UNIVERSIDADE DE LISBOA

A Programação Linear no 11.º Ano: estratégias e dificuldades na resolução de problemas

Rui Alexandre Brandão Prado

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Henriques e pela Professora Doutora Isabel Simão

Mestrado em Ensino da Matemática

2015

UNIVERSIDADE DE LISBOA

A Programação Linear no 11.º Ano: estratégias e dificuldades na resolução de problemas

Rui Alexandre Brandão Prado

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Ana Henriques e pela Professora Doutora Isabel Simão

Mestrado em Ensino da Matemática

2015

Resumo

Este estudo tem por base o trabalho desenvolvido na lecionação de cinco aulas na unidade de Programação Linear (PL) numa turma do 11.º ano da Escola Secundária da Ramada. O objetivo do estudo é analisar as estratégias adotadas pelos alunos dessa turma bem como as dificuldades que manifestam na resolução de problemas de PL. Assim, procurei responder a três questões: *(1)* quais as estratégias utilizadas pelos alunos, *(2)* que conhecimentos mobilizam e *(3)* quais as dificuldades que manifestam na resolução de problemas de PL, em particular na interpretação dos enunciados e na sua tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente.

Os resultados apresentados baseiam-se numa análise qualitativa dos dados recolhidos a partir da observação participante, apoiada em notas de campo e complementada com gravação vídeo e da recolha documental, constituída pelas resoluções dos alunos das tarefas propostas na unidade de ensino.

Dos resultados obtidos concluo que as estratégias de resolução dos problemas de PL utilizadas pelos alunos variam de acordo com a fase em que se encontram na resolução dos problemas. Identificou-se maior diversidade de estratégias nas fases de compreensão do problema e de execução do plano. Na primeira fase, a maioria dos alunos sublinha o enunciado, alguns registam os dados que consideram mais importantes na sua resolução e outros ainda organizam os dados em tabela. Na segunda fase, os alunos recorrem aos métodos analítico ou gráfico, mas a maioria realiza uma articulação dos dois métodos. Existem também casos em que utilizam uma estratégia numérica, explorando todas as soluções possíveis para o problema, em alternativa aos métodos anteriores. Os alunos mobilizam os conhecimentos adequados à resolução dos problemas de PL, e por vezes conhecimentos adquiridos de unidades anteriores. As maiores dificuldades encontram-se na formulação algébrica e na utilização da função objetivo como critério de seleção da solução ótima em problemas de PL.

Palavras-chave: Programação Linear; Resolução de problemas; Estratégias de resolução; Dificuldades dos alunos.

Abstract

This report is based on the work developed under the teaching of Linear Programming unit (LP) in an 11^{th} grade class of the Escola Secundária da Ramada. The objective of this study is to analyze the strategies adopted by students in this class and the difficulties that they manifest in solving LP problems. In so, I sought to answer three questions: *(1)* what are the strategies used by the students, *(2)* which knowledge do they mobilize and *(3)* what difficulties do they manifest in solving LP problems, in particular in interpreting the tasksheet statements and in translating from common language to the mathematical language and reciprocally.

The results presented are based on a qualitative analysis of data gathered from participant observation, supported by field notes and complemented with video recordings and documentary collection, composed of the resolutions of the students of the tasks proposed in the teaching unit.

From the obtained results I conclude that strategies for solving LP problems used by the students vary according to the phase in which they are in solving problems. There were identified a greater diversity of strategies for the phase of understanding the problem and carrying out the plan. In the first phase, most students underline the task sheet statements, some others record data they consider most important in their resolution and others yet organize the data in the form of a table. In the second phase, students resort on the analytical or graphical methods, but most held a joint of both methods. There are also cases where students use a numerical strategy, exploring all possible solutions to the problem, as an alternative to the prior methods. Students mobilize appropriate knowledge to solve LP problems, and sometimes mobilize knowledge acquired in prior units. The biggest difficulties are in the algebraic formulation and the use of the objective function as a criterion for selection of the optimal solution for LP problems.

Keywords: Linear Programming; Problem-solving; Solving strategies; Student's difficulties.

Agradecimentos

Agradeço-me, sem o qual não nasceria este trabalho, sem o qual não viveria esta experiência. Reconheço o amor por mim e reconheço o meu valor. Obrigado!

Agradeço à professora cooperante pela sua disponibilidade e pela sua mentoria. Agradeço a sua qualidade profissional que me inspirou ainda mais a enveredar nesta profissão de professor. Obrigado!

Agradeço à turma com quem trabalhei por me terem recebido bem, por me terem aceitado e integrado no seu ambiente. Agradeço o seu excelente trabalho. Obrigado!

Agradeço à professora orientadora pela sua paciência, orientação e profissionalismo. Obrigado!

Agradeço à professora coorientadora a sua disponibilidade e colaboração. Obrigado!

Agradeço à minha família, a paciência e a tolerância, e o apoio, ainda que moral. Obrigado!

Agradeço à minha mestra. … Obrigado!

Agradeço à minha colega de estágio a sua presença, o seu apoio e a sua companhia na caminhada que foi todo este mestrado. Obrigado!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1 – Introdução

Este estudo foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada, numa turma do 11.º ano de escolaridade, no 3.º período do ano letivo 2014/2015 durante a lecionação da subunidade de Programação Linear (PL) do Programa de Matemática A.

1.1. Motivação

Enquanto estudante do ensino secundário, a PL não captou a minha atenção nem o meu interesse. Este tópico matemático, na altura, foi apresentado sem articulação com o que tinha sido trabalhado até então, em Geometria Analítica, particularmente com o estudo da posição relativa de retas e planos no espaço que o antecedia. Além disso, a formulação matemática dos enunciados dos problemas de PL levantavam-me algumas dificuldades atendendo à sua natureza mais realista e 'pouco matemática'. Era a rotineira fase de resolução dos problemas, depois de matematicamente formulados, que fazia sentido para mim. Questionava-me como se enquadrava então a PL na Matemática? Na altura, não estava desperto para as aplicações da Matemática. Na verdade, desde o 10.º ano até ao meu encontro com este tópico, na disciplina de Matemática, apenas tinha trabalhado e permanecido no mundo puramente matemático, ainda que escolar. Muitos tópicos matemáticos, como por exemplo a Trigonometria, apresentavam problemas com contextos da realidade focados em alturas de edifícios, postes de eletricidade, árvores e sombras, entre outros. Os enunciados dos problemas sobre funções quadráticas, no mesmo esforço, remetiam para a trajetória de bolas de basquete ou projéteis, convencendo-me da sua aplicação. Os problemas de PL, pelo contrário, pareciam deslocados da disciplina e "deviam era estar em Economia ou coisa assim", pensava eu.

Mais tarde compreendi a razão da inclusão da PL na disciplina de Matemática e qual o seu contributo para a minha formação e conhecimento das suas aplicações. Não foi, por isso, por acaso, que ingressei em Matemática Aplicada: queria aprofundar o meu conhecimento sobre as aplicações desta ciência.

A PL é um ramo que se desenvolveu a partir da Matemática, que tem os seus próprios resultados e teorias desenvolvidos, mas que utiliza técnicas matemáticas para a resolução dos seus problemas e para o seu progresso (Hillier & Lieberman, 2010). E a sua base assenta em conceitos de Álgebra e de Geometria, o que a torna acessível a alunos do Ensino Secundário. Contudo, os problemas de PL têm contextos muito particulares: são contextos de situações do quotidiano, associados à tomada de decisões, enunciados pouco habituais na disciplina de Matemática, mas que podem ser apelativos, pois podem permitir aos alunos compreender como a Matemática pode intervir no mundo real. E resolver problemas de PL oferece a oportunidade de trabalhar e desenvolver aptidões como a formulação de modelos matemáticos, como saber aplicar conhecimentos de geometria na resolução do problema, e como a interpretação da solução obtida no contexto do problema, aptidões presentes no Programa de Matemática A para o Ensino Secundário (ME, 2001a).

O tema da PL é trabalhado no 11.º ano de escolaridade na disciplina de Matemática A. O Programa de Matemática A para o Ensino Secundário (ME, 2001b) integra a PL no tema da Geometria no Plano e no Espaço. A resolução de problemas neste conteúdo pode revelar-se uma fonte de dificuldades para os alunos especialmente na modelação de problemas de PL (White, 1996; Dias, 2011).

1.2. Objetivo e questões do estudo

A PL é um tópico contemplado no programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2001b). Este envolve a resolução de problemas visando a modelação de situações contextualizadas na realidade. A formulação algébrica desses problemas apela ao esforço de interpretação e tradução da linguagem corrente em linguagem matemática, exige exprimir por meio de equações, funções e sistemas de inequações (restrições) as informações dadas nos enunciados. Por sua vez, resolvê-los envolve trabalhar aqueles conceitos algébrica e graficamente. Na fase final da resolução, os resultados devem ser interpretados e traduzidos novamente em linguagem corrente. Estas são situações que acarretam dificuldades aos alunos (White, 1996; Dias, 2011; Neves, 2011).

O objetivo deste estudo é analisar as estratégias adotadas por alunos do 11.º ano e as dificuldades que manifestam na resolução de problemas de PL. Tendo isto em conta, procura-se responder às seguintes questões:

i. Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de PL?
ii. Que conhecimentos mobilizam os alunos na resolução de problemas de PL?

iii. Quais as dificuldades que os alunos manifestam na resolução de problemas de PL, em particular na interpretação dos enunciados de problemas de PL e na sua tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática, e reciprocamente?

Capítulo 2 – Enquadramento curricular e didático da problemática

2.1. Nota Histórica sobre a PL

A Programação Linear (PL) é um ramo de uma área mais abrangente de Matemática Aplicada designada de Investigação Operacional (IO). É uma área recente que teve a sua origem durante o período da Segunda Guerra Mundial. Durante a guerra, emergiu a necessidade de transportar recursos escassos para várias operações militares e para atividades dentro de cada operação de maneira eficiente. Para isso, a Grã Bretanha, e mais tarde, os EUA, reuniram cientistas para que estudassem esse problema (Hillier & Lieberman, 2010). Após a guerra, o interesse na IO manteve-se e o seu desenvolvimento foi motivado por principalmente dois fatores, que ocorreram quase em paralelo.

Um dos fatores foi o progresso substancial no desenvolvimento de técnicas matemáticas para apoiar a IO (Hillier & Lieberman, 2010). Até finais dos anos 40 do séc. XX, foi muito reduzido o interesse dos matemáticos pelo estudo de sistemas de inequações, ao contrário do que se verificava com os sistemas de equações (Tavares, Oliveira, Themido, & Correia., 1996). As escassas publicações sobre IO que se produziram entre 1900 e 1930 não discutiam explicitamente o problema de maximização de uma função linear (um problema próprio da PL), embora, em 1826, Fourier tivesse manifestado o seu interesse por este tipo de problemas (Tavares et al., 1996). O matemático George B. Dantzig (1914-2005), que pertenceu ao grupo de cientistas dos EUA, desenvolveu o seu algoritmo simplex para resolver problemas de PL (Kolman & Beck, 1995). Foi uma das primeiras contribuições para o desenvolvimento teórico desta, sendo que para o desenvolvimento do seu algoritmo estudou os sistemas de inequações lineares. Duas outras figuras também reconhecidas pela sua contribuição nesta área são o economista holandês Koopmans (1910-1985) e o economista e matemático Kantorovich (1912-1986). Em 1975 receberam o Prémio Nobel da Economia pela sua contribuição na teoria de otimização da distribuição e rentabilização dos recursos com aplicação de técnicas de PL (Kolman & Beck, 1995).

O outro fator foi o desenvolvimento dos computadores, permitindo assim resolver problemas de PL em grande escala (Kolman & Beck, 1995).Com o desenvolvimento industrial que ocorreu após a guerra, os problemas colocados pelo aumento da complexidade das organizações e empresas em crescimento ganhavam relevância. Esses problemas ainda habitam nas organizações e empresas dos dias de hoje. Um deles, em particular, é a especialização e a complexificação que numa organização torna mais difícil transportar os recursos disponíveis às várias atividades dela da forma mais eficiente possível (Hillier & Lieberman, 2010). É um problema semelhante aos que os militares britânicos e estado-unidenses tiveram que enfrentar, podendo ser resolvido utilizando as técnicas da IO. A formulação matemática deste tipo de problemas (e de outros) típicos da PL requer a formulação de um número elevado de equações e inequações de várias variáveis, tornando a sua resolução mais complexa e, em particular, inadequada a papel e lápis. O desenvolvimento de computadores com a sua capacidade de cálculo aritmético rápido e eficaz foi muito útil para o progresso da IO (Hillier & Lieberman, 2010). Segundo estes autores, a primeira resolução de um problema de PL a computador ocorreu em 1952, no computador do *National Bureau of Standards, SEAC*. Hoje, existem vários *softwares* de IO, mais capazes de resolver problemas mais complexos com mais eficiência e eficácia.

2.2. Ensino e Aprendizagem da PL

Em Portugal, a PL nem sempre teve o seu lugar efetivo no programa de Matemática. No seu Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, de 1975, Sebastião e Silva já considera que "a sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa" (p. 71).

A PL apareceu oficialmente no programa de Matemática nos chamados "Anos Propedêuticos" (1978/1979 e 1979/1980), vindo mais tarde a dar lugar ao 12º ano de escolaridade. No ano letivo 1980/1981, o tema é retirado, surgindo novamente como um conteúdo facultativo no Programa de Matemática de 1995, que só entra em vigor no ano letivo 1997/1998. Assume por fim o carácter obrigatório no ano letivo 2004/2005, com Programas de Matemática A e B, homologados em 2001.

O Programa para a Matemática A em vigor, (ME, 2001) refere que deve ser feita uma breve introdução ao tópico de Programação Linear, no tema I do 11º ano de escolaridade – Geometria no Plano e no Espaço II – e que o professor na abordagem deste conteúdo deverá "permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10.º e ampliados no 11.º" (ME, 2001, p. 4). Nesse tema inclui-se o subtópico de domínios planos focado na interpretação geométrica de condições. As indicações metodológicas propostas para o tema I são as seguintes:

> Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,… precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o estudante não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o estudante poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas). (ME, 2001, p. 4)

O programa propõe então que o estudo da PL seja feito através da resolução de problemas usufruindo de contextos doutras áreas do saber. Em particular, a aplicação de conhecimentos de domínios planos não deve ser desligado da interpretação de situações concretas, que podem estar ligadas a essas outras áreas do saber.

A Brochura de Geometria do Ensino Secundário do 11.º ano (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1998) sugere uma abordagem geométrica para a resolução de problemas de PL, no qual o objetivo principal é a motivação dos alunos para a aprendizagem da Matemática. Sugere ainda que os enunciados expressem problemas reais apelativos e adequados às características de cada turma. A exploração desta temática deve ter em conta os seguintes objetivos específicos (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1998, pp. 70-71):

> – a tradução matemática das ideias expressas em linguagem corrente;
> – a representação gráfica de sistemas de inequações lineares;
> – a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção;
> – a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, por forma a obter a "melhor" solução para o problema;
> – a interpretação da solução obtida para o problema;
> – a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.

Estudar PL requer de facto aplicar conhecimentos sobre domínios planos e saber trabalhar com equações, inequações e sistemas e lugares geométricos. Com efeito, estes conceitos já vêm sendo trabalhados em anos anteriores, em particular, no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Neste ciclo, "institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos” (ME, 2007, p. 7). Mais especificamente, no 9.º ano de escolaridade no tema da Geometria foi trabalhado o tópico dos lugares geométricos – “identificar e construir circunferência, círculo, bissectriz e mediatriz” (ME, 2007). No tema da Álgebra, estudam “as equações do 1.º e 2.ºgraus e sistemas de equações do 1.º grau” e são introduzidos às “inequações e funções associadas à modelação de situações da realidade” (ME, 2007). Como uma das indicações metodológicas para estes tópicos matemáticos tem-se:

> Na resolução de equações, os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática, opção didáctica que também é pertinente para a abordagem da resolução de inequações do 1.º grau, de sistemas de equações do 1.º grau e de equações do 2.º grau. (ME, 2007, p. 55)

Este estudo foca-se numa melhor apreensão, pelos alunos, dos conceitos da PL e da sua aplicação ao tipo de problemas que esta aborda. Realça-se um aspeto ainda não referido: a PL envolve a formulação matemática de problemas apresentados em linguagem natural, e muitas vezes com um enunciado pouco claro ao nível de procedimentos. O uso da linguagem matemática faz-se essencial no estudo deste tópico.

No 10.º ano, no tema da Geometria no Plano e no Espaço I, no tópico da Geometria Analítica, o programa de Matemática A propõe o estudo de conjuntos de pontos e condições e, novamente, de lugares geométricos – circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador – agora explicitando as condições que as representam, sob a forma de equações e inequações cartesianas. Ainda no mesmo tópico, propõe também “o conhecimento da equação reduzida da reta [que] deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer reta cujo gráfico lhe seja apresentado . . .” (ME, 2001a, p. 26). No tema das Funções e Gráficos, o programa propõe o “estudo detalhado de algumas funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações” (p. 26) O estudo da equação reduzida da reta e a resolução gráfica de inequações estabelece os pilares para a resolução de problemas de PL.

No Programa de Matemática A (ME, 2001a) são especificadas finalidades para o Ensino Secundário e entre várias pode ler-se:

> Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real; desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas (…); promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte

> cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida ativa; contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania ativa e participativa. (p. 3)

A PL é um tópico matemático que possibilita promover estas finalidades. Por exemplo, os enunciados dos problemas associados a variados contextos baseados na realidade, desde a economia, a gestão de atividades numa empresa –, na produção de um artigo ou no transporte de mercadoria – até a atividades quotidianas como fazer compras, se bem aproveitados, podem promover a primeira das finalidades apresentadas. A PL modela problemas contextualizados em situações da realidade, contribuindo para a sua resolução. O contacto com este tópico matemático permite despertar a consciência para a intervenção da Matemática em contextos exteriores a ela.

O Programa de Matemática A (ME, 2001a) sugere ainda que:

> A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, constituem uma oportunidade de abordar o método científico (…). O papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável: um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geometria Descritiva, … (p. 11)

2.3. Modelação

Por modelação matemática entende-se uma representação matemática de elementos e relações numa versão idealizada de um fenómeno complexo (NCTM, 2000). Através de modelos matemáticos reduz-se um fenómeno ou um problema a representações matemáticas, as quais passam a depender apenas de ferramentas matemáticas para a sua resolução. Nas aulas de matemática, em particular, a modelação pode levar os alunos a recorrerem a conhecimentos prévios sobre uma dada situação para identificar variáveis e relações e, através de imagens, construir uma representação matemática (Watson, 2007). Assim, os modelos matemáticos podem contribuir para clarificar e interpretar um dado fenómeno ou resolver problemas (NCTM, 2000).

Por outro lado, os modelos matemáticos são uma forma de aplicar a Matemática a situações problemáticas contextualizadas na realidade. Como afirmam Matos, Carreira, Santos e Amorim (1995), "é fundamentalmente através da noção de modelo que se realiza a aplicação da matemática" (p. 11).

Blomhøj (2009, citado de Blomhøj, 2004) salienta três argumentos para que a modelação matemática seja um elemento integrador na educação matemática:

- é uma ponte que une as experiências da vida real dos alunos com a Matemática;
- em sociedades de elevado desenvolvimento tecnológico, competências de análise e espírito crítico em relação a modelos matemáticos são essenciais;
- tem um papel importante no funcionamento das atuais sociedades em desenvolvimento, e a formação de pessoas em competências para criticar modelos matemáticos e o modo como modelos e resultados de modelos são utilizados na tomada de decisões está a tornar-se imperativa na manutenção e no desenvolvimento da democracia.

Numa perspetiva que vai ao encontro aos argumentos apresentados por Blomhøj, o Programa de Matemática A (ME, 2001) propõe que o professor deva evidenciar aplicações da Matemática e estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências (ME, 2001a). Sugere ainda que "este trabalho não deve resumir-se ao enunciado e resolução de problemas realistas"devendo também "ser discutido com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual" (ME, 2001a, p. 20).

A PL é uma temática que pode promover a aplicação da Matemática noutras áreas. Os problemas de PL abarcam contextos que vão desde Economia e Finanças, em particular em planeamentos económicos e financeiros, gestão de recursos humanos e materiais, até ao transporte de mercadorias, entre muitos outros. Os seus enunciados podem ser ricos, pelo que podem ser relevantes no sentido de enriquecer a experiência dos alunos em Matemática, fazendo-os reconhecer o valor da sua aplicação e importância na sociedade. Outro aspeto a realçar é que a resolução de problemas de PL compreende a modelação matemática em contextos como os referidos. E, por isso, o processo de modelação deve ser trabalhado com os alunos.

O que é, então, a modelação matemática vista como processo?

A modelação matemática como processo "tem origem num dado fragmento da realidade e (…) culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade" (Matos et al., 1995, p. 18). O que muitas vezes sucede é que o caminho entre a origem e o modelo não consiste num percurso bem definido e sequencial. Cada passo no percurso é suscetível de repetição, na perspetiva de aperfeiçoar o modelo matemático pretendido. Assim, o processo de modelação é encarado como um ciclo por muitos autores.

Apresenta-se a seguir as 6 etapas do ciclo formulado por Kerr e Maki (1979), obtido de Matos et al. (1995) e do qual foi adaptado, que tem em consideração o cenário pedagógico em que se pode desenvolver o processo de construção e manipulação dos modelos matemáticos:

1. identificação de um *problema do mundo real*;
2. construção do *modelo real* – o problema é muitas vezes modificado e simplificado com vista a ser descrito mais precisa e sucintamente. Trata-se de uma idealização ou simplificação e nem todos os aspetos da situação real são incorporados nessa descrição;
3. construção do *modelo para a sala de aula* – o modelo real é ainda mais simplificado e apresentado num contexto que seja interessante e acessível aos alunos, tornando viável a aplicação dos conceitos e ideias matemáticos visados;
4. construção do *modelo matemático* – conversão dos aspetos e conceitos do mundo real, presentes no modelo anterior, em representações matemáticas;
5. utilização de instrumentos e técnicas matemáticos para retirar conclusões do modelo matemático construído;
6. verificação da validade do modelo, confrontando as conclusões obtidas a partir do modelo com a realidade. Identificada alguma insuficiência no modelo, o processo deve ser retomado.

Em relação aos ciclos de modelação propostos por outros autores (por exemplo, Blum & Niss, 1991), este acresce da etapa 3 que se destina tornar os modelos obtidos da realidade adequados para a sala de aula, em especial quando o objetivo é “criar oportunidades para que os alunos utilizem determinadas ferramentas e ideias matemáticas” (Matos et al., 1995, p. 19).

Em literatura específica do tema da PL podemos encontrar propostas, idênticas entre si, de fases de modelação em PL (Hillier & Lieberman, 2010; Kolman & Beck, 1995; Luenberger & Ye, 2008). A seguir apresenta-se uma sugestão dessas fases adaptadas de Hillier e Lieberman (2010) e Kolman e Beck (1995):

1. definição do problema e recolha de dados – define-se o objetivo do estudo, identificam-se as decisões a tomar e as restrições das decisões;

2. formulação do modelo matemático – descreve-se matematicamente o problema, onde são traduzidos para a linguagem matemática as restrições das decisões que dão origem às restrições do problema. Muitas vezes é também possível quantificar o objetivo do problema representando como uma expressão algébrica a ser minimizada ou maximizada;
3. determinação de soluções a partir do modelo – resolve-se o modelo matemático, procurando-se pela solução ótima, a melhor solução para um determinado problema. "Contudo, é necessário reconhecer que estas soluções são ótimas apenas para o modelo a ser utilizado. Dado que o modelo é uma mais idealização do que uma representação exata do problema real, não pode existir uma garantia utópica de que a solução ótima para um modelo se prove a melhor possível que pode ser implementada no problema real." (Hillier & Lieberman, 2010, p. 14);
4. verificação do modelo – por vezes, as versões iniciais do modelo apresentam falhas, dando soluções pouco razoáveis. As sucessivas versões do modelo devem ser testadas para identificar e corrigir o maior número de falhas possível, até que as soluções se tornem o mais razoáveis possíveis e o modelo possa ser utilizado com alguma segurança. "É difícil descrever como é feita a validação de um problema, porque o processo depende em grande medida da natureza do problema considerado e do modelo a ser utilizado."(Hillier & Lieberman, 2010, p. 17);
5. implementação – depois de formulado e verificado, o modelo passa à fase de implementação do modelo.

É de salientar a similitude entre o ciclo de modelação anterior e estas fases que aparecem recorrentemente na bibliografia sobre PL.E, mais uma vez, o ciclo de Kerr e Maki acresce da terceira etapa, que considera a componente didática que pode ser conferida ao modelo de um problema, de modo que este seja aplicável em sala de aula.

2.4. A Resolução de Problemas

Segundo Abrantes (1989), a resolução de problemas é o "motor do desenvolvimento da Matemática e da atividade matemática" (p.47). A procura de respostas a conjeturas ou a hipóteses, levantadas tanto por matemáticos como por não matemáticos, é o motor que alimenta o desenvolvimento da Matemática e da atividade profissional dos matemáticos. Essas conjeturas ou hipóteses têm na sua origem ou dão origem a problemas matemáticos. Estes, por sua vez, fomentam o desenvolvimento de técnicas e ferramentas matemáticas tendo em vista a sua resolução. Através da resolução de problemas pode-se promover a capacidade de pensar matemática. E o que é pensar matemática? Shoenfeld (1996, p. 68) define como "(a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter ferramentas do ofício para matematizar com sucesso".

A resolução de problemas pode então ser aplicada no ensino da Matemática para promover a oportunidade dos alunos "verem o mundo" numa perspetiva matemática e serve de bom pretexto para promover a aprendizagem de conteúdos e ferramentas matemáticos e consciencializar sobre a sua importância para a resolução dos mesmos e, mais abrangentemente, para a sociedade. Com efeito, o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) afirma:

> Resolver problemas não é apenas um objetivo de aprendizagem da Matemática, mas também um dos principais meios de a aprender. Os alunos devem ter oportunidades frequentes de formular, enfrentar e resolver problemas complexos que requerem uma quantidade significativa de esforço e devem ser encorajados a refletir sobre o seu pensamento (…). A resolução de problemas é uma parte que integra toda a aprendizagem da Matemática e, portanto, não deve ser uma parte isolada do programa de Matemática (…). Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares que envolvem a vida dos alunos ou o dia-a-dia escolar até aplicações que envolvem as ciências ou o mundo do trabalho. (pág. 52).

Os problemas servem vários objetivos de aprendizagem no ensino da Matemática conforme a sua utilização. Nesse sentido, o NCTM (2000) propõe que os alunos possam:

- construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;

> • resolver problemas que surgem de contextos matemáticos e de outros contextos;
> • aplicar e adaptar uma variedade de estratégias apropriadas para resolver problemas;
> • monitorizar e refletir sobre o processo de resolução de problemas matemáticos. (p. 52)

Compreende-se a ênfase que é dada à resolução de problemas no ensino da Matemática. Mas como se define um problema para a Matemática escolar? O NCTM (1991) afirma o seguinte:

> "um problema genuíno é uma situação na qual, para o indivíduo ou grupo em questão, uma ou mais estratégias precisam ainda de ser desenvolvidas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel." (p. 11)

Como abordar um problema de Matemática em contexto escolar? Como resposta esta questão, Polya (2003) propõe 4 fases para a resolução de problemas: *(1ª)* compreender o problema, *(2ª)* elaborar um plano, *(3ª)* implementar o plano, *(4ª)* rever o processo. Schoenfeld (1980) apresentou também um conjunto de fases para a resolução de problemas: analisar e compreender o problema, elaborar e planear a solução, explorar soluções para problemas difíceis, e verificar a solução. A sua proposta é semelhante à de Polya, mas inclui aspetos afetivos e descreve outras estratégias para problemas considerados mais difíceis. Para cada fase, os autores propõem estratégias gerais, independentes de um tópico, que podem auxiliar a compreensão de um problema e a mobilização eficiente de recursos para o resolver.

Para o que mais abaixo se apresenta, adotam-se os termos indicados por Wickelgren (1974), em *How To Solve Mathematical Problems*. Este autor afirma que um problema se pode considerar composto de três tipos de informação: informação relativa a dados, informação relativa a operações e informação relativa a objetivos. Define *dados* como um conjunto de expressões que carregam informação que se aceita como já fazendo parte do problema, isto é, englobam expressões que representam não só objetos, como também, factos, hipóteses, pressupostos, entre outros. Define *operações* como as ações que são permitidas realizar nos dados ou em expressões deles derivados por ações precedentes. Aos *objetivos* refere-se como as expressões finais do problema a que se desejam chegar. Define ainda *solução* de um problema como uma sequência de ações que produza uma expressão que especifique completamente os objetivos, isto é, o conjunto de operações que leve dos dados até ao objetivo. A solução é, portanto, uma classe que contém *(i)* uma especificação completa de dados, *(ii)* uma especificação completa de operações, *(iii)* uma especificação completa de objetivos.

Observe-se como esta definição de solução permite que um problema tenha mais que uma solução, isto é, pode existir mais que uma sequência de ações que produzam a especificação completa dos objetivos. Segundo o mesmo autor, a solução pode ser avaliada em correta ou incorreta e esta avaliação não é afetada pela natureza (completamente especificados, de especificação incompleta ou implicitamente especificados) dos objetivos de um dado problema.

Wickelgren (1974) distingue ainda em duas categorias os três elementos sobreditos que são os implicitamente especificados e os de especificação incompleta. A primeira ocorre quando dados, operações ou objetivos de um problema não estão explicitados no seu enunciado (por exemplo, quando é dado um tabuleiro de xadrez como dado de um problema não é indicado que este tem 64 quadrados), enquanto o segundo ocorre quando quem aborda o problema tem um certo grau de escolha nas possíveis expressões dos dados, operações ou objetivos. O autor indica que exemplos de problemas com especificação incompleta de dados ou operações são aqueles que "requerem a construção de algo a partir de um leque de possíveis dados e operações, mas em que há custos ou restrições ligadas à utilização desses dados ou operações" (p. 27). Quem aborda o problema tem que selecionar os dados e operações que satisfaçam as restrições do problema e o permitam alcançar o objetivo.

Tendo em conta as categorizações que formulou, e entendendo os problemas de otimização como "extensões naturais de problemas cujos dados ou operações acarretam custos" e que "pressupõe[m] descobrir-se o caminho para atingir o objetivo de minimizar algum custo ou maximizar algum bem" (p. 27), Wicklegren (1974) considera os problemas de otimização como problemas que apresentam uma especificação incompleta de dados e operações, uma vez que quem os aborda se confronta com dados e operações sujeitos a restrições do problema. Por vezes até tem que selecionar dados e operações, pois o enunciado do problema pode conter informação em excesso.

Mayer (1999) discute também a resolução de problemas e considera existirem duas grandes fases: representação do problema e resolução do problema. Na fase de representação do problema, o aluno utiliza o enunciado onde este está formulado para construir uma representação mental interna do problema. Na fase de resolução do problema, o aluno elabora e implementa um plano para solucionar o problema. Estas duas fases podem ainda ser decompostas em subprocessos. A primeira fase pode ser dividida nos subprocessos de tradução e de integração, sendo que o primeiro subprocesso envolve representar mentalmente as informações importantes do problema, enquanto o segundo envolve agrupar o conhecimento numa estrutura coerente que pode ser designada de modelo. A fase da resolução do problema pode ser dividida nos subprocessos de planeamento, execução e monitorização. O planeamento corresponde ao aluno elaborar um plano, a execução corresponde a implementar o plano por meio de uma ação, e a monitorização envolve o aluno prestar atenção e controlar do seu próprio processo cognitivo e ainda avaliar os efeitos do plano.

Dada a semelhança das fases anteriormente apresentadas, e a desnecessidade de uma heurística para a resolução de problemas mais difíceis, para o presente trabalho foco-me nas fases de Polya, tendo em consideração os termos de Wickelgren e as categorizações de Mayer. A primeira fase, compreender o problema, é muito importante para os alunos poderem desenvolver trabalho. Nesta, os alunos devem procurar perceber o que é pedido no problema, identificar o desconhecido, identificar os dados e as condições em que podem trabalhar para chegar aos objetivos (Polya, 2003). Para tal, podem seguir estratégias como elaborar desenhos, esquemas, diagramas ou tabelas, introduzir notação adequada, subdividir as condições do problema em partes mais simples de forma que possam ganhar compreensão sobre elas (Polya, 2003).

Esta fase de resolução de problemas corresponde ao subprocesso de tradução do problema (Mayer, 1999) e mostra, de certa forma, a relevância das primeiras três etapas do ciclo de modelação de Kerr e Maki (1979). Essas etapas funcionam como um filtro, fazendo chegar o problema aos alunos numa forma acessível para que possam abordá-lo sem se desmotivar, contudo desafiadora para que não se torne num exercício de aplicação de conhecimentos.

Na segunda fase de resolução de problemas de Polya (elaborar um plano), os alunos devem procurar por conexões entre os dados do problema e os objetivos, procurando por ideias e conhecimentos, e por relações entre eles, que possam integrar na resolução do problema. Ou seja, devem procurar por operações válidas para os dados e adequadas para os objetivos identificados no problema. Para isso, os alunos podem seguir estratégias como procurar por um problema análogo mais simples e confrontar o seu método de resolução com o problema que têm para resolver (Polya, 2003), ou subdividir o problema em casos particulares mais simples de resolver (Schoenfeld, 1980). Podem também procurar introduzir elementos auxiliares ao problema, podem reformulá-lo, ou procurar recolher informações pertinentes dos dados e das condições (Polya, 2003).

A esta fase correspondem os subprocessos de integração e planeamento (Mayer, 1999), o que motiva correspondê-la, por sua vez, à quarta etapa do ciclo de modelação matemática, pois esta etapa concretiza-se num modelo matemático resultante de relações que os alunos encontram entre os dados e é a partir dela que os alunos se devem munir de técnicas e instrumentos matemáticos para posteriormente abordar o modelo, sendo estes constituídos principalmente do método analítico e do gráfico.

A terceira fase de resolução de problemas (implementar o plano) corresponde à implementação das operações com a chegada aos objetivos do problema. Espera-se que os alunos executem os cálculos e/ou procedimentos planeados, isto é, a sequência de operações que se efetuam dos dados até aos objetivos, e que deles resulte a solução do problema. Nesta fase, Polya (2003) sugere que os alunos verifiquem a validade de cada passo de modo a não cometerem enganos na implementação das operações. Pode acontecer que os alunos encontrem alguma dificuldade no seu plano que não os permita avançar e, nessas alturas, poderão recorrer a estratégias, sugeridas por Schoenfeld, (1980) como substituir condições do problema por outras equivalentes, recombinar elementos do mesmo de forma diferente, ou reformular o problema por alteração da notação, argumentando por contradição ou assumindo a solução e deduzindo as propriedades que esta deve ter (inverter o sentido da resolução).

Esta fase corresponde ao subprocesso de execução na fase de resolução do problema (Mayer, 1999), o que motiva corresponder também à resolução do problema de PL, enquanto modelo matemático, por técnicas matemáticas e sua reinterpretação para a linguagem natural (quinta etapa do ciclo de modelação matemática de Kerr e Maki).

Na quarta fase de Polya (2003), os alunos devem verificar os resultados a que chegaram, se chegaram aos objetivos do problema, e verificar os argumentos que utilizaram. Ou seja, devem verificar a sua solução, analisando a validade das suas operações em relação aos dados e a sua adequação em relação aos objetivos do problema. Para tal, podem verificar se utilizam todos os dados fornecidos no problema (Schoenfeld, 1980), se as propriedades deduzidas dos dados são válidas, se a solução obedece às condições do problema.

A quarta fase inclui o subprocesso de monitorização na resolução de problemas (Mayer, 1999). Tendo em conta que um problema de PL apresenta especificação incompleta de dados e operações e os objetivos são completamente especificados (Wickelgren, 1974), a suposta solução é suscetível de dados e/ou operações forçadas aos objetivos ou operação inválidas ou inadequadas, sem que aqueles sejam afetados. Torna-se assim importante realizar a revisão da solução (sexta etapa do ciclo de Kerr e Maki).

A capacidade de resolver problemas pode ser catalisada se orientada por estratégias de resolução de problemas, e os problemas de PL não são exceção. Logicamente que se complementado de outras capacidades, o processo de resolução dos problemas pode tornar-se uma atividade menos árdua. E é nesse sentido que White (1996), após o estudo que realizou para a sua tese de mestrado, aponta três capacidades que considera determinantes para o sucesso dos alunos na resolução de problemas de PL:

1. a capacidade de compreender o enunciado dos problemas;
2. a capacidade de exprimir as variáveis e as restrições em linguagem matemática;
3. a capacidade de compreender letras como representantes de números, em vez de objetos.

2.5. Representações

Uma forma de trabalhar com conceitos matemáticos é através de representações, em particular, a transição entre representações é uma capacidade fundamental na modelação matemática. Menezes (2007) entende as representações como processos matemáticos. Define processo matemático como “tudo aquilo que permite trabalhar com esses conceitos [matemáticos]” (p. 1). Em Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2000), as representações são vistas não só como um processo no qual se captura “um conceito ou uma relação matemática sob alguma forma” (p. 67), mas também como um produto, “a própria forma” escolhida para representar esse conceito ou essa relação.

Neste estudo, querendo compreender as dificuldades manifestadas pelos alunos na formalização de problemas de PL, um dos focos principais é a representação como processo. Com efeito, a representação como processo é então vista como o percurso realizado para materializar os conceitos durante a atividade de resolução de problemas. Pretende-se perceber como é que os alunos chegam à formulação matemática, mais do que a própria escolha da forma da representação. Não se descura, contudo, de que a forma seja consequência do percurso feito pelo aluno.

Friedland e Tabach (2001) apresentam uma categorização das várias formas que a representação matemática pode assumir, identificando vantagens e desvantagens para cada uma delas:

a) *representação verbal* – constitui geralmente a primeira forma de apresentação de um problema e é necessária depois na interpretação dos resultados obtidos. Possibilita a conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e com o quotidiano. No entanto, esta pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e pode ser utilizada de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.

b) *representação numérica* – é uma representação que normalmente precede qualquer outro tipo de representação. As abordagens numéricas são importantes para a compreensão inicial de um problema e para a investigação de casos particulares, contudo, carece de generalidade, sendo por vezes uma ferramenta limitada.

c) *representação gráfica* – proporciona uma imagem clara de uma função real de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que preferem uma abordagem visual. No entanto, é influenciada por fatores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema.

d) *representação algébrica* – é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. É por vezes a única ferramenta para justificar ou demonstrar generalizações. Contudo, a utilização quase exclusiva de símbolos algébricos, pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto que representa e dificultar a interpretação dos resultados.

As representações acima referidas são representações que entram em jogo no tema da PL. Por exemplo, na formulação algébrica de um problema de PL, a representação mais frequentemente envolvida é a algébrica, pois é por meio de equações, inequações e funções (que envolvem objetos matemáticos como funções e variáveis, e símbolos como sinais de operações, de igual e sinais que estabelecem relações de ordem) que se traduz o enunciado do problema, apresentado na representação verbal.

Segundo Menezes (2007) "é através das representações que o professor toma conhecimento do modo de pensar dos alunos" (p. 1). As representações são um indicador do modo de pensar dos alunos e podem, portanto, ajudar a identificar e, num exercício de maior esforço, a compreender quais são as estratégias que os alunos adotam e onde residem as dificuldades relativas à formulação dos problemas de PL.

Em Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2000), as normas propostas para as representações são:

- criar e utilizar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- selecionar, aplicar e traduzir de entre as várias representações matemáticas para resolver problemas;
- utilizar representações para modelar e interpretar fenómenos, físicos, sociais e matemáticos. (p. 67)

Em PL, as várias representações apoiam a resolução dos seus problemas, que podem ser explorados em vários contextos de realidade, em problemas matemáticos, passando a sua resolução a depender unicamente da aplicação adequada de técnicas matemáticas que, por sua vez, envolvem outras representações.

2.6. Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Programação Linear

2.6.1. Dificuldades na resolução de problemas de PL

Na aplicação da Matemática a situações do mundo real, e particularizando para problemas de PL, podem ser consideradas três fases principais: a formulação algébrica do problema – que engloba a interpretação do enunciado e a sua tradução em linguagem matemática –, a resolução do problema matemático e a interpretação da solução para a situação real.

Neves (2011), na sua tese de mestrado, bem como Teixeira, Nascimento e Monteiro (2011) no seu artigo, referem que a maior dificuldade dos alunos na resolução de problemas de PL se encontra ao nível da interpretação de enunciados. Neves (2011) identificou uma outra dificuldade na resolução de problemas de PL no caso em que a solução ótima não é única. Nestes casos, os alunos, de duas turmas do 11.º ano de escolaridade, "na sua grande maioria" não conseguem identificar todas as soluções "e limitam-se apenas a apresentar as (…) que correspondem aos vértices do polígono [região admissível]" (p.79). A autora verificou que esta dificuldade foi mais frequente nos alunos que recorreram ao método analítico para resolver o problema. A autora, averiguou se os conhecimentos adquiridos sobre PL pelos alunos se refletiram numa tarefa que propôs e concluiu que a maioria é capaz de "resolver tarefas simples de Programação Linear. (…) Quase todos os alunos (…) sabem (…) definir as variáveis de decisão, identificar a função objectivo, as restrições, representar a região admissível e determinar as respetivas soluções óptimas" (p. 79). A autora verificou, ainda, que os alunos que não conseguiram identificar as restrições "foi porque não souberam interpretar o enunciado, ou seja, não souberam traduzir para linguagem matemática os dados fornecidos no enunciado" (p. 54), e que os que não conseguiram representar a região admissível "foi porque não souberam traçar no gráfico as retas correspondentes às restrições obtidas" (p. 56).

Por sua vez, Dias (2011) na sua tese faz um pequeno levantamento das dificuldades de alunos do 12.º ano do ensino profissional relativas a uma tarefa que envolvia a resolução de um problema de PL. Nela refere que apesar de algumas dificuldades "em representar graficamente equações e inequações lineares e de não interpretarem a solução em contexto real, a fase em que os alunos apresentaram maior dificuldade, foi na tradução algébrica do enunciado do problema, ou seja, na formulação matemática do problema" (p. 73).

Atentando as dificuldades enunciadas, encontra-se uma relação muito próxima entre elas. De facto, se os alunos não conseguirem interpretar um dado enunciado, terão dificuldades em traduzi-lo para a linguagem matemática. No entanto, saber interpretar o enunciado de um problema de PL não previne as dificuldades na sua tradução. Um aluno pode conseguir compreender um dado enunciado de um problema de PL e não conseguir expressar em variáveis, equações e inequações, as informações nele presentes.

Da análise da tarefa que propôs, Dias (2011) constatou que a maioria dos alunos compreendeu o enunciado do problema proposto. Já na formulação algébrica do problema, através do preenchimento de uma tabela proposta no enunciado, constatou que quase metade da turma não conseguiu realizar o preenchimento corretamente, sendo que destes, uns completam a tabela apenas com os dados do enunciado, não tendo em conta as variáveis que são dadas por x e y, e outros identificam incorretamente os coeficientes.

Relativamente à representação gráfica da região admissível, à determinação e interpretação da solução ótima, também apenas metade da turma apresentou uma resolução correta do problema, sendo que das incorretas, há alunos que não representam corretamente as equações no referencial cartesiano, por "terem utilizado de forma incorreta a calculadora gráfica para determinar a região admissível" (p. 68), e outros apresentam erros de cálculo. Das respostas incompletas, um aluno não determinou a solução ótima e outros não interpretaram a solução ótima que obtiveram.

2.6.2. Erros e dificuldades na tradução entre representações

As dificuldades dos alunos na tradução entre várias representações matemáticas, segundo Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011), podem ser organizadas em duas dimensões: dificuldades por fatores centrados nos alunos e por fatores centrados no conteúdo. No que concerne à primeira dimensão, um foco de investigação poderá ser as ações que os alunos tomam na realização das traduções e, dado haver ações diferentes para traduções diferentes, as dificuldades também diferem conforme o caso. Nesta dimensão, os alunos utilizam frequentemente traduções duais, isto é, traduções que se iniciam numa representação e terminam noutra e isso pode trazer dificuldades na aplicação dalguns tipos de representações (Bossé, et al., 2011). Na dimensão dos fatores centrados no conteúdo, tem-se que algumas representações requerem técnicas de interpretação diferentes de outras, o que pode levar a diferentes níveis de dificuldade. Da mesma forma, algumas traduções são inerentemente mais complexas, requerendo maior compreensão dos conceitos envolvidos que outros, e outros requerem um grande número de passos no processo de tradução (Bossé et al.,2011).

Neste estudo irei focar as dificuldades com que os alunos se deparam na resolução de problemas de PL, pelo que tem interesse analisar as dificuldades provenientes tanto de fatores centrados nas atividades e produtos desenvolvidos pelos alunos como de fatores centrados no conteúdo da temática da PL.

Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011) categorizam os erros cometidos pelos alunos na tradução de representações em duas dimensões: na tradução entre representações numérica (que inclui a tabelar), algébrica (ou simbólica) e gráfica, e na tradução de e para representações verbais. Relativamente à primeira dimensão, na revisão de literatura que fazem, os autores apresentam as seguintes categorias para os erros mais frequentemente cometidos em traduções: erros de manipulação, onde os alunos resolvem problemas aritméticos ou algébricos incorretamente ou utilizam o nome de variáveis incorretas, e erros conceptuais. Nestes últimos, os alunos ou introduzem uma condição incorreta na resolução de um problema, que os autores designam erro de comissão, ou se esquecem de considerar uma condição, designado por erro de omissão. Adu-Gyamfi et al. (citado de Bossé et al., 2011) numa investigação tipifica os erros mais comuns dos alunos em traduções como erros de interpretação, de implementação e de preservação. O primeiro ocorre quando os alunos atribuem, caracterizam ou exemplificam incorretamente atributos da representação fonte ou alvo. A segunda ocorre quando denotam incorretamente passos, cálculos e algoritmos aplicados no processo de tradução de uma representação para outra. A terceira, quando os alunos identificam bem alguns atributos e propriedades de uma representação, mas traduzem mal para a outra.

Relativamente à segunda dimensão de erros (na tradução de e para representações verbais), Bossé et al. (2011) referem dois tipos de erros (identificados também em Clement, Lochhead & Monk, 1981; Clement, 1982; Stevens & Palocsay, 2004): os de processo de correspondência de ordem das palavras e os de processo de comparação estática. No primeiro, os alunos assumem que a ordem por que as palavras-chave aparecem num problema corresponde à ordem por que os símbolos aparecem numa determinada representação algébrica. No segundo, os alunos compreendem o significado da representação algébrica, mas não expressam corretamente essa relação em linguagem corrente, ou vice-versa, iludidos no entanto de que a relação que representam é a correta.

As dificuldades dos alunos nas representações podem ainda ser vistas segundo estas três dimensões (Bossé et al., 2011): factos omissos, factos de confusão e atributos de densidade. Os factos omissos ocorrem quando representações matemáticas contêm alguma informação particular em falta em certos contextos. Existem contudo representações cuja alteração da forma altera os factos omitidos: as equações podem ser reescritas, as linhas das tabelas podem ser reordenadas, as representações verbais podem ser reformuladas, pode-se alterar a janela (nas calculadoras) dos gráficos para focar regiões particulares.

Os factos de confusão, como o próprio nome indica, são os factos presentes numa representação que podem constituir uma fonte de confusão para a tradução pretendida. Bossé et al. (2011) afirmam que quanto maior o número destes tipos de factos numa representação, maior a dificuldade dos alunos em interpretar a representação dada e realizar a tradução para outra representação.

Na terceira dimensão, atributos de densidade, considera-se quanta informação uma representação fornece e quanto esforço é necessário para obter mais informação da mesma representação. Os mesmos autores indicam que as representações verbal e em tabela são representações de baixa densidade, dado de que fornecem pouca informação e obter informações adicionais deles pode requerer muito trabalho. Já as representações gráficas e na forma algébrica são as de maior densidade. Esta dimensão pode conferir maior ou menor dificuldade para os alunos, conforme a representação em que esteja a ser trabalhada e/ou a sua conjugação com as dimensões anteriores.

2.6.3. Obstáculos cognitivos na PL

Antes de referir as próximas dificuldades, introduzo um termo cunhado por Herscovics (1989) – obstáculo cognitivo. Este termo designa duas situações que podem ocorrer durante a aprendizagem da Matemática: *(i)* o aluno tenta assimilar nova informação sobre estruturas mentais existentes e válidas para um domínio, mas inapropriadas para o novo; *(ii)* o aluno não tem estruturas mentais que o permitam assimilar o novo conhecimento, devido à estrutura inerente a este.

White (1995, 1996), fazendo uso desse termo, identifica sete obstáculos cognitivos que considera relevantes no ensino-aprendizagem da PL. A identificação desses obstáculos deriva de duas unidades experimentais de ensino que realizou com alunos do 12.º ano, nos anos de 1993 e 1994. Esses obstáculos são:

1. a incapacidade em reconhecer variáveis e as suas unidades de medida;
2. a incapacidade de representar variáveis em linguagem matemática;
3. a falta de compreensão de termos de desigualdade, como “mais do que”;
4. a dificuldade em representar restrições em linguagem matemática;

5. a noção incorreta de que letras representam, abreviadamente, os objetos, como por exemplo “5c” significar “5 carros”;
6. a dificuldade em esboçar as representações gráficas das equações do tipo $x = k$ ou $y = k$, com k constante;
7. e a noção incorreta de que o símbolo de desigualdade $<$ significa que a região representada pela inequação em questão é o semiplano abaixo da reta que o delimita.

White (1995, 1996), preparando-se para lecionar a unidade em 1994, procurou munir-se de modos de superar cada um dos obstáculos cognitivos que identificou. A seguir referem-se as sugestões de resolução que encontrou para cada obstáculo, pela ordem acima enumerada. Para o primeiro obstáculo cognitivo encontrou que respondendo à questão, “Que números posso eu alterar?”, ajude o aluno a identificar as variáveis de decisão. Para o segundo obstáculo, bem como para o quinto, o autor refere MacGregor (1986) que sugere a utilização de x e y como variáveis de decisão, e não as iniciais dos objetos quantificáveis, para não as confundir com abreviações, e a utilização da expressão “o número de” para denotar o significado de cada variável. Para o terceiro obstáculo, encontrou que o professor na lecionação trabalhe a tradução matemática de expressões como “mais do que” ou “ no mínimo”. Para o obstáculo cognitivo 4, considerou que se complete a expressão anterior, como por exemplo “O número de gelados vendidos por dia é superior a 30”, introduzindo assim as variáveis de decisão nas restrições. Para sexto obstáculo, encontrou a proposta de que marcando vários pontos com a mesma abcissa ou com a mesma ordenada, poderá ajudar o aluno a entender que a equação $x = k$ ou $y = k$, para k constante, é uma reta vertical ou horizontal, respetivamente. Para o último obstáculo, White não encontrou nenhuma proposta de resolução dessa dificuldade, dado a escassa literatura relativa a inequações e suas representações gráficas.

Após os seus estudos, White (1995, 1996) verifica que os obstáculos que mais persistiram após a sua lecionação foram os obstáculos 1, 4, 5 e 7. Os restantes foram remediados com sucesso, embora para alguns não tenha evidências de que tenham sido resolvidos pelas propostas referidas acima. O autor obtém evidências de que para os alunos cujo obstáculo cognitivo 2 persistiu, tornou-se difícil a identificação de restrições em problemas de PL (obstáculo 4). Para aqueles cujo obstáculo cognitivo 4 persistiu, o autor identificou que esses alunos possam ter desenvolvido conceções erradas da ideia de restrição, a saber: restrição como conjunto de soluções admissíveis de uma variável de decisão ou como o maior valor que uma variável pode tomar, ou que uma restrição deve ser expressa matematicamente como uma igualdade.

Na tentativa de remediar o obstáculo cognitivo 7, White (1996) durante a lecionação da unidade de PL apontou casos em que o raciocínio àquele associado falhava. Em alternativa, sugeriu aquilo a que designou o “teste do ponto” – escolhe-se um ponto do plano e verifica-se se este respeita ou não as restrições; dessa forma se determina a região plana delimitada pelas restrições. Contudo, tem dificuldade em explicar a resiliência dos alunos em resolver este obstáculo.

Capítulo 3 – Unidade de Ensino

3.1. Contexto Escolar

A intervenção letiva que suporta este estudo foi realizada na Escola Secundária da Ramada, no concelho de Odivelas. Esta escola entrou em funcionamento em 1980, tendo completado os seus 34 anos em novembro de 2014.

A escola contém nas suas infraestruturas um moinho, recuperado e reabilitado em 1996, designado Moinho das Covas, que é uma referência no concelho; oito pavilhões e uma área exterior considerável. Está também equipada de um pavilhão gimnodesportivo, zonas de jardim e a maioria das salas de aula têm um computador e projetor. A escola já viveu momentos significativos, nomeadamente:

- Participação no Projecto Nónio, o qual permitiu um investimento considerável em Tecnologias da Informação e a respectiva formação de um elevado número de docentes;
- Ser uma das 30 escolas portuguesas englobadas na Rede Europeia de Escolas Inovadoras – *European Schoolnet*;
- Ser a escola que representou Portugal nos três Conselhos de Ministros da Juventude para o Ambiente, organizados pela Direcção-Geral do Ambiente da Comissão Europeia em Bruxelas.
- Participação no Projeto do Ministério da Educação “Mais Sucesso Escolar” (2009), com uma equipe coordenada pela professora cooperante Inês Campos.

