

Universidade de Lisboa



**Diferentes representações matemáticas no estudo de limites: um
estudo com alunos do 11.º ano do Ensino Secundário**

Francisco José Rodrigues Aidos

Mestrado em Ensino de Matemática

**Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela
Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos
e coorientado pela Professora Doutora Maria Antónia Lopes Duffner
Bessa Monteiro**

2020

Universidade de Lisboa



**Diferentes representações matemáticas no estudo de limites: um
estudo com alunos do 11.º ano do Ensino Secundário**

Francisco José Rodrigues Aidos

Mestrado em Ensino de Matemática

**Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela
Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos
e coorientado pela Professora Doutora Maria Antónia Lopes Duffner
Bessa Monteiro**

2020

Resumo

O presente estudo foi realizado no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional integrada no currículo do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Universidade de Lisboa. Centrou-se na lecionação de sete aulas de 90 minutos com uma turma do 11.º ano de escolaridade da Escola Secundária Padre Alberto Neto do Agrupamento de Escolas Queluz-Belas no ano letivo de 2018/2019 abrangendo o conteúdo, Limites segundo Heine de funções reais de variável real, do domínio Funções Reais de Variável Real.

Este estudo teve como objetivo principal compreender o papel das representações matemáticas na aprendizagem da noção de limite de Funções Reais de Variável Real, por alunos de uma turma do 11.º ano. Para atingir este objetivo procurou dar-se resposta às seguintes questões: (i) De que modo a representação gráfica contribui para a compreensão do conceito de limite? (ii) Como os alunos trabalham uma representação ao longo da resolução de tarefas com limites? Que dificuldades apresentam? (iii) Como os alunos passam de uma representação para outra para resolver tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?

Adotou-se uma estratégia de ensino-aprendizagem de cariz exploratória propondo-se aos alunos um conjunto de tarefas que procuravam guiá-los no seu trabalho autónomo, à descoberta dos conceitos fundamentais indicados no programa em vigor. Esta abordagem proporcionou a recolha de dados que foram a base da análise qualitativa que permitiu dar respostas às questões formuladas. Estes dados foram obtidos através da recolha documental das produções escritas dos alunos, da observação direta do seu trabalho em sala de aula e da gravação áudio das discussões durante o trabalho autónomo de dois grupos de dois alunos.

Os resultados obtidos evidenciam que os alunos têm muita dificuldade em manipular os conceitos básicos relacionados com a representação gráfica de funções e de limites de sucessões. Deste modo, um conceito-imagem de limite pouco consolidado provoca enormes dificuldades na interpretação e manipulação da definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine que se traduz em dificuldades visíveis na sua expressão verbal. Os alunos procuram o método analítico como forma preferencial para o cálculo de limites, fazendo-o de forma expedita e competente.

Palavras-Chave: Limite de uma função; Representações matemáticas; Heine; “Conceito-imagem” de limite.

Abstract

The present study was done within the curricular unit of Initiation to the Professional Practice integrated in the curriculum of Master in Mathematics Teaching of Universidade de Lisboa. It was based on the teaching of seven classes of 90 minutes each of an 11th grade class at Escola Secundária Padre Alberto Neto from the school cluster Queluz-Belas during the school year 2018/2019 including the content, Limits according to Heine of real functions of real variable, from the domain Real Functions of Real Variable.

The main goal of this study was to understand the role of mathematical representations in the learning of the notion of limit of Real Functions of Real Variable, by students of 11th grade. To reach this goal I tried to find answers to the questions: i) In what way the graphical representation contributes to the comprehension of the concept of limit?; ii) How students work a representation when solving tasks involving limits? What difficulties do they show?; iii) How do students pass from one representation to another to solve tasks involving limits? What difficulties do they show?

An inquiry-based teaching was adopted, proposing to the students a set of tasks that aim to guide them in their autonomous work, discovering the fundamental concepts indicated in the current program. This approach permitted to gather data which were the base of the qualitative analysis which allowed to answer the questions raised. These data were obtained through the documental collection of student's written productions, direct observation of their work in class, with audio recording of discussions during autonomous work of two groups of two students each.

The obtained results show that students have much difficulties in the manipulation of basic concepts related to the graphical representation of functions and of limits of sequences. Thus, a concept-image of limit poorly consolidated causes several difficulties in the interpretation and manipulation of the definition of limit of a real function of real variable according to Heine which is reflected in visible difficulties in its oral expression. Students prefer the analytical method to calculate limits, doing it in an expeditious and competent manner.

Keywords: Limit of a function; mathematical representations; Heine; "Concept-image" of limit.

Dedicatória

À minha Família, pelo tempo que não
passámos juntos.

Não é por as coisas serem difíceis que não nos atrevemos a fazê-las; é por não nos atrevemos a fazê-las que elas são difíceis.

Sêneca

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Leonor Santos, pelas suas orientações, sugestões e críticas pertinentes. Por toda a sua paciência, apoio e disponibilidade.

À minha coorientadora, Professora Doutora Maria Antónia Bessa Monteiro, pelos esclarecimentos científicos e opiniões construtivas.

Ao professor cooperante, Paulo Alvega, pela sua amizade. Pela sua disponibilidade constante, pela sua preocupação permanente em nos transmitir a sua experiência e nos ajudar a crescer.

À Escola Secundária Padre Alberto Neto e em especial aos alunos das turmas do 11.º C e 11.º E, pela disponibilidade em me receber e me terem proporcionado esta experiência inesquecível.

A todos os professores do Mestrado em Ensino da Matemática, com quem tive o prazer de trabalhar, pelos momentos de aprendizagem e de partilha.

À administração da PHBP Electrónica S.A., na pessoa do Eng. Carlos Dias, pela disponibilidade de tempo que me concederam, indispensável à realização deste projeto.

Aos meus colegas da turma de mestrado, em especial à Mariana e ao Tiago que me contagiaram com a sua juventude e entusiasmo durante as longas jornadas de trabalho que passámos juntos.

Ao meu amigo Fernando Mendes, companheiro do início a o fim do Mestrado incluindo esta experiência de lecionação na Escola Secundária Padre Alberto Neto. A sua experiência e fortes convicções proporcionaram conversas muito estimulantes e enriquecedoras. Obrigado por me teres ajudado a ultrapassar as contrariedades e os momentos de desânimo.

Aos meus pais, pelo seu exemplo e inspiração.

À minha Mulher Susana e aos meus filhos Beatriz, Rita e Francisco, por tudo.

Índice Geral

Capítulo 1 - Introdução.....	1
Motivação e importância do estudo	1
Objetivo e questões do estudo	2
Organização do estudo.....	3
Capítulo 2 – Enquadramento Curricular e Didático	4
Aprendizagem dos conceitos matemáticos	4
Aspectos cognitivos envolvidos	4
Aprendizagem do conceito de limite e dificuldades cognitivas	7
Representações na aprendizagem matemática	10
Conceito de Representação	10
As representações e a aprendizagem matemática	11
A importância das representações no estudo de limites	12
Capítulo 3 – Unidade de Ensino	15
Contexto Escolar.....	15
Caraterização da escola.....	15
Caraterização da turma	16
Ancoragem da unidade de ensino.....	17
Conceitos fundamentais.....	18
Opções didáticas	27
Tarefas.....	29
Avaliação	30
Descrição das aulas	31
1ª Aula – 12 de março de 2019	31
2ª Aula – 14 de março de 2019	33
3ª Aula – 15 de março de 2019	35
4ª Aula – 19 de março de 2019	36
5ª Aula – 21 de março de 2019	37
6ª Aula – 28 de março de 2019	39
7ª Aula – 29 de março de 2019	39
Capítulo 4 - Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados.....	41
Observação participante	42
Recolha documental.....	44

Capítulo 5 – Análise de Dados	46
A Representação Gráfica no Cálculo de Limites.....	46
O Estudo de limites com diferentes representações	52
Capítulo 6 – Conclusões e Reflexão Final	59
Síntese do estudo	59
Principais conclusões.....	60
Reflexão final.....	64
Referências	67
Anexos	70
Anexo 1: Plano de Aula 1.....	71
Anexo 2: Plano de Aula 2.....	80
Anexo 3: Plano de Aula 3.....	87
Anexo 4: Plano de Aula 4.....	94
Anexo 5: Plano de Aula 5.....	101
Anexo 6: Plano de Aula 6.....	109
Anexo 7: Plano de Aula 7.....	116
Anexo 8: Autorização Encarregados Educação	123
Anexo 9: Tarefa 1	126
Anexo 10: Tarefa 2	128
Anexo 11: Tarefa 3	130
Anexo 12: Tarefa 4	132
Anexo 13: Tarefa 5	135
Anexo 14: Mini-Teste	138

Índice de Quadros

Quadro 1 - Distribuição das idades dos alunos da turma	16
Quadro 2 - Distribuição das classificações no final do 1.º período.....	16
Quadro 3 - Distribuição das classificações no final do 3.º período.....	17
Quadro 4 - Tipologia e objetivos de aprendizagem das tarefas	30

Índice de Figuras

Figura 1 – Resolução exercício 3, Tarefa 1	50
Figura 2 – Resolução exercício 3, Tarefa 2.....	51
Figura 3 – Cálculo de limites por métodos analíticos - resolução de um grupo de alunos.....	53
Figura 4 - Cálculo de limites por métodos analíticos usando álgebra de limites de sucessões – resolução de um grupo de alunos.	53
Figura 5 – Resolução da questão 4 da tarefa 4.....	55

Capítulo 1 - Introdução

Este trabalho foi desenvolvido como relatório da prática de ensino supervisionada que culmina o percurso de formação no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática. A prática letiva decorreu em março de 2019 com uma turma do 11.º ano de escolaridade da Escola Secundária Padre Alberto Neto do agrupamento de Queluz-Belas. Teve a duração de sete aulas de 90 minutos onde se trabalhou o conteúdo “Limites segundo Heine de funções reais de variável real” do domínio “Funções reais de variável real” segundo a proposta do Programa e Metas Curriculares Matemática A do Ensino Secundário, em vigor.

Motivação e importância do estudo

Durante o meu processo de formação como professor de Matemática fui alterando a minha visão sobre o papel do professor na sala de aula. Contrariando a ideia tradicional do professor como mestre, transmissor de conhecimentos com toda a ação centrada em si, o novo paradigma apresenta o professor como um facilitador do processo de aprendizagem dos alunos que passam a ter o papel central neste processo. Esta nova visão do professor moderno obriga-o a dotar-se de ferramentas e técnicas didáticas cada vez mais diversificadas com o objetivo de captar e manter o interesse dos alunos para o ajudar a alcançar os objetivos de aprendizagem definidos. A seleção e utilização de materiais de ensino adequados, de ferramentas e técnicas didáticas, a vivência de uma prática reflexiva e um contínuo enriquecimento pessoal, constituem ações que os bons professores levam a cabo todos os dias (NCTM, 2007).

A noção de limite é um dos conceitos matemáticos que levanta mais dificuldades de compreensão e aprendizagem. Os conceitos de infinitamente grande, infinitésimo, “tender para”, etc. são um salto cognitivo muito grande aos quais os alunos têm dificuldade em dar significado e por vezes são introduzidos com muito formalismo. No entanto, este é um conceito fundamental no prosseguimento dos estudos matemáticos mais avançados. O conceito de limite é um dos pilares do cálculo diferencial que tem aplicações em vários campos do conhecimento, como a Física, Engenharia, Economia, Geologia, Astronomia, Biologia, e algumas Ciências Sociais.

É neste contexto que se enquadra a minha motivação para a realização deste trabalho, compreensão das barreiras e dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de limite para que possamos desenvolver metodologias e estratégias que permitam a superação dessas

dificuldades e assim contribuir para o desenvolvimento pessoal e académico dos alunos. Aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir os seus futuros. A competência matemática abre as portas a futuros produtivos; a sua ausência mantém-nas fechadas (NCTM, 2007).

Uma motivação de ordem mais pessoal é a consciência de que é no esforço de corporização e modelação dos conceitos matemáticos, através de diferentes representações, aproximando-os da realidade de cada aluno, que estará a minha realização como educador e é a essência do significado da palavra “professor”.

Objetivo e questões do estudo

O programa e Metas Curriculares Matemática A do Ensino Secundário, em vigor, propõe o estudo dos aspetos teóricos relativos ao limite de uma função, no domínio Funções Reais de Variável Real usando a definição de limite segundo Heine. Este domínio utiliza os conceitos de limite de sucessões estudados no domínio anterior. Sugere o programa que a noção de limite seja introduzida de forma cuidada e formal sendo desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites incluindo a análise de situações de indeterminação. Argumenta-se que uma abordagem puramente intuitiva dos limites pode levar rapidamente a insuficiências conceituais graves (MEC, 2014).

O objetivo do estudo é compreender o papel das representações matemáticas na aprendizagem da noção de limite de Funções Reais de Variável Real, por alunos de uma turma do 11º ano.

Tendo em conta este objetivo formulei as seguintes questões de investigação:

- a) De que modo a representação gráfica contribui para a compreensão do conceito de limite?
- b) Como os alunos trabalham uma representação ao longo da resolução de tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?
- c) Como os alunos passam de uma representação para outra para resolver tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?

Organização do estudo

A organização do relatório teve como base o documento orientador da Comissão Científica dos Mestrados de Ensino da Universidade de Lisboa, “Orientações para o desenvolvimento e elaboração do relatório da prática de ensino supervisionada”.

