professora – E tu Catarina?
12. Catarina – Não…
13. Professora – Pois só existe uma expressão algébrica para definir a função dada. Então porquê o gráfico?

14. Catarina – Quando nós voltámos a ler a pergunta, achamos que o gráfico mostrava todos os dados da pergunta.
15. Professora – Mas os outros tipos de representação também podem fazer isso.
16. Guilherme – Mas aqui não temos quantia a receber negativa.
17. Professora – E o tempo pode ser negativo?
18. Catarina – Não
19. Guilherme – Professora, no gráfico podemos ver.
20. Professora – Então e no vosso gráfico tiveram isso em atenção?
21. Guilherme – Não, esquecemos o tempo.
22. Professora – Então vamos só recapitular, a escolha da representação gráfica da função foi…
23. Catarina – Para conseguimos ver todas as informações que queriamos deixar.

(entrevista da aula 6)

Da análise deste excerto, foi possível verificar que o par ainda tem algumas dificuldades nas diferentes formas de representar uma função (fala 8), e que embora se sentissem mais confiantes na representação em tabela (fala 6), optaram pela representação gráfica, referindo que “no gráfico podemos ver” (fala 19). Embora na fase de entrevista se tenham apercebido que representaram a função para valores de tempo negativos, referiram que a representação gráfica para eles era a mais adequada neste problema porque “conseguimos ver todas as informações”.

Outras alunas também selecionadas para as entrevistas sentiram maiores dificuldades na modelação do problema dado e demoraram algum tempo para conseguirem escreve a expressão algébrica (correta) da função. Como esta tarefa foi proposta numa aula de 45 minutos, este grupo sentiu que não teve muito tempo para responder, mas a sua escolha foi também de fazer a representação gráfica da função obtida anteriormente:

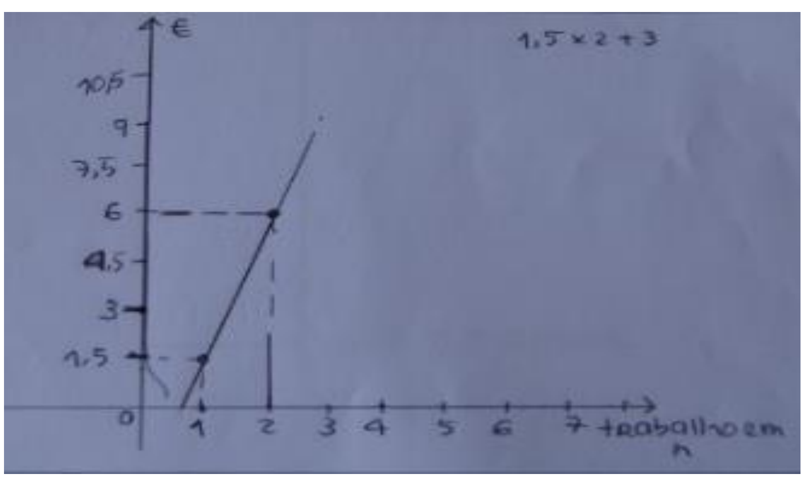


Figura 5.62 – Parte da resposta do problema 2 da tarefa 6 do par Sara e Maria

Embora tenham conseguido chegar à expressão algébrica da função que representava o problema proposto, $f(x) = 1{,}5x + 3$, quando passaram para a sua representação gráfica usaram o ponto *(1; 1,5)* que não pertence à função. Assim, a representação gráfica obtida não corresponde à função inícial. Na entrevista questionei as alunas sobre o porquê da escolha da representação gráfica, como mostro no excerto seguinte:

1. Professora - Fizeram uma representação gráfica?
2. Sara – Sim
3. Professora – Porque escolheram a representação gráfica?
4. Maria – Porque é mais fácil.
5. Sara – E é a representação que costumamos usar.
6. Professora – Mas, só existem estas duas representações?
7. Maria – Temos a tabela e a das bolinhas…
8. Sara – O diagrama de setas.
9. Professora – Então e como correu? O que fizeram?
10. Maria – Acho que não correu bem.
11. Sara – Sabiamos que a ordenada na origem era 3, mas não conseguimos ligar…
12. Professora – Porquê?
13. Maria – Não tivemos mais tempo.
14. Professora – Então porque só representaram o vosso gráfico no primeiro quadrante?
15. Sara – Porque o tempo e a quantia a receber têm de ser positivos.
16. Professora – Então pensaram no contexto no problema.
17. Sara - Sim.
18. Professora – Muito bem.

(entrevista da aula 6)

A justificação que as alunas apresentaram para escolher a representação gráfica foi por a considerarem mais fácil (fala 4) e ser aquela que usam mais frequentemente (fala 5). É de fazer notar que adequaram a representação da situação ao contexto do problema (fala 15).

Além da representação gráfica, existiram dois pares de alunos que escolheram utilizar a tabela. Apresento em seguida um excerto da aula de um par que começou por utilizar a tabela, mas que apagou o seu registo:

1. Beatriz – Em 1 hora ganha 1,5 euros, em 2 horas 3 euros…Temos sempre de somar os 3 euros…
2. Leonel – Pois, são as duas coisas juntas.
3. Beatriz – Espera, vou fazer a tabela para ver se dá certo. 0 horas recebe 3 euros, 1 hora…
4. Leonel – 1 hora recebe 1,5 euros mais o bilhete de autocarro que dá…
5. Beatriz – 4,5 euros. Então para duas horas dá $1{,}5 + 1{,}5 + 3 = 6$, certo?
6. Leonel – Sim.

(registo áudio da aula 6)

Este par de alunos acabou por apagar o registo que realizou durante a fase de trabalho autónomo, acabando por não apresentar nenhuma resolução. Só na fase da entrevista me disseram que tinham apagado o seu registo, mas que tinham escolhido fazer a tabela porque para eles era mais fácil organizar os dados e "fazer as contas":

1. Professora – Então onde está a vossa representação?
2. Beatriz – Apagamos …
3. Professora – Mas porquê?
4. Leonel – Ficamos com dúvida se estava certo.
5. Professora – Então mas porquê?
6. Leonel – Porque olhamos para o lado e tavam a fazer o gráfico.

[risos]

7. Professora – Mas apenas se pedia uma representação, não se especificava qual. Deviam ter mais confiança no vosso trabalho! Mas expliquem lá porque estavam a fazer a tabela.
8. Beatriz – Porque é mais fácil!
9. Professora – É mais fácil porquê?
10. Beatriz – Organizo os números e fica mais fácil para fazer as contas.

(entrevista da aula 6)

Em síntese, o tipo de representação mais utilizado pela turma foi a representação gráfica. Ser *mais fácil visualizar os dados do problema* e *ser mais adequada ao contexto do problema* foram as principais razões apontadas pelos alunos para justificar a sua preferência. Como as várias formas de representar uma função foram trabalhadas ao longo de todas as aulas, a turma, tal como se verificou nos resultados apresentados, revelou aprendizagens muito significativas na transição entre representações.

Capítulo 6
Conclusões

Este capítulo é dedicado às principais conclusões obtidas que visam dar resposta à problemática deste trabalho. Começo por fazer uma breve síntese do estudo, seguindo-se a apresentação das principais conclusões que respondem à problemática e termino com uma breve reflexão sobre a minha visão global desta experiência.

Síntese do estudo

Este trabalho teve como grande objetivo compreender como o desenvolvimento do raciocínio funcional conduz à aprendizagem do conceito de função numa turma do 8.º ano de uma escola no distrito de Lisboa. Para dar resposta a esta problemática formulei três questões orientadoras que se prendem com a interpretação que os alunos fazem da relação entre variável independente e variável dependente, com o significado que os alunos atribuem ao declive de uma reta não vertical e dificuldades sentidas e, por fim, com as representações mais utilizadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem funções e o porquê da sua escolha.

O estudo, de carácter qualitativo e interpretativo, decorreu durante a lecionação da unidade didática "Gráficos de Funções Afins", no 2.º período do ano letivo 2015/2016, que seguiu principalmente ao método de ensino exploratório. A análise de dados foi feita com base na recolha documental, na observação em sala de aula, acompanhada com registos áudio/vídeo e notas de campo, e em entrevistas feitas a alguns alunos, áudio gravadas.

Principais conclusões

Com a primeira questão orientadora deste trabalho pretendia perceber que interpretações os alunos fazem da relação entre variável independe e variável dependente no estudo das funções. Desta forma, pela análise que efetuei aos dados recolhidos verifiquei que, no geral, os alunos identificam as correspondências que representam funções, estabelecendo a correspondência entre objeto e imagem. No entanto, o reconhecimento de uma função através da sua representação gráfica revelou-se mais difícil para os alunos. A maior dificuldade prendeu-se com a identificação de que os objetos (variável independente) se leem no eixo das abcissas e as imagens (variável dependente) se leem no eixo das ordenadas. Quando apresentei a representação gráfica de uma reta vertical, as dificuldades, para verificarem se era uma função, foram evidentes porque ao mesmo objeto correspondiam várias imagens. Assim, compreendi que alguns alunos tinham o conceito de função memorizado e não apresentavam uma correta compreensão do conceito. Estes resultados vão ao encontro do referenciado por Saraiva e Teixeira (2009) ao afirmarem que não é suficiente os alunos saberem a definição para a sua compreensão. Ainda verifiquei que existiu um par de alunas que sentiu dificuldades em identificar se uma correspondência, apresentada em forma de tabela, era ou não uma função. Contudo, estas alunas conseguiram estabelecer a relação entre os dois conjuntos e identificaram corretamente que era função ao transporem a tabela para o diagrama de setas.

No decorrer da intervenção letiva começaram a ser mais evidentes as aprendizagens na interpretação da representação gráfica de uma função. A leitura da representação gráfica, onde os alunos identificavam um ponto da reta representada e estabeleciam a relação entre as variáveis, com o objetivo de explicitar a relação uma relação funcional entre elas, esta foi uma das aprendizagens alcançadas com mais significado como é referido por Matos (2007) e Matos e Ponte (2008). Ao realizarem esta aprendizagem, os alunos conseguiram escrever corretamente a expressão algébrica das funções pedidas. Ainda assim, verifiquei que um pequeno grupo de alunos continuavam a sentir algumas dificuldades na identificação das variáveis independente e dependente. Tal como referido por Domingos (1994), estes alunos confundiam-nas. Na transposição da linguagem natural para a representação em tabela, constatei que os alunos não sentiram dificuldades e privilegiaram o método aditivo ou o método multiplicativo, estabelecendo uma relação correta entre as variáveis. A regra de três simples foi outra estratégia muito utilizada pelos alunos na determinação de um valor desconhecido, apesar de, no início da intervenção, não compreenderem porque a podiam utilizar. Ao longo das aulas verifiquei que compreenderam que o seu uso só era viável em funções de proporcionalidade direta, ou seja, quando a relação entre as variáveis se mantinha invariante. No caso das funções afins, o cálculo e a leitura de expressões do tipo:" $h(0)$" ou "a imagem de -2 pela função h é…" foi efetuada corretamente pela maioria dos alunos, quer quando a função estava representada pela sua expressão algébrica, quer pela sua representação gráfica. As dificuldades mais sentidas não foram ao nível do tipo de relação entre as variáveis, mas no cálculo numérico quando usavam a correspondente expressão algébrica.

Em suma, posso afirmar que as maiores dificuldades detetadas foram: a identificação correta das variáveis independente e dependente e a resistência inicial na leitura da representação gráfica. Contudo, pela análise feita ao longo da intervenção letiva, posso afirmar que os alunos foram progredindo nas suas aprendizagens ao nível da compreensão da relação entre as variáveis, identificando essa relação nos vários tipos de representação. Através dessa relação identificaram os diferentes tipos de funções (proporcionalidade direta, linear e afim), desenvolvendo o seu raciocínio funcional. Estes resultados vão ao encontro do referido por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999); Kieran (1992, 1999); Ponte, Branco e Matos (2009) e Smith (2008).

Com a segunda questão que norteia este trabalho pretendia compreender qual o significado que os alunos atribuem ao conceito de declive de uma reta não vertical e identificar quais as principais dificuldades que revelam na aprendizagem deste conceito.

No início da intervenção letiva os alunos ainda não conheciam a noção de declive, mas já conheciam a noção de constante de proporcionalidade do 7.º ano. Pela análise das resoluções da ficha de trabalho 2 tornou-se evidente que a maioria dos alunos compreendeu que existia uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis. Assim, os que conseguiram determinar corretamente a constante de proporcionalidade também conseguiram atribuir-lhe significado no contexto do problema. No entanto, verifiquei que um pequeno grupo de alunos sentiu dificuldades em determinar a constante de proporcionalidade: ou por fazerem a razão entre a variável independente e a dependente ou porque não utilizaram as unidades corretas. Esta dificuldade não permitiu que estes conseguissem atribuir significado à constante de proporcionalidade no contexto do problema. Na discussão coletiva da tarefa 1 desta ficha de trabalho explorei com a turma a variação das funções trabalhadas e defini que a constante de proporcionalidade era o declive da reta que representa a função.

Ao analisar as resoluções das aulas seguintes notei que os alunos recorriam aos conhecimentos anteriores sobre a variação e escreviam as expressões algébricas de funções afins que eram representadas por retas estritamente paralelas à reta que representava uma função de proporcionalidade direta. Esta forma de relacionar o declive de duas retas estritamente paralelas permitiu que os alunos, a partir da representação de uma função linear, conseguissem posteriormente representar uma função afim conhecendo apenas a sua ordenada na origem. Esta relação que os alunos estabeleceram entre funções representadas por retas estritamente paralelas revelou-se uma grande aprendizagem ao nível deste conceito. Esta aprendizagem foi facilmente verificada quando analisei algumas das justificações dos alunos que utilizaram expressões como "o declive é igual". Alguns alunos, para confirmarem esta relação, escreveram as expressões algébricas pedidas e construíram tabelas para confirmarem as expressões apresentadas.

Relativamente à formula de cálculo de declive surgiram dificuldades na identificação das variáveis, trocando as ordenadas com as abcissas e/ou no cálculo numérico do seu valor. De uma forma geral, todos os alunos compreenderam que, com apenas dois pontos distintos pertencentes à reta, era possível determinar o valor do declive dessa reta. Em relação à escrita da expressão algébrica da função afim verifiquei que foi uma dificuldade para um pequeno grupo de alunos, porque apenas tentaram sem sucesso determinar o declive ignorando o valor da ordenada na origem não chegando à expressão pedida. Ainda assim, posso referir que a maioria dos alunos realizou aprendizagens consistentes, conseguindo construir as representações algébricas corretas das funções que modelam os problemas propostos, com e sem utilizar a fórmula de cálculo do declive e atribuir significado ao valor do declive dentro do contexto do problema. O momento de avaliação formal veio corroborar o exposto acima acerca das aprendizagens realizadas sobre o conceito de declive: os alunos recorreram ao sinal do declive da reta para identificarem se as representações gráficas apresentadas são ou não a representação da função dada pela sua expressão algébrica. Chegaram mesmo a referir que a "reta decresce" não podendo ser a representação da função h porque o "seu declive é positivo". Deste modo, posso afirmar que a maioria dos alunos conseguiu aplicar a fórmula de cálculo do declive, embora tenham existido ainda algumas dificuldades na troca das variáveis e no seu cálculo numérico, comprometendo a atribuição de significado a este conceito. Os alunos conseguiram determinar o valor numérico do declive, atribuir-lhe significado e relacionar o seu sinal com a inclinação da reta correspondente, mostrando aprendizagens significativas sobre as funções, revelando evolução do seu raciocínio funcional. Saliento que o estudo da variação é um dos aspetos fundamentais onde se pode alicerçar a compreensão do conceito de função, ideia é partilhada por vários autores, como por exemplo: Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999); Kaput (1999); Ponte, (1990) e nas normas NCTM (2008).

Na terceira questão de investigação pretendia perceber quais as representações mais utilizadas pelos alunos, na resolução de problemas, e quais as razões da sua escolha. Para responder a esta questão comecei por analisar como os alunos fizeram a conversão de uma representação para outra. Verifiquei que a transição entre as diferentes formas de representar uma função era uma das grandes dificuldades sentidas pelos alunos conforme referido por Arcavi, (2003); Carvalho & Duval, (2006); Ferreira & Ponte, (2001); Ponte, (1984, 1992). A utilização das diferentes representações pelos alunos proporcionou aprendizagens ricas tornando as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à compreensão dos objetos matemáticos trabalhados (NCTM, 2007).