Os efeitos dos dois projetos acima referidos ainda se fazem sentir na escola. O primeiro permitiu que todas as salas de aula estejam equipadas com um computador e um projetor, bem como as salas de informática, a biblioteca e as salas de estudo que contam, ainda com quadros interativos. O segundo contribuiu para criar um ambiente de cooperação entre professores, mesmo entre disciplinas diferentes, que se mantém em parte fruto do trabalho realizado em conjunto no projeto “Mais Sucesso Escolar”.

A turma do 11º ano de escolaridade, onde realizei a intervenção, concluiu o corrente ano letivo 2014/2015 com 24 alunos, sendo 7 do sexo feminino e 17 do sexo masculino. As idades estão compreendidas entre os 15 e os 17 anos, distribuídas da seguinte forma:

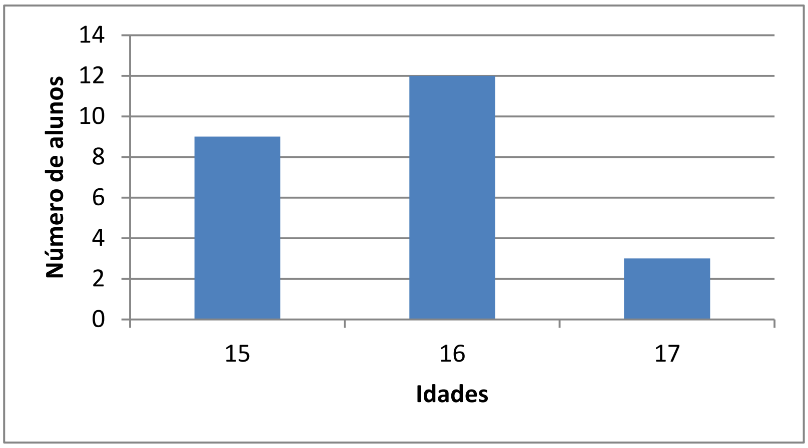


Figura 3.1.1: Distribuição da idade dos alunos da turma

Como já referido, a professora cooperante e titular da turma é a professora Inês Campos. A turma iniciou o ano com os vinte e dois alunos que transitaram da turma do 10.º ano e dois alunos repetentes, um dos quais, no início do 3.º período, anulou a disciplina, não chegando a participar neste estudo. Uma outra aluna é assistente (não está inscrita na disciplina), pelo que a sua participação não consta nas estatísticas nesta secção apresentadas. Contudo, esta participa no estudo realizado na turma. No 2.º período do corrente ano letivo, entrou para a turma uma aluna, vinda do Brasil, numa situação especial: a sua formação em Matemática está muito desfasada da formação necessária à frequência nesta disciplina no 11º ano de escolaridade.

No 1.º Período do corrente ano letivo (2014/2015), a classificação média da turma no 1.º período foi de 15 valores, sendo a classificação mais baixa 8 valores e a mais alta 18 valores. Como se pode observar na figura 3.2, a percentagem de classificações positivas foi muito elevada, apenas um aluno da turma (4%) obteve classificação negativa. É de realçar, ainda, que a percentagem de alunos com classificação igual ou superior a 14 valores é elevada, 80%.

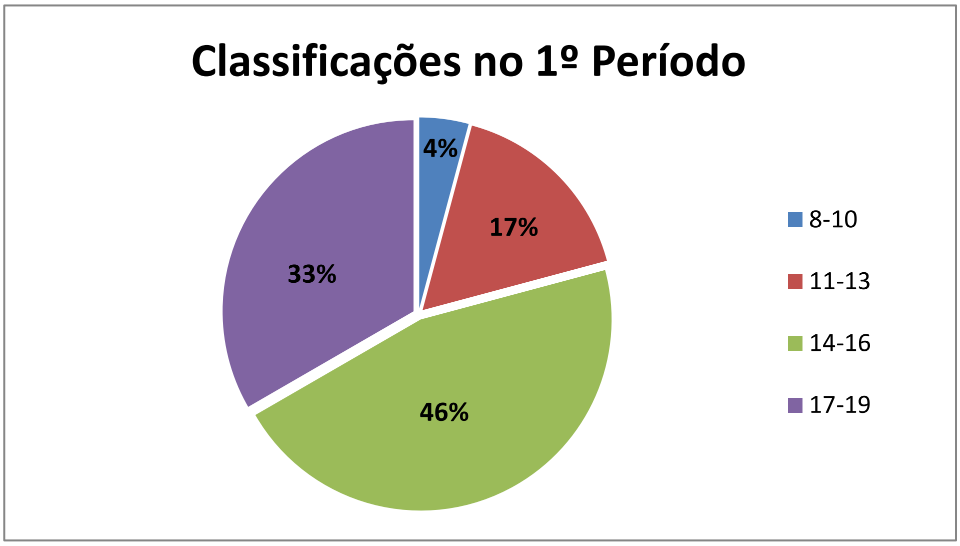


Figura 3.1.2: Distribuição das classificações da turma no final do 1.º período

No 2.º período, a classificação média baixou ligeiramente para 14,3, sendo a classificação mais baixa de 5 valores e a mais elevada de 19 valores. Esta ligeira alteração nas percentagens deve-se à chegada da nova aluna na turma.

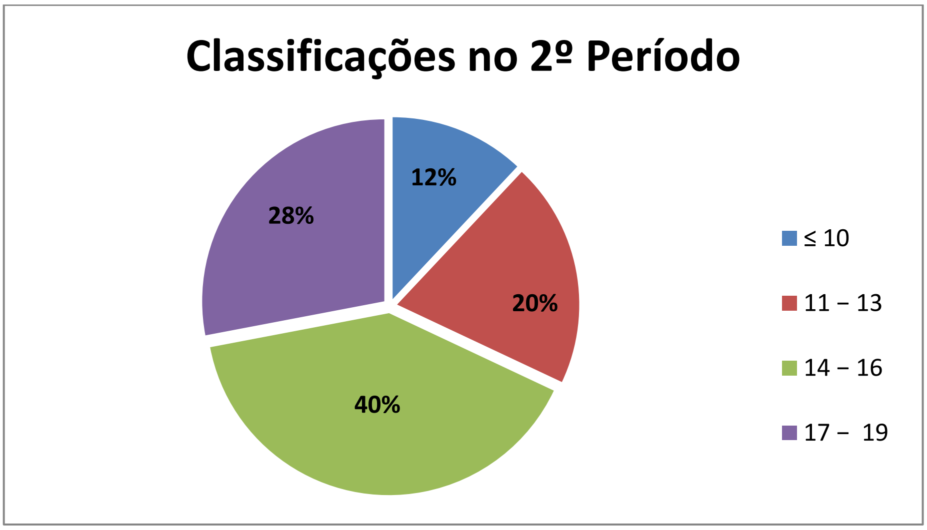


Figura 3.1.3: Distribuição das classificações da turma no final do 2.º período

Nesse período, as classificações inferiores ou iguais a 10 valores rondam os 12%, correspondendo a 2 alunos com negativa, um dos quais o que anulou a disciplina, e a um terceiro com classificação 10. As restantes percentagens correspondem a 22 alunos da turma. Apesar das mudanças que tem sofrido na sua constituição, esta pequena análise mostra que a turma mantém o nível de desempenho geral e consistência nos resultados.

Pela observação, ao longo dos três períodos, da dinâmica da turma em sala de aula e em concordância com a opinião da professora cooperante, ela apresenta um bom nível de participação, participam ativamente nas discussões coletivas para questionar afirmações de colegas, pedir esclarecimento de afirmações ou contribuir para a discussão.

A maioria dos alunos desta turma, nomeadamente rapazes, não aceitam uma resposta (ou um argumento ou uma justificação) sem a compreender. Interrogam as vezes que entenderem necessárias, e conforme a disponibilidade da professora na gestão da aula, até compreenderem os novos conceitos ou os raciocínios envolvidos em determinadas situações. Igualmente, não recebem definições e procedimentos de cálculo sem, pelo menos, perceberem o que motiva a que determinada definição ou procedimento seja como tal.

A predominância de rapazes faz-se sentir no comportamento da turma. As raparigas da turma são menos questionadoras, são mais práticas, mas também mais reservadas na participação. Contudo, é uma turma que aceita bem as diferenças de personalidade dos seus elementos, respeitam a expressão individual de cada um.

Há cerca de três alunos que são mais participativos e que, quando não participam, sabem respeitar a intervenção dos colegas. Os casos de desempenho mais baixo nesta turma, à exceção da menina transferida, são de alunos com um ritmo de trabalho mais lento em relação à maioria, são também reservados e evitam expressar as suas dúvidas publicamente e, poucas vezes chamam o professor para esclarecer dúvidas particularmente.

No cômputo geral, os alunos demonstram bom comportamento, valores e atitudes. Trabalham regularmente a pares, e estão bem habituados ao trabalho autónomo.

3.2. Conceitos matemáticos

O que é a Programação Linear

Como uma definição mais lata, poder-se-á considerar a afirmação de Tavares, Oliveira, Themido e Correia, (1996) quando afirmam que a expressão Programação Linear se justifica pelo seu objetivo central em "estabelecer os «programas» de ação mais aconselháveis para as operações complexas em estudo no campo dos sistemas económicos, de produção industrial ou das intervenções militares". Acrescentam ainda que esses "«programas» deveriam incluir a lista de atividades a desenvolver, a sua sequência, a sua calendarização, os recursos a afetar". Esta definição apoia-se nas aplicações práticas que estão na génese dos primeiros conceitos desenvolvidos em PL.

Numa perspetiva mais matemática, poder-se-á considerar como definição o que afirmam Hillier e Lieberman (2010):

> «A Programação Linear utiliza um modelo matemático para descrever o problema em questão. O adjetivo *linear* significa que todas as funções matemáticas no modelo são *lineares*. A palavra *programação* não se refere a programação de computadores, antes é essencialmente um sinónimo para *planeamento*. Assim, a PL envolve o *planeamento de atividades* para obter um resultado otimal, isto é, um resultado, de entre várias alternativas possíveis, que alcança da melhor forma o objetivo específico. De facto, qualquer problema cujo modelo matemático se ajusta ao formato genérico de um modelo de PL é um problema de PL.» (pág. 23)

A primeira parte desta definição, presente nas três primeiras frases, disseca detalhadamente o significado matemático da expressão que dá o nome da PL. A segunda, presente nas duas últimas frases, vai ao encontro, ainda que mais geral, da definição anterior. Uma característica muito própria da PL é que o contexto matemático não se separa do contexto da realidade que modela, pelo que as duas definições apresentadas estão intimamente interligadas.

<u>Um modelo genérico de um problema de PL</u>

De que formato falam Hillier e Lieberman (2010) quando, na definição acima referida, mencionam «o formato genérico de um problema de PL»? Um problema de PL apresenta uma forma canónica que envolve uma função de várias variáveis (função objetivo) que se pretende otimizar (maximizar ou minimizar) e um sistema de muitas equações e/ou inequações (restrições).

Ao nível do Ensino Secundário, os problemas de PL envolvem apenas duas variáveis e até cinco restrições, usualmente sob a forma de inequações. A seguir, apresenta-se um modelo genérico a duas variáveis e cinco restrições para um problema de PL para aquele nível de ensino.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min/Max } F(x,y) = A_1x + A_2y && (f.o.)\\
&B_1x + B_2y \leq E_1 && (R_1)\\
&C_1x + C_2y \leq E_2 && (R_2)\\
&D_1x + D_2y \leq E_3 && (R_3)\\
&x \geq 0 && (R_4)\\
&y \geq 0 && (R_5)
\end{aligned}
$$

As variáveis x e y por vezes designam-se por **variáveis de decisão**, representando as incógnitas do problema às quais se associam as decisões a tomar. A função F designa-se por **função objetivo** ($f.o.$) e é a função a que se associa o objetivo de a otimizar, isto é, **maximizar** ou **minimizar** o seu valor. Esse valor representa uma medida da vantagem ou da desvantagem atribuída pela decisão a cada solução do problema. Otimizar F consiste, portanto, em determinar o par $(x\ ,\ y)$ para o qual F toma o valor máximo ou mínimo.

As inequações R_1 a R_5 designam-se por **restrições das variáveis** e são condições impostas às variáveis resultantes do contexto do problema. Observe-se em particular as restrições R_4 e R_5: muitas vezes as variáveis de decisão representam quantidades não negativas, como são níveis de atividade (muitas vezes medidos em termos de tempo), utilização de recursos (número de trabalhadores ou de máquinas...) ou quantidades de recursos transportadas. As restrições R_1 a R_5 podem ser representadas graficamente. Considerando-as como a conjunção de condições, a sua interseção define um domínio plano que contém o conjunto de todos os pontos que satisfazem as restrições, designado por **região admissível** ou **domínio de validade**. Os pontos que satisfazem todas as restrições designam-se por **soluções admissíveis**, sendo candidatos à solução que otimiza a função objetivo, a **solução ótima**.

Resolver um problema de PL

Tome-se como exemplo o modelo sobredito. Para resolver um problema de PL consideram-se as seguintes etapas:

I. Analisar os dados, identificando e definindo as variáveis de decisão (x e y):

x representa a quantidade de um recurso

y representa a quantidade de outro recurso

II. Identificar o objetivo e a função objetivo:

Conforme o problema o objetivo será maximizar ou minimizar algo (por exemplo, o lucro ou a quantidade de recurso a ser transportado). Associado ao objetivo está a função objetivo ($f.o.$), a qual é mais facilmente identificada após definidas as variáveis de decisão.

III. Organizar os dados (usualmente, em tabela):

Recurso	Quantidade de Recurso utilizado por unidade na Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Contribuição do Recurso Para F
x	B_1x	C_1x	D_1x	A_1x
y	B_2y	C_2x	D_2y	A_2y
Total	$B_1x + B_2y$	$C_1x + C_2y$	$D_1x + D_2y$	$A_1x + A_2y$
Quantidade de Recurso disponível	E_1	E_2	E_3	

Tabela I: Organização dos dados em tabela, adaptada de Hillier e Lieberman (2010)

Existem várias formas de organizar os dados e usualmente mais simplificadas. Nesta apresenta-se uma organização e tabela que condensa todas as informações contidas no problema do modelo genérico anterior. Observe-se como, uma vez definida a função objetivo na etapa anterior, a terceira coluna é desnecessária.

IV. Identificar as restrições:

A quantidade total de recursos utilizados numa dada atividade não pode exceder a quantidade de recursos disponível para essa atividade. Daí que resultem restrições como R_1, R_2 e R_3. Como já foi mencionado, R_4 e R_5 resultam da não negatividade das quantidades dos recursos considerados, pelo que se podem designar estas por **restrições de não negatividade**.

V. **Representar graficamente as restrições, destacando a região admissível:**

Exemplo:

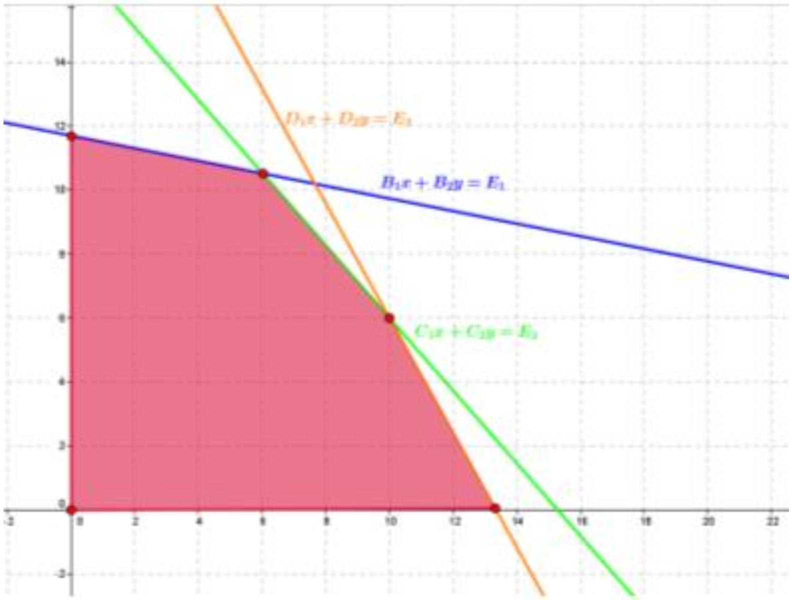


Figura 3.2.1: Representação gráfica de uma região admissível

A região admissível de um problema de PL forma o que se designa por **conjunto convexo** – um conjunto tal que o segmento de reta que una quaisquer dois pontos desse conjunto está contido nele. Este resultado permite concluir-se que no caso de existir mais que uma solução admissível, existirá um número infinito de soluções admissíveis.

VI. **Determinar a solução ótima:**

A determinação da solução ótima pode ser realizada segundo dois métodos: o **analítico** ou o **gráfico**.

Para qualquer dos métodos, é preciso primeiro considerar o seguinte teorema:

Teorema Fundamental da PL:

> Seja S a região admissível para um problema de PL e seja $F(x,y) = ax + by$ a função objetivo.
> Se S é limitada, então F tem máximo e mínimo em S e cada um destes ocorre pelo menos num dos vértices de S.
> Se S é não limitada, então o valor máximo ou mínimo de F pode não existir. Contudo, se existir, ocorre pelo menos num vértice de S.

É preciso também considerar dois tipos de região admissível. A região admissível apresentada na figura 3.2.1 é um exemplo de uma **região limitada**. Um exemplo de uma **região não limitada** é o da figura 3.2.2:

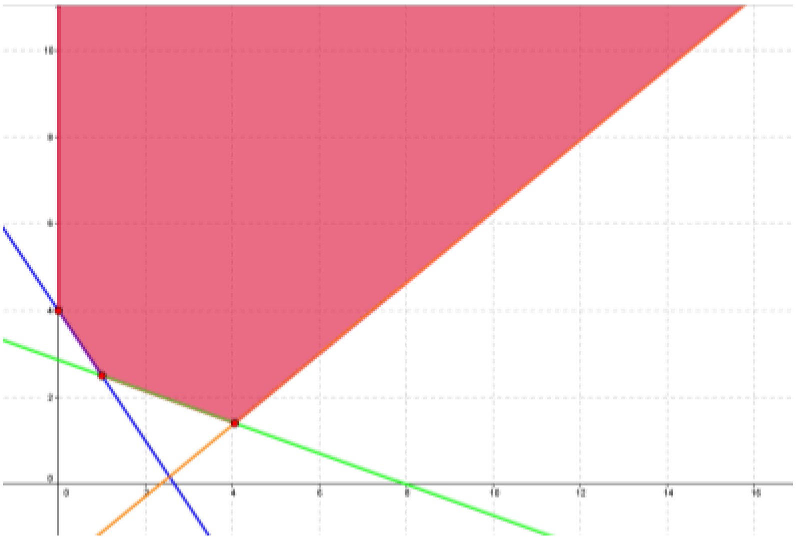


Figura 3.2.2: Representação gráfica de uma região admissível não limitada

<u>Método gráfico</u>

Neste método de resolução representa-se graficamente a região admissível e também algumas retas duma família de retas da forma $F(x, y) = k$, sendo F a função objetivo e$k \in \mathbb{R}$. Estas retas, designadas por **retas de nível $\boldsymbol{k}$** indicam os pontos do plano em que a função objetivo toma o valor k.

Para o caso em que a região admissível é limitada: pelo teorema enunciado, esta função toma o máximo ou o mínimo num vértice da região admissível. Traça-se, então, a reta de nível 0 como referência e traçam-se, com o auxílio da régua e do esquadro, retas paralelas à anterior que contenham os vértices da região admissível. A reta com maior ou menor valor de k é aquela que contém a solução ótima do problema.

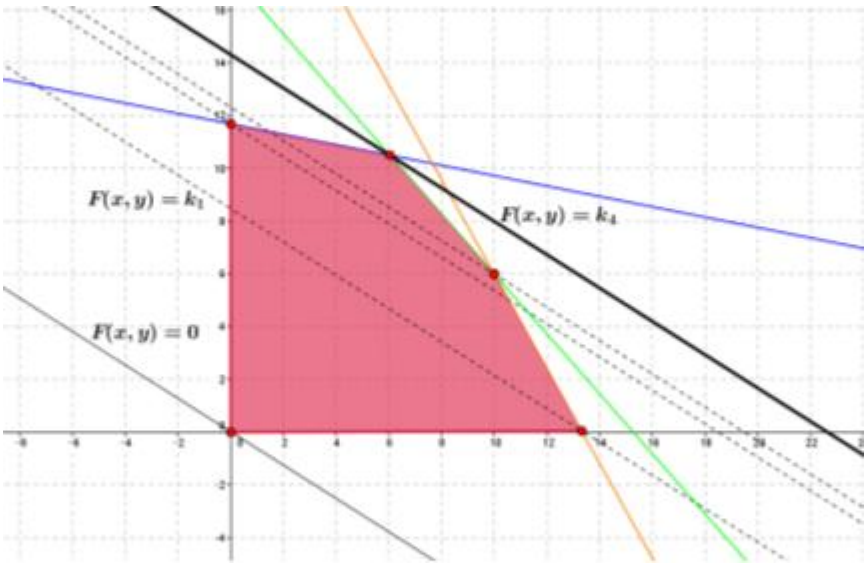


Figura 3.2.3: Região admissível em uma f.o. contém um vértice como solução

Existe também a situação em que todos os pontos de um segmento de reta – uma aresta do polígono convexo como o acima representado – são solução do problema. Isto é, se dois vértices são simultaneamente soluções ótimas, então qualquer ponto do segmento de reta por eles definido é também uma solução ótima, como se apresenta na figura 3.2.4.

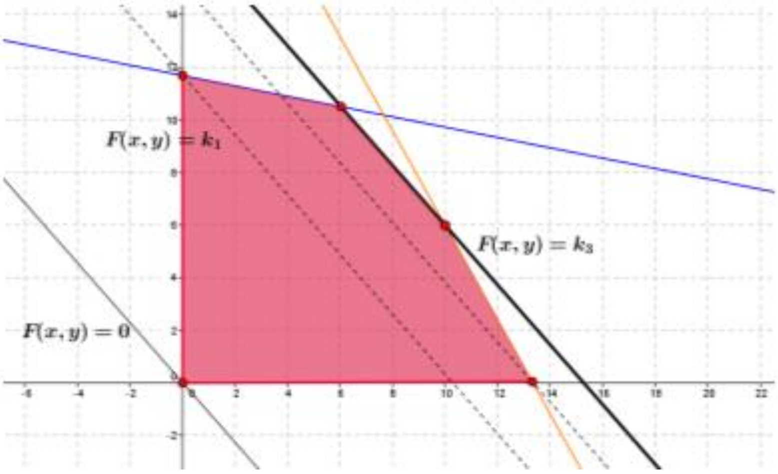


Figura 3.2.4: Região admissível em que uma f.o. contém um segmento de reta como solução

Procede-se de modo análogo, para o caso em que a região admissível é não limitada.

Há ainda a situação em que, se existir solução, existe numa infinidade de pontos pertencentes a uma semirreta contida na região admissível, que são solução do problema.

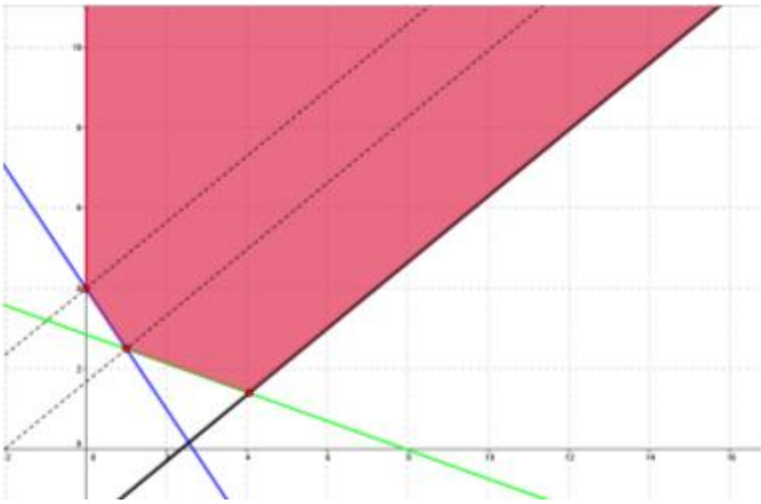


Figura 3.2.5: Região admissível em que uma f.o. contém uma semirreta como solução

A seguir, na figura 3.2.6, apresenta-se um exemplo em que, para uma função objetivo considerada, não existe solução ótima.

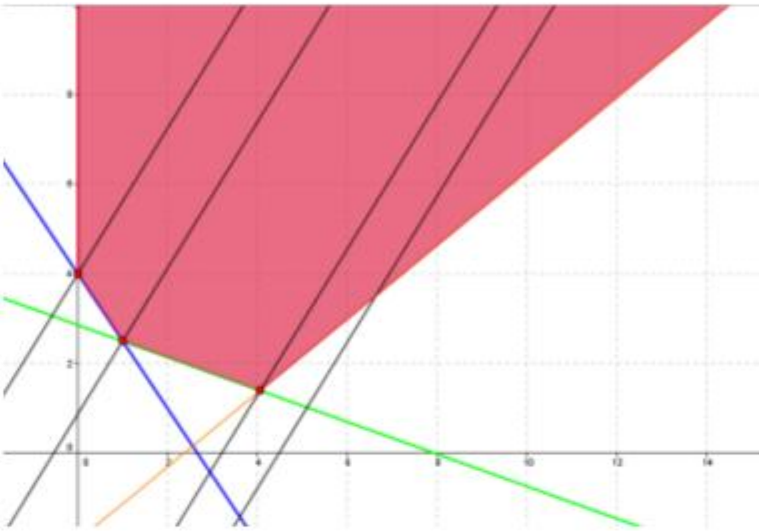


Figura 3.2.6: Região admissível em que uma f.o. não contém solução

<u>Método analítico</u>

Caso 1) Região limitada

Determinam-se as coordenadas dos vértices, sabendo que são os pontos de interseção das retas originadas pelas restrições, duas a duas. Substituem-se as coordenadas de cada vértice na função objetivo e escolhe-se como solução ótima aquela para a qual se obtiver o maior ou o menor valor de $F(x\,,y)$, conforme o objetivo seja maximizar ou minimizar, respetivamente.

Existe também a situação em que todos os pontos de um segmento de reta – uma aresta da região limitada na figura 3.2.1 – são solução ótima do problema.

Caso 2) Região não limitada

A existir uma solução, esta ocorre num dos vértices. Procede-se então de modo análogo ao caso anterior.

Existem ainda situações em que, se existir solução, existe numa infinidade soluções que são pontos pertencentes a uma semirreta contida na região admissível.

3.3. Ancoragem no programa e planificação

No ano de 2013 ocorreu a alteração do programa de matemática para o Ensino Básico, estando agora em vigor o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013). No entanto, a turma que o presente relatório trata estudou com o programa anterior, o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007.

O programa de Matemática A do 11.º ano (ME, 2001b) integra três temas: Geometria no Plano e no Espaço II, Introdução ao Cálculo Diferencial I (Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada) e Sucessões Reais. Para o tema da Geometria, o programa prevê 30 aulas de 90 minutos (o equivalente a 10 semanas).

A unidade lecionada corresponde a uma subunidade de ensino completa, a última do tema Geometria no Plano e no Espaço II a ser abordada – Programação Linear (PL). Dada esta temática estar enquadrada em Geometria, o programa propõe o estudo de domínios planos, fazendo a interpretação geométrica das condições que dão origem a esses domínios planos. A PL sucede o estudo da interseção de planos, formalizados pela resolução de sistemas de equações, e a sua interpretação geométrica, e o estudo da posição relativa entre planos e planos e retas.

Os conteúdos principais das aulas lecionadas e que fazem parte desta unidade de ensino foram: a formulação algébrica de enunciados em linguagem natural através da definição de variáveis e identificação de sistemas de inequações lineares, representação gráfica e interpretação geométrica de sistemas de inequações lineares e o efeito da alteração do sistema na sua representação geométrica, e determinação e interpretação de soluções de sistemas de inequações. Transversais a estes conteúdos estiveram sempre os conceitos de PL, o que levou ainda a uma abordagem intuitiva da representação gráfica de família de funções lineares de duas variáveis e a sua conexão com a representação gráfica de um sistema de inequações, para obter a melhor solução de um problema de PL.

O uso da tecnologia, um tema transversal ao programa de Matemática A (ME, 2001a), também esteve presente na lecionação das aulas. As tarefas aplicadas nas aulas davam oportunidade aos alunos de utilizarem a calculadora gráfica para auxiliarem ou verificarem a sua representação gráfica de um dado sistema de inequações ou a determinação de coordenadas de pontos de interseção de duas retas (vértices do domínio plano). Algumas das discussões realizadas após a exploração de tarefas foram apoiadas em diapositivos em PowerPoint e animações em GeoGebra.

Por razões de gestão escolar, a lecionação da PL foi realizada no início do 3.º período. Assim, esta decorreu de 16 a 24 de abril de 2015, em 5 blocos de 90 minutos, conforme o planeamento apresentado na tabela seguinte:

Aula	Tópico	Objetivos específicos
16 de abril	Introdução à Programação Linear	• Revisão de conhecimentos essenciais ao estudo da PL – Tarefa 1 • Exploração de um problema simples introdutório aos conceitos de PL – Tarefa 2
17 de abril	Introdução aos conceitos de Programação Linear	• Discussão de um problema simples introdutório aos conceitos de PL – Tarefa 2 • Reconhecer um problema de PL • Introdução aos conceitos associados à PL • Fases de resolução de um problema de PL
21 de abril	Resolução de problemas de Programação Linear: método analítico e método gráfico	• Reconhecer um problema de PL • Resolução de um problema de PL pelos métodos analítico e gráfico – Tarefa 3
23 de abril	Programação Linear	• Exploração do tipo de soluções de um problema de PL e tipo de regiões admissíveis – Tarefa 4 • Reconhecer que funções objetivo diferentes podem admitir soluções diferentes para uma mesma região admissível • Interpretar à luz do enunciado o modelo matemático de problemas de PL – Tarefa 5
24 de abril	Resolução de problemas de Programação Linear	Os alunos deverão ser capazes de • Interpretar um enunciado e reconhecer que é um problema de PL • Modelar um problema de PL, identificando as variáveis, escrever a função objetivo e as restrições • Determinar o máx. ou mín. para função objetivo no domínio definido pelas restrições, i. e. determinar a solução ótima para um problema de PL • Interpretar os resultados obtidos à luz de um dado problema Tarefa 6

Tabela II: Planificação da unidade de ensino

3.3.1. Tarefas e Estratégias de Ensino

As tarefas matemáticas são ferramentas de trabalho que podem contribuir para apoiar a aprendizagem dos alunos, de modo a que estes se envolvam na aprendizagem e sejam o centro da aprendizagem (Ponte, 2014). Assim, existem vários tipos de tarefas que assumem características que permitem que a atividade dos alunos se efetue de modo a promover as condições anteriores.

Para Ponte (2005), as tarefas matemáticas podem ser categorizadas segundo duas dimensões: quanto ao seu grau de desafio matemático e quanto à sua estrutura. A primeira dimensão pode variar de reduzido a elevado conforme o grau de exigência cognitiva que a tarefa encerre. Por exigência cognitiva entende-se "o tipo e o nível de pensamento requerido aos alunos para que se envolvam e resolvam uma tarefa com sucesso" (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). A segunda dimensão pode variar de aberta ou fechada, de acordo com o grau de explicitação e clareza no que é dado e pedido de uma dada tarefa. Destas duas dimensões resulta a seguinte tipologia de tarefas (Ponte, 2005): exercício, problema, investigação e exploração. O primeiro tipo é uma tarefa de estrutura fechada e de desafio reduzido, o segundo é uma tarefa de estrutura fechada e desafio elevado, o terceiro é uma tarefa aberta e de desafio elevado, e o quarto, uma tarefa aberta de desafio reduzido.

A diversificação das tarefas que o professor pode propor depende da consideração de vários aspetos. Um aspeto importante é os objetivos de aprendizagem, pois cada tipo de tarefa desempenha um papel diferente na aprendizagem (Ponte, 2005), podendo mesmo ser utilizada pelo professor para articular os conteúdos de modo a alcançar os seus objetivos de ensino (Stein et al., 2009). Outro aspeto relaciona-se com os contextos e com a complexidade do trabalho a realizar. Com efeito, Ponte (2005) refere que "para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental (…) tarefas enquadradas em *contextos da realidade* (tarefas de aplicação e de modelação)" (p. 26). Contudo, o autor menciona que "os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em *contextos matemáticos* (investigações, problemas, explorações)" (p. 26).

Por sua vez, o NCTM (1994) propõe que, na escolha ou elaboração das tarefas, o professor tenha em conta os seguintes três aspetos: o conteúdo matemático que vai lecionar, os alunos a quem as tarefas se destinam e as formas sob as quais os alunos aprendem Matemática. As tarefas devem representar de forma adequada os conteúdos matemáticos que pretendem abordar, mas também adequar-se aos conhecimentos, interesses e experiências dos alunos. As tarefas, pelo tipo de raciocínio que requerem e pela forma como os seus enunciados propõem abordar os conteúdos, influenciam a forma como os alunos aprendem esses conteúdos (NCTM, 1994), daí que o professor também deva ter em consideração as aprendizagens matemáticas nas tarefas que propõe.

Para a lecionação da subunidade foi proposta uma sequência de tarefas de exploração e de resolução de problemas envolvendo problemas de PL. Tendo como pressuposto que os alunos são elementos ativos na sua própria aprendizagem e sendo esta resultante da atividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre ela (Ponte, 2005), considera-se que a realização de problemas e tarefas de carácter exploratório funcionem como um promotor desses pressupostos.

Recorde-se que um problema de PL se caracteriza por apelar à tomada de uma decisão. Segundo Luenberger e Ye (2008) "um problema de PL é caracterizado, como o nome indica, por funções lineares das incógnitas, o objetivo é linear para as incógnitas, e as restrições são equações ou inequações lineares das incógnitas." (pág.2). Tendo em conta as características consideradas, o enunciado de um problema de PL deverá então apelar à tomada uma decisão, que motive o aluno à resolução do problema, a qual possa ser associada a variáveis, a um objetivo que a oriente e a condições que a limitem. Esse enunciado é passível de ser traduzido num modelo matemático contendo as seguintes componentes básicas (Kolman & Beck, 1995): variáveis de decisão, parâmetros, restrições e função objetivo.

Para a introdução dos conceitos de PL, dado que os alunos desconhecem os termos bem como os processos matemáticos utilizados nesta temática, preparei uma tarefa (Tarefa 2) cujos conceitos fossem construídos a partir da experiência de cada aluno e os procedimentos básicos resultassem de conhecimentos prévios adquiridos, partindo de um enunciado de um problema simplificado de PL – a primeira parte da tarefa. Este problema caracteriza-se por apresentar variáveis e restrições, mas não ainda um objetivo nem uma tomada de decisão. Na segunda parte da tarefa, apresento um problema, em prolongamento da parte anterior, com todas as características de um problema de PL. Como os alunos não o sabem resolver formalmente, têm que mobilizar conhecimentos que têm consigo (Ponte, 2005).

Após a introdução dos conceitos e procedimentos de PL, saber identificá-los e aplicá-los na resolução de um problema de PL perde o seu carácter desafiador. Nessa altura, e tirando partido da componente de modelação matemática num problema de PL, adotam-se tarefas de modelação. Segundo Ponte (2005), as tarefas de modelação

> apresentam um contexto de realidade. Estas tarefas revestem-se de um modo geral, de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações (…). Também é frequente falar-se em *aplicações* da Matemática. Conforme a sua natureza, trata-se, na maior parte dos casos, de exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias Matemáticas. (pp. 19-20)

Os problemas de PL permitem explorar contextos diversos associados à realidade – transporte de mercadorias, composição de alimentos ou outras substâncias, atividades de produção industrial, entre outros. A problematização dos enunciados das tarefas passa agora pela diversidade de contextos que esses podem tomar e a forma como podem ser enunciados. Como afirma Abrantes (1989), a "*matematização* de situações constitui (…) uma tarefa complexa para a qual são muitas vezes requeridos variados conhecimentos e alguma experiência. No entanto, é possível encontrar sugestões de trabalho desse tipo adequadas à Matemática escolar" (p.10). O mesmo autor apresenta um exemplo de um problema para matematizar situações reais sobre o qual refere: "A maneira «imprecisa» como o problema é enunciado não deve ser vista como uma fraqueza, ela constitui uma forma *realista* de o apresentar. Aqui é indispensável explorar o contexto do problema (incluindo os seus aspetos não matemáticos)" (p. 10). Ora, esta maneira «imprecisa» como o problema é enunciado e o contexto no qual o enunciado do problema é formulado são aspetos que podem ser explorados em problemas de PL, aumentando o seu carácter problemático, mantendo uma exigência cognitiva alta e instigando o desafio e a curiosidade nos alunos.

O programa de Matemática A (ME, 2001a, p. 14) propõe

- A possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:
- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual; (…)
- Livros para consulta e manuais; (…)
- Calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas.

Tomando em consideração o acima referido, e indo ao encontro das orientações promovidas pelo NCTM (1994) e pelo Programa de Matemática A (2001a), a realização das tarefas preparadas para a subunidade de PL convida à utilização de material de desenho e/ou calculadora. A resolução de problemas de PL envolve a representação gráfica de domínios planos que pode ser concretizada a papel e lápis e/ou com o apoio da calculadora.

Na tabela seguinte, apresenta-se uma síntese dos objetivos e das estratégias implementadas em sala de aula para cada tarefa.

<table>
<tr><th>Tarefa</th><th>Objetivos</th><th>Estratégias e Recursos</th></tr>
<tr><td>Tarefa 1</td><td>Revisão de conhecimentos
• Representar graficamente domínios planos (convexos) definidos por condições
• Representar por meio de condições domínios planos representados graficamente
• Relacionar a conjunção de condições com a interseção de conjuntos</td><td rowspan="6">Trabalho autónomo a pares
Discussão em grupo-turma
Calculadora
Material de desenho</td></tr>
<tr><td>Tarefa 2</td><td>Introdução dos conceitos de PL
• Variáveis de decisão, restrições, região admissível, função objetivo, conjunto convexo, vértice</td></tr>
<tr><td>Tarefa 3 (manual)</td><td>Resolução de um problema de PL pelo método gráfico e pelo método analítico
• Solução ótima</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4 (manual)</td><td>Determinar o máximo e o mínimo de funções objetivo diferentes</td></tr>
<tr><td>Tarefa 5 (manual)</td><td>Exploração de um problema matemático, relacionado com PL, que explora alguns tipos de solução em problemas de PL</td></tr>
<tr><td>Tarefa 6 (manual)</td><td>Resolução de problemas de PL
• Interpretar um enunciado e reconhecer que é um problema de PL
• Identificar as variáveis, escrever a função objetivo e as restrições
• Verificar se existe máx. ou mín. para função objetivo no domínio definido pelas restrições, i. e. se existe solução ótima para o problema
• Interpretar os resultados obtidos à luz de um dado problema</td></tr>
<tr><td>Ficha de Avaliação</td><td>• Avaliar a aprendizagem dos alunos
• Avaliar o desempenho das estratégias de ensino</td><td>Trabalho individual
Calculadora e Material de desenho</td></tr>
</table>

Tabela III: Tarefas propostas

Todas as tarefas propostas, à exceção da ficha de avaliação, foram pensadas de modo a que o ensino-aprendizagem da PL se realizasse a partir da resolução das tarefas (Hatfield, 1978; NCTM, 2000). As intervenções letivas foram pensadas em torno das tarefas e de modo a que o progresso das aprendizagens na temática da PL se fizesse de tarefa para tarefa. Assim, estas foram organizadas por ordem de progressão de conteúdos e conhecimentos naquela temática (objetivos de aprendizagem), apresentadas aos alunos numa sequência de seis tarefas em suporte de papel.

A Tarefa 1, adaptada do manual “Matemática A 11” da Porto Editora, teve como objetivo rever, recordar e mobilizar conhecimentos e procedimentos matemáticos que se identificaram necessários para o estudo da PL. Este tema apela à utilização de várias representações matemáticas, pelo que se procurou revisitá-las, nesta tarefa. Assim, a tarefa incidiu na representação algébrica de regiões planas, partindo da representação gráfica destas, e na representação gráfica de sistemas de inequações representados por expressões algébricas; em determinar de pontos de interseção de retas que delimitam uma dada região plana (vértices de uma região plana convexa) e em verificar se um dado ponto pertence a uma dada região plana. É uma tarefa de contexto matemático, de estrutura fechada e de grau de desafio baixo.

Com a intenção de introduzir o tema da PL, evitando fazer uma imediata introdução dos seus conceitos e a exposição de procedimentos apoiada em exemplos, preparei a Tarefa 2, adaptada da versão portuguesa de *Khan Academy*, de um problema proposto no tópico de sistemas de inequações. Nesta, apresentam-se dois problemas onde se introduz uma componente interpretativa: os seus enunciados são contextualizados na realidade e numa relação de precedência, do primeiro para o segundo. O primeiro problema corresponde à Parte I da tarefa e o seu propósito é mobilizar e aplicar os conhecimentos matemáticos revistos na tarefa anterior, apelando à capacidade de modelação matemática dos alunos e encaminhando-os numa abordagem heurística desse problema. Nesta parte, procurei abordar em particular a interpretação do enunciado do problema, a sua formulação em linguagem matemática (obstáculos cognitivos de 1 a 5) e a interpretação dessa formulação no contexto do enunciado, algumas das dificuldades identificadas no capítulo 2. O segundo problema, correspondente à Parte II da tarefa, teve o propósito de mobilizar os conhecimentos prévios dos alunos para a sua resolução e como motivação para introduzir conceitos associados à PL. Ao mesmo tempo, abordam-se também as dificuldades anteriores e acresce-se a interpretação da solução de um problema de PL no contexto de realidade do seu enunciado.

A Tarefa 3 é um problema de PL obtido da parte I do manual “Novo Espaço” para o 11º ano da Porto Editora. Este problema foi abordado em duas fases, sendo que as primeiras três questões pertencem à primeira fase e as duas últimas questões à segunda. Esse problema está formulado em contexto matemático, tem uma estrutura fechada e um grau de desafio baixo para as primeiras três questões e elevado para as duas últimas. O objetivo das primeiras é praticar e consolidar os conhecimentos e processos trabalhados na tarefa anterior, com particular atenção na determinação da solução ótima de um problema de PL. O objetivo das últimas questões é levar os alunos a contactarem com o tipo de soluções que podem surgir num problema de PL e o modo como novas condições – neste caso a alteração da função objetivo e a introdução de uma condição – podem afetar as soluções de um problema. Ao nível das dificuldades assinaladas no capítulo 2, nesta tarefa abordam-se o obstáculo cognitivo 6, isto é, a possível dificuldade dos alunos em esboçar graficamente equações do tipo $x = k$ ou $y = k$, com k constante; o obstáculo cognitivo 7, isto é, a noção incorreta de que o símbolo $<$ numa inequação significa que delimita o semiplano abaixo da reta associada à inequação.

Em continuidade com o trabalho realizado na tarefa anterior, na Tarefa 4 procurei que os alunos explorassem duas situações que podem surgir em problemas de PL: o tipo de soluções e o tipo de regiões admissíveis, e o modo como estes últimos podem afetar o tipo de soluções de um problema. Pretendia que os alunos contactassem e reconhecessem regiões limitadas e não limitadas, e soluções em número finito e em número infinito. Com efeito, o enunciado da tarefa foi formulado em contexto matemático, com uma estrutura fechada e de exigência cognitiva elevada para a última questão proposta – a que pede aos alunos que ponderem sobre os máximos e mínimos de funções objetivos e a sua relação com o tipo de regiões admissíveis. Com esta tarefa aborda-se também a identificação de soluções quando em número maior que um, pelos métodos analítico e gráfico, e o sexto obstáculo cognitivo, acima referido. Esta foi adaptada do manual “Novo Espaço” da Porto Editora.

Num regresso às componentes de modelação e de interpretação que se podem associar a um problema de PL, a Tarefa 5, também adaptada do manual “Novo Espaço”, foi formulada em contexto de semirealidade, numa estrutura fechada e grau de desafio elevado. O foco desta era desenvolver nos alunos as suas capacidades de interpretação do enunciado e de tradução da linguagem algébrica para a linguagem corrente, interpretando o significado das expressões algébricas da função objetivo e das restrições. Nesta tarefa abordam-se dificuldades relacionadas com a interpretação do enunciado do problema e a interpretação do seu modelo matemático, isto é, a tradução da representação algébrica para a representação verbal.

Trabalhados diversos aspetos associados a um problema de PL, a Tarefa 6, um conjunto de cinco problemas no manual “Novo Espaço”, dos quais dois têm prioridade para a componente investigativa do presente trabalho, propõe a mobilização de todos os conhecimentos adquiridos pelos alunos nesta temática. Todos são problemas contextualizados na semirealidade, de estrutura fechada, mas grau de desafio variável. Os dois problemas prioritários apresentam diferenças específicas entre si. Um deles envolve todos os conceitos associados à PL, o outro não contempla a função objetivo, requerendo uma análise diferente das soluções ótimas.

Tendo em conta o tipo de tarefas propostas e o modo como os conteúdos são introduzidos e trabalhados (Ponte, 2005), aposto numa estratégia do tipo ensino-aprendizagem exploratória. Procurando, de uma forma geral, que o trabalho em sala de aula seja marcado pela promoção do envolvimento dos alunos em atividades matemáticas de exploração de tarefas e resolução de problemas, propõem-se para a maioria das aulas o trabalho autónomo a pares, seguido de discussão em grande grupo e síntese das aprendizagens (Canavarro, 2011).

O trabalho realizado em cada tarefa foi estruturado nos seguintes momentos (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Stein et al., 2008): uma breve introdução da tarefa, a sua exploração de forma autónoma e a pares, seguida da discussão e síntese em grupo-turma. No primeiro momento, cuido apresentar a tarefa à turma, explicitar os objetivos de aprendizagem com a realização da mesma e distribuir o seu enunciado (Canavarro, 2011; Canavarro et al., 2014). Cuido também de indicar a forma de organização do trabalho da turma e os recursos (Tabela III) que podem utilizar (Canavarro, 2011; Canavarro et al. 2014). Os alunos devem preparar-se para a realização da tarefa. Neste momento da aula, após a distribuição do enunciado de uma tarefa, evito lê-lo e interpretá-lo em grupo-turma, porque, dado nível de escolaridade e o desempenho da turma afeta à intervenção, essa ação pode baixar o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein et al., 2008) e tirar a oportunidade da interação dos pares.

No segundo momento de trabalho, procuro circular pelos alunos e apoiar o seu trabalho autónomo, esclarecendo dúvidas e procurando garantir que os alunos desenvolvam na tarefa, tentando sempre que nas suas intervenções esta mantenha a exigência cognitiva (Stein & Smith, 1998). A maioria das tarefas preparadas apresenta uma exigência cognitiva elevada, pelo que procuro nas suas intervenções não revelar as respostas às questões e não validar as estratégias e respostas dos alunos, quer corretas quer incorretas, e dar o tempo suficiente para os alunos obterem o máximo da exploração da tarefa (Stein et al., 2009). Para aqueles que revelarem dificuldade em progredir na resolução, espero conversar com eles, perguntando sobre o que entenderam da questão, o que pensaram e como procederam, na intenção de que os mesmos reflitam sobre a sua abordagem e resolvam adotar outra estratégia ou corrigir os erros (Canavarro et al., 2014).

No momento de discussão em grupo-turma, trato de promover a apresentação e discussão das resoluções de alunos (Canavarro et al., 2014). Aqui cessa-se a atividade de exploração dos alunos para iniciar outro tipo de atividade – apresentação, comparação e discussão de resoluções e resultados em grupo-turma. Procuro apelar a intervenções voluntárias por parte dos alunos ou a intervenção de um aluno ou par de alunos cuja abordagem ou resolução de uma dada questão da tarefa, selecionada durante o trabalho autónomo, tenha considerado relevante para a discussão (Canavarro, 2011). Devo tomar atenção às intervenções e interações dos alunos, cuidando a qualidade matemática destas através do incentivo ao questionamento, de pedidos de explicitação das estratégias dos alunos e de explicação de raciocínios aos colegas (Stein et al., 2008; Canavarro et al., 2014). Posso também incentivar que os alunos respondam às questões uns dos outros (Canavarro et al., 2014). É importante que a discussão faça dos alunos protagonistas e ao mesmo tempo contribua para que estes realizem novas aprendizagens relevantes (Canavarro et al., 2014).

Na sistematização da aprendizagem matemática, o último momento de trabalho, passo a adotar um papel mais diretivo. Neste momento, institucionalizo ideias e procedimentos relativos ao trabalho desenvolvido pelos alunos em determinada tarefa, discutidas no momento anterior, estabelecendo conexões com conhecimentos anteriores (Canavarro, 2011; Canavarro et al., 2014). Cabe garantir que os alunos reconheçam e façam um registo por escrito das novas ideias importantes reter da tarefa realizada (Canavarro et al., 2014).

A realização de qualquer das tarefas requereu material de desenho ou calculadora, ou ambos, para apoiar a reprodução da representação gráfica de regiões planas na folha de resolução.

A turma na qual a intervenção se realiza está habituada a trabalhar a pares e tem uma boa autonomia de trabalho. A distribuição dos alunos na sala respeita uma planta organizada pela professora da turma, no sentido de promover este tipo de trabalho, facilitando a interação entre os pares, tendo em conta as características particulares dos alunos, e reduzindo ao mesmo tempo, as situações de distração.

Os momentos de discussão e síntese são essenciais em aulas onde o trabalho autónomo por parte dos alunos predomina. Esses momentos são, segundo Ponte (2005) "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (p. 16). São momentos em que se debatem estratégias de resolução – promove-se ainda a comunicação matemática nos alunos, capacidade muito incentivada a ser fomentada pelo PMES (2001a) e as orientações do NCTM (2000) – se clarificam conceitos e se faz uma síntese e balanço da aprendizagem (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

A turma adere muito bem a este tipo de atividade em sala de aula. A professora cooperante trabalha com eles nesse sentido: em muitas aulas promove momentos de discussão, onde o seu papel passa por gerir os participantes, garantir que toda a turma está atenta ao colega que participa e propor questões que fomentem o espírito crítico dos alunos em relação às contribuições de um colega que participou.

3.3.2. Avaliação

A avaliação da intervenção letiva faz-se com dois objetivos. O primeiro é em regular a aprendizagem dos alunos. Essa realiza-se por meio da observação do trabalho nas aulas – do desempenho dos alunos nas tarefas e na participação oral –, do questionamento oral (Santos, 2006) e da recolha das resoluções das tarefas dos alunos. O segundo é em perceber como é que as estratégias adotadas em sala de aula contribuiram para a aprendizagem dos alunos, que pode ser concretizado por meio dos dados recolhidos das resoluções das tarefas realizadas pelos alunos (Abrantes, 1985).

Ao nível da regulação das aprendizagens dos alunos, a observação do trabalho em cada aula, especialmente enquanto eu circulava nos momentos de trabalho autónomo, e as resoluções das tarefas recolhidas no final de cada aula permitiram observar como os alunos apreendiam e aplicavam satisfatoriamente as ideias trabalhadas. Em nenhum momento das aulas que se sucediam foi dado *feedback* escrito das resoluções das tarefas relativas às aulas anteriores. Por vezes, o intervalo de tempo de uma aula para outra impedia-me de me dedicar mais seriamente a esta prática. Contudo, foram abordados e/ou reforçados ideias ou procedimentos que tenha considerado que teriam ficado pouco claros nos alunos.

Em paralelo com a regulação das aprendizagens, ocorreu a regulação das estratégias de ensino adotadas. Estas não foram tanto afetadas pela avaliação das resoluções das tarefas, mas pelas considerações dadas pelas orientadoras nas reuniões após o trabalho desenvolvido em cada aula.

A Ficha de Avaliação proposta teve como propósito aferir os conhecimentos adquiridos pelos alunos no final da lecionação da PL. Esta foi elaborada em duas versões, cada uma com um problema diferente de PL, de níveis de dificuldade equiparáveis aos problemas propostos na Tarefa 6 – formulados em contextos de semirrealidade e com uma estrutura fechada. A Ficha foi realizada nos primeiros 30 minutos da primeira aula após as cinco lecionadas de PL e individualmente pelos alunos. Os resultados da Ficha de Avaliação mostraram-se satisfatórios, não houve nenhuma classificação negativa, a maioria dos alunos conseguiu resolver o seu problema com sucesso. Nos desempenhos mais baixos ocorreu nalguns casos a modelação incorreta do problema, noutros a modelação incompleta, variando depois entre uma resolução completa (ainda que incorreta) ou incompleta do problema; noutros casos observa-se a noção das ideias mas insucesso em concretizá-las.