O primeiro capítulo apresenta o objetivo e as questões centrais do estudo bem como a importância e as motivações que me levaram a escolher esta problemática. No segundo capítulo faz-se uma revisão de literatura baseada em alguns autores de referência sobre os aspetos cognitivos envolvidos na aprendizagem dos conceitos matemáticos, as dificuldades cognitivas na aprendizagem do conceito de limite, as diferentes representações matemáticas e a sua importância na aprendizagem do conceito de limite. O terceiro capítulo inclui uma breve caracterização do contexto escolar e da turma com quem trabalhei e apresenta-se a unidade de ensino lecionada no contexto do programa e metas curriculares em vigor descrevendo-se, com detalhe e formalização matemática os conceitos abordados nas aulas. Ainda neste capítulo, justifica-se, com base na literatura, as opções metodológicas seguidas e descrevem-se as tarefas propostas aos alunos e as sete aulas lecionadas. No capítulo 4 descrevem-se os métodos e procedimentos para a recolha dos dados que foram objeto de análise no capítulo 5. No capítulo 6 apresentam-se as principais conclusões do estudo sob a forma de resposta às questões iniciais e termina com um conjunto de reflexões pessoais sobre o estudo e o percurso ao longo do Mestrado em Ensino da Matemática.

Capítulo 2 – Enquadramento Curricular e Didático

A educação nas nossas escolas deve procurar formar cidadãos atentos, informados e ativos. O uso de ferramentas, como a modelação matemática, são muitas vezes indispensáveis para responder a questões sociais e científicas e para que os decisores políticos possam tomar decisões fundamentadas e para que os cidadãos tenham ferramentas para avaliar essas decisões. A matemática é uma ferramenta através da qual situações não matemáticas podem ser representadas de forma simplificada, usando gráficos, tabelas, equações ou algoritmos, e assim serem mais facilmente examinadas. Quando promovemos uma aprendizagem que possa usar a matemática desta forma oferecemos aos alunos uma educação que lhes será útil para toda a vida (Abrams, 2001).

Assim, um dos principais objetivos do ensino da Matemática é o desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos. Trata-se de um objetivo ambicioso, mas necessário, que justifica o importante papel da matemática em todos os sistemas educativos (Ponte, 2012). Os processos de aquisição de conhecimento matemático são tão complexos que abordagens bastante diferentes parecem ser necessárias sobretudo se queremos que a matemática contribua para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos indivíduos (Duval, 2006).

Aprendizagem dos conceitos matemáticos

Aspetos cognitivos envolvidos

A Matemática é vista como uma ciência exata em que todos os conceitos estão definidos com rigor. No entanto, a realidade para quem aprende matemática é bem diferente. Sobretudo porque tomamos contacto informalmente com alguns dos conceitos antes da sua formalização matemática e cada indivíduo constrói a sua própria imagem mental de acordo com as suas características pessoais (Tall & Vinner, 1981).

Estes dois planos paralelos e por vezes conflitantes foram definidos por Tall e Vinner (1981) como “conceito imagem” e “conceito definição”. O “conceito imagem” descreve a estrutura cognitiva associada a um conceito que inclui as imagens mentais, propriedades associadas e processos que se vão construindo com a experiência ao longo da vida, mudando de acordo com novos estímulos e a maturidade cognitiva do indivíduo. Por sua vez, o “conceito definição”

refere-se ao conjunto de palavras para especificar e definir formalmente um conceito. Esta definição pode ser memorizada ou reconstruída a partir da experiência pessoal o que pode gerar uma distorção em relação à definição formalmente aceite. No entanto, o conhecimento de uma definição não nos garante a compreensão dum conceito (Vinner, 1991). Para tal, é necessário que cada indivíduo construa o seu próprio “conceito imagem”.

De acordo com Tall (2001), para um dado conceito, desenvolvemos um “conceito imagem” no cérebro, que consiste na “estrutura cognitiva associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades associadas e processos” (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Este “conceito imagem” evolui e altera-se com a experiência do indivíduo e pode não existir uma coerência nessa evolução. Diferentes partes do “conceito imagem” podem ser ativadas em distintas situações fazendo com que a sua evolução não seja um todo coerente. A matemática procura racionalizar estas várias experiências para se construir uma imagem o mais racional possível.

O processo de construção do conhecimento matemático pode ser feito através de um caminho mais informal, baseado em imagens conceptuais para dar um significado mais pessoal à definição formal. Um caminho mais formal foca-se sobretudo nas definições, em demonstrações formais de teoremas evitando qualquer uso da intuição. Os estudos evidenciam que a maioria dos alunos falha perante esta abordagem mais formal preferindo construir a sua versão pessoal das definições por vezes distorcida e incorreta (Tall, 2001).

Tall (2004) categoriza o crescimento cognitivo em matemática em três patamares (“mundos”) distintos, mas que interagem entre si. O primeiro, que o autor chama *embodied world*, desenvolve-se ao nível das sensações e do pensamento. Acontece quando pensamos em coisas que percebemos e sentimos não somente do mundo real, mas outras construções mentais mais ou menos abstratas. O indivíduo utiliza a sua percepção física do mundo real para realizar experiências mentais, na construção de conceitos matemáticos (Juter, 2008).

O segundo patamar é o mundo dos símbolos (*proceptual world*) que usamos para a manipulação aritmética, álgebra, cálculo, etc. Os alunos começam com procedimentos baseados nas conceções mentais elaboradas no primeiro “mundo”, como por exemplo contar, e usam símbolos que são encapsulados como conceitos. Juter (2008), baseada em Gray e Tall (1994), refere que, neste patamar, os símbolos representam processos e conceitos, intitulados de *procepts*. Podemos caracterizar o pensamento “*proceptual*” como a capacidade de manipular os símbolos, ora como processo, ora como conceito, alternando simbolismos para o mesmo objeto (Gray & Tall, 1994).

O terceiro “mundo” é o “mundo formal” baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que usam axiomas para definir estruturas matemáticas. Com o sistema axiomático, novos conceitos mais ou menos abstratos podem ser definidos e as suas propriedades deduzidas para formar uma teoria lógica e coerente. Os alunos percorrem estes “mundos” de acordo com as suas necessidades, durante o processo de aprendizagem, e as suas representações mentais dos conceitos vão sendo formadas e alteradas (Juter, 2008).

Antes do contacto com as definições formais, os alunos possuem uma imagem informal dos conceitos que frequentemente perdura muito após a sua formalização (Tall, 2001). A dificuldade em construir um “conceito imagem” formalmente aceite surge, quer pela existência em simultâneo de diferentes “conceitos imagem” contraditórios, quer pelo conflito com o conceito formal matemático (“conceito definição”). Quando surge uma contradição entre o “conceito imagem” e o “conceito definição” estamos perante o tipo mais grave de fator de conflito potencial que pode dificultar seriamente o desenvolvimento de uma teoria na mente do aluno. Estes fatores de conflito potencial transformar-se-ão em fatores de conflito cognitivo quando a definição formal do conceito desenvolver um “conceito imagem” que os origine. Os alunos, que apresentam este tipo mais grave de fatores de conflito potencial, quando contactam com a definição formal do conceito, podem estar seguros nas suas interpretações das noções envolvidas, e olhar para a teoria como sendo supérflua e inoperativa (Tall & Vinner, 1981). Constata-se que “conceitos imagem” quando profundamente enraizados são difíceis de desalojar mesmo quando em claro conflito com a definição formal (Tall, 1992).

Tall (1992) apresenta dois métodos para lidar com os conflitos cognitivos dos alunos. No primeiro, o aluno tenta reconciliar os conceitos previamente construídos com a nova formalização reconstruindo uma nova e coerente estrutura. No segundo método, propõe-se que o aluno mantenha os elementos em conflito em “compartimentos” separados, e nunca os invoque simultaneamente para a mente consciente, opção preferida pelos alunos por exigir um menor esforço. Neste último caso, esconde-se a existência de fatores de conflito cognitivo, pelo que os alunos não terão consciência das suas dificuldades.

Aprendizagem do conceito de limite e dificuldades cognitivas

É no 11.º ano de escolaridade que os alunos, em Portugal, têm o primeiro contacto com a definição de limite. Este conceito requer dos alunos uma capacidade de abstração pouco habitual no programa e provoca alguns desafios cognitivos como por exemplo, a interpretação da simbologia da definição formal e a ligação entre a formalização teórica e a sua aplicação a problemas do mundo real (Juter, 2008).

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2014), atualmente em vigor, os alunos têm o primeiro contacto com o conceito de limite no domínio das sucessões, onde

a noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É, pois, exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados. (ME, 2014, p. 15)

A introdução da definição de limite de funções reais de variável real é feita “pelo processo atribuído a Heine” utilizando os conceitos introduzidos no domínio das sucessões. O mesmo programa indica ainda as vantagens da opção por esta definição:

a definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação. (MEC, 2014, p. 16).

Ao nível da representação simbólica, o conceito de limite de uma sucessão é apresentado através da sua definição formal, recorrendo a simbologia que os alunos não dominam e que os obriga a mobilizarem simultaneamente diferentes “conceitos imagem” para formarem o seu próprio conceito imagem do limite de uma sucessão:

Identificar, dada uma sucessão (u_n) , um número real l como «limite da sucessão (u_n) » ou como «limite de u_n quando n tende para $+\infty$ » quando, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$, referir, nesta situação, que « u_n tende para l » (« $u_n \rightarrow l$ »), e designar a sucessão (u_n) por «convergente» quando um

tal limite existe e por «divergente» quando não for convergente. (MEC, 2014, p. 32)

A definição de limite de uma função segundo Heine é apresentada de uma forma menos formalizada simbolicamente no programa em vigor, mas envolve o recurso a um conjunto de conceitos que o aluno tem de dominar para poder entender a definição. É indispensável dominar o conceito de função e a relação objecto-imagem que se estabelece, o conceito de sucessão convergente e a noção de ponto aderente a um conjunto.

Identificar, dada uma função real de variável real e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a » quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a » e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos. (MEC, 2014, p. 36)

Com esta abordagem é fundamental que o aluno veja uma função como um processo e não como um instrumento que permite realizar determinados procedimentos algébricos. Se o aluno não reconhecer uma função como um processo dinâmico entre a variável dependente e a independente terá dificuldade em compreender a dinâmica inerente ao conceito de limite (Tall, 1992) representada na definição por “toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$ ”.

Parecendo contrariar a metodologia implementada com o programa em vigor, Tall e Vinner (1981) referem que os alunos só devem ter contato com a definição formal de limite após construírem um “conceito imagem” consistente. Uma abordagem inicial ao conceito de limite que recorra diretamente à sua definição formal pode não trazer vantagem em termos da compreensão do seu conceito. Sugerem ainda, como conclusão de um estudo realizado com alunos do ensino superior, que o conceito de limite deverá ser introduzido de uma forma intuitiva, hierarquizado e enquadrado conforme os diferentes significados do conceito de limite que os alunos vão construindo ao longo da sua aprendizagem.

Ao iniciar o trabalho com o conceito de limite, o aluno enfrenta dificuldades pois é confrontado com a necessidade de realizar cálculos não só que já não são realizados por aritmética e álgebra simples que lhe são familiares, mas também envolvem processos infinitos que só podem ser

realizados por processos indiretos. Seja qual for a abordagem utilizada pelo professor, mais formal ou mais informal, existem dificuldades cognitivas que parecem associadas ao conceito de limite que importa destacar (Tall, 1992):

- Dificuldades incorporadas na linguagem; termos como “limite”, “tender para”, “aproxima”, “tão pequeno quanto se queira”, têm uma tal força e significado coloquial que entra em conflito com o conceito formal;
- A determinação do limite não é efetuada com recurso a álgebra ou aritmética simples, surgem conceitos associados a infinito e o resultado acaba por ficar “envolto em mistério”;
- O processo em que “uma variável toma valores arbitrariamente mais pequenos” é muitas vezes interpretado como uma “quantidade variável arbitrariamente pequena”, sugerindo implicitamente o conceito de infinitésimo, mesmo quando o mesmo não foi explicitamente ensinado;
- A ideia de “N arbitrariamente grande”, implicitamente sugere conceitos de números infinitos;
- Os alunos têm dificuldades em entender se o limite pode efetivamente ser atingido;
- Há confusão na passagem do finito ao infinito, e o perceber “que acontece no infinito”.

Uma das grandes dificuldades do processo de ensino-aprendizagem de limites está relacionada não só com a sua riqueza e complexidade, mas também na medida em que os aspetos cognitivos envolvidos não podem ser gerados puramente pela definição matemática. Em termos didáticos, a distinção entre a definição e o conceito propriamente dito é muito importante pois, conhecer a definição não garante que o sujeito se aproprie do conceito. Os estudantes acreditam que percebem a definição sem se apoderar verdadeiramente de todos os detalhes contidos no conceito formal (Cornu, 2002). Para contornar estas dificuldades, a estratégia dominante no sistema de ensino consiste em concentrar o esforço de aprendizagem nos aspetos procedimentais que, quer alunos, quer professores, sabem que será questionado nos exames deixando de lado o trabalho conceptual em torno do conceito de limite (Tall, 1992).