Na ficha de trabalho 2, um dos problemas propostos usava a linguagem natural e, ao longo da tarefa, fui pedindo as várias representações das funções que modelavam o problema. A maioria dos alunos não sentiu dificuldade em interpretar a informação dada no enunciado, apenas sentindo dificuldade na forma como iriam indicar “meia hora” e a “uma hora e meia”. Ultrapassada esta dificuldade, os alunos construíram tabelas, mais ou menos formais, nas quais organizaram os dados e apresentaram os valores pedidos. Desta forma, fizeram a passagem da representação natural para a representação em tabela. O uso da representação em tabela é muito útil, fazendo de ponte entre a Aritmética e a Álgebra, como refere Canavarro e Gafanhoto (2013). Uma vez que as funções que modelavam o problema eram de proporcionalidade direta, a passagem para a expressão algébrica correspondente também decorreu sem dificuldades. Estas surgiram na representação gráfica das funções. Um par de alunos representou três funções constantes, utilizando apenas a constante de proporcionalidade, mas rapidamente perceberam que não tinham representado funções de proporcionalidade direta, tendo corrigido a sua representação. Constatei, assim, que o uso das diferentes representações, combinadas de forma a que as desvantagens de umas sejam colmatadas pelas vantagens das outras, tornaram-se ferramentas eficazes para uma aprendizagem significativa neste grupo de alunos, tal como referido por Friedland e Tabach (2001).

A representação gráfica de uma função afim, partindo da sua expressão algébrica foi trabalhada na aula 3 mas surgiram dificuldades. A principal, que não é evidente nas resoluções escritas, foi a atitude inicial, os alunos não sabiam por onde começar. Contudo, com alguma orientação, perceberam que necessitavam de determinar alguns pontos coordenados para traçarem a reta que representa a função. Analisando a forma como os alunos fizeram essa representação gráfica, foi evidente a necessidade de um conjunto de vários pontos, determinados usando a expressão algébrica. Esta necessidade foi-se mantendo quando pedida a representação gráfica de uma função afim. Mas, sempre que eram questionados sobre o número mínimo de pontos necessários para fazer a representação, os alunos respondiam que era apenas dois. Verifiquei, no momento de avaliação formal, que os progressos foram evidentes e a conversão da representação algébrica para a gráfica foi feita usando os conhecimentos trabalhados ao longo das aulas. Verifiquei um desempenho eficiente pois os alunos utilizaram apenas dois pontos para o cálculo do declive.

As diferentes formas de representar uma função foram trabalhadas ao longo de todas as aulas como forma de ultrapassar as dificuldades nas transformações entre sistemas de representações. A representação algébrica de uma função foi a que levantou mais dificuldades, resultado também referido por Kieran (1992), mas o trabalho continuado em várias aulas permitiu que os alunos ultrapassassem essa dificuldade. Na ficha de trabalho 6, apresentei um problema em linguagem natural modelado por uma função afim e, após ter pedido a sua expressão algébrica, pedi outra representação da função e questionei alguns grupos sobre o porquê da sua escolha. Assim, a representação privilegiada pela turma foi a representação gráfica (20 alunos). A razão desta escolha foi a facilidade na visualização dos dados do problema, conseguindo contextualizá-lo. A juntar a esta razão, apontaram que foi uma das representações que os alunos mais usaram ao longo das aulas.

Em suma, a evolução e confiança na conversão entre as diferentes representações permitiu uma maior compreensão no domínio das funções, privilegiando a representação gráfica na resolução de problemas e mostrando um progressivo desenvolvimento do raciocínio funcional da turma.

Reflexão final

Ao refletir sobre o trabalho desenvolvido ao longo deste ano, não posso deixar de referir que foi um grande desafio, tanto a nível pessoal, como profissional. A nível pessoal porque, para mim, um professor deve aprender constantemente, procurando novas formas de inovar e de melhorar a sua prática letiva, sentindo que faz sempre o melhor pelos seus alunos, preparando-os para o futuro. Sentir esta necessidade, deu-me um conjunto de novas ferramentas que me vão ajudar na prática letiva e contribuíram para que eu alcançasse um novo olhar do processo ensino-aprendizagem. Passei de uma perspetiva de ensinar conteúdos, estruturados em programas e apoiados por manuais, para uma perspetiva de ensino-aprendizagem, em que cada aluno desenvolve um conjunto de competências essências - transversais e disciplinares, de acordo como as suas potencialidades e dificuldades, numa integração complexa de saberes. O principal papel do professor é orientar os alunos na busca do saber, saber científico e saber humano.

A nível profissional, o desafio foi conseguir conciliar o esforço de organização e concretização que um trabalho desta natureza requer, com o papel de professora. O período de construção e seleção de tarefas e de material de apoio a cada aula foi difícil, mas deu-me muita satisfação pois foi a primeira vez que construi todos os materiais necessários. A planificação pormenorizada de cada aula permitiu-me reunir e amadurecer ideias interessantes que durante a prática foram fundamentais, quer na lecionação, quer na tomada de decisões ao longo dos diferentes momentos de aula, tendo em conta os objetivos definidos e as características da turma. Sei que, apesar de fazer um planeamento cuidado de cada aula, poderei ter sempre imprevistos, mas estarei mais preparada para tomar as decisões mais adequadas.

O ato de refletir após cada aula, com os professores orientadores e com a minha colega de estágio, foi essencial para melhorar o meu desempenho e ajustar o trabalho a realizar nas aulas seguintes. Assim, tomei consciência da importância do trabalho colaborativo nas escolas e nos diferentes grupos de trabalho. Esta metodologia ajudou-me ainda a compreender melhor o meu papel, identificando as dificuldades diárias da vida de um professor e aprendendo como proceder para realizar esta investigação. Foi igualmente importante rever as minhas aulas através dos registos vídeo, conferindo-lhes um novo olhar e refletindo sobre elas. A reflexão que realizei ao longo deste estudo influenciou positivamente o meu desempenho como professora. Tomei consciência de alguns aspetos que procurarei melhorar no futuro, como a gestão do tempo, a organização do quadro e a fase de discussão coletiva. Estes foram e serão pontos que tento melhorar a cada aula que leciono.

Relativamente aos aspetos positivos, a minha relação com a turma foi muito boa, permitiu momentos de partilha de aprendizagens significativas no tema das funções. Foi importante conhecer a turma desde o início do ano letivo. O método de trabalho que propus foi bem-recebido pelos alunos, o trabalho a pares, a entreajuda nas dificuldades sentidas e a minha orientação para ultrapassar todas as situações surgidas.

Saliento a importância das aulas de Didática, Metodologia e IPP pelas ferramentas 'dispensadas' em todas as fases deste trabalho, a orientação e as aprendizagens fundamentais para a realização de um trabalho desta natureza.

Posso, por fim, a afirmar que adquiri uma visão mais global e um conhecimento mais consciente e integrado do que é ser professor. Entendo que ser professor é muito mais do que simplesmente estar na sala de aula. É contribuir para todo o desenvolvimento do aluno, é participar ativamente em todo o seu processo de formação, não só pela orientação na aquisição de conhecimentos, mas também pela valorização de valores e atitudes, conhecendo os alunos e trabalhando estratégias que os estimulem, envolvendo-os ativamente no seu processo de aprendizagem.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). A matemática na educação básica. p. 97. Lisboa: ME,DEB.

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação. Um guia prático e crítico.* Lisboa: ASA.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics,14*, 24-35. Canada.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocinio funcional. *Raciocínio Matemático.* SPIEM.

Blanton, L., & Kaput, J. (2005). Funcional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming.* Portsmouth, NA: Heinemann.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canário, F., Amado, N., & Carreira, S. (2011). O Geogebra na Construção de Modelos Matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. Em *ATAS XXII SIEM* 845-857. Lisboa: APM.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 11-17.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, l. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática. Lisboa: IE.

Candeias, A. (2010). Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do software GeoGebra. *Tese de Mestrado*. Lisboa: Instituto de Educação.

Carreira, S. (2015). De que nos serve "representar"? Contributos sobre o papel das representações matemáticas no ensino e aprendizagem da matemática. Atas_SPIEM.

Carvalho, L., Ferreira, R., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. Em *ATAS XXII SIEM* 775-789. Lisboa: APM.

Domingos, A. M. (1994). A aprendizagem de funções no ambiente computacional com recurso a diferentes representações. *Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa*. Lisboa: APM.

Domingos, A., Saraiva, M. J., & Ferreira, R. A. (2013). Introdução. *Investigação em Educação Matemática-Raciocinio Matemático,* 8. Atas_EIEM.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1-16.

Duval, R. (2003). Registos de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. Em D. S. Machado, *Aprendizagem em matemática: Registos de representação semiótica*, 11-33. Campinas: Papirus.

Duval, R. (2004). *Registros de representación, comprensión y aprendizage: Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizages intelectuales.* Cali, Colombia: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT, 6*, 96-122.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations Between Secondary Pupil's Conceptions About Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*, 533-556.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis, 18*, 64-66.

Friedland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. Em A. A. Cuoco, & F. R. Curcio, *The roles of representation in school mathematics,* 173-185. Reston: NCTM.

Gafanhoto, A. P., & Canavarro, A. P. (2013). A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações. *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, 1-15. Lisboa.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 133-135. Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. Em L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education,* 178-203. New York: Routledge.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. Em E. Fennema, & T. Romberg, *Mathematics classrooms that promote understanding*, 133-155. Mahwah: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, *Algebra in the Early Grades*, 5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Em D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 390-419. New York: Macmillan.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 187-228.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. Em F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 707-762. Charlotte, NC: Information Age.

Lüdke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.* Edições EPU.

M.E. (2013). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.

Matos, A. S. (2007). Explorando Relações Funcionais no 8.º Ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Tese de Mestrado*. Universidade de Lisboa.

Matos, A., & Ponte, J. P. (2008). O Estudo de Relações Funcionais e o Desenvolvimento do Conceito de Variável em alunos do 8.º Ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*, 195-231.

McEldoon, K. L., & Rittle-Johnson, J. (2010). Assessing elementary students functional thinking skills: the case of function tables. University vander bilt.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Ponte. (2005). *Gestão curricular em Matemática.* Lisboa: APM.

Ponte, J. (1984). Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs. *(Doctoral dissertation)Univesity of Georgia*. Lisboa: APM.

Ponte, J. (1992). The story of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*, 3-8.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, 3-9.

Ponte, J. P. (2002). Refletir e investigar sobre a prática profissional. *Investigar a nossa própria prática*, 5-28.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: ME/DGIDC.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Revista Práxis Educativa, 2*, 355-377.

Ponte, J., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, 9-29.

Prates, A., Tavares, C., Dias, R., & Nunes, C. (2011). O Pensamento Algébrico no Estudo das Funções no 10.º Ano de Escolaridade. Em *ATAS XXII SIEM*, 163-178. Lisboa: APM.

Sajka, M. (2003). A secondary school students understanding of the concept of function: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 229-254.

Santos, L. (2015). Representações Matemáticas. *ATAS.XXV.SPIEM*.Lisboa: APM

Saraiva, J. M., & Teixeira, M. A. (2009). Secondary school students undertanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 19*, 74-83.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of same coin. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 1-36.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the el- ementary curriculum. Em *Álgebra in the Early Grades.* Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Tinoco, L. (2009). *Construindo o conceito de função.* Rio de Janeiro: Projeto Fundão, UFRJ.

Ursini, S. Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra, in M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME25*, *4*, Freudentlhal Institute. Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrech University, Utrecht, The Netherlands, 327-334.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. Em J. Brun, *Didática das matemáticas*, 155-191. Lisboa: Instituto Jean Piaget.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 3*, 293-305.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representation to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*, 111-103.

Apêndices

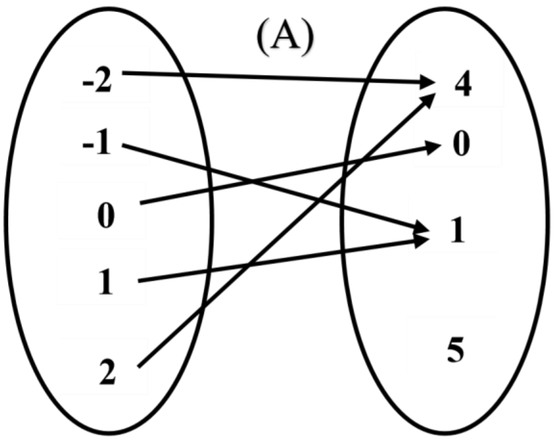
Apêndice A

Fichas de Trabalho

Ficha de Trabalho 1 – De volta às funções

1. Considera as correspondências representadas em seguida:

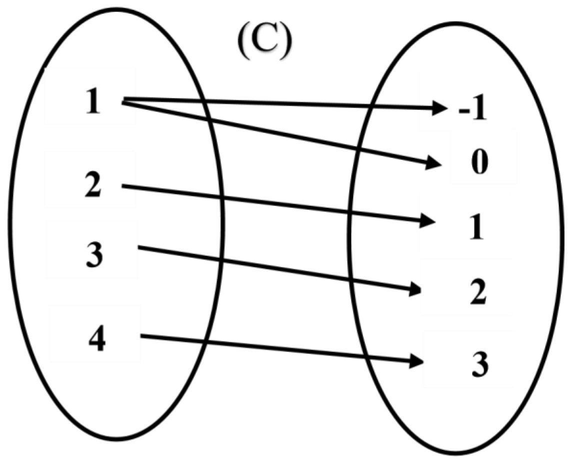
(A)



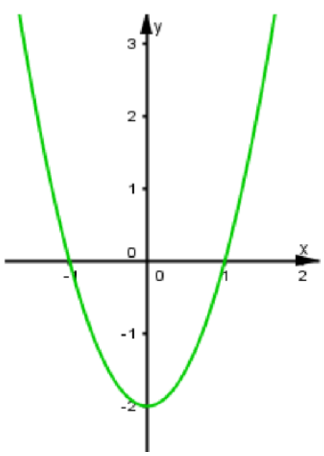
(B)

x	y
0	3
-1	3
-2	6
-3	9
-4	12

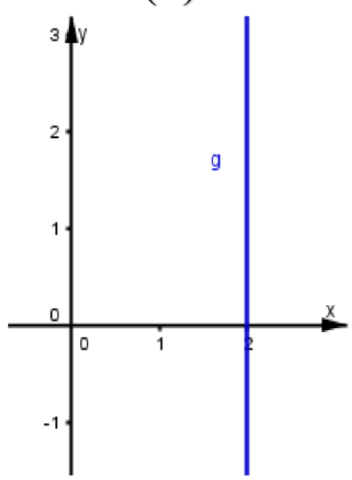
(C)



(D)



(E)



(F)

x	y
0	0
0	4
2	6
3	1
4	8

1.1. Indica as correspondências que representam funções. Justifica a tua resposta.

1.2. Indica o conjunto de partida e o conjunto de chegada da correspondência (A).

1.3. Na correspondência (A), indica o domínio e o contradomínio.

2. O automóvel do Sr. Paulo consome 1 litro de combustível a cada 8 km.

2.1. Completa a tabela seguinte:

Distância (*km*)	8		24	32	
Consumo (*l*)	1	2			5

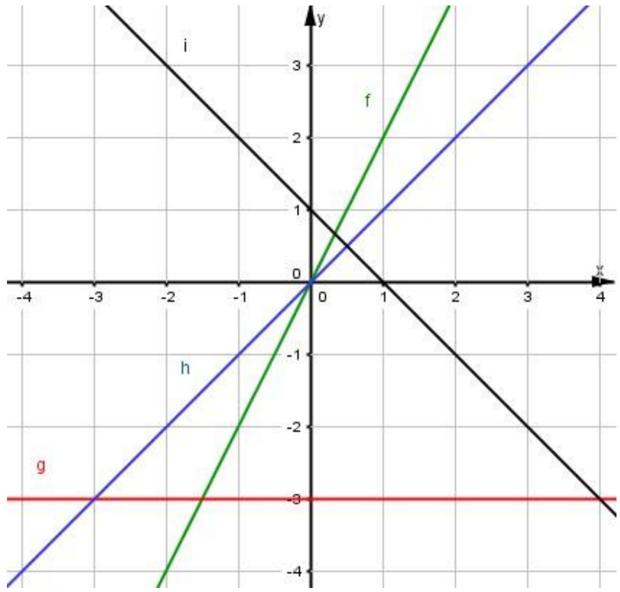
2.2. O consumo é função da distância percorrida? Justifica.