3.4. As aulas lecionadas

As cinco aulas subordinadas à temática da Programação Linear foram lecionadas a uma turma do 11º ano da Escola Secundária da Ramada. Decorreram de 16 a 24 de Abril do corrente ano letivo 2014/2015. Todas as aulas foram planeadas em torno das tarefas elaboradas para esta temática. Procurei que a atividade predominante nas aulas fosse a resolução das tarefas e a sua discussão e síntese das aprendizagens. Estas tarefas foram pensadas para promover o ensino da PL através da sua resolução. Durante a exploração das tarefas, acompanhei o trabalho dos alunos, percorrendo a sala e esclarecendo dúvidas particulares.

O enunciado das tarefas foi entregue a cada aluno em suporte de papel. A exploração das tarefas realizou-se maioritariamente em trabalho autónomo dos alunos, a pares, e cuja resolução deveria ser registada numa folha para ser entregue no final da aula. A discussão das tarefas efetuou-se com o apoio do quadro, de diapositivos em PowerPoint (PPT) e de animações em GeoGebra. O primeiro recurso permitiu registar ideias importantes que iam surgindo dos alunos, ou para que os próprios alunos expusessem a sua ideia, permitindo que a turma pudesse acompanhar a discussão. O segundo recurso serviu para projetar a representação gráfica de regiões admissíveis, evitando perder tempo a esboçá-las no quadro, e demonstrar o produto de resoluções de problemas pelo método gráfico. O último recurso referido serviu para, através das animações, clarificar a ideia e o processo associado à resolução de problemas de PL pela representação gráfica da função objetivo, bem como o efeito que a alteração de inequações no sistema tem sobre a forma da região admissível.

Procurei ainda que a discussão surgisse a partir do questionamento aos alunos, sobre os resultados a que chegaram e o seu raciocínio, ou sobre o que era pedido no enunciado da tarefa. A síntese das aprendizagens fez-se com o apoio de diapositivos em PPT preparadas para projetar quadros, esquemas, ou textos que sintetizam as ideias importantes do trabalho realizado com uma dada tarefa.

Quase todas as aulas se iniciaram cerca de 10 minutos após o horário da aula, para garantir a presença de pelo menos 70% dos alunos da turma na sala de aula. A escola não tem campainha e esta é uma situação muito recorrente na generalidade das turmas. Todas as aulas começaram com o registo do sumário no caderno diário e uma breve introdução do trabalho que esperava que fosse desenvolvido para essa aula. Depois de entrarem na sala, os alunos instalavam-se ordeiramente, mas só se preparavam realmente para a aula quando o sumário era ditado – um hábito interessante promovido pela professora cooperante. Os alunos aderiram bem a todas as tarefas, bem como à Ficha de Avaliação, demonstraram sempre interesse e empenho na sua realização.

Na semana anterior à primeira das minhas intervenções letivas, os alunos foram avisados, novamente, de que as minhas aulas se iniciariam, assim como a investigação, e foi-lhes entregue a autorização para os encarregados relativa à permissão para gravar as aulas. Todos os alunos cooperaram com a lecionação e com a investigação. Em momento algum pareceram demonstrar resistência ou desagrado ao trabalho desenvolvido nas aulas. Desde a primeira aula que não se incomodaram com a presença da câmara de filmar, foi até motivo de algumas gracinhas, que são habituais no ambiente desta turma. Os alunos mostraram-se preocupados com o desempenho do professor estagiário: houve momentos em que me perguntavam sobre como estava a decorrer a investigação e se o material que recolhia contribuía para a investigação. Agradeci-lhes a intenção e esclareci que realizassem bem a sua função como alunos, a sua verdadeira função na escola, pois era a melhor contribuição que podiam dar a todo o meu trabalho.

Aula 1

Os objetivos para a primeira aula eram a revisão de conhecimentos prévios dos alunos necessários para a aprendizagem da PL e a introdução de termos e conceitos específicos deste tópico, com a realização das Tarefas 1 e 2. Iniciei a aula com uma pequena introdução oral à temática da PL, a sua utilidade e importância para a atividade humana. Distribuí o enunciado da Tarefa 1, explicitando o seu objetivo e estabelecendo o tempo de exploração, e os alunos iniciaram o trabalho a pares. Os 10 minutos estabelecidos para a sua exploração não foram cumpridos, situação que se vem a repetir em muitas das aulas subsequentes. Apercebi-me que os alunos demoraram mais tempo que o previsto para iniciar a realização da tarefa. Pareceu-me que o motivo deste acontecimento não foi tanto a extensão ou compreensão do enunciado, mas o ritmo em que a turma trabalhava. Comparativamente ao ritmo dela quando trabalhava com a professora cooperante, este era menor. Sem outra alternativa em mente para aumentar o ritmo de trabalho, prolonguei o tempo de exploração da tarefa, pois não havia interesse em discuti-la sem que a maioria dos alunos tivesse explorado grande parte dela.

Foi talvez a primeira vez que me deparei, ou talvez melhor dizendo, me consciencializei deste aspeto – o ritmo do professor pode afetar o ritmo da turma – e passei a considerá-lo para a dinâmica das aulas seguintes. Certamente, não poderia continuar a prolongar o tempo de exploração das tarefas para conseguir realizar a discussão delas, sob o risco de atrasar aulas sucessivamente. Contudo, não dei muita atenção à reflexão do ritmo de trabalho, pois queria perceber melhor com as aulas seguintes como o atraso ocorria, quem predominava em estabelecer o ritmo – se os alunos, se eu – e só então procurar por alternativas.

A discussão da Tarefa 1 iniciou-se cerca de 20 minutos após a sua exploração. Para esta discussão optei por resolver a tarefa no quadro porque entendi que serviria como exemplo de uma possível apresentação dos procedimentos e dos resultados.

Projetei o enunciado da tarefa em PPT e, à medida que os alunos participavam na discussão, fui registando as resoluções no quadro e apelando aos participantes, e aos colegas, o significado do que ia sendo registado. Esta discussão desenvolvia-se à medida das perguntas que ia propondo à turma relativas à tarefa. Por vezes tinha vários alunos a responder ao mesmo tempo, por vezes apenas um aluno respondia. No caso em que vários alunos respondiam à questão, eu selecionava um para dar a sua resposta. Uma vez que estivesse resolvida uma questão avançava-se para a seguinte.

A discussão desta tarefa prolongou-se por mais algum tempo por dois motivos: pela representação gráfica de sistema de seis inequações pedida numa alínea da tarefa, efetuada manualmente no quadro, para que estivesse compreendida para todos os alunos (e seria necessária para as questões seguintes), e pelo surgimento de uma dúvida não esperada acerca da mudança do sentido de uma desigualdade resultante da multiplicação de ambos os membros pelo número negativo -1. O primeiro momento podia ter sido menos moroso se eu tivesse preparado um diapositivo ou uma apresentação em GeoGebra com a representação gráfica, medida que passei a adotar para as aulas seguintes e que contribuiu para a compreensão dos alunos. O segundo foi necessário resolver mas, não tendo sido uma dificuldade generalizada, podia ter sido resolvida individualmente. Estes dois momentos fizeram atrasar mais a aula, permitindo apenas iniciar a exploração da Tarefa 2. Para a aula também estava prevista a introdução aos conceitos associados à PL e a abordagem aos procedimentos de resolução de um problema de PL, que decorreria do trabalho desenvolvido com a Tarefa 2,mas estes objetivos não foram possíveis concretizar e os planos das aulas seguintes tiveram que ser ajustados.

Aula 2

Ajustado o planeado para esta aula, de acordo com o decorrido na anterior, previa realizar e discutir a Tarefas 2, donde introduzo os conceitos de PL, e a Tarefa 3. Também nesta houve atrasos em relação ao previsto, o que levou apenas à exploração e discussão da Tarefa 2. À partida pensei que o ritmo que implementei para aula pudesse ter sido a principal causa desse atraso, mas, após a discussão da aula com as orientadoras, apercebi-me que a ambição dos objetivos para a aula possa ter sido demasiada. A Tarefa 2 foi trabalhada com a qualidade e a atenção que merecia. Dada a importância dos conceitos e procedimentos envolvidos e a dimensão da tarefa, uma aula dedicada a ela não foi um exagero. Depois desta reflexão, passei a considerar com mais cuidado a dimensão e importância das tarefas para a preparação das aulas seguintes.

Iniciei a aula dando um bocadinho de tempo aos alunos para concluir a exploração da Parte I da Tarefa 2, iniciada na aula anterior. Depois realizou-se a discussão dessa parte, apoiada em registos no quadro e diapositivos em PPT. Iniciei a discussão questionando a turma sobre a primeira questão da tarefa, da qual tive a agradável contribuição de uma aluna que participava muito pouco na aula de Matemática – o que poderá ter sido um sinal positivo da sua motivação para a tarefa. Procurei promover a sua participação por mais algum tempo, dirigindo-lhe mais questões, mas isso custou-me ter que repetir constantemente o que ela dizia, uma vez que falava num tom baixo (mesmo depois de lhe pedir por duas vezes que aumentasse o tom de voz), o que impedia os colegas de a ouvir. Entretanto, outros colegas passaram a participar. À medida que participavam, eu registava no quadro as suas respostas e pedia que as explicassem.

Foi uma discussão rica em intervenções dos alunos, para participar ou colocar questões. Houve até a proposta de outro modelo matemático válido para a Parte I da tarefa, o que permitiu depois fazer uma comparação com o primeiro modelo a que a maioria dos alunos tinha chegado. Os diapositivos em PPT projetados continham a representação gráfica do sistema de inequações obtido. Este recurso contribuiu não só para a gestão do tempo de aula, ganhando tempo em relação a um esboço feito no quadro, como também para a compreensão dos alunos com, por exemplo, a diferenciação de cores a destacar cada elemento presente na representação gráfica – eixo ortogonal e monométrico, retas, domínio plano e pontos de coordenadas inteiras.

Terminada esta discussão, iniciou-se a exploração da Parte II da tarefa. Depois, seguiu-se a discussão. A importância desta parte da tarefa, e o foco da discussão, esteve em determinar a melhor solução para o problema, situação que ainda não era pedida na questão anterior. Ocorreu também um bom momento de discussão, surgiram algumas ideias relativamente à resolução do problema pela abordagem gráfica, ideias que aproveitei para progredir na discussão. Nesta discussão utilizei diapositivos em PPT para projetar a região admissível resultante das restrições obtidas e uma animação em GeoGebra. Esta animação permitiu demonstrar a representação gráfica da função objetivo na região admissível, ou seja uma reta da família de retas geradas pela função objetivo, e o efeito da "deslocação dessa reta" na região sobre o valor da função, ou seja, o efeito da representação de sucessivas retas da família de retas geradas pela função objetivo sobre o valor dessa função. Desta forma, os alunos puderam ver e perceber que à medida que se representavam retas mais para a direita da origem do referencial, o valor da função objetivo aumentava. Este recurso permitiu que os alunos apreendessem a ideia da resolução do problema pelo método gráfico pela conjugação de três tipos de representação: a gráfica, a algébrica e a numérica. Próximo do fim da aula, projetei uma tabela em PPT com os termos e respetivos conceitos associados à PL.

Aula 3

Os objetivos para esta aula, quando planeada, eram a exploração e discussão das Tarefas 3 e 4, e ainda a exploração da Tarefa 5. Na altura da planificação, pensei que a exploração da Tarefa 5 era um recurso, caso as duas tarefas anteriores ficassem trabalhadas com alguma margem de tempo em relação ao final da aula. Entendo agora que teria sido uma melhor opção preparar alguns exercícios para praticar e consolidar conhecimentos, na vez da realização de mais uma tarefa cujo trabalho seria interrompido. Contudo, nessa aula só foi conseguida a realização e discussão da Tarefa 3 e a exploração da Tarefa 4. Compreendendo que pela dimensão das Tarefas 3 e 4 e pelas ideias que estas envolvem era exequível a sua realização numa aula, levou-me a pensar então que para o principal motivo para atraso nesta aula foi, novamente, o meu ritmo que influenciou o ritmo da turma. Outro motivo foi o lento arranque da turma na resolução das tarefas, o que me fez tomar a decisão de prolongar os tempos de exploração das tarefas.

Uma vez mais, esta questão do ritmo tinha de ser melhor considerada. Desta vez percebi que a turma estabelecia um ritmo de trabalho, mas eu era quem devia marcar um ritmo para esse trabalho. E tendo em conta o plano para a aula, em particular os tempos estabelecidos, precisava que esse ritmo fosse um pouco mais acelerado, especialmente nos momentos de exploração da tarefa. Sabia que isso era possível, pois a professora cooperante o conseguia. Percebi que para as aulas seguintes precisava de incentivar o envolvimento imediato dos alunos no trabalho para a aula, explicitando-lhes os tempos estabelecidos para os momentos de trabalho autónomo, incutindo-lhes foco e, em alguns casos, um sentido de urgência no trabalho indicando-lhes o tempo disponível até passar para o momento de discussão.

Iniciei a aula 3 ditando o sumário e abordando uma heurística de resolução de problemas de PL, organizada em fases. Questionei os alunos acerca de em que fases podiam repartir a resolução do problema de PL que abordámos na Tarefa 2 da aula passada. Esta discussão desenvolveu-se de questões orientadoras que ia propondo aos alunos em função das respostas que davam, e ia ordenando as suas ideias de modo a aproximar-se da ordem das fases que estavam preparadas em PPT. No final desta pequena discussão, projetei o diapositivo em PPT com as fases sintetizadas por tópicos. Procedeu-se depois à resolução da Tarefa 3. Reparti esta tarefa em duas partes, cujo foco era a segunda parte desta. A discussão da primeira parte desenvolveu-se também por questionamento e foi apoiada na projeção da região admissível e da representação gráfica da função objetivo em diapositivos em PPT, recurso que já provou os seus contributos nas aulas anteriores. Tinha também preparada uma animação em GeoGebra que não resultou, mas do qual me preveni com diapositivos (não animados) com o mesmo conteúdo. Houve um momento da discussão que propus a um aluno que apresentasse a sua resolução o quadro. Pareceu-me uma boa oportunidade de alterar a dinâmica da aula. Para meu espanto, o aluno rejeitou a proposta, sugerindo a alternativa de que eu fizesse o registo por ele. Depois desta discussão, guiei os alunos para uma conjetura relativa à representação gráfica de uma solução de um problema de PL, com o objetivo de apresentar o Teorema Fundamental da PL. Seguiu-se a exploração da segunda parte da Tarefa 3 e a sua discussão. Esta seguiu os mesmos moldes da discussão anterior. Ambas as discussões foram ricas em intervenções dos alunos e foram abordadas questões interessantes. Por fim, no tempo restante da aula iniciou-se a exploração da Tarefa 4.

Aula 4

Para a aula 4 previa a discussão da Tarefa 4 e a resolução e discussão da Tarefa 5. Iniciei a aula dando cerca de 5 minutos para os alunos concluírem a exploração da Tarefa 4. Esta tarefa foi, de todas, a que levantou dúvidas em relação à formulação das questões propostas no seu enunciado. Relativamente às alíneas da primeira questão, todos os alunos sabiam o que era pedido, sabiam o que fazer, mas a forma como era pedido deixava-os sem saber o que responder à questão. Para esclarecer isso reformulei as questões para a turma e alertei para o que queria que me apresentassem na resposta. Em relação à segunda questão, esclareci que fizessem alguma observação acerca das soluções que identificaram e das regiões planas que obtiveram. Depois prossegui para a discussão da tarefa. Nesta, levantaram-se questões muito interessantes como, por exemplo, o significado de solução não existente e de solução não definida (num problema de PL), os casos em que cada uma pode ocorrer, a discussão se podiam ocorrer restrições de polinómios de grau superior a um, e do motivo do máximo ou mínimo de uma função objetivo poder ocorrer, pelo menos, num vértice. Destas duas últimas situações, tive oportunidade de enriquecer a dinâmica da aula ao pedir a um aluno que lesse e recordasse o teorema fundamental da PL e a outro que esclarecesse a sua ideia, escrevendo-a no quadro.

Esta discussão desenvolveu-se a partir do questionamento à medida das intervenções dos alunos, apoiada numa animação em GeoGebra que apresentava uma região admissível e permitia manipular eficientemente os elementos nela envolvidos – retas que delimitam a região e a reta que representa a função objetivo – e facilitar eficazmente a compreensão dos alunos. No final desta discussão, fiz uma síntese das ideias discutidas, projetando um esquema num diapositivo em PPT.

Após a discussão da Tarefa 4, seguiu-se a exploração da Tarefa 5. Já só houve tempo para a discussão do preenchimento da tabela presente no seu enunciado; o seu significado e a sua importância só teriam interesse discutir no fim da tarefa realizada. As restantes alíneas também não foram discutidas nesta aula. Na discussão do preenchimento da tabela, pedi a um aluno que apresentasse a sua resolução no quadro e a explicasse aos colegas. Depois, apelei à turma por outras formas de a preencher, mas ninguém se manifestou. Dei outros exemplos oralmente e abordei algumas situações incorretas que observei enquanto circulava pela turma durante o trabalho autónomo, explicando a interpretação da tabela quando esta estava por completar.

Nos pontos menos bons desta aula salientam-se, mais uma vez, um atraso – faltou discutir a Tarefa 5 integralmente – e a centralização da atividade da discussão no em mim – um aspeto recorrente nas aulas lecionadas. O atraso, a meu ver não tão acentuado como os anteriores, deveu-se aos desafios que enfrentei no decurso das discussões. Desta vez, procurei respeitar os tempos estabelecidos, mais especialmente nos momentos de trabalho autónomo. Todavia, nas discussões o meu desafio esteve em corresponder adequadamente (e de modo a conseguir alguma oportunidade para promover alguma reflexão ou aprendizagem) às intervenções feitas pelos alunos, a maioria não contemplada no plano da aula. E a acrescentar a isto o ritmo que me é natural, e que contagio na turma, também não facilitou à concretização do que propus para a aula. A solução não passa por reduzir ou respeitar os tempos definidos para as discussões, pois esses são momentos cruciais para a aprendizagem dos alunos e devem fluir conforme as suas intervenções. A solução passa por ser mais proativo em marcar os momentos de aula, em envolver os alunos no trabalho da aula, incutir-lhes foco e, se necessário, sentido de urgência.

Aula 5

A última aula para a temática da PL e para a qual se previu a resolução de problemas. Antes, realizou-se a discussão da Tarefa 5. Na perspetiva de realizar uma discussão rápida, mas eficaz, fiz uma discussão oral, dado também que as questões propostas, à exceção da última, eram de interpretação de representações algébricas. No pressuposto de que os alunos já trabalharam muito a representação gráfica de sistemas de inequações e conhecem o processo de determinação da solução ótima, também abordei a última questão oralmente. Contudo, e para manter o nível mínimo e necessário de suporte visual para a mesma e promover alguma dinâmica na aula, propus a um aluno que apresentasse a sua resolução da primeira questão no quadro e a outro que esboçasse a região admissível delimitada pelo sistema dado no enunciado da tarefa. Tive ainda oportunidade de salientar mais uma vez a importância do Teorema Fundamental da PL, esclarecendo algumas questões relacionadas com os processos de determinação das soluções. No fim desta discussão, ponderou-se sobre a importância que a tabela teve naquela tarefa, generalizando para a importância que a tabela podia ter num problema de PL.

Concluída aquela fase, inicia-se a exploração da Tarefa 6, a resolução de problemas propostos no manual “Novo Espaço”. Pelo acompanhamento do trabalho autónomo, como a maioria dos alunos resolvia os problemas e não manifestava dificuldade, optei por discutir pequenos aspetos das propostas escolhidas. Um desses aspetos foi a organização da informação em tabela do problema da Proposta 31.

Selecionei dois alunos para escreverem as suas tabelas no quadro e depois procedeu-se à sua comparação e dos modelos matemáticos que se obtinham. A discussão prolongou-se com a segunda tabela apresentada, pois, por um lado, o modelo que se obtinha não era válido para a resolução do problema e, por outro lado, a própria tabela que o aluno construíra não era coerente – ela resultava de relações que estabelecera entre as suas variáveis, estas que não estavam devidamente definidas.

Numa súmula final, relativamente às aulas lecionadas apontam-se três aspetos.

Primeiro: a maioria das aulas tomou um ritmo lento comparativamente ao colocado pela professora cooperante. Do feedback recebido do contacto com os alunos durante o ano letivo, consideraram-me uma pessoa "calma e de voz suave", pelo que esse ritmo é-me natural. Contudo isto provocou sucessivos atrasos no programa das aulas. Uma outra perspetiva para esta situação pode ser a sobrecarga de atividades e momentos propostos para cada aula que podem não ter concordado com a capacidade de trabalho da turma, tendo sido feita uma avaliação sobrevalorizada do rendimento de trabalho dela. Todavia, a reavaliação da exigência e da dimensão das tarefas, feita a partir da segunda aula, e a adesão e o envolvimento da turma nelas faz-me por de parte esta perspetiva. Talvez a maior dificuldade esteve na minha falta de proatividade em mobilizar os alunos para ritmos de trabalho mais acelerados, marcar melhor os vários momentos das aulas, bem como os tempos de cada momento, e estimular intervenções nos alunos – por vezes até que a primeira intervenção tivesse lugar, tinha que incentivar a turma com a mesma questão reformulada ou outras questões semelhantes.

Segundo: os momentos de discussão eram muito orientados por mim. Nas primeiras discussões realizadas, decidi registar no quadro as intervenções dos alunos. Como eram tarefas de iniciação à temática, considerei que a minha presença no quadro para seria relevante para efeitos de organização e apresentação da escrita e a exemplificação de processos e procedimentos. A Tarefa 2, por exemplo, uma tarefa muito importante para a introdução da PL, estava dividida em duas partes cruciais, e cuja passagem de uma parte para a outra requeria uma orientação bem pensada, para que os alunos pudessem desenvolver a segunda parte. Nessas discussões, apelei apenas a que expusessem a sua ideia e a explicassem aos colegas – modelo que predominou nas intervenções letivas. Este modo de atuação poderá ter contribuído para que, em vários momentos em que pedi a alunos para irem ao quadro, se negassem a fazê-lo, na confiança (ou talvez conformismo) de que eu faria o registo por eles.

O terceiro aspeto, muito ligado aos dois anteriores, é que muitas das discussões que brotaram nas aulas foram interessantes, muitas das questões que surgiram não estavam previstas nos planos. De facto, em todas as aulas o maior desafio esteve, a par da dinamização das discussões (procurando incentivar os alunos a elas, promover intervenções, e tentar efetivamente criar diálogos entre os alunos), em procurar que as intervenções dos alunos fossem atentamente ouvidas, na medida em que a minha atuação pudesse correspondê-las, evitando responder ao que eu pudesse pensar ser o que o aluno dizia, mas ao mesmo tempo procurar nessas intervenções oportunidades de reflexão e aprendizagem. Isso levava-me à introspeção, antes da ação em pleno decorrer da aula, o que pode ter levado a quebras no seu ritmo. No entanto, saliento, que todas as tarefas que preparei para a lecionação, todas as ideias a que me propus trabalhar e todos os objetivos de aprendizagem foram concretizados.

Capítulo 4 – Instrumentos e Procedimentos de Recolha de Dados

Num trabalho de cariz investigativo, a seleção dos instrumentos e procedimentos de recolha de dados é de grande importância para validaras conclusões do estudo. Esta escolha deve ser ponderada tendo em conta o objetivo do estudo e o contexto em que o mesmo será realizado.

Comecei por recolher informação disponibilizada pela professora cooperante relativa aos alunos da turma em questão. Antes do início da lecionação solicitei aos Encarregados de Educação, através dos alunos, a autorização para a recolha dos dados. Os dados foram recolhidos com base na observação participante e a recolha documental.

4.1. Observação participante

Neste trabalho, participo como observador nas atividades do grupo que por mim é observado (Estrela, 1994), isto é, para além da observação sou também quem leciona as aulas. Assim, desempenhei um duplo papel: o de lecionar as aulas e o de observá-las como investigador. Nesta situação, o meu desempenho como professor influencia os comportamentos e o desempenho dos alunos da turma deste estudo (Biklen & Bogdan, 1994), o que por sua vez afeta a investigação. O contacto com a turma desde o início do ano letivo permitiu integrar-me no seu ambiente, familiarizar-me com a sua rotina, ao mesmo tempo que se iam familiarizando com a minha presença, os meus comportamentos e modos de atuação. Essa situação também me dificultou a tirar notas de interações e diálogos entre alunos, e entre professor e alunos.

Na observação das aulas o foco esteve nas estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de PL, em particular nas dificuldades na formulação matemática desses problemas. Para complementar a observação, apoiei-me em gravações em vídeo, devidamente autorizadas pelos Encarregados de Educação dos alunos da turma afeta ao estudo. Desta maneira, foi possível aliviar a quantidade de notas de campo que o professor, como investigador, teria que tirar durante as aulas. A gravação das discussões em grupo-turma permitem rever as questões e situações debatidas assim como visualizar os registos efetuados no quadro e os momentos em que foram utilizadas as projeções em PPT ou em GeoGebra.

A observação das aulas foi ainda apoiada em notas de campo (Bogdan & Biklen, 1994), instrumento que me acompanhou durante todo o ano letivo. Estas notas contemplam registos vários das aulas: questões, dos alunos ou da professora cooperante, que considerei interessantes e resultantes da exploração de tarefas e suas respetivas respostas, questões de momentos de discussão, excertos de discussões, organização dos momentos de algumas aulas, atuações da professora cooperante, opiniões da mesma, estratégias de ensino de determinadas aulas. Procurei que as notas fossem o mais descritivas possível, capturando as conversas, as ações e as pessoas de cada momento (Bogdan & Biklen, 1994). Estas contribuíram não só para eu refletir, para a preparação das intervenções que lecionei, sobre estratégias de ensino, abordagens, atuações e dinâmicas que podia adotar em certos momentos de aula, como também para conhecer melhor a turma afeta ao estudo pelo seu desempenho, a sua forma de pensar e o nível das questões que propunham. Contribuíram também para, tanto quanto possível, no decorrer das intervenções letivas, fazer registos dos diálogos que tive com alunos nos momentos de trabalho autónomo, complementando as gravações em vídeo. As notas de campo também foram utilizadas para apoiar os resumos das cinco aulas sobre a PL lecionadas.

4.2. Recolha documental

Através deste método procuro identificar e analisar as aprendizagens, as estratégias e as dificuldades dos alunos na resolução de problemas de PL. Procuro também identificar os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas de PL. E assim sendo, este método permite-me recolher dados que apontem para estratégias e dificuldades dos alunos na perspetiva dos próprios alunos (Bogdan & Biklen, 1994).

As produções escritas dos alunos são registos inalterados das abordagens que efetuaram aos problemas (Bogdan & Biklen, 1994), que evidenciamos conhecimentos que mobilizaram e as estratégias que utilizaram; são registos dos erros cometidos que apontam para as possíveis dificuldades. A forma que encontrei de os alunos não alterarem os seus registos após os momentos de trabalho autónomo foi pedindo-lhes que fizessem os novos registos no caderno ou numa folha diferente daquela em que trabalharam. As produções escritas constituem também uma fonte de evidências que permitem fundamentar as minhas declarações enquanto investigador (Ludke & André, 2005). Neste estudo, as produções escritas resultam das resoluções dos alunos das Tarefas 2 a 6 propostas para a lecionação e ainda da Ficha de Avaliação.

Capítulo 5 – Análise de Dados

A análise de dados, que a seguir apresento, está organizada numa forma adaptada à PL das fases de resolução de problemas de Polya (2003), sendo elas a “Formulação algébrica de problemas de PL”, a “Execução do plano” e a “Interpretação da solução no contexto do problema”.

Na primeira fase analiso a interpretação que os alunos fazem dos enunciados dos problemas de PL e como constroem um modelo matemático para a resolução dos mesmos, correspondendo também a uma fase de elaboração de um plano. Nesta fase analiso as resoluções dos alunos das Tarefas 2, 5 e 6 e da Ficha de Avaliação, bem como os diálogos em sala de aula gravados em vídeo e notas de campo.

Na segunda fase analiso como os alunos executaram o plano, com foco em como aplicaram os métodos gráfico ou analítico para resolução de problemas de PL. Para esta fase são utilizadas resoluções da parte II da Tarefa 2, da parte I da Tarefa 3, das Tarefas 4, 5 e 6 e da Ficha de Avaliação, assim como diálogos gravados e notas de campo, para fundamentar a análise.

Por fim, na terceira fase analiso a interpretação dos alunos da solução obtida no problema e a sua resposta ao mesmo. As evidências são retiradas das suas resoluções das Tarefas 2, 5 e 6 e da Ficha de Avaliação. Por sua vez, cada uma destas fases está organizada em três categorias de análise: estratégias utilizadas, dificuldades manifestadas pelos alunos e conhecimento mobilizado, orientadas pelas questões do estudo.

Para esta análise apoio-me em terminologia proposta por Wickelgren (1974), bem como nas fases de modelação em PL adaptadas de Hillier e Lieberman (2010) e Kolman e Beck (1995). As representações são também uma dimensão muito presente nos problemas de PL pelo que tive em conta a categorização proposta por Friedland e Tabach (2001).

Para analisar as estratégias dos alunos na resolução dos problemas de PL baseei-me nas estratégias propostas por Polya (2003) e Schoenfeld (1980). Para as dificuldades na resolução dos mesmos, baseei-me nas dificuldades identificadas nos trabalhos de Neves (2011), Dias (2011), Teixeira, Nascimento e Monteiro (2011), e nos obstáculos cognitivos propostos por White (1995, 1996). Em particular, a análise das dificuldades na tradução entre representações foi apoiada nos conceitos e categorizações sistematizados por Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011).

Ao longo desta secção, os alunos de cuja resolução ou diálogo se refira são identificados por uma letra maiúscula, tendo essa designação sido atribuída pela ordem em que surgem nesta análise. Para facilitar a legenda das figuras utiliza-se a seguinte codificação: T*x* designa Tarefa número *x*, Prop*x* designa proposta número *x* de uma dada tarefa, Prob*x* designa Problema número *x*, Q*x* designa a Questão número *x* de uma tarefa, e FA designa Ficha de Avaliação. A legenda das figuras segue o seguinte formato: assunto, seguido da identificação do aluno, seguida da identificação da tarefa. Por exemplo: Variáveis de decisão do Aluno W na Q1 da T2.

5.1. Formulação algébrica de problemas de PL

Estratégias utilizadas pelos alunos

Na Tarefa 2, que contém enunciados de problemas simples de PL, a maioria dos alunos foi capaz de os formular, representando algebricamente as restrições a partir do enunciado usando notação adequada. Só poucos alunos registaram dados dos problemas e, nestes casos, os dados que destacaram foi a correspondência entre o preço de cada artigo e o próprio artigo, como se exemplifica com a formulação da aluna A na figura 5.1.

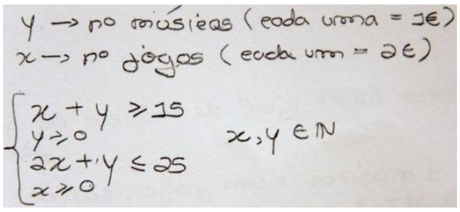


Figura 5.1: Formulação algébrica da Aluna A na Q1 da T2

Na parte I desta tarefa surgiram duas formulações algébricas corretas para o problema. Na formulação apresentada pela maioria dos alunos, as variáveis consideradas foram o número de canções e jogos – figura 5.1. Numa segunda formulação, os alunos consideraram para variáveis o número total de artigos adquiridos e o dinheiro gasto na compra desses artigos – figura 5.2.

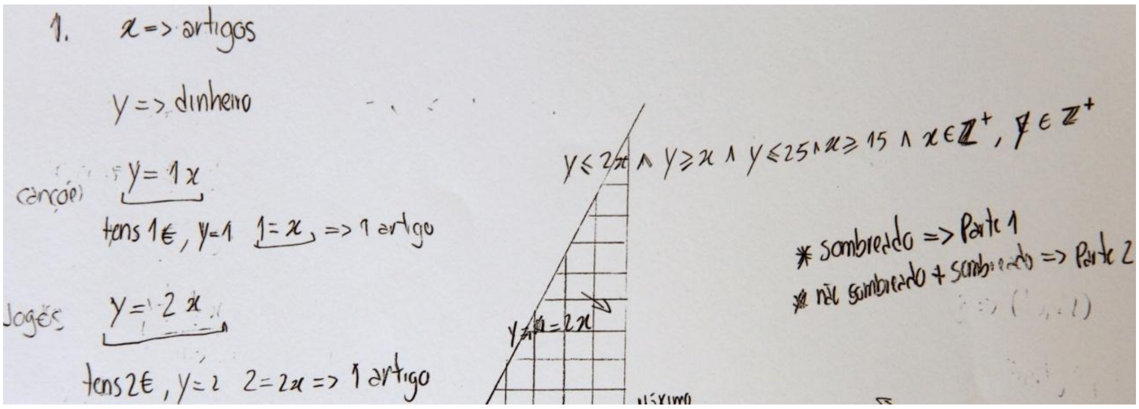


Figura 5.2: Formulação algébrica do Aluna B na Q1 da T2

Na sua formulação, na figura acima, o aluno B identificou as variáveis de decisão e identificou relações entre estas duas (à esquerda), recorrendo à representação numérica para explorar casos particulares. Depois identificou as restrições, apresentando-as sob a forma de conjunção de condições (à direta), sendo o único aluno a fazê-lo. No entanto, este aluno sentiu necessidade de alterar a sua formulação, introduzindo outras duas variáveis e representando algebricamente o problema, em forma de restrições com igualdades, para responder à questão 3 da parte I da Tarefa 2 e à questão 4 da parte II da mesma tarefa – figura 5.3.

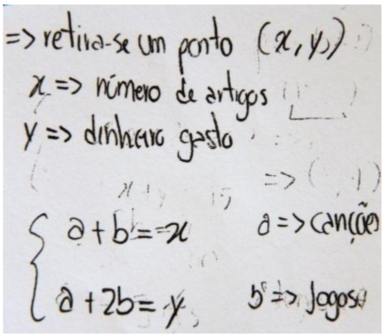


Figura 5.3: Formulação algébrica do Aluno B na Q3 da T2

Como se pode observar, o aluno B definiu as variáveis a e b como o número de canções e jogos, respetivamente, tal como os restantes colegas na primeira formulação anteriormente referida, e relacionou-as com as variáveis que definiu originalmente. O aluno terá entendido que estas variáveis facilitariam a resolução das questões 3 e 4 da Tarefa 2, como se verá adiante na fase de "Execução do plano".

Na Tarefa 5, antes de responderem às questões, foi proposto aos alunos completar uma tabela, com a qual contactaram pela primeira vez enquanto meio para organizar informações num problema de PL. A maioria dos alunos teve em conta as variáveis que nela já estavam presentes, preenchendo-a adequadamente. Alguns alunos entenderam que a tabela devia ser preenchida com uma das decisões possíveis para o armazenista produzir as misturas 1 e 2, figura 5.4.

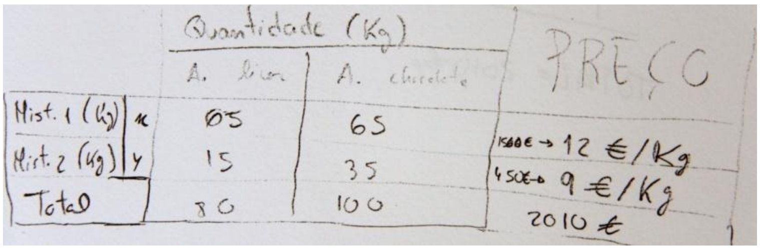


Figura 5.4: Preenchimento da Tabela pelo Aluno C na T5

O aluno C preencheu a tabela com valores que respeitam as condições do enunciado, mas, ao fazê-lo, apresentou apenas uma decisão possível para o armazenista e ignorou os dados da tabela, ignorou as variáveis que já estavam presentes nela, preenchendo-a de modo desadequado.

A tabela sugeria uma forma de representação algébrica, isto é, era para ser preenchida tendo em conta as variáveis nela presentes. Os alunos deveriam identificar o monómio ou binómio que correspondia a cada célula da tabela, sendo que estes exprimiam algebricamente as várias possibilidades de produção das misturas para o armazenista. Poucos alunos, como o aluno C, interpretaram incorretamente os dados da tabela. Este preencheu a tabela com apenas uma das várias possibilidades de produção das misturas para o armazenista, utilizando a representação numérica. Desta forma, reduziram a densidade da tabela, isto é, inibiram a potencialidade desta poder conter mais informação – reduzindo o esforço futuro de a obter – que aquela que eles estavam a permitir.

Depois de realizada a Tarefa 5, o que se pode observar é que nas tarefas seguintes muitos alunos passaram a utilizar a tabela para organizar a informação que retiram do enunciado dos problemas, antes de elaborarem o modelo matemático dos mesmos, formulando-os algebricamente. Nos problemas da Tarefa 6 e na Ficha de Avaliação, os alunos atribuíram o mesmo significado às suas variáveis, levando-os assim ao mesmo modelo matemático dos problemas propostos, não obstante as incorreções. Nessas tarefas pode-se encontrar, para além da formulação algébrica, registos organizados dos dados que os alunos consideraram mais importantes para os apoiar nessa formulação. Outros alunos organizaram os dados em tabela e outros ainda utilizaram uma mistura destas estratégias. Na Ficha de Avaliação, alguns alunos sublinharam os dados no enunciado preliminarmente a realizarem uma das estratégias anteriores, como se observa na figura 5.5.

A aluna D sublinhou corretamente as informações que são condições sob as quais o Tiago realizará as suas férias, evidenciando compreender quais as informações potenciais de se tornarem restrições do problema a ser representadas algebricamente.

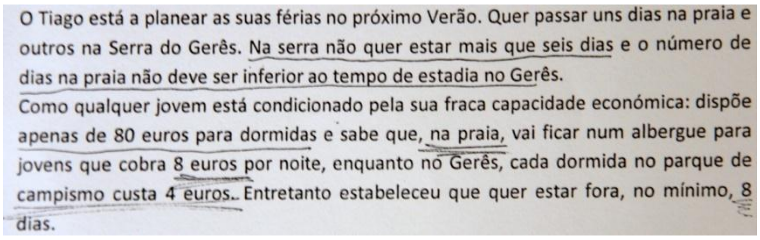

O Tiago está a planear as suas férias no próximo Verão. Quer passar uns dias na praia e outros na Serra do Gerês. Na serra não quer estar mais que seis dias e o número de dias na praia não deve ser inferior ao tempo de estadia no Gerês.
Como qualquer jovem está condicionado pela sua fraca capacidade económica: dispõe apenas de 80 euros para dormidas e sabe que, na praia, vai ficar num albergue para jovens que cobra 8 euros por noite, enquanto no Gerês, cada dormida no parque de campismo custa 4 euros. Entretanto estabeleceu que quer estar fora, no mínimo, 8 dias.

Figura 5.5: Enunciado sublinhado da Aluna D no Prob2 da FA

Na figura 5.6, observa-se o resultado da utilização da estratégia da aluna D de sublinhar o enunciado. Esta facilitou à aluna a identificação das variáveis de decisão (à direita) e das restrições do problema (à esquerda), conduzindo a uma formulação correta o modelo do problema.

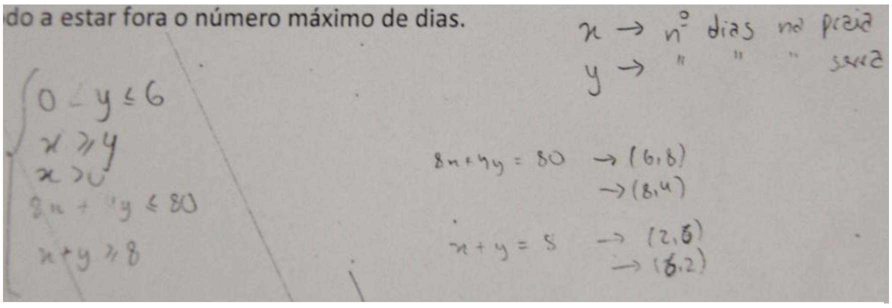


Figura 5.6: Formulação algébrica da Aluna D no Prob2 da FA

De modo geral, as estratégias utilizadas pelos alunos facilitaram a interpretação dos problemas, a identificação das variáveis, da função objetivo e das restrições e a tradução do enunciado para a representação algébrica. Os alunos evidenciaram a capacidade de compreender o enunciado e a de exprimir as variáveis e as restrições naquela representação.

Regressando à Tarefa 5, o trabalho predominante nesta era a tradução para a representação verbal do significado de cada expressão algébrica do modelo matemático já apresentado no enunciado.

Relativamente às restrições do problema, na questão 2, era pedido aos alunos que indicassem o significado das inequações, justificando o sentido das desigualdades tendo em conta o contexto do problema. A maioria dos alunos interpretou as inequações corretamente, sendo capazes de as traduzir para a representação verbal, embora não tenham justificado o sentido da desigualdade. Particularizando para as inequações relativas à produção das misturas, a maioria dos alunos interpretou corretamente as expressões algébricas e traduziu-as corretamente para a representação verbal indicando o significado dessas inequações, embora alguns tenham traduzido apenas o significado da expressão do primeiro membro, fazendo uma tradução incompleta. Apenas um aluno justificou devidamente o sentido das desigualdades das inequações, como se pode observar na figura 5.7.

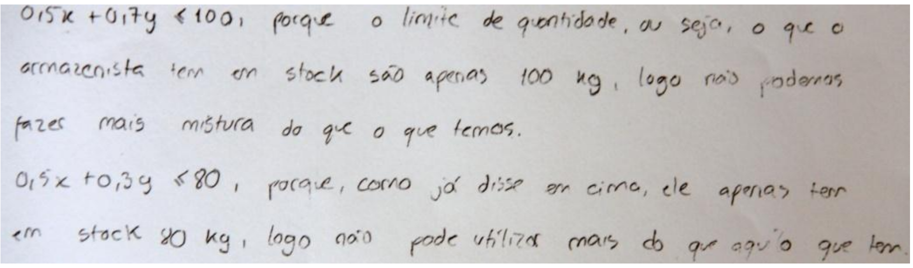

$0{,}5x + 0{,}7y \leq 100$, porque o limite de quantidade, ou seja, o que o armazenista tem em stock são apenas 100 kg, logo não podemos fazer mais mistura do que o que temos.
$0{,}5x + 0{,}3y \leq 80$, porque, como já disse em cima, ele apenas tem em stock 80 kg, logo não pode utilizar mais do que aquilo que tem.

Figura 5.7: Restrições traduzidas para a representação verbal do Aluno E na Q2 da T5

O aluno E justificou corretamente as desigualdades das duas restrições relativas à produção das misturas, fazendo uso do conhecimento da natureza do contexto de semirealidade do problema, o que mais nenhum aluno faz. O aluno reconheceu que $100\,kg$ e $80\,kg$ são quantidades disponíveis em *stock* e como tais não podem ser ultrapassadas Contudo, este não indicou o significado dessas inequações como o faz a aluna D que a seguir se apresenta. Nenhum aluno forneceu uma resposta completa a esta questão (questão 2 da Tarefa 5).

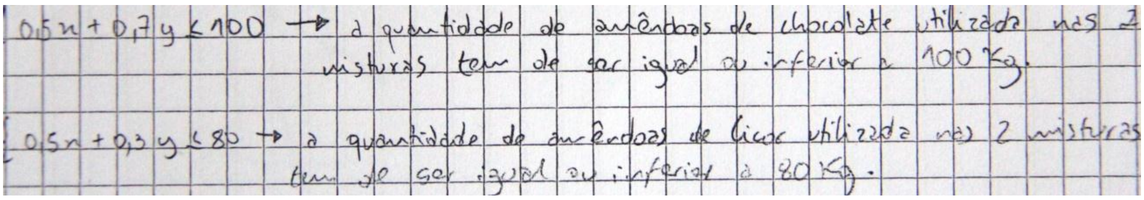

$0{,}5x + 0{,}7y \leq 100$ → a quantidade de amêndoas de chocolate utilizada nas 2 misturas tem de ser igual ou inferior a 100 Kg.
$0{,}5x + 0{,}3y \leq 80$ → a quantidade de amêndoas de licor utilizada nas 2 misturas tem de ser igual ou inferior a 80 Kg.

Figura 5.8: Restrições do problema traduzidas para a representação verbal da Aluna D na Q2 da T5

A aluna D, na figura 5.8, faz uma tradução completa do significado das inequações. A aluna captou o significado global de cada inequação, traduzindo-as para a representação verbal. Não compartimentou, por exemplo, a interpretação das mesmas, monómio a monómio; percebeu o significado do primeiro membro, do segundo e da relação de desigualdade integralmente. A maioria dos alunos traduziu as representações algébricas propostas na Tarefa 5 da mesma forma, demonstrando captar o significado global das representações.

Os alunos demonstraram compreender o significado das expressões algébricas do modelo matemático do problema, contudo a maioria não justifica o sentido da desigualdade na sua tradução para a representação verbal, como se verá na secção que se segue.

Dificuldades manifestadas pelos alunos

Na parte I da Tarefa 2, quando questionada durante o trabalho autónomo, a aluna F traduziu a frase do enunciado "ele quer comprar, pelo menos, 15 artigos com o cartão" para "$x \geq 15$ e $y \geq 15$", sendo estas variáveis o número de jogos e de canções, respetivamente. Pedi-lhe então que interpretasse as inequações que tinha escrito, ao que me disse: "O Tiago não pode comprar mais de 15 artigos. Então, não pode comprar mais de 15 jogos nem mais de 15 canções" [notas de campo]. Propus ponderarmos sobre o que ela tinha escrito. Disse-lhe: "Imagina que o Tiago compra 15 jogos. Será que pode comprar 15 canções?" [notas de campo], ao que me respondeu que não. Perguntei-lhe se as inequações que escreveu não sugeriam que podia também comprar 15 canções. A aluna F parecia ter compreendido, mas perguntou de seguida "Mas de que outra forma posso escrever isso? Só pode ser desta!" [notas de campo]. Perguntei-lhe se concordava com a interpretação que fiz das suas inequações, pelo que concordou. Sugeri-lhe então que escrevesse a condição "o número de artigos deve ser menor ou igual a 15" numa única inequação. A aluna parecia ter ultrapassado a dificuldade pois na sua contribuição na discussão dessa tarefa, mostrou compreender essa situação.

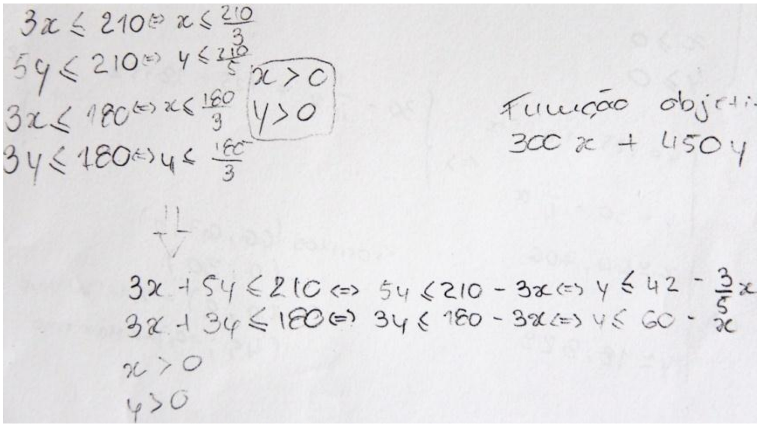


Figura 5.9: Formulação algébrica da Aluna F na Prop31 da T6

Na proposta 31 da Tarefa 6, como se pode observar na figura 5.9, a aluna F parece utilizar um raciocínio idêntico ao da Tarefa 2 como base para a sua formulação. Começou por formular algebricamente, de forma compartimentada, as restrições (canto superior esquerdo da figura), para depois reorganizá-las numa formulação única (indicada por uma seta), reduzindo quatro restrições a duas. Contudo, na Ficha de Avaliação voltou a cometer o mesmo erro que na Tarefa 2, apresentando uma formulação compartimentada. Foram identificados mais dois casos evidenciando a mesma dificuldade desta aluna, na Ficha de Avaliação, em que ambas as alunas elaboraram uma formulação compartimentada, obtendo restrições para cada variável isoladamente. O resultado foi uma formulação incorreta do problema.

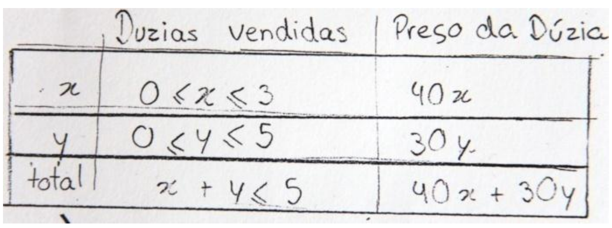
Quando a aluna F interpreta "O Tiago não pode comprar mais de 15 artigos. Então, não pode comprar mais de 15 jogos nem mais de 15 canções", separa os artigos em jogos e canções, cometendo depois um erro de correspondência de ordem de palavras quando traduz a sua interpretação, na representação verbal, para a representação algébrica. Na sua tradução, à expressão "não pode comprar mais de 15 jogos" fez corresponder uma restrição, $x \leq 15$, e à expressão "nem mais de 15 canções" fez corresponder outra restrição, $y \leq 15$. A aluna faz assim corresponder uma restrição à ordem em que as palavras surgem na sua interpretação.

Ainda na parte I da Tarefa 2, na formulação do problema, o aluno G propôs a inequação $y \leq 25$ para traduzir a ideia do número de canções que o Tiago pode comprar ser no máximo 25, mas cuja informação não vem explícita no enunciado. O diálogo seguinte, que ocorreu durante a discussão em grupo desta tarefa, evidencia a dificuldade do aluno:

Professor: A tua ideia $y \leq 25$? [escreve no quadro a inequação]
(O aluno G acena afirmativamente.)
Professor: Portanto, dizes que o número de canções nunca poderá ser maior que 25. Porquê?
Aluno G: Porque… o que ele pode fazer é combinações entre canções e jogos. Se as canções é o mais barato, o máximo que ele pode comprar é o máximo que dá para as...
Professor: O máximo que ele poderá comprar será…
Aluno G: 25.
Professor: Se ele comprar só canções.
Aluno G: Sim, mas se ele misturar já vai diminuir o número de canções.
Professor: Já não está aqui [no quadro] representada alguma restrição, alguma inequação que represente essa tua ideia?
…
Aluno G: Se calhar a primeira [inequação] já faz isso. [a inequação $2x + y \leq 25$]

O aluno G procurou restringir o número máximo de canções que o Tiago pode comprar, analisando isoladamente a variação do número de canções, o seu custo e o número máximo de artigos que o Tiago pode comprar. Como se pode ler na transcrição acima, o aluno G veio a perceber que a restrição que identificou, $y \leq 25$, já estava expressa com a primeira inequação escrita no quadro, $2x + y \leq 25$, tornando aquela redundante.

Esta situação, em que os alunos formulam restrições redundantes, voltou a surgir na Ficha de Avaliação. O aluno G e mais alguns alunos limitaram superiormente a variável y, agora com outro significado, sem que esta restrição venha de uma informação do enunciado. Essa condição já estava presente noutra restrição que surge de uma informação explícita no enunciado. Como se pode observar na figura 5.10, a restrição $y \leq 5$, deduzida pelo aluno G, já estava presente na restrição da terceira linha da tabela, esta resultante de informação no enunciado do problema.



	Duzias vendidas	Preso da Dúzia
x	$0 \leqslant x \leqslant 3$	$40x$
y	$0 \leqslant y \leqslant 5$	$30y$
total	$x + y \leqslant 5$	$40x + 30y$

Figura 5.10: Formulação por construção da tabela do Aluno G no Prob1 da FA

Estes alunos poderão ter sido levados a esta formulação pelo facto de a variável x ser limitada superiormente, sendo que esta restrição decorre de informação do enunciado. A condição que introduzem é redundante mas não está incorreta nem conduz a uma resolução incorreta do problema. Os alunos parecem antes fazer uma avaliação desnecessária das restrições do problema para deduzir, ou explicitar apenas, condições já expressas noutras restrições.

A identificação de restrições redundantes pode levar à formulação de restrições aparentemente diferentes, mas que por manipulação algébrica ou interpretação do contexto do problema se revelam equivalentes. Isto pode comprometer a formulação algébrica do modelo do problema, pois pode levar o aluno a pensar que a restrição, que é redundante, é a tradução correta para a representação algébrica de alguma condição do problema (cometendo assim um erro de interpretação). Mais, a identificação de uma restrição redundante pode revelar a incapacidade de um aluno identificar os dados necessários e suficientes para a formulação de um modelo matemático para um problema de PL.

Na Tarefa 5, na questão 2, relativamente às inequações que representam condições estritamente maiores que 0, a maioria dos alunos traduziu corretamente o seu significado, embora não tenham justificado porque é que a desigualdade é estrita. Muitos alunos indicaram o seu significado, outros não, mas tentaram justificar o sentido das desigualdades das inequações pela negação do seu significado. A maioria dos alunos demonstrou dificuldades na justificação das inequações do enunciado.