Este ciclo vicioso deve ser quebrado se o professor tiver sensibilidade para estas dificuldades munindo-se de ferramentas que o ajudem a implementar novas estratégias pedagógicas (Cornu,

2002) que levem o aluno a confrontar-se com os seus conflitos cognitivos, que o motive a reconstruir os seus “conceitos imagem” e crie um conhecimento cada vez mais sofisticado pois, alguns estudos evidenciam que aquilo em que os alunos acreditam resulta do tipo de tarefas que normalmente executam (Tall, 1992).

Representações na aprendizagem matemática

Conceito de Representação

Aceder diretamente ao raciocínio matemático dos alunos é, naturalmente, impossível. Para conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações (Ponte, 2012).

Uma representação é uma configuração que representa algo e que poderá, de alguma forma, atuar no lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, significar, substituir ou simbolizar o representado (Goldin, 2008).

Goldin (2008) categoriza as representações entre externas e internas. Nos sistemas de *representação externa* incluem-se as configurações visíveis (inscritas em livros, por exemplo), como palavras, números e gráficos ou equações algébricas. Os sistemas de *representação interna* estão relacionados com os sistemas de representação psicológicos (mentais) dos indivíduos. Incluem-se neste grupo o uso da linguagem natural, configurações pessoais dos sistemas simbólicos, imagem visual e espacial, etc, que geralmente não podem ser observados por outros, ficando acessíveis apenas pelo próprio indivíduo.

Os objetos de estudo na matemática, diferentemente de outros domínios como a Astronomia, Física, Química, não são acessíveis pela perceção ou através de instrumentos. A única forma de lhes aceder é utilizando linguagem simbólica e representações semióticas. Duval (2006) alerta-nos para que os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação. Este paradoxo é um dos problemas cruciais da compreensão matemática, uma vez que não é possível aceder a um objeto matemático sem a sua representação (Duval, 2006).

Para Duval (2006), a atividade matemática está intimamente ligada à transformação de representação, considerando o autor que existem dois tipos de transformações de representações semióticas: “tratamentos” e “conversões”. Os tratamentos são transformações dentro do mesmo

sistema de representação, por exemplo resolver uma equação (manipulação algébrica). As conversões são transformações entre sistemas de representação, mudando a representação do objeto, mas mantendo o objeto (por exemplo, passagem da representação em linguagem natural para representação algébrica).

As conversões são mais complexas do que os tratamentos pois requerem que se reconheça o mesmo objeto matemático em duas representações diferentes cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum (Duval, 2006). Os alunos terão maior capacidade em resolver problemas se conseguirem mover-se facilmente entre diferentes tipos de representações. Essa competência deve surgir à medida que os alunos ganham experiência com várias formas de representar um problema no seu contexto (NCTM, 2007).

As representações e a aprendizagem matemática

O trabalho com diferentes representações no processo de aprendizagem é importante pela necessidade de moldar os conceitos à forma de pensar de cada aluno. O uso das representações verbal, numérica, gráfica e algébrica têm o potencial de tornar o processo de aprendizagem significativo e eficaz (Friendland & Tabach, 2001).

As representações procuram captar e potenciar o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos e o estabelecimento de relações. Permitem que os alunos registem, reflitam e relembrem os seus processos e estratégias. Tornam-se ferramentas importantes para que possam esclarecer, justificar e comunicar os seus raciocínios a outros. A matemática é uma linguagem viva, que ganha força com a integração das representações verbal, pictórica e escrita tendo cada forma de representação os seus pontos fortes. Os alunos precisam de oportunidades para ganhar competências na manipulação das diferentes formas de representação e comunicação (Woleck, 2001). “Somente então as vozes dos jovens matemáticos podem realmente ser ouvidas.” (p. 226)

A representação verbal é geralmente usada para a apresentação do problema e para a interpretação dos resultados obtidos. Enfatiza a conexão entre a matemática e outras áreas do saber ou o dia-a-dia. No entanto, o uso da linguagem verbal pode criar ambiguidades e provocar associações irrelevantes ou enganadoras. A sua dependência do estilo pessoal de cada indivíduo pode ser um obstáculo à comunicação matemática (Friendland & Tabach, 2001).

A representação numérica é familiar aos alunos desde o início do estudo algébrico e geralmente precede as outras representações. O uso de números é importante para o primeiro entendimento de um problema e para investigar casos particulares havendo, no entanto, o risco de perda de generalidade (Friendland & Tabach, 2001).

A representação gráfica é eficaz por apresentar uma imagem clara de uma função. Os gráficos são intuitivos e sobretudo apelativos para alunos que preferem uma abordagem visual. Esta representação pode não ter a precisão necessária, pode criar uma percepção errada devido a problemas de escala e frequentemente apenas apresenta uma parte do domínio do problema (Friendland & Tabach, 2001).

A representação algébrica é a mais geral e poderosa na apresentação de padrões e modelos matemáticos. A manipulação de objetos algébricos é, às vezes, o único método de provar afirmações com toda a generalidade. No entanto, o uso exclusivo de símbolos algébricos pode dificultar a aquisição do significado ou da natureza matemática dos objetos representados e causar dificuldades de interpretação dos resultados (Friendland & Tabach, 2001).

O professor deve procurar proporcionar aos seus alunos o trabalho com cada uma das representações, a sua análise e comparação, de modo a conhecerem os seus pontos fortes e fracos. Uma estratégia é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações, em que as desvantagens de umas possam facilmente ser colmatadas pela combinação com as outras (Kaput, 1992 citado por Gafanhoto, 2011). Somente ao observar as representações dos alunos, os professores poderão conseguir compreender os seus modos de interpretação e de raciocínio. Contudo, para além do papel que assumem na comunicação de raciocínios, as representações assumem também um papel decisivo na aprendizagem. “Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (NCTM, 2007, p. 75).

A importância das representações no estudo de limites

A utilização de diferentes representações facilita a adaptação a diferentes formas de pensar, porque proporcionam vários ângulos de abordagem quando trabalhamos a noção de limite em diversos contextos, como por exemplo o estudo de limites de funções racionais e sucessões. Ajudam a promover as discussões em grande turma envolvendo todos os alunos e a criar condições para uma construção mais sólida e consistente do “conceito imagem” para que o

conceito formal de limite (“conceito definição”) possa ser mais facilmente compreendido na sua plenitude. As representações gráficas fornecem uma visão global qualitativa, enquanto a numérica facultam resultados quantitativos, e a simbólica proporciona uma forte habilidade na manipulação do cálculo (NCTM, 2007).

Tall (1992), citando resultados de investigações efetuadas, refere que os alunos que têm mais sucesso no cálculo dos limites são os que sistematicamente têm flexibilidade em utilizar diferentes abordagens: simbólica, numérica e gráfica. Destaca ainda que os alunos têm muita aversão ao uso de conceitos visuais no cálculo. Exemplos onde a inspeção visual da representação gráfica de uma função resolveria o exercício de forma trivial, os alunos preferiram uma resolução numérica por ser o processo mais familiar e enraizado ao longo de anos. A manipulação algébrica é o modo de operação preferido para muitos estudantes que nele se refugiam para completar os seus cursos de cálculo (Tall, 1992). Este autor dá como exemplo o caso da Universidade de Havard que tem como estratégia para o ensino do cálculo usar, sempre que possível, as três representações, gráfica, numérica e simbólica, para o ensino de cada tópico. O objetivo é produzir diferentes formas de aprendizagens para que os alunos tenham acesso à ideia principal a partir de vários ângulos.

O cálculo dos limites pode ser introduzido em sala de aula através de uma abordagem exploratória com tarefas onde as funções possam estar representadas, quer por tabelas (representações numéricas), quer por gráficos (representação gráfica), e só mais tarde introduzir a representação simbólica. A aprendizagem de limites requer um salto constante entre a operacionalização e o mundo das perceções. É importante a utilização interativa das três representações para que seja facilitado ao aluno a exploração de vários pontos de vista, o que promove a sua compreensão, sentido crítico, e desenvolve o sentido de abstração necessário no conceito de limite (Juter, 2008).

Um dos aspetos mais importantes da aprendizagem é a versatilidade de pensamento traduzida na capacidade de podermos representar graficamente uma função, de estudar o seu comportamento e paralelamente poder comprovar estes resultados através de cálculos numéricos e simbólicos (Tall, 1992). Esta dinâmica, que permite a exploração de um conceito através de várias representações (gráfica, numérica, algébrica e linguagem natural), é importante no processo de aprendizagem na medida em que permite consolidar parte da estrutura cognitiva que está associada ao conceito de limite, ou seja, reforça ou mesmo reconstrói o “conceito imagem” de limite (Tall & Vinner, 1981). Apesar disso, Tall (1992) conclui, baseado no seu senso comum, que “os matemáticos se concentram seletivamente na

representação mais útil, de modo que o movimento versátil entre representações seja mais importante e cognitivamente mais natural do que se concentrar nas três representações ao mesmo tempo” (p. 9).

Capítulo 3 – Unidade de Ensino

Este trabalho tem por base a intervenção letiva que realizei com uma turma do 11.º ano de escolaridade da Escola Secundária Padre Alberto Neto do Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas situada na freguesia de Queluz no concelho de Sintra no período de 12 de março a 29 de março de 2019. A unidade de ensino trabalhada foi “Limites segundo Heine de funções reais de variável real” do domínio “Funções Reais de Variável Real”.

Contexto Escolar

Caraterização da escola

A Escola Secundária Padre Alberto Neto encontra-se integrada no Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas. O agrupamento integra maioritariamente alunos das freguesias de Belas e de Queluz (agora União de Freguesias de Queluz-Belas) cuja população exerce a sua atividade profissional fora destas localidades pelo que se consideram áreas dormitórias. Relativamente ao nível de escolaridade da população destas duas freguesias, Belas tem 21% da sua população com escolaridade até ao 1º ciclo, contra 26% em Queluz. Com o ensino secundário, regista-se 70% da população de Belas e 77% em Queluz. Por outro lado, 13% da população de Queluz e 18% da de Belas concluíram o ensino superior, para uma média nacional de 15%. (AEQB, 2018)

Estão matriculados neste Agrupamento de Escolas alunos oriundos de 33 países (ano letivo 2017/2018) sendo 14,3% de nacionalidade não Portuguesa e 11% não têm o português como língua materna. Tendo em conta a heterogeneidade dos alunos e com o objetivo de proporcionar experiências de aprendizagem mais enriquecedoras, o Agrupamento passará a estar incluído no Projeto de Autonomia e Flexibilidade Curricular implementado pela tutela. Constituem metas fundamentais do Agrupamento de Escolas melhorar as taxas de sucesso e o aumento da qualidade das aprendizagens, no período de quatro anos, aproximando da média nacional os resultados escolares globais dos alunos do 1.º ao 12.º ano. Constitui, ainda, meta central reduzir a taxa de abandono escolar, aproximando-a de 0%. (AEQB, 2018)

Caraterização da turma

A turma do 11.º C do Curso de Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia é constituída por 32 alunos sendo que apenas 18 estão inscritos na disciplina de Matemática, sendo 13 raparigas e 5 rapazes com idades compreendidas entre os 15 e os 19 anos no início do ano letivo) (Quadro 1).

Quadro 1 - Distribuição das idades dos alunos da turma

Idade (Início do ano letivo)	15	16	17	18 ou +
Nº Alunos	2	9	4	3

Nesta turma existem 6 alunos que já frequentaram o 11.º ano anteriormente e por isso não estão inscritos em todas as disciplinas. Um dos alunos da turma está identificado como aluno com Necessidades Educativas Especiais sendo, no entanto, um dos alunos com melhor aproveitamento e mais participativo na disciplina de Matemática.

O aproveitamento da turma na disciplina de Matemática foi pouco satisfatório e bastante heterogéneo com uma média final do 1.º período de 12,1 valores sendo que 5 alunos tiveram classificação de negativa (Medíocre), 6 alunos tiveram classificação entre 10 e 13 valores, e 7 alunos tiveram classificação entre 14 e 17 valores. (Quadro 2).

Quadro 2 - Distribuição das classificações no final do 1.º período

Classificação	Medíocre (5 a 9)	Suficiente (10 a 13)	Bom (14 a 17)	Muito Bom (18 a 20)
Nº Alunos	5	6	7	0

Analisando os resultados obtidos no final do 3.º período verificou-se uma ligeira melhoria ainda que não muito significativa. De destacar o facto de dois dos alunos terem progredido de medíocre para suficiente e dois alunos terem atingido a classificação de muito bom. Apesar disto, a média geral da turma quase não variou devido ao elevado número (8) de classificações entre 10 e 13 valores (Quadro 3).

Quadro 3 - Distribuição das classificações no final do 3.º período

Classificação	Medíocre (5 a 9)	Suficiente (10 a 13)	Bom (14 a 17)	Muito Bom (18 a 20)
Nº Alunos	3	8	5	2

Os alunos apresentaram um nível de participação nas atividades propostas ao longo do ano considerada insatisfatória. Com a exceção de três alunos que mantiveram uma participação empenhada e interessada, os restantes alunos tiveram uma atitude bastante passiva. Alguns alunos, apesar de alcançarem boas classificações nos testes de avaliação, não participavam nas discussões da aula, não respondiam às questões de interpelação direta do professor nem demonstravam as suas dificuldades. Esta atitude passiva ficou ainda mais realçada tendo em conta a metodologia de ensino implementada pelo professor titular da turma, desde o início do ano letivo, que privilegia e incentiva a participação dos alunos. Diferentes fatores contribuem, em minha opinião, para esta postura perante a aula como a timidez, medo de errar, preguiça intelectual, e falta de competências técnicas.