2.3. Identifica a variável independente e variável dependente.

2.4. Representa graficamente esta função (usando a folha de papel milimétrico).

2.5. Escreve a expressão algébrica que associa o consumo de combustível à distância percorrida.

3. Considera os gráficos das funções f, g, h e i:



3.1. Quais as funções constantes? E quais as funções lineares? Quais as funções afins? Justifica.

3.2. Completa, explicando como chegaste a cada um dos valores:

3.2.1. $i(0) =$

3.2.2. A imagem de -2 pela função h é ...

3.2.3. $i(4) =$

3.2.4. O objeto com imagem *-4* através da função f é …

3.3. Associa a cada uma das funções representadas, a sua expressão algébrica. Justifica a tua resposta.

(1) $y = 2x$ **(2)** $y = x$ **(3)** $y = -3$ **(4)** $y = -x + 1$

Ficha de Trabalho 2 – Distância percorrida

1. A distância percorrida em quilómetros por um automóvel, num dado período de tempo, depende da velocidade, em quilómetros por hora, a que o automóvel circula. Supondo que estamos a estudar a distância percorrida por três automóveis:
    - Automóvel A circula com velocidade constante de *40Km/h*;
    - Automóvel B circula com velocidade constante de *50Km/h*;
    - Automóvel C circula com velocidade constante de *80Km/h*.

1.1. Determina a distância percorrida em *Km*, por cada um dos automóveis, para um percurso de meia hora, uma hora; uma hora e meia; duas horas.

1.2. Existe proporcionalidade direta entre a distância percorrida e o tempo? Indica qual é, para cada um dos casos, a constante de proporcionalidade e o seu significado no contexto deste problema.

1.3. Escreve a expressão algébrica de cada uma das funções de proporcionalidade direta, usando $a(t)$ para o "*Automóvel A*"; $b(t)$ para o "*Automóvel B*" e $c(t)$ para o "*Automóvel C*".

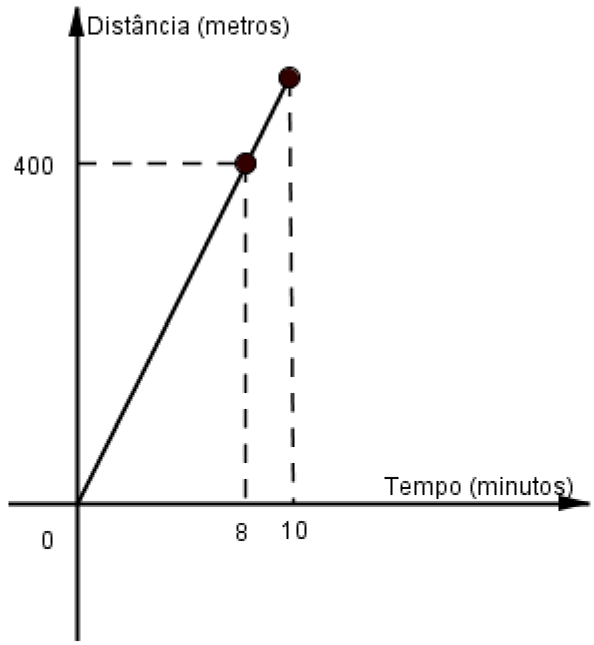
1.4. Representa graficamente, e no mesmo referencial, cada uma das funções, obtidas na alínea anterior, utilizando cores diferentes (utilizando a folha de papel milimétrico).

Ficha de Trabalho 3 – A visita do Martim

1. O Martim saiu de casa e caminhou durante dez minutos até chegar a casa da sua avó. Após a visita, regressou a casa pelo mesmo caminho.

   O trajeto de ida e volta foi realizado pelo Martim com velocidade constante.

   O gráfico seguinte representa a distância, em metros, percorrida pelo Martim, em função do tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que saiu de casa até ao momento em que chegou a casa da sua avó.

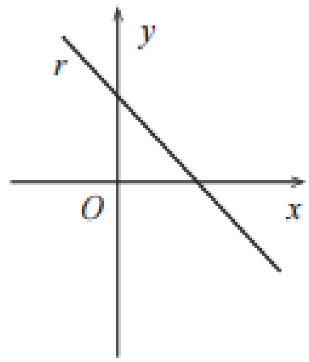


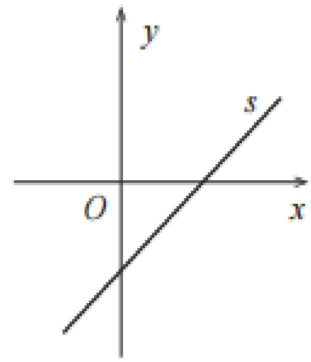
   Determina a distância, em metros, percorrida pelo Martim no trajeto de ida e volta. Mostra como chegaste à tua resposta.

(Fonte: Exame Nacional de Ensino Básico-Época Especial, 2015).

2. Considera a função h definida por $h(x) = x + 2$.

   Na figura seguinte, estão representadas, em referencial cartesiano, duas retas, r e s.





Nem a reta r **nem** a reta s representam graficamente a função h.

Apresenta as razões que te permitem garantir que a reta **r não** representa graficamente a função h e as razões que te permitem garantir que a reta **s não** representa graficamente a função h.

(Fonte: Exame Nacional de Ensino Básico-1.ª chamada, 2015)

Ficha de trabalho 4 – Declive e Paralelismo

1. Considera a função h definida do seguinte modo: $h(x) = x + 2$.

   1.1. Verifica se os pares ordenados (-1, 2) e (1, 3), pertencem ao gráfico de h.

   1.2. Determina as expressões algébricas, de uma função g cuja representação gráfica é uma reta paralela ao gráfico da função h e passa no ponto (0, 3), e de uma função *t*, cuja representação gráfica é paralela à de h e passa no ponto (0, -2).

2. O gráfico da função *f* é a reta *t* com declive $-\frac{11}{2}$ e cuja ordenada na origem é $\frac{3}{4}$.

   Escreve a expressão algébrica da função *f*.

3. Considera as funções $f(x) = x + \frac{1}{2}; g(x) = 3x; h(x) = -x + \frac{1}{2}; e\ t(x) = 3x + 1$.

   Justificando a tua resposta, indica quais das funções são representadas graficamente por:

   3.1. Retas paralelas entre si.

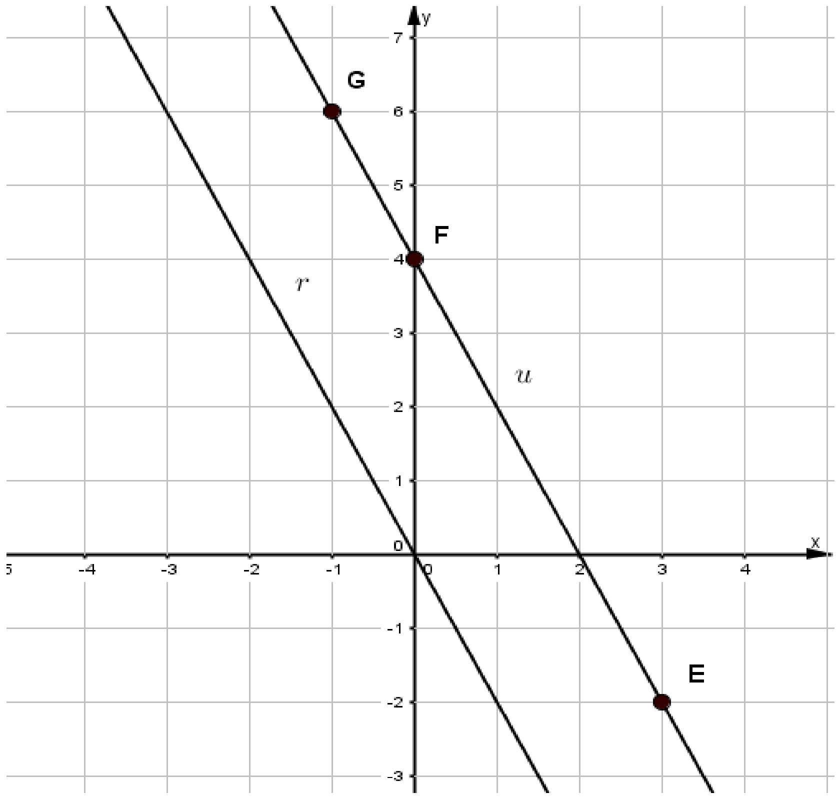
   3.2. Retas que passam pela origem do referencial.

   3.3. Retas que não passam pela origem do referencial e intersetam o eixo das ordenadas no mesmo ponto.

Exercícios adaptados de Conceição, A. & Almeida, M. (2014). *Matematicamente Falando 8.* Lisboa: Areal Editores.

Ficha de Trabalho 5 – Declive de uma reta

1. Observa as retas *r* e *u* representadas no referencial cartesiano da figura.



1.1. Escreve a expressão algébrica da função *h* representada pela reta *r*, e da função *w* representada pela reta *u*. Indica o valor do declive e da ordenada na origem em cada uma.

1.2. Quais as coordenadas dos pontos E, F e G? Indica-os.

1.3. Indica o valor numérico da seguinte expressão:

$$\frac{ordenada\ do\ ponto\ \ F - ordenada\ do\ ponto\ E}{abcissa\ do\ ponto\ F - abcissa\ do\ ponto\ E}$$

1.4. Indica o valor numérico da seguinte expressão:

$$\frac{ordenada\ do\ ponto\ \ G - ordenada\ do\ ponto\ F}{abcissa\ do\ ponto\ G - abcissa\ do\ ponto\ F}$$

1.5. Compara o valor obtido nas alíneas anteriores com o declive da reta *u*. O que podes concluir?

2. Com base nos resultados anteriores escreve a expressão algébrica da uma função *f*:

   2.1. A imagem de 1, por *f*, é 2; e a imagem de 7, por *f*, é 5.

   2.2. $f(0) = -3 \ e \ f(2) = 0$

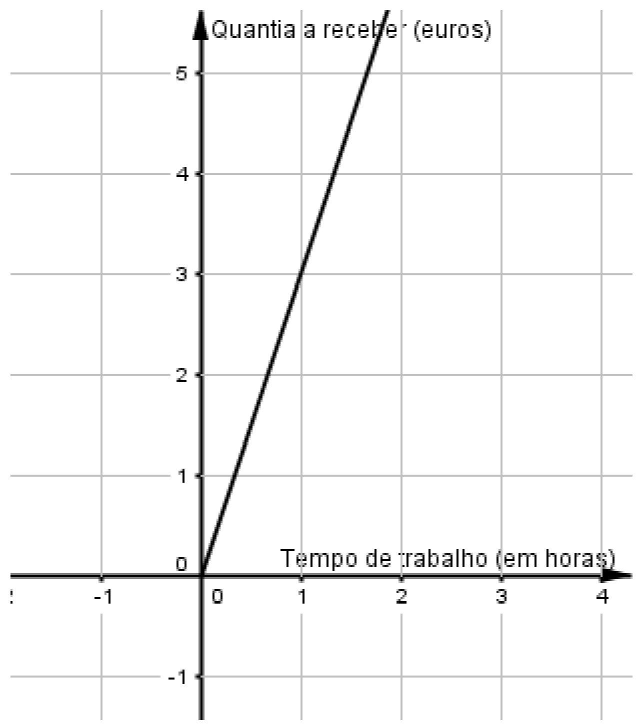
   2.3. $f(-1) = -5 \ e \ f(3) = 7$.

Fonte: Conceição, A. & Almeida, M. (2014). *Matematicamente Falando 8.* Lisboa: Areal Editores.

Ficha de Trabalho 6 – Trabalho de Verão

1. O Carlos vai trabalhar num arraial de festas, neste verão. Por esse trabalho receberá uma certa quantia, que depende somente do seu tempo de trabalho.

Na seguinte figura, está representada graficamente a função que relacionam o tempo de trabalho, em horas, do Carlos com a quantia a receber por ele, em euros.



1.1. Considera que o Carlos vai trabalhar 6 horas. Que quantia irá receber pelo seu trabalho? Justifica a tua resposta.

1.2. Se o Carlos receber pelo seu trabalho 10,5 euros, quanto tempo terá de trabalhar? Justifica a tua resposta.

1.3. Escreve a expressão algébrica que representa a função dada? Justificando qual o tipo de função apresentada.

2. A Laura também vai trabalhar no arraial.

   Como mora longe, receberá 3 euros para o bilhete de autocarro, de ida e volta, e 1,5 euros por cada hora de trabalho.

   2.1. Que função, representa a relação entre o tempo de trabalho da Laura e a quantia que ela receberá por esse trabalho? Escreve a sua expressão algébrica.

   2.2. Faz **outra** representação desta função. Explica como pensas-te?

Fonte: Exame Nacional do Ensino Básico-1.ª Chamada, 2010.

Apêndice B

Planificação das Aulas

Plano de Aula do dia 29 de fevereiro

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Revisão de conteúdos de funções do 7.ºano

Data/hora: 29 de fevereiro 2016 (90 minutos)

Sumário: Início do estudo da Unidade 5: Gráficos de funções afins.

Objetivos Gerais:

Rever:

-Conceito de função e os diferentes tipos de representações para definir uma função;

-Noções de domínio, contradomínio, variável, (independente e dependente), abcissa, ordenada, origem;

-Noção de função constante, função linear, função afim.

Estratégia Geral:

Realização de tarefa "De volta às funções".

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;
- Introdução com a apresentação da tarefa e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução das tarefas 1 e 2;
- Discussão coletiva das tarefas 1 e 2;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 3;
- Discussão coletiva da tarefa 3;
- Síntese dos conceitos trabalhados em aula;

- Proposta de trabalho de exercícios do manual, caso os alunos terminem as tarefas antes do término da aula.

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com as tarefas- um enunciado para cada aluno com espaço para as respostas, dadas a canetas.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa, e documento de síntese final.

Contextualização:

Esta será a primeira aula de 8.º ano dedicada ao subtópico "Gráficos de funções afins". Pretende-se com a tarefa "De volta às funções" retomar o conceito de função como relação entre variáveis já trabalhado no 7.º ano. Assim como, rever os conceitos de: domínio, contradomínio, variável independente, variável dependente, origem e os diferentes tipos de representações de uma função. Fazer a análise de uma função de proporcionalidade direta, onde o consumo de combustível varia consoante a distância percorrida, e fazer a distinção entre função constante, linear e afim.

Desenvolvimento da aula:

1. Início da aula/ Apresentação da ficha de trabalho (10) minutos)

-Escrever o Sumário no quadro;

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

- Questionar a turma, sobre o que é uma função? O que é necessário para definir uma função? Como se pode representar uma função? Usar este momento para focar a turma na tarefa, tendo o cuidado de não validar as respostas, mas aproveitar os conhecimentos anteriores para motivar a adesão à tarefa. Ao longo destas questões, a professora vai escrevendo palavras chave (indicadas pelos alunos) no quadro, como por exemplo, correspondência, domínio, etc, procurando que a turma relembre em grupo de trabalho, cada um desses conceitos e qual o seu significado no tema das funções.

(nesta fase tenho de pedir que seja fotografado o registo do quadro para confronto com o meu slide de síntese)

-Informar a turma que no final da aula, revisitaremos estes conceitos e outros que possam ter passado esquecidos e confirmaremos se as ideias transmitidas pela turma estavam ou não corretas.

Revisão de conceitos:

-Dados os conjuntos A e B, define-se uma **função *f*** (ou aplicação) de A em B, quando a cada elemento *x* de A se associa um único elemento de B que se representa por *f(x)*. Aos elementos do conjunto A chamamos objetos e aos seus correspondentes, no conjunto de chegada, chamamos imagens.