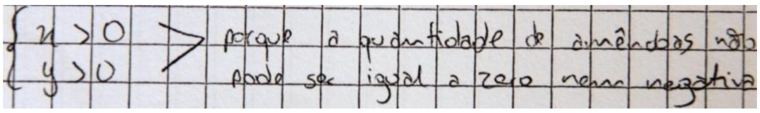
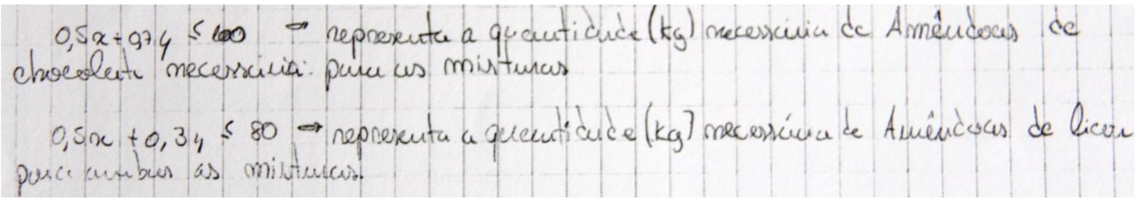


Figura 5.11: Tradução das restrições de não negatividade para a representação verbal da Aluna D na Q2 da T5

No caso apresentado na figura 5.11, a aluna D não explicitou o significado das inequações e tentou justificar a sua inclusão na formulação pela negação do seu significado. De facto, quantidades em quilogramas (kg) não podem ser negativas, mas não justificou porque não podem ser nulas.

A maioria das respostas dos alunos estão incompletas porque não recorreram ao contexto do problema, explicando, como no exemplo apresentado na figura 5.7, que $100\,kg$ e $80\,kg$ são quantidades existentes em *stock* e logo não podem ser ultrapassadas.

A escolha de palavras do aluno H tornou a sua tradução do significado das inequações relativas às quantidades das misturas 1 e 2 incorreta, como se observa na figura 5.12. Ainda que tenha identificado corretamente que a primeira restrição se relaciona com a quantidade de amêndoas de chocolate e a segunda com a de amêndoas de licor utilizadas nas misturas 1 e 2, compreendendo assim o significado das restrições, essas quantidades não são as necessárias, mas antes as que não podem ser ultrapassadas. Deste modo, o aluno H cometeu um erro de comparação estática, pois demonstrou compreender o verdadeiro significado das restrições, contudo traduziu-as incorretamente.


$0,5x+0,7y \leq 100$ → representa a quantidade (kg) necessária de Amêndoas de chocolate necessária para as misturas

$0,5x+0,3y \leq 80$ → representa a quantidade (kg) necessária de Amêndoas de licor para ambas as misturas.

Figura 5.12: Restrições traduzidas para a representação verbal do Aluno H na Q2 da T5

Um motivo porque os alunos não explicitaram o significado das representações algébricas do modelo do problema poderá ser pela densidade que essas representações carregam em relação à verbal. Como são representações de densidade elevada, pois contêm muita informação e obtê-la pode exigir um esforço consideravelmente reduzido, os alunos, familiarizados com elas desde níveis de escolaridade anteriores, poderão assumir que as representações falam por si, omitindo a interpretação dessas representações, traduzidas na representação verbal. Quando avançam para a justificação, em vez recorrerem ao conhecimento do contexto do problema, os alunos utilizam o significado da representação para a justificar.

Na questão 3 da Tarefa 5, muitos alunos demonstraram compreender o significado da expressão dada no enunciado, mas exprimiram-no de modo pouco cuidado na representação verbal. Muitas das traduções para a representação verbal expressam “o preço total das duas misturas”, o que é impreciso, pois nesta interpretação os alunos assumiram implicitamente a venda de toda a quantidade produzida das misturas 1 e 2, informação que não é explícita no enunciado. Pelo que a melhor tradução seria o preço pela venda de uma certa quantidade de cada mistura. Alguns alunos chegaram a afastar-se do contexto do enunciado, falando em compra quando no enunciado só são expressas as ideias de preço e venda.

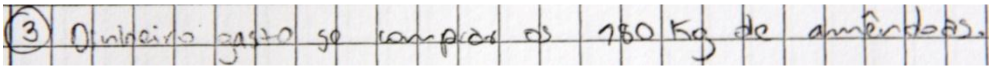


Figura 5. 13: Representação verbal da expressão algébrica da Aluna D na Q3 da T2

Na figura 5.13, a aluna D, tal como muitos outros alunos, supôs que a quantidade de misturas 1 e 2 produzida é vendida, ou nos termos que utilizou, é comprada na totalidade. A aluna foi mais longe e supôs que são compradas os 180 kg das duas qualidades de amêndoa para as misturas que estão disponíveis em *stock*. Esta aluna afastou-se do contexto do enunciado ao referir-se em compra e torna a sua tradução incorreta ao fazer a segunda suposição.

Mais uma vez, esta aluna D, bem como outros colegas seus, comete um erro de comparação estática, pois mostra compreender a representação algébrica, mas tradu-la incorretamente para a representação verbal. A origem desta dificuldade poderá estar no facto de os alunos assumirem informações que não estão expressas no enunciado, mesmo fazendo sentido no senso comum. Esta dificuldade poderá estar associada a dois aspetos. O primeiro aspeto é atributos de densidade: a representação verbal em que o enunciado se apresenta é de baixa densidade, pois é uma representação que contém pouca informação e pode requerer muito esforço para obtê-la, o que nos leva ao segundo aspeto – factos omissos. Esse esforço que possa ser necessário para obter informação de uma representação verbal, como a do enunciado do problema da Tarefa 5, pode ter levado os alunos a efetuar suposições que, apesar de lógicas para o contexto, têm por base o seu conhecimento desse contexto.

Na Proposta 31 da Tarefa 6, o aluno I utilizou uma tabela de forma diferente, pois não a utilizou apenas para organizar informação do enunciado mas também para deduzir a representação algébrica do valor total de uma venda do armazenista, como mostra a figura 5.14.

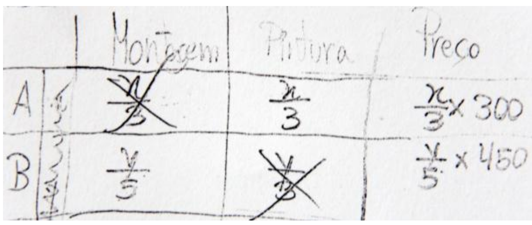


Figura 5.14: Tabela do Aluno I na Prop31 da T6

Em cada linha da sua tabela, o aluno I selecionou o monómio que melhor se adequa para exprimir algebricamente o "Preço" de cada peça (A e B). O aluno utilizou a tabela para apoiar o seu raciocínio e não para organizar as informações do enunciado, como o próprio vem a assumir, durante a discussão:

> **Aluno I:** Eu não devia ter posto a tabela, se calhar. Era só cálculo auxiliar. Mas, o meu objetivo no A é só a pintura e o meu objetivo no B é só a montagem. Só quero saber esses porque assim é … o máximo de peças que eu consigo montar [fabricar].

Contudo, a sua análise não está correta, como se verá adiante. Na discussão quando lhe pedi que explicitasse o significado das suas variáveis, respondeu: "Eu não sei bem explicar as minhas variáveis, mas posso tentar explicar o quadro" [gravações audiovisuais]. Mais tarde, concluiu que as variáveis x e y teriam que representar inevitavelmente o tempo, em horas, despendido semanalmente para o fabrico das peças A e das peças B, respetivamente. Mas mesmo com esta nova informação, o seu raciocínio parecia falacioso. Atente-se ao seu raciocínio para a primeira linha da tabela:

> **Aluno I:** O que eu fiz foi que na montagem da [peça] A, eu precisava de 210 horas, se eu dividisse por três, dava-me o número de peças que podia produzir nessas horas da montagem. … Depois fiz o mesmo na pintura: 180 horas a dividir por 3, dava-me o número de peças que eu podia pintar nessas 180 horas. … E fiz as contas: 210 a dividir por 3 dá 70 e 180 a dividir por 3 dá 60, logo a montagem é maior, logo a que tem as duas é a pintura, porque a pintura é a mais pequena.

Com 210h disponíveis para a montagem e 180h para a pintura, e dado serem necessárias 3h para montar e 3h para pintar uma peça A, o aluno I divide 210 e depois 180 por 3, obtendo 70 e 60, e interpreta como sendo o número de peças que a fábrica conseguiria montar e pintar, respetivamente, se só fabricasse peças A. Como o fabrico de uma peça A passa necessariamente pela montagem e pela pintura, o aluno I conclui que a fábrica está limitada ao fabrico máximo de 60 peças A, pelo que é o monómio correspondente à pintura que limita a produção dessa peça. Ora, o raciocínio está incorreto: o significado do quociente $\frac{210}{3}$ é diferente do significado do quociente $\frac{x}{3}$. No primeiro, ao dividir o número de horas disponíveis para secção da montagem pelo número de horas necessárias para a montagem de uma peça A, obtém o número de peças A que a fábrica montaria, se só montasse peças A; enquanto no segundo, ao dividir o número de horas despendidas para o fabrico (montagem + pintura) da peça A pelo número de horas necessárias para a montagem de uma peça A, obtém algo sem significado, e, certo é, que não é o mesmo que o do quociente anterior.

O aluno I no seu raciocínio comete um erro de interpretação, pois avalia incorretamente o significado dos quocientes $\frac{210}{3}$, sob uma representação numérica, e $\frac{x}{3}$, sob uma representação algébrica. O aluno recorre de início à representação numérica para raciocinar sobre os dados do problema mas revela dificuldade na tradução da representação numérica para a algébrica, pois a segunda não correspondia à generalização da primeira. A origem deste erro poderá estar em, desde o princípio, o aluno I não ter definido concretamente as variáveis que considerou. Dois aspetos determinantes para o sucesso na resolução de problemas de PL são o de exprimir as variáveis e o de exprimir as restrições, por esta ordem, em linguagem matemática. Estes poderão contribuir para a formulação de um modelo matemático com elevada probabilidade de ser viável. O aluno, ao não definir as variáveis, fragilizou os seus raciocínios, uma vez que as representações algébricas que formulou não correspondiam à generalização das representações numéricas sobre as quais raciocinava.

O aluno I na sua resolução ainda formulou as restrições do problema, evidenciadas na figura 5.15, resultantes da continuação do raciocínio anterior que aplicou para obter as informações da tabela, pelo que não são válidas. E mesmo que se assumissem como válidas, as restrições seriam redundantes, e poderiam ser reduzidas a uma inequação, tornando a formulação incompleta.

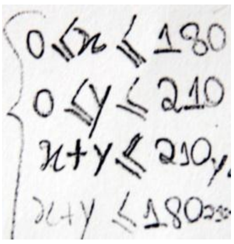


Figura 5.15: Formulação algébrica do Aluno I na Prop31 da T6

O mesmo aluno voltou a utilizar a tabela da mesma forma que na Ficha de Avaliação. Desta vez, a formulação algébrica do problema estava correta e com as variáveis bem definidas, embora se tenha esquecido das restrições de não negatividade.

Esta foi uma situação recorrente de alguns alunos nalgumas tarefas, incluindo a Tarefa 6, mas que não aconteceu na Ficha de Avaliação. Nela, todos os alunos identificaram as restrições de não negatividade no modelo matemático dos problemas.

Ao não escrever as restrições de não negatividade, os alunos cometem um erro conceptual de omissão, pois esquecem de registar na sua resolução as condições do problema. As restrições de não negatividade são condições às variáveis de decisão que são interpretadas do contexto do problema. Essas condições não estão explicitamente contempladas nos enunciados dos problemas, podendo considerá-las como factos omissos. Os factos omissos são uma fonte de dificuldades para os alunos na interpretação de enunciados e na tradução entre representações. Os alunos poderão ter cometido o erro de omissão pela natureza das restrições de não negatividade ser omissa.

Na Ficha de Avaliação, surge uma outra formulação incorreta, a do aluno J, apresentada na figura 5.16.

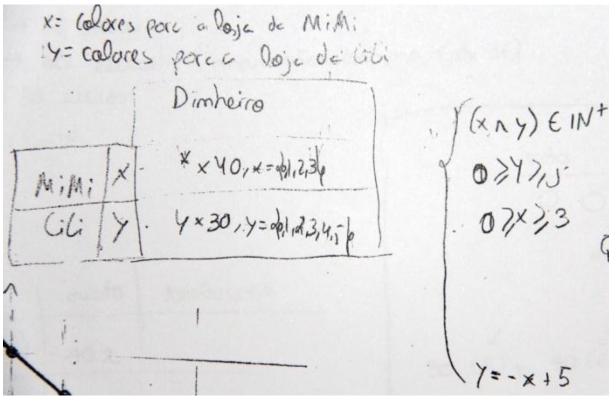


Figura 5.16: Formulação algébrica do Aluna J do Prob1 da FA

O aluno J começa por não definir cuidadosamente as suas variáveis de decisão. O enunciado do Problema 1 refere-se a dúzias de colares, permitindo assim que possa ser trabalhado sob uma de duas unidades de medida – o número de colares ou o número de dúzias de colares. Porém, esse aspeto não parece afetar a formulação, pois se vem a perceber que o aluno trabalhou em dúzias de colares, o que é uma definição correta das variáveis. Na tabela que elaborou verifica-se que o aluno identificou corretamente o valor de venda por cada dúzia de colares vendidos à tia Mimi, $x \times 40$, e à tia Lili, $y \times 30$, mas não explicitou a função objetivo. Identificou ainda, corretamente, os valores que as variáveis podem tomar. Contudo, na sua formulação algébrica (à direita na figura), o aluno troca o sentido das desigualdades das quatro inequações que limitam os valores de x e y. E ainda identificou erradamente a última restrição como uma igualdade, quando o enunciado refere que "não consegue fazer mais do que 5 dúzias de colares".

Tendo em conta o desempenho do aluno nesta unidade de ensino, penso que não se esteja perante a dificuldade em compreender termos como "mais do que". O aluno não apresentou esta dificuldade ao longo da lecionação nem o evidenciou nas suas resoluções das tarefas. Em ambos os casos, o aluno terá cometido um erro de preservação, ao ter interpretado corretamente a informação na representação numérica, no primeiro caso, e verbal, no segundo, mas tê-la traduzido incorretamente para a representação algébrica.

Conhecimento mobilizado

O uso da linguagem algébrica que é desenvolvido ao longo da escolaridade, vem nesta temática da PL contribuir para a resolução dos seus problemas. E, nesta fase de formulação algébrica de problemas de PL, os alunos mostraram mobilizar adequadamente os seus conhecimentos relativos à utilização da representação algébrica para definir variáveis e formular as expressões das restrições e da função objetivo. Alguns alunos mostraram mobilizar os seus conhecimentos sobre a representação numérica enquanto caso particular de uma representação algébrica correspondente. O caso do aluno B, figura 5.2, mostra uma aplicação bem sucedida da representação numérica para confirmar a representação algébrica que a generaliza; já os casos do aluno C, figura 5.4, e do aluno I, figura 5.14 e a discussão da construção da tabela, mostram aplicações não tão bem sucedidas desta representação.

Com a Tarefa 5, pode-se constatar que os alunos fizeram também uso adequado do seu conhecimento do contexto do problema, para traduzir as expressões na representação algébrica para a representação verbal.

Resumo

Resumindo, na fase de formulação algébrica dos problemas de PL, desde as primeiras tarefas da unidade de ensino que a maioria dos alunos traduz corretamente as informações do enunciado, sob a forma de representação verbal, para a representação algébrica. Já nas tarefas seguintes, e no que respeita às estratégias usadas pelos alunos para facilitar a interpretação da informação disponibilizada, alguns sublinham os dados no enunciado e/ou elaboram tabelas para os organizar, registando-os na sua folha de resolução antes de procederem à formulação. A maioria dos alunos, no final da unidade de ensino, evidencia ser capaz de formular algebricamente um problema de PL, identificando corretamente as variáveis, as restrições e a função objetivo do problema. De igual modo, grande parte dos alunos foi capaz de dar sentido a problemas apresentados na sua forma algébrica e de os traduzir para linguagem verbal.

A dificuldade dos alunos na formulação algébrica dos problemas de PL que mais se evidenciou foi a formulação compartimentada de problemas, isto é, a formulação de uma restrição para cada uma das variáveis de decisão e a introdução de uma restrição redundante. Os erros mais comuns foram a definição imprecisa das variáveis de decisão, o erro de correspondência de ordem de palavras, o erro de comparação estática, o erro de interpretação e o erro conceptual de omissão. Na tradução de representações, a dificuldade identificada consistiu em justificar o sentido da desigualdade das restrições representadas algebricamente no enunciado do problema.

Para a formulação algébrica dos problemas, os alunos mostraram mobilizar os seus conhecimentos relativos à utilização da linguagem algébrica para definir variáveis e representar as expressões de inequações e funções. Alguns alunos mobilizaram conhecimentos sobre a representação numérica, enquanto caso particular de uma representação algébrica correspondente.

5.2. Execução do plano

Estratégias utilizadas pelos alunos

Para a realização da parte II da Tarefa 2, os alunos só podiam contar com os conhecimentos que tinham até então e nenhum consistia em métodos de resolução de problemas de PL. A maioria dos alunos chegou ao mesmo modelo matemático para o problema e começou por representar graficamente o sistema de inequações correspondente às restrições do problema. A partir daqui, poucos foram os alunos que não fizeram mais nada. Grande parte dos alunos identificou corretamente a melhor solução. Destes, apesar de alguns terem mostrado que a solução encontrada satisfazia as restrições do problema, apenas o aluno K justificou satisfatoriamente, durante a discussão e mediante os conhecimentos que tinha, porque é que a solução identificada era a melhor:

Professor: O [aluno K]… sugere que é esta a solução $[(4, 0)]$. Como é que me justifica que é esta e não é nenhuma das outras?
Aluno K: (…) é o artigo mais barato e é o que está em menor quantidade.
(…)
Professor: Este ponto tem as mesmas quantidades de artigos [que o da solução].
Aluno K: Sim, mas é um artigo mais caro.
Professor: Há um dos artigos que é mais caro [naquele ponto]. Sim. E isso é um problema porque…
Aluno K: Porque acaba por gastar mais.
(…)
Professor: Mais. Explicaste-me para aqui para trás [no gráfico], e para aqui para a frente [no sentido de crescimento do eixo dos xx]?
Aluno K: Então, a partir daí começo a ter muitos mais artigos, acabo por gastar mais, e para cima [no sentido de crescimento do eixo dos yy] também começo a ter artigos mais caros, acabo também por gastar mais.

O aluno K interpreta corretamente a informação respeitante à região admissível e justifica a solução ótima para o problema, observando que ao substituir as coordenadas de outros pontos da região admissível na expressão da função objetivo faz aumentar o valor gasto na compra. Nalguns casos o aumento é induzido pelo aumento do número de artigos, noutros casos pelo preço dos mesmos.

Dois outros alunos tomaram estratégias diferentes na resolução do problema. A aluna A, para além do número de jogos e canções, acrescentou um terceiro eixo z, para representar graficamente o custo total de uma compra de jogos e canções, como apresentado na figura 5.17b. A aluna procurava desta maneira representar simultaneamente o número de jogos, o número de canções e o custo total com a compra de um dado número de jogos e de canções. Esta estratégia é um indício de que a aluna pretendia representar graficamente a função objetivo, correspondente ao custo total. Contudo, a aluna não foi capaz de representar no referencial nenhuma das restrições do problema que formulou apresentado na figura 5.17a, possivelmente por não incluírem a variável z. O que a aluna A parece fazer é representar no referencial os pontos que correspondem aos valores mais baixos de z, ao mesmo tempo que os valores de x e y respeitam as restrições do problema. No entanto, a aluna identificou corretamente os dois pontos que representa graficamente como soluções do problema.

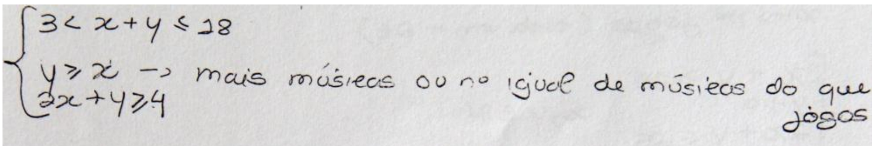

$$\begin{cases} 3 < x + y \leq 18 \\ y \geq x \rightarrow \text{mais músicas ou nº igual de músicas do que jogos} \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$$

Figura 5.17a: Formulação algébrica da Aluna A na T2

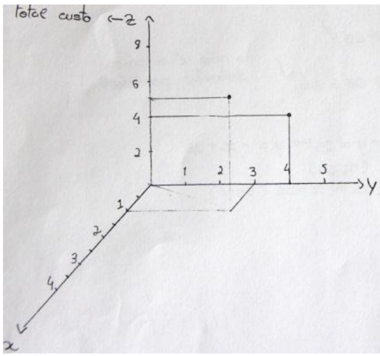


Figura 5.17b: Representação gráfica da Aluna A na T2

A estratégia que a aluna A utilizou foi a introdução de um elemento auxiliar na representação gráfica, a variável z, procurando que esse facilitasse a determinação da solução. A aluna compreendeu que a decisão da compra do Rui, representada pelas variáveis x e y, dependia do custo de uma compra – uma condição do problema –, não concebeu foi que esse custo já estava representado algebricamente, nas variáveis anteriores, pelo 1.º membro da última inequação do sistema na figura 5.17a. Assim, evitava definir uma nova variável e a dificuldade de a representar graficamente, especialmente quando não conseguiu estabelecer nenhuma expressão algébrica para essa variável.

O aluno B, a partir da segunda formulação que estabeleceu, já apresentada na figura 5.3 (em que definiu as variáveis a e b como o número de canções e jogos, respetivamente), realizou uma estratégia de subdivisão do problema em casos mais simples. Na figura 5.18 pode-se observar que, com essa formulação, o aluno identificou todos os valores possíveis para o problema (que verificam as restrições) e depois, para além de identificar o par que minimiza o valor gasto pelo Rui (o pretendido), procurou também pelo par que maximiza o dinheiro gasto. Com a sua primeira formulação (em que x representa o número total de artigos e y o custo de uma compra) não conseguiria explicitar como deveria ser feita a compra.

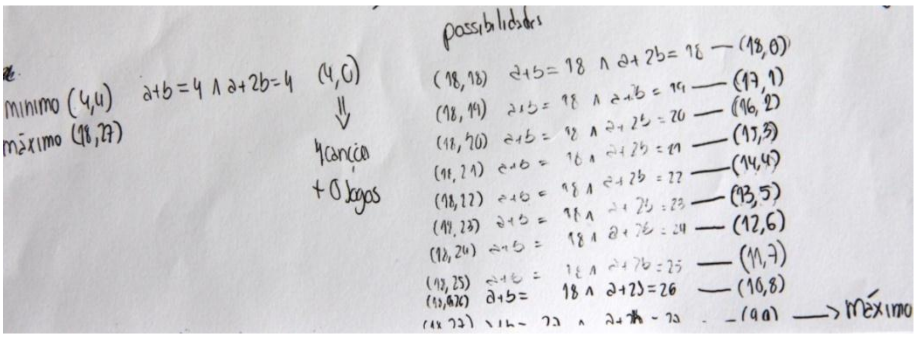


Figura 5.18: Resolução pela estratégia numérica do Aluno B na T2

A resolução da parte I da Tarefa 3 está compartimentada em três fases: a representação gráfica da região admissível – questão 1.1 –, a determinação dos vértices dessa região – questão 1.2 – e a determinação da solução ótima para uma dada função objetivo – questão 1.3. Na realização da primeira fase, uma parte dos alunos apresentou somente a região admissível graficamente com os vértices assinalados, a outra parte manipulou as inequações, escrevendo-as na forma $y \leq ax + b$ ou $y \geq ax + b$, antes de representarem graficamente a região admissível e assinalarem os vértices. Aquela forma algébrica permitiu aos alunos considerar a igualdade associada, $y = ax + b$, a equação reduzida da reta, a qual lhes facilitou a representação das retas que delimitavam os semiplanos definidos pelas desigualdades. Em qualquer dos casos, os alunos evidenciaram ser capazes de representar graficamente a região admissível num problema de PL.

Na realização da segunda fase, os alunos identificaram graficamente os vértices da região admissível denotando-os como pares ordenados. Só alguns alunos apresentaram cálculos relativos à determinação das coordenadas dos vértices, reconhecendo-os como resultantes da interseção das restrições do problema duas a duas. Nesta fase, os alunos mostraram ter facilidade na identificação gráfica e determinação algébrica dos vértices de uma região admissível.

Para a realização da terceira fase, os alunos já têm conhecimento dos procedimentos subjacentes à determinação da solução ótima de um problema de PL, trabalhados na discussão da parte II da Tarefa 2, onde foi também introduzido o Teorema Fundamental da PL. Nesta fase, os alunos reconheceram que a função objetivo representa uma família de funções afim com o mesmo coeficiente em x – uma família de retas paralelas. A aluna A, em particular, depois de representar algebricamente a equação $F(x, y) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, na forma $y = ax + \frac{L}{b}$, explicitou que procura pelo maior valor de $\frac{L}{b}$, a ordenada na origem, como se pode observar na figura 5.19.

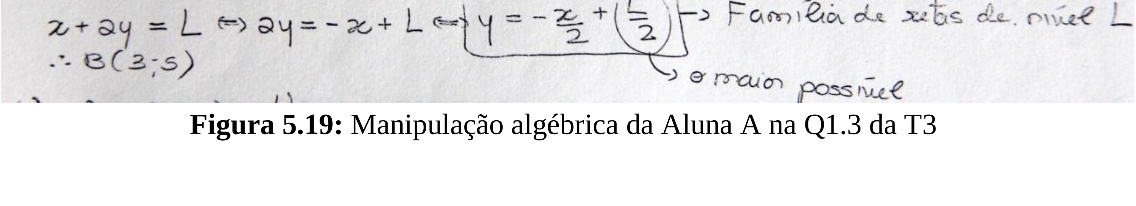


Figura 5.19: Manipulação algébrica da Aluna A na Q1.3 da T3

A aluna A, tal como a maioria dos alunos, usou a manipulação algébrica da equação para a reduzir à forma acima referida, obtendo corretamente a resposta com a indicação do vértice que maximiza a função objetivo. No entanto, sem referência ou explicitação de procedimentos intermédios.

Os alunos parecem não recorrer nem ao método analítico nem ao gráfico para determinar a melhor solução do problema da Tarefa 3, mas antes à observação da região admissível para decidir a solução. A maioria dos alunos observou a posição dos vértices na região admissível e escolheu, como solução ótima, aquele que se encontrava mais “acima” na região, sendo aquele com o maior valor de ordenada. A fragilidade desta estratégia é não garantir que exista outro ponto da região admissível, seja ele vértice ou não, que maximize a função objetivo num valor igual ou superior ao do vértice escolhido. Esta fragilidade põe em causa o Teorema Fundamental da PL, que afirma que a existir solução ótima, esta encontra-se pelo menos num dos vértices da região admissível, o que me leva a concluir que, nesta tarefa, os alunos ainda não compreenderam a relevância desse teorema, ou pelo menos, a ideia que ele transmite.

Apenas o aluno L apresentou o cálculo realizado para obter o valor da função objetivo em cada vértice, substituindo as coordenadas destes na expressão algébrica da função objetivo, identificando aquele que a maximiza, tendo assim utilizado exclusivamente o método analítico, como mostra a figura 5.20.

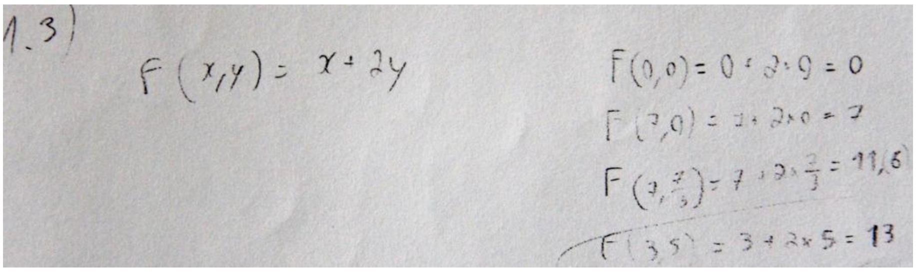


Figura 5.20: Método analítico do Aluno L na Q1.3 da T3

Na Tarefa 4, uma tarefa que foca também os procedimentos de resolução de problemas de PL, os alunos representaram a região admissível e identificaram os vértices dessa região, mostrando terem apreendido bem estes procedimentos. Na determinação dos pontos de máximo e mínimo para a função objetivo, já se pode observar estratégias mais diversas, tendo alguns alunos utilizado o método gráfico e, outros, o método analítico.

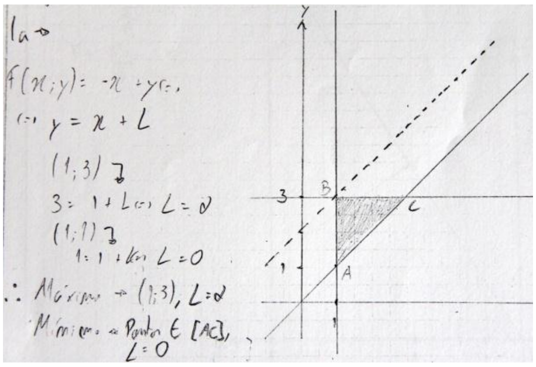


Figura 5.21: Método gráfico do Aluno M na Q1.a da T4

Na questão 1.a da Tarefa 4, a que a figura 5.21 se refere, o aluno M aplicou o método gráfico para determinar os vértices que maximizam e minimizam a função objetivo dada no enunciado. Esboçou a tracejado a reta da função objetivo e indicou os conjuntos de pontos de máximo e mínimo. Por seu lado, na resolução da aluna N da figura 5.22, predomina o método analítico, pois calcula o valor de L para cada vértice, e tira a sua conclusão relativamente aos pontos de máximo e mínimo. A representação gráfica da região admissível apresentada surge porque é pedida no enunciado do problema. Repare-se que o aluno M calculou o valor de L apenas em dois dos vértices, demonstrando compreender a informação fornecida pela representação gráfica da função objetivo, ao contrário da aluna N que calculou o valor de L para todos os vértices, evidenciando não utilizar a representação gráfica, senão para os denominar.

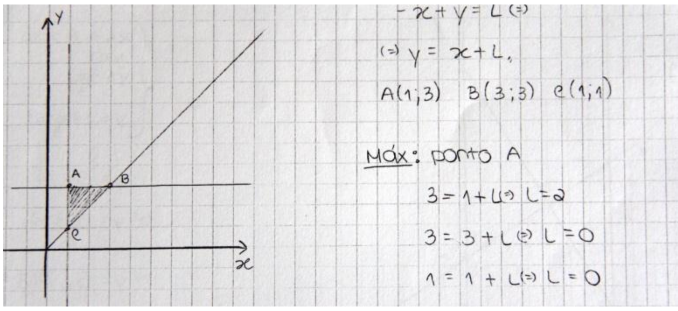


Figura 5.22: Método analítico da Aluna N na Q1.a da T4

Na Proposta 31 da Tarefa 6, observaram-se três estratégias na resolução desse problema. Alguns alunos, como o aluno O cuja resolução do se apresenta na figura 5.23, utilizaram o método analítico. Este aluno O não representou graficamente a região admissível, apenas determinou analiticamente o vértice, que identificou como a solução ótima, reconhecendo-o como a interseção de duas restrições do problema.

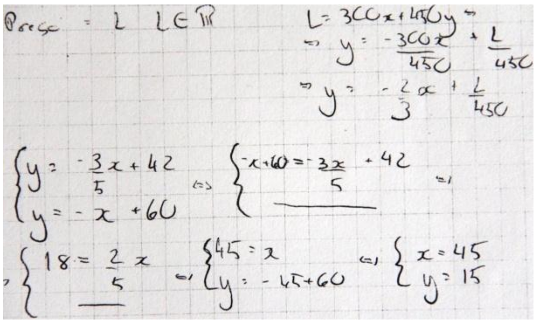


Figura 5.23: Método analítico do Aluno O na Prop31 da T6

A aluna A foi a única a utilizar o método gráfico para resolver o problema, como mostra a figura 5.24. A aluna representou graficamente a região admissível e a reta da família de retas geradas pela função objetivo que passa pelo vértice P, compreendendo ser a reta de maior ordenada na origem, concordando com o objetivo do enunciado. Depois determinou as coordenadas do vértice, reconhecendo que resultam da interseção das duas retas que designou de g e h.

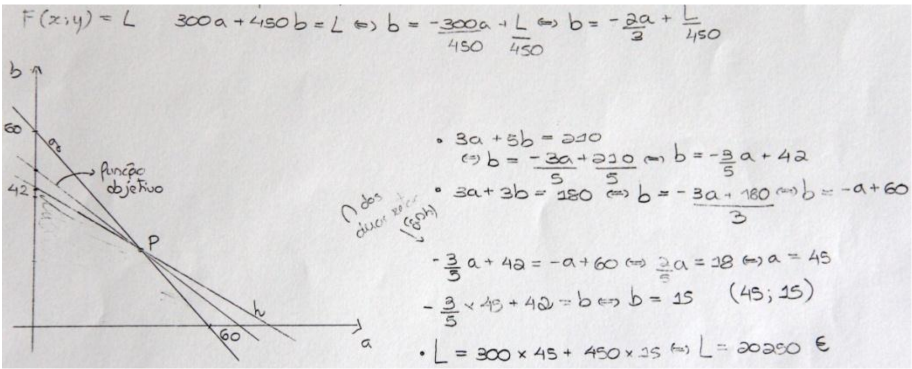


Figura 5.24: Método gráfico da Aluna A na Prop1 da T6

Na resolução desta proposta resultou ainda uma estratégia mista em que os alunos utilizaram articuladamente o método gráfico e o analítico, como se pode observar na resolução do aluno P, na figura 5.25 seguinte.

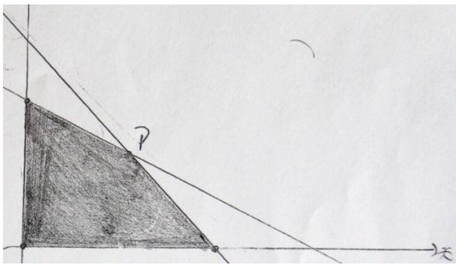


Figura 5.25a: Representação gráfica do Aluno P na Prop1 da T6

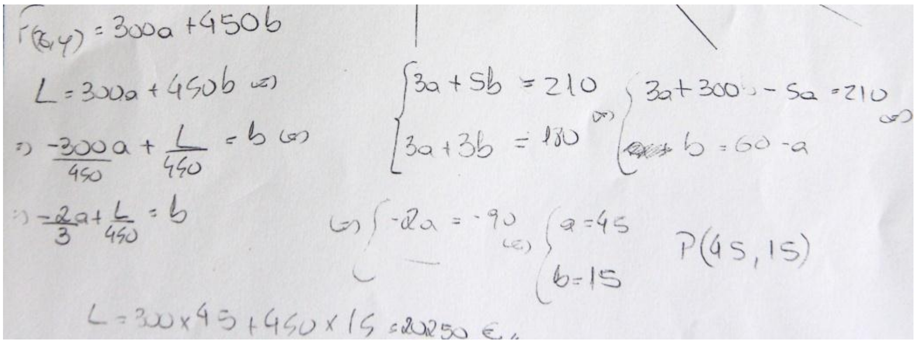


Figura 5.25b: Método analítico do Aluno P na Prop31 da T6

O aluno P representou graficamente a região admissível, figura 5.25a, e assinalou o vértice P, cujas coordenadas vai encontrar analiticamente, figura 5.25b. Depois, substituiu essas coordenadas na função objetivo para saber o valor de venda que obtém.

A maioria dos alunos utilizou esta estratégia mista e procedeu de um modo semelhante entre si. A representação gráfica da região admissível serviu-lhes para tomar conhecimento da forma geométrica da região, pois esta afeta o número de vértices que toma e a suas posições no plano. Depois verificaram o número de vértices da região e intuíram, por observação da posição destes, aquele que maximiza o valor de venda. De seguida, recorrem ao método analítico para determinar as coordenadas dos vértices candidatos a solução ótima e, substituindo-as na função objetivo, calculam o valor de venda, decidindo-se pelo maior valor.

A vantagem desta estratégia mista em relação à utilização de uma só (analítica ou gráfica) é que, por um lado, os alunos ficam a conhecer graficamente a região admissível no que respeita à sua forma e número de vértices e sua posição no plano. A visualização gráfica da região admissível poderá evitar a exclusão, à partida, de alguns vértices candidatos a solução. Por outro lado, a componente analítica permite-lhes obter as coordenadas dos vértices candidatos e comparar os valores da função objetivo.

No entanto, os alunos podem acabar por utilizar procedimentos redundantes, não aproveitando as potencialidades de cada um dos métodos. Por exemplo, os alunos poderão representar graficamente a região admissível e identificar os seus vértices, para depois determinar analiticamente as coordenadas de cada um deles e substituí-las na função objetivo, decidindo qual o ótimo. Desta forma não estão a utilizar a potencialidade da representação gráfica para *(1)* excluírem vértices que não fossem candidatos ou *(2)* representarem graficamente a função objetivo e decidir, por observação da ordenada na origem, o vértice que otimiza a função (método gráfico). E, *(3)* determinar analiticamente as coordenadas dos vértices é determinar o ponto de interseção das retas associadas às restrições, duas a duas, pelo que seria escusado realizar a representação gráfica da região admissível (método analítico). A utilização de procedimentos equivalentes dos dois métodos poderá evidenciar a dificuldade de compreensão dos mesmos por parte dos alunos.

A outra desvantagem da estratégia mista é que, na exclusão de vértices para candidatos a solução, os alunos poderão excluir algum vértice que contribua para que a solução ótima seja um conjunto de pontos, ou um segmento de reta, em vez de um vértice.

Nessa tarefa, os alunos que realizaram a estratégia mista demonstraram aplicá-la de forma bem sucedida, pois nenhum cometeu ações das do tipo apontado nas desvantagens.

Na Ficha de Avaliação, a estratégia predominante foi novamente a mista. A aluna A e o aluno B foram os únicos alunos que resolveram os problemas segundo a estratégia gráfica.

Penso que o principal motivo da predominância desta estratégia poderá ser o facto de na tarefa introdutória aos métodos analítico e gráfico, Tarefa 2, e nas tarefas de consolidação dessas aprendizagens, Tarefas 3 e 4, ter sido sempre pedida a representação gráfica da região admissível. Por influência destas tarefas, os alunos poderão ter sido levados a realizar também as representações gráficas na Tarefa 6 e na Ficha de Avaliação.

Outro motivo poderá ser o facto de a representação gráfica proporcionar uma imagem clara do sistema de inequações do modelo, permitindo uma compreensão intuitiva e apelativa do problema para os alunos. As representações gráfica e algébrica são ambas de densidade elevada, significando que contém muita informação que pode ser obtida com maior ou menor esforço conforme cada situação. Os alunos poderão ter considerado que a representação gráfica se adequa como fonte de informação para a identificação e determinação dos vértices da região admissível e a representação algébrica como fonte de informação para a determinação do valor que otimiza a função objetivo, a solução ótima.

Na Ficha de Avaliação, pode também encontrar-se dois alunos que seguiram uma estratégia de subdivisão do problema, o aluno J e a aluna Q, uma das alunas que formulou compartimentadamente as restrições, à semelhança da aluna F. Como, para ambos, a sua formulação do Problema 1 da Ficha não foi bem sucedida (cf. aluno J, figura 5.16), recorreram à estratégia acima referida para resolver o problema.

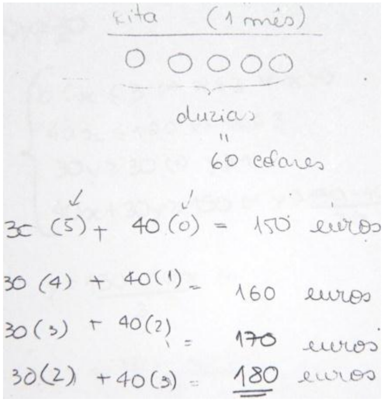


Figura 5.26: Estratégia numérica da Aluna Q no Prob1 da FA

A aluna Q identificou a melhor solução para o problema, corretamente, como mostra a figura 5.26. A aluna utilizou a função objetivo $(F(x,y) = 30x + 40y)$ e substituiu o par (x,y) por todos os casos numéricos possíveis, respeitando as restrições, obtendo assim a solução ótima. Já o aluno J falhou um caso possível para o par na sua resolução, obtendo uma solução incorreta.

Ao subdividirem o problema reduzindo-o a todos os casos numéricos, os alunos correm o risco de esta carecer de generalidade, por a representação numérica ser de baixa densidade, e consequentemente tornar-se-ia um trabalho exaustivo incluir todos os casos possíveis, impossibilitando justificar satisfatoriamente a solução do problema. Contudo, na Ficha de Avaliação isso revelou-se possível, pois as restrições do problema condicionavam em muito o número desses casos. Estes alunos, não obstante o seu sucesso na realização da estratégia, evidenciaram compreender o enunciado do problema e mobilizaram uma estratégia adequada à sua resolução.

Dificuldades manifestadas pelos alunos

Na parte II da Tarefa 2, a maior dificuldade encontrada na resolução do problema enunciado esteve em justificar a melhor solução, o que é natural dado ser uma tarefa introdutória. A maioria dos alunos conseguiu identificar a solução ótima, só não a conseguiu justificar devidamente. As justificações que surgiram afirmam que o par ordenado que identificaram como solução ótima respeita as restrições do problema (mas há muitos mais que as respeitam) e/ou que esse par ordenado é o de valor mínimo na função objetivo. Afirmar que encontraram o mínimo é garantir que não existe mais nenhum par na região admissível que tenha o mesmo valor ou inferior na função objetivo. Como evidenciado na secção das estratégias, apenas o aluno K justificou satisfatoriamente esta última condição.

Na Tarefa 3, os alunos aplicaram um dos métodos de resolução de problemas de PL, contudo ainda apresentaram dificuldade em perceber porque é que na determinação da solução ótima deviam começar por analisar os vértices da região admissível (devido ao Teorema Fundamental da PL). E os que pareciam compreender esta necessidade, calcularam o valor da função objetivo apenas em alguns vértices da região admissível, sem justificar porque é que os outros não eram candidatos a solução ótima.

O que o aluno R expressou na sua resolução, apresentada na figura 5.27, espelha a ideia de muitos outros alunos que justificaram a escolha do vértice $(3,5)$ como solução ótima apenas por observação da sua posição na região admissível. Quando confrontados com a questão de qual o raciocínio que estava por trás da sua observação, não conseguiram responder, referindo apenas que "é óbvio" [notas de campo].

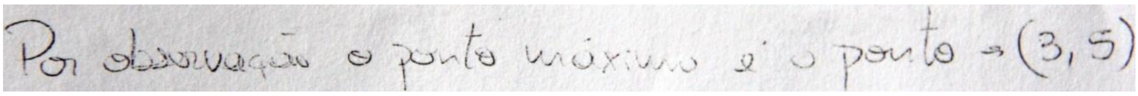


Figura 5.27: Resposta do Aluno R na T3

Na fase de discussão da questão 5 da Tarefa 5, depois de um aluno esboçar a região admissível no quadro e assinalar a solução ótima, o aluno B comentou: "Mas isso aí [a solução ótima] é a quantidade máxima que se pode vender, não significa que seja a que dê mais dinheiro" [gravação audiovisual].

Professor: Atenção: o [aluno B]... fez uma questão interessante…
Aluno B: Porque é que aquele é o ponto que dá mais dinheiro?

> **Professor:** (…) A questão nem foi bem essa. O que ele questionou foi: esta [solução] pode ser a quantidade máxima que ele pode produzir, mas não … o lucro máximo ou o valor de venda máximo que ele pode obter (…)
> **Aluno B:** Mas neste caso se calhar é.
> **Professor:** O que é que falta aqui [na região admissível esboçada no quadro] para me garantir que este ponto…
> **Alunos:** A função objetivo.

A intervenção do aluno B foi muito pertinente. De facto, o vértice assinalado correspondia à quantidade máxima que podia ser vendida, mas podia não corresponder ao valor máximo de venda. Para isso, era necessário recorrer à função objetivo para resolver a sua questão. Como se vem a evidenciar na Tarefa 6 e, com menor incidência, na Ficha de Avaliação, alguns alunos não parecem utilizar a função objetivo, quando existe, como critério de seleção da solução ótima.

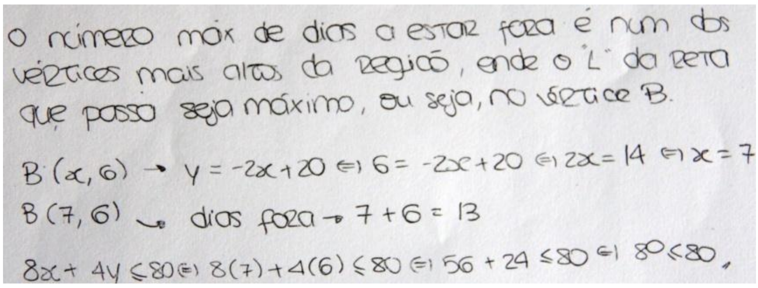
Na Proposta 31 da Tarefa 6, a dificuldade encontrada assenta, como acima referido, na determinação da solução ótima, recorrendo à função objetivo como seu critério de seleção. A maioria dos alunos apresentou apenas o vértice $(45, 15)$, e os cálculos relativos à sua determinação, quando os tinham, como solução ótima do problema. Os alunos mostraram compreender a ideia subjacente à determinação da solução ótima, focando-se inicialmente nos vértices da região admissível, ideia provinda do Teorema Fundamental da PL. Contudo, essa mesma ideia obriga à comparação do valor da função objetivo obtido em todos os vértices da região admissível. Caso contrário, os alunos deverão justificar a exclusão de alguns vértices como candidatos a solução ótima. E a dificuldade parece persistir aí. Alguns alunos parecem ignorar vértices da região admissível por considerarem claramente que não são candidatos a solução ótima, sem justificar; outros apresentaram apenas o vértice que consideraram ser a solução ótima, abstendo-se de cálculos e justificações. E em nenhuma destas situações, recorrem devidamente à função objetivo.

Na resolução apresentada na figura 5.23, o aluno O, que utilizou o método analítico, considerou como solução ótima o vértice que resultou da interseção das equações das retas apresentadas no sistema (resultantes das restrições principais). Apesar de a solução estar correta, o aluno não justifica que essa seja a solução que maximiza o lucro da fábrica, respeitando as condições do enunciado. Como também se pode observar na figura, o aluno identificou a função objetivo (o que significa que identificou corretamente o objetivo), mas não fez uso dela para nenhum fim.

Outro aspeto a considerar nesta resolução é que o aluno O não considerou as restrições de não negatividade na sua resolução (nem as identificou no seu modelo matemático do problema, cometendo um erro conceptual de omissão). Ao considerá-las, o aluno poderia ter identificado os restantes vértices candidatos a solução e comparado o valor de cada um na função objetivo, decidindo-se pelo maior valor de L. Ao não considerar essas restrições, o aluno vê-se perante um único vértice resultante das restrições principais, considerando-o automaticamente como a solução ótima.

A ausência destas restrições não foi grave neste problema da proposta 31 da Tarefa 6. Contudo, se o objetivo do problema fosse de minimização para que o aluno e os seus colegas obteriam, provavelmente, uma solução incorreta.

Na Ficha de Avaliação, volta-se a assistir, ainda que em menor número, a uma justificação incompleta da solução ótima. Uma aluna, em particular, expressou o que potencialmente poderá ter sido o raciocínio de alunos que procederam de modo semelhante.



o número máx de dias a estar fora é num dos vértices mais altos da região, onde o 'L' da reta que passo seja máximo, ou seja, no vértice B.

$B(x,6) \rightarrow y=-2x+20 \Leftrightarrow 6=-2x+20 \Leftrightarrow 2x=14 \Leftrightarrow x=7$

$B(7,6)$ ↪ dias fora $\rightarrow 7+6=13$

$8x+4y \leq 80 \Leftrightarrow 8(7)+4(6) \leq 80 \Leftrightarrow 56+24 \leq 80 \Leftrightarrow 80 \leq 80$,

Figura 5.28: Justificação da solução ótima da Aluna S no Prob2 da FA

Como outros alunos, a aluna S, cuja resolução apresento na figura 5.28, concentrou-se nos vértices que considerou serem fortes candidatos a solução ótima, que identificou com as letras A e B, acabando por selecionar o vértice B como solução ótima. A aluna S demonstrou compreender a ideia da determinação da solução ótima de um problema de PL, contudo a primeira parte da sua justificação exprime a ideia da observação da região admissível como base na escolha dos vértices candidatos a solução ótima. Por esta altura, a aluna já teria outros conhecimentos para melhor fundamentar a decisão. É aceitável que a aluna tenha recorrido à observação para a seleção dos vértices candidatos, no entanto considero que não se tenha exprimido nos melhores termos. Na vez do apresentado na figura, a aluna podia ter-se referido ao comportamento das coordenadas dos pontos no sentido positivo de yy e de xx, à semelhança do aluno K na parte II da Tarefa 2. Mais: na segunda parte da sua justificação, a aluna S refere-se a L, o parâmetro trabalhado na representação gráfica da função objetivo depois de representada na forma $y = ax + \frac{L}{b}$, com $L \in \mathbb{R}$. Contudo, em nenhuma parte da sua resolução apresenta a função objetivo e a utiliza naquela forma.

Conhecimento mobilizado

Na resolução dos problemas de PL propostos nas tarefas, os alunos mostraram mobilizar adequadamente conhecimentos no uso da representação algébrica. O estudo analítico, gráfico e numérico de algumas equações e inequações 10.º ano de escolaridade, bem como o estudo analítico e a interpretação geométrica de sistemas de equações, contribuiu para que, nesta fase de execução do plano, os alunos pudessem manipular expressões, inequações e equações, traduzindo-as para uma forma que lhes fosse mais conveniente, e para resolver sistemas de duas equações na determinação de coordenadas de vértices de uma região admissível. Usaram também os seus conhecimentos sobre a representação gráfica de inequações no plano, ampliando o conhecimento de lugares geométricos trabalhados no 10.º ano, para obter as regiões admissíveis e representar a função objetivo. Alguns alunos, tal como a aluna S cuja resolução é mostrada na figura 5.29, utilizaram ainda os seus conhecimentos sobre geometria analítica no plano (tópico do 11.o ano de escolaridade), em particular, sobre a equação vetorial da reta para determinar os pares de coordenadas inteiras que são soluções do problema proposto na questão 1.4.2 da Tarefa 3.

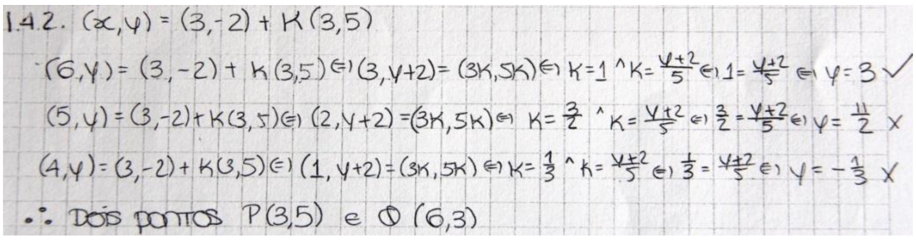


Figura 5.29: Aplicação de geometria de vetores da Aluna S na Q1.4.2 da T3

Por fim, os alunos mostraram mobilizar conhecimentos específicos da subunidade de PL, como seja a aplicação dos procedimentos do método analítico ou do método gráfico ou ainda uma combinação desses dois métodos.

Resumo

Nesta fase de resolução dos problemas, a maioria dos alunos utilizou um método de resolução articulando os métodos gráfico e analítico, sendo poucos os que utilizaram exclusivamente um dos métodos. Após a formulação do modelo matemático, os alunos representaram graficamente a região admissível, assinalaram (alguns) vértices da região e determinaram analiticamente as suas coordenadas, a solução ótima (muitas vezes, sem recorrer à função objetivo) e, em alguns casos, o valor ótimo. Outras estratégias, não tão bem sucedidas, como a introdução de um elemento auxiliar e a subdivisão do problema em casos numéricos possíveis, uma das quais precedida de um reformulação do problema por alteração da notação, foram identificadas para resolver os problemas.

A dificuldade que persistiu ao longo da lecionação foi relativa à determinação da solução ótima, sem fazer uso do seu maior critério de seleção, quando existe, que é a função objetivo, sob a sua forma algébrica ou gráfica. Uma parte da justificação na seleção da solução ótima parece ter assentado fortemente na observação dos vértices da região admissível mais favoráveis a tal.

Ao longo da resolução dos problemas de PL, os alunos mostraram mobilizar os seus conhecimentos relativos à utilização da linguagem algébrica para manipular expressões, inequações e funções. Mobilizaram também os seus conhecimentos de geometria cartesiana para representar graficamente as representações algébricas anteriores. Alguns alunos mobilizaram conhecimentos sobre a representação numérica enquanto caso particular de uma representação algébrica correspondente. Ainda, uns poucos alunos mobilizaram conhecimentos sobre geometria de vetores, em particular a equação vetorial da reta.