Os alunos revelaram ainda poucos hábitos de trabalho autónomo fora da sala de aula sendo que a maioria não estuda nem resolve as tarefas propostas pelo professor exceto se lhes for sinalizado que contam para a avaliação sumativa. Em alguns casos, é compreensível esta situação devido ao contexto socioeconómico de alguns alunos, que já desenvolvem atividade profissional fora do período letivo.

O comportamento dos alunos foi considerado satisfatório pelo conselho de turma existindo, no entanto, alguns casos pontuais de indisciplina registados em algumas disciplinas. Como a composição da turma varia consoante a disciplina lecionada também o seu comportamento é variável. Em Matemática, o comportamento foi considerado bom.

Ancoragem da unidade de ensino

A intervenção letiva sobre a qual incide este trabalho foi desenvolvida na área das Funções Reais de Variável Real centrando-se no conteúdo “Limites segundo Heine de funções reais de variável real”. Esta intervenção teve a duração de 7 blocos de 90 minutos.

O domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utiliza os conceitos introduzidos no tópico das Sucessões, para que pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite

de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. A definição de limite segundo Heine permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões. (MEC, 2014) São ainda estudados neste domínio os conceitos de limites laterais, o levantamento algébrico de indeterminações e o estudo de funções racionais dadas por expressões da forma $P(x)/Q(x)$, onde P e Q são polinómios.

É importante destacar os conhecimentos prévios ao nível do programa do Ensino Secundário que é necessário os alunos mobilizarem para a aprendizagem deste conteúdo:

- No domínio da *Álgebra*, do 10.º ano, definiu-se a divisão euclidiana de dois polinómios e apresentou-se o Teorema do resto, que permite, em particular, provar que $a \in \mathbb{R}$ é raiz de um polinómio P se e somente se $P(x)$ é divisível por $x-a$. Foi ainda abordada a noção de multiplicidade algébrica de uma raiz, com aplicações à factoração de polinómios (MEC, 2014);
- No domínio *Funções Reais de Variável Real*, relembram-se alguns conceitos básicos sobre funções como Domínio, Contradomínio, Objeto e Imagem e estudam-se analítica e graficamente alguns aspetos gerais das funções reais de variável real, como a monotonia, o sentido da concavidade da curva do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo e absoluto (MEC, 2014);
- Como referido, o domínio Sucessões precede o estudo dos limites em Funções Reais de Variável Real. Nesse domínio a noção de limite é introduzida de forma cuidada sendo exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição (MEC, 2014);
- As noções de subconjuntos de \mathbb{R} minorados, majorados e limitados.

Conceitos fundamentais

Para a preparação das aulas lecionadas foi importante rever com detalhe algumas definições e alguns teoremas a trabalhar com os alunos e as técnicas usadas para o levantamento de indeterminações, quer no contexto das sucessões, quer do estudo de funções reais de variável real. Este estudo pretendeu antecipar as dificuldades dos alunos e as diferentes formas de resolução dum problema e assim delinear estratégias para tornar eficaz o processo de aprendizagem.

A definição de limite de uma função real de variável real é introduzida pelo processo atribuído a Heine aproveitando os conceitos definidos no domínio das sucessões. Esta definição permite de uma forma natural e intuitiva estender às funções reais a álgebra de limites e os teoremas da convergência.

Pontos aderentes a um conjunto de números reais

O conceito de ponto aderente a um conjunto é usado na definição de limite.

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

Por exemplo, um dos objetivos foi desafiar os alunos a descobrir uma sucessão (e chamar a atenção para que basta uma) que tenda para 2 com todos os termos nos seguintes conjuntos:

$$A =]2,5]; B = \{2,5\}; C = [3,5] \cup \{2\}; D =]-3,1[$$

Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio (Definição de limite segundo Heine)

Dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$ aderente ao domínio de f , diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de $f(x)$ quando x tende para a , se para toda a sucessão (x_n) de elementos do domínio de f , convergente para a , a sucessão $(f(x_n))$ tende para b .

Podemos representar simbolicamente a definição por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in \mathcal{D}_f, \quad \lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = b$$

O programa em vigor explicita que se devem considerar todas as sucessões (x_n) do domínio da função que tendem para a , quer as que tendem para a por valores diferentes de a , quer as que podem tomar o valor a . Segundo os autores, esta opção tem a vantagem de tornar mais fácil a formulação do conceito de limite e tornar as noções de limite “por valores diferentes” e de

limites laterais como casos particulares da noção de limite quando consideramos a restrição da função a um subconjunto do domínio.

No Ensino Superior a definição mais utilizada para o limite de uma função num ponto é a definição segundo **Cauchy** (Ferreira, 1990):

Seja f , uma função real definida no conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a \mathcal{D} e b um número real. Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a ou que b é o limite de f no ponto a e escreve-se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se e só se, qualquer que seja o número positivo δ existir $\varepsilon > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathcal{D}$ verificando a condição $|x - a| < \varepsilon$ se tenha $|f(x) - b| < \delta$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{D}_f \wedge |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Partindo destas definições podemos provar o Teorema da Unicidade do Limite:

Teorema: Se existir limite de $f(x)$ quando x tende para a ele é único.

Demonstração: Suponhamos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a pode tomar simultaneamente os valores b e c com $b \neq c$. Então, dada uma sucessão (x_n) de elementos em \mathcal{D}_f convergente para a , $(f(x_n))$ teria de convergir simultaneamente para b e para c o que contraria o teorema da unicidade do limite de uma sucessão.

Existindo o limite de $f(x)$ quando x tende para a representa-se por $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Seja a um ponto aderente ao domínio de f . É importante fazer os alunos descobrir que as sucessões do tipo:

$$u_n = a + \frac{c}{n}, c \in \mathbb{R}$$

são sucessões que tendem para a cujos termos pertencem ao domínio da função considerada.

Com esta definição segundo Heine, mesmo que o ponto a não pertença ao domínio da função, para existir limite da função nesse ponto, basta que a seja aderente ao domínio da função para podermos averiguar a existência desse limite.

Se em particular $a \in D_f$, se o limite existir terá de se verificar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Limites laterais

Vamos representar por $f|_{]-\infty, a[}$ a restrição da função aos pontos que são estritamente menores que a , e analogamente por $f|_{]a, +\infty[}$ a restrição da função aos pontos que são estritamente maiores que a .

Dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$:

- 1) Se a é ponto aderente a $D_f \cap]-\infty, a[$, diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a se $b = \lim_{x \rightarrow a} f|_{]-\infty, a[}(x)$ e escreve-se $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- 2) Se a é ponto aderente a $D_f \cap]a, +\infty[$, diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a se $b = \lim_{x \rightarrow a} f|_{]a, +\infty[}(x)$ e escreve-se $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

É importante seleccionar criteriosamente o tipo de sucessão dos objetos para garantir que os termos tendem para a por valores à esquerda ($\forall c < 0$) ou à direita ($\forall c > 0$) de a :

$$u_n = a + \frac{c}{n}$$

Por exemplo,

$$u_n = 2 + \frac{3}{n} \text{ tende para } 2 \text{ por valores à direita de } 2;$$

$u_n = 2 + \frac{(-5)^n}{n}$ tende para 2 por valores à esquerda de 2;

Limites no infinito

Dada uma função real de variável real f cujo domínio D_f não é majorado (respetivamente, minorado), diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$) quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f , com limite $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), a sucessão $(f(x_n))$ tende para b e escreve-se $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (respetivamente, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$)

Operações com limites e identificação de casos indeterminados

Regras operatórias para facilitar o cálculo de limites:

Teorema 1: O limite de uma função constante é igual à constante que a define, em qualquer ponto aderente ao domínio e, caso faça sentido, também em $+\infty$ e em $-\infty$.

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{R}$ e f , uma função tal que $\forall x \in D_f, f(x) = k$ e seja a ponto aderente ao domínio de f (ou se é $+\infty$, ou $-\infty$). Se (u_n) é uma qualquer sucessão de valores do domínio de f com limite a , então a sucessão $(f(u_n))$ tem todos os termos iguais a k e, portanto, é convergente para k .

Assim, se $k \in \mathbb{R}$, e se f é tal que qualquer que seja $x \in D_f$, se tem que $f(x) = k$ e

- a é aderente a D_f , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$;
- D_f não é majorado, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$;
- D_f não é minorado, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$.

Teorema 2: O limite da função f definida por $\forall x \in D_f, f(x) = x$, em qualquer ponto a aderente ao seu domínio é igual a a , ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$. Se o domínio de f não for majorado (respetivamente, minorado), então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (respetivamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Demonstração: Seja (u_n) uma qualquer sucessão de valores pertencente ao domínio de f com limite a ou com limite $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), então a sucessão $(f(u_n))$ também converge para a ou para $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), pois $(f(u_n)) = (u_n)$.

Teorema do limite da soma:

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função $f + g$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente, $-\infty$), se o domínio de $f + g$ não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e pertencem a \mathbb{R} , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Demonstração: Suponhamos que temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ e consideremos uma qualquer sucessão (x_n) de elementos pertencentes a D_{f+g} e tendentes para a . Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então as sucessões $f(x_n)$ e $g(x_n)$ tendem respetivamente para b e c . Então, pela propriedade do limite da soma de sucessões convergentes a sucessão $(f(x_n) + g(x_n))$ tende para $b + c$. Isto significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Como consequência do mesmo resultado tem-se ainda que, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = +\infty$ desde que $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ exista e não seja $-\infty$. Neste caso, estamos perante uma situação de indeterminação:

$+\infty - \infty$ é uma indeterminação

Outras operações com limites infinitos:

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + c = +\infty, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + c = -\infty, \quad c \in \mathbb{R}$$

Teorema do limite do produto:

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função fxg , ou sendo $+\infty$ (respetivamente $-\infty$), se o domínio de fxg não for majorado (respetivamente minorado), então, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e pertencem a \mathbb{R} , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Demonstração: Suponhamos que temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ e consideremos uma qualquer sucessão (x_n) de elementos pertencentes a $D_{f \cdot g}$ e tendentes para a . Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então as sucessões $f(x_n)$ e $g(x_n)$ tendem respetivamente para b e c . Então, pela propriedade do limite do produto de sucessões convergentes a sucessão $(f(x_n) \cdot g(x_n))$ tende para $b \cdot c$. Isto significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Quando uma das funções tende para zero e a outra para $+\infty$ ou $-\infty$ não podemos determinar $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ sem mais informação, se o limite existe e qual o seu valor. Estamos perante outra situação de indeterminação do tipo $0 \times \infty$.

Notas sobre operações com limites infinitos:

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \quad -\infty \times (-\infty) = +\infty \quad +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \times c = +\infty, \quad c > 0 \quad -\infty \times c = -\infty, \quad c > 0$$

$$+\infty \times c = -\infty, \quad c < 0 \quad -\infty \times c = +\infty, \quad c < 0$$

Teorema do limite do quociente:

Dadas funções f e g e sendo a um ponto aderente ao domínio da função $\frac{f}{g}$, ou sendo $+\infty$ (respetivamente $-\infty$), se o domínio de $\frac{f}{g}$ não for majorado (respetivamente, minorado), então, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e pertencem a \mathbb{R} , sendo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é análoga à feita para os limites da soma e do produto, pois é uma consequência do limite da sucessão quociente das duas sucessões.

Se as duas funções f e g têm limites infinitos ou se tendem ambas para zero o limite $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x)$ não se pode determinar sem mais informações. Estamos perante dois casos de indeterminação dos tipos $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Outras operações com limites infinitos:

$$\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty, \text{ se } c > 0 \qquad \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty, \text{ se } c < 0$$

$$\frac{c}{0^+} = +\infty \text{ e } \frac{c}{0^-} = -\infty, \text{ se } c > 0 \text{ ou } c = +\infty$$

$$\frac{c}{0^+} = -\infty \text{ e } \frac{c}{0^-} = +\infty, \text{ se } c < 0 \text{ ou } c = -\infty$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0 \text{ se } c \in \mathbb{R}$$

Nos casos das operações com limites descritas encontramos algumas situações em que a aplicação das regras não é suficiente para determinar o limite ou para garantir se o limite existe. As técnicas usadas para levantar indeterminações no cálculo de limites de sucessões podem ser transpostas para o cálculo de limites de funções racionais do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios e $Q(x)$ não é o polinómio nulo.

Recordamos que se f é uma função polinomial e dado um número real a tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Apresentamos, sem demonstração, teoremas úteis usados no levantamento de alguns tipos de indeterminações.

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Teorema: O limite de uma função polinomial, quando a sua variável tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, é igual ao limite do termo de maior grau, quando a variável tende para $+\infty$ ou $-\infty$. Ou seja, dada uma função polinomial definida por:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \text{ com } a_0 \neq 0, \text{ tem-se:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n)$$

Indeterminações do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } b_0 \neq 0$$

Geralmente temos os seguintes casos possíveis:

- Se $n = m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \frac{a_0}{b_0}$.
- Se $n > m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = -\infty$ dependendo do sinal de $\frac{a_0}{b_0}$.
- Se $n < m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = 0$.

Para o levantamento dos restantes tipos de indeterminações é importante ter presente os casos notáveis da multiplicação de polinómios, as técnicas de factorização de polinómios como a regra de Ruffini e o Teorema do Resto e ainda as técnicas de racionalização de denominadores.