-Designa-se uma função *f* de A em B por $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ ou por *f*.

-O **domínio** de uma função é o conjunto dos objetos, representa-se por D.

-O **contradomínio** de uma função é o conjunto das imagens, representa-se por CD ou D´.

-O **gráfico** de uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é o conjunto dos pares ordenados *(x; y)* com $x \in A$ e $y = f(x)$. A variável *x* designa-se por variável independente e *y* por variável dependente.

-Função **constante** $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = b, com\ b \in IR$, para cada $x \in IR$.

-Função **linear** $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = ax,\ \ com\ a \in IR$, para cada $x \in IR$.

-Função **afim** $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = ax + b, com\ a, b \in IR$, para cada $x \in IR$, onde a é o coeficiente de x e b é o termo independente.

➢ **Formas de representar uma função:**

- **Tabela:** indicando para cada objeto a imagem correspondente.
- **Diagrama de setas ou sagital**
- **Gráfico:** A partir de cada objeto *x* e respetiva imagem *y*, obtém-se um par ordenado *(x , y)*, representa-se por G_f o conjunto de todos os pares ordenados da função.
- **Gráfico cartesiano:** obtém-se marcando os pares ordenados (x, y) correspondentes da função, no eixo das abcissas (eixo horizontal) marcam-se os valores das variáveis independentes, x, e no eixo das ordenadas (eixo vertical), marcam -se os valores das variáveis dependentes, y.
- **Expressão algébrica:** é uma expressão com variáveis que relaciona os objetos com as imagens.

-Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta e para fazerem as eventuais correções no momento de discussão coletiva, no caderno diário. Informar que dispõem de uma folha de papel milimétrico no final da ficha para as representações gráficas.

- Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver a tarefa 1 e 2. Decorrido este tempo será feita a discussão coletiva destas tarefas.

-Projetar a tarefa 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

2. **Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1 e 2. (15 minutos)**

-A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1:

Na tarefa 1, pretende-se que os alunos relembrem quando é que uma correspondência é uma função, e contactem com as diferentes formas de as representar. Recordem os conceitos de conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio e contradomínio.

Resolução prevista:

(A) ,(B) e (D) Cada correspondência é uma função porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde um único elemento no conjunto de chegada.

(C), (E) e (F) Não representam funções, porque existe um elemento do conjunto de partida sem correspondência única no conjunto de chegada.

Domínio (A)=$\{-2,-1,0,1,2\}$; Contradomínio (A)=$\{0,1,4\}$;

Conjunto. Partida(A)=$\{-2,-1,0,1,2\}$; Conjunto. Chegada (A)=$\{0,1,4,5\}$

Não é pedido, mas pode ser focado:

Domínio (B)=$\{-4,-3,-2,-1,0\}$; Contradomínio (B)=$\{3,6,9,12\}$

Domínio (D)=IR, Contradomínio é de -2 até +∞

Dificuldades Previstas:

-Não se lembrarem o que é o conjunto de partida e o conjunto de chegada;

-Uma correspondência é função, quando cada elemento do conjunto de partida tem uma única correspondência no conjunto de chegada.
- Na tabela, qual o significado de cada uma das colunas;
-Na representação gráfica, qual é o conjunto de partida e o de chegada;
-Em todas as correspondências é possível definir o conjunto de partida e conjunto de chegada;
-Só nas funções se pode definir o domínio e o contradomínio;
-O contradomínio nem sempre corresponde ao conjunto de chegada.
Atividades do Professor:
Questões orientadoras:
-O que é uma correspondência?
-Quais os elementos envolvidos numa correspondência?
-O que define uma função?
- O que é o domínio de uma função? E o contradomínio?
-Podes definir o domínio numa correspondência que não é função?
-Porquê?
Relativamente aos objetivos da tarefa 2, estratégias e dificuldades previstas:
Objetivo, fazer a leitura de uma função na forma tabular, verificando se ela é ou não uma função. Identificar as variáveis envolvidas, identificando a variável independente como a distância a percorrer (km), e a variável dependente como o consumo de combustível (litros). Fazer a passagem da representação em tabela para a representação gráfica, interpretar o gráfico obtido. Perceber que está perante uma função de proporcionalidade direta, onde a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{8}$, e qual o seu significado no contexto do problema, terminando com a formalização da expressão algébrica que a representa.
Resolução prevista:

Distância	**8**	**16**	**24**	**32**	**40**
Consumo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

O consumo é função da distância percorrida, porque a cada distância percorrida corresponde um único valor de consumo.
Variável independente é a distância percorrida, a variável dependente é o consumo. A expressão algébrica da função de proporcionalidade direta é $y = \frac{1}{8}x$

Dificuldades Previstas:

- Não perceberem a pergunta;
- Perceber que o consumo é função da distância, e o que representa.
- Compreender o que é a variável independente e dependente. (Apresentar um exemplo). Por exemplo: A compra de uma certa quantidade de fruta, sabendo que o preço de um quilograma de maças é 1,20€, e questionar quem é a variável independente e a dependente e porquê…

-Consumo ou distância, qual é a variável independente?

-Fazer a passagem da representação em tabela para a gráfica.

-Escrever a expressão algébrica que representa a função.

- Não perceberem que estão perante uma função de Proporcionalidade Direta.

-Como se relacionam as duas variáveis.

Atividades do professor:

Questões orientadoras:

-Dois litros de combustível permitem percorrer que distância?

-E se percorreres 24 km, quantos litros de combustível são necessários?

-O que significar ser a variável independente?

-E a variável dependente?

-O que necessitas para fazer a representação gráfica?

-Que tipo de função representa esta tabela?

-Necessitas marcar todos os pontos obtidos?

-O que significa dizer que o consumo é função da distância?

-Quando a distância percorrida aumenta o que acontece ao consumo?

-O que é uma expressão algébrica?

-Como podemos representar esta função por uma expressão algébrica?

-Como se relacionam as duas variáveis, se a função é de Proporcionalidade Direta?

3. Discussão coletiva dedicada à tarefa 1 e 2. (20 minutos)

Tarefa 1:

Projetar cada uma das correspondências, e explorar, conjunto de partida, conjunto de chegada, se é ou não função, e porquê, em caso afirmativo indicar o domínio, contradomínio

(A) Explorar que o conjunto de chegada não coincide com o contradomínio. Se um elemento do conjunto de partida não tivesse correspondência, ainda seria função?

(B) Explorar como seria o diagrama sagital da função.

(C) O porquê de não ser função.

(D) Explorar o porquê de ser função, qual o conjunto de partida e de chegada, domínio e contradomínio.

(E) Porquê de não ser função, qual ou quais as imagens do elemento 5, desenhar o correspondente diagrama sagital.

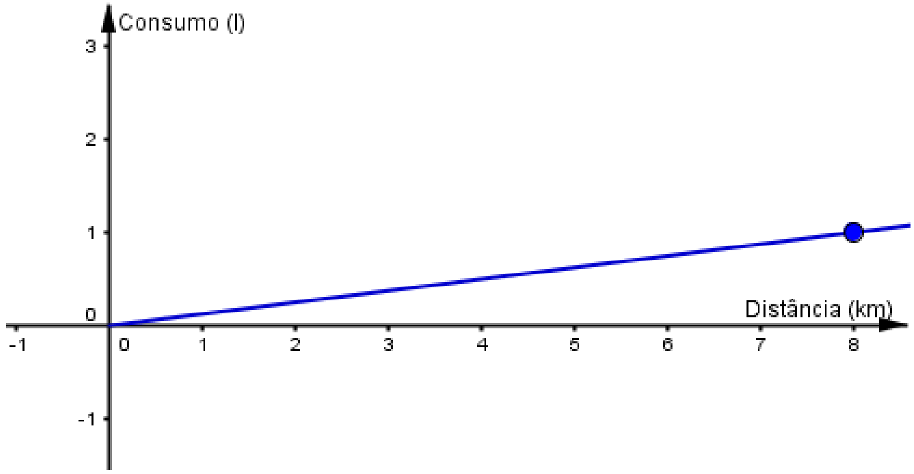
(F) O porquê de não ser função.

Tarefa 2:

Projetar a tabela no quadro, questionar quais os valores em falta, pedindo a justificação para cada um deles, a resposta terá de ser dada e validada pela turma, mas será escrita pela professora no quadro. Será explorado os vários pares ordenados da função, e a identificação da variável independente (distância) e variável dependente (consumo), assim como o comportamento da função. A representação gráfica será feita por um aluno, que tenha usado mais do que dois pontos para traçar o gráfico, explorando qual seria o número mínimo necessário para essa representação. Pedir para observarem a representação obtida e indicarem quais as características desta função (função de proporcionalidade direta), crescente, semirreta que passa na origem (a função só está definida para *x* maior ou igual a zero, será o momento para chamar a atenção para a necessidade de contextualizar o problema).

Nesta fase orientar a turma para concluir que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem do referencial, isto é no gráfico de uma função linear.

Questionar se faria sentido no contexto do problema desenhar na parte negativa do eixo das abcissas e qual o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema. (significado da constante de proporcionalidade: O automóvel do Senhor Paulo consome 0,125 litros de combustível por cada quilometro percorrido)



4. Trabalho autónomo dedicado à tarefa 3. (15 minutos)

-Informar os alunos que têm 15 minutos para realizarem a tarefa 3. Esclarecer eventuais dúvidas sobre o que é pedido.

-A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, através do questionamento quer individual quer coletivo. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 3:

O objetivo desta tarefa é compreender e distinguir as diferentes funções (constante, linear e afim), perceber quais as características específicas de cada uma delas. Interpretar as suas representações gráficas e fazer a transição para a expressão algébrica.

Resolução prevista:

Função constante-$g(x)$; função linear-$f(x) e\ h(x)$; função afim-$i(x)$

$i(0) = 1$;$h(-2) = -2$;$i(4) = -3$;$f(-2) = -4$

Questão 3.3 $f(x) = 2x$; $h(x) = x$; $g(x) = -3$; $i(x) = -x + 1$

Caso nesta questão surjam muitas duvidas avisar os alunos que podem consultar a página 158 do manual, onde se encontra um resumo das principais diferenças entre estas funções.

Dificuldades Previstas:

-Não saber distinguir função linear de função afim.

-Não reconhecer as correspondentes expressões algébricas;

-A função é decrescente então a constante a é negativa $y = ax + b$

-Na interpretação de h *(0)*;

-Em distinguir imagem de objeto;

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-Quais eram as características da função da tarefa 2?

-Existe alguma função aqui representada com essas características?

-Quando falamos em constante, o que significa?

-Procura uma função com essa característica.

-Se substituíres um valor na variável independente x, qual a sua imagem?

-Esse ponto pertence a qual dos gráficos?

-Qual dos eixos representa o domínio da função? E o contradomínio?

-O que é o objeto? E a imagem desse objeto?

5. Discussão coletiva dedicada à tarefa 3. (15 minutos)

Projetar a imagem da tarefa, questionar a turma, pedindo justificação para cada uma das funções representadas, a resposta será dada e validada pela turma, mas é a professora que faz o registo no quadro. Na questão 3.2. pedir a um aluno para explicar qual o significado do que é pedido, e quais os valores correspondentes, questionando a turma sobre os resultados apresentados e a sua validação. Questionar se existe diferença quando o pedido é feito em linguagem matemática ou em linguagem natural. Na questão 3.3. pedir a um par de alunos para apresentar a sua resolução, escolhendo preferencialmente um grupo que tenha recorrido ao cálculo de valores para confirmar a expressão algébrica escolhida, e outro que tenha usado a representação gráfica.

6. Síntese final (15 minutos)

Usar os conceitos (palavras escritas no quadro) na fase de introdução da tarefa, formalizando os conceitos chave no tema das funções. Apresentar slide 1 com algumas hipóteses dessas palavras, e a respetiva formalização do conceito.

Apresentar slide 2, fazendo síntese de três formas de representar uma função e como pode ser feita a transição entre estas representações. Usar o slide 3 para rever as principais características das três funções trabalhadas em aula, usando as respetivas representações algébricas e gráficas, evidenciando as principais diferenças. (Não esquecer de referir que estou a apresentar alguns exemplos, para não transmitir a ideia errada **que a função linear tem sempre inclinação para a direta e que a função afim é ao contrário.**

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).
- Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Plano de Aula do dia 03 de março

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Estudo da função linear e afim

Data/hora: 03 de março 2016 (90 minutos)

Sumário: Realização da tarefa "A distância percorrida".

Objetivos Gerais:

- Justificar que o coeficiente de uma função linear é a constante de proporcionalidade, e designá-lo por «declive da reta»;

-Compreender a relação entre a função de proporcionalidade direta e a função linear.

- Reconhecer que o gráfico da função afim se obtém do gráfico de uma função linear por uma translação de um vetor definido pelo segmento orientado de origem (0,0) e extremidade (0,b). (D. Metas 8.ºano.1.3., 1.4. e 1.5.)

- Compreender o efeito da variação de a na representação gráfica de funções da forma $y = ax$, $a \in IR$.

Estratégia Geral:

Realização de tarefa “A distância percorrida”.

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;
- Introdução com a apresentação da tarefa e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 1;
- Discussão coletiva da tarefa 1;
- Trabalho em grupo de turma com recurso ao Geogebra para a tarefa 2 (cujo enunciado será escrito no quadro), procurando compreender a variação do coeficiente da função linear;
- Sistematização das conclusões obtidas da tarefa 2;

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com a tarefa- um enunciado para cada grupo de trabalho com espaço para as respostas, dadas a caneta.
- Folha de papel milimétrico.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa, e documento de síntese final.

Contextualização:

Nesta aula pretende-se aprofundar os conhecimentos já adquirido sobre a função de proporcionalidade direta, qual a sua relação com a função linear. Este é o objetivo para a tarefa 1, permitindo posteriormente na fase de discussão estudar a variação do parâmetro *a* fazendo uso do recurso de geometria dinâmica, *Geogebra.* A tarefa 2 tem como objetivo reconhecer a relação entre a função linear e a função afim, assim como relacionar os conhecimentos da unidade de isometrias, e definir a função afim através de uma translação vertical de uma função linear.

Desenvolvimento da aula:

1.Início da aula/ Apresentação da ficha de trabalho (10 minutos)

-Escrever o Sumário no quadro;

-Iniciar a aula, questionando sobre quais os conceitos trabalhados na aula anterior:

- Noção de função;
- Que tipo de funções falamos (sem referir a relação entre função linear e função de proporcionalidade direta);
- O que é o domínio, contradomínio, variável dependente e independente;

-Procurando a perceber quais os conhecimentos que ficaram aprendidos e quais devem voltar a ser reforçados.

-Entregar os registos da tarefa realizada na última aula,

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

-Pedir aos alunos para resolverem a caneta e para fazerem as eventuais correções no momento de discussão coletiva no caderno diário. Informar que dispõem de folha de papel milimétrico para a representação gráfica da tarefa 1.

-Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver a tarefa 1. Decorrido este tempo será feita a discussão coletiva destas tarefas.

-Projetar a tarefa 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

2.Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1. (15 minutos)

A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, através do questionamento quer individual quer coletivo. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão. Para a questão 1.1. será dada preferência a uma resolução que use a representação tabular.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1:

Nesta tarefa os alunos vão começar por interpretar os diferentes dados do problema, determinando os valores pedidos para os diferentes tempos. Pretende-se que eles encontrem uma relação entre esses valores, percebendo que estão perante uma função de proporcionalidade direta e seja feita a correta interpretação do valor da constante de proporcionalidade. Termina a tarefa com a representação gráfica de cada uma das funções. Será interessante observar se os alunos determinam ou não a correspondente expressão algébrica para cada uma delas e se representam uma semirreta ou uma reta, tendo em atenção o contexto do problema. Na construção de tabelas para organizar os dados pedidos, pretende-se que coloquem nas linhas e colunas (variável independente ou dependente) e a justificação em cada um dos casos.

Dificuldades Previstas:

-Perceber qual é a variável independente e a dependente;

-Existirem erros de cálculo;

-Determinar e provar qual é a constante de proporcionalidade em cada caso;

-Justificar qual o significado de cada uma das constantes de proporcionalidade;

-Na representação gráfica, a escolha da escala;

-Fazerem a representação gráfica de uma reta, sem darem significado ao contexto do problema.