Por fim, os alunos mostraram também ser capazes de mobilizar os recentes conhecimentos sobre PL, como os procedimentos do método analítico ou do método gráfico ou uma combinação desses dois métodos.

5.3. Interpretação da solução no contexto do problema

Estratégias utilizadas pelos alunos

Na parte II da Tarefa 2, a maioria dos alunos determinou a solução ótima correta, outros não chegaram a concluir esta parte da tarefa, devido ao fim do tempo de exploração da tarefa em aula. Sendo o problema desta tarefa contextualizado na realidade, esperava-se que os alunos, para concluir a resolução, indicassem a decisão que o Rui deveria tomar em relação à sua compra online. Daquela maioria de alunos, apenas uma pequena parte respondeu ao problema, traduzindo corretamente a solução ótima para a representação verbal.

. Nesta tarefa, recorda-se que a justificação dos alunos para a solução ótima do problema referia que *(1)* essa solução respeitava as restrições do problema e/ou *(2)* minimizava o valor da função objetivo.

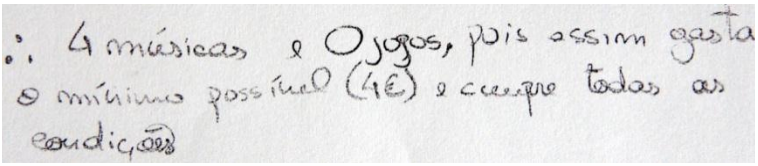
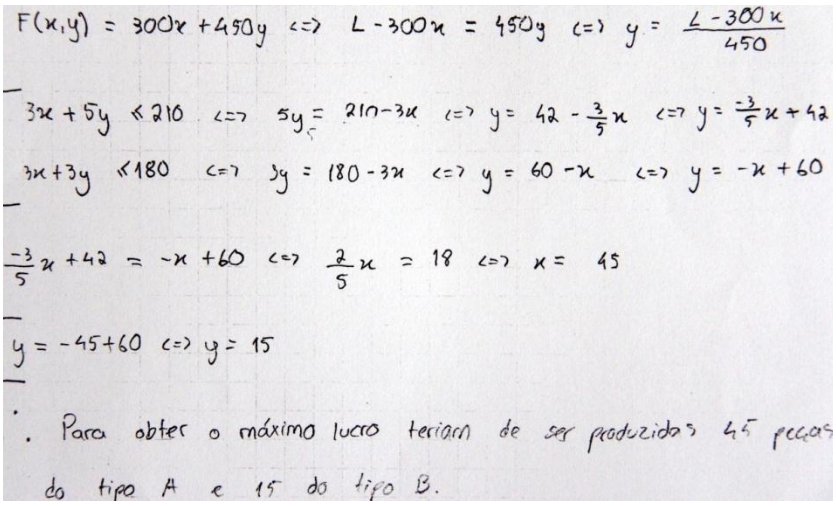

∴ 4 músicas e 0 jogos, pois assim gasta o mínimo possível (4€) e cumpre todas as condições

Figura 5.30: Resposta do Aluno R na T2

Na resposta do aluno R, na figura 5.30, vêem-se expressas as duas ideias acima referidas. Recorda-se que, para esta tarefa, os alunos ainda não possuíam os conhecimentos para resolver um problema de PL, pelo que a resposta é satisfatória e evidencia compreensão do significado da solução do problema.

Na Proposta 31 da Tarefa 6 são também poucos os alunos que concluem a sua resolução respondendo ao problema. Os alunos conseguem resolver esta proposta na sua totalidade, determinando a solução correta, acontece que a maioria não fornece uma resposta à questão colocada no problema. E das respostas dadas, umasencontram-se tão sucintas como apenas a indicação da solução ótima traduzida para a representação verbal, outras mais elaboradas têm em conta o objetivo do problema.


$F(x,y) = 300x + 450y \Leftrightarrow L - 300x = 450y \Leftrightarrow y = \frac{L-300x}{450}$

$3x + 5y \leq 210 \Leftrightarrow 5y = 210 - 3x \Leftrightarrow y = 42 - \frac{3}{5}x \Leftrightarrow y = \frac{-3}{5}x + 42$

$3x + 3y \leq 180 \Leftrightarrow 3y = 180 - 3x \Leftrightarrow y = 60 - x \Leftrightarrow y = -x + 60$

$\frac{-3}{5}x + 42 = -x + 60 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = 18 \Leftrightarrow x = 45$

$y = -45 + 60 \Leftrightarrow y = 15$

∴ Para obter o máximo lucro teriam de ser produzidas 45 peças do tipo A e 15 do tipo B.

Figura 5.31: Resposta do Aluno E na Prop31 da T6

Na sua resposta, apresentada na figura 5.31, o aluno E tem em consideração que a solução ótima para o problema passa por atender ao seu objetivo, o de maximizar o lucro. O aluno tem em conta o contexto do problema, identificando corretamente que o resultado “$x = 15$” como correspondente às “15 peças do tipo B” e “$y = 45$” como correspondente às “45 peças do tipo A”, respeitando também o significado das variáveis que definiu. Contudo menciona o objetivo na resposta e não o utiliza na resolução do problema, como foi referido nas dificuldades na secção da “Execução do plano”.

Também não existe evidência que o Aluno E tenha tentado confirmar os seus resultados, tal como aconteceu com os restantes alunos nesta Tarefa 6.

Na Ficha de Avaliação quase todos os alunos responderam ao problema que resolveram – apenas um não forneceu uma resposta. Todas as respostas indicam a solução ótima (das quais três são incorretas e são abordadas na secção seguinte), ocorrendo uma tradução correta do resultado sob a representação algébrica para a representação verbal, e as mais completas indicam, igualmente, o valor ótimo.

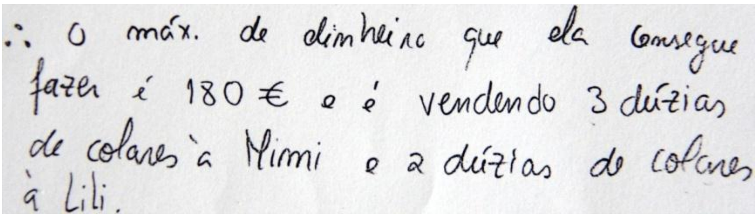

∴ O máx. de dinheiro que ela consegue fazer é 180 € e é vendendo 3 dúzias de colares à Mimi e 2 dúzias de colares à Lili.

Figura 5.32: Resposta do Aluno C no Prob1 da FA

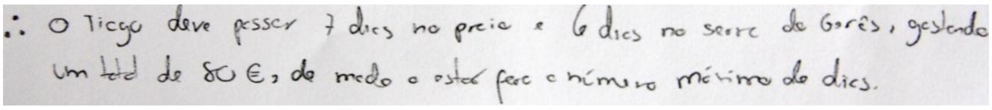

∴ O Tiago deve passar 7 dias na praia e 6 dias na serra do Gerês, gastando um total de 80 €, de modo a estar fora o número máximo de dias.

Figura 5.33: Resposta do Aluno O no Prob2 da FA

Nas figuras 5.32 e 5.33 podem ler-se respostas completas aos Problemas 1 e 2, respetivamente, da Ficha de Avaliação. Cada aluno indica a solução ótima, que traduziu corretamente para a representação verbal, refletindo a decisão que a Mimi e o Tiago devem tomar atendendo ao contexto do respetivo problema. Cada aluno indicou também o valor ótimo. Estes alunos demonstraram fazer corresponder corretamente os resultados obtidos para as suas variáveis com significado que lhes deram de acordo com o contexto do respetivo problema.

Mais uma vez, nenhum aluno evidenciou preocupação em confirmar os seus resultados na Ficha de Avaliação.

As poucas respostas dos alunos aos problemas da Tarefas 2 e 6, bem como as respostas aos da Ficha de Avaliação, evidenciam que os alunos identificaram corretamente a correspondência entre os valores das coordenadas da solução ótima e o significado das respetivas variáveis de decisão. Verifica-se assim que os alunos realizaram uma correta interpretação dos resultados obtidos na resolução desses problemas e a sua tradução para a representação verbal.

Dificuldades manifestadas pelos alunos

Em todas as tarefas, com exceção da Ficha de Avaliação, após determinada a solução ótima para o problema, a maioria dos alunos que deu por terminada resolução do mesmo, não fornecendo uma resposta; outros concluíram a resolução respondendo ao problema. Em nenhuma tarefa se observa que algum aluno tenha confirmado o seu resultado, procurando verificar se a solução determinada obedecia às condições do problema, ou verificar se utiliza todos os dados fornecidos. Em resultado da ausência destas ações, encontram-se na Ficha de Avaliação respostas que contradizem condições no enunciado do problema.

No Problema 2 dessa tarefa, a aluna T fornece a resposta ao problema apresentada na figura 5.34.

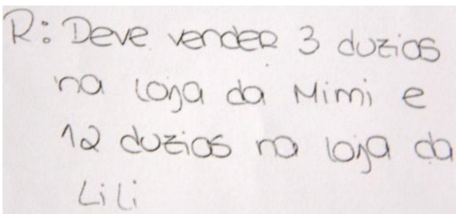


Figura 5.34: Resposta da Aluna T ao Prob2 da FA

Esta aluna é uma das que na sua formulação algébrica apresentou restrições compartimentadas, o que levou a um modelo matemático incorreto para o problema. Na fase de execução do plano, a aluna utilizou o método misto, apresentando a região admissível correspondente ao seu modelo e determinando analiticamente a solução ótima (também incorreta dado ser resultante de um modelo incorreto). Uma condição do enunciado do Problema 2 da Ficha de Avaliação é que a Rita não consegue produzir mais de 5 dúzias de colares por mês. Apesar de ter considerado esta condição na sua formulação algébrica, a aluna T concluiu que a Rita deve vender 12 dúzias de colares à tia Lili. Este resultado contradiz aquela condição, o que demonstra que a aluna não verificou se a sua solução respeitava todas as condições.

No mesmo problema da Ficha de Avaliação, encontra-se ainda mais duas situações. A aluna F chegou à seguinte conclusão, apresentada na figura 5.35.

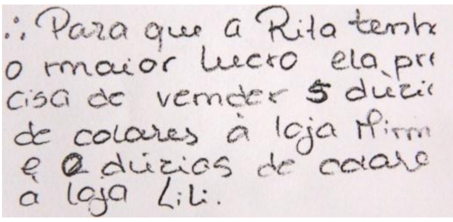


Figura 5.35: Resposta da Aluna F ao Prob1 da FA

Recorda-se que, nesta tarefa, a aluna F foi uma aluna que realizou uma formulação compartimentada das restrições. Uma condição do problema é que a tia Mimi não compra mais de 3 dúzias de colares à Rita, e a aluna concluiu que esta devia vender 5 dúzias de colares àquela tia. A aluna não evidencia ter confirmado se a sua solução respeitava todas as condições, apresentando assim uma conclusão errada.

O aluno J fornece uma resposta parecida com a da aluna F, com se pode observar na figura 5.36.

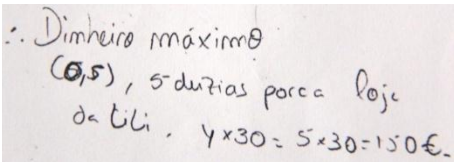


Figura 5.36: Resposta do Aluno J ao Prob2 da FA

A sua resposta não contradiz nenhuma condição do problema, contudo não é a correta. Este aluno, que escreveu todas as restrições algébricas incorretamente, cometendo um erro de preservação, utilizou a estratégia de subdivisão do problema em casos numéricos para resolvê-lo. Mas falhou um caso, precisamente o da solução ótima, obtendo assim um resultado incorreto. Ao contrário dos dois casos anteriores, desta vez, seria verificando cada passo da sua execução do plano que o aluno poderia ter encontrado a sua falha, ação que não evidencia ter realizado.

Conhecimento mobilizado

Na elaboração das suas respostas, os alunos mostraram mobilizar adequadamente o seu conhecimento acerca do contexto dos problemas bem como a representação verbal para interpretar a solução dos problemas.

Resumo

Na elaboração das suas respostas, os alunos mostraram interpretar corretamente os resultados que obtiveram, traduzindo-os para a representação verbal, indicando a solução ótima e por vezes o valor ótimo. Nessa tradução, tiveram em consideração o contexto em que o problema está enquadrado.

A não realização de estratégias de confirmação dos resultados obtidos, ou seja, a não confirmação de que a solução determinada respeita as condições do problema, ou a não verificação da correção de cada passo na execução do plano, levou a que uma pequena parte dos alunos fornecesse respostas incorretas ao Problema 2 da Ficha de Avaliação.

Capítulo 6 – Conclusões

6.1.Síntese do estudo

A intervenção letiva em que se baseia este estudo realizou-se na Escola Secundária da Ramada, ao longo de cinco aulas da unidade de ensino de Programação Linear, e cujos participantes foram os alunos de uma turma 11.º ano do corrente ano letivo de 2014/2015. Era uma turma com bom desempenho, composta de alunos participativos, questionadores, com a característica particular de não aceitarem uma resposta, um argumento ou justificação, sem a compreender. Estes alunos trabalhavam regularmente em trabalho autónomo e a pares.

De acordo com o Programa para a Matemática A em vigor (ME, 2001) procurei fazer uma breve introdução ao tópico de PL que permitisse "ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (…) conceitos aprendidos no 10.º e ampliados no 11.º [ano]" (ME, 2001, p. 4). Procurei também que o estudo da PL se concretizasse através da resolução de problemas usufruindo de contextos familiares aos alunos e que a aplicação de conhecimentos de domínios planos não fosse desligada da interpretação de situações concretas (ME, 2001).

Neste estudo procurei analisaras estratégias adotadas por alunos do 11.º ano bem como as dificuldades que estes manifestam na resolução de problemas de PL. Tendo este objetivo em conta, procurei responder a três questões:

iv. Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de PL?
v. Que conhecimentos mobilizam os alunos na resolução de problemas de PL?
vi. Quais as dificuldades que os alunos manifestam na resolução de problemas de PL, em particular na interpretação dos enunciados de problemas de PL e, na sua tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente?

Para fundamentar o trabalho realizado em contexto escolar e a análise dos dados relativos a esse trabalho na resolução de problemas de PL, apoiei-me nas orientações curriculares vigentes para o nível de ensino lecionado e em literatura de referência no que respeita à resolução de problemas e ao seu ensino e aprendizagem, assumindo os problemas de Programação Linear como um caso particular deste tipo de atividade.

A recolha de dados teve por base a observação participante e a recolha documental. A observação das aulas foi ainda apoiada em notas de campo e complementada com gravações em vídeo, devidamente autorizadas pelos Encarregados de Educação dos alunos da turma afeta ao estudo. A recolha documental é constituída pelas resoluções dos alunos das tarefas propostas na unidade de ensino.

6.2. Principais conclusões

Estratégias utilizadas na resolução de problemas de PL

De acordo com a análise dos dados recolhidos, as estratégias de resolução dos problemas de PL utilizadas pelos alunos variaram de acordo com a fase em que se encontravam na resolução dos problemas. Antes de proceder à formulação algébrica dos problemas PL, na fase de compreender o problema (Polya, 2003), alguns alunos sentiram necessidade de sublinhar informações importantes do enunciado, como sejam os dados e as condições do problema, e, seguidamente, elaboraram tabelas para organizá-las; outros utilizaram apenas uma das estratégias anteriores. Houve ainda alunos que fizeram apenas um registo de alguns dados na sua folha de resolução. Na formulação algébrica dos problemas, a maioria dos alunos definiu as variáveis e formulou as restrições. Estas estratégias para apoiar a compreensão dos problemas contribuíram para que a maioria dos alunos formulasse um modelo matemático correto para os problemas. Desta forma, estes alunos evidenciaram desenvolver com sucesso as três capacidades que White (1996) considerou fundamentais para o sucesso na resolução deste tipo de problemas – *(1)* a de compreender letras como representantes de números e não abreviaturas de objetos, *(2)* a de compreender o enunciado e *(3)* a de exprimir as variáveis e as restrições do problema em linguagem matemática.

Nos casos de menos sucesso na formulação do problema, dois alunos não definiram as variáveis de decisão e duas alunas realizaram uma formulação compartimentada. Estes casos serão referidos na secção das dificuldades.

Na fase de execução do plano (Polya, 2003), a estratégia usada por uma aluna, de introdução de um terceiro eixo z na representação gráfica da região admissível, elevando a sua dimensão do plano para o espaço, verificou-se ser de pouco sucesso pois dificultou a representação gráfica da região admissível. Uma outra estratégia observada foi a subdivisão do problema, com a sistematização todos os casos numéricos possíveis. Num destes casos, a estratégia é precedida por outra, de reformulação do problema. Esta estratégias mostraram-se úteis pois aproximou os alunos dos objetivos do problema

(Polya, 2003), permitindo-o listar todos os candidatos possíveis a solução do problema e escolher o de valor mínimo na função objetivo.

Na Tarefa 6 e na Ficha de Avaliação, a maioria dos alunos utilizou um método de resolução articulando o gráfico e o analítico, outros utilizaram exclusivamente um dos métodos. No método articulado, os alunos começam por apoiar-se na representação gráfica da região admissível para obter informação relativa à sua forma, enquanto região limitada ou não limitada, bem como ao número de vértices e à sua posição na região. Depois, determinaram analiticamente as coordenadas dos vértices, reconhecendo-os como a interseção das restrições duas a duas, selecionando a solução ótima e, por vezes, indicando o valor ótimo. Na utilização deste método, inesperado mas eficaz, os alunos demonstraram conjugar convenientemente os dois métodos, evitando repetir procedimentos equivalentes entre eles e evidenciando terem compreendido a aplicação da representação gráfica, no método gráfico, e da representação algébrica, no método analítico, para a resolução de problemas de PL.

Ainda na fase de execução do plano, na Ficha de Avaliação, os poucos alunos que não tiveram êxito na formulação algébrica dos problemas, utilizaram a estratégia de subdivisão do problema, por exploração de todos os casos numéricos possíveis, para determinarem a solução ótima. Esta estratégia numérica foi uma alternativa perspicaz que permitiu aos alunos avançarem, um com êxito e outro não, na resolução dos problemas mesmo sem um modelo matemático dos mesmos, e evidencia a boa compreensão que os alunos conseguiram desenvolver dos problemas de PL.

Na última fase, na elaboração das suas respostas, os alunos mostraram interpretar corretamente os resultados que obtiveram, traduzindo-os para a representação verbal, indicando a solução ótima e por vezes o valor ótimo. Nessa tradução, tiveram em consideração o contexto em que o problema está enquadrado.

Conhecimentos mobilizados

Na fase de formulação algébrica dos problemas de PL, o principal objetivo era "a tradução matemática das ideias expressas em linguagem corrente" (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1998, p. 70). A maioria dos alunos mostrou mobilizar adequadamente os seus conhecimentos relativos à utilização da linguagem algébrica para definir variáveis e representar expressões, inequações e funções nessas variáveis. Nesta fase, alguns alunos recorreram a casos particulares, dando valores às variáveis de decisão, para verificar as suas formulações de problemas de PL. Também Neves (2011) identificou que a maioria dos alunos do seu estudo foi bem sucedida na mobilização dos conhecimentos anteriores. Mais uma vez, os alunos evidenciaram desenvolver com sucesso as três capacidades que White (1996) identificou como fundamentais para o sucesso na resolução de problemas de PL.

Na fase de execução do plano em problemas de PL, os objetivos eram essencialmente "a representação gráfica de sistemas de inequações [e]a ligação gráfica [ou analítica] entre uma função objectivo e uma região possível do plano, por forma a obter a "melhor" solução para o problema"(Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1998, pp. 70-71).A maioria dos alunos mobilizou adequadamente os seus conhecimentos relativos à utilização da representação algébrica, desta vez para manipular as expressões, inequações e funções nas variáveis de decisão. Essa manipulação algébrica serviu para simplificar as expressões algébricas, facilitando aos alunos, através da mobilização de conhecimentos de geometria cartesiana (da equação reduzida da reta ede lugares geométricos), representar graficamente os sistemas de inequações resultantes da formulação e, por vezes, a função objetivo. Deste modo, os alunos ampliaram o estudo de lugares geométricos realizado no 10.º ano escolaridade, passando a representar no plano inequações de duas variáveis. Ampliaram também o seu conhecimento acerca de funções ao tomaram contacto com uma função linear de duas variáveis, a função objetivo, e a sua representação no plano.

Contrariamente ao assinalado por Neves (2011) e Dias (2011), os alunos não mostraram dificuldades em representar graficamente as regiões admissíveis. Na verdade, os alunos não revelaram os obstáculos cognitivos referidos por White (1996) como sejam a dificuldade em esboçar graficamente as equações do tipo $x = k$ ou $y = k$ (k constante) ou terem a noção incorreta de que a desigualdade $<$ significa que a região representada pela inequação em questão é o semiplano abaixo da reta que o delimita. Os poucos alunos que apresentaram regiões incorretas para os problemas (como o aluno J, devido à sua formulação incorreta), refletiam-nas de acordo com os sistemas de inequações que tinham formulado dos mesmos.

Alguns alunos voltaram a mobilizar nesta fase conhecimentos da representação numérica, articulada com a representação algébrica correspondente, para determinarem a solução ótima do problema. Verificou-se, ainda, que alguns alunos mobilizaram conhecimentos sobre geometria de vetores, em particular a equação vetorial da reta, para determinar vértices, que são soluções, de coordenadas inteiras do problema da

Tarefa 3. A mobilização inesperada destes conhecimentos mostra que estes alunos desenvolveram uma boa compreensão dos problemas e da utilização das representações envolvidas na sua resolução. A mobilização destes conhecimentos não foi referida em outros estudos, nomeadamente nos considerados neste trabalho.

Por fim, os alunos mostraram mobilizar conhecimentos aprendidos especificamente na subunidade de PL como: procedimentos de resolução de problemas através do método analítico, quando comparam o valor da função objetivo nos vértices da região admissível ou através do método gráfico, quando representam a função objetivo graficamente, enquanto geradora de uma família de retas paralelas, e procuram a reta com o maior valor de ordenada na origem. Ou ainda, procedimentos articulados dos dois métodos. Esta articulação, que não surgiu nas teses dos autores considerados, mostra uma apropriação adequada dos dois métodos referidos por parte dos alunos.

A mobilização adequada destes conhecimentos facilitou os bons resultados obtidos na Ficha de Avaliação, com todos os alunos a obterem classificações positivas, sendo que poucos tiveram classificações inferiores ou iguais a 12 valores. Deste modo, a maioria dos alunos evidenciou saber resolver problemas de PL.

Dificuldades manifestadas, em particular na interpretação e tradução de enunciados da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente

A fase de formulação algébrica dos problemas de PL foi onde se verificaram mais dificuldades nos alunos, tal como aconteceu nos estudos de Dias (2011) e Neves (2011). Os alunos que demonstraram maiores dificuldades fizeram uma formulação compartimentada das restrições dos problemas, isto é, não identificaram restrições para as duas variáveis de decisão em causa, mas para cada uma isoladamente. E, provavelmente, a origem desta formulação poderá vir da interpretação do enunciado, estando de acordo com uma das conclusões de Neves (2011), que os faz cometer o erro de correspondência de ordem de palavras (cf. aluna F).

Ocorreu também um erro de interpretação, pois um aluno interpreta incorretamente uma representação numérica como um caso particular de outra algébrica (aluno I), e um erro de preservação, quando outro aluno (aluno J) interpretou corretamente a informação do enunciado sob a representação verbal e traduziu-a incorretamente para a representação algébrica.

Outras dificuldades que surgiram na fase da formulação foram a omissão das restrições de não negatividade, cometendo um erro concetual de omissão (Bossé et. al., 2011), especialmente quando alunos utilizaram a tabela como apoio para a formulação dos problemas e a escrita de restrições em excesso, tornando-as redundantes. Contudo, estes erros são menores, pois não conduziram à resolução incorreta dos problemas.

Relativamente ao preenchimento de tabelas, e tal como aconteceu no estudo de Dias (2011), a primeira vez que lhes foi proposta esta tarefa, alguns alunos preencheram-nas apenas com os dados do enunciado, não tendo em conta as variáveis que eram dadas. No entanto, ao contrário do que esta autora refere, esta dificuldade pôde ser resolvida na lecionação da unidade de ensino, com a discussão da Tarefa 5.

Na tradução de representações algébricas para verbais, os alunos evidenciaram dois tipos de dificuldade: o erro de comparação estática (Bosséet. al, 2011) e a dificuldade em justificar o sentido da desigualdade de inequações, tendo em conta o contexto do problema. No que respeita à primeira dificuldade referida, alguns alunos mostraram ser capazes de interpretar as representações algébricas, mas traduzem-nas inadequadamente para a representação verbal, por escolha desadequada de palavras. Já na segunda dificuldade observada, os alunos traduzem o significado das representações algébricas fornecidas, mas não justificam o sentido das desigualdades.

A dificuldade identificada na maioria das tarefas, na fase de resolução dos problemas de PL, consistiu na não justificação da solução ótima, e respetivo valor ótimo, tendo em conta a função objetivo como critério de seleção daquela. O objetivo dos problemas era claro para os alunos, identificavam-no mesmo que implicitamente, mas a aplicação da função objetivo, quer pela sua representação algébrica quer pela gráfica, não foi tão clara para eles. Alguns alunos não explicitaram na sua resolução o objetivo e/ou a função objetivo, parecendo decidir a solução ótima sem critério. Alguns determinaram o que consideraram ser a solução ótima e só referiam o objetivo, para justificar aquela, na sua resposta ao problema. É a função objetivo, quando existe, que permite escolher, de entre todos os vértices da região admissível, aquele que é solução ótima do problema, pois esta resulta do vértice que otimiza aquela função. Mas para decidir qual, é preciso haver valores da função objetivo para comparar, pelo menos as imagens dos vértices (segundo o Teorema Fundamental da PL), mas há alunos que não realizam esta comparação.

Na fase de interpretação da solução, uma grande parte dos alunos não forneceu uma resposta aos problemas das Tarefas. No entanto, esta dificuldade parece ter sido ultrapassada com o trabalho realizado em sala de aula, pois na Ficha de Avaliação, todos os alunos, excetuando um, respondem ao problema. Na Ficha de Avaliação constata-se que a não realização de estratégias de confirmação dos resultados obtidos, por exemplo se a solução determinada respeita as condições do problema (Polya, 2003), e a não verificação da correção de cada passo na execução do plano (Polya, 2003), levou a que uma pequena parte dos alunos não identificasse a incorreção das suas respostas.

6.3. Reflexão final

Considero-me um privilegiado. Fui privilegiado em estagiar com uma professora cooperante experiente na profissão, dedicada e esmerada, fui privilegiado por estagiar numa turma que exigiu de mim o conhecimento da disciplina e capacidades de docência em sala de aula, fui privilegiado por estagiar numa escola com bom ambiente, dinâmica e interessada nos seus alunos. Vivi boas experiências durante o estágio, experiências importantes para a minha formação pessoal, social e profissional. Vi muitas questões, em especial relativas ao exercício da profissão em sala de aula, serem respondidas sem (quase) ter tido necessidade de as colocar. Provavelmente levantaram-se outras questões, das quais não estou consciente. Muitas questões só emergem no campo de trabalho e, ponderando sobre elas, conferem-me uma oportunidade de alargar a minha compreensão sobre o mesmo.

No cômputo geral, penso que a lecionação que realizei correu bem. Relativamente aos conteúdos, acredito que os alunos tenham apreendido as ideias mais importantes da temática da PL. A contribuir para esta aprendizagem considero que estiveram as tarefas propostas para a unidade de ensino, pois procurei que cada uma tratasse sequencial e construtivamente os conteúdos de PL a par com os objetivos de aprendizagem e procurei que a aprendizagem partisse da resolução das tarefas (Hatfield, 1978; NCTM, 2000). Estas tarefas foram um meio adequado de ir acrescentando conhecimento ao conhecimento já trabalhado, sem esquecer, claro, os momentos necessários para a consolidação das aprendizagens. Estes últimos consistiram na resolução de problemas de PL aplicando os conhecimentos recentes adquiridos. Na escolha ou elaboração das tarefas considero ter sido relevante abordar a variedade dos aspetos teóricos da temática – o tipo de regiões admissíveis, o Teorema Fundamental da Programação Linear, o acréscimo, alteração ou eliminação de restrições e a maximização ou minimização da função objetivo, quando existe. Além disso, creio que será importante que se abordem em problemas de PL contextualizados na realidade. As Tarefas 3 e 4 que propus permitiram-me abordar aspetos teóricos em problemas de PL em contextos puramente matemáticos. Compreendi mais tarde que foi uma oportunidade que retirei aos alunos de trabalharem mais problemas contextualizados na recomendo, e de realçar a relevância da Matemática e dos seus diversos aspetos em contextos familiares aos alunos.

Em paralelo com as tarefas esteve a opção de repartir as aulas em momentos de trabalho autónomo e momentos de discussão, como sugerido por diversos autores (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Stein et al., 2008). Considero que foi muito importante para os alunos terem um momento autónomo de contacto com a tarefa, para tentarem interpretar o enunciado e estabelecerem um plano para a resolver, seguido de um momento de discussão, onde confrontaram as suas ideias. Contrariamente ao sucedido na minha intervenção, por inexperiência minha, deverá ser dedicado um tempo alargado a estes momentos de discussão que permitam aos alunos abrirem-se a outras ideias, que por vezes lhes podem ser mais favoráveis para a compreensão e desenvolverem a capacidade de argumentação. Também para o professor estes momentos são importantes, para perceber a evolução das aprendizagens dos alunos, podendo agir de modo adequado e atempado em relação a essa perceção, no sentido de uma aprendizagem ou desempenho melhor.

O programa GeoGebra e os diapositivos em PowerPoint foram outra contribuição para as aprendizagens dos alunos. Para além dos efeitos de agilizar a gestão de uma aula, permitiram apresentar organizadamente os aspetos que pretendi realçar a nível de conteúdos. No caso do GeoGebra, este permitiu articular várias representações matemáticas (a gráfica, a algébrica e a numérica) que estão envolvidas nos procedimentos dos métodos de PL, bem como demonstrar dinamicamente o comportamento gráfico de funções objetivo numa região admissível.

Tendo realçado os aspetos anteriores como relevantes no processo de ensino-aprendizagem da PL seria interessante, em futuras investigações, analisar mais em pormenor cada um deles: de que forma contribui a resolução de tarefas de PL para a aprendizagem dos alunos; em particular, de que forma contribuiria a resolução de problemas de PL para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos alunos. Outras questões, ainda, seriam o contributo da calculadora (ou o GeoGebra, ou outro recurso didático) para o ensino-aprendizagem desta temática, ou em particular para a resolução de problemas de PL. Outra questão interessante é que (nova) imagem da Matemática desenvolvem os alunos com a lecionação desta temática, através da resolução de problemas contextualizados na realidade.

Relativamente aos aspetos que foram analisados na componente investigativa deste trabalho (estratégias, conhecimentos e dificuldades), durante a análise dos dados levantei algumas questões que, não sendo o foco desta investigação, remeto-as em expetativa para as futuras investigações. Uma delas é: qual a origem das dificuldades identificadas nos alunos em PL? Esta questão sugere-me outra muito próxima: como compreendem os alunos os enunciados dos problemas de PL, antes e depois da lecionação da temática? Outras questões são como resolvem os alunos um problema de PL sem o conhecimento da temática? De que forma podia o professor aproveitar as ideias resultantes da questão anterior para introduzir a temática ou os conceitos de PL?

Referências

Abrantes, P. (1985). Planificação no ensino da matemática. *Texto de apoio à Metodologia da Matemática.* Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Abrantes., P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só) …. *Educação e matemática, 8,* 7-10 e 35.

APM (2001). *Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Acedido a 11 de janeiro de 2015 em http://www.apm.pt/apm/2001/2001_m2.htm.

Blomhøj, M. (2009).Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modeling. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterey, México.

Blum, W., & Niss, M. (1991).Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. In Dörfler (Ed.), *Educational studies in mathematics* (pp. 37-68). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994).*Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(*3*), 113-133.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. da Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-231). Lisboa: IE.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16-30.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981).Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly,* 88, 286-290.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2014). *Novo espaço 11.* Caderno do Professor. Porto: Porto Editora.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2014). *Novo espaço 11*. Porto: Porto Editora.

Dias, M. A. F. (2011). *A programação linear no ensino secundário.* (Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro)

Friendlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In Cuoco(Ed.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook*. (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86). Reston, VA: NCTM

Hillier, F., & Lieberman, G. (2010).*Introduction to operations research*(9ªed.). Nova Iorque, NY: McGraw-Hill.

Kerr, D., & Maki, D. (1979). Mathematical models to provide applications in the classroom. In Sharon (Ed.), *Applications in school mathematics* (pp. 1-7).Reston, VA: NCTM.

Kolman, B., & Beck, R. (1995). *Elementary linear programming with applications*. Reino Unido: Elsevier.

Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E.,& Bastos, R. (1998). *Brochura de Matemática – Geometria 11º ano*. Lisboa: ME-DES.

Lüdke, M. & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária

Luenberger, D., & Ye, Y. (2008). *Linear and nonlinear programming* (3ª ed.). Nova Iorque, NY: Springer

MacGregor, M. E. (1986). A fresh look at fruit salad algebra. *The Australian Mathematics Teacher*, *42*(3), 9-11.

Matos, J. F., Carreira, S. P., Santos, M. P., & Amorim, I. (1995). *Modelação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mayer, R. (1999). Problem Solving. In Runco, M., & Pritzker, S. (Eds.), *Encyclopedia of Creativity* (Vol. 2, pp. 437-447). Reino Unido: Elsevier.

ME (2001a). *Programa de matemática a do ensino secundário. 10.º ano*. Lisboa: DGIDC.

ME (2001b). *Programa de matemática do ensino secundário. 11.ºano*. Lisboa: DGIDC.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

MEC (2013). *Programa e metas curriculares de matemática do ensino básico*. Lisboa: MEC.

Menezes, L. (2007). Processos Matemáticos. (Seminário Final do P.F.C.M. Guarda)

Monteiro, M. H., & Teixeira, A. (2009). An experimental study on the resolution of Linear Programming problems on High School classrooms. *Actas do IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións* (pp. 53-58), Ourense

Nascimento., M. J. T. do, & Nascimento. M. M. da S. (2003). Programação linear: Tomada de decisões, uma nova abordagem no ensino secundário. *Actas do VI Congreso Galego de Estatística e Investigacion de Operacións* (pp. 369-374), Vigo.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM.(2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neves, J. F. M. (2011). *A programação linear no ensino secundário.* (Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro)

Neves, M., Pereira, A., & Silva, J. (2014). *Matemática a 11*. Porto: Porto Editora.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Trad.). Lisboa: Gradiva (Obra original publicada em 1945).

Ponte., J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM.

Ponte., J. P. (2014).Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IEUL.

Schoenfeld, A. (1980). Heuristics in the classroom. In Krulik, S., & Reys, R. (Eds.).*Problem solving in school mathematics: 1980 yearbook*.(pp. 9-22). Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.(Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM)

Stevens, S. P., & Palocsay, S. W. (2004).A translation approach to teaching linear program formulation. *INFORMS TransactionsonEducation,4*(3),38-54.

Sebastião e Silva, J. (1975).*Guia para a utilização do compêndio de Matemática* (Vol 1). Lisboa: Edição GEP.

Semana, S. & Santos, L. (2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em matemática. Atas do *XX SIEM* (pp.488-499). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., and, Hughes, E. K.(2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009).*Implementing standards – based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Nova Iorque, NY: Teachers College Press.

Tavares, L., Oliveira, R., Themido, I,& Correia, F. (1996). *Investigação operacional*. Lisboa: McGraw-Hill.

Teixeira, A., Nascimento, M. M., & Monteiro, H. (2011). Programação linear: uma experiência na escola de verão de matemática. *Actas do 15º Congresso Nacional da Associação Portuguesa de Investigação Operacional* (pp. 1-12). Coimbra, INESC

Teixeira, A, & Monteiro, H. (2009). An experimental study on the resolution of linear programming problems on high school classrooms. *IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*(pp. 53–58), Ourense

Watson, A. (2007). Modelling, problem-solving and integrating concepts. *Key understandings in mathematics learning*. London: Nuffield Foundation.

White, Kevin M A. (1995). *Introductory (graphical) linear programming in the senior secondary school: An action research study of some cognitive obstacles to its learning and an evaluation of a teaching approach designed to reduce the effect of these cognitive obstacles.* (Tese de Mestrado, Universidade da Tasmânia, Austrália).

White, K. M (1996).Secondary school students' understanding of inequalities in a linear programming task. In P. C. Clarkson (Ed.),*Technology in mathematics education: Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).*Melbourne. Austrália.

Whickelgren, W. A. (1974). *How to solve mathematical problems.* Nova Iorque, NY: Dover Publications.

Anexos

Anexo 1: Autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação,

Lisboa, 12 de Fevereiro de 2015

Eu, Rui Alexandre Brandão Prado, encontro-me a realizar o Mestrado em Ensino da Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. No âmbito do referido Mestrado estou a desenvolver um projeto de cariz investigativo intitulado “A Programação Linear no 11.º ano: estratégias e dificuldades na resolução de problemas”. Este projeto tem como principal objetivo analisar as estratégias adotadas por alunos do 11.º ano e as dificuldades que manifestam na resolução de problemas de Programação Linear.

Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário recolher dados em contexto de sala de aula na turma 11.º [redacted] da Escola Secundária da Ramada, à qual irei lecionar a unidade de ensino Tema I (Geometria no Plano e no Espaço II). Os dados a recolher incluem a gravação áudio e vídeo de alguns momentos da aula, nomeadamente as discussões com toda a turma. Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem ao seu(sua) educando(a). Face ao exposto, solicito autorização para a referida recolha de dados.

Agradeço antecipadamente a colaboração e atenção dispensada.

Com os melhores cumprimentos,

Professora Inês Campos

Professor Estagiário Rui Prado

Agradeço assinatura e devolução do destacável

Eu, ____ encarregado(a) de educação do aluno____, nº ______da turma [redacted] do 11.º Ano de escolaridade, da Escola Secundária da Ramada, tomei conhecimento dos objetivos do estudo intitulado “A Programação Linear no 11.º ano: estratégias e dificuldades na resolução de problemas”, que envolverá a referida turma, na disciplina de Matemática e ___________________(autorizo/ não autorizo) a participação/colaboração do meu educando na realização do mesmo.

Em relação às gravações áudio/vídeo das entrevistas que serão utilizadas para a concretização do estudo, salvaguardando o respetivo anonimato, __________________ (autorizo/não autorizo) a participação/colaboração do meu educando.

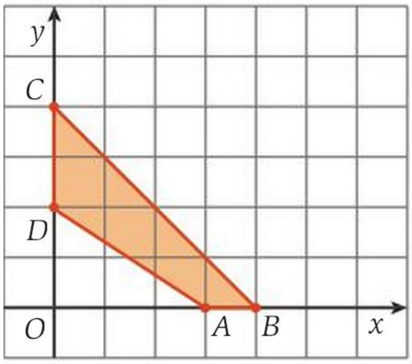
______________________________, ___ de _____________________de 2015

O/A Encarregado/a de Educação

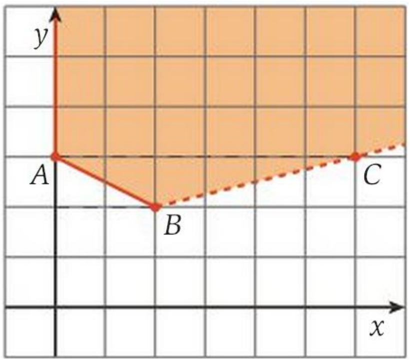
Anexo 2: Tarefa 1

1. Escreve um sistema de inequações que defina cada domínio plano apresentado. Considera cada quadrícula 1 unidade de medida (u.m.).

a.



b.



2. Determina, graficamente, a região do plano definida pelos sistemas de inequações apresentados:

a. $\begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ 2x - 6y \leq 10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y \geq -1 \\ 3x - 2y \geq -12 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

3. Para a alínea b, determina as coordenadas dos seus vértices.

4. Para cada uma das alíneas da questão 2 indica, justificando, se os pontos que se seguem pertencem a alguma das regiões definidas na questão anterior:

a. $P(4,0)$ b. $Q(-2,1)$ c. $R\left(\frac{1}{2},-2\right)$

Tarefa adaptada de Neves, M., Pereira, A. &, Silva, J. (2014). Matemática a 11. Porto: Porto Editora.

Anexo 3: Tarefa 2

Parte I

O Rui recebeu do pai um cartão-oferta de 25€ de uma loja *online* de músicas e jogos. Cada canção custa 1€ e cada jogo custa 2€, e ele quer comprar, pelo menos, 15 artigos com o cartão.

1. Representa algebricamente, através de um sistema de inequações, o cenário enunciado.
2. Indica uma solução do sistema de inequações da questão anterior. O que representa essa solução no contexto do enunciado? Essa solução que determinaste é única?
3. Representa graficamente as inequações anteriores e identifica, justificando, a região do plano correspondente às possíveis compras.

Parte II

4. A mãe do Rui ofereceu-lhe outro cartão-oferta da mesma loja de músicas e jogos, mas não lhe disse qual a quantia contida nele. Em vez disso, informou-o de que podia comprar até 18 artigos com esse novo cartão. O Rui, não sabendo quanto pode gastar, quer fazer compras gastando o mínimo que lhe for possível. Sabe que o cartão-oferta tem a validade de 2 meses e que uma vez que decida fazer uma compra deve adquirir mais de 3 artigos. Ajuda o Rui a decidir esta compra, sabendo que ele pretende adquirir tantas ou mais canções que jogos.

   Na resolução deves explicitar o teu raciocínio e justificar as tuas escolhas.

Sugestão: Modela matematicamente o problema. Identifica as compras possíveis e, delas, a melhor compra.

Tarefa adaptada de Khan Academy; revisão científica de SPM, SPF e SPQ

Anexo 4: Tarefa 3

(Manual, página 151, Tarefa 39, questão 1)

1. A região admissível de um problema é definida pelas condições:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ y \geq 0 \\ 3y \leq 5x \\ 2x + 3y \leq 21 \end{cases}$$

1.1. Faz uma representação geométrica da região admissível.

1.2. Determina as coordenadas dos vértices do polígono correspondente à região admissível.

1.3. Determina o par $(x\,, y)$ para o qual a função $F(x\,, y) = x + 2y$ toma o valor máximo na região admissível.

1.4. Admite que a função objetivo é definida por $G(x\,, y) = 4x + 6y$.

1.4.1. Neste caso, qual é o número de potos da região admissível em que a função toma o valor máximo? Explica.

1.4.2. No caso das variáveis x e y apenas tomarem valores inteiros, quantos são os pontos da região admissível em que a função toma o valor máximo?

Anexo 5: Tarefa 4

1. Representa, em relação a um referencial o.m., o conjunto de pontos do plano definido por:

1.a.

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ x \geq 1 \\ y \geq x \end{cases}$$

Determina o máximo e o mínimo da função $F(x, y) = -x + y$ nesse conjunto.

1.b.

$$\begin{cases} y \geq x \\ 2y \geq -3x + 9 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Determina o máximo e o mínimo da função $F(x, y) = \frac{1}{2}x + y$ nesse conjunto.

Removendo a restrição $y \leq 5$, qual passa a ser o máximo da função F?

2. Comenta os resultados obtidos relativamente aos tipos de região do plano definidos pelos sistemas de inequações.

Anexo 6: Tarefa 5

Num armazém de produtos alimentares, há, em *stock*, 80 kg de amêndoas de licor e 100 kg de amêndoas de chocolate.

O armazenista decide fazer duas misturas, uma constituída por amêndoas em que metade é de cada tipo e outra em que 30% da mistura corresponde a amêndoas de licor, sendo as restantes de chocolate.

A primeira mistura será vendida a 12€/kg e a segunda a 9€/kg.

Completa a tabela seguinte:

		Quantidade (kg)		Preço (€)
		Amêndoas de licor	Amêndoas de chocolate	
Mistura 1 (kg)	x			
Mistura 2 (kg)	y			
Total				

1. Será possível ao armazenista efetuar 70 kg da primeira mistura e 90 kg da segunda mistura? Justifica.

2. Considera o seguinte sistema e interpreta, justificando, cada inequação à luz do contexto do problema.

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 0{,}5x + 0{,}7y \leq 100 \\ 0{,}5x + 0{,}3y \leq 80 \end{cases}$$

3. Qual é o significado da expressão $12x + 9y$? Explicita o teu raciocínio.

4. Averigua, justificando, se o par $(20{,}30)$ é solução do problema? Se sim, qual é o significado dessa solução no contexto do problema?

5. Qual deverá ser a decisão do armazenista em relação à quantidade que deverá comercializar de cada mistura, de modo a maximizar o valor de venda total?

Tarefa adaptada de Costa, B. & Rodrigues, E. (2014) Novo espaço matemática a 11. Porto: Porto Editora.

Anexo 7: Tarefa 6

(Proposta 31, página 170)

Numa fábrica produzem-se peças de dois tipos, A e B. Consideram-se duas fases no fabrico dessas peças: montagem e pintura. Semanalmente, a peça A requer 3 horas na fase de montagem e 3 horas na fase de pintura e a peça B requer 5 horas de montagem e 3 horas de pintura.

A disponibilidade semanal da secção de montagem para estas peças é de 210 horas e a da secção de pintura é de 180 horas.

O lucro obtido em cada peça A é de 300 euros e em cada peça B é de 450 euros.

Admitindo que é vendida toda a produção, quantas peças de cada tipo devem ser fabricados de modo que o lucro seja máximo?

(Proposta 34, página 171)

Uma empresa de detergentes pretende fazer a promoção de uma nova marca de amaciador para roupa, "Fofo", através da sua conhecida marca de detergente para máquina "Lavagem".

Ao fornecer os comerciantes, a empresa oferece as seguintes condições:

- Compra de um lote de pelo menos 60 unidades dos dois produtos.
- Preço unitário do "$Lavabem$": 2,25€.
- Preço unitário do "$Fofo$": 1,2€.
- O número de unidades do "$Lavabem$" deve corresponder a pelo menos metade, no máximo, o dobro do número de unidades do amaciador.

O comerciante não pretende gastar mais de 150€.

Para beneficiar da promoção, qual a quantidade de cada um dos produtos que deve comprar de modo a ser:

1. mínima a do novo amaciador?
2. máxima a do conhecido detergente?

(Proposta 32, página 170)

Numa pastelaria há duas epecialidades: "$Bolo\ da\ Avó$" e "$Doce\ da\ Casa$".

Em cada “Bolo da Avó” são gastos 10 ovos e $0{,}5\ kg$ de açúcar. No “Doce da Casa” são gastos 8 ovos e $0{,}25\ kg$ de açúcar.

O preço de venda ao público de cada “$Bolo\ da\ Avó$” e de cada “$Doce\ da\ Casa$” é, respetivamente, de $15€$ e $10€$.

Num certo dia, para a produção destas duas especialidades, há na pastelaria $10\ kg$ de açúcar e 250 ovos.

Sabe-se que toda a produção é vendida. Determina quantos bolos de cada especialidade devem ser confecionados para que o produto da venda seja máximo.

(Proposta 33, página 170)

Uma indústria têxtil confeciona toalhas de tecido com a aplicação de bordado em dois tamanhos: médio e grande.

Cada toalha de tamanho médio gasta $2\ m$ de tecido e $0{,}5\ m$ de bordado e cada toalha de tamanho grande gasta $3\ m$ de tecido e $1{,}5\ m$ de bordado.

O custo de cada toalha de tamanho médio e tamanho grande é de 70 e 120 euros, respetivamente.

Quantas toalhas de cada tipo devem ser confecionadas para se obter o máximo rendimento, sabendo que há em *stock* $125\ m$ de tecido e $50\ m$ de bordado?

(Proposta 35, página 171)

Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia elétrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de fuel, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período noturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a $40\ MWh$.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 90 euros;
- o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os $40\ MWh$.

Representa por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consunidas pela autarquia.

Determine qual a quantidade de energia de cada tipo que deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas

Anexo 8: Problemas para a Ficha de Avaliação

Ficha de Avaliação

Problema 1

Durante o mês de Julho, para juntar algum dinheiro, a Rita decidiu fazer colares de missangas para vender. Num mês não consegue fazer mais do que 5 dúzias de colares. A loja da tia Mimi paga-lhe cada dúzia de colares a 40 euros, mas não lhe compra mais de três dúzias; a loja da tia Lili paga-lhe por cada dúzia de colares apenas 30 euros, mas compra-lhe tantas dúzias quantas ela esteja interessada em vender.

Investiga como deve a Rita distribuir os colares pelas duas lojas de modo a obter o valor de venda máximo.

Problema 2

O Tiago está a planear as suas férias no próximo Verão. Quer passar uns dias na praia e outros na Serra do Gerês. Na serra não quer estar mais que seis dias e o número de dias na praia não deve ser inferior ao tempo de estadia no Gerês.

Como qualquer jovem está condicionado pela sua fraca capacidade económica: dispõe apenas de 80 euros para dormidas e sabe que, na praia, vai ficar num albergue para jovens que cobra 8 euros por noite, enquanto no Gerês, cada dormida no parque de campismo custa 4 euros. Entretanto estabeleceu que quer estar fora, no mínimo, 10 dias.

Atendendo ao seu orçamento, qual o número máximo de dias que o Tiago pode sair e como os deve distribuir entre a praia e a serra?

Anexo 9: Proposta de resolução dos problemas da Ficha de Avaliação

Problema 1

Definir as variáveis: $x -$ nº de dúzias de colares vendidos à loja da tia Mimi
$y -$ nº de dúzias de colares vendidos à loja da tia Lili

Construir o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 & \text{(R1)e (R2)} \\ y \geq 0 & \text{(R3)} \\ x + y \leq 5 & \text{(R4)} \end{cases}$$

Identificar a função objetivo: $F(x\,,y) = 40x + 30y$

Determinar os vértices:

(R1) e (R3): $(0\,,0)$ (R1) e (R4): $(0\,,5)$ (R2) e (R3): $(3\,,0)$
(R2) e (R4): $(3\,,2)$ (R3) e (R4): $(5\,,0)$, este vértice não pertence à região admissível pois o valor de x não respeita a restrição (R2)

Determinar a solução ótima:
Pelo Teorema Fundamental da PL, a solução ótima, se existir, encontra-se em pelo menos um dos vértices da região admissível.
$F(0\,,0) = 0$; $F(0\,,5) = 150$; $F(3\,,0) = 120$; $F(3\,,2) = 180$

A Rita deve vender 3 dúzias de colares à tia Mimi e 2 dúzias de colares à tia Lili, obtendo o lucro máximo de 180€.

Problema 2

Definir as variáveis: $x -$ nº de dias na praia $y -$ nº de dias na Serra do Gerês

Construir o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 6 & \text{(R1)e (R2)} \\ x \geq y & \text{(R3)} \\ x + y \geq 8 & \text{(R4)} \\ 8x + 4y \leq 80 & \text{(R5)} \end{cases}$$

Identificar a função objetivo: $F(x\,,y) = x + y$

Determinar os vértices:

(R1) e (R3): $(0\,,0)$, este vértice não pertence à região admissível, pois não respeita a restrição (R4)
(R1) e (R4): $(8\,,0)$ (R1) e (R5): $(10\,,0)$ (R2) e (R3): $(6\,,6)$

(R2) e (R4): $(7\,,6)$ (R3) e (R4): $(4\,,4)$

(R3) e (R5): $\left(\frac{20}{3}\,,\frac{20}{3}\right)$, este vértice não pertence à região admissível, pois não respeita (R2)

(R4) e (R5): $(12\,,-4)$, este vértice não pertence à região admissível, pois não respeita (R1)

Determinar a solução ótima:

Pelo Teorema Fundamental da PL, a solução ótima, se existir, encontra-se em pelo menos um dos vértices da região admissível.

$F(8\,,0) = 8$; $F(10\,,0) = 10$; $F(6\,,6) = 12$; $F(7\,,6) = 13$

$F(4\,,4) = 8$.

O Tiago deve passar 7 dias na praia e 6 dias na Serra do Gerês, sendo que vai de férias num máximo de 13 dias.

Anexo 10: Plano da Aula 1

Data/Hora: Quinta-feira, 16–04–2015 / 10h00 – 11h30 **Sala:** C 2.1 **Turma:** 11º E

Sumário: Introdução à Programação Linear: resolução de duas tarefas.

Tópicos/Subtópicos: Geometria no plano e no espaço II: Programação Linear.

Objetivos específicos:

- Revisão de conhecimentos essenciais ao estudo da PL – tarefa 1
- Exploração de um problema simples introdutório aos conceitos de PL – tarefa 2
- Interpretar enunciados de problemas em contextos de semirrealidade os quais se podem formalizar matematicamente através de sistemas de inequações
- Introdução aos conceitos associados à PL
- Procedimentos para a resolução de um problema de PL

Recursos: Sala de aula: projetor, quadro, giz colorido. Professor: enunciado das tarefas, material de desenho para o quadro – régua e esquadro, diapositivos em PPT. Alunos: caderno diário, material de desenho – régua, calculadora.

Capacidades transversais: Resolução de problemas. Autonomia. Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho: Trabalho autónomo a pares. Discussão em grupo-turma.