Opções didáticas

O professor deve investir o seu esforço em criar as condições para promover nos alunos o gosto pela atividade matemática, proporcionar uma aprendizagem baseada na compreensão dos conceitos e das suas relações e no desenvolvimento do raciocínio matemático. A seleção de um conjunto diversificado de tarefas a trabalhar em sala de aula permitirá que os alunos ponham em prática a sua criatividade e procurem por eles próprios, com o seu esforço, encontrar uma solução para os problemas propostos, pois esta experiência é fundamental em matemática que, ao contrário dos conceitos, nenhum professor pode transmitir. A experiência é intransmissível e, o fazermos por nós próprios, cria sólidas raízes de conhecimento, sendo esta riqueza que as tarefas exploratórias podem trazer para a aprendizagem da matemática.

Existe muitas vezes a ideia de que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la. Mas é muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que esperar que eles aprendam o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar (Ponte, 2005). Esta estratégia de ensino possibilita que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que serão sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011).

Uma tarefa de exploração caracteriza-se por um grau de desafio reduzido que pretende levar os alunos a trabalhar e a descobrir ou aproximar-se de conceitos que ainda não trabalharam anteriormente, não havendo por isso um caminho definido para chegar aos resultados pretendidos. Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos. Servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos (Ponte, 2005).

Estas convicções que partilho e o enquadramento curricular da unidade de ensino levaram-me a optar por uma estratégia de “ensino-aprendizagem exploratório” que tem como “característica principal o professor não procurar explicar tudo, mas deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13). As primeiras cinco aulas lecionadas nesta unidade curricular centraram-se na resolução de tarefas exploratórias para introduzir os novos conceitos associados a limites de funções reais de variável real. Estas tarefas apelavam à mobilização dos conceitos de função real de variável real

e de limites de sucessões para levar os alunos até às definições de limite segundo Heine, de limites laterais e limite de uma função num ponto.

Ao longo da realização das diferentes tarefas existiram momentos planeados de discussão coletiva cujo objetivo era pôr em confronto diferentes resoluções e sistematização de aprendizagens. A discussão em grande grupo constitui um momento fundamental no tipo de ensino exploratório onde os alunos podem apresentar as suas conjeturas e resultados, o professor aproveita para clarificar conceitos e procedimentos e se processa a construção de novo conhecimento (Ponte, & Quaresma, 2016). O professor deve assumir um papel essencialmente de moderador gerindo a sequência de intervenções e orientando, se necessário, o respetivo conteúdo (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). Mas os alunos dispõem de uma ampla margem de intervenção e influenciam, individual e coletivamente, o rumo dos acontecimentos. Por isso, aprender a conduzir discussões não é uma tarefa exclusiva do professor, mas também uma aprendizagem a realizar pela turma (Ponte, 2005).

As últimas duas aulas lecionadas tinham como objetivo trabalhar a Álgebra de limites quanto aos procedimentos para o levantamento de indeterminações. Não querendo desviar-me da estratégia de ensino-aprendizagem definida à partida, optou-se nestas aulas pela resolução de exercício propostos de forma interativa para que, de uma forma participativa, a turma pudesse identificar as indeterminações, mobilizar os resultados conhecidos do domínio das sucessões e experimentar e testar estratégias para o levantamento das indeterminações. Não é incompatível a adoção de uma estratégia de “ensino-aprendizagem exploratório” com a resolução de exercícios, pois o que distingue o ensino exploratório é a tendência geral do trabalho desenvolvido e a natureza das tarefas propostas e não uma ou outra intervenção mais guiada pelo professor (Ponte, 2005).

Relativamente à metodologia de trabalho adotada nas aulas, o trabalho autónomo foi realizado a pares tendo-se definido o critério de composição dos grupos baseado na heterogeneidade do aproveitamento e no comportamento com o objetivo de fomentar a interação e a aprendizagem colaborativa (Nunes, 1996). Nesta turma, os alunos já foram habituados ao trabalho a pares, que se formam após a realização de cada teste sumativo. Após o período de habituação, no início do ano letivo, a esta metodologia de “ensino-aprendizagem exploratório” baseada na realização de tarefas, os alunos foram demonstrando cada vez mais empenho e gosto por colaborar na resolução de tarefas matemáticas e na partilha e discussão de ideias.

Na fase de desenvolvimento do trabalho tive a preocupação de centrar as aulas no trabalho dos alunos oferecendo-lhes desafios para que se pudessem questionar e arriscarem sem receios na procura de soluções para os problemas propostos, desenvolvendo assim uma atitude investigativa perante a aprendizagem da Matemática. O professor assume sobretudo um papel de orientador da atividade dos alunos (Fonseca, 1999), procurando interpretar e compreender como eles resolvem as tarefas e explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam (Canavarro, 2011), sendo, para isso, importante uma atitude de questionamento que promova o pensamento e reflexão dos alunos.

Tarefas

Para operacionalizar a estratégia de “ensino-aprendizagem exploratório” desenvolvi um conjunto de tarefas para guiar o trabalho autónomo dos alunos, tendo em conta os objetivos definidos para cada aula no contexto da unidade didática lecionada. Procurei, com estas tarefas, encaminhar os alunos durante o seu trabalho autónomo em sala de aula, para a descoberta dos conceitos a partir dos conhecimentos já adquiridos anteriormente. Pretendia também que estas tarefas levassem ao aparecimento de estratégias de resolução diferenciadas e com isso promover momentos de discussão coletiva entre os alunos proporcionado o desenvolvimento do seu espírito crítico. A sequência das tarefas foi definida para que os alunos fizessem uso dos conceitos estudados nas tarefas anteriores para, de forma gradual, podermos alcançar novos conhecimentos matemáticos.

As primeiras quatro tarefas que idealizei, de natureza exploratória, permitiram aos alunos alcançar o conceito fundamental de limite de uma função real de variável real. Partindo dos conceitos de sucessão e limite de uma sucessão estudados na unidade didática anterior, construíram-se os conceitos de limite de uma função real de variável real, limites laterais, limites no infinito e limites infinitos, trabalhados tanto numa perspetiva gráfica como algébrica. O estudo das indeterminações foi feito através da resolução e discussão de exercícios escolhidos com o objetivo de promover a manipulação algébrica das diferentes técnicas de levantamento das indeterminações.

O quadro seguinte sumariza os objetivos definidos para cada tarefa proposta aos alunos (Quadro 4).

Quadro 4 - Tipologia e objetivos de aprendizagem das tarefas

Tarefa	Natureza da Tarefa	Objetivos da Tarefa
Tarefa 1	Exploratória	Revisão dos conceitos relacionados com a representação gráfica de funções; Revisão dos conceitos de limites de sucessões; Cálculo de limites de sucessões imagem de forma gráfica e analítica.
Tarefa 2	Exploratória	Introdução dos conceitos de ponto aderente e limites laterais de uma função; Manipulação de funções representadas graficamente e analiticamente; Introdução da definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine.
Tarefa 3	Exploratória	Estudo de limites laterais através de sucessões do tipo $w_n = a + \frac{b}{n}$ Estudo de limites infinitos e limite de uma função no infinito; Cálculo de limites sem recurso a sucessões, por inspeção gráfica e de forma analítica.
Tarefa 4	Exploratória	Introdução dos conceitos de limite infinito e limite de uma função no infinito; Cálculo de limites de funções representadas graficamente e analiticamente; Introdução da notação de limites, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Casos de não existência de limite.
Tarefa 5	Resolução de Exercícios	Estudo de técnicas para o levantamento dos diferentes tipos de indeterminações.

Avaliação

A avaliação é vista no contexto escolar essencialmente como um instrumento de recolha de informação que permite medir desempenhos e categorizar os alunos. É considerada sempre associada a testes ou exames ou à nota/classificação. Estes momentos de avaliação acontecem em tempos definidos e é vista separada do currículo, não influenciando o processo de ensino-aprendizagem. A investigação tem contrariado esta estratégia contrapondo a visão da avaliação como um processo de tomada de decisão estabelecendo-se um “diálogo” entre as produções do aluno e os critérios do avaliador que desejavelmente devem estar bem definidos à partida. Mais do que medir um desempenho momentâneo (teste) o processo de avaliação deve ser visto tendencialmente como um processo promotor de aprendizagens (Santos & Pinto, 2018).

Tendo em conta estas duas visões da avaliação fala-se frequentemente, tendo em conta os processos de a implementar, em avaliação sumativa e formativa. A avaliação sumativa está habitualmente associada à realização de testes e exames com a finalidade de medir os conhecimentos num determinado momento da aprendizagem categorizando os alunos de acordo com critérios administrativos. A avaliação formativa, com uma dimensão mais pedagógica, usa um leque variado de práticas para perceber onde o aluno está em termos de aprendizagem para

tomar decisões no sentido de providenciar mais e melhores aprendizagens e para regular o ensino (Santos & Pinto, 2018).

Dado o contexto da intervenção letiva e a estratégia de ensino adotada, o processo de avaliação focou-se na eficácia das tarefas propostas para a aprendizagem dos alunos, regulando o ensino das aulas seguintes e recolhendo “informações acerca do progresso individual e coletivo dos alunos” (NCTM, 2007, p. 25). Esta avaliação foi predominantemente formativa e implementada através da observação do trabalho dos alunos, das conversas durante o trabalho em grupo e das discussões coletivas o que permitiu perceber as suas lacunas que limitavam a sua progressão e provocou ainda alterações em tarefas previstas que demonstraram não serem eficazes para o processo de aprendizagem.

Relativamente à avaliação das aprendizagens foi tida em conta a qualidade das respostas e o nível de envolvimento na resolução das tarefas durante o trabalho autónomo. Nas discussões coletivas avalei o nível de interesse e de participação dos alunos e procurei valorizar e incentivar a exposição ao erro e a diferentes resoluções da mesma tarefa para realçar a diferença entre respostas mais ou menos completas. Para isso, procurei que fosse o mais variado possível o número de alunos escolhidos para apresentar as resoluções no quadro ou responder oralmente às questões colocadas. Fora deste conjunto de seis aulas analisado foi realizado um mini teste (Anexo 14) com duração de 20 minutos com resolução feita em pares seguindo o procedimento habitual de trabalho da turma.

Descrição das aulas

1ª Aula – 12 de março de 2019

Esta primeira aula foi planeada para ser uma introdução ao conceito de limite segundo Heine de funções reais de variável real e teve como fio condutor a resolução da tarefa 1 (Anexo 9). Com esta tarefa pretendia-se que os alunos relembressem e manipulassem alguns conceitos fundamentais trabalhados quer em anos anteriores como a representação gráfica de uma função, as noções de domínio e contradomínio e a representação de objetos e respetivas imagens. Pretendia-se ainda ligar estes conceitos com o trabalho realizado imediatamente antes no domínio das sucessões com o cálculo de limites.

A planificação desta aula (ver Plano de Aula 1, Anexo 1) previa momentos de trabalho autónomo dos alunos na resolução dos exercícios de cariz exploratório que os conduziria ao

conceito de limite de uma função real de variável real recorrendo ao limite de sucessões pela definição de limite de funções segundo Heine a partir de conceitos supostamente conhecidos. O trabalho autónomo foi realizado a pares existindo dois momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos diferentes grupos.

Antes de se iniciar a resolução da tarefa reservei alguns minutos para recordar aos alunos alguns conceitos sobre funções importantes para poderem apreender mais facilmente a definição de limite seguindo Heine. Relembrei a definição de função como aplicação que transforma elementos de um conjunto (Domínio) em elementos pertencentes a outro conjunto, o conjunto de chegada. Ao conjunto de todos estes elementos chamamos contradomínio.

Relembrámos ainda a definição de função nomeadamente que a cada objeto só pode corresponder uma imagem e que todos os elementos do domínio têm de ser transformados pela função. Formalizámos a caracterização de uma função:

$$f: D_f \rightarrow \text{Conjunto de chegada} \\ x \mapsto f(x)$$

e dei destaque ao significado de $f(x)$ como sendo a imagem do objeto x .

A primeira questão da tarefa tinha como objetivo que os alunos manipulassem algebricamente e graficamente os conceitos sobre funções indicados acima e descobrissem que um conjunto de objetos representados por uma sucessão eram transformados pela função num conjunto de imagens que também podiam ser representados por uma sucessão. Em ambos os casos, era possível calcular o limite destas sucessões. Outro dos objetivos desta questão era permitir que os alunos representassem graficamente as sucessões e visualizassem o seu comportamento a tender para o respetivo limite.

Os alunos corresponderam de acordo com o esperado em relação ao cálculo algébrico dos limites das sucessões, mas tiveram grande dificuldade na transposição para a representação gráfica. Apesar de alguns grupos não terem concluído a resolução desta questão, optei por não estender o tempo previsto no plano para este trabalho autónomo para podermos trabalhar em conjunto o processo de marcação de pontos num gráfico, a identificação do par objecto-imagem e observarmos o comportamento das sucessões. Perante estas dificuldades, a fase de discussão coletiva centrou-se mais numa resolução orientada da questão que num debate que fizesse emergir as diferentes formas de trabalhar uma função e de como esta transforma um conjunto de objetos noutra conjunto (as imagens) e qual o significado desta transformação. Os alunos foram insistentemente estimulados a irem ao quadro marcar os pontos no gráfico e a “ver” o

comportamento das sucessões de imagens, com o objetivo de começarem a ganhar sensibilidade para o conceito de “função a tender para ...” como correspondendo ao comportamento das sucessões das imagens.