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-Que é a tua variável independente? E a dependente?

-Como podes apresentar todos os dados pedidos de uma forma mais explícita?

-Como determinaste estes valores, e o que representam?

-Qual o valor da constante de proporcionalidade e porquê?

-Qual o seu significado neste problema?

-Como podemos passar para a representação gráfica destas funções?

-O que é necessário marcar no referencial?

Resolução prevista:

1.1. Caso os alunos não recorram a uma tabela, no fim mostra a vantagem de organizar os dados em tabela.

Distância (km)/ tempo(horas)	0,5h	1h	1,5h	2h
Automóvel (A)	20	40	60	80
Automóvel (B)	25	50	75	100
Automóvel (C)	40	80	120	160

Ou outra forma:

Tempo(horas) /Distância (km)	A	B	C
0,5h	20	25	40
1h	40	50	80
1,5h	60	75	120
2h	80	100	160

Variável independente é o tempo (horas).

Variável dependente é a distância percorrida (km).

1.2.

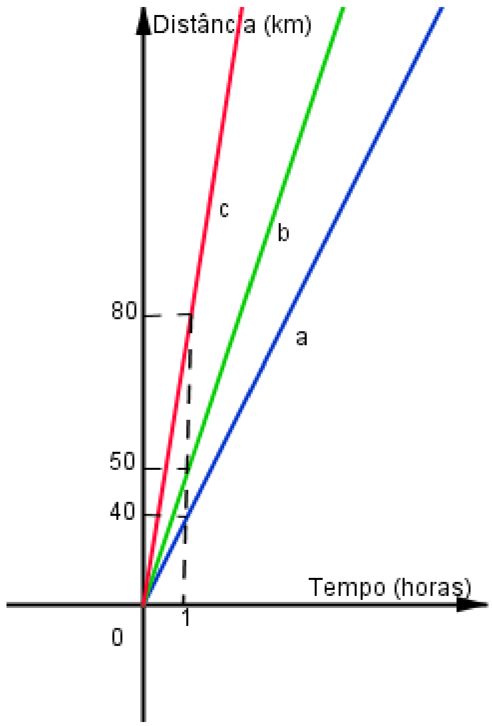
Automóvel A: $\frac{20}{0,5} = \frac{40}{1} = \frac{60}{1,5} = \frac{80}{2}$ =40 é a uma função de P.D. e a constante é 40, onde 40 (km), representa a distância percorrida pelo automóvel A numa hora.

Automóvel B: $\frac{25}{0,5} = \frac{50}{1} = \frac{75}{1,5} = \frac{100}{2}$ =50 é a uma função de P.D. e a constante é 50. onde 50 (km), representa a distância percorrida pelo automóvel B numa hora.

Automóvel C: $\frac{40}{0,5} = \frac{80}{1} = \frac{120}{1,5} = \frac{160}{2}$ =80 é a uma função de P.D. e a constante é 80.

Onde 80 (km), representa a distância percorrida pelo automóvel C numa hora.

1.3. Representação gráfica das funções:



Questionar se faz sentido fazer a representação gráfica na parte negativa do eixo no contexto deste problema. Salientar este facto!!!!!

3. Discussão coletiva dedicada à tarefa 1. (20 minutos)

Tarefa 1:

A discussão terá início com um aluno a apresentar a sua resolução, e consequente explicação dos raciocínios usados para toda a turma. Será selecionada preferencialmente uma resolução que não esteja em tabela, (para mostrar que organizar os dados em tabela pode ser uma vantagem na interpretação dos dados). Na representação em tabela, mostrar que a escolha das linhas para a variável independente, não é obrigatório, mas é o mais comum e ajuda na leitura dos dados. Espera-se um bom envolvimento da turma, na justificação e validação das conclusões a tirar. A tabela será posteriormente utilizada para a apresentação por um outro aluno da justificação e cálculo da constante de proporcionalidade direta, na questão 1.2., assim como do seu significado no contexto do problema. Na questão 1.3. serão exploradas as características deste tipo de função (proporcionalidade direta), e a escrita das respetivas expressões algébricas justificando que o coeficiente de uma função linear é igual à ordenada do ponto do gráfico com abcissa 1, que é a constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas dos pontos da reta, designando-se por **«declive da reta».** Na questão 1.4. será pedido o esboço de uma das representações gráficas de um aluno. A escolha do aluno deverá ter em conta um grupo de trabalho que tenha feito a representação gráfica também na parte negativa do eixo. Aqui será questionada a turma se concorda com a representação, se a resposta for afirmativa, questionarei quem é a variável independente (tempo) se faz sentido no contexto do problema representar na parte negativa.

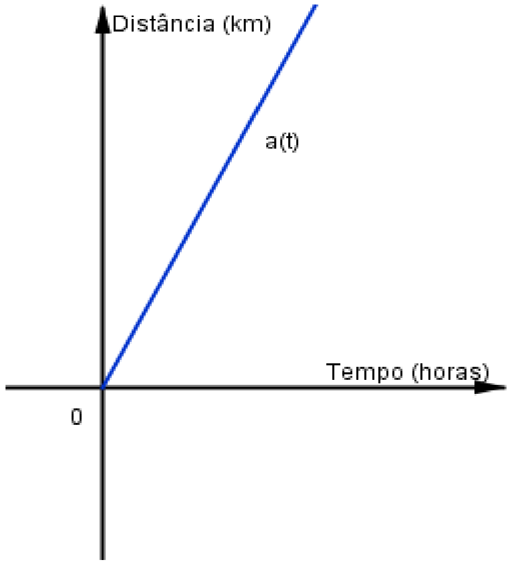
Exploração de conteúdos:

Depois de esclarecer eventuais dúvidas sobre a função de proporcionalidade direta, (semirreta que parte da origem tendo como domínio a parte positiva do eixo das abcissas e que verifica a relação$\frac{f(x)}{x} = constante\ de\ proporcionalidade\ para\ todo\ o\ x \in D$) assim como sua respetiva representação gráfica. Saindo de uma das funções (PD) da questão 1 e traçando a respetiva reta em todo o IR, e questionar qual será para este caso a respetiva expressão algébrica da função em questão, levando a turma a perceber que a expressão algébrica é a mesma da função de PD, verificando-se a mesma razão entre as variáveis, mas é feita uma extensão do domínio da função para todo o IR obtendo assim a função linear. (TUDO DEPENDE DO DOMÍNIO). Nesta fase será feita uma exploração da variação do parâmetro a da função linear fazendo uso do recurso de geometria dinâmica, Geogebra. (ver ficheiro-Geogebra-linear)

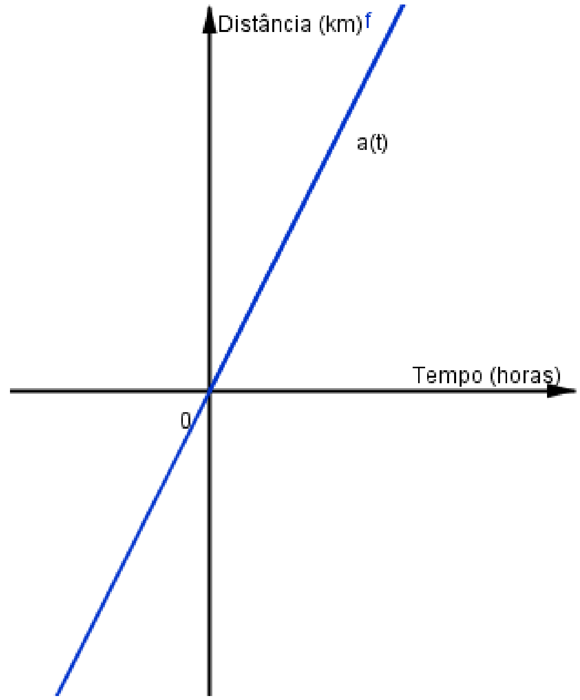
Para o caso positivo:

Quanto maior for o valor do a, maior inclinação tem a reta (mais próxima do eixo das ordenadas). Para justificar, usar o exemplo das funções obtidas, na função $a(t)$, quando o tempo é uma hora qual a imagem (distância percorrida), fazer o mesmo para as outras funções e ir verificando o comportamento (inclinação da reta obtida). **NÃO ESQUECER DE JUSTIFICAR porquê?**

Função de Proporcionalidade direta



Função Linear



Traçarei, posteriormente uma função linear com coeficiente negativo (usar funções por exemplo: $f(x) = -x; g(x) = -2x; h(x) = -4x$) e será feito o mesmo tipo de exploração: Quanto menor o valor de a mais próxima está a reta do eixo das ordenadas**. JUSTIFICAR com alguns pontos o porquê?**

No caso de a ser zero, obtém-se a função constante, que é a reta horizontal $y = 0$, que coincide com o eixo das abcissas.

- Se $a > 0$: reta no 1.º e 3.º quadrante, quanto maior é o a, maior é a inclinação da reta **(CRESCENTE).**
- Se $a < 0$: reta no 2.º e 4.º quadrante, quanto menor é o a, maior é a inclinação da reta **(DECRESCENTE).**
- Se $a = 0$: reta horizontal

4. Trabalho em grupo de turma com recurso ao Geogebra -Tarefa 2. (30 minutos)

A tarefa 2 será escrita no quadro:

2.1. Representa graficamente as funções definidas do seguinte modo, $f(x) = 2x; w(x) = 2x + 3; t(x) = 2x - 1$.

2.2. Qual a posição relativa das retas que definem as funções?

Será pedido a um aluno para fazer a representação de uma ou mais funções, e será pedido à turma para participar na estratégia a usar nestas representações, calculado pontos e fazendo a sua respetiva representação. Nesta fase será muito importante envolver toda a turma. A professora circulará pela sala usando o questionamento como forma de orientação e pedindo para cada um dos passos a justificação.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 2.:

O objetivo desta tarefa é sair de uma função linear já trabalhada na tarefa 1. E verificar que se obtém o gráfico de uma função afim do gráfico de uma função linear por uma translação de um vetor definido pelo segmento de reta orientado de origem (0,0) e extremidade (0,b).

Dificuldades Previstas:

-Não saber que pontos escolher;

-Como fazer a representação das funções afins;

-Tirar conclusões quanto à sua posição;

-Justificar as suas conclusões.

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

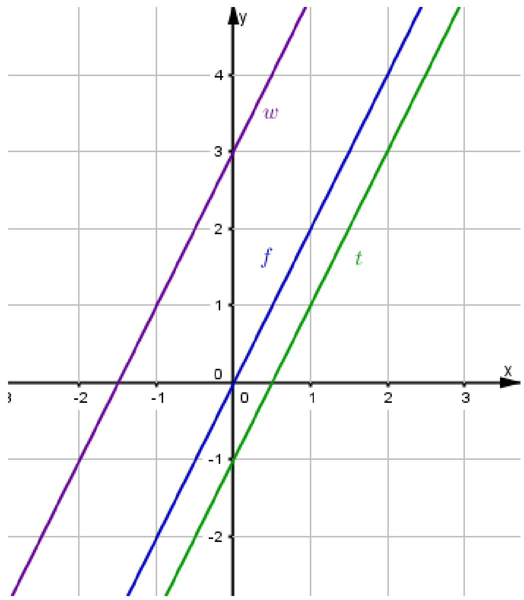
-Quais as funções que pretendemos representar;

-Quantos pontos são necessários para representar cada reta;

-Pedir as justificações das conclusões observadas.

Resolução prevista:

Representação gráfica:



As retas são estritamente paralelas, porque têm todas o mesmo declive.

5. Discussão coletiva dedicada à tarefa 2. e síntese. (25 minutos)

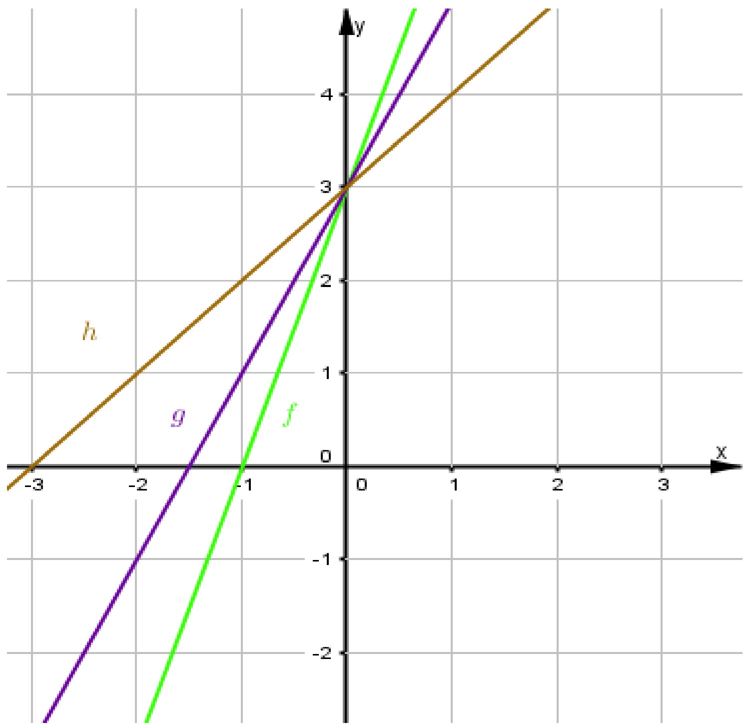
Tarefa 2:

Questionar um dos alunos sobre qual das retas representa a função linear e quais as suas características, reforçando o que foi aprendido na tarefa 1, salientando que é a reta que passa na origem do referencial. Passando para as restantes funções, e questionar qual a caraterística mais evidente desta reta em relação à anterior, (salientado que estas retas não passam na origem). Depois passaremos para a discussão das possíveis conclusões retiradas da posição relativa das retas obtidas, pedido a justificação e validação dos resultados apresentados, pela turma. A função afim $y = ax + b$ é uma reta que não passa na origem, passando pelo ponto (0, b). Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta $y = ax + b,$ com $a, b \in IR$, *se designa a por «declive» da reta e b por «ordenada na origem»* (D.1.2.)

Questionar a turma a qual dos eixos pertence o b, e referir que ele é chamado de ordenada na origem, **JUSTIFICANDO que um ponto está definido pela abcissa e ordenada, logo quando a abcissa for zero a ordenada correspondente é o b**. E que o parâmetro a é o declive, tal como já tinha sido referido na função linear. Levando os alunos a reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando têm o mesmo declive (D 1.4). Depois questionar se se lembram do que é um segmento de reta orientado? E quais as suas características? (origem, direção, sentido e comprimento). Traçar esse segmento com origem em (0,0) e extremidade (0,3) com uma cor forte. Questionar se poderia deslocar uma reta para a posição da outra? Que nome daria a esse deslocamento? E mostrar que *w(x)* se poderia também obter de *f(x)* por uma translação de um vetor definido pelo segmento de reta orientador referido atrás (D1.2.). Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta $y = ax + b$, com $a, b \in IR$, *se designa a por «declive» da reta e b por «ordenada na origem»* (D.1.2.). Repetir este processo para a função *t(x)*, pedindo a um aluno para turma para ir desenhar o segmento de reta orientado que transforma *f(x)* em *t(x).*

Possível Exploração:

Pedir para representarem na calculadora $f(x) = 3x + 3; g(x) = 2x + 3; h(x) = x + 3.$ Apresentar a sua representação e explorar que não são retas paralelas, mas que têm todas um ponto em comum, (0,3).



Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).

-Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.

-Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Plano de Aula do dia 04 de março

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Função linear e função afim

Data/hora: 04 de março 2016 (45 minutos)

Sumário: Realização da tarefa "A visita do Martim".

Objetivos Gerais:

-Interpretar e compreender a relação entre a variável independente e dependente;

-Interpretar o conceito de declive e ordenada na origem, no comportamento de uma função afim;

-Resolver problemas, aplicando os conhecimentos já adquiridos, e promover o raciocínio e comunicação matemáticos.

Estratégia Geral:

Realização de tarefa "A visita do Martim".

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;
- Introdução com a apresentação da tarefa e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução das tarefas 1 e 2;

- Proposta de trabalho de exercícios do manual, caso os alunos terminem as tarefas antes do término da aula, (exercícios 4 e 7 das páginas 178 e 179 do manual do aluno).