Desenvolvimento da aula

(1) Introdução da aula *(10 minutos – 10h00)*

Iniciar a aula cumprimentando a turma e ditando o sumário.
Explicitar o que está previsto para a aula:

Nesta aula introduzimos o estudo de um novo tema – a Programação Linear. Vamos fazê-lo através da resolução de duas tarefas. A primeira serve para recordar alguns conhecimentos necessários para o estudo deste tema. A segunda tarefa já será para introduzir a Programação Linear.

Distribuição do enunciado da Tarefa 1.

A tarefa é para ser realizada a pares, resolvida no caderno diário. Dou-vos 10 minutos para a explorarem.

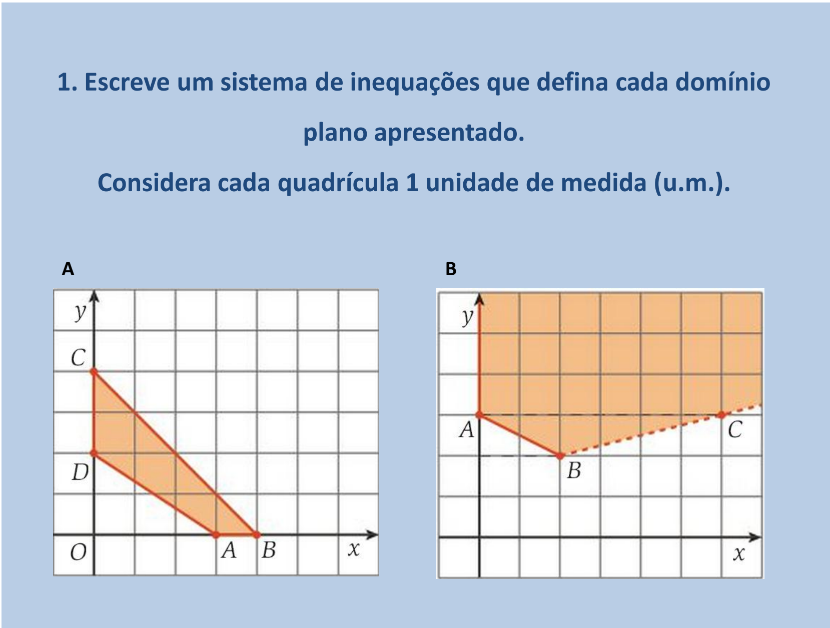
(2) **Exploração e Discussão da Tarefa 1** *(25 minutos – 10h10)*

O objetivo desta tarefa é recordar e clarificar questões associadas aos procedimentos que cada uma das questões envolve. Esta é a base matemática para a resolução de problemas programação linear e para as tarefas seguintes.

Dedicam-se 10 minutos para a exploração desta tarefa. Nesta fase, o professor percorre a sala procurando identificar dificuldades, dúvidas, bloqueios, reações dos alunos à tarefa. Após esse tempo, passa à fase de discussão – 15 minutos.

Projeta-se na tela cada questão desta tarefa e utiliza-se o quadro à esquerda para se fazerem os registos que forem necessários de intervenções e resoluções.

DIAPOSITIVO 1



Relativamente a esta questão propõem-se as seguintes perguntas:

Quantas inequações serão necessárias para delimitar o domínio plano A (ou B)?

Quais foram as inequações que determinaram?

As sugestões propostas pelos alunos são registadas no quadro pelo professor e seguidamente é discutida a sua validade.

Como é que determinaram cada inequação?

Por exemplo, como é que fizeram para determinar a inequação (tal)?

Como é que decidiram qual o semiplano que interessa para delimitar o domínio plano? (sabendo que uma reta delimita dois semiplanos)

Com estas questões, procura-se que os alunos se consciencializem e explicitem, oralmente ou por escrito – escrevendo no quadro caso necessário – cada etapa e procedimento das suas resoluções.

Desta questão da tarefa, e da discussão, procura-se que os alunos compreendam/recordem:

- que o domínio plano é limitado por retas e resulta da interseção de semiplanos;
- que cada reta é representada por uma equação - a equação reduzida da reta ou a cartesiana;
- que uma reta delimita dois semiplanos e que um dos semiplanos de cada reta contribui para a delimitação do domínio plano;
- que cada semiplano é representado algebricamente por uma inequação.

As questões podem ser dirigidas à turma ou a algum elemento da turma em particular cuja participação seja voluntária ou cuja resolução o professor tenha identificado, aquando da fase da exploração, como relevante partilhar.

Na fase de discussão esclarecem-se também algumas dúvidas que surjam.

DIAPOSITIVO 2

2. Determina, graficamente, a região do plano definida pelos sistemas de inequações apresentados.

(A) $\begin{cases} x-3y\geq 0 \\ 2x-6y\leq 10 \end{cases}$ **(B)** $\begin{cases} x+y\geq -1 \\ 3x-2y\geq -12 \\ 0\leq y\leq 5 \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases}$

Relativamente à questão 2, propõem-se as seguintes questões:

Como é que representam graficamente inequações? Como é que procederam?

Como fizeram para delimitar a região plana (ou domínio plano) da alínea (A)? Como pensaram?

Alguns alunos poderão recorrer à calculadora para determinar a representação gráfica dos sistemas de inequações. E para essa situação, o professor deverá alertar para seguinte: aquando da transposição da representação gráfica na calculadora para o papel, os alunos deverão indicar a escala utilizada e os pontos de interseção das retas com os eixos coordenados.

Pretende-se abordar também, oralmente, a representação pela via analítica. Para tal, e a título exemplificativo, o professor representa graficamente os sistemas de inequações da alínea (B) no quadro, com régua e esquadro próprios.

Quantas inequações estão presentes na alínea (A)? E na alínea (B)?

Que aspeto tem a região plana (ou domínio plano) da alínea (A)?

Como é que representam graficamente inequações? Como é que procederam?

Da questão 2 desta tarefa procura-se que os alunos realizem o raciocínio inverso ao efetuado na tarefa anterior. Aqui também se pretende que os alunos compreendam/recordem os mesmos tópicos referidos na alínea anterior.

<u>DIAPOSITIVO 3</u>

3. Para a alínea (B) da questão 2 determina as coordenadas dos seus vértices.

Para esta questão propõem-se perguntas como as seguintes:

Têm que determinar as coordenadas de quantos vértices?

Como é que determinaram as coordenadas dos vértices?

Alguns alunos poderão recorrer à calculadora, outros poderão seguir a via analítica. Pretende-se discutir as duas vias de resolução. Relativamente à primeira via, o professor deverá alertar para o seguinte aspeto: mesmo que a determinação das coordenadas dos vértices tenha sido realizada pela calculadora, no papel deve ser indicada de que interseção de inequações resultam as coordenadas de determinado vértice.

Desta questão pretende-se que os alunos compreendam/recordem que:

- as regiões planas podem tomar formas que lhes são familiares, figuras poligonais;
- essas figuras têm arestas e vértices (e outras propriedades) tal qual as que trabalharam em anos anteriores, mas agora resultantes da interseção de inequações (associados a um tema matemático diferente – a Programação linear)
- os vértices resultam da interseção de duas retas associadas a duas inequações do sistema, pelo que determinar as suas coordenadas é determinar o ponto de interseção.

Caso seja necessário, o professor determina as coordenadas de um vértice no quadro, a título exemplificativo.

DIAPOSITIVO 4

4. Para cada uma das alíneas da questão 2 indica, justificando, se os pontos que se seguem pertencem à região por eles definida:

a) $P(4,0)$

b) $Q(-2,1)$

c) $R\left(\frac{1}{2},-2\right)$

Após a fase de exploração, para esta questão propõem-se as seguintes questões.

O ponto P pertence a alguma das regiões planas da questão 2? Porquê?

Porque é que pertence à região (tal)? Porque não pertence à região (tal)?

Desta questão procura-se que os alunos percebam que um ponto pertence a uma região plana se satisfizer todas as inequações do sistema associado. Basta que uma das inequações não seja satisfeita para que o ponto não pertença à região plana associada.

(3) Exploração e Discussão da Parte I da Tarefa 2 *(20 minutos – 10h35)*

Concluída a Tarefa 1 procede-se à realização da Tarefa 2.

Distribuição do enunciado dessa tarefa seguida de pequena introdução:

A Parte I desta tarefa é um problema com o objetivo de aplicar alguns conhecimentos da tarefa anterior, acrescido da componente de interpretação. Teremos um sistema de inequações associado a um enunciado em contexto de semirrealidade, pelo que esse sistema ganha um significado para lá do matemático. A Parte II, já exige um pouco mais, é um problema de Programação Linear.

Esta tarefa é para ser realizada a pares. É para ser resolvida numa folha à parte, devidamente identificada, para ser recolhida no final da aula. Cada um resolve numa folha à parte – uma folha por aluno. Quando discutirmos a resolução, não deve ser feita nenhuma alteração nessa folha. As correções são feitas no caderno diário. Na próxima aula devolvo as resoluções.

Parte I *(10 min + 10 min – 10h35)*

Durante a exploração da primeira parte da tarefa, o professor circula pela sala, acompanha o desempenho da turma e responde a algumas questões, caso necessário. Dez minutos para a exploração.
Depois procede-se à discussão dessa parte da tarefa – 10 minutos.

Na parte respeitante aos procedimentos matemáticos como, por exemplo, para a representação gráfica do domínio plano (já trabalhada na tarefa anterior) pode-se propor a um aluno que represente no quadro tal domínio plano, permitindo-o fazer uso do material de desenho para o quadro.

No respeitante à interpretação dos resultados procura-se que os alunos cheguem a um acordo de ideias e procedimentos de resolução, pois esta parte da tarefa serve de preparação para a interpretação de certos aspetos de enunciados de problemas de Programação Linear.

Para tal, pretende-se que a discussão se realize por meio do questionamento oral e do diálogo entre professor e alunos e entre alunos.

Para cada alínea podem ser propostas, mais em particular, as seguintes questões:

Questão	Perguntas
Questão 1	*Quantas inequações identificaram? Quais?* O professor regista no quadro as sugestões. *O que representam as variáveis que escolheram?* O professor pede ao(s) autor(es) das inequações, ou a outros colegas que concordem com as inequações apresentadas, que expliquem o significado das variáveis utilizadas. *Que significado tem cada uma das inequações tendo em conta o contexto do problema? Todos concordam? Alguém deu um significado diferente às suas variáveis?*
Questão 2	*Qual foi a solução que determinaram?* O professor regista as respostas no quadro, mas não sem antes perguntar: *Sob que forma a representaram? ou Como é que escreveram a solução na vossa resolução?* *Como é que a determinaram? ou Como têm a certeza de que a solução que encontraram é a solução ou uma solução do sistema?* *Que significado tem essa solução que encontraram no contexto do problema?* *A solução que determinaram é única?*
Questão 3	*Como procederam para representar este sistema?* Para quem resolveu esta questão utilizando a calculadora, o professor deve alertar para o seguinte: aquando da transposição para o papel, os alunos devem indicar a janela que utilizaram e os pontos de interseção das retas com os eixos coordenados. *Qual é a região delimitada pelo sistema de inequações? Porquê?* *E qual é a região correspondente às possíveis compras? Porquê?* *Quantas possibilidades de compras encontraram?*

Desta parte da tarefa pretende-se que os alunos interpretem o significado que as variáveis que consideraram e as inequações que determinaram tomam no contexto do problema. Que compreendam que a região plana representada também tem um significado específico e que, para o caso, nem todos os pontos dessa região fazem sentido como soluções do problema. Pretende-se também que compreendam que para o resolver, contudo, reduziram-no a um problema matemático – formularam-no matematicamente, modelaram-no matematicamente.

(4) **Exploração e Discussão da Parte II da Tarefa 2** *(25 minutos – 10h55)*

Dedicam-se 10 minutos para a exploração da Parte II da Tarefa 2.

A fase de discussão é feita no final do tempo dedicado à fase de exploração e com a duração aproximada de 15 minutos.

De forma análoga ao trabalho realizado na Parte I, nesta discussão propõem-se questões como as seguintes:

Perguntas
Como é que resolveram este problema? Como é que começaram a vossa resolução? A discussão desenrolar-se-á a partir das respostas que os alunos derem. Espera-se que a maioria dos alunos apoie o seu trabalho na abordagem realizada na Parte I, pois afinal trata-se da continuação da mesma tarefa. São benvidas à discussão outras abordagens que tenham surgido na resolução desta parte. Ao longo da discussão, o professor deverá ter em conta aspetos como: as variáveis definidas, o sistema de inequações representado, a região plana identificada, as soluções determinadas e a melhor solução. Para tal, sempre que conveniente, o professor poderá promover questões como as seguintes: *Quantas variáveis é que identificaram neste problema? Quais?* *Que significado tem as variáveis que identificaram?* *Quantas inequações identificaram? Quais? Que significado têm no contexto deste problema? O que significa a inequação (tal)?* *Identificaram a região de compras possíveis? Quantas possibilidades de compras encontraram? Por que são essas as possibilidades?* *Qual é a melhor compra? Porquê? Como é que pensaram? Como justificam que essa é a melhor compra?* *Qual o objetivo do problema? Porquê? E o que é que se procura como solução? Porquê?* *Qual o custo associado a uma compra qualquer do Rui? Porque é que é o custo que interessa? Faria sentido pedir uma expressão para o lucro do Rui?*

(5) Síntese *(10 min – 11h20)*

Depois de concluída a discussão e resolvida a Parte II da tarefa, promove-se uma síntese com a introdução de conceitos de Programação Linear e dos procedimentos para a resolução de um problema de Programação Linear. A primeira questão a ser proposta é

Que elementos ou procedimentos consideraram essenciais para realizar a Parte II desta tarefa? Que passos é que identificaram como necessários ou essenciais para realizar esta parte da tarefa?

Estas questões são debatidas oralmente e depois projetam-se os diapositivos abaixo. Sugere-se que os alunos passem o conteúdo para o caderno diário.

Termos	Conceitos
Variáveis de decisão	Variáveis identificadas no problema de PL
Restrições do problema de PL	Sistema de inequações que modela matematicamente o problema
Região admissível ou de soluções admissíveis	Representação gráfica das restrições – região plana delimitada pelas inequações
Objetivo e Função objetivo	Otimizar – maximizar ou minimizar Função associada ao objetivo e que colabora na escolha da melhor solução
Solução ótima	A melhor solução para o problema, tendo em conta o objetivo

Os procedimentos de resolução de um problema de PL:

- **Analisar os dados, identificando e definindo as variáveis de decisão (x e y);**
- **Identificar o objetivo e a função objetivo;**
- **Organizar os dados (usualmente, em tabela);**
- **Identificar as restrições;**
- **Representar graficamente as restrições, destacando a região admissível;**
- **Determinar a solução ótima.**

Destacar que concluídos os primeiros 4 procedimentos, obtém-se a formulação matemática de um problema de PL. Os dois últimos tratam de utilizar técnicas e procedimentos matemáticos para a resolução efetiva do problema, matematicamente. No fim, reinterpreta-se os resultados obtidos para o contexto do problema.

Avaliação: Avaliação reguladora por observação direta: da adesão e da participação nas questões propostas e nas discussões, quer para contribuir quer para pedir esclarecimento.

Pedagogia diferenciada: Uma aluna da turma trabalhará com a professora titular.

Proposta de resolução e Previsão de dificuldades:

<u>Proposta de Resolução da Tarefa 1</u>

1. (A) (1) Determinar os pontos representados:

$A\,(3\,,0)\quad B\,(4\,,0)\quad C\,(0\,,4)\quad D\,(0\,,2)$

(2) Determinar as rectas associadas aos pontos:

$AD{:}\ m=\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}\qquad b=2\qquad y=-\frac{2}{3}x+2$

$BC{:}\ m=\frac{0-4}{4-0}=-1\qquad b=4\qquad y=-x+4$

(3) Representar o domínio plano na forma de sistema:

$$\begin{cases} y\geq -\frac{2}{3}x+2 \\ y\leq -x+4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

(B) (1) $A\,(0\,,3)\qquad B\,(2\,,2)\qquad C\,(6\,,3)$

(2) $AB{:}\ m=\frac{2-3}{2-0}=-\frac{1}{2}\qquad b=3\qquad y=-\frac{1}{2}x+3$

$BC{:}\ m=\frac{3-2}{6-2}=\frac{1}{4}\qquad b=\frac{3}{2}\qquad y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

$AC{:}\ y=3$

(3) $$\begin{cases} y\geq -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y>\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \\ x\geq 0 \end{cases}\quad \vee\ (x=6\ \wedge\ y=3)$$

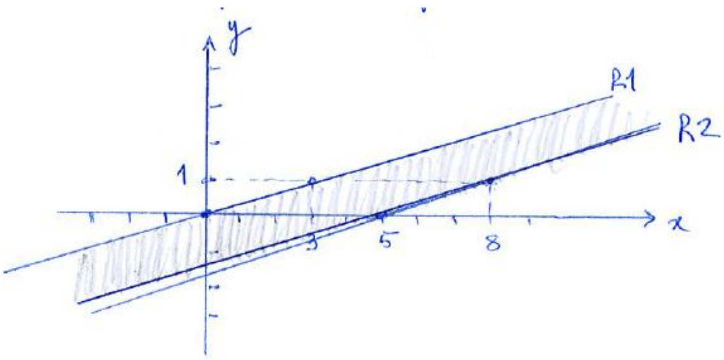
2. (A) Designe-se por (R_1) e (R_2) as inequações pela ordem em que surgem no enunciado.

(1) Determinar dois pontos das inequações

(R_1) $(0\,,0)$ $(3\,,1)$

(R_2) $(5\,,0)$ $(8\,,1)$

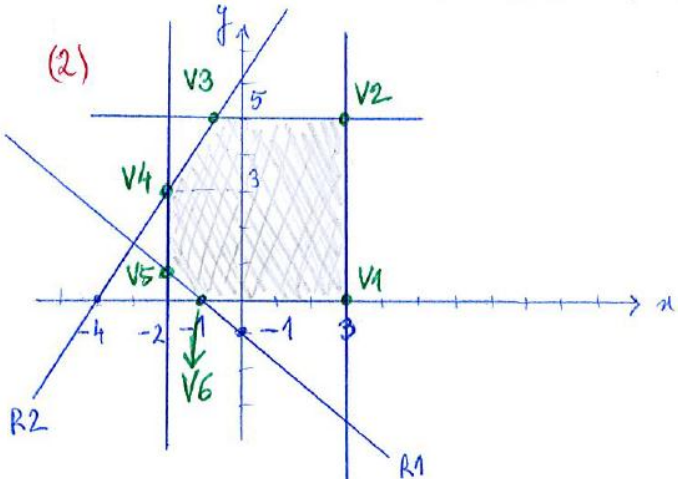
(2) Representar graficamente as inequações



(B) $(R_1), \dots, (R_6)$

(1) (R_1) $(0\,,-1)$ $(-1\,,0)$ (R_2) $(-4\,,0)$ $(-2\,,3)$

(2)



3. $(R3 \cap R6)$ $V_1\,(3\,,0)$ $(R4 \cap R6)$ $V_2(3\,,5)$

$(R_2 \cap R_6)\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ y = 5 \end{cases}$ $V_3\left(-\frac{2}{3}\,,5\right)$

$(R_2 \cap R_5)\begin{cases} x = -2 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$ $V_4\,(-2\,,3)$

$(R_1 \cap R_2)\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$ $V_5(-2\,,1)$

$(R_1 \cap R_3)\begin{cases} x + y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $V_6(-1\,,0)$

Os vértices obtêm-se determinando os pontos de intersecção das equações associadas às restrições, duas a duas.

4. Para os pontos pertencerem à região plana as suas coordenadas devem satisfazer todas as restrições de um sistema. Basta que as coordenadas não satisfaçam uma das inequações para não pertencer à região plana.

a) $P \in (A)$ e $P \notin (B)$

b) $Q \in (B)$ e $Q \notin (A)$

c) $R \notin (A), (B)$

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 1

Estratégias

1. (A) Determinar as coordenadas dos pontos A, B, C e D e representar algebricamente as retas AB, BC, CD e DA.

i. O aluno determina o vetor diretos da reta e a equação vetorial da reta (DA, por exemplo)

$A(3,0)$, $D(0,2)$ $\qquad \overrightarrow{DA} = A - D = (3,0) - (0,2) = (3,-2)$

$$(x,y) = (3,0) + k(3,-2), k \in \mathbb{R}$$

Dificuldades: Definir o semiplano de limitado pela reta DA

Orientação: *O que pretendes fazer depois de determinares por esta representação a reta (DA, por exemplo)?*

Representando algebricamente a reta pela sua equação vetorial, como é que delimitas o semiplano por ela definido na região plana da alínea (A)?

Dá-te jeito utilizar os símbolos de $>$, $<$ (ou $\leq$, $\geq$) com a reta representada nesta forma?

Haverá melhor representação para a reta [que te permita depois definir o semiplano que contribui para delimitar a região plana em (A)]?

ii. O aluno determina as equações cartesianas da reta (exemplo: DA)

$$\begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x-3}{3} \\ k = -\dfrac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = -\frac{y}{2}$$

Dificuldade e **Orientação** análogas à anterior.

iii. O aluno determina, diretamente ou por meio das estratégias anteriores, a equação reduzida da reta.

- Diretamente: em “Proposta de Resolução”

Dificuldades: Determinar o declive da reta DA (por exemplo)

Orientação: *Como é que fazes para determinar o declive de uma reta? Do que necessitas? Lembras-te que havia uma fórmula para isso?*

- Por meio das estratégias anteriores

No caso da equação vetorial: observar que a partir das coordenadas do vetor diretor da reta se pode determinar o declive da reta (DA, por exemplo)

$$\overrightarrow{DA} = (3, -2) \text{ donde } m = -\tfrac{2}{3}.$$

A partir de um ponto por onde a reta passa se determina a ordenada na origem, $b = 2$.

No caso da equação cartesiana:

$$\frac{x-3}{3} = -\frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x - 6 = -3y \Leftrightarrow y = -\frac{2x-6}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Dificuldades: Determinar a equação reduzida a partir da vetorial ou da cartesiana.

Orientação: *Para que forma queres passar a representação que tens? Qual é a forma da equação reduzida da reta? Será que consegues chegar à forma da equação reduzida da reta diretamente? O que precisas de fazer?*

Que relação existe entre os elementos da equação vetorial da reta e os da reta reduzida (por exemplo, o vetor diretor e o declive…)?

iv. O aluno determina o semiplano definido pela reta DA (por exemplo) que contribui para delimitar a região plana em (A), analiticamente ou com o apoio da calculadora.

Dificuldades: Decidir se $y \leq -\frac{2}{3}x + 2$ ou $y \geq -\frac{2}{3}x + 2$, por exemplo.

Orientação: *Se fosse para $y = x$ como decidirias? E para $y = -x$?*

Escolhe um ponto que esteja no semiplano que queres definir. Agora, escolhe uma desigualdade e verifica se o ponto respeita essa desigualdade. Ora se não respeitar, o que podes concluir? Como procedes a seguir?

Dificuldades:

- O aluno pode esquecer-se ou não identificar as inequações $x \geq 0$ e $y \geq 0$, especialmente se seguir a estratégia de determinar diretamente as equações reduzidas das retas.

Orientação: *As inequações que identificaste são suficientes?*

Experimenta pensar ao contrário: supõe que querias representar graficamente o sistema que identificaste, como ficaria?

- O aluno não consegue representar CD e AB na forma de equação reduzida.

Orientação: *O que têm as retas CD e AB de diferente em relação às outras? Qual é a sua posição relativa em relação aos eixos coordenados? Como é que representamnos retas com essas características?*

1. **(B)** Análogo á alínea anterior.

i. O aluno não inclui o ponto $C(6,3)$ no sistema de inequações.

Para a discussão: Como é que incluímos o ponto C no sistema? De que outra forma podemos representar um sistema de inequações? Como a conjunção de condições. E como podemos agora incluir o ponto C? Para uma conjunção? Por uma disjunção?

2. **(A)**

Dificuldades: Em iniciar a resolução.

Orientação: *Como é que estás a pensar começar? Como podes representar as inequações? Será possível resolver pensando nas inequações? E em equações? Já pensaste em utilizar a calculadora? Como o farias pela calculadora?*

i. O aluno considera as retas $x-3y=0$ e $2x-6y=10$. Escreve-as na forma canónica, isto é, na forma da equação reduzida:

$$x-3y=0 \iff y=-\frac{x}{3} \text{ e } 2x-6y=10 \iff y=\frac{-2x+10}{6}=-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$$

Dificuldades: as que possam estar associadas ao cálculo.

ii. O aluno representa graficamente as retas representadas pelas equações reduzidas anteriores.

- Utiliza a calculadora gráfica para representar as retas

** **Nota para a discussão:** Os alunos que sigam esta via devem indicar a janela que utilizaram e os pontos de interseção das retas com os eixos coordenados.

- Utiliza procedimentos analíticos: em "Proposta de Resolução"

Dificuldades: Representar graficamente as retas.

Orientação: *De que precisas para representar uma reta? Este conhecimento já vem (dos axiomas) de Euclides! São dois pontos quaisquer? Como os determinar? E depois como traças a reta na folha? Será que precisas de saber o declive da reta para a traçares? O declive da reta ajuda-te a traçá-la?*

iii. O aluno identifica a região plana definida pelo sistema.

Dificuldades: Decidir o semiplano definido por cada inequação.

Orientação: *Se fosse $y \leq x$ como farias? E $y \geq -x$?*

Escolhe um ponto do plano e verifica se as coordenadas respeitam a inequação. A origem é sempre um ponto acessível até porque simplifica os cálculos. Se as coordenadas da origem não respeitarem a inequação, o que concluis? Quais são os pontos cujas coordenadas satisfazem a inequação? Qual é, então, o semiplano por ela definido?

2. **(B)** Semelhante á alínea anterior.

i. O aluno pode resolver a questão utilizando a calculadora gráfica.

Nota para a discussão: **

3.

i. O aluno determina analiticamente as coordenadas dos vértices: em "Proposta de Resolução".

Dificuldades:

- Identificar as equações cuja interseção é um determinado vértice.

Orientação: *Toma atenção quando representas graficamente o sistema. Será bom encontrares um modo de identificar as inequações que representas.*

Escolhe um vértice. Quais poderão ser as retas cujas interseções resultam nesse vértice?

- Não compreende como a partir das equações das retas obtém as coordenadas dos vértices porque, talvez, não relaciona com um sistema de duas equações.

Orientação: *O que percebeste do enunciado? O que pensarias fazer? Percebeste que cada vértice resulta da interseção de duas retas? Como podes, então, determinar as coordenadas dos vértices?*

ii. O aluno resolve a questão com o apoio da calculadora.dfbv

Nota para discussão: Para quem tenha utilizado a calculadora deverá indicar o sistema de equações de que resulta as coordenadas do vértice e só então estas.

4.

O aluno reconhece que para um ponto pertencer à região plana definida por um dos sistemas da questão 2, as coordenadas desse ponto devem satisfazer todas as inequações desse sistema. Reconhece ainda que basta que uma das inequações não seja satisfeita para que o ponto não pertença à região plana.

Esta alínea é discutida oralmente e em grupo-turma. Só em caso de necessidade avaliada pelo professor, este procede à resolução analítica no quadro.

Proposta de Resolução de Tarefa 2

Parte I

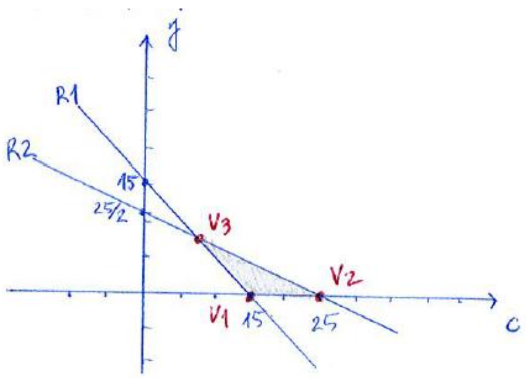
1. i) Definir variáveis: $c = nº\ de\ canções$ $j = nº\ de\ jogos$

ii) Construir o sistema: $\begin{cases} c + 2j \leq 25\ (R_1) \\ c + j \geq 15\ (R_2) \\ c \geq 0 \\ j \geq 0 \end{cases}$

2. O par $(10\,, 5)$ é solução do sistema anterior (pois satisfaz todas as inequações). Essa solução significa que o Rui pode comprar 10 canções e 5 jogos com o seu cartão-oferta.
A solução que determinei não é a única (pois $(5, 10)$ é, por exemplo, também uma solução do sistema).

3. i) Determinar dois pontos das rectas associadas a (R_1) e (R_2):
$(R_1)\ (25\,, 0)\ \left(0\,, \frac{25}{2}\right)$ $(R_2)\ (0\,, 15)\ (15\,, 0)$

ii) Representar o domínio plano:



A região sombreada é a região de compras possíveis pois é a região dos pontos que satisfaz o sistema de inequações, sendo estes pares do número de canções e jogos.
Só são compras possíveis todos os pares de inequações positivos na região de compras possíveis, pois só é possível comprar um nº inteiro de canções e de jogos.
Exemplos: $V_1(15\,, 0)$, $V_3(5\,, 10)$, $V_2(25\,, 0)$, $(6\,, 9)$. $(7\,, 8)$

Parte II

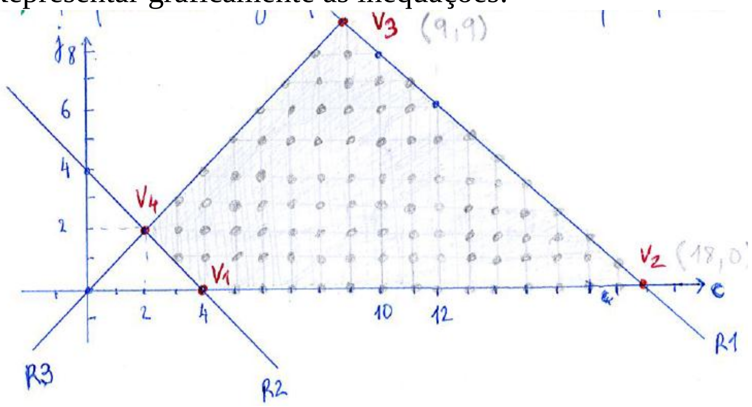
4. i) Definir variáveis: $c = nº\ de\ canções$ $j = nº\ de\ jogos$

ii) Construir o sistema:
$c + j \leq 18$
$c + j > 3 \Leftrightarrow c + j \geq 4$
$c \geq j \Leftrightarrow c - j \geq 0$
$c \geq 0\ (redundante)$
$j \geq 0$

$\begin{cases} c + j \leq 18\ (R_1) \\ c + j \geq 4\ (R_2) \\ c - j \geq 0\ (R_3) \\ j \geq 0 \end{cases}$

iii) Determina dois pontos das rectas associadas às inequações:
$(R_1)\ (12\,,6)\ (10\,,8)$ $(R_2)\ (0\,,4)\ (4\,,0)$ $(R_3)\ (0\,,0)\ (2\,,2)$

iv) Representar graficamente as inequações:



v) Identificar as compras possíveis: As compras possíveis encontram-se na zona sombreada. Estes são pares de inteiros positivos de canções e jogos. Todos os pontos assinalados representam as compras possíveis.

vi) Determinar a melhor compra:
A melhor compra é aquela em que o Rui gasta o mínimo. $2j + c$ é a expressão que indica quanto o Rui gasta por cada compra.
$V_4\ (2\,,2) : 2 \times 2 + 2 = 6€$

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 2

Parte I

Questão 1

Estratégias

i. O aluno identifica as variáveis necessárias à representação do sistema: em "Proposta de Resolução da Tarefa 2".

Dificuldades: Identifica muitos elementos no enunciado como candidatos a variáveis. Por exemplo, define variáveis para o custo das canções e para o custo dos jogos.

Orientação: Deixa-se que o aluno experimente construir o sistema de inequações com as varáveis que tem.

ii. O aluno representa o sistema de inequações: em "Proposta de Resolução da Tarefa 2".

Dificuldades:

- O aluno não consegue utilizar todas as variáveis que identificou no sistema de inequações.

Orientação: *Será que necessitas mesmo dessas variáveis que não consegues utilizar? Não há outra maneira de relacionar os custos sem os representar como variáveis?*

- O aluno considera que os 25€ são gastos na totalidade.

Orientação: *O Rui terá mesmo que gastar os 25€ disponíveis no cartão? Há alguma informação no enunciado que te leve a pensar isso?*

- O aluno identifica inequações em excesso:

  Identifica $c + 2j \geq 15$ (pois, sendo as canções mais baratas e sabendo que o Rui quer comprar, no mínimo, 15 artigos, o mínimo que pode gastar são 15€)

  Orientação: *Muito bem pensado! Mediante a informação que o enunciado te dá, essa inequação é mesmo necessária? Por exemplo, a inequação $c + j \geq 15$ (se a tiver identificado) já não prevê essa situação?*

  Identifica a variável z como o custo de uma compra do Rui e identifica $15 \leq z \leq 25$

  Orientação: *Não será possível representar o custo de utilizando as variáveis c e j (se as tiver identificado)? E, nessa altura, valerá a pena a inequação $15 \leq z$?*

  Identifica $c \geq 15$ e $j \geq 15$ (em separado)

  Orientação: *Interpreta essas inequações? A que informação do enunciado recorreste para identificar essas inequações? Será que cada um dos artigos tem que ser superior ou igual a 15 (separadamente)?*

- O aluno não identifica as inequações $c \geq 0$ e $j \geq 0$

Orientação: *Deste algum significado às variáveis que identificaste? O que significam as variáveis que identificaste (remetendo para c e j)? Não haverá então implícita mais alguma condição a impor a essas variáveis? Toma atenção ao seu significado neste problema.*

Questão 2

Estratégias

i. O aluno identifica uma solução por tentativa-erro, experimentando valores de c e j que satisfaçam as inequações.

ii. O aluno identifica uma solução dando um valor a c (ou a j) e determina um intervalo de valores de j (respetivamente, de c), escolhendo um, utilizando uma das inequações que identificou na questão anterior.

iii. O aluno dá um valor a j (respetivamente, de c), substituindo a desigualdade de uma inequação que tenha escolhido utilizar por uma igualdade.

Dificuldades: Em qualquer dos casos, o aluno pode não reconhecer (ou esquecer) que para que o par que identificou seja solução do sistema tem que verificar todas as inequações desse sistema.

Orientação: Na fase de exploração não se propõe qualquer orientação. Discutem-se as abordagens tomadas e resultados desta questão para a fase de discussão.

iv. O aluno interpreta a solução tendo em conta o significado que as variáveis que considerou têm no contexto do problema.

Dificuldades: O aluno interpreta incorretamente a solução que determinou.

Orientação: *Essa solução que determinaste está relacionada com o quê? Com que elementos matemáticos do problema se relaciona? Será com as variáveis? Com o sistema de inequações? E que significado têm as variáveis que identificaste? E o sistema? Que significado tem a solução que encontraste para o Rui?*

v. O aluno identifica a solução que determinou como não sendo única, justificando-o pelo processo matemático que utilizou - que o processo que o levou a identificar essa solução leva-o a determinar outra - ou pela interpretação que fez da solução – como a solução representa um par de compras possível, esse par não é único para o Rui.

Dificuldades: O aluno identifica a solução que determinou como sendo única, sob uma justificação, por exemplo, do seu senso e não do enunciado – como o Rui tem 25€ para gastar, a solução será a compra que lhe permita gastar tudo (que é $(5, 10)$) ou comprar o maior número de canções e de jogos (que ultrapasse os 15 artigos, $(10, 7)$), ou ambas as situações anteriores ao mesmo tempo (que é $(7,9)$).

Orientação: Na fase de exploração não se propõe qualquer orientação. Discutem-se as abordagens tomadas e resultados desta questão para a fase de discussão.

Nessa fase, pode-se propor as questões:

Porque consideras essa a solução? O enunciado propõe algum objetivo? Há alguma informação no enunciado que te leve a pensar se há que o Rui quer fazer uma compra onde gaste o dinheiro todo? Ou que compre o maior número de artigos?

Questão 3

Estratégias

i. O aluno determina dois pontos das retas associadas às inequações identificadas na primeira questão.

ii. Representa graficamente as retas e delimita a região do plano definida pelo sistema da questão 1.

Dificuldades: O aluno identifica incorretamente a região plana definida pelo sistema da questão 1.

Orientação: *Lembraste do que foi trabalhado na primeira tarefa em relação a isto?*

Como é que fizeste para determinar essa região plana? O que entendes que seja a região plana definida pelo sistema? Essa região plana é o resultado de quê? (Da interseção de todas as inequações) E qual é a região plana definida por esta inequação? E por esta? E qual é a região plana que resulta da interseção de todas?

iii. O aluno apoia-se na calculadora para representar graficamente a região plana (inserindo as inequações nela e pedindo para representá-las graficamente).

**** Nota para a discussão:** Os alunos que sigam esta via devem indicar a janela que utilizaram e os pontos de interseção das retas com os eixos coordenados.

iv. O aluno justifica a região das possíveis compras, como sendo a região plana definida pelo sistema da questão 1.

Para a discussão: *Todos os pontos pertencentes à região plana identificada são compras possíveis? O que representam as coordenadas de cada ponto desta região plana? E qualquer coordenada é candidata é uma compra possível?*

Parte II

Questão 4

Estratégias

Espera-se que o aluno se apoie na resolução da parte anterior para resolver esta parte da tarefa.

i. O aluno identifica as variáveis necessárias à representação do sistema: em "Proposta de Resolução da Tarefa 2".

Dificuldades: Identifica muitos elementos no enunciado como candidatos a variáveis. Por exemplo:

- define variáveis para o custo das canções e para o custo dos jogos.
- de "o cartão-oferta tem a validade de 2 meses", define uma variável para o prazo do cartão, p (por exemplo).
- de "uma vez que decida fazer uma compra deve adquirir mais de 3 artigos", define uma variável para o número de compras realizadas, n (por exemplo), ou uma variável para a soma das compras, z (por exemplo).

Orientação: Deixa-se que o aluno experimente construir o sistema de inequações com as varáveis que tem.

ii. O aluno representa o sistema de inequações: em "Proposta de Resolução da Tarefa 2".

Dificuldades:

- O aluno não consegue utilizar todas as variáveis que identificou no sistema de inequações.

Orientação: *Será que necessitas mesmo dessas variáveis que não consegues utilizar?*

Não há outra maneira de relacionar os custos sem os representar como variáveis?

Porque representas uma variável para o prazo do cartão? Esse prazo é mesmo variável? Porque consideras importante uma variável para representar o prazo do cartão? De que forma a validade do cartão condiciona o problema? Como pensas que representarias essa informação como uma inequação?

Porque representas uma variável para o número de compras? (As compras não precisam de ser feitas todas de uma vez, mas de cada vez que o Rui realiza uma compra essa tem que ser superior a 3 artigos) *E como representas isso como uma inequação? A contagem do número de compras já não será feita de outra forma?*

- O aluno identifica inequações em excesso:

Identifica a expressão $c\ + 2j$ como pertencente às inequações sem conseguir escrever a inequação

Orientação: *Como interpretas essa expressão? Porque pensas que faz parte das inequações do problema? Consegues saber que valor essa expressão não pode ultrapassar?*

Identifica $c\ + 2j \leq 36$ ou $z \leq 36$ (pois, sendo os jogos mais caros e sabendo que o Rui pode comprar, no máximo, 18 artigos, o máximo que pode gastar são $18\ \times 2€ = 36€$.

Orientação: *Como interpretas essa inequação? O Rui sabe quanto dinheiro tem no cartão-oferta? Como podes estabelecer uma restrição para o dinheiro que o Rui pode gastar sem saberes sequer quanto dinheiro há disponível no cartão? Sabes por que critérios a mãe do Rui diz que pode comprar até 18 artigos? Estaria ela a pensar no artigo mais caro? Mediante a informação que o enunciado te dá, como sabes isso? Essa inequação é mesmo necessária? Por exemplo, a inequação $c + j \leq 18$ (se a tiver identificado) já não prevê essa situação?*

Identifica $n > 3$ (por cada compra deve adquirir 3 artigos no mínimo)

Orientação: *Interpreta essa inequação? n representa o número de compras e 3 o número mínimo de artigos por cada compra, é essa a relação que pretendes? Ao fim de 2 compras, continuas a ter $n > 3$? Não terás outras variáveis que te permitam relacionar com o número mínimo de artigos? Essas mesmas variáveis não contam o número de artigos, independentemente do número de compras?*

Identifica $c > 3$ e $j > 3$ (em separado)

Orientação: *Interpreta essas inequações? A que informação do enunciado recorreste para identificar essas inequações? Será que cada um dos artigos tem que ser superior a 3 (separadamente)?*

Identifica $c > j$ como desigualdade estrita

Orientação: *Interpreta essa inequação? A que informação do enunciado recorreste para identificar essa inequação?*

- O aluno não identifica as inequações $c \geq 0$ e $j \geq 0$

Orientação: *Deste algum significado às variáveis que identificaste? O que significam as variáveis que identificaste (remetendo para c e j)? Não haverá então implícita mais alguma condição a impor a essas variáveis? Toma atenção ao seu significado neste problema.*

iii. O aluno determina dois pontos das retas associadas às inequações identificadas anteriormente.

iv. Representa graficamente as retas e delimita a região do plano definida pelo sistema anteriormente.

Dificuldades: Análogas à questão 3 da parte I.

Orientação: Análoga à questão 3 da parte I.

v. O aluno apoia-se na calculadora para representar graficamente a região plana (inserindo as inequações nela e pedindo para representá-las graficamente)

Nota para a discussão: **

vi. O aluno justifica a região das possíveis compras, como sendo a região plana definida pelo sistema que identificaram.

Para a discussão: *Todos os pontos pertencentes à região plana identificada são compras possíveis? O que representam as coordenadas de cada ponto desta região plana? E qualquer coordenada é candidata é uma compra possível?*

i. O aluno procura determinar a melhor compra

Deixa-se para a fase de discussão a determinação da melhor compra.

- O aluno identifica soluções e determina a que considera a melhor seguindo critérios por si estabelecidos, ignorando o enunciado. Alguns desses critérios poderão ser: a melhor compra é aquela em que Rui adquire exatamente 18 artigos; a melhor compra é aquela em que o Rui obtém muito mais canções que jogos, (de modo que a diferença do número de canções para o número de jogos é máxima).

  Orientação: *O que te leva a pensar que essa é a melhor compra? Em que te baseaste para decidir isso?*

- O aluno identifica soluções e determina a que considera a melhor, atentando a que o Rui pretende gastar o mínimo.

  Abordagem 1: Escolhendo pontos da região, o aluno vai calculando o custo de cada ponto e avaliando em qual deles o custo é menor. Identifica então o ponto que corresponde à compra de menor custo, a melhor solução, para o problema.

  Orientação: *Porque decides esse ponto como correspondente à melhor compra? Justifica e regista na resolução.*

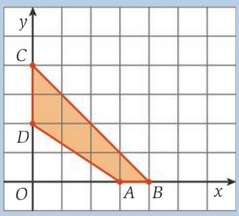
  Abordagem 2: O aluno procede da mesma forma que a anterior abordagem. Depois de identificar o ponto que corresponde à compra de menor custo, verifica se algum ponto adjacente ao que identificou corresponde a uma compra custo inferior

  Abordagem 3: O aluno identifica um ponto como correspondendo à melhor compra, argumentando que à medida que se desloca mais para a direita na região plana, o valor de c vai aumentando, fazendo aumentar o custo de uma compra. Analogamente, à medida que se desloca para cima, o valor de j vai aumentando, fazendo também aumentar o custo de uma compra.

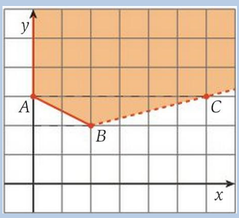
Anexo 11: Diapositivos da Tarefa 1

1. Escreve um sistema de inequações que defina cada domínio plano apresentado.
Considera cada quadrícula 1 unidade de medida (u.m.).

A



B



2. Resolve graficamente os sistemas de inequações apresentados.

(A) $\begin{cases} x-3y\geq 0 \\ 2x-6y\leq 10 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x+y\geq -1 \\ 3x-2y\geq -12 \\ 0\leq y\leq 5 \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases}$

3. Para a alínea (B) da questão 2 determina as coordenadas dos seus vértices.

4. Para cada uma das alíneas da questão 2 indica, justificando, se os pontos que se seguem pertencem à região por eles definida:

a) $P(4,0)$

b) $Q(-2,1)$

c) $R\left(\frac{1}{2},-2\right)$

Anexo 12: Diapositivos do Quadro Síntese

Termos	Conceitos
Variáveis de decisão	Variáveis identificadas no problema de PL
Restrições do problema de PL	Sistema de inequações que modela matematicamente o problema
Região admissível ou de soluções admissíveis	Representação gráfica das restrições – região plana delimitada pelas inequações
Objetivo e Função objetivo	Otimizar – maximizar ou minimizar Função associada ao objetivo e que colabora na escolha da melhor solução
Solução ótima	A melhor solução para o problema, tendo em conta o objetivo

Fases de resolução de um problema de PL:

- **Interpretar a informação do enunciado**
- **Identificar e definir as variáveis de decisão**
- **Modelar matematicamente o problema, representando algebricamente a função objetivo e as restrições do problema**
- **Resolver o problema, definindo a região admissível e determinando a solução ótima**

Anexo 15: Plano da Aula 2

Data/Hora: Sexta-feira, 17–04–2015 / 11h45 – 13h15 **Sala:** C 2.1 **Turma:** 11º E

Sumário: Resolução de uma tarefa de introdução aos problemas de PL

Tópicos/Subtópicos: Geometria no plano e no espaço II: Programação Linear.

Objetivos específicos:

- Exploração de um problema simples introdutório aos conceitos de PL – tarefa 2
- Interpretar enunciados de problemas em contextos de semirrealidade os quais se podem formalizar matematicamente através de sistemas de inequações
- Introdução aos conceitos associados à PL
- Procedimentos para a resolução de um problema de PL

Recursos: Sala de aula: quadro, giz colorido. Professor: material de desenho para o quadro – régua e esquadro. Alunos: caderno diário, material de desenho – régua e esquadro – calculadora gráfica, manual Parte 1.

Capacidades transversais: Resolução de problemas. Autonomia. Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho: Trabalho autónomo a pares. Discussão em grupo-turma.

Desenvolvimento da aula

(1) Introdução da aula *(10 minutos – 11h45)*

Iniciar a aula cumprimentando a turma e ditando o sumário.
Explicitar o que está previsto para a aula:

Esta aula será dedicada à Tarefa 2, que está dividida em duas partes. A tarefa é para ser realizada a pares, resolvida no caderno diário.

Distribuição do enunciado dessa tarefa seguida de pequena introdução:

A Parte I desta tarefa é um problema com o objetivo de aplicar alguns conhecimentos da tarefa anterior, acrescido da componente de interpretação. Teremos um sistema de inequações associado a um enunciado em contexto de semirrealidade, pelo que esse sistema ganha um significado para lá do matemático. A Parte II, já exige um pouco mais, é um problema de Programação Linear.

Esta tarefa é para ser realizada a pares. É para ser resolvida numa folha à parte, devidamente identificada, para ser recolhida no final da aula. Cada um resolve numa folha à parte – uma folha por aluno. Quando discutirmos a resolução, não deve ser feita nenhuma alteração nessa folha. As correções são feitas no caderno diário. Na próxima aula devolvo as resoluções.

(2) Exploração e Discussão da Parte I da Tarefa 2 *(10 minutos + 20 minutos – 11h55)*

Durante a exploração da primeira parte da tarefa, o professor circula pela sala, acompanha o desempenho da turma e responde a algumas questões, caso necessário. Dez minutos para a exploração.
Depois procede-se à discussão dessa parte da tarefa – 10 minutos.

Na parte respeitante aos procedimentos matemáticos como, por exemplo, para a representação gráfica do domínio plano (já trabalhada na tarefa anterior) pode-se propor a um aluno que represente no quadro tal domínio plano, permitindo-o fazer uso do material de desenho para o quadro.

No respeitante à interpretação dos resultados procura-se que os alunos cheguem a um acordo de ideias e procedimentos de resolução, pois esta parte da tarefa serve de preparação para a interpretação de certos aspetos de enunciados de problemas de Programação Linear.

Para tal, pretende-se que a discussão se realize por meio do questionamento oral e do diálogo entre professor e alunos e entre alunos.

Para cada alínea podem ser propostas, mais em particular, as seguintes questões:

Questão	Perguntas
Questão 1	*Quantas inequações identificaram? Quais?* O professor regista no quadro as sugestões. *O que representam as variáveis que escolheram?* O professor pede ao(s) autor(es) das inequações, ou a outros colegas que concordem com as inequações apresentadas, que expliquem o significado das variáveis utilizadas. *Que significado tem cada uma das inequações tendo em conta o contexto do problema? Todos concordam? Alguém deu um significado diferente às suas variáveis?*
Questão 2	*Qual foi a solução que determinaram?*

	O professor regista as respostas no quadro, mas não sem antes perguntar: *Sob que forma a representaram? ou Como é que escreveram a solução na vossa resolução?* *Como é que a determinaram? ou Como têm a certeza de que a solução que encontraram é a solução ou uma solução do sistema?* *Que significado tem essa solução que encontraram no contexto do problema?* *A solução que determinaram é única?*
Questão 3	*Como procederam para representar este sistema?* Para quem resolveu esta questão utilizando a calculadora, o professor deve alertar para o seguinte: aquando da transposição para o papel, os alunos devem indicar a janela que utilizaram e os pontos de interseção das retas com os eixos coordenados. *Qual é a região delimitada pelo sistema de inequações? Porquê?* *E qual é a região correspondente às possíveis compras? Porquê?* *Quantas possibilidades de compras encontraram?*

Desta parte da tarefa pretende-se que os alunos interpretem o significado que as variáveis que consideraram e as inequações que determinaram tomam no contexto do problema. Que compreendam que a região plana representada também tem um significado específico e que, para o caso, nem todos os pontos dessa região fazem sentido como soluções do problema. Pretende-se também que compreendam que para o resolver, contudo, reduziram-no a um problema matemático – formularam-no matematicamente, modelaram-no matematicamente.

(3) Exploração e Discussão da Parte II da Tarefa 2 *(10 minutos + 20 minutos – 12h25)*

Dedicam-se 10 minutos para a exploração da Parte II da Tarefa 2.

A fase de discussão é feita no final do tempo dedicado à fase de exploração e com a duração aproximada de 20 minutos.

De forma análoga ao trabalho realizado na Parte I, nesta discussão propõem-se questões como as seguintes:

Perguntas
Como é que resolveram este problema? Como é que começaram a vossa resolução? A discussão desenrolar-se-á a partir das respostas que os alunos derem. Espera-se que a maioria dos alunos apoie o seu trabalho na abordagem realizada na Parte I, pois afinal trata-se da continuação da mesma tarefa. São benvidas à discussão outras abordagens que tenham surgido na resolução desta parte. Ao longo da discussão, o professor deverá ter em conta aspetos como: as variáveis definidas, o sistema de inequações representado, a região plana identificada, as soluções determinadas e a melhor solução. Para tal, sempre que conveniente, o professor poderá promover questões como as seguintes: *Quantas variáveis é que identificaram neste problema? Quais?* *Que significado tem as variáveis que identificaram?* *Quantas inequações identificaram? Quais? Que significado têm no contexto deste problema? O que significa a inequação (tal)?* *Identificaram a região de compras possíveis? Quantas possibilidades de compras encontraram? Por que são essas as possibilidades?* *Qual é a melhor compra? Porquê? Como é que pensaram? Como justificam que essa é a melhor compra?* *Qual o objetivo do problema? Porquê? E o que é que se procura como solução? Porquê?* *Qual o custo associado a uma compra qualquer do Rui? Porque é que é o custo que interessa? Faria sentido pedir uma expressão para o lucro do Rui?*

(4) Síntese *(20 min – 12h55)*

Depois de concluída a discussão e resolvida a Parte II da tarefa, promove-se uma síntese com a introdução de conceitos de Programação Linear e dos procedimentos para a resolução de um problema de Programação Linear. A primeira questão a ser proposta é

Que elementos ou procedimentos consideraram essenciais para realizar a Parte II desta tarefa? Que passos é que identificaram como necessários ou essenciais para realizar esta parte da tarefa?

Estas questões são debatidas oralmente e depois projetam-se os diapositivos do Quadro Síntese. Sugere-se que os alunos passem o conteúdo para o caderno diário.

Destacar que concluídos os primeiros 4 procedimentos, obtém-se a formulação matemática de um problema de PL. Os dois últimos tratam de utilizar técnicas e procedimentos matemáticos para a resolução efetiva do problema, matematicamente. No fim, reinterpreta-se os resultados obtidos para o contexto do problema.