A segunda parte da tarefa apresentava dois exercícios com características totalmente distintas. Um de resolução puramente algébrica e o segundo onde a função a estudar era apenas representada graficamente. Mais uma vez o objetivo era confrontar os alunos com diferentes formas de trabalhar funções reais de variável real e as maneiras de obter a informação pretendida perante as diferentes representações.

O exercício 2, apesar da sua resolução ser sobretudo analítica, colocava uma questão inicial em que se pedia que indicassem uma sucessão de termos pertencentes a um conjunto que tendesse para um ponto não pertencente a esse conjunto, mas aderente ao conjunto. Esta questão aparentemente de resolução imediata levantou imensos problemas cognitivos aos alunos pelo facto de não estarem familiarizados com a perspectiva com que tinham de olhar o problema. A discussão deste exercício teve ainda o mérito de ter feito surgir espontaneamente a necessidade de discutir duas estratégias diferentes para o cálculo analítico dos limites das sucessões das imagens, uma usando álgebra de limites de sucessões e a outra através do uso do caso notável da diferença de quadrados. Dado o tempo ocupado com a análise deste exercício não foi possível fazer a discussão em grupo da questão 3.

2ª Aula – 14 de março de 2019

A segunda aula iniciou-se com a discussão do exercício 3 da tarefa 1 (Anexo 9). Perante as dificuldades demonstradas pelos alunos, quer na manipulação dos conceitos relacionados com a representação de uma função, quer na compreensão da relação entre sucessão objeto e sucessão imagem, optei por conduzir a discussão deste exercício para que os alunos pudessem confrontar as opções colocadas e refletirmos em conjunto sobre o porquê de cada escolha ser ou não ser a correta. Procurei que os alunos verbalizassem uma justificação para considerarem válida ou não determinada opção para irem solidificando os conceitos básicos e ganharem sensibilidade para a definição de limite de uma função.

Dando seguimento à planificação desta aula (ver Plano de Aula 2, Anexo 2), iniciámos a resolução da tarefa 2 (Anexo 10) que tinha como objetivo a introdução dos novos conceitos de ponto aderente, limite lateral de uma função num ponto aderente ao seu domínio e identificação

dos casos de existência e não existência de limite. O objetivo final era chegar à definição formal de limite de uma função real de variável real segundo Heine. Procurei ainda, nesta tarefa, apresentar aos alunos alguns exercícios desafiantes e proporcionar-lhes o trabalho com diferentes formas de representação de funções. Mantivemos a metodologia de trabalho autónomo a pares, seguido de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos.

Foi pedido aos alunos que resolvessem os exercícios 1 e 2 da tarefa 2 (Anexo 10) onde eram apresentadas duas funções representadas analiticamente e em ambas era solicitado o cálculo do limite da sucessão imagem da mesma sucessão objeto $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$. A diferença principal entre as duas funções era que uma delas, a função g , era uma função definida por ramos. Este facto criou alguma dificuldade aos alunos pois não só tinham a função definida por ramos como a própria sucessão de objetos era constituída por duas sub sucessões: a dos termos de ordem ímpar a tender para 2 por valores menores que 2, e a dos termos de ordem par a tender para 2 por valores maiores que 2. Em todo o caso, a generalidade dos grupos conseguiu atingir os objetivos de calcular corretamente os limites apesar do tempo ocupado neste momento de aula (30 minutos) ter superado o previsto no plano.

A discussão coletiva que se seguiu permitiu aos alunos apresentarem e comentarem as resoluções analíticas que produziram sendo que em nenhuma emergiu o facto de existirem dois limites diferentes para $g(w_n)$. No entanto, quando questionados se uma sucessão poderia ter dois limites diferentes a maioria dos alunos respondeu corretamente. Aproveitei ainda para confrontá-los com a resolução gráfica destes exercícios e levá-los a visualizar os resultados obtidos analiticamente. Alguns alunos interpelados continuaram a demonstrar dificuldades em manipular e interpretar a representação gráfica de uma função.

A resolução em paralelo dos dois exercícios e a construção gráfica da sua resolução permitiu apresentarmos a definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine e introduzirmos, ainda que de forma não formalizada, os conceitos de limites laterais de uma função e apresentarmos os casos possíveis de existência ou não de limite num ponto aderente ao domínio da função. Este momento estendeu-se até ao fim da aula, não se tendo cumprido o plano previsto inicialmente.

3ª Aula – 15 de março de 2019

Para esta terceira aula definimos como objetivos a sistematização e formalização da definição de existência de limite finito num ponto aderente e a introdução da simbologia $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ começando aos poucos a afastarmo-nos das sucessões no estudo de limites de funções. Pretendíamos também introduzir o conceito de limite infinito e limite no infinito. Para tal propusemos aos alunos, após uma apresentação inicial, terminarem a resolução da tarefa 2 (Anexo 10) e iniciar a tarefa 3 (Anexo 11). O plano de trabalho para esta aula pode ser consultado no Anexo 3.

Iniciámos a aula recordando os exemplos apresentados na aula anterior formalizando a definição de existência de limite de uma função num ponto realçando as diferenças nos casos em que esse ponto pertence ou não ao domínio da função apesar de ter obrigatoriamente de ser ponto aderente ao domínio da função. Introduziu-se também a simbologia de limites sem recurso a sucessões:

$$\text{Se para todas as sucessões } (x_n) \rightarrow a \text{ a respetiva sucessão } f(x_n) \rightarrow b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Dada a diversidade de casos apresentados e à necessidade de os representar no quadro, esta sistematização inicial ocupou bastante mais tempo que o previsto (35 minutos contra os 20 previstos) condicionando o restante da aula.

No momento seguinte retomámos o trabalho com a tarefa 2 (Anexo 10) para a resolução do exercício 3 onde novamente era proposto aos alunos a análise de uma função representada graficamente. Na primeira alínea pedia-se para calcular limites de sucessões imagem de sucessões objeto dadas que tendiam para pontos do domínio e num dos casos a sucessão objeto tendia para mais infinito. A segunda alínea pretendia que concluíssem sobre a existência ou não dos limites da função nos pontos tendo em conta os resultados obtidos na alínea anterior. Ao contrário do previsto, a maioria dos alunos continuou a revelar grandes dificuldades na análise gráfica de uma função, em relacionar a sucessão objeto com a sucessão imagem e no cálculo e interpretação dos limites destas sucessões.

Na discussão coletiva verifiquei que vencida esta dificuldade no cálculo do limite das sucessões a obtenção de conclusões sobre a existência ou não de limite e a indicação do seu valor é feita

de forma competente pelos alunos. A discussão deste exercício permitiu ainda a formalização do seguinte resultado muito importante para as aulas seguintes:

$$a \in D_f \text{ se } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Tivemos ainda oportunidade de iniciar o trabalho autónomo para a resolução da tarefa 3 (Anexo 11) que pretendia introduzir os conceitos de limite infinito e limite de uma função no infinito. A avaliação que fizemos das dificuldades que os alunos tiveram na interpretação do que era pedido levou-me a concluir que as perguntas propostas seriam um salto cognitivo muito grande e optei por abandonar esta tarefa e criar uma proposta nova para a aula seguinte (ver Anexo 12, Tarefa 4).

4ª Aula – 19 de março de 2019

Esta aula iniciou-se com a leitura do poema *Mãezinha* de António Gedeão, uma iniciativa no âmbito da Semana da Leitura.

Esta aula tinha como objetivos consolidar os conceitos de limites laterais e cálculo de limites de uma função num ponto, e introduzir as noções de limites infinitos e limites no infinito. Pretendia-se, também, familiarizar os alunos com a linguagem de limites de funções sem o recurso explícito às sucessões de objetos e imagens. Para tal, propus a resolução de uma nova tarefa que resultou da reflexão sobre as dificuldades que os alunos estavam a ter sobre o estudo de limites de funções representadas graficamente. O plano de trabalho para esta aula pode ser consultado no Anexo 4.

Nesta tarefa, os primeiros dois exercícios apresentavam funções representadas graficamente e pedia-se aos alunos que calculassem os limites de sucessões imagem que tendiam para infinito e de sucessões imagem de sucessões objeto que tendiam para infinito. Pedia-se ainda que indicassem o valor lógico de algumas asserções com limites da forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Apresentámos um exercício de escolha múltipla para que os alunos identificassem as sucessões objeto por forma a que a função tivesse como limite o valor indicado. Estes exercícios tinham como objetivo a consolidação de conceitos, mas também colocar os alunos perante questões em que o problema era colocado de forma contrária ao que geralmente estavam acostumados.

Foi minha preocupação, na discussão coletiva, convidar alguns alunos a representar graficamente, no quadro, as sucessões objeto e imagem para verificarmos qual o limite de cada uma das sucessões. Apesar de rapidamente terem chegado às respostas corretas procurei que discutíssemos os limites das sucessões imagem para cada uma das opções de proposta para se trabalhar os limites infinitos e no infinito. Fui colocando algumas questões pontuais para poder avaliar o grau de consolidação dos conceitos. Pareceu-me que nesta fase a generalidade dos alunos já tinha interiorizado o conceito de função e a forma como esta transforma os objetos em imagens e que podemos estudar essa transformação quer pela expressão algébrica quer pelo gráfico da função. Se sabemos como se comportam os objetos conseguimos concluir qual o comportamento das imagens e assim calcular o limite da função.

O trabalho autónomo para a resolução do exercício 3 da tarefa 4 (Anexo 12) foi o momento seguinte desta aula. Neste exercício abandonámos definitivamente o recurso explícito às sucessões para calcularmos limites de funções num ponto. Foi curioso verificar que os alunos retiveram a imagem das sucessões a tender para um determinado valor e pude observar nos grupos que acompanhei a referência implícita a essas sucessões de imagens. Verifiquei ainda que a saída de cena das sucessões provocou uma melhoria no nível de compreensão no processo de cálculo dos limites pedidos. A discussão coletiva deste exercício focou-se sobretudo no cálculo do limite da função no ponto 3 que era um ponto aderente, mas não pertencente ao domínio da função. Como os limites laterais eram iguais concluíram que o limite existia apesar de não podermos calcular a imagem do ponto 3.

A aula concluiu-se sem que tivéssemos resolvido o exercício 4 proposto nesta tarefa.

5ª Aula – 21 de março de 2019

Esta aula iniciou-se com a resolução do exercício 4 da tarefa 4 (Anexo 12). Neste exercício tínhamos como objetivo confrontar os alunos com o cálculo de limites laterais de uma função definida algebricamente, e realçar a importância da igualdade desses limites laterais, para a existência de limite. Apesar de ser uma situação nova para os alunos e nem todos terem alcançado o resultado, foi interessante verificar a existência de diferentes abordagens de resolução seguidas. Um dos grupos representou graficamente os ramos da função e a partir desta representação calcularam corretamente os limites laterais. Um outro grupo simplesmente substituiu o ponto na expressão algébrica e calculou os limites laterais pretendidos.

Na discussão coletiva, confrontaram-se estas duas abordagens de resolução e mais uma vez procurei destacar a possibilidade de calcular limites em pontos que não pertençam ao domínio desde que sejam pontos aderentes. Se o ponto pertence ao domínio, além da igualdade dos limites laterais temos que garantir que são iguais ao valor da função nesse ponto. Se o ponto a é aderente ao D_f

$$a \notin D_f \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$a \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Após esta discussão optei por voltar à tarefa 3 (Anexo 11), que tínhamos abandonado inicialmente, e discutir em conjunto com os alunos a resolução da questão 1 que envolvia o cálculo de limites infinitos e limites no infinito e na procura de sucessões objeto cuja sucessão imagem correspondesse a um limite definido. O facto de termos reintroduzido as sucessões neste contexto do cálculo de limites gerou alguma insegurança nos alunos tendo alguns deles voltado a evidenciar dificuldades em estabelecer relações e em obter conclusões. No entanto, as respostas e os raciocínios na discussão da alínea c) foram bastante interessantes.

No momento seguinte foi pedido aos alunos que, em trabalho autónomo, resolvessem a questão 2 da tarefa 3 que pedia que calculassem os limites de uma função definida algebricamente em pontos que os iriam confrontar com problemáticas novas nomeadamente, situações de denominador zero ($\frac{-2}{0^+}$) e cálculo de limites no infinito. Apesar de o enunciado da tarefa sugerir que se usasse a definição segundo Heine incentivei os alunos a não o fazerem sugerindo que talvez fosse boa ideia o uso da calculadora para analisarem o comportamento da função. Este trabalho criou dificuldades aos alunos tendo sido necessário bastante acompanhamento e ajuda para que pudessem obter e interpretar os resultados pretendidos.

Esta aula concluiu-se sem que tivéssemos feito a discussão em grupo alargado e mais uma vez não se cumpriu o plano definido (ver Plano da Aula 5 no Anexo 5) que incluía uma introdução ao estudo de indeterminações.

6ª Aula – 28 de março de 2019

Esta aula teve como objetivo principal a apresentação da operatória de limites, a apresentação dos casos de limites indeterminados e o estudo de técnicas para o levantamento das indeterminações. A apresentação destes resultados baseou-se nos conceitos já conhecidos da álgebra de limites de sucessões e tratou-se de uma transposição para a simbologia de funções. O facto de os alunos já terem trabalhado a álgebra de limites e o levantamento de indeterminações no domínio das sucessões facilitou bastante este processo.