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com as tarefas- um enunciado para cada grupo de trabalho, com espaço para as respostas, dadas a canetas.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa.

Contextualização:

Esta é uma aula de 45 minutos, principalmente dedicada à realização de trabalho autónomo, aplicando os conhecimentos já adquiridos sobre funções, e sua interpretação. A discussão coletiva destas duas tarefas propostas será realizada no início da próxima aula, porque pretendo realizar entrevistas a três pares de alunos no final desta aula, por forma a aceder aos raciocínios realizados, pedindo mais ao pormenor as justificações para cada estratégia desenvolvidas e compreender quais as dificuldades sentidas na realização da ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula:

1.Início da aula/ Apresentação da ficha de trabalho (5) minutos)

-Escrever o Sumário no quadro;

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

-Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta tendo o cuidado de justificar todos os raciocínios e estratégias desenvolvidas.

-Informar os alunos que dispõem de 20 minutos para resolver a tarefa 1 e 2.

-Projetar a tarefa 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

2.Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1 e 2. (20 minutos)

-A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1:

Na tarefa 1, pretende-se que os alunos interpretem o problema proposto, recorrendo aos conhecimentos que têm sobre a função de proporcionalidade direta, estabelecendo qual a relação entre as duas variáveis e procurando uma estratégia que lhes permita determinar um valor em falta por forma a responder ao que é pedido.

Resolução prevista:

Estratégia 1:

Determinar a expressão algébrica da função, ou apenas a constante de proporcionalidade, reconhecendo que é uma função de P.D.

Logo, $a = \frac{400}{8} = 50$ então $d(t) = 50t,$ calcular a imagem de 10 pela função $d(t)$,

$$d(10) = 50 * 10 = 500\ m$$

Responder que a distância percorrida pelo Martim no trajeto de ida e volta a casa da avó é de $500 + 500 = 1000m$. Justificando a soma dos dois valores.

Estratégia 2:

Usar uma tabela:

Tempo (min)	8	10
Distância(metros)	400	$d(10)$

Usar uma proporção para determinar o $d(10)$:

$$\frac{400}{8} = \frac{d(10)}{10}$$

Obtendo o valor da distância para uma viagem.

Estratégia 3:

Regra de três simples para o cálculo do valor.

Estratégia 4:

Se em 8 minutos o Martim percorre 400m, então em 4 minutos percorre 200m logo em 2 minutos percorre 100m. E assim conseguem determinar a imagem do objeto 10, sendo 400+100=500m. Respondendo que todo o percurso tem 1000m=1 km.

Dificuldades Previstas:

-Em compreender que falta um dado para poder responder à questão;

-Não perceber a questão;

-Identificar o tipo de relação entre as variáveis;

-A função que está representada;

-Identificando que é uma P.D, em determinar a constante de proporcionalidade;

-Determinar o valor em falta;

-Não perceber que a resposta será a soma de duas distâncias.

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-O que é pedido neste problema?

-Tens todos os dados necessários para responder ao pedido?

-Qual o valor em falta, e porquê?

-Que função está representada?

-Como podes determinar o que necessitas?

Relativamente aos objetivos da tarefa 2, estratégias e dificuldades previstas:

Objetivo, é reconhecer uma função afim na sua forma algébrica, interpretando o valor do seu declive e ordenada na origem, assim como sua correspondente representação gráfica. Fazendo uso destes conhecimentos desenvolver a capacidade de comunicação matemática, tanto oral como escrita, permitindo argumentar e justificar as razões apontadas para recusar cada um dos gráficos apresentados.

Resolução prevista:

A função h tem declive e ordenada na origem, positivos.

A reta r não representa a função h, porque embora a sua ordenada na origem seja positiva, o seu declive é negativo.

A reta s não representa h porque embora tenha declive positivo, tem ordenada na origem negativa.

Ou:

Representarem graficamente h e compararem os gráficos.

Dificuldades Previstas:

-Não ter os valores nas representações gráficas;

-Em perceber o que é pedido;

-Em relacionar o sinal dos declives;

-Em relacionar o sinal das ordenadas;

-Na justificação do raciocínio feito para recusar cada um dos gráficos.

Atividades do professor:

Questões orientadoras:

-A função h é de que tipo?

-Como se chama a esta representação de h?

-O que caracteriza uma função afim?

-O que podes concluir?

-Podes representar a função h se te ajudar;

-As funções representadas pelas retas r e s também são funções afins?

-Porquê?

-Quais as diferenças dessas duas representações?

-As inclinações das retas são traduzidas por qual dos parâmetros?

-Como esse sinal influencia o comportamento da função?

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).
- Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Plano de Aula do dia 07 de março

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Declive e paralelismo de retas

Data/hora: 07 de março 2016 (90 minutos)

Sumário: Resolução de tarefa "Declive e Paralelismo".

Objetivos Gerais:

-Compreenderem como é feita a transição entre as diferentes representações de uma função.

-Reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive, (D. Metas 8.ºano.1.3., 1.4. e 1.5.).

-Determinar a equação de uma reta paralela a outra e que passa num ponto determinado, (D. Metas 8.ºano 2.2.)

-Compreender a relação entre o declive e o paralelismo de duas retas.

Estratégia Geral:

Discussão da tarefa proposta na aula anterior "A visita de Martim" e realização de tarefa "Declive e Paralelismo".

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;

- Discussão coletiva da tarefa realizada na aula anterior (ficha 3).
- Apresentação da ficha 4 e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 1;
- Discussão coletiva da tarefa 1;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 2 e 3;
- Discussão coletiva da tarefa 2 e 3;

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com as tarefas- um enunciado para cada grupo de trabalho com espaço para as respostas, dadas a caneta.
- Folha com quadricula grande, para representação gráfica.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa.

Contextualização:

Nesta aula serão mobilizados os conhecimentos já adquiridos sobre as funções, incidindo fundamentalmente na função afim, na sua representação algébrica e gráfica. Na aula anterior verificou-se que a turma tem muitas dificuldades na transição entre expressão algébrica de uma função e a sua representação gráfica, esta transição será explorada com particular cuidado ao longo desta aula, principalmente na primeira fase da aula durante a discussão da tarefa da ficha 3.

Na ficha 4, pede-se que os alunos verifiquem se um dado ponto pertence ou não à representação gráfica de uma função, e é proposta uma tarefa de exploração sobre paralelismo entre duas retas, e respetiva expressão algébrica. Permitindo fazer a transição da representação gráfica para a expressão algébrica de uma função, dado o seu paralelismo com uma função conhecida e conhecendo a sua ordenada na origem, levando os alunos a compreendem qual a relação entre o declive e o paralelismo entre retas (e correspondentes funções).

Desenvolvimento da aula:

Início da aula (5 minutos)

-Pede-se aos alunos para registarem o sumário;

-É entregue os registos realizados pelos alunos da ficha “A visita do Martim” da aula anterior;

-Avisa-se a turma que o início da aula será dedicado à discussão da ficha de trabalho da aula anterior.

1.Discussão coletiva dedicada às tarefas 1 e 2 da aula anterior (ficha 3- 25 minutos)

Tarefa 1.

É pedido a um dos grupos que foi entrevistado no final da aula anterior, para ser o responsável por esclarecer a turma relativamente à tarefa 1. O quadro será dividido em duas partes, uma para o gráfico apresentado e outra para a proposta de resolução apresentada por um dos grupos. Nesta fase será importante reler a tarefa proposta e começar por discutir quem são as variáveis independentes e dependentes da função apresentada, (v. ind= tempo (min) e v. dep= distância (metros)). Pedir a um dos elementos do grupo que realizou a tarefa exposta para explicar à turma qual foi o raciocínio e respetiva estratégia de resolução utilizada. A validação ou não da resolução apresentada será dada pelo grupo turma. Será explorado através do questionamento; Qual a relação entre as duas variáveis? Qual o Domínio da função? $D = [0; 10]$, não posso apresentar esta notação, escrever por extenso que a variável independente varia entre zero e dez minutos. Se sabemos qual é o contradomínio da função? Focando a turma no que era pedido, a distância total percorrida. Quanto tempo demorou o Martim a chegar a casa da avó? Qual a distância percorrida ao fim dos 10 minutos? Como podemos determinar esse valor? Qual a relação entre as duas variáveis? (usando os conhecimentos da função de proporcionalidade direta). Aqui será muito importante questionar porquê o uso da regra de três simples (usada nesta questão pela grande maioria da turma). Levando a turma a compreender que só podem fazer este raciocínio porque estão perante uma função de proporcionalidade direta. Se surgirem muitas dúvidas apresentar o seguinte exemplo,

Exemplo:

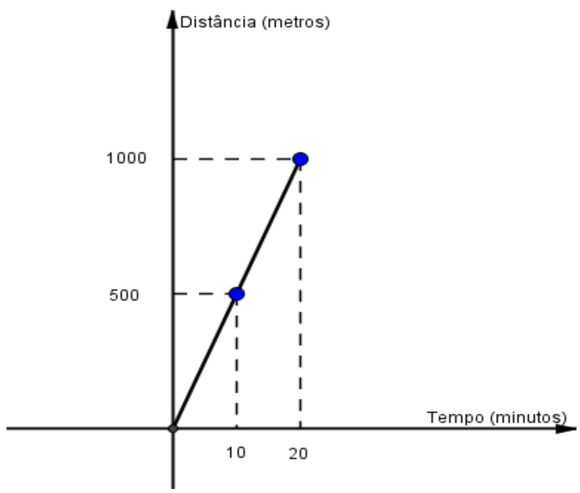
Ao fazer uma viagem de Lisboa para o Porto, a uma velocidade de 100 km/h demoro 3 horas a fazer a viagem, quanto vou demorar se for a uma velocidade de 150km/h? Será pedido à turma qual seria a resposta neste caso. A explicação apresentada será ou não validada pelo grupo de turma, assim como as respetivas justificações apresentadas, permitindo ao grupo turma concluir que apenas podem aplicar a regra de três simples quando estão nas condições de funções de proporcionalidade direta.

Sequência para escolha de propostas de resolução a apresentar:

A proposta escolhida a apresentar na tarefa 1, será o uso da regra de três simples. E na tarefa 2, a representação em tabela e posterior representação gráfica.

Possível exploração:

Qual seria a representação gráfica que traduziria todo o percurso realizado pelo Martim?



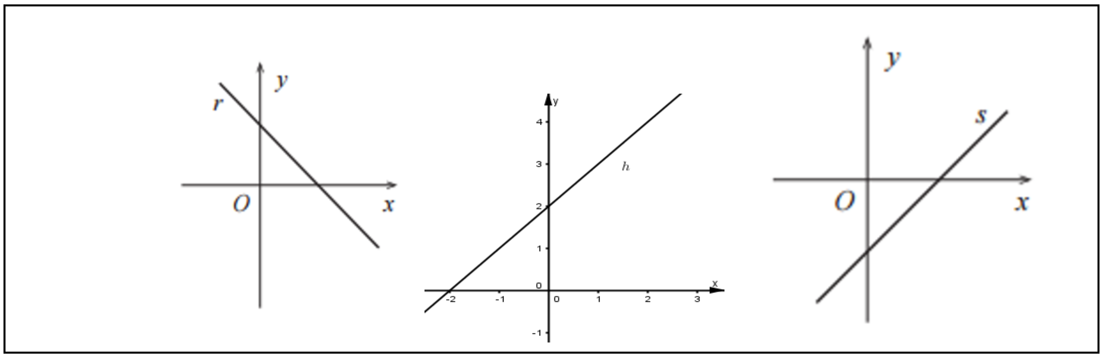
Esta nova representação é uma função?

De que tipo? E a relação entre as variáveis mantém-se?

Tarefa 2.

Um segundo grupo entrevistado ficará responsável por esclarecer a turma relativamente à tarefa 2. Será projetada a tarefa 2, e explorado qual o tipo da função *h*, (afim) se os gráficos apresentados são as representações ou não de funções afins, explorando as características, tanto da função *h* como das retas *r* e *s*, promovendo o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. Esta foi uma tarefa que levantou muitas dificuldades à turma, por pedir a relação entre diferentes tipos de representações de uma função. Assim será feita a exploração da representação gráfica da função *h*, começando por questionar qual a primeira coisa a fazer quando pretendemos passar da expressão algébrica para a representação gráfica da função? (com os conhecimentos adquiridos ate ao momento será a construção de uma tabela), questionarei o que representa o *x*, e o *f(x)*, no contexto das funções, orientado o grupo turma na construção da tabela, e pedindo a um aluno para ir ao quadro construir a tabela. A respetiva representação gráfica que será representada no quadro pela professora sobre a projeção da tarefa. Ter o cuidado de usar a régua para que a representação fique o mais correta possível. Na construção de uma tabela, obtendo um conjunto de pontos a marcar (questionarei quantos pontos são necessários para traçar a reta pretendida).

QUADRO:



Fazer os registos no quando das conclusões obtidas e validadas pela turma para cada uma das três representações.
A representação da função *h* ficará registada no quadro, mesmo depois de desligar o projetor, porque na ficha de trabalho 4 esta representação será necessária.

2.Apresentação e entrega da ficha de trabalho nº 4. (5 minutos)

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

-Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta e para fazerem as eventuais correções no momento de discussão coletiva, no caderno diário.

-Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver a tarefa 1. Decorrido este tempo será feita a discussão coletiva da tarefa.

3. Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1. (15 minutos)

A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1.:

Na tarefa 1, pretende-se que os alunos explorem quando é que um ponto pertence ou não ao gráfico de uma função. E utilizem os conhecimentos sobre paralelismo entre duas retas para fazerem a representação algébrica de diferentes funções, dado um ponto da função. Permitindo que compreendam que retas paralelas têm o mesmo declive, variando apenas a ordenada na origem.

Resolução prevista:

1.1. $h(-1) = -1 + 2 \neq 2$ logo $(-1,2) \notin G_h$

$h(1) = 1 + 2 = 3$ logo $(1,3) \in G_h$

1.2. $\boldsymbol{g(x)} = ?$

Como g é uma função afim é da forma: $g(x) = ax + b, com\ a = 1$, que é o declive de h. Então $g(x) = 1x + b, onde\ b$ é $a\ ordenada\ na\ origem$, como $(0,3)$ é o ponto correspondente à ordenada na origem, então b=*3*.

$$g(x) = x + 3$$

1.3 $t(x) = x - 2$.

2.

2.1. $\boldsymbol{f(x)} = -\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}x + \frac{3}{4}$

Dificuldades Previstas:

-Na representação do ponto, quem é abcissa/ordenada;

-Que tipo de função é pedida;

-$h(x)$ é a imagem (y);

-Como usar os dados da questão corretamente.

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-Quando podemos dizer que um ponto pertence a um gráfico?

-O que representam essas coordenadas?

-Como podes verificar se pertence?

-Usa a representação gráfica de h que está representada no quadro, marca o ponto pedido no referencial;

-O que podes concluir?

-Fica sobre a reta?

-O que significa?

-O que significa $h(1) = 3$?

-Marca o ponto (0,3), traça a paralela a h que passa nesse ponto, o que podes concluir?

-Que tipo de função é paralela à função pedida?

-Qual o seu declive?

-Como podes determinar a sua ordenada?

-O que representa o ponto (0,-2)?

-Como se escreve a expressão algébrica pedida?

4. Discussão coletiva dedicada à tarefa 1. (15 minutos)

Tarefa 1:

1.1. Usar a representação gráfica da função h que está representada no quadro e pedir a um aluno para marcar os dois pontos dados, questionando que é a correspondente abcissa e ordenada. Depois da validação da turma, questionar onde se encontram marcados os pontos? (sobre a reta ou fora da reta), que conclusões se podem tirar? Pedindo a justificação para cada um deles, a resposta terá de ser dada e validada pela turma, mas será escrita pela professora no quadro.

1.2. Se algum grupo de trabalho tiver usado a representação de h para traçar uma reta paralela que passa no ponto (0,3), aproveitar esse raciocínio e pedir a esse grupo para fazer a sua representação.

Questionar:

-Que características têm estas duas representações?