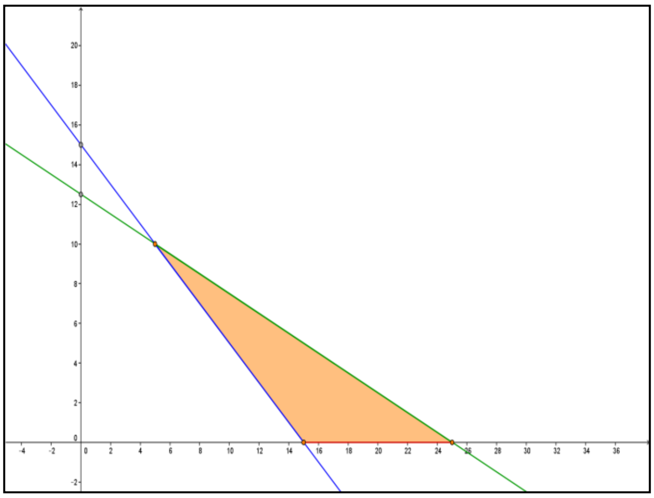
Avaliação: A avaliação reguladora por observação direta: da adesão e da participação nas questões propostas e nas discussões, quer para contribuir quer para pedir esclarecimento.

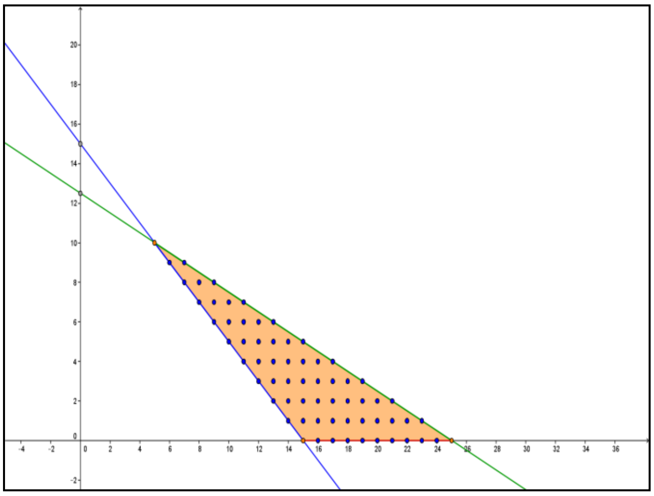
Pedagogia diferenciada: Uma aluna da turma trabalhará com a professora titular. Caso a turma conclua a tarefa e a discussão antes do previsto inicia-se a exploração da Tarefa 3 da sequência de tarefas de PL.

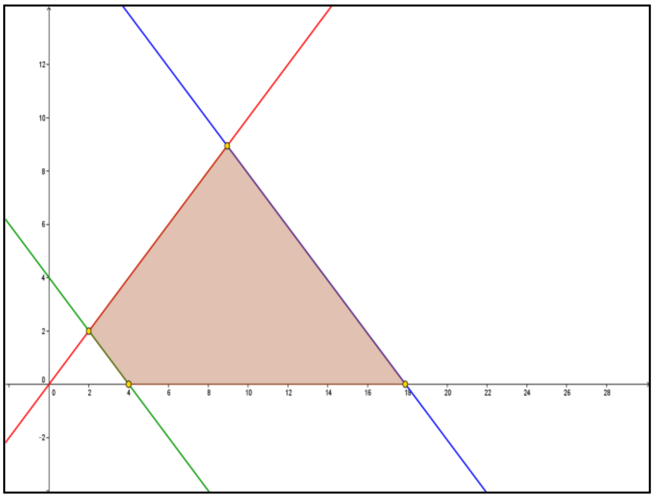
Proposta de resolução e Previsão de dificuldades:

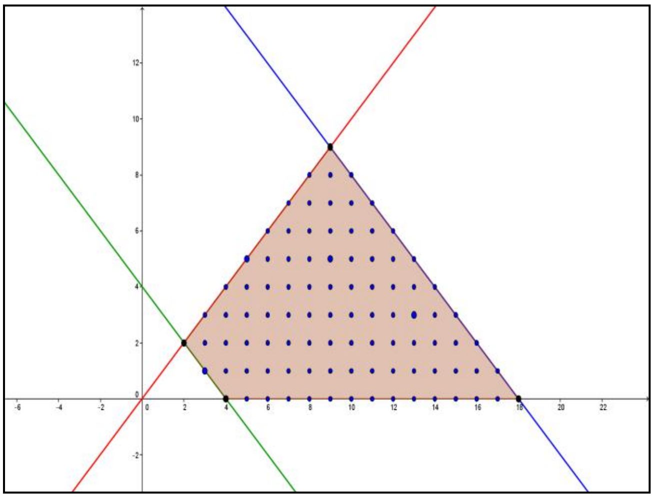
Da Tarefa 2, no plano da Aula 1

Anexo 16: Diapositivos da Tarefa 2



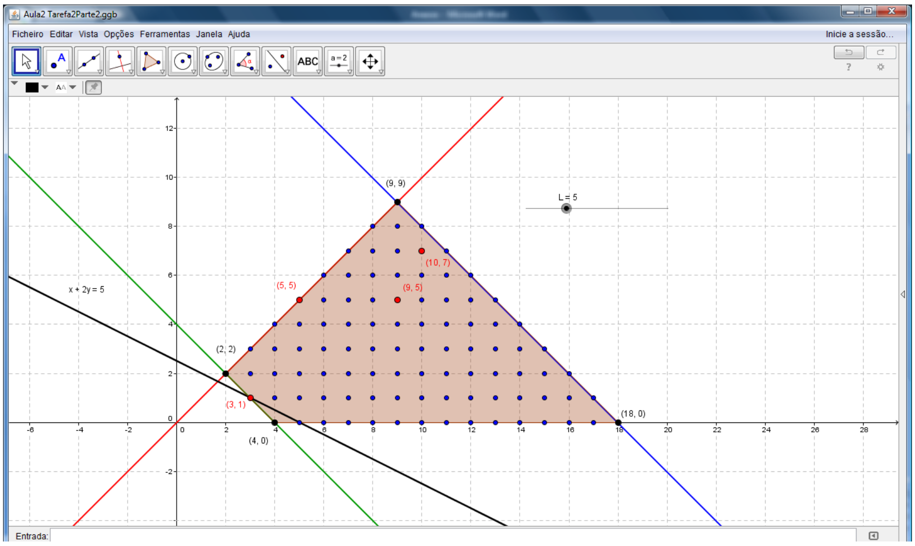


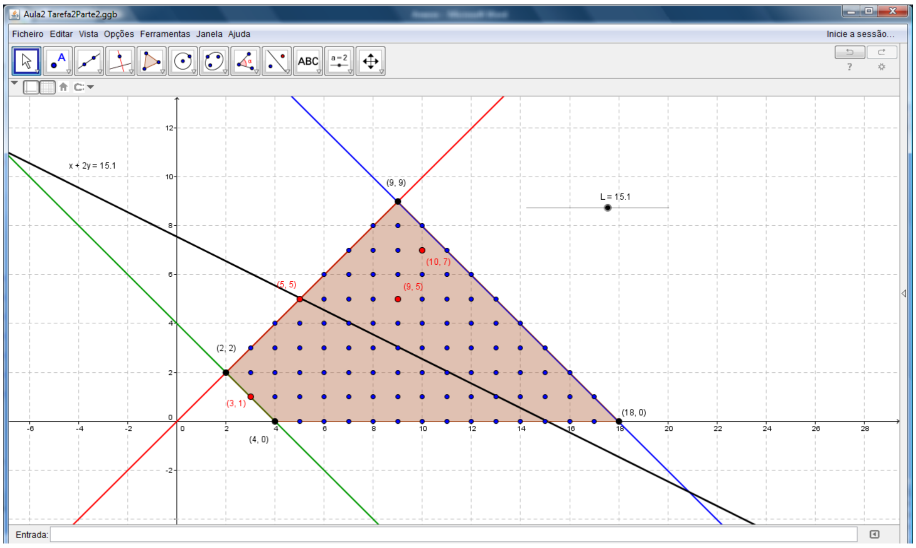


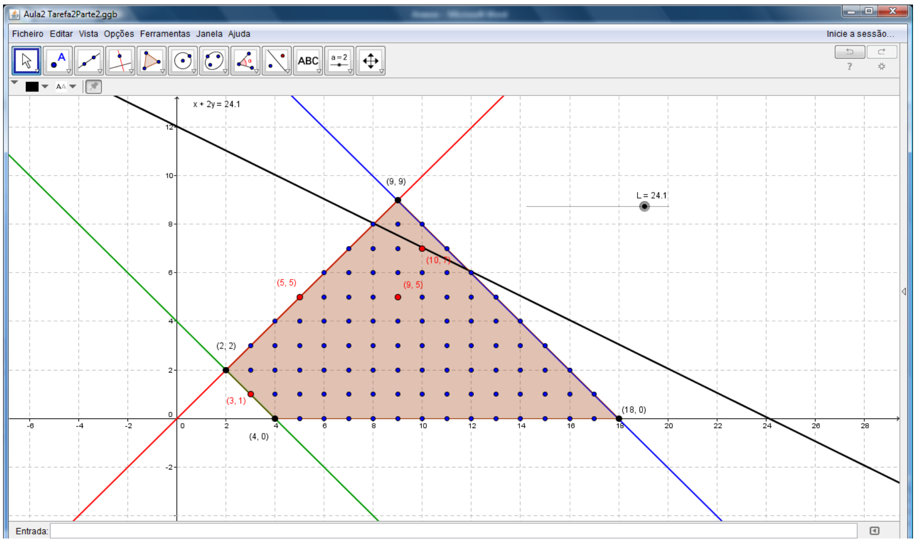


O que deve o Rui decidir?

Anexo 17: Projeção em GeoGebra para apoio à resolução da Parte II da Tarefa 2







Anexo 18: Plano da Aula 3

Data/Hora: Terça-feira, 21–04–2015 / 10h00 – 11h30 **Sala:** C 2.1 **Turma:** 11º E

Sumário: Resolução de problemas de PL. Tipos de soluções de um problema de PL. Tipos de regiões admissíveis.

Tópicos/Subtópicos: Geometria no plano e no espaço II: Programação Linear.

Objetivos específicos:
- Reconhecer um problema de PL
- Resolução de um problema de PL pelos métodos analítico e gráfico – tarefa 3
- Exploração do tipo de soluções de um problema de PL e tipo de regiões admissíveis – tarefa 4
- Determinar o máximo ou o mínimo de funções objetivo diferentes

Recursos: Sala de aula: quadro, giz colorido. Professor: documentos em PPT e em GeoGebra. Alunos: caderno diário, material de desenho – régua e esquadro – calculadora gráfica, manual Parte 1.

Capacidades transversais: Resolução de problemas. Autonomia. Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho: Trabalho autónomo a pares. Discussão em grupo-turma.

Desenvolvimento da aula

(1) Introdução da aula *(10 minutos – 10h00)*

Iniciar a aula cumprimentando a turma e ditando o sumário.

Realiza-se uma síntese relativa à resolução de um problema de Programação Linear.

Relembrem-se do problema de PL realizado na tarefa da aula passada. Quais foram as fases que consideraram na resolução desse problema?

Depois de uma breve conversa projeta-se o seguinte diapositivo

Fases de resolução de um problema de PL:

- **Interpretar a informação do enunciado**
- **Identificar e definir as variáveis de decisão**
- **Modelar matematicamente o problema, representando algebricamente a função objetivo e as restrições do problema**
- **Resolver o problema, definindo a região admissível e determinando a solução ótima**

Segue-se a indicação do trabalho seguinte:

Vamos realizar uma tarefa para consolidar os conhecimentos adquiridos na aula anterior acerca da resolução de problemas de Programação Linear. Com esta tarefa pretendo que exploremos duas maneiras possíveis de determinar a solução ótima de um problema de Programação Linear. A primeira segue a abordagem gráfica, trabalhada na aula anterior; a segunda segue uma abordagem analítica.

(2) Exploração e Discussão da Tarefa 3 *(40 minutos – 10h10)*

Esta tarefa corresponde à questão 1 da Tarefa 39 da página 151 do manual. Esta é para ser resolvida numa folha à parte, devidamente identificada, para ser recolhida no final. Não devem ser feitas alterações a essa resolução, as correções são feitas no caderno diário.

Desta tarefa pretende-se que os alunos consolidem os conhecimentos adquiridos na aula anterior quanto à resolução de problemas de Programação Linear. Para isso, reparte-se a discussão da tarefa em duas partes. Para a primeira, a exploração das três primeiras alíneas da questão, disponibilizam-se 10 minutos. A segunda corresponde à alínea 1.4.

Espera-se que nas primeiras duas alíneas (1.1 e 1.2), os alunos recorram a conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores, não sendo esperadas dificuldades.

Na terceira alínea (1.3), é provável que os alunos recorram ao conhecimento adquirido na aula anterior para a determinação da melhor solução, utilizando a abordagem gráfica. Esta alínea será o foco da primeira discussão da tarefa.

Após a fase de exploração, faz-se a correção oral das alíneas 1.1 e 1.2, aproveitando para verificar se persiste alguma dúvida. Aproveita-se também para fazer referência à calculadora, atentando a aspetos que se referem a seguir.

Quem utilizou a calculadora para representar a região admissível? E que cuidados tiveram na transposição para o caderno?

Atenção: para quem utilizar a calculadora para representar a região admissível devem indicar a janela que utilizaram – window, xmin, xmax, ymin, ymax –, os pontos de interseção das retas com os eixos (sempre que fizer sentido) e a região admissível identificada (pintada, por exemplo).

Para apoiar a discussão dessas alíneas projeta-se os dois primeiros diapositivos em "Tarefa 3 PL" em PPT.

Avança-se para a alínea 1.3, procurando saber quais as abordagens usadas pelos alunos na resolução e reforça-se a aprendizagem da determinação da solução ótima pela abordagem gráfica.

Como é que determinaram o máximo desta função objetivo?

Como é que determinam graficamente o par ordenado?

Tentaram fazê-lo utilizando a calculadora? Como é que o fazem utilizando a calculadora? Ela não permite que a função objetivo se desloque como se consegue com o GeoGebra.

Projeta-se o último diapositivo do documento anterior, para introduzir a ideia de que a função objetivo é representada graficamente por uma família de retas paralelas que são designadas de *retas de nível L*. Depois, projeta-se o documento em Geogebra, "Aula 3 Tarefa3", para exemplificar dinamicamente as várias posições tomadas pela função objetivo assim como os valores.

Depois de realizada esta alínea, e relembrando o problema resolvido na aula anterior, apela-se uma conjetura relativamente às soluções ótimas de um problema de Programação Linear. A conjetura a que se pretende chegar é que *a solução de um problema de PL (se existir) encontra-se num dos vértices da região admissível.*

Com efeito, propõe-se questões como as seguintes no sentido de orientar a discussão:

Depois de determinada a solução ótima por esta abordagem, e relembrando o problema da aula anterior, têm alguma conjetura em relação à solução ótima de um problema de PL?
Esta questão poderá levar os alunos a responder que a solução ótima se encontra (sempre) na região admissível, sem conseguirem efetuar uma relação entre os vértices da região admissível e a função objetivo.

Que relação existirá entre a solução ótima do problema da aula anterior e a solução ótima encontrada neste problema?
Os alunos poderão responder que se encontram na região admissível, sem ainda conseguirem efetuar uma relação entre os vértices da região admissível e a função objetivo.
Será importante estabelecer a designação de vértices (que já vem da alínea 1.2 desta tarefa) aos pontos de interseção das retas associadas às restrições duas a duas, na região admissível, para que na fase seguinte se possa conduzir os alunos a estabelecer a relação entre os vértices da região admissível e as soluções ótimas de um problema de PL.

Lembram-se onde se situava a solução ótima do problema da aula passada? Se necessário, projetar o documento "Aula2 Tarefa2Parte2".
E onde se situa a solução ótima do problema da tarefa de hoje?
Que designação se dá a pontos nestas condições?
Relativamente à região admissível, que designação se dá a um ponto em circunstâncias idênticas à do par que maximiza a função objetivo?

A próxima etapa é levar a que os alunos relacionem as soluções ótimas como sendo vértices das regiões admissíveis.

Nestes problemas que já resolvemos, o da aula passada e o de hoje, onde é que encontrámos a solução ótima para os problemas?
Podem então fazer uma conjetura em relação a isso?
E que argumentos utilizariam, nesta fase, para fundamentar essa conjetura?

Aqui introduz-se, projetado em PPT, o Teorema Fundamental da Programação Linear:

> Num problema de PL, se S é a região admissível e $\mathrm{F(x,y) = ax + by}$ a função objetivo, então o máximo, ou o mínimo, de F em S, se existir, ocorre pelo menos num dos vértices de S.

Uma vez explorado o método gráfico e introduzido o teorema, discute-se a abordagem analítica. A exploração deste método realiza-se também através do questionamento e do diálogo entre professor e alunos e entre alunos.

Como fazemos para determinar a solução ótima analiticamente?
O que significará determinar a solução ótima por uma abordagem analítica?

Aluno(s): *Substituem-se os vértices na função objetivo F e vê-se qual deles dá o menor/maior (dependendo do caso) valor para F.*

Muito bem! E como faço isso?

Nesta altura, pode-se propor a um aluno que realize esta abordagem no quadro.

Concluídas as alíneas anteriores da Tarefa 3, segue-se para a 1.4. Dá-se 5 minutos para os alunos que possam ainda não a ter explorado. Depois, discute-se a resolução e o significado dessa alínea na tarefa.

O que concluíram da alínea 1.4.1? Expliquem? *E da alínea 1.4.2?* *Qual acham ser o sentido da alínea 1.4 nesta tarefa? E de cada subalínea? Da alínea 1.4.1? E da alínea 1.4.2?*

Desta questão os alunos podem responder que a alínea 1.4 serve para mostrar que alterando a função objetivo, e mantendo a mesma região admissível, se pode obter máximos diferentes (soluções diferentes, generalizando). Em particular, alterando as condições do problema, como na alínea 1.4.2, se pode obter máximos diferentes ou reduzir o seu número (ou aumentá-lo, conforme o caso).

Seguidamente, pede-se aos alunos que determinem o máximo das seguintes funções objetivo, para a mesma região admissível da tarefa 3:

$$H(x,y) = -y + \frac{5}{3}x$$

$$J(x,y) = -x + 3$$

Disponibiliza-se cerca de 5 minutos para esta exploração.

Espera-se que os alunos identifiquem o vértice $(7,0)$ como o par que maximiza H e o segmento de reta de extremos $\left(7,\frac{7}{3}\right)$ e $(7,0)$ como o conjunto que contém uma infinidade de pares que maximizam a função J.

Como a função H é paralela à reta $3y - 5x = 0$, associada à restrição $3y \leq 5x$, os alunos poderão pensar, induzidos das questões da tarefa anterior, que a solução se encontra no segmento de reta de extremos $(0,0)$ e $(3,5)$. Bastará recordar-lhes que se procura o máximo da função H na região admissível:

A função H atinge o máximo nesse segmento de reta de extremos $(0,0)$ e $(3,5)$? A vossa abordagem verificou isso para todos os pontos da região admissível? O Teorema Fundamental da PL permitiu-vos concluir esse conjunto como máximo?

Em qualquer outro ponto, portanto, a função H toma valores inferiores ao desse segmento de reta? Expliquem-me?

A função J é paralela à reta associada à restrição $x \leq 7$, sendo o seu valor máximo efetivamente atingido no segmento, por essa restrição formado, de extremos $\left(7, \frac{7}{3}\right)$ e $(7,0)$.

Após essa fase, discute-se a questão com o apoio do ficheiro "Aula 3 Tarefa3". Pede-se aos alunos que comentem os resultados que obtiveram quanto ao tipo de soluções:

Que conclusões podem tirar a propósito do tipo de soluções que obtiveram? *Que tipo de soluções pensam que poderão surgir num problema de PL?* *E que métodos consideram que resultam melhor na determinação de cada tipo de solução? Que cuidados devem ter na determinação de cada tipo de solução?*

O objetivo desta discussão é que os alunos concluam que as soluções de um problema de PL, se existirem, podem variar em número. Pode-se então ter apenas uma solução, num vértice, duas ou mais soluções, em vários vértices, ou uma infinidade de soluções, num segmento de reta ou numa semirreta.

(3) Exploração e Discussão da Tarefa 4 *(20 minutos – 10h50)*

Nesta tarefa de consolidação explora-se, mais uma vez, o número de soluções de um problema de PL e também o tipo de regiões admissíveis.

Disponibilizam-se 10 minutos para a exploração autónoma desta tarefa. Depois, seguem-se 10 minutos de discussão.

Desta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam que as soluções obtidas para cada caso variam em número e que os domínios planos representados exemplificam regiões limitadas, à exceção da última questão da alínea b, que exemplifica uma região não limitada ou ilimitada.

A alínea 1.a. serve de consolidação da aplicação de métodos explorados nas tarefas 2 e 3 para determinar a solução ótima de um problema de Programação Linear, e do Teorema Fundamental da Programação Linear, para determinar não só o máximo mas também o mínimo de uma função num domínio plano.

O foco da discussão desta alínea é o mínimo da função dada, na região plana definida pelo sistema, ser o conjunto de pontos de um segmento de reta.

Para a primeira alínea, qual foi o máximo da função objetivo dada que identificaram? Como é que o identificaram? Que abordagem utilizaram?

E qual foi o mínimo da função objetivo dada que identificaram? Como é que justificaram a solução encontrada?

Para apoiar a discussão desta alínea projeta-se o documento em GeoGebra “Aula3 Tarefa4a”.

A alínea 1.b. pode organizar-se em duas partes. A primeira é semelhante à alínea anterior. A segunda parte – o foco da discussão – que é a questão colocada, permite discutir a inexistência de um máximo para a função dada e introduzir um novo tipo de região admissível, uma região não limitada.

Removendo a restrição $y \leq 5$, como ficou a região admissível?

Que solução é que encontraram como máximo da função F?

Para apoiar a discussão desta alínea projeta-se os documentos em GeoGebra “Aula3 Tarefa4b”.

Com a questão 2 pretende-se que os alunos concluam que as soluções que maximizam ou minimizam uma função objetivo dependem do tipo de região admissível, reconhecendo a existência de dois tipos de região admissível – a limitada e a não limitada.

Que conclusões tiraram vocês da resolução desta tarefa? Em particular o que é que responderam na questão 2?

(4) Exploração da Tarefa 5 *(10 minutos – 11h10)*

Nesta aula realiza-se a exploração da Tarefa 5, deixando a discussão para a aula seguinte.

Nesta tarefa regressa-se à componente interpretativa associada a um problema de Programação Linear, reintroduzindo um contexto de semirrealidade. Mas, ao contrário do que se tem vindo a trabalhar nas tarefas anteriores, com as primeiras quatro questões desta, procura-se trabalhar nos alunos a capacidade de interpretação do enunciado e a sua tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica (modelação), identificando os elementos associados à formulação matemática de um problema de PL, como são a função objetivo e as restrições.

A última questão desta tarefa vem reforçar a aprendizagem das abordagens para determinar a solução ótima de um problema de Programação.

Dez minutos para a exploração da tarefa. Esta é para ser resolvida numa folha à parte, devidamente identificada, para no fim ser recolhida. Não devem ser feitas alterações a essa resolução, as correções são feitas no caderno diário (indicações para a aula seguinte).

(5) Síntese da aula *(10 minutos – 11h20)*

Concluir a aula recapitulando as aprendizagens da aula anterior e desta e adiantando o previsto para a aula seguinte:

- Recapitular as fases de resolução de um problema de PL;
- Recapitular sucintamente as abordagens analítica e gráfica, diferenças e vantagens de cada uma;
- Recordar o Teorema Fundamental da PL.

Concluir a aula:

Iniciamos a próxima aula concluindo a exploração autónoma da Tarefa 5. Depois realizaremos a discussão. Passaremos a outra fase que é a de resolução de problemas de Programação Linear. Tragam a Parte I do manual, tragam material de desenho, régua e esquadro. Os primeiros dois problemas que proporei são para resolver numa folha aparte. Por isso, preparem folhas quadriculadas, se vos der mais jeito. As representações gráficas, se as fizerem, são para ser apresentadas com rigor, portanto não descurem o material de desenho.

Avaliação: A avaliação reguladora por observação direta: da adesão e da participação nas questões propostas e nas discussões, quer para contribuir quer para pedir esclarecimento.

Pedagogia diferenciada: Uma aluna da turma trabalhará com a professora titular. Caso a turma conclua as tarefas e as discussões antes do previsto inicia-se a exploração da Tarefa 6 da sequência de tarefas de PL.

Proposta de resolução e Previsão de dificuldades:

Proposta de Resolução da Tarefa 3

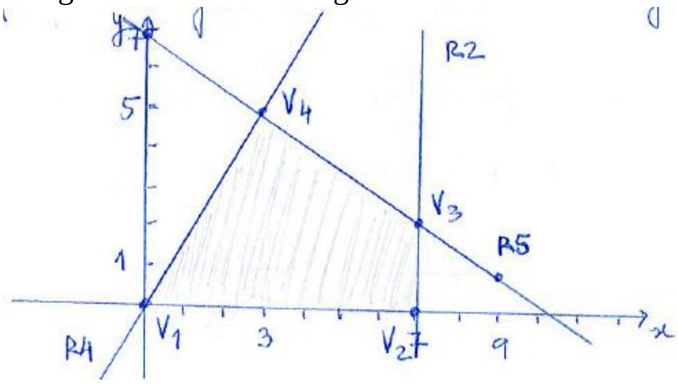
Parte I

(Página 151 do manual, Tarefa 39, Questão 1)

1.1. Sejam $(R_1), (R_2), (R_3), (R_4), (R_5)$ as inequações pela ordem em que são apresentadas no enunciado.

i) Determinar dois pontos para (R_4)e (R_5):
$(R_4)(0\,,0)(3\,,5)$ $(R_5)(0\,,7)(9\,,1)$

ii) Representar geometricamente a região admissível:



1.2. Resolução analítica

$V_1(0\,,0)$ $V_2(7,0)$

$(R_2 \cap R_5)\begin{cases} x = 7 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$ $V_3(7\,,\frac{7}{3})$

$(R_4 \cap R_5)\begin{cases} 3y - 5x = 0 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ $V_4(3\,,5)$

1.3. Resolução pelo método analítico

$F(0\,,0) = 0$ $F(7\,,0) = 7 + 0 = 7$ $F\left(7\,,\frac{7}{3}\right) = 7 + \frac{14}{3} = \frac{35}{3} < 13$

$F(3\,,5) = 3 + 10 = 13$

A função toma o valor máximo para o par $(3\,,5)$.

Parte II

1.4.

1.4.1. $G(0\,,0) = 0$

$G(7\,,0) = 4 \times 7 + 6 \times 0 = 28$

$G\left(7\,,\frac{7}{3}\right) = 4 \times 7 + 6 \times \frac{7}{3} = 28 + 14 = 42$

$G(3\,,5) = 4 \times 3 + 6 \times 5 = 12 + 30 = 42$

Qualquer ponto do segmento $[V_3V_4]$ torna G igual a 42.

Existe uma infinidade de pontos para os quais G é máximo. O aluno pode verificar pela resolução pelo método gráfico. Observando que $G(x\,,y)$ é da família das rectas $4x + 6y = k$ e estas são paralelas a (R_5) $2x + 3y = 21$, G toma valor máximo no segmento $[V_3V_4]$ contido na região admissível.

1.4.2. Por observação de (R_1) e (R_2), x só poderá tomar os inteiros positivos de 0 a 7.

$V_1(0\,,0)$: $G(0\,,0) = 0$

$x = 1$ em (R_4) tem-se $y = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

em (R_5) tem-se $y = \frac{14}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

Logo, não existe um par de inteiros em que $x = 1$.

$x = 2$ em (R_4) tem-se $y = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

em (R_5) tem-se $y = \frac{17}{3} \notin \mathbb{Z}^+$ Opção não válida

$x = 3$ em (R_4) tem-se $y = 5 \in \mathbb{Z}^+ : V_4(3\,,5)$

em (R_5) tem-se $y = 5 \in \mathbb{Z}^+$ Opção válida

$x = 4$ em (R_4) tem-se $y = \frac{20}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

em (R_4) tem-se $y = \frac{13}{3} \notin \mathbb{Z}^+$ Opção não válida

$x = 5$ em (R_4) tem-se $y = \frac{25}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

em (R_5) tem-se $y = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z}^+$ Opção não válida

$x = 6$ em (R_4) tem-se $y = 10 \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow (6\,,10)$

em (R_5) tem-se $y = 3 \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow (6\,,3)$

$(6\,,10)$ não satisfaz (R_5) Opção não válida

$(6\,,3)$ satisfaz (R_4) e as restantes restrições. Opção válida

$x = 7$ em (R_4) tem-se $y = \frac{35}{3} \notin \mathbb{Z}^+$

em (R_5) tem-se $y = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}^+$ Opção não válida

No caso de x e y só tomarem valores inteiros (positivos), a fungão G toma valor máximo em $(3\,,5)$, $G(3\,,5) = 42$, e em $(6\,,3)$, $G(6\,,3) = 4 \times 6 + 6 \times 3 = 24 + 18 = 42$. São dois os pontos.

- Como G toma valor máximo no segmento $[V_3V_4]$, bastará procurar pares de inteiros na restrição (R_5) e verificar se esse par satisfaz as restantes restrições.

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 3

Parte I

Questão 1

Alínea 1.1

Estratégias

- **v.** O aluno determina dois pontos para representar as retas associadas às inequações e segue para a representação da região admissível: “Proposta de Resolução da Tarefa 3”.
- **vi.** O aluno recorre à calculadora para representar geometricamente as restrições.

Dificuldades: As dificuldades que surgirem poderão ser semelhantes às das tarefas anteriores. Serve-se desta alínea para consolidar este procedimento e identificar possíveis dúvidas que ainda subsistam.

Orientação: Deixa-se a representação gráfica para a pequena discussão que segue a resolução autónoma pelos alunos.

Alínea 1.2

i. O aluno determina os vértices calculando analiticamente as coordenadas dos pontos de interseção das restrições, duas a duas: "Proposta de Resolução da Tarefa 3".

ii. O aluno recorre à calculadora para determinar as coordenadas dos vértices.

Nota: Os alunos que recorram à calculadora devem apresentar na resolução as equações das quais procuram a interseção (na forma de sistema ou conjunção de condições) e apresentar de seguida as coordenadas do ponto de interseção.

Dificuldades: As dificuldades que surgirem poderão ser semelhantes às das tarefas anteriores. Serve-se desta alínea para consolidar este procedimento e identificar possíveis dúvidas que ainda subsistam.

Orientação: Deixa-se este para a pequena discussão que segue a resolução autónoma pelos alunos.

Alínea 1.3

Esta alínea é para ser discutida em grupo-turma, aproveitando-a para introduzir duas maneiras de calcular a solução ótima – uma abordagem mais analítica, outra gráfica. Contudo, o aluno que termine a exploração das alíneas anteriores muito antes do previsto poderá avançar para esta alínea. Esse aluno poderá abordar esta alínea por alguma das abordagens propostas para a parte II da Tarefa 2.

Parte II

Questão 1

Alínea 1.4.1

Estratégias

i. Por influência da tarefa anterior, o aluno poderá procurar o vértice da região admissível que torna G máximo seguindo uma abordagem mais analítica ou gráfica.

   Abordagem 1: Pela da abordagem gráfica, o aluno verifica que a função objetivo sobrepõe a região admissível num segmento de reta.

   Abordagem 2: Pela abordagem analítica, o aluno verifica que a função objetivo tem valor máximo em dois vértices, logo tem máximo no segmento de reta que tem como extremo esses pontos.

Abordagem 3: O aluno observa que G tem valor máximo em V_3 (ou V_4) e observa que a família de retas $4x + 6y = k$, $k \in \mathbb{R}$, são paralelas à equação $2x + 3y = 21$ que se obtém da restrição $(R5)$.

ii. O aluno pode ainda recorrer a alguma das abordagens apontadas na parte II da Tarefa 2.

Dificuldades:

- Esta alínea serve, de certa maneira, de consolidação das abordagens aprendidas para resolver a questão 1.3 da parte I desta tarefa. As dificuldades poderão estar em aplicar os conhecimentos recentemente aprendidos.
- O aluno identifica que V_3e V_4 maximizam G, mas não reconhecem existir uma infinidade de pontos no segmento $[V_3V_4]$ (em "Proposta de Resolução da Tarefa 3") que maximiza a função objetivo.
- O aluno identifica apenas V_3ou V_4 como o vértice que maximiza a função objetivo.

Orientação: Apoia-se os alunos na aplicação de uma das abordagens, analítica ou gráfica ou outra. Deixa-se a análise da solução para a fase de discussão.

Alínea 1.4.2

i. Depois de identificar o segmento de reta $[V_3V_4]$ como solução que maximiza a função objetivo, procura nesse segmento os pontos de coordenadas inteiras.

ii. Pelas primeiras duas restrições, o aluno observa que x só poderá tomar valores inteiros entre 0 e 7. Substitui x por esses inteiros nas equações resultantes das restrições e procura por valores de y inteiros.

iii. Pela quarta restrição, o aluno observa que y só poderá tomar valores interiores entre 0 e 11. Substitui y por esses inteiros nas equações resultantes das restrições e procura por valores de x inteiros.

iv. Pela análise realizada nas duas estratégias anteriores, o aluno forma pares de inteiros (x, y) que respeitem os respetivos intervalos de variação. Verifica quais estão contidos na região admissível e, desses, procura identificar os que maximizam G.

Dificuldades:

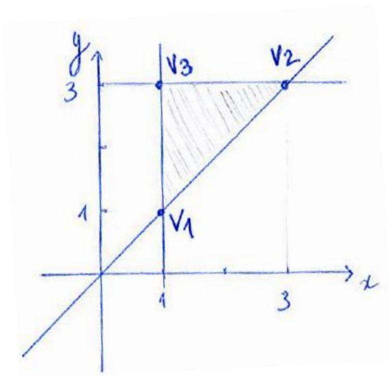
- O aluno identifica apenas o vértice V_4, pois é, dos dois vértices que pertencem ao segmento $[V_3V_4]$, aquele que tem as coordenadas inteiras.
- O aluno entende que deve efetuar novamente um dos procedimentos de determinação dos pontos que maximizam a função objetivo, centrando-se em pontos de coordenadas inteiras.

Orientação: Deixa-se esta alínea para a discussão que segue a resolução autónoma pelos alunos.

Proposta de Resolução da Tarefa 4

(Página 145 do manual, questão 133)

133.1.



$F(x\,,y) = -x + y$

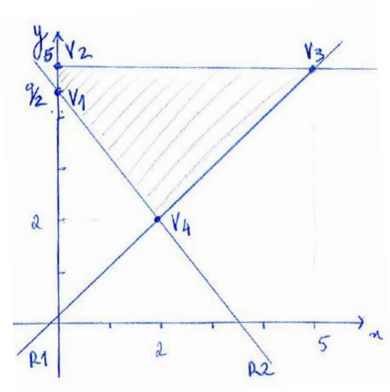
$máx.\, V_3(1,3) \qquad F(1\,,3) = -1 + 3 = 2$

$mín.\, [V_1V_2] \begin{cases} -x + y = k \\ y - x = 0 \end{cases}$ são rectas paralelas

$V_1(1\,,1) \qquad F(1\,,1) = 0$

$V_2(3\,,3) \qquad F(3\,,3) = 0$

133.2.



$V_1\left(0\,,\frac{9}{2}\right)$ $\quad V_2(0\,,5)$ $\quad V_3(5\,,5)$ $\quad V_4\left(\frac{9}{5}\,,\frac{9}{5}\right)$ $\quad (R_1 \cap R_2)$

$F(x\,,y) = \frac{1}{2}x + y$

$máx.\, V_3(5\,,5) \qquad F(5\,,5) = \frac{1}{2} \times 5 + 5 = 7{,}5$

$mín.\, V_4\left(\frac{9}{5}\,,\frac{9}{5}\right) \qquad F\left(\frac{9}{5}\,,\frac{9}{5}\right) = 2{,}7$

Removendo $y \leq 5$, F deixa de ter máximo.

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 4

Questão 1

Esta tarefa serve de consolidação dos procedimentos para a determinação da solução ótima de um problema de Programação Linear.

Alínea 1.a

Estratégias

vii. O aluno determina dois pontos para representar as retas associadas às inequações e segue para a representação da região admissível: "Proposta de Resolução da Tarefa 4".

viii. O aluno recorre à calculadora para representar geometricamente as restrições.

Nota: O aluno que recorrer à calculadora, quando transpuser a representação gráfica para a folha de resolução, deve indicar a janela que utilizou e os pontos de interseção com os eixos coordenados.

Dificuldades: As dificuldades que surgirem poderão ser semelhantes às das tarefas anteriores, no que se refere à representação geométrica de um sistema de inequações.

Orientação: Deixa-se a representação gráfica para a pequena discussão que segue a resolução autónoma pelos alunos.

Para a determinação do máximo e do mínimo da função proposta, espera-se que o aluno proceda com uma das abordagens aprendidas na tarefa anterior.

ix. O aluno recorre à abordagem analítica para procurar o máximo e o mínimo da função F

x. O aluno recorre à abordagem gráfica para procurar o máximo e o mínimo da função F

xi. Por observação da função F, o aluno repara que para valores maiores de x o valor da função decresce, enquanto que para y cresce. Procura, então, o ponto de menor abcissa e maior ordenada na região plana para determinar o máximo.

xii. Numa análise inversa à anterior, o aluno procura o ponto da região plana de maior abcissa e menor ordenada para determinar o mínimo.

Dificuldades: Desta última estratégia, o aluno identifica $(1,1)$ como sendo o ponto que respeita as condições da sua análise e minimiza a função e pode não identificar que $(3,3)$, pertencente à região plana, também minimiza a função (e logo, qualquer ponto do segmento de reta que tem de extremos os pontos referidos, minimiza F).

Orientação: Caso surja na turma e seja identificado pelo professor, deixa-se a abordagem desta situação para a fase da discussão.

xiii. Por comparação da função F com a equação que se obtém da última restrição desta alínea $(y - x = 0 \Leftrightarrow y = x)$, o aluno identifica que a família de retas geradas por F $(-x + y = k \Leftrightarrow y = x + k, k \in \mathbb{R})$ é paralela a essa equação. Substitui um ponto da reta representada por essa equação na função F e verifica que qualquer ponto dela minimiza F, ou seja, o menor valor que k pode tomar é 0.

Alínea 1.b

As estratégias e dificuldades nesta alínea poderão ser semelhantes às da alínea anterior, ou de tarefas anteriormente abordadas.

Dificuldades: Removida a restrição $y \leq 5$

- o aluno não reconhece que F deixa de ter máximo na região plana, sem também conseguir sugerir uma alternativa
- o aluno não reconhece que F deixa de ter máximo e sugere uma semirreta (interseção de uma reta de nível k com a nova região plana) como solução

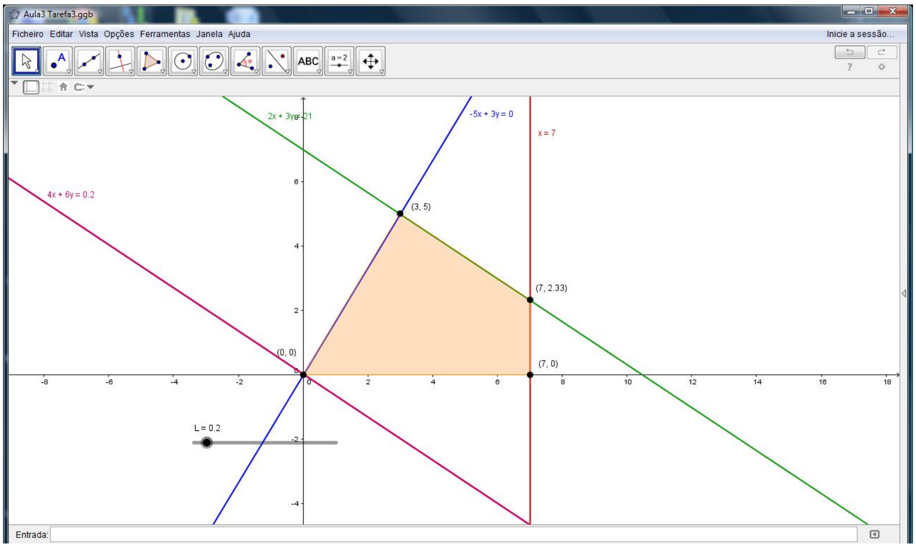
Orientação: Caso surja, deixa-se a abordagem desta dificuldade para a fase da discussão.

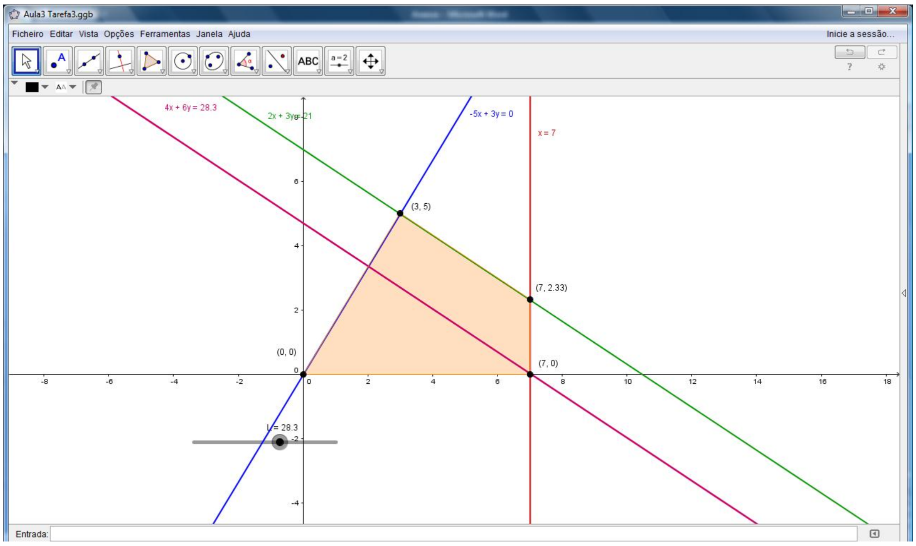
Porque consideras que F tem um máximo nesta região? Qual sugeres que seja o ponto que maximiza F? Poderá não ser um ponto, mas outra coisa? Terá mesmo que ser alguma coisa?

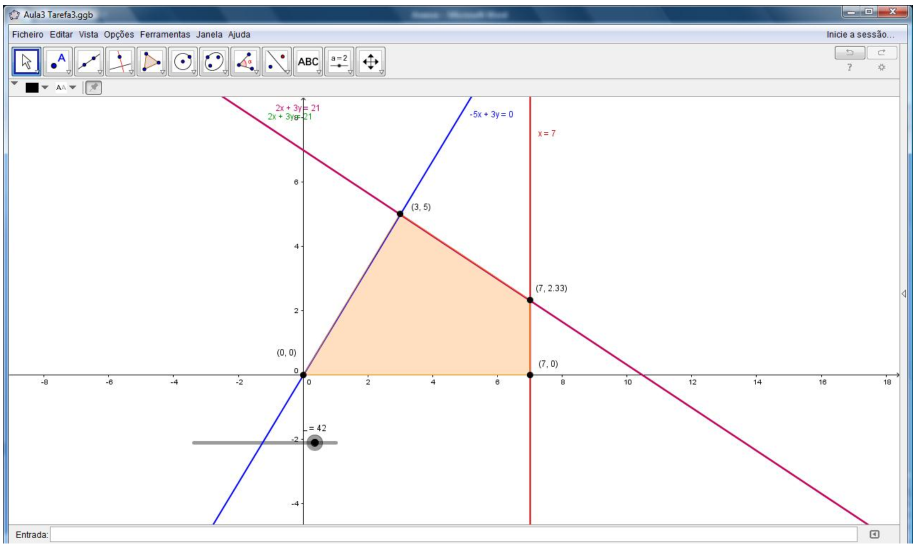
Questão 2

Com a questão 2 pretende-se que os alunos concluam que as soluções que maximizam ou minimizam uma função objetivo dependem do tipo de região admissível, reconhecendo a existência de dois tipos de região admissível – a limitada e a não limitada.

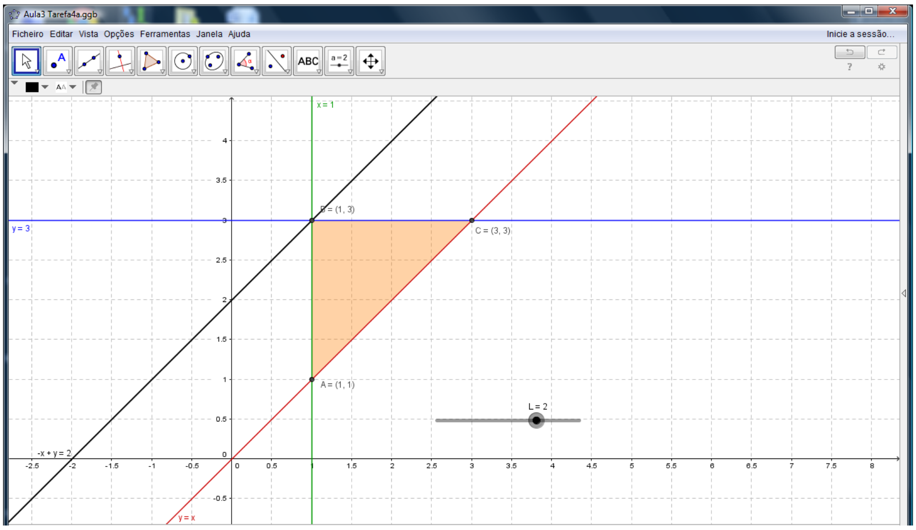
Anexo 19: Projeção em GeoGebra para apoio à resolução da Tarefa 3

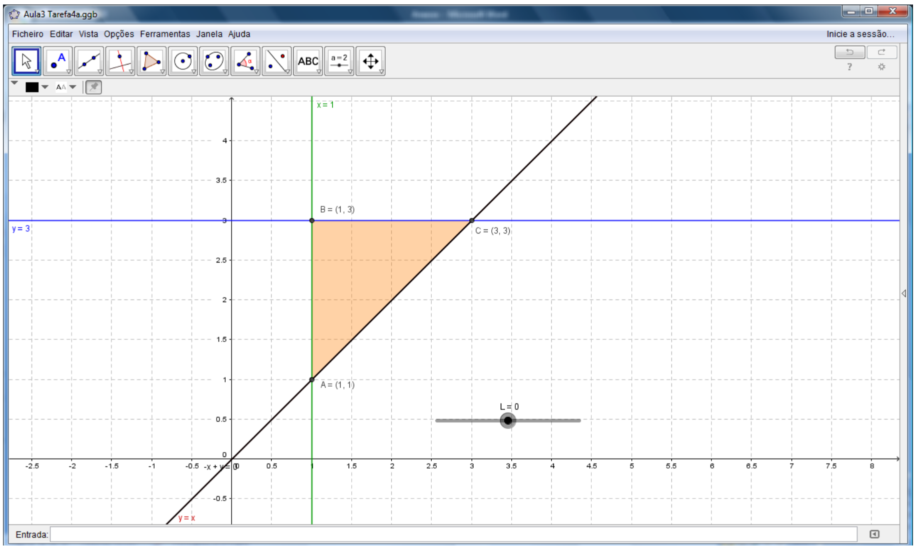




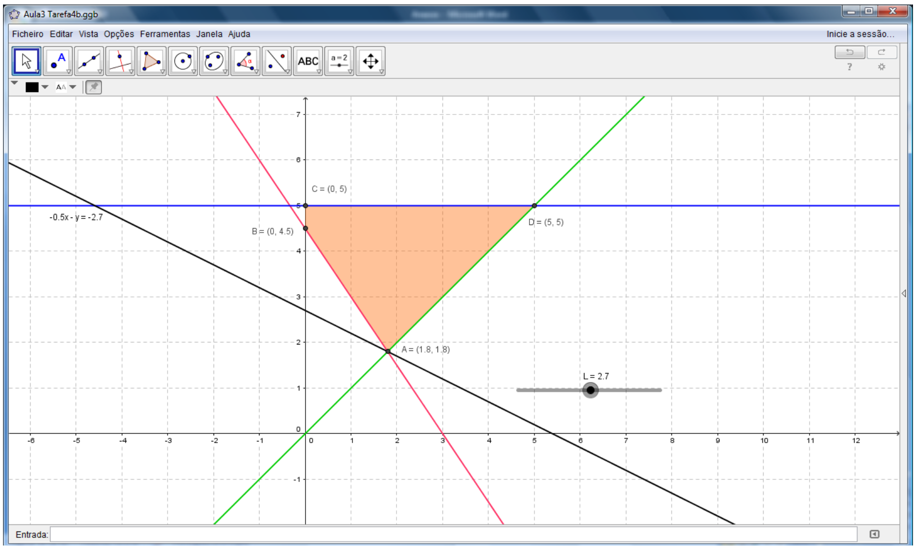


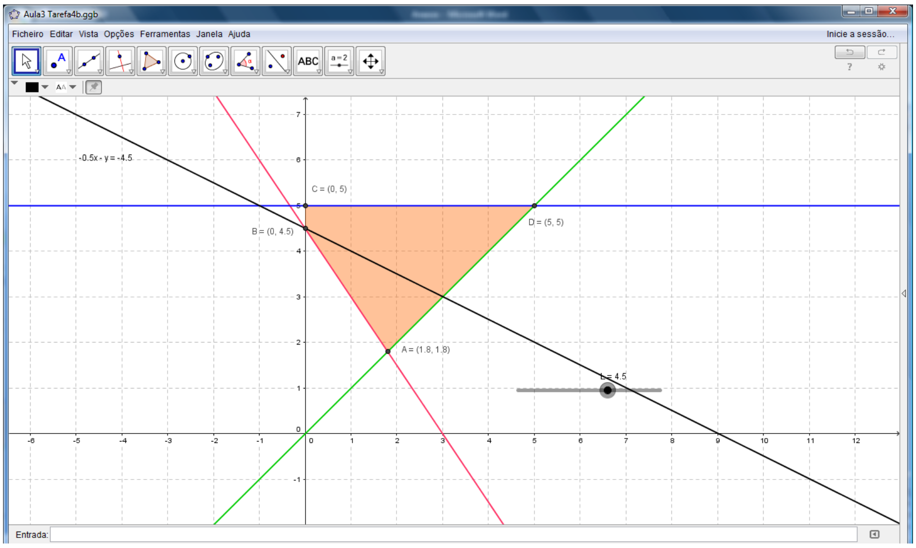
Anexo 20: Projeção em GeoGebra para apoio à resolução da Tarefa 4 alínea a

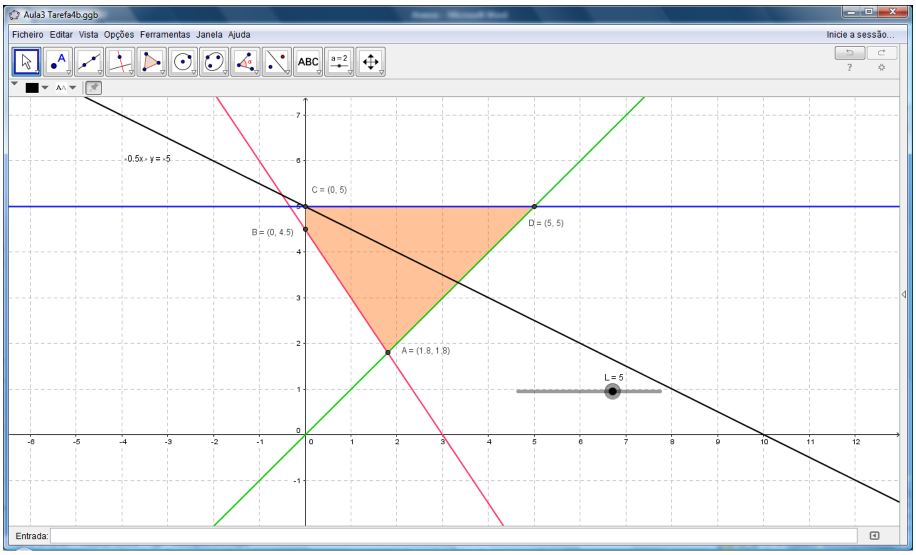




Anexo 21: Projeção em GeoGebra para apoio à resolução da Tarefa 4 alínea b







Anexo 22: Plano da Aula 4

Data/Hora: Quinta-feira, 23–04–2015 / 10h00 – 11h30 **Sala:** C 2.1 **Turma:** 11º E

Sumário: Conclusão da aula anterior. Resolução de uma tarefa sobre PL.

Tópicos/Subtópicos: Geometria no plano e no espaço II: Programação Linear.

Objetivos específicos:

- Exploração do tipo de soluções de um problema de PL e tipo de regiões admissíveis – tarefa 4
- Reconhecer que funções objetivo diferentes podem admitir soluções diferentes para uma mesma região admissível
- Interpretar à luz do enunciado o modelo matemático de problemas de PL – tarefa 5

Recursos: Sala de aula: quadro, giz colorido. Professor: documentos em PPT e em GeoGebra. Alunos: caderno diário, material de desenho – régua e esquadro – calculadora gráfica, manual Parte 1.

Capacidades transversais: Resolução de problemas. Autonomia. Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho: Trabalho autónomo a pares. Discussão em grupo-turma.