Tive nesta aula um papel bastante mais ativo que nas aulas anteriores pois não foram previstos momentos de trabalho autónomo apesar dos exercícios propostos terem sido resolvido com a participação muito ativa dos alunos.

A aula iniciou-se com a discussão da resolução da questão 2 da tarefa 3 (Anexo 11) com o objetivo de evidenciar qual o processo analítico para calcularmos os limites

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{-2^+ + 2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{-2^- + 2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Após a apresentação da álgebra de limites de funções e da identificação dos casos onde se verificam indeterminações apresentei um conjunto de exercícios de cálculo de limites com indeterminações (ver Tarefa 5, Anexo 13) que foram resolvidos em debate com os alunos, onde os incentivei a descobrirem qual a técnica adequada a utilizar em cada caso e onde procurei evidenciar alguns casos particulares a ter em consideração. Durante a aula não esgotámos todos os casos possíveis que foram trabalhados na aula seguinte.

O plano de trabalho para esta aula pode ser consultado no Anexo 6.

7ª Aula – 29 de março de 2019

Durante a resolução dos exercícios propostos na aula anterior verifiquei que um grupo significativo de alunos não tinha presente algumas regras básicas essenciais para estes procedimentos de levantamento de indeterminações. Para minimizar esta dificuldade, optei por iniciar esta aula com uma revisão exaustiva dos casos notáveis da multiplicação de polinómios,

a regra de Ruffini e as técnicas de racionalização de denominadores. O plano de trabalho para esta aula pode ser consultado no Anexo 7.

Aproveitei ainda para discutir um exemplo de cálculo de um limite, que considero muito importante, e que tinha já previsto apresentar nas aulas anteriores. Pedi aos alunos que calculassem os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{-x^2 + 4}$$

No cálculo de $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ procurei realçar a importância de se pesquisar como nos estamos a aproximar de zero, se por valores superiores (positivos) se por valores inferiores (negativos) a zero.

No momento seguinte, retomámos o cálculo de limites envolvendo o levantamento de indeterminações propostos na tarefa 5 (Anexo 13). Os alunos revelaram pouca destreza na manipulação algébrica dos polinómios e senti a necessidade de ter um papel mais interventivo para conseguirmos cobrir todos os casos previstos. Propositadamente, num dos exercícios que propostos, o limite a calcular não era uma indeterminação. Todos os alunos se lançaram a discutir qual a técnica adequada para levantar a suposta indeterminação. Como estavam mecanizados na procura da técnica para levantar a “indeterminação” deixaram de ter a preocupação de verificar se era necessário fazê-lo.

Os últimos vinte minutos desta aula foram dedicados à resolução a pares de um mini teste (Anexo 14) que incidiu sobre os conteúdos trabalhados durante esta minha intervenção letiva.

Capítulo 4 - Métodos e Procedimentos de Recolha de Dados

O trabalho de cariz investigativo desenvolvido no âmbito da minha prática de ensino supervisionado foi suportado em dados de campo recolhidos de diferentes formas durante a prática letiva da unidade didática sobre funções reais de variável real. Atendendo aos objetivos, às questões em estudo e ao contexto da realização do trabalho optou-se pela recolha de dados através da observação participante complementada com a gravação áudio das discussões de dois grupos de dois alunos e a recolha documental das resoluções escritas das tarefas propostas durante as aulas. Tentei diversificar, o mais possível as técnicas de recolha de dados para dar uma maior confiança e solidez aos dados, procurando o cruzamento entres as diferentes fontes e com isso dar uma maior fiabilidade ao estudo. (Cohen, Monion, & Morrison, 2007)

Os alunos tinham como método de trabalho em sala de aula, a resolução das tarefas propostas em grupos de dois alunos escolhidos de acordo com o seu desempenho. A estratégia era, sempre que possível, agrupar um aluno com bom desempenho com outro com desempenho inferior para gerar uma cooperação entre eles e poderem criar-se dinâmicas de autoaprendizagem. Os grupos selecionados para a recolha das gravações áudio das suas discussões foram escolhidos segundo critérios de interesse demonstrado, empenho e potencial de progressão nas aprendizagens, bom relacionamento entre os alunos do grupo e grau de participação na aula.

Como salvaguarda de questões de ordem ética, apresentou-se à Direção da escola e submeteu-se aos Encarregados de Educação dos alunos um documento (Anexo 8) solicitando autorização para recolha dos dados. Para que pudessem dar o seu consentimento informado, explicitava-se neste documento o objetivo do trabalho, o tipo de dados a recolher e informou-se que a identidade e os dados pessoais dos alunos seriam salvaguardados (Cohen et al., 2007). Este documento foi assinado por praticamente todos os Encarregados de Educação à exceção de um caso e um aluno maior de idade também declinou a participação no estudo. Os dados produzidos por estes alunos não foram utilizados.

Observação participante

A minha presença na escola junto da turma decorreu durante todo o ano letivo o que me permitiu integrar no ambiente escolar, conhecer as rotinas da turma e da escola, os métodos de trabalho implementados pelo professor cooperante, os comportamentos e modos de atuação dos alunos e possibilitou que se fossem familiarizando com a minha presença. Senti que ao longo deste tempo fui ganhando a sua confiança e que me viam como outro professor em quem se podiam apoiar. A qualidade do trabalho de investigação em campo está muito dependente do estabelecimento de relações entre os intervenientes e na capacidade de levar os alunos a cooperarem no trabalho a desenvolver. (Bogdan & Biklen, 1994)

Tendo em conta o meu envolvimento diário no contexto da turma, quer assumindo um papel de observador mais passivo, quer assumindo o papel de professor dinamizador da aprendizagem, interagindo com os alunos, ouvindo-os, questionando-os, o tipo de observação que realizei foi uma observação participante (Becker & Geer, 1969). A observação pode ainda ser classificada como observação direta e indireta. No primeiro caso, o investigador recolhe os dados sem intervir na ação que está a decorrer sendo sobretudo adequada para analisar o comportamento de um grupo num determinado contexto. No segundo caso, o investigador, por exemplo assumindo o papel de professor, torna-se um dos agentes da ação interagindo com os alunos, propondo tarefas, questionando procurando as explicações para determinadas ações e comportamentos dos alunos. (Quivy & Campenhoudt, 2005)

Os momentos em que assumi este papel mais de observador e menos participativo permitiram-me a recolha de um conjunto de notas de campo sobre os diferentes aspetos das vivências em sala de aula que foram muito importantes para a minha integração na dinâmica da turma e para a intervenção letiva que realizei. Procurei estar especialmente atento às estratégias usadas pelo professor cooperante na exploração de tarefas, organização das aulas, condução das discussões em grupo, o questionamento aos alunos e as suas reações e comentários durante os vários momentos das aulas. Tentei que estas notas fossem o mais descritivas possível, captando conversas e as ações dos diferentes intervenientes em cada momento (Bogdan & Biklen, 1994).

As notas de campo devem ter um carácter quer descritivo quer reflexivo. Devem ser detalhadas e concretas e devem permitir uma descrição cronológica dos acontecimentos. Devem ainda recolher as dificuldades dos alunos e descrever as suas reações às tarefas que lhes são propostas. (Cohen et al., 2007). As discussões promovidas pelo professor cooperante no final de muitas

das aulas que assisti enriqueceram as minhas notas de campo pois ajudaram a dar-lhe este carácter mais reflexivo sobretudo numa fase em que estava a dar os primeiros passos não conseguindo perceber certos aspetos fundamentais da condução da aula. Estas reflexões foram ainda fundamentais para a preparação das aulas que tive oportunidade de lecionar.

Na fase da minha intervenção letiva procurei gerir da melhor forma possível o duplo papel de investigador/professor para que a função de investigador não influenciasse a função de professor e com isso pudesse prejudicar o processo de aprendizagem dos alunos. É uma posição difícil pois, nos momentos de seleção das tarefas a trabalhar com os alunos, durante o acompanhamento do trabalho autónomo e nas discussões coletivas senti-me sempre condicionado pela necessidade de que se produzissem evidências que dessem resposta às questões de estudo formuladas. Penso, no entanto, que a função de professor prevaleceu sobre o investigador não só por uma preferência pessoal pelo desempenho deste papel, mas pela dificuldade em desempenhar os dois em simultâneo.

A função de investigador participante como professor traz algumas vantagens e dificuldades. Por um lado, “disfarça” o seu papel de investigador criando um clima de normalidade na sala de aula o que gera a produção de dados mais genuínos, mas pode comprometer a objetividade do estudo pelo facto do investigador/professor estar envolvido e comprometido com o processo de ensino-aprendizagem. (Cohen et al., 2007).

Outra dificuldade da investigação enquanto professor é a multiplicidade de tarefas que temos de desempenhar em simultâneo com a observação. Além de ouvir os alunos e interpretar o que querem transmitir, de encontrar a estratégia para encaminhar o aluno a uma aprendizagem significativa tem ainda de conseguir dar atenção e selecionar as evidências para a sua observação (Cohen et al., 2007). Segundo Santos (2005 p. 175) as principais dificuldades da observação em sala de aula são “a solicitação por parte dos alunos, a atenção dirigida à observação, que leva a uma desconcentração nas respostas dadas às questões levantadas pelos alunos, o excesso de tempo para realizar a tarefa e o registo atempado da informação recolhida”. Apesar das dificuldades, o exercício de investigar e refletir sobre a própria prática é uma experiência enriquecedora para o desenvolvimento profissional do professor aumentando a sua autoconfiança e dando-lhe ferramentas para ultrapassar os problemas com que se depara no dia a dia da sala de aula (Ponte, 2004)

Para minimizar a dificuldade de recolha de notas de campo durante as aulas lecionadas considero muito importante a contribuição da reflexão após a aula com os contributos da

professora orientadora, do professor cooperante e do colega que me acompanhou nesta jornada. Neste espaço pude fazer uma autorreflexão inicial e ser confrontado com as observações externas. Com esta ajuda consegui realçar as dificuldades sentidas por mim e pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem e em certos casos esta reflexão ajudou a que pudesse adaptar as aulas seguintes na tentativa de otimizar o tempo e o processo de aprendizagem.

A observação com recolha de notas de campo durante as sete aulas lecionadas foi complementada com recolha áudio das discussões de dois grupos durante as resoluções das tarefas propostas nas primeiras quatro aulas. Esta recolha permitiu um registo objetivo e factual de muitos detalhes importantes das discussões dos alunos que passaram despercebidos durante o acompanhamento do trabalho autónomo dos alunos. Estes dados permitiram a reconstrução de diálogos entre os alunos, os diálogos entre professor e alunos e as estratégias de questionamento usadas e analisar as suas estratégias e raciocínios autónomos. Netas gravações ficaram também registados os momentos de discussão coletiva o que me permitiu a reconstrução de algumas passagens e me ajudou a refletir sobre o meu desempenho.

Recolha documental

A recolha documental constituiu outro importante método de recolha de dados. Estes documentos constituem as produções escritas dos alunos na resolução das tarefas propostas. São registos inalterados das abordagens dos alunos aos problemas propostos e permite recolher dados que apontam para as estratégias usadas e registam os erros que evidenciam as dificuldades sentidas e os pontos de melhoria no processo de aprendizagem. (Bogdan & Biklen, 1994)

Esta recolha das produções escritas foi também importante pois permitiu aceder a dados de todos o universo da turma e tornou-se um suporte indispensável para dar resposta às questões em estudo uma vez que se evidenciaram abordagens que recorreram à representação gráfica de funções no cálculo de limites que, devido à timidez de alguns alunos em participar na aula, não foram analisadas na discussão coletiva.

Contudo, um dos constrangimentos do uso deste método de recolha de dados é os alunos não escreverem todo o seu raciocínio e riscarem ou apagarem o que escreveram, não permitindo ao investigador perceber como é estavam a pensar para resolver aquela questão. Dessa forma, para tentar solucionar esse problema, distribui uma tarefa por cada par de alunos que incluía espaço

para as suas resoluções e solicitei que escrevessem a caneta. Informei-os também que posteriormente lhes devolvia a tarefa, bem como uma cópia da mesma, para que todos ficassem com um exemplar da tarefa. Além disso, pedi que copiassem a correção com uma caneta de cor distinta. O mesmo aconteceu com a ficha de avaliação realizada na última aula da minha intervenção letiva.

Este método de recolha de dados tem constrangimentos importantes e necessita muito rigor na sua implementação para que os dados recolhidos não conduzam a conclusões desvirtuadas. Um dos problemas é o facto de os alunos, por não conseguirem formalizar, mesmo que de forma rudimentar, os seus raciocínios, não os explicitarem na folha a recolher ou riscarem ou apagarem o que escreveram, não permitindo ao investigador perceber, à posteriori, como é que estavam a encaminhar as suas estratégias. Outro problema que observei é que, se o observador não recolhe os documentos escritos antes da discussão coletiva, os alunos têm tendência a corrigir as suas resoluções enquanto acompanham a discussão perdendo-se assim informação preciosa para avaliar os raciocínios ou a sua progressão na aprendizagem.

A análise dos dados recorreu à análise de conteúdo (Bardin, 2009) e as categorias foram definidas tendo em conta as questões do estudo e a revisão de literatura desenvolvida.