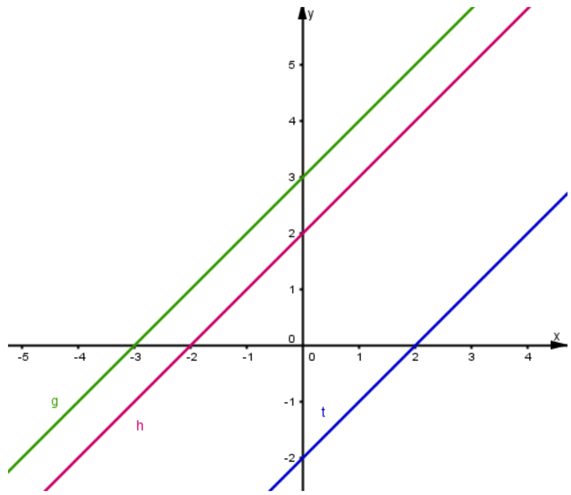
-Qual a posição relativa destas retas?

-Então o que é que faz com que sejam estritamente paralelas?

-Que ponto vocês conhecem que pertence a cada uma das retas?

Orientado os alunos para a escrita da expressão algébrica da função representada, começando por concluírem que o declive das duas retas é o mesmo, dado que são paralelas. E que a ordenada na origem se obtém do ponto de abcissa zero.

Fazer o mesmo raciocínio para a função t que se mantém paralela a h e passa no ponto (0,-2).



Revisitando o tipo de função que é pedida e quais as suas características, definir quem é o declive e a ordenada na origem, questionando para cada uma das alíneas se existe ou não mais alguma função que verifique as condições dadas.

Resolver com o grupo turma a tarefa 2, questionando:

-Que tipo de função é a função f?

-Qual a sua expressão geral?

-O que é necessário conhecer para escrever a sua expressão algébrica?

Perguntar qual deverá ser a expressão algébrica pedida. Chegando à expressão pedida

$$f(x) = -\frac{11}{2}x + \frac{3}{4}$$

5.Trabalho autónomo dedicado à tarefa 3. (10 minutos)

(Caso o tempo útil de aula não permita, realizar a tarefa em grupo de turma)

-Informar os alunos que têm 10 minutos para realizarem a tarefa 3. Esclarecer eventuais dúvidas sobre o que é pedido.

-A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, através do questionamento quer individual quer coletivo. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 3:
O objetivo desta tarefa é consolidar os conhecimentos adquiridos sobre paralelismo entre funções, trabalhando com funções afim e linear, mostrando que a função linear é um caso particular da função afim com a respetiva ordenada na origem nula.

Resolução prevista:

3.1. retas paralelas $y = 3x; y = 3x + 1$, porque têm o mesmo declive, (linear e afim)

3.2 $y = 3x$, porque a ordenada na origem é zero (linear).

3.3 $y = x + \frac{1}{2}; y = -x + \frac{1}{2}$, porque têm a mesma ordenada na origem.

Dificuldades Previstas:

- Perceber o que é pedido;
-Determinar o declive e a ordenada na origem das retas;
-Ter função linear e funções afim;

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-O que estamos a estudar?
-Qual o parâmetro que representa o declive? E a ordenada?
-O que se deve verificar para duas retas serem paralelas?
-Que tipo de função tem a representação gráfico de uma reta que passa na origem?
-Quem é a ordenada na origem?

6. Discussão coletiva dedicada à tarefa 3. (10 minutos)

Tarefa 3:

Projetar a imagem da tarefa, questionar a turma, pedindo justificação para cada uma das alíneas, fazer um esboço da representação gráfica da escolha apresentada para cada uma das alíneas e questionar a turma sobre a sua concordância ou não, pedindo as respetivas justificações. A resposta será dada e validada pela turma, mas é a professora que faz o registo no quadro.

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

-Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).

-Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.

-Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Plano de Aula do dia 10 de março

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Declive de uma reta não vertical

Data/hora: 10 de março 2016 (90 minutos)

Sumário: Cálculo do declive de uma reta, dados dois pontos dessa reta.

Objetivos Gerais:

-Reconhecer que as retas não verticais são os gráficos das funções afins e, dada uma reta de equação $y = ax + b$, se designa a por «declive» da reta e b por «ordenada na origem», (D. Metas 8.ºano.1.3.).

-Introduzir a formula de cálculo do declive de uma reta dados dois pontos distintos, (D. Metas 8.ºano 1.5.).

-Determinar a expressão algébrica de uma função afim dados dois pontos do respetivo gráfico, (D. Metas 8.ºano.2.2.).

Estratégia Geral:

Discussão da tarefa proposta na aula anterior e realização de tarefa “Declive de uma reta”.

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;
- Apresentação da ficha 5 e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 1;
- Discussão coletiva da tarefa 1;
- Formalizar o cálculo do declive de uma reta, dados dois quaisquer pontos dessa reta. Apresentar síntese
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da tarefa 2;
- Discussão coletiva da tarefa 2;
- Proposta de trabalho de exercícios do manual, caso os alunos terminem as tarefas antes do término da aula. Exercícios: 6 e 8 da pagina 174 do Manual do aluno.

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com as tarefas- um enunciado para cada grupo, com espaço para as respostas, dadas a canetas.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa, e documento de síntese.

Contextualização:

Nesta aula serão mobilizados os conhecimentos já adquiridos sobre as funções, incidindo fundamentalmente na função afim e na sua representação gráfica e algébrica. Começa-se por pedir qual a expressão algébrica de uma função linear, cuja representação gráfica é dada, fazendo a analogia com os conteúdos trabalhados na aula anterior. Escrever a expressão algébrica da função afim, (usando o seu paralelismo com a função linear) conhecida a sua ordenada na origem. Utilizando dois pontos da reta será pedido o cálculo de uma expressão numérica e a posterior comparação com o valor do declive obtido na questão anterior, conjeturando a formula de cálculo do seu declive.

Desenvolvimento da aula:

1.Início da aula, apresentação e entrega da ficha de trabalho nº 5. (5 minutos)

-Pede-se aos alunos para registarem o sumário;

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

-Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta e para fazerem as eventuais correções no momento de discussão coletiva, no caderno diário.

- Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver a tarefa 1. Decorrido este tempo será feita a discussão coletiva da tarefa.

-Projetar a tarefa 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

2.Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1. (15 minutos)

A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1.:

Na tarefa 1, pretende-se que os alunos relembrem, qual a expressão algébrica da função linear, função afim e que retas estritamente paralelas têm o mesmo valor de declive. Usando estes conhecimentos, consigam escrever corretamente as expressões algébricas destes dois tipos de funções, tenho por base as suas representações gráficas. Usando dois pontos da reta que representa a função afim, determinar a razão das diferenças das ordenadas pela diferença das abcissas. Comparando o valor obtido com o declive da reta e chegando a uma conjetura para a formula de cálculo do declive de uma reta conhecidos dois pontos quaisquer dessa reta.

Resolução prevista:

1.1.$h(x) = ax, a \in IR$, porque é uma função linear logo $a = \frac{y}{x} = \frac{2}{-1} = -2$

$$h(x) = -2x$$

Outra estratégia:

Como o ponto (-1,2) pertence ao gráfico de h resolver a equação:

$$2 = a * (-1) \Leftrightarrow a = -2.$$

Declive é -2.

Ordenada na origem é 0.

Como a retas r e u são estritamente paralelas, têm o mesmo declive, e como o ponto $(0{,}4)$ pertence à reta u então a sua ordenada na origem é 4, logo a respetiva expressão algébrica da função $w(x) = -2x + 4$,

Declive é -2.

Ordenada na origem é 4.

1.2.O ponto E tem coordenadas $(\mathbf{3}, -\mathbf{2})$

O ponto F tem coordenadas $(\mathbf{0}, \mathbf{4})$

O ponto G tem coordenadas $(-\mathbf{1}, \mathbf{6})$

1.3.

$$\frac{ordenada\ do\ ponto\ \ F - ordenada\ do\ ponto\ E}{abcissa\ do\ ponto\ F - abcissa\ do\ ponto\ E} = \frac{4-(-2)}{0-3} = \frac{6}{-3} = -2$$

1.4.

$$\frac{ordenada\ do\ ponto\ \ G - ordenada\ do\ ponto\ F}{abcissa\ do\ ponto\ G - abcissa\ do\ ponto\ F} = \frac{6-4}{-1-0} = \frac{2}{-1} = -2$$

1.5. A conclusão esperada é que os valores obtidos são iguais ao declive da reta *u*.

Dificuldades Previstas:

-A reta *r* representa uma função linear, como determinar o valor do parâmetro *a*;

-Escrever a expressão algébrica da função linear;

-Na expressão algébrica da função afim, determinar o valor do declive e ou o valor da ordenada na origem;

-Na representação do ponto, qual é abcissa/ordenada;

-Erros de cálculo;

-Como usar os dados da questão corretamente;

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-Que tipo de funções estão aqui representadas?

-Qual a forma da expressão algébrica de uma função linear?

-Existe alguma relação entre as variáveis?

-Qual a posição relativa das duas retas representadas?

-Como podes saber o declive da função afim?

-Precisas de mais algum valor para escrever a expressão algébrica da função afim?

-Qual?

-Como o podes determinar?

-O que representa o ponto (0,3)?

-Como se escreve a expressão algébrica pedida?

-Quando podemos dizer que um ponto pertence a um gráfico?

-O que representam essas coordenadas?

3. Discussão coletiva dedicada à tarefa 1 e 2. (20 minutos)

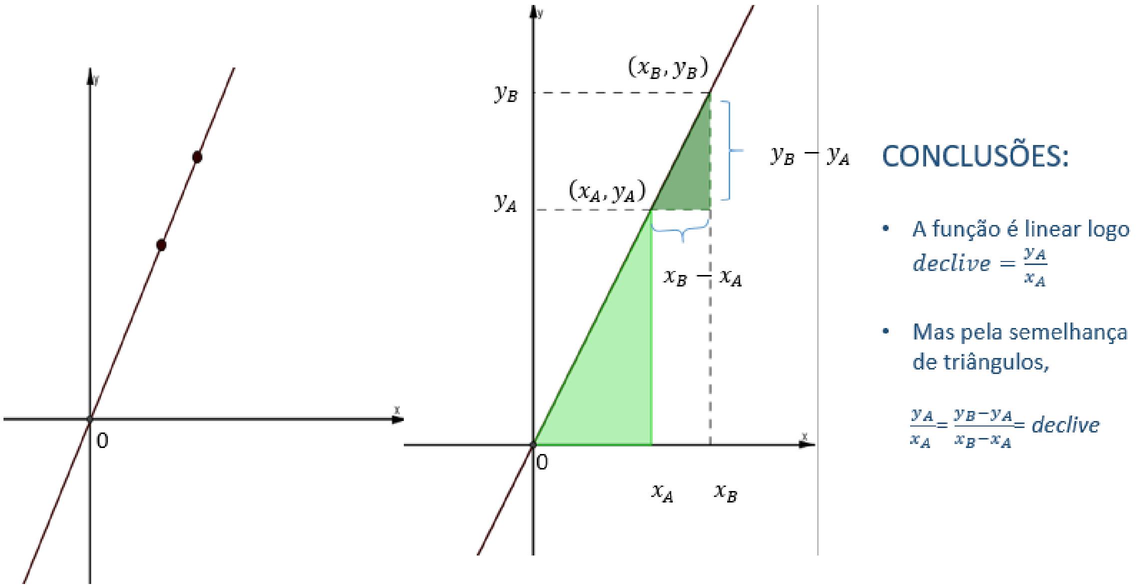
Tarefa 1 e 2:

Projetar o gráfico da tarefa 1 no quadro. Na questão 1.1. pedir a um aluno que tenha determinado a expressão algébrica da função linear, usando a relação entre as variáveis, e a expressão da função afim, que apresente a sua proposta de resolução, pedindo a justificação para cada caso, a resposta será justificada e validada pela turma, sendo efetuadas as eventuais correções. Será revisitando que tipo de funções estão apresentadas e quais as suas características, assim como, retas não verticais têm o mesmo valor de declive quando são paralelas. Questionando qual o valor do declive e da ordenada na origem para cada caso. Nas questões 1.2.; 1.3. e 1.4. as respostas serão dadas pelo grupo de turma, pedindo a sua justificação e validação, mas a resolução será escrita pela professora no quadro. Na questão 1.5. será pedido a diferentes grupos de trabalho a sua conclusão e a possível conjetura para o facto verificado com a justificação dos raciocínios efetuados.

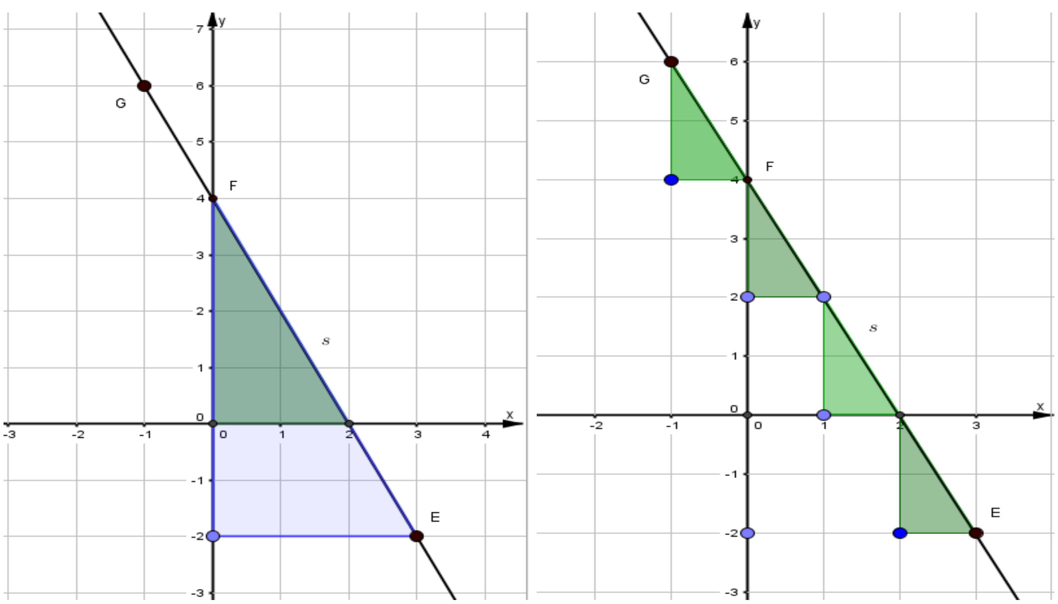
FORMALIZAÇÃO:

Projetar slide 1:

Sair de uma função linear, onde a relação entre as variáveis é conhecida, e usar o critério AA da semelhança de triângulos para mostrar a relação entre as variáveis, chegando à formula de cálculo do declive:



Generalização para qualquer reta não vertical, a fórmula de cálculo do declive também é válida.



Formalização:

Dada uma reta r determinada por dois pontos, A de coordenadas (x_A, y_A) e B de coordenadas (x_B, y_B), com $x_A \neq x_B$, o declive de r é igual a $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

4.Trabalho autónomo dedicado à tarefa 2. (15 minutos)

-Informar os alunos que têm 15 minutos para realizarem a tarefa 2. Esclarecer eventuais dúvidas sobre o que é pedido.

-A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, através do questionamento quer individual quer coletivo. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 2:

O objetivo desta tarefa é consolidar os conhecimentos adquiridos sobre como determinar o declive de uma função, dados dois pontos distintos dessa função. E como determinar o valor da ordenada na origem de uma função recorrendo à resolução de equações de primeiro grau.

Resolução prevista:

2.1. Tenha 2 por imagem de 1 e 5 por imagem de 7.

Temos os pontos $(1,2)$ **e** $(7,5)$, logo o $a = \frac{5-2}{7-1} = \frac{1}{2}$

A expressão algébrica é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$, para calcular o b posso usar qualquer um dos pontos dados e resolver a equação. Usando o ponto $(1,2)$, obtém-se:

$$2 = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

A expressão algébrica da função é:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2.2. $f(0) = -3$ e $f(2) = 0$.