Desenvolvimento da aula

(1) Introdução da aula *(10 minutos – 10h00)*

Cumprimentar a turma, ditar o sumário, introduzir a aula:

Continuaremos a resolução da Tarefa 4. Dou mais 10 minutos para a resolverem. Depois desta tarefa, adivinhem?... Realizaremos mais uma tarefa de PL. Nesta trabalharemos em sentido contrário ao efetuado nas tarefas anteriores.

(2) Exploração e Discussão da Tarefa 4 *(20 minutos – 10h10)*

Nesta tarefa de consolidação explora-se, mais uma vez, o número de soluções de um problema de PL e também o tipo de regiões admissíveis.

Disponibilizam-se 10 minutos para a exploração autónoma desta tarefa. Depois, seguem-se 10 minutos de discussão.

Desta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam que as soluções obtidas para cada caso variam em número e que os domínios planos representados exemplificam regiões limitadas, à exceção da última questão da alínea b, que exemplifica uma região não limitada ou ilimitada.

A alínea a da questão 1 serve de consolidação da aplicação de métodos explorados nas tarefas 2 e 3 para determinar a solução ótima de um problema de Programação Linear, e do Teorema Fundamental da Programação Linear, para determinar não só o máximo mas também o mínimo de uma função num domínio plano.

O foco da discussão desta alínea é o mínimo da função dada, na região plana definida pelo sistema, ser o conjunto de pontos de um segmento de reta.

Para a primeira alínea, qual foi o máximo da função objetivo dada que identificaram? E a que tipo de solução corresponde esse máximo? Como é que o identificaram? Que abordagem utilizaram?

E qual foi o mínimo da função objetivo dada que identificaram? E a que tipo de solução corresponde esse mínimo? Como é que justificaram a solução encontrada?

Para cada uma das situações desta alínea, determinação do máximo e do mínimo, pode-se pedir a um aluno em particular que partilhe a sua abordagem ao pedido.

Para apoiar a discussão desta alínea projeta-se o documento em GeoGebra "Aula3 Tarefa4a".

A alínea b da questão 1 pode organizar-se em duas partes. A primeira é semelhante à alínea anterior. A segunda parte – o foco da discussão – que é a questão colocada, permite discutir a inexistência de um máximo para a função dada e introduzir um novo tipo de região admissível, uma região não limitada.

Removendo a restrição $y \leq 5$, como ficou a região plana? Para vocês, esta região plana permanece uma região admissível? Que diferença tem esta região com aquelas com que se depararam até agora?

Que solução é que encontraram como máximo da função F? E qual é o valor máximo que F toma?

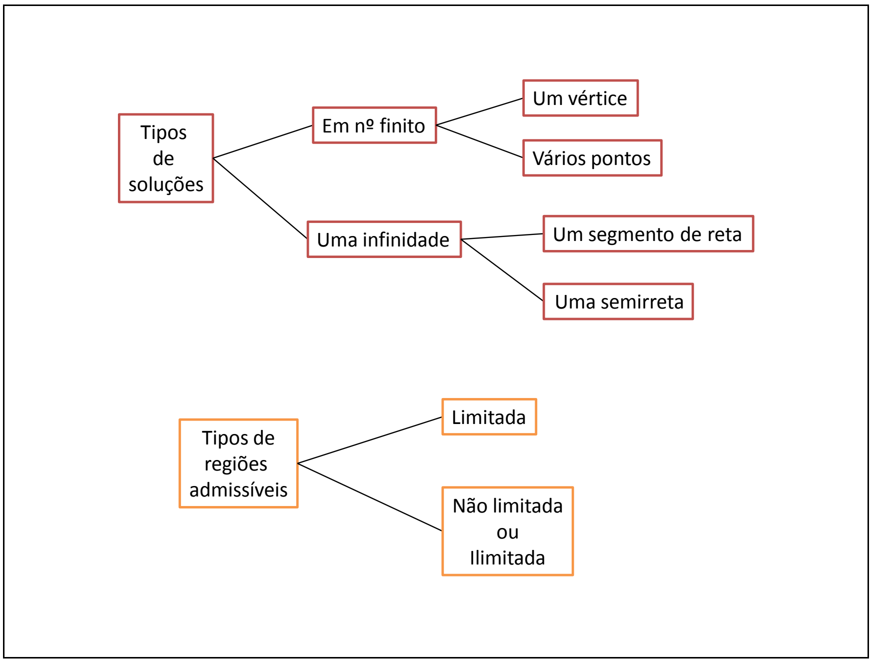
Para apoiar a discussão desta alínea projeta-se o documento em GeoGebra "Aula3 Tarefa4b".

Com a questão 2 pretende-se que os alunos concluam que as soluções que maximizam ou minimizam uma função objetivo dependem do tipo de região admissível, reconhecendo a existência de dois tipos de região admissível – a limitada e a não limitada.

Que conclusões tiraram vocês da resolução desta tarefa? Em particular, o que é que responderam na questão 2?

De que modo os diferentes tipos de regiões admissíveis afetam as soluções de um problema de PL?

Após esta discussão, e alcançado o objetivo sobredito desta alínea, realiza-se uma síntese das conclusões tiradas, projetando o seguinte diapositivo em "Tarefa 4 e 5 PL":



(3) Exploração e Discussão da Tarefa 5 *(40 minutos – 10h30)*

Nesta aula realiza-se a exploração da Tarefa 5, deixando a discussão para a aula seguinte.

Nesta tarefa regressa-se à componente interpretativa associada a um problema de Programação Linear, reintroduzindo um contexto de semirrealidade. Mas, ao contrário do que se tem vindo a trabalhar nas tarefas anteriores, com as primeiras quatro questões desta, procura-se trabalhar nos alunos a capacidade de interpretação do enunciado e a sua tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica (modelação), identificando os elementos associados à formulação matemática de um problema de PL, como são a função objetivo e as restrições.

A última questão desta tarefa vem reforçar a aprendizagem das abordagens para determinar a solução ótima de um problema de Programação Linear.

Quinze minutos para a exploração da tarefa. Esta é para ser resolvida numa folha à parte, devidamente identificada, para no fim ser recolhida. Não devem ser feitas alterações a essa resolução, as correções são feitas no caderno diário.

Divide-se a discussão desta tarefa em duas partes: a primeira correspondente às primeiras quatro questões, para as quais se disponibilizam 10 minutos, a segunda correspondente à última questão, para a qual se disponibiliza 10 minutos.

Projeta-se a tabela diretamente no quadro (em "Tarefa 4 e 5 PL") e propõe-se um aluno para completá-la.

Toda a gente completou a tabela da mesma forma? Quem a completou de maneira diferente?

Na discussão desta tarefa serão propostas questões como:

Questões	Perguntas
1.	*A que conclusão chegaram em relação a esta questão? Porquê? Como é que procederam?* Pode-se propor a um aluno que apresente a sua resolução desta alínea no quadro. No caso de o professor encontrar uma resolução diferente à que a maioria possa ter concebido, poderá propor ao aluno que apresente a sua resolução.
2.	*Porque é que as duas primeiras restrições são estritamente maior que 0? Qual é o significado das duas últimas restrições?* *Particularizando, o que significa cada termo da terceira/quarta inequação?* Para que os alunos respondam a esta questão, é importante que identifiquem o significado das variáveis x e y. No caso de interpretarem as restrições, assumindo implicitamente o significado das variáveis apresentadas, interroga-se: *Porque é que interpretaram a terceira restrição como sendo o que disseram? O que é que assumiram implicitamente para poderem fazer essa interpretação das restrições?* *Qual é o significado das variáveis apresentadas (x e y)?*
3.	*Qual é o significado de cada termo? Qual é o significado da expressão do enunciado? Como é que raciocinaram?*
4.	*O que significa esse par ser solução do problema? O par dado é solução do problema? Não, porquê? Sim, porquê? Qual é o significado dessa solução? Como é que a interpretam?*

Para a última questão, procura-se discutir a resolução, a potencialidade do método de resolução utilizado e a decisão concluída pelos alunos.

Para iniciar, propõe-se as questões:

O que é que a questão pede? E o que pensaram fazer para responder à questão? Como é pensaram para realizar esta questão?

Imaginem que o armazenista vos pede uma opinião (matemática) em relação à quantidade que deverá comercializar de cada mistura?

Propõe-se que um aluno se voluntarie a apresentar a sua resolução no quadro.

Depois, propõe-se ao aluno no quadro, e numa segunda fase à turma, as seguintes questões:

Muito bem! Essa foi a forma como resolveste a questão. E como é que daí concluis a decisão que o armazenista deve tomar? Quais são as vantagens do método que utilizaste?

Alguém resolveu a questão de maneira diferente? (Em caso afirmativo) E como é que concluíste a decisão que o armazenista deve tomar? Quais são as vantagens do método que utilizaste?

Para finalizar a discussão da tarefa, questiona-se os alunos acerca da utilidade (potencialidades e desvantagens) da tabela presente no início da mesma:

Qual o papel da tabela? O que faz a tabela na tarefa? Qual entendem que seja a utilidade da tabela?

Desta análise pretende-se que os alunos percebam que a tabela pode ser um elemento que auxilia a organização da informação do enunciado, ajudando posteriormente na modelação de um problema de PL.

(4) Síntese da aula *(10 minutos – 11h10)*

Concluir a aula recapitulando as aprendizagens da aula anterior e desta e adiantando o previsto para a aula seguinte:

- Recapitular as fases de resolução de um problema de PL, utilizando a última tarefa realizada como exemplo, a Tarefa 5:

  A fase de interpretação da informação do enunciado, nesta tarefa, ocorreu quase que de mãos dadas com a organização da informação na tabela. A fase de identificação e definição das variáveis fez-se implicitamente na tabela e explicitamente na segunda questão.
  A fase de modelação matemática do problema surge na segunda e na terceira questões e, por fim, a fase de resolução do problema surge na quinta e última questão da tarefa.

- Recapitular os tipos de soluções e regiões admissíveis que podem emergir de um problema de PL

- Recapitular as abordagens à determinação da solução ótima de um problema de PL. Aqui o professor deverá ter em atenção as abordagens que emergirem do trabalho realizado com a Tarefas 4 e 5 desta aula.

- Recordar o Teorema Fundamental da PL, apelando à memória dos alunos para que o digam, enquanto o professor escreve-o no quadro, e questionando-lhes sobre a importância deste.

  Qual é a relevância deste teorema? Para que vos serve este teorema? O que vos permite fazer?

(5) **Início da Exploração da Tarefa 6** *(10 minutos – 11h20)*

No tempo que resta dá-se início á exploração da Tarefa 6 que corresponde às Propostas das páginas 170 e 171 do manual.

Começa-se a Proposta 31 da página 170, para ser realizada numa folha à parte, que é recolhida no final.

Conclusão da aula:

A próxima aula será dedicada à resolução de problemas de Programação Linear. Tragam a Parte I do manual, tragam material de desenho, o aristo. Os primeiros dois problemas que proporei são para resolver numa folha à parte. Por isso, preparem folhas quadriculadas, se vos der mais jeito. As representações gráficas, se as fizerem, são para ser apresentadas com rigor, portanto não descurem o material de desenho.

Avaliação: A avaliação reguladora por observação direta: da adesão e da participação nas questões propostas e nas discussões, quer para contribuir quer para pedir esclarecimento.

Pedagogia diferenciada: Uma aluna da turma trabalhará com a professora titular. Para quem concluir as tarefas antes do previsto propõe-se a ficha de trabalho “Outras propostas”.

Proposta de resolução e Previsão de dificuldades:

Proposta de Resolução da Tarefa 5

1. 70 kg da 1ª mistura leva 35 kg de amêndoas de licor e 35 kg de amêndoas de chocolate.

90 kg da 2ª mistura leva 27 kg de amêndoas de licor e 63 kg de amêndoas de chocolate.

$35 + 27 = 62\ kg\ de\ amêndoas\ de\ licor < 80\ kg$
$35 + 63 = 98\ kg\ de\ amêndoas\ de\ chocolate < 100\ kg$

É possível pois a quantidade de amêndoas de cada tipo é inferior à quantidade disponível em stock.

2. $x > 0$ representa a quantidade produzida da 1ª mistura que não pode ser negativa. Também não pode ser nula, pois existem quantidades de amêndoas de cada tipo em stock para produzir alguma quantidade de 1ª mistura.

$y > 0$ é análoga à anterior, mas para a 2ª mistura

$0{,}5x + 0{,}7y \leq 100$ representa a quantidade (em kg) de amêndoas de chocolate gasta que não pode ser superior a $100\ kg$, pois esta é a quantidade existente em stock.

$0{,}5x$ é a quantidade de amêndoas de chocolate gasta na 1ª mistura e $0{,}7y$ é a quantidade de amêndoas de chocolate gasta na 2ª.

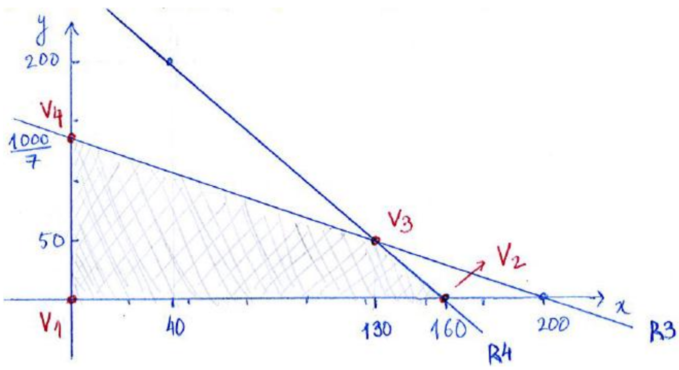
$0{,}5x + 0{,}3y \leq 80$ é análoga à anterior, mas para a quantidade de amêndoas de licor.

$0{,}5x$ é a quantidade de amêndoas de licor gasta na 1ª mistura e $0{,}3y$ é a quantidade de amêndoas de licor gasta na 2ª.

3. A expressão representa o valor de venda de uma certa quantidade das misturas, com a venda da 1ª a 12 €/kg e da 2ª a 9 €/kg.

4. O par $(20, 30)$ é solução do problema, pois satisfaz todas inequações do sistema. Esta solução significa que o armazenista pode produzir 20 kg da 1ª mistura e 30 kg da 2ª para vender.

5. i) Representação gráfica do sistema:



$(R_3)\ (200\,,0)\ (130\,,50)$ $(R_4)\ (160\,,0)\ (40\,,200)$

ii) Determinação da solução óptima:

$V_1(0\,,0)$ $V_2(160\,,0)$ $V_3(130\,,50)$ $V_4\left(0\,,\frac{1000}{7}\right)$

$F(x\,,y) = 12x + 9y$

$V_1\!: F(0\,,0) = 0$ $V_2\!: F(160\,,0) = 1920$

$V_3: F(130\,,50) = 1560 + 450 = 2010 \qquad V_4: F\left(0\,,\frac{1000}{7}\right) = \frac{9000}{7} = 1285{,}71$

O armazenista deverá comercializar 130 kg da 1ª mistura e 50 kg da 2ª.

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 5

Parte I

Esta tarefa tem como objetivo trabalhar a interpretação de enunciados de problemas de Programação Linear e de interpretação da formulação matemática dos mesmos.

Completar a tabela

Estratégias

xiv. O aluno completa a tabela da seguinte forma:

		Quantidade (kg)		Preço (€)
		Amêndoas de licor	Amêndoas de chocolate	
Mistura 1 (kg)	x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$	$12x$
Mistura 2 (kg)	y	$\frac{3}{10}y$	$\frac{7}{10}y$	$9y$
Total		80	100	

xv. O aluno completa a tabela escrevendo os coeficientes na forma decimal ou na forma de percentagem.

Dificuldades:

- O aluno completa a tabela sem utilizar as variáveis, escrevendo apenas a percentagem/fração que corresponde cada tipo de amêndoa a cada mistura e o preço por cada kg de cada mistura.

- Na linha do total, o aluno escreve a soma cujas parcelas são as linhas anteriores da mesma coluna, sem reconhecer que esse total corresponde à quantidade existente em *stock*.

- O aluno preenche as quantidades de amêndoas de cada tipo, calculando as percentagens das quantidades em *stock*, por exemplo, 50% de 80 kg de amêndoas de licor, que é 40 kg.

Orientação: Deixa-se a abordagem a esta questão para o momento de discussão.

Questão 1

i. O aluno avalia a quantidade de amêndoas de licor e chocolate existentes em cada mistura e compara com a quantidade de cada tipo de amêndoa disponível em *stock*. Em "Proposta de Resolução da Tarefa 5".

ii. O aluno compara a quantidade total produzida das misturas com a quantidade total disponível em *stock*: $70 + 90 = 160 < 180 = 100 + 80$.

Dificuldades:

- O aluno determina 50% de 80 kg de amêndoas de licor e de 100 kg de amêndoas de chocolate, e compara o resultado com a quantidade da primeira mistura: $40 + 50 = 90 > 70$
  E/Ou
  determina 30% de 80 kg de amêndoas de licor e 70% de 100 kg de amêndoas de chocolate, e compara o resultado com a quantidade da segunda mistura: $24 + 70 = 94 > 90$

Orientação: Deixa-se a abordagem à questão para o momento de discussão. No caso de algum aluno não conseguir avançar e manifestar essa sua situação, o professor poderá apoiar com questões como:
O que não compreendes da questão? Porque é que não consegues avançar? Porque estás bloqueado? Em que bloqueaste? Lê-me a questão 1? O que te é pedido? Como pensas proceder?

Questão 2

Primeira inequação (a segunda é análoga)

Dificuldades: O aluno interpreta a desigualdade não estrita, sem (conseguir) justificar a estrita.

Terceira inequação (a quarta é análoga)

Dificuldades:

- O aluno tem dificuldade em interpretar a inequação.

Orientação: *O que é que não compreendes do enunciado? Leste o enunciado todo? O que representam as variáveis? Repara na tabela. Que relação poderá ter esta questão com a tabela que completaste? Repara na informação presente na tabela? O que tens lá? O que preencheste? Que significado tem o que preencheste?*
O que achas que representa o termo $0{,}5x$ na primeira inequação? E o termo $0{,}7y$? E o 100?

Questão 3

Dificuldades:

- O aluno identifica a expressão como a função objetivo.

Orientação: Caso o professor identifique, aproveita esta situação para a discussão. propondo questões como as seguintes: *Como justificas que essa expressão é a função objetivo? Em que situação é que se fala de uma função objetivo? Estaremos perante um problema de Programação Linear? Dado que identificaste essa função, qual é o objetivo do problema?*

Questão 4

i. O aluno substitui as variáveis em cada inequação e verifica que as coordenadas do par ordenado as respeitam.
ii. O aluno representa graficamente o sistema de inequações e representa o ponto de coordenadas $(20, 30)$, verificando que se encontra na região plana definida pelo sistema.

Dificuldades:

- O aluno considera o par uma solução, comparando a soma $20 + 30 = 50$, com as quantidades em *stock*.

- O aluno interpreta as coordenadas da solução como sendo as quantidades respetivas de amêndoas de licor e de chocolate que o armazenista pode produzir.

- Da interpretação anterior, o aluno considera o par solução do problema, pois $20 < 100$ e $30 < 80$.

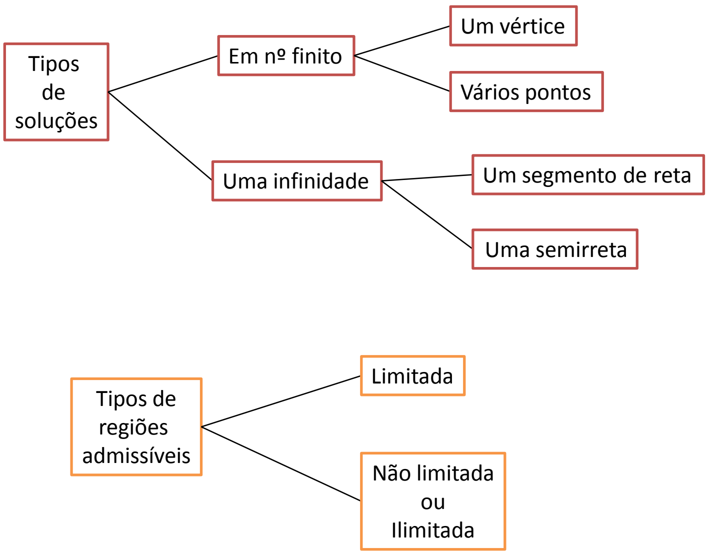
Orientação: Deixa-se para a discussão.

Questão 5

i. O aluno segue os procedimentos para resolver um problema de programação linear.

Dificuldades: As dificuldades poderão ser semelhantes às identificadas para tarefas anteriores (parte II da tarefa 2 e tarefa 3).

Anexo 23: Diapositivos para após a Tarefa 4 e para a Tarefa 5



		Quantidade (kg)		Preço (€)
		Amêndoas de licor	Amêndoas de chocolate	
Mistura 1 (kg)	x			
Mistura 2 (kg)	y			
Total				

Anexo 24: Plano da Aula 5

Data/Hora: Sexta-feira, 24–04–2015 / 11h45 – 13h30 **Sala:** C 2.1 **Turma:** 11º E

Sumário: Discussão da Tarefa 5. Resolução de problemas de Programação Linear.

Tópicos/Subtópicos: Geometria no plano e no espaço II: Programação Linear.

Objetivos específicos:
Os alunos deverão ser capazes de

- Interpretar um enunciado e reconhecer que é um problema de PL
- Modelar um problema de PL, identificando as variáveis, escrever a função objetivo e as restrições
- Determinar o máx. ou mín. para função objetivo no domínio definido pelas restrições, i. e. determinar a solução ótima para um problema de PL
- Interpretar os resultados obtidos à luz de um dado problema

Recursos: Sala de aula: quadro, giz colorido. Professor: documentos em PPT e em GeoGebra. Alunos: caderno diário, material de desenho – régua e esquadro – calculadora gráfica, manual Parte 1.

Capacidades transversais: Resolução de problemas. Autonomia. Comunicação matemática.

Metodologia de trabalho: Trabalho autónomo a pares. Discussão em grupo-turma.

Desenvolvimento da aula

(1) Introdução da aula *(10 minutos – 11h45)*

Cumprimentar a turma, ditar o sumário, introduzir a aula:

Esta aula é dedicada à resolução de problemas de Programação Linear. Como informei os dois primeiros problemas propostos para hoje são realizados em folhas à parte. O uso da calculadora deve ser devidamente indicado na resolução, conforme os aspetos já referidos nas aulas anteriores. Podem ainda utilizar a calculadora para verificar os vossos resultados. Atenção às representações gráficas, utilizem o material de desenho. Mas antes, a discussão da tarefa de ontem.

(2) Discussão da Tarefa 5 *(10 minutos – 11h55)*

Dedicam-se 10 minutos à discussão desta tarefa. Nesta fase serão propostas questões como:

Questões	Perguntas
1.	*A que conclusão chegaram em relação a esta questão? Porquê? Como é que procederam?* Pode-se propor a um aluno que apresente a sua resolução desta alínea no quadro. No caso de o professor encontrar uma resolução diferente à que a maioria possa ter concebido, poderá propor ao aluno que apresente a sua resolução.
2.	*Porque é que as duas primeiras restrições são estritamente maior que 0? Qual é o significado das duas últimas restrições?* *Particularizando, o que significa cada termo da terceira/quarta inequação?* Para que os alunos respondam a esta questão, é importante que identifiquem o significado das variáveis x e y. No caso de interpretarem as restrições, assumindo implicitamente o significado das variáveis apresentadas, interroga-se: *Porque é que interpretaram a terceira restrição como sendo o que disseram? O que é que assumiram implicitamente para poderem fazer essa interpretação das restrições?* *Qual é o significado das variáveis apresentadas (x e y)?*
3.	*Qual é o significado de cada termo? Qual é o significado da expressão do enunciado? Como é que raciocinaram?*
4.	*O que significa esse par ser solução do problema? O par dado é solução do problema? Não, porquê? Sim, porquê? Qual é o significado dessa solução? Como é que a interpretam?*

Para a última questão, procura-se discutir a resolução, a potencialidade do método de resolução utilizado e a decisão concluída pelos alunos.

Para iniciar, propõe-se as questões:

O que é que a questão pede? E o que pensaram fazer para responder à questão? Como é pensaram para realizar esta questão?

Imaginem que o armazenista vos pede uma opinião (matemática) em relação à quantidade que deverá comercializar de cada mistura?

Propõe-se que um aluno se voluntarie a apresentar a sua resolução no quadro.

Depois, propõe-se ao aluno no quadro, e numa segunda fase à turma, as seguintes questões:

Muito bem! Essa foi a forma como resolveste a questão. E como é que daí concluis a decisão que o armazenista deve tomar? Quais são as vantagens do método que utilizaste?

Alguém resolveu a questão de maneira diferente? (Em caso afirmativo) E como é que concluíste a decisão que o armazenista deve tomar? Quais são as vantagens do método que utilizaste?

Para finalizar a discussão da tarefa, questiona-se os alunos acerca da utilidade (potencialidades e desvantagens) da tabela presente no início da mesma:

Qual o papel da tabela? O que faz a tabela na tarefa? Qual entendem que seja a utilidade da tabela?

Desta análise pretende-se que os alunos percebam que a tabela pode ser um elemento que auxilia a organização da informação do enunciado, ajudando posteriormente na modelação de um problema de PL.

(3) Síntese das aprendizagens *(10 minutos – 12h05)*

Após a discussão da Tarefa 5, faz-se uma síntese das aprendizagens das aulas de Programação Linear:

- Recapitular as fases de resolução de um problema de PL, utilizando a última tarefa realizada como exemplo, a Tarefa 5:
  A fase de interpretação da informação do enunciado, nesta tarefa, ocorreu quase que de mãos dadas com a organização da informação na tabela. A fase de identificação e definição das variáveis fez-se implicitamente na tabela e explicitamente na segunda questão.
  A fase de modelação matemática do problema surge na segunda e na terceira questões e, por fim, a fase de resolução do problema surge na quinta e última questão da tarefa.

- Recapitular os tipos de soluções e regiões admissíveis que podem emergir de um problema de PL

- Recapitular as abordagens à determinação da solução ótima de um problema de PL. Aqui o professor deverá ter em atenção as abordagens que emergirem do trabalho realizado com a Tarefas 4 e 5 desta aula.

- Recordar o Teorema Fundamental da PL, apelando à memória dos alunos para que o digam, enquanto o professor escreve-o no quadro, e questionando-lhes sobre a importância deste.

Qual é a relevância deste teorema? Para que vos serve este teorema? O que vos permite fazer?

(4) Exploração e Discussão de problemas de PL – Tarefa 6 *(60 minutos – 12h15)*

Proposta 31		Proposta 34		Propostas 32, 33 e 35
Exploração	**Discussão**	**Exploração**	**Discussão**	**Trabalho autónomo**
10 min	10 min	10 min	10 min	15 min

Os problemas que constituem esta tarefa são para ser realizados autonomamente e a pares pelos alunos. Perspetiva-se uma intervenção ativa destes nesta atividade, propondo alunos ao quadro para apresentar a sua resolução, explicar o processo que utilizaram e as conclusões que tiraram da sua resolução. Propõe-se também que se explore as potencialidades dos seus métodos de resolução.

Proposta 31 *(20 min – 12h15)*

A Proposta 31, da página 171 do manual, é para ser realizada autonomamente, a pares e numa folha aparte, uma folha por aluno, devidamente identificada. Qualquer alteração ou correção da resolução, numa fase posterior à da exploração, deve ser registada no caderno diário.

Desta proposta pretende-se que os alunos, com os conhecimentos adquiridos das aulas anteriores, resolvam o problema de Programação Linear (lembrando as fases de resolução dos mesmos).

Durante a fase de exploração, o professor percorre a sala, auxilia pontualmente os pares, e procura por resoluções cuja modelação matemática seja diferente da maioria, podendo aproveitá-las para a fase de discussão.

Na fase de discussão, o professor propõe questões de modo a apelar pelos processos realizados pelos alunos e resultados que alcançaram por esses processos. Nesta altura, poderá apelar pela participação dos alunos que modelaram o problema de maneira diferente, propondo-lhes que apresentem o seu modelo no quadro.

Alunos haverá que terão iniciado o problema definindo as variáveis, outros a função objetivo e outros terão identificado imediatamente as restrições do problema (outros ainda uma abordagem não prevista). O professor poderá escolher uma ou duas das abordagens e propor aos autores que as apresentem no quadro.

Finalizada esta discussão relembram-se as fases para resolver um problema de PL e verifica-se se foram seguidos, com maior ou menor precisão, na sua totalidade ou não (se estão, mesmo que implicitamente contemplados).

Proposta 34 *(20 min – 12h35)*

Após a realização da proposta anterior, segue-se para a Proposta 34. Esta também segue os moldes da anterior, sendo realizada autonomamente, a pares, e numa folha à parte.

Nesta proposta pretende-se também que os alunos apliquem os seus conhecimentos acerca da resolução de problemas de Programação Linear. Contudo, ao contrário da proposta anterior, nesta não existe função objetivo, pelo que os alunos deverão concluir duas decisões (conforme o enunciado) sem o conhecimento daquela. O foco da discussão desta proposta será, portanto, as conclusões tiradas pelos alunos e os raciocínios que tomaram para essas conclusões.

Na fase de discussão pode-se propor um aluno ao quadro para apresentar a sua resolução, mas ainda sem as conclusões.

Pode-se propor questões como as seguintes:

Concordam com o que está apresentado no quadro? Algum comentário, alguma sugestão à resolução de XX?

YY, o que significa a restrição tal? OU YY, a que informação do enunciado recorreste para identificar a restrição tal?

ZZ, o que representa a restrição tal?

E a função objetivo? Onde está ela? Alguém a identificou?

Mas o problema tem objetivo? E não tem função objetivo?

E a que conclusões chegaram? Qual deve ser o número de detergentes e amaciadores que o comerciante deve comprar, de modo a ser mínima a quantidade de amaciador? Porquê? E máxima a de detergente? Porquê?

Restantes propostas *(15 min – 12h55)*

As restantes Propostas podem ser realizadas no caderno diário e servem de consolidação de conhecimentos e preparação para a avaliação que terá lugar na aula seguinte. Os alunos trabalham autonomamente e a pares. O professor percorre a sala acompanhando de perto o trabalho dos alunos e esclarecendo dúvidas particulares. Sempre que considerar relevante ou que uma dúvida é repetida, esclarece-a em grupo-turma.

Nestas propostas insiste-se nos procedimentos matemáticos necessários à resolução dos problemas e na interpretação. Procura-se também identificar e resolver as dificuldades que persistirem, para que os conhecimentos fiquem melhor consolidados.

Para cada proposta, pede-se a um aluno que apresente a sua resolução por escrito no quadro. O aluno é escolhido conforme a sua resolução se verifique que contribua para a compreensão dos alunos ou que suscite uma discussão interessante.

Discute-se, em especial, a determinação da solução para a Proposta 32. Nesta, a função objetivo tem como máximo um par de coordenadas racionais quando, no contexto do problema, a melhor solução deverá ser inteira positiva. Procura-se então discutir como é que os alunos decidem a melhor solução para o problema:

A que solução ótima chegaram no problema da Proposta 32? E essa solução é a adequada? Sim, porquê? Não, porquê?

Como é fazem então para escolher uma solução adequada ao contexto do problema?

(5) Síntese da aula *(5 minutos – 13h10)*

Finaliza-se a aula realizando um resumo do trabalho efetuado nas aulas dedicadas à Programação Linear. Apela-se à turma para sistematizar as fases importantes contemplar na resolução de problemas de PL.

Quais foram as fases que consideraram importantes para a resolução de um problema de Programação Linear?

Apela-se também à sistematização das várias situações encontradas na determinação da solução ótima.

Quais foram os métodos que vos realçaram na determinação da solução ótima?

O que devemos ter em conta na determinação da solução ótima?

Conclui-se a aula relembrando que haverá uma avaliação desta subunidade na aula seguinte. Os alunos deverão munir-se do material necessário à sua concretização: material de escrita, material de desenho – régua e/ou esquadro – e calculadora. Os alunos deverão também passar a levar para as aulas a segunda parte do manual, pois dar-se-á início a outra unidade, as Sucessões.

Avaliação: A avaliação reguladora por observação direta: da adesão e da participação nas questões propostas e nas discussões, quer para contribuir quer para pedir esclarecimento.

Pedagogia diferenciada: Uma aluna da turma trabalhará com a professora titular. Para quem concluir as tarefas antes do previsto propõe-se a ficha de trabalho “Outras propostas”.

Proposta de resolução e Previsão de dificuldades:

Proposta de Resolução da Tarefa 6

Proposta 31

i) Organizar a informação em tabela:

Tipo de peça	Montagem (h)	Pintura (h)	Lucro (€)
A	3	3	300
B	5	3	450
Disponibilidade semanal	210	180	

ii) Definir variáveis: $x = n^{\text{º}}\ de\ peças\ do\ tipo\ A$ $y = n^{\text{º}}de\ peças\ do\ tipo\ B$

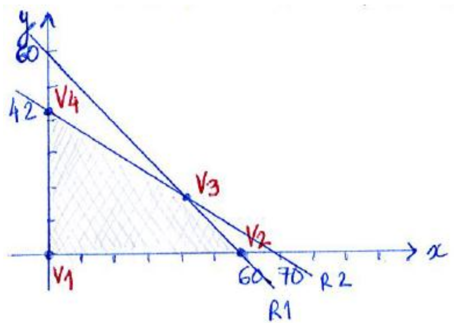
iii) Identificar o objectivo e a função objectivo

Maximizar $L(x\,,y) = 300x + 450y$

iv) Identificar as restrições: $\begin{cases} 3x + 5y \leq 210\ (R_1) \\ 3x + 3y \leq 180\ (R_2) \\ x\,,y \geq 0 \end{cases}$

v) Representar o sistema graficamente, identificando a região admissível

$(R_1)\ (70\,,0)\ (0\,,42)$ $(R_2)\ (0\,,60)\ (60\,,0)$



vi) $V_1(0\,,0)$ $V_2(60\,,0)$ $V_4(0\,,42)$

$\begin{cases} 3x + 5y = 210 \\ 3x + 3y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 15 \end{cases}$ $V_3(45, 15)$

Solução óptima: $L(45, 15) = 300 \times 45 + 450 \times 15 = 20\,250€$, pelo Teorema Fundamental da PL

Proposta 34

i) Definir variáveis:

$x = quantidade\ de$ «$Lavabem$» $y = quantidade\ de$ «$Fofo$»

ii) Identificar objectivos: 1. Minimizar y, 2. Maximizar x

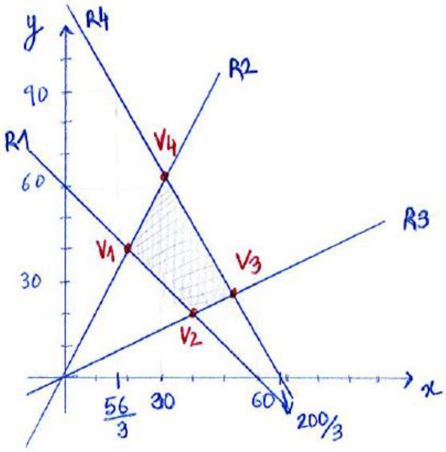
iii) Identificar as restrições:

$$\begin{cases} x+y \geq 60 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq 2y \\ 2{,}25x + 1{,}2y \leq 150 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 60 \ (R_1) \\ x - \frac{y}{2} \geq 0 \ (R_2) \\ x - 2y \leq 0 \ (R_3) \\ 2{,}25x + 1{,}2y \leq 150 \ (R_4) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

iv) Representar graficamente a região admissível:

$(R_1)\ (0\,,60)\ (60\,,0)$ $\quad (R_2)\ (0\,,0)\ (30\,,60)$ $\quad (R_3)\ (0\,,0)\ (60\,,30)$

$(R_4) \left(\frac{200}{3}\,,0\right)\ (0\,,125)\ \left(\frac{56}{3} \approx 18{,}6\,,90\right)$



v) $(R_1 \cap R_2) \begin{cases} x+y=60 \\ -\frac{y}{2}+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=40 \\ x=20 \end{cases}$ $\quad V_1(20\,,40)$

$(R_1 \cap R_3) \begin{cases} x+y=60 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20 \\ x=40 \end{cases}$ $\quad V_2(40\,,20)$

$(R_3 \cap R_4) \begin{cases} x-2y=0 \\ 2{,}25x+1{,}2y=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{300}{5{,}7} \approx 52{,}6 \\ y=\frac{150}{5{,}7} \approx 26{,}3 \end{cases}$ $\quad V_3\left(\frac{300}{5{,}7}\,,\frac{150}{5{,}7}\right)$

$(R_2 \cap R_4) \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ 2{,}25x+1{,}2y=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{150}{4{,}65} \approx 32{,}25 \\ y=\frac{150}{2{,}325} \approx 64{,}5 \end{cases}$ $\quad V_4\left(\frac{150}{4{,}65}\,,\frac{150}{2{,}325}\right)$

vi) Determinar a solução óptima:

1. o vértice V_2 é o que tem o menor valor para y, logo o comerciante deve comprar 40 detergentes e 20 amaciadores.
2. o vértice V_3 é o que apresenta maior valor para x, mas esse valor é racional. Logo, 52 deverá ser a quantidade máxima de "Lava bem" que o comerciante pode comprar.
   De (R_4) vem

$$2{,}25 \times 52 + 1{,}2y = 150 \Leftrightarrow 1{,}2y = 33 \Leftrightarrow y = \frac{33}{1{,}2} = 27{,}5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = 27$$

O comerciante pode comprar 27 "Fofos".

Proposta 32

i) Organizar a informação em tabela:

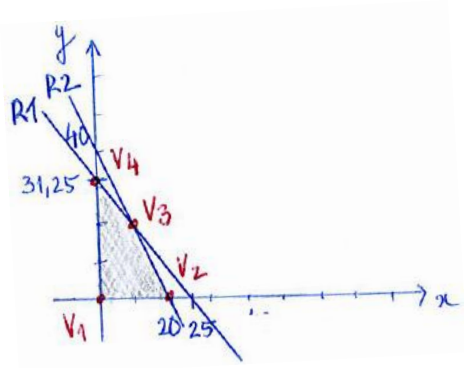
Especialidade	Ovos	Açúcar (kg)	Preço (€)
"Bolo da Avó"	10	1,5	15
"Doce da Casa"	8	0,25	10
Disponibilidade	250	10	

ii) Definir variáveis:
$x = quantidade\ de\ Bolo\ da\ Avó$ $\quad y = quantidade\ de\ Doce\ da\ Casa$

iii) Identificar objectivo e função objectivo:
Maximizar $V(x\,,y) = 15x + 10y$

iv) Identificar as restrições: $\begin{cases} 10x + 8y \leq 250\ (R_1) \\ 0{,}5x + 0{,}25y \leq 10\ (R_2) \\ x\,, y \geq 0 \end{cases}$

v) Representar graficamente o sistema:



$(R_1)\ (25,\ 0)\ (0\ ;\ 31{,}25)$ $\qquad (R_2)\ (0,\ 40)\ (20,\ 0)$

vi) Determinar a solução óptima:

$(R_1 \cap R_2)\begin{cases} 10x + 8y = 250 \\ 0{,}5x + 0{,}25y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{350}{3} \\ y = \frac{50}{3} \end{cases}$ $\qquad V_3\left(\frac{350}{3}\,,\frac{50}{3}\right)$

A solução óptima está próxima de V_3. Os candidatos são $(11\,,16); (12\,,16); (11\,,17)$ e $(12\,,17)$.

Ora, $(11\,,17)$ e $(12\,,17)$ estão fora da região admissível.

$L(11\,,16) = 15 \times 11 + 10 \times 16 = 325$

$L(12\,,16) = 15 \times 12 + 10 \times 16 = 340\ \longleftarrow$

Devem ser confeccionados 12 "Bolos da Avó" e 16 "Doces da Casa".

Proposta 33

i) Organizar as informações em tabela:

Toalha	Tecido (m)	Bordado (m)	Custo (€)
Média	2	0,5	70
Grande	3	1,5	120
Em stock	125	50	

iii) Definir variáveis:

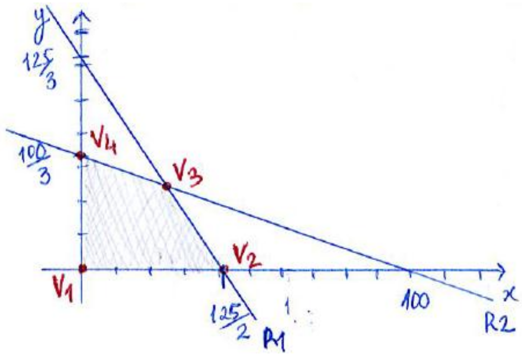
$x = quantidade\ de\ toalhas\ médias \quad y = quantidade\ de\ toalhas\ grandes$

iii) Maximizar $R(x\,,y) = 70x + 120y$

iv) Identificar as restrições: $\begin{cases} 2x + 3y \leq 125\ (R_1) \\ 0{,}5x + 1{,}5y \leq 50\ (R_2) \\ x\,, y \geq 0 \end{cases}$

v) Representar graficamente a região admissível:

$(R_1)\ \left(0, \frac{125}{3}\right)\ \left(\frac{125}{2}, 0\right) \qquad (R_2)\ (100, 0)\ \left(0, \frac{100}{3}\right)$



vi) Determinar a solução óptima:

$V_1(0,\ 0) \qquad V_2\left(\frac{125}{2}, 0\right) \qquad V_4\left(0, \frac{100}{3}\right)$

$(R_1 \cap R_2) \begin{cases} 2x + 3y \leq 125 \\ 0{,}5x + 1{,}5y \leq 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 25 \end{cases} \qquad V_3(25\,, 25)$

$R\left(\frac{125}{2}\,, 0\right) = 70 \times \frac{125}{2} + 0 = 4\,375$

$R\left(0\,, \frac{100}{3}\right) = 0 + 120 \times \frac{100}{3} = 4\,000$

$R(25, 25) = 70 \times 25 + 120 \times 25 = 1\,750 + 3\,000 = 4\,750$

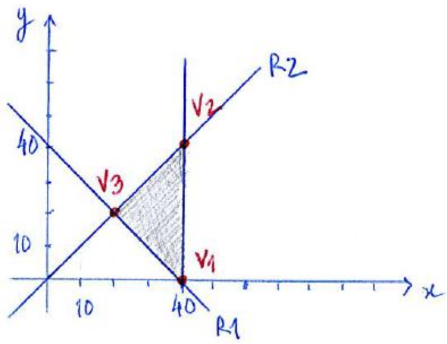
A solução óptima é $(25, 25)$.

Proposta 35

i) Definir objectivo e função objectivo: minimizar custos
$C(x\,,y) = 80x + 90y$

ii) Identificar as restrições: $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ x \leq y \\ y \leq 40 \\ x\,,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 40\ (R_1) \\ x - y \leq 0\ (R_2) \\ 0 \leq y \leq 40 \\ x \geq 0 \end{cases}$

iii) Representar geometricamente a região admissível:
$(R_1)\ (0,40)\ (40,0)$ $\qquad$ $(R_2)\ (0,0)\ (10,10)$



iv) Determinar a solução óptima: $V_1(40,\ 0)$ $\qquad$ $V_2(40,\ 40)$

$(R_1 \cap R_2)\begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \end{cases}$ $\qquad$ $V_3(20\,,20)$

Pelo Teorema Fundamental da PL, a solução óptima encontra-se num dos vértices da região admissível.

$C(40\,,0) = 3200$

$C(40\,,40) = 3200 + 3600 = 6800$

$C(20\,,20) = 1600 + 1800 = 3400$

Devem ser consumidos 40 MWh de energia convencional e 0 MWh de energia alternativa.

Estratégias de Resolução e Dificuldades da Tarefa 6

Proposta 31

Estratégias

xvi. O aluno segue os procedimentos de resolução de problemas de PL, a abordagem analítica ou a gráfica

xvii. O aluno pode seguir processos análogos aos referidos para a parte II da tarefa 2

Dificuldades:

- O aluno define variáveis para o número de horas de montagem e de pintura, x e y, identificando as restrições as seguintes
  Peça A: $x = 3$ e $y = 3$
  Peça B: $x = 5$ e $y = 3$
  $x \leq 210$
  $y \leq 180$
  Tem dificuldade em representar algebricamente o custo de cada peça.

Orientação: *As variáveis que identificaste representam as horas de montagem e pintura em que período de tempo? As horas diárias de montagem (horas por dia)? As horas semanais de montagem (horas por semana)? O que significam as primeiras restrições? Como é que representas essas restrições graficamente? Será que é dessa maneira que representas as restrições? E que forma te ajuda a resolver o problema utilizando essa representação das restrições? Será que não consegues organizar isso numa inequação?*

- O aluno define x e y como o número de horas de montagem e pintura semanais, respetivamente. Identifica restrições como
  $0 \leq x \leq 210$
  $0 \leq y \leq 180$
  sem conseguir identificar restrições que contemplem a informação na segunda frase.

Orientação: *A que se refere a segunda frase do enunciado? A que se refere a informação que te falta ter em conta? Se já representas as variáveis como o número de horas, como é que acrescentas essa informação? Experimenta: se escrevesses $3x$ o que significaria? E se escrevesses $\frac{x}{3}$, o que significaria este monómio? Outra alternativa?*

- No seguimento do raciocínio anterior, o aluno identifica como função objetivo $L(x, y) = 300\frac{x}{8} + 450\frac{y}{6}$.

Orientação: *Qual é o significado dos termos presentes nessa função? O que significam esses denominadores? Como é que os determinaste?*

- O aluno identifica a afirmação “Admitindo que é vendida toda a produção” como uma restrição ao problema
  - e entende que, para que a produção seja totalmente, a disponibilidade mensal de cada secção é totalmente utilizada, ou seja
    $$3x + 4y = 210$$
    $$3x + 3y = 180$$
  - mas não consegue escrever a restrição

- definidas x e y para o número de peças do tipo A e B, respetivamente, o aluno entende que $x + y$ representa a quantidade produzida que é igualmente a quantidade total vendida, mas não consegue escrever uma inequação para representar essa informação

Orientação: *O que entendes dessa informação? Porque entendes que seja uma restrição do problema? A produção ser toda vendida, quando achas que fará sentido considerar esta informação? A que se refere a informação? E ela restringe a produção?*

Proposta 34

Estratégias

i. O aluno segue os procedimentos de resolução de problemas de PL, a abordagem analítica ou a gráfica
ii. O aluno pode seguir processos análogos aos referidos para a parte II da tarefa 2
iii. Na determinação da solução ótima na alínea 2, o aluno identifica que esta está próxima do vértice V_3 (em "Proposta de Resolução da Tarefa 6"), verificando que as suas coordenadas são aproximadamente $(52{,}6\,;\ 26{,}3)$. Analisa então os pontos $(52, 26)$, $(52, 27)$, $(53, 26)$ e $(53, 27)$, e verifica que os dois últimos situam-se fora da região admissível e os dois primeiros na região. Decide-se por $(52, 27)$, por maximizar a quantidade do novo detergente e para o comerciante usufruir da promoção ao máximo, levando o maior número de amaciador que pode.

Dificuldades:

- O aluno não reconhece que $x \leq 2y$

Orientação: *Será que já tens todas as restrições? Mostra-me como as identificaste? Relê melhor o quarto ponto a vermelho no enunciado.*

- O aluno não reconhece que $x \geq 0$ é uma condição redundante, se identificou $x \geq \frac{y}{2}$ e $y \geq 0$

Orientação: Deixa-se para a fase de discussão.

- O aluno não reconhece "O comerciante não pretende gastar mais que 150€" como uma restrição do problema

Orientação: *Explica-me o que entendes desta afirmação* ("O comerciante não pretende gastar mais que 150€")*? Identifica-la com algum elemento de um problema de PL?*

Uma variável? A função objetivo? Uma restrição? Porquê? A maneira como a afirmação se expressa (em língua portuguesa) não te leva a associá-la a algum elemento de um problema de PL?

- O aluno entende que $2{,}25x + 1{,}2y$ representa a função objetivo
    - e de tal modo que tenha que ser inferior ou igual a 150
    - e de tal modo que tenha que ser precisamente igual a 150

Orientação: *Explica-me o que entendeste desta expressão? Donde a obtiveste do enunciado? Associa-la à função objetivo, porquê? Ao que é que associas a função objetivo num problema de PL? Para que te é essa função útil? Estás então convencido de que essa expressão te ajuda a determinar a solução ótima? Então, e a própria função objetivo pode ser restringida da maneira como apresentas?*

- O aluno não consegue identificar a função objetivo que o pode ajudar a avaliar o que é pedido em cada alínea

Orientação: *A que está associada a função objetivo?* [Um objetivo] *Qual é o objetivo do problema? Tens duas alíneas, por exemplo, da primeira alínea? Existe alguma expressão/Consegues determinar alguma expressão que te ajude a tomar a decidir que a solução pedida para a primeira alínea?*

- Na alínea 2, o aluno identifica o vértice V_3 (em "Proposta de Resolução da Tarefa 6") como próximo da solução ótima, sem conseguir determinar a solução ótima
- Na mesma alínea, o aluno não consegue decidir qual das soluções, $(52, 26)$ ou $(52, 27)$, escolher

Orientação: *Poderá o vértice V_3 ser a solução da segunda alínea? Porque não? Então por que coordenadas te decides? Porquê?*

Proposta 32

Estratégias

i. O aluno segue os procedimentos de resolução de problemas de PL, a abordagem analítica ou a gráfica
ii. O aluno pode seguir processos análogos aos referidos para a parte II da tarefa 2

Dificuldades:

- O aluno define x e y como a quantidade de ovos e açúcar gastos, respetivamente, e apresenta dificuldade em representar sob a forma de inequações as informações presentes na segunda frase do enunciado.

Orientação: *Que informação tens na segunda frase? E essa informação refere-se a quê? Como podes então, através das variáveis que definiste, representar quantidades de ovos gastos em cada especialidade?*

- O aluno deduz que em 18 ovos gastos, 10 são utilizados na produção de um "Bolo da Avó" e 8 no "Doce da Casa", representando a quantidade de ovos gastos na primeira e na segunda especiarias como $\frac{10}{18}x$ e $\frac{8}{18}x$, respetivamente. Analogamente, representa $\frac{2}{3}y$ e $\frac{1}{3}y$ como sendo a quantidade de açúcar gasto na primeira e na segunda especiarias, respetivamente. Contudo não consegue representar esses monómios como inequações.

Orientação: *Interpreta este monómio? O que representa no contexto do problema? E existe alguma informação sobre as quantidades de cada especialidade produzidas para que possas relacionar com esses monómios?*

- Na determinação da solução ótima, o aluno identifica que esta está próxima do vértice V_3 (em "Proposta de Resolução da Tarefa 6"), verificando que as suas coordenadas são $(11,(6)\ ;\ 16,(6))$. Escolhe o ponto $(12, 17)$, pois arredonda as coordenadas, ou escolhe $(12, 16)$ ou $(11, 17)$, com a ideia de que aumentando uma das coordenadas, deve diminuir a outra para compensar; ou escolhe $(11, 16)$, considerando que esta solução está de certeza na região admissível.

Orientação: Deixa-se para a correção e caso o professor identifique alguma destas abordagens durante a fase de exploração, propõe-nas para discussão.

Proposta 33, pág. 170 do manual

Estratégias

iii. O aluno segue os procedimentos de resolução de problemas de PL, a abordagem analítica ou a gráfica

iv. O aluno pode seguir processos análogos aos referidos para a parte II da tarefa 2

Dificuldades:

- Não se identificam dificuldades específicas desta tarefa, isto é, diferentes das já abordadas nas tarefas anteriores;

- O aluno pode decidir abordar o problema definindo variáveis para a quantidade de tecido e bordado gastos na produção das toalhas de cada tamanho, o que lhe pode levantar algumas dificuldades na identificação de restrições

Orientação: Deixa-se para a discussão.

Proposta 34, pág. 171 do manual

Estratégias

v. O aluno segue os procedimentos de resolução de problemas de PL, a abordagem analítica ou a gráfica

vi. O aluno pode seguir processos análogos aos referidos para a parte II da tarefa 2

Dificuldades:

- O aluno identifica "período noturno" como uma informação importante para o problema, mas não consegue integrá-la nele

Orientação: *Como consideras que esta informação afeta o problema? Consideras então que se deva distinguir o fornecimento de energia no período diurno do período noturno? Um dia tem 24h, como vais distinguir os períodos? Como decides quando inicia o período noturno? E de quantas horas se trata? Pela informação presente no enunciado, o fornecimento de energia depende tão minuciosamente dos períodos do dia, que devam ser tidos em conta na modelação deste problema?*

- No segundo ponto vermelho relativo à energia eólica, o aluno interpreta que "o fornecimento de energia", tanto da convencional como da alternativa, "não poderá ultrapassar os 40 MWh", identificando a seguinte restrição

$$x + y \leq 40$$

Daqui o aluno pode, uma vez identificada a restrição $x + y \geq 40$, concluir que $x + y = 40$, isto é, toda a energia fornecida deve ser igual a 40 MWh.

- O aluno interpreta "não exceda" como "inferior a", identificando a seguinte restrição

$$x < y$$

Orientação: Deixa-se para a discussão.