Temos os pontos $(0, -3)$ **e** $(2,0)$, logo o $a = \frac{0-(-3)}{2-0} = \frac{3}{2}$

A expressão algébrica é da forma $y = \frac{3}{2}x + b$, para calcular o b posso usar qualquer um dos pontos dados e resolver a equação. Usando o ponto $(2,0)$, obtém-se:

$$0 = \frac{6}{2} + b \iff b = -3$$

Outra estratégia para o cálculo do b:

O ponto *(0,-3)* é a ordenada na origem, logo *b=-3*

A expressão algébrica da função é:

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2.3 $f(-1) = -5 \ e \ f(3) = 7.$

Temos os pontos $(-1, -5)$ **e** $(3,7)$, logo o $a = \frac{7-(-5)}{3-(-1)} = 3$

A expressão algébrica é da forma $y = 3x + b$, para calcular o b posso usar qualquer um dos pontos dados e resolver a equação. Usando o ponto $(3,7)$, obtém-se:

$$7 = 9 + b \iff b = -2$$

A expressão algébrica da função é:

$f(x) = 3x - 2.$

Dificuldades Previstas:

-Perceber o que é pedido;

-Interpretar qual é o objeto e qual é a imagem;

-Usar a fórmula de cálculo do declive;

-Erros de cálculo;

-Determinar a ordenada na origem;

-Perceber que tipo de função está representada pelos dois pontos;

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-O que significa “ter 2 por imagem de 1”?

-Como interpretas $f(-1) = -5$? Qual o seu significado?

-Como podes representar esta informação?

-O que necessitas para determinar o declive da reta?

-Já consegues escrever a expressão algébrica pedida?

-Como podes determinar o valor em falta?

-Quem é a ordenada na origem?

-O que era pedido? Então escreve a expressão algébrica.

5. Discussão coletiva dedicada à tarefa 2. (10 minutos)

Tarefa 2:

Projetar a tarefa, pedir a um aluno para apresentar a sua proposta de resolução da questão 2.1. (selecionar uma resolução onde a interpretação dos dados do enunciado não esteja correta) para poder questionar a turma e conseguir que todos façam uma boa interpretação dos dados. Questionar a turma, pedindo justificação para cada um dos pontos apresentados, a resposta será dada e validada pela turma. Na questão 2.2. (selecionar um aluno que não tenha usado o facto de ter sido dada a ordenada na origem) pedir a um aluno para explicar qual o significado do que é pedido, e quais os pontos correspondentes, e se concordam com o cálculo do declive e da respetiva ordenada na origem, questionando a turma sobre os resultados apresentados e a sua validação. Nesta questão, questionar a turma se existe outra forma mais rápida de chegar à expressão algébrica da função, (usando diretamente o valor da ordenada na origem).

Exploração:

Questionar qual o significado de $f(2) = 0$, fazer em grupo turma a correspondente representação gráfica. Questionar qual o significado de ponto $(2,0)$ no contexto das funções. Explorando que 2 seria a solução da equação $\frac{3}{2}x - 3 = 0$ e no contexto das funções representa o zero da função.

Na questão 2.3. pedir a um outro par de alunos para apresentar a sua resolução. Pedindo a justificação e a validação ou não dos resultados apresentados.

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).
- Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Plano de Aula do dia 11 de março

Ano/Turma: 8.º2ª

Domínio: Gráficos de funções afins

Conteúdos: Função linear e função afim

Data/hora: 11 de março 2016 (45 minutos)

Sumário: Realização de problemas usando as funções.

Objetivos Gerais:

-Rever os conhecimentos sobre função de proporcionalidade direta e função afim.

-Resolver problemas envolvendo equações de retas em contextos diversos, aplicando os conhecimentos já adquiridos, promovendo o raciocínio e comunicação matemáticos.

Estratégia Geral:

Realização de tarefa "Trabalho de Verão".

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da Aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula e indicação do sumário;
- Introdução com a apresentação da tarefa e método de trabalho;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução das tarefas 1 e 2;
- Proposta de trabalho de exercícios do manual, caso os alunos terminem as tarefas antes do término da aula, (Exercícios 1 e 2 do manual do aluno, página 180).

Recursos a usar:

- Ficha de trabalho com as tarefas- um enunciado para cada grupo de trabalho, com espaço para as respostas, dadas a canetas.
- Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da tarefa.

Contextualização:

Esta é uma aula de 45 minutos, principalmente dedicada à realização de trabalho autónomo, aplicando os conhecimentos já adquiridos sobre funções, e sua interpretação. A discussão coletiva destas duas tarefas propostas será realizada no início da próxima aula, porque pretendo realizar entrevistas a três pares de alunos no final desta aula, por forma a aceder aos raciocínios realizados, pedindo mais ao pormenor as justificações para cada estratégia desenvolvidas e compreender quais as dificuldades sentidas na realização da ficha de trabalho.

Desenvolvimento da aula:

1. **Início da aula/ Apresentação da ficha de trabalho (5) minutos)**

-Escrever o Sumário no quadro;

-Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;

-Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.

-Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta tendo o cuidado de justificar todos os raciocínios e estratégias desenvolvidas.

-Informar os alunos que dispõem de 20 minutos para resolver a tarefa 1 e 2.

-Projetar a tarefa 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

2. **Trabalho autónomo dedicado à tarefa 1 e 2. (20 minutos)**

A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando feedback e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa.

Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na tarefa 1:

Na tarefa 1, pretende-se que os alunos interpretem o problema proposto, recorrendo aos conhecimentos que têm sobre a função de proporcionalidade direta, estabelecendo qual a relação entre as duas variáveis e procurando uma estratégia que lhes permita determinar um valor pedido para responderem ao que é pedido.

Resolução prevista:

QUESTÃO 1.1.

Estratégia 1:

Determinar a expressão algébrica da função, ou apenas a constante de proporcionalidade, reconhecendo que é uma função de P.D.

Logo, $a = \frac{3}{1} = 3$ então $q(t) = 3t,$ calcular a imagem de 6 pela função $q(t)$,

$$q(6) = 3 * 6 = 18\ euros$$

Responder que a quantia a receber será de 18 euros.

Estratégia 2:

Usar uma tabela:

Tempo (horas)	1	6
Quantia a receber (euros)	3	$q(6)$

Usar uma proporção para determinar o $q(6)$:

$$\frac{3}{1} = \frac{q(6)}{6}$$

Obtendo o valor da quantia a receber pelo trabalho de 6 horas.

Estratégia 3:

Regra de três simples para o cálculo do valor.

QUESTÃO 1.2.

Podem usar qualquer uma das estratégias descritas em cima, acrescentado que podem resolver a equação de primeiro grau que traduz este problema:

$$10{,}5 = 3t \Leftrightarrow t = 3{,}5\ horas\ de\ trabalho$$

QUESTÃO 1.3.

A expressão algébrica que representa a função dada é: $q(t) = 3t, com\ t \in IR_0^+$

Dificuldades Previstas:

-Não perceber a questão;

-Identificar o tipo de relação entre as variáveis;

-A função que está representada;

-Identificando que é uma P.D, em determinar a constante de proporcionalidade;

-Determinar o valor pedido, reconhecendo-o como uma imagem e ou objeto;

Atividades do Professor:

Questões orientadoras:

-O que é pedido neste problema?

-Que tipo de função está aqui representada?

-O que me podes dizer sobre esta função?

-Tens todos os dados necessários para responder ao pedido?

-Como podes determinar o que necessitas?

-Sabes qual o valor a receber por uma hora de trabalho?

-Será que ajuda se souberes?

-Como podes determina-lo?

Relativamente aos objetivos da tarefa 2, estratégias e dificuldades previstas:

Objetivo, é perceberem que a situação descrita, usando linguagem natural, é traduzida por uma função afim. A interpretação dos dados do problema permite determinar o valor do declive e ordenada na origem, assim como as possíveis formas de representar esta função. Fazendo uso destes conhecimentos pretende-se o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto oral como escrita, permitindo argumentar e justificar as razões apontadas para o tipo de representação escolhida a apresentar.

Resolução prevista:

A função que representa a situação apresentada é uma função afim, logo da forma: $f(x) = ax + b$, onde a representa o declive e b a ordenada na origem.

Como a Laura recebe 3 euros para o autocarro, este valor representa a ordenada na origem.

Por uma hora de trabalho vai receber $1,5 + 3 = 4,5$ euros, o que corresponde ao ponto de coordenadas $(1; 4,5)$. Usando este ponto na respetiva equação e substituindo o valor da ordenada na origem, obtém-se:

$$4,5 = a * 1 + 3 \Leftrightarrow a = 1,5$$

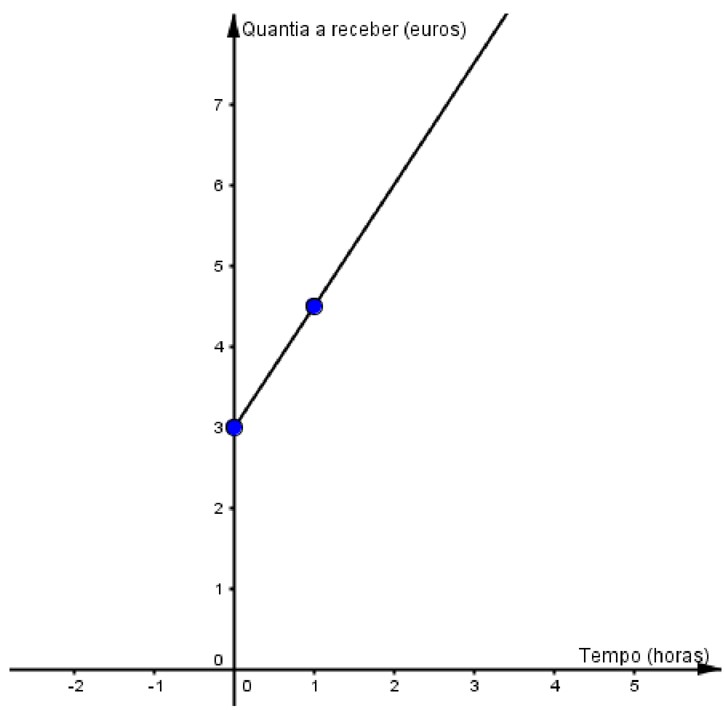
Então a expressão algébrica da função é: $f(x) = 1,5x + 3$.

Em termos das possíveis representações, pode surgir logo na questão 2.1. a tabela ou a representação gráfica.

Tabela:

x	*f(x)*
0	3
1	1*1,5+3=4,5
2	2*1,5+3=6

Representação gráfica:



Será interessante observar se os alunos fazem a contextualização deste problema, ou se ficam satisfeitos em fazer a representação gráfica de uma função afim.

Dificuldades Previstas:

-Interpretar os dados do enunciado;

-Em perceber o que é pedido;

-Qual o tipo de função que representa este problema;

-Perceber que a ordenada na origem é dada;

-Como determinar o declive da reta;

-Na justificação do raciocínio feito para fazer a representação gráfica e a sua contextualização.

Atividades do professor:

Questões orientadoras:

-A função é de que tipo?

- O que caracteriza uma função afim?

-O que podes concluir?

- De quantas formas podes representar uma função?

- Quais?

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

-Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).

-Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.

-Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das tarefas (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Apêndice C

Instrumentos de Avaliação

Grelha de observação de aula do dia: ___/ ___/ ____										
Turma	**Apresentação/ adesão da tarefa**			**Fase de trabalho autónomo**			**Fase de discussão**			
Alunos	**Está a ouvir**	**Tem conversas paralelas**	**Coloca questões**	**Trabalha em equipa**	**Trabalha individualmente**	**Não trabalha**	**Dá contributos positivos para a discussão**	**Questiona e argumenta**	**Apresenta justificações usando os conceitos aprendidos**	**Está atento, mas não participa**
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										

24										
25										
26										
27										
28										
29										
30										

Observações	

Notas de campo

Aula:

Data:

Tarefas:

Tempo Previsto/ Tempo gasto:

Antes da aula
Expectativas do Professor:

O que sucedeu na aula:
Instruções:
Reação inicial às tarefas propostas:
Dificuldades e comentários expressos pelos alunos:
Atitudes do professor/ Questões colocadas / Respostas obtidas:
Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas:

Discussão geral / Intervenções dos alunos / Gestão do professor:
O que se salientou relativamente aos alunos entrevistados neste estudo:
Outros aspetos a destacar / Episódios marcantes decorridos na sala de aula:

Pós aula
Aspetos bem conseguidos:
Aspetos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor):
Reflexão sobre a investigação:

Observações pertinentes:

Apêndice D

Guião das Entrevistas

Guião da entrevista semiestruturada da aula 3 – “A visita do Martim”

Dimensões	Objetivos	Questões
Tarefa 1		
Aprendizagens realizadas pelos alunos	Conhecer as aprendizagens dos alunos sobre a função de proporcionalidade direta	1. O que é pedido nesta questão? 2. Qual o significado do número 10 representado no gráfico? 3. O que significa neste problema andar 8 minutos? 4. O tempo depende da distância, ou, a distância depende do tempo? Porquê? 5. Que relação existe entre as variáveis neste problema?
Estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema	Conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução do problema	6. Porque utilizastes esta estratégia? 7. Não sentiste necessidade de fazer outra representação da função *h*? Porquê?
Dificuldades sentidas pelos alunos	Conhecer as principais dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução do problema	8. Que dificuldades sentistes na resolução do problema? Porquê? 9. Como conseguiste ultrapassar essas dificuldades?

Tarefa 2		
Aprendizagens realizadas pelos alunos	Conhecer as aprendizagens dos alunos sobre a função afim	1. Fala-me sobre a função *h*. 2. A função *h* é de que tipo? 3. Quais as caraterísticas mais relevantes desse tipo de função? E o que representam? 4. Quais as razões que te permitem garantir que a reta *r* não é representação gráfica da função *h*? 5. Quais as razões que te permitem garantir que a reta *s* não é representação gráfica da função *h*?
Estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema	Conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução do problema	6. Sentiste necessidade de uma representação gráfica ou não da função *h*? Porquê? 7. Como é que essa representação de ajudou? 8. Ao observar a representação gráfica da função *h* e as retas *r* e *s*, o que podes concluir?
Dificuldades sentidas pelos alunos	Conhecer as principais dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução do problema	9. Que dificuldades sentistes na resolução do problema? Porquê? 10. Como conseguiste ultrapassar essas dificuldades?

Guião da entrevista semiestruturada da aula 6 – “Trabalho de Verão”

Dimensões	**Objetivos**	**Questões**
	Tarefa 1	
Aprendizagens realizadas pelos alunos	Conhecer as aprendizagens dos alunos sobre a função de proporcionalidade direta	1. Qual a variável independente e a variável dependente? Porquê? 2. Existe algum tipo de relação entre as variáveis? Qual? 3. Que tipo de função está representada nesta questão?
Estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema	Conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução do problema	4. Qual foi a estratégia que utilizaste para determinar quanto vai o Carlos ganhar por seis horas de trabalho? 5. Qual a estratégia que utilizaste para determinar quanto tempo o Carlos teve de trabalhar para receber 10,5 euros? 6. Podes utilizar uma regra de três simples neste problema? Porquê?
Dificuldades sentidas pelos alunos	Conhecer as principais dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução do problema	7. Que dificuldades sentistes na resolução do problema? Porquê? 8. Como conseguiste ultrapassar essas dificuldades?

Tarefa 2		
Aprendizagens realizadas pelos alunos	Conhecer as aprendizagens dos alunos sobre a função afim e suas representações	1. Como interpretastes os dados do enunciado, podes tentar explicar-me? 2. Que tipo de função está representada nesta tarefa? Porquê? 3. O que é necessário conhecer para poderes escrever a expressão algébrica desta função? 4. O que representam esses parâmetros? 5. De quantas formas podes representar uma função? 6. Pensaste no contexto do problema? 7. Que alterações terias de pensar fazer na representação gráfica, para que ficasse de acordo com o contexto do problema?
Estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema	Conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução do problema	8. Para escrever a expressão algébrica da função como pensaste? 9. Porque escolheste fazer esta representação da função, e não outra?
Dificuldades sentidas pelos alunos	Conhecer as principais dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução do problema	10. Que dificuldades sentistes na resolução do problema? Porquê? 11. Como conseguiste ultrapassar essas dificuldades?