Capítulo 5 – Análise de Dados

Neste capítulo analiso os dados recolhidos durante a minha intervenção letiva para procurar responder às questões de estudo objeto do meu trabalho. Foram recolhidos dados através da observação de sete aulas, acompanhadas de registo áudio de dois grupos de alunos em quatro dessas aulas. Esta recolha de dados foi completada com recolha documental das resoluções dos alunos das tarefas propostas.

A Representação Gráfica no Cálculo de Limites

As primeiras tarefas apresentadas aos alunos procuraram introduzir de forma intuitiva o conceito de limite de funções reais de variável real, segundo Heine. Foi proposto um conjunto de exercícios que relacionavam o conceito de limite de uma sucessão com os conceitos básicos sobre funções como Domínio, Contradomínio, Objeto e Imagem e a sua representação gráfica.

Esta estratégia foi dificultada por não se ter antecipado o facto de os alunos não saberem interpretar a representação gráfica de uma função, nem o significado do par $(x, f(x))$, como é ilustrado de seguida. Na resolução da questão 1 da tarefa 1 (Anexo 9) uma aluna (grupo 1) faz os seguintes comentários:

M1: Calcula os limites u_n , Ah! Está aqui. Isto é de multiplicar, não é? Está a multiplicar. Não?

(...)

M1: ... por isso é que eu perguntei se estava a multiplicar!

(...)

M1: Ó Stor, tenho uma dúvida. Nós aqui, temos “*f u de l*” ... “*f u de l*” Eu li “*f u de n*” . (...) Isto aqui está a multiplicar, o f vezes o u_n ?

Na aula 3 ainda se encontra a mesma dificuldade, a de interpretação da simbologia na resolução da questão 1 da tarefa 3 (Anexo 11):

S: Sim, imagina que isto é um infinitésimo. Os valores vão dar cada vez mais próximos de zero. Para além de que isto aqui ... imagina que nós tínhamos o limite de g . Podíamos fazer um limite vezes o outro, não era?

M: Como assim? Tínhamos era que substituir....

S: Imagina que o limite de g era igual a 2 e o limite de n era zero. Ficava 2 vezes zero que era zero. Isto aqui não precisa de ser zero.

Quando se pede aos alunos para calcularem um limite a partir do gráfico de uma função a tendência é para procurarem a expressão analítica. Na tarefa 2 (anexo 2), depois de terem calculado limites analiticamente, a questão 3 apresentava uma função representada graficamente. A primeira reação de um aluno foi afirmar: “Mas não temos a função $g(\dots)$ temos que descobrir a função?” (aluno M).

Outro grupo (grupo 2) na discussão da questão 3 da tarefa 1 comenta:

M: Qual das seguintes pode ser o termo geral de u_n ? Temos que pegar em cada um destes e fazer isto?

S: Não deve ser porque tu não tens o f . Olha, isto é a função f . Eu lembro-me de ver funções assim mas não me lembro....

M: ... desses cruzamentos...

S: Vemos o limite desta e juntamos.

M: Como assim?

S: Repara, o limite de f acaba aqui no 1 e depois começa outra vez no 1 aqui. Calma, o limite é o x ou o y ?

M: É o y . Estivemos a ver que era no y .

S: Então o limite desta aqui é 1 e depois aqui começa no 2, mas não conta. Então o limite do f

M: Temos que ver, sai de u_n , para $f(u_n)$. Sai de natural para real.

S: Eu estou a ver só da f

M: O natural é o objeto

S: Esta aqui é u ? É porque está aqui ao pé do f ... aqui está o f

Este diálogo realça outra dificuldade relacionada com o facto de a definição de limite segundo Heine obrigar a uma manipulação em simultâneo de uma sucessão objeto e da respetiva sucessão imagem. Outro diálogo destas alunas, ainda discutindo a mesma questão, reforça esta dificuldade:

S: (...) mas tem aqui um intervalo onde ela não passa que é de 1 a 2. Se tende para 2 é porque alguma coisa tem que estar a ir para 2.

M – Se calhar é o u_n que tem que tender para 2.

S – Mas nenhuma destas tende para 2. Eu acho que é esta porque está a crescer.

M - A crescer? Eu acho que todas estão a decrescer.

O grupo 2 tem o seguinte diálogo na resolução da questão 3 da tarefa 2 (Anexo 10) que ajuda a reforçar a constatação da dificuldade que os alunos têm em interpretar o gráfico de uma função e a confusão da manipulação em simultâneo de sucessão objeto e sucessão imagem:

M: Eu acho que é 1, o limite de $g(u_n)$. Faz isso na calculadora para ver melhor.

(...)

B: O limite é 4.

- M: Eu não sei das imagens. Eu não sei qual é a função g , não sei ver isso.
B: Tu andaste a dormir!? O u tende para quanto?
M: 4.
B: Então?
M: Mas tu queres é o limite de $g(u_n)$ não de u_n .
B: Ah, pois é.
M: O problema é que eu não sei qual é a função g porque assim fazia a função das imagens aqui.
...
B: Eu não sei ver gráficos.

Podem ajuda ao professor durante a resolução da mesma questão e o seguinte excerto mostra como, apesar do enorme esforço dos alunos e professor, a falta de ferramentas adequadas pode ser impeditiva da aprendizagem dos alunos e deitar por terra as estratégias do professor. Percebe-se que os alunos são competentes a calcular o limite de uma sucessão a partir do termo geral (falas 5 e 13) mas têm dificuldade em perceber como os termos tendem para esse limite, se por valores superiores ou inferiores (falas 23 a 31). A representação gráfica pode dar uma noção intuitiva e visual para os transportar para o conceito de limite de uma função, mas não conseguem usar esta ferramenta porque parece não verem a representação gráfica como uma das possíveis representações da função (fala 3) e, por conseguinte, não conseguem interpretar corretamente a situação proposta (falas 11, 13, 15). Esta dificuldade torna-se ainda mais evidente no trecho das falas 33 a 47 onde os alunos, após terem chegado a uma conclusão correta para o cálculo do limite de $g(u_n)$, repetem o mesmo erro de não conseguirem associar objetos e imagens perante a representação gráfica da função:

1. M: Queremos descobrir o limite de $g(u_n)$, certo?
2. Professor (P): Se o u_n for este, o limite
3. M: Mas nós não sabemos quanto é a função g .
4. P: Mas tens o gráfico. O u_n é definido assim, não é? Portanto tu puseste aí uma coisinha assim ...
5. B: Porque u_n tende para 4.
6. P: O u_n tende para 4, exatamente, e as imagens?
7. M: As imagens de u_n tendem para 1.
8. P: Pronto, então o limite de $g(u_n)$ é 1.
9. M: Então e agora faço com o resto.
10. P: Então e v_n ?
11. M: Deu-me para um também.
12. P: Então explica-me lá como?
13. M: Primeiro vi para onde é que ela tendia, que era 4.
14. P: Certo, mas vamos ver ali as imagens. Tu agora queres imagens...
15. B: Então não tende para 1 também?
16. P: Não sei, vocês é que vão ver se sim.
17. B: Então, pelo que estivemos a fazer há bocado ...

18. P: Vê lá.
19. B: Esta tende para 4, a outra também tende ...
20. M: o v_1 , é 3. Mas aqui dá para ver, deve ser 4, certo?
21. P: Não sei, vamos ver.
22. M: Supostamente deve ser.
23. P: Mostra lá, como estes termos, os primeiros termos se começam a comportar, ali no gráfico. v_1 é 3, certo? E v_2 ? Não vamos marcar, não vale a pena. Vamos olhar para a expressão enquanto um todo, $4 - \frac{1}{n^2}$, está bem? O que vai acontecer sucessivamente, o que vai acontecer ao n ?
24. M: Vai crescendo.
25. P: Então $\frac{1}{n^2}$, o que vai acontecer?
26. B: Vai diminuindo.
27. P: Então 4 - ..., sucessivamente o que estou a tirar ao 4? Quantidades cada vez maiores ou menores?
28. M: Menores.
29. P – Então os termos da sucessão vão sendo cada vez ...
30. B: Menores.
31. M: Maiores.
32. P: Maiores. O menor de todos é o 3
33. M: Vai tender para 4 da direita para a esquerda.
34. P: Vai tender para 4 por valores inferiores a 4. E as imagens?
35. M: As imagens vão para 2.
36. P: Onde é que vês isso?
37. M: Aqui!
38. P: Sim, mas é através da função, certo?
39. B: Tende para 1, então tende para 1.
40. P: Vamos lá ver. A imagem do 3 está aqui. E os outros dizes tu que são sucessivamente maiores. O que acontece às imagens destes valores?
41. M: Vão diminuir.
42. P: Está bem, mas, aponta-me onde é que eles estão?
43. M: Assim aqui.
44. P: Assim aqui, e então?
45. M: Vão tender para 2.
46. P: Vão tender para 2, vocês estavam a dizer que ia tender para 1.
47. M: Ok, estava a ver mal.

Importa ainda realçar, neste episódio, o papel do professor no processo de aprendizagem. Ao validar a consistência da resposta correta que obteve para o valor do limite de $g(u_n)$, questionou os alunos sobre o limite da sucessão seguinte (v_n) e obteve uma resposta errada. A estratégia utilizada consistiu num questionamento permanente (falas 12, 16, 21, 36 e 38) no sentido de entender o raciocínio dos alunos, perceber as dificuldades e conduzi-los ao resultado correto.

Analisando as produções escritas realizadas na sala de aula verificamos que os alunos com maiores competências matemáticas conseguem fazer uma interpretação gráfica adequada e

obter conclusões sobre os limites de funções num ponto de acordo com a definição segundo Heine. O primeiro exemplo diz respeito à tarefa 1 (Figura 1) e o segundo à tarefa 2 (Figura 2).

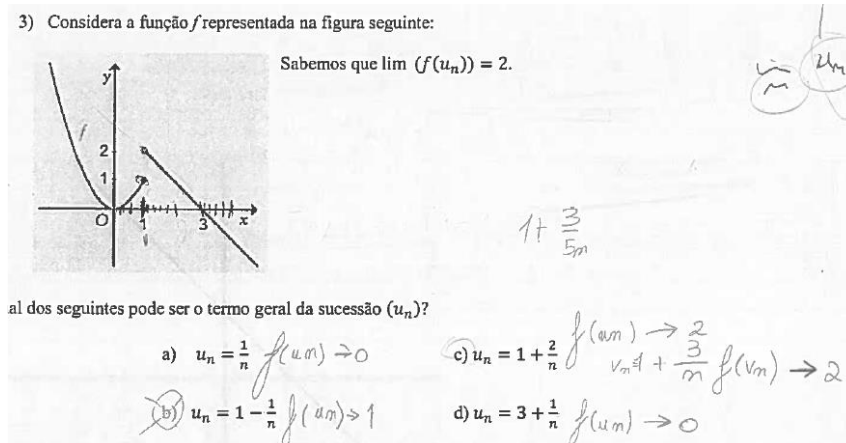


Figura 1 – Resolução exercício 3, Tarefa 1

No exercício 3 da tarefa 1 pretendia-se que os alunos descobrissem, de entre as opções apresentadas, qual a sucessão objeto que, transformada pela função f , resultava numa sucessão imagem de limite 2. A resolução que apresentamos na figura 1 mostra que estes alunos interpretaram e souberam usar de forma correta e eficiente a representação gráfica da função. Representar no gráfico os termos das sucessões objeto propostas e conseguiram assim descobrir os limites das respetivas sucessões imagem.

de sucessão objeto, sucessão imagem e limite de uma sucessão e a sua visualização gráfica só tomam significado matemático para os poucos alunos que têm estes conceitos consolidados.

O Estudo de limites com diferentes representações

O cálculo de limites por métodos analíticos é feito de forma competente parecendo, pelos dados recolhidos, a forma de resolução que os alunos procuram de forma espontânea. Existe uma necessidade de encontrar procedimentos mecânicos para obter os resultados pretendidos como comprovam os exemplos que se apresentam em seguida.

Na resolução da questão 1 da tarefa 1, o grupo 2 procura imediatamente calcular os limites de forma analítica apesar da sugestão apresentada no enunciado encaminhar para uma resolução gráfica.

M – Calcula os limites das funções $f \dots$ temos que juntar o $f(x)$ com o u_n , o $f(x)$ com o v_n e o $f(x)$ com o w_n .

S – Como se o x fosse isto tudo, não é?

M – Temos que fazer, por exemplo, $x + 2$ com este parêntese e isto...

S – Eu acho que é como se x fosse esta expressão toda, o x desta tens que substituir por isto.

M – Não, olha como está aqui dentro...

S – Então, $f(x)$, o u_n é o x .

M – Ah Ok, então substituímos o x por isto?

O grupo 1, cujos diálogos anteriores mostraram muitas dificuldades na interpretação gráfica e na manipulação da simbologia das funções, utilizou de forma muito competente as ferramentas algébricas (casos notáveis) e o conceito de limite de sucessão, na resolução algébrica da questão 2 alínea b) na tarefa 1, como podemos observar na figura 3. Para estes alunos as diferentes representações de limites parecem ser vistas como compartimentos estanques.

b) Para as sucessões da questão 1, calcula $\lim (g(u_n))$, $\lim (g(v_n))$ e $\lim (g(w_n))$

$$u_n = 2 + \frac{1}{n} ; v_n = \frac{1}{n} ; w_n = -1 + \frac{1}{2n}$$

$$g(u_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 = 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} + 5 ; \lim (g(u_n)) = \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} + 5\right) = 5 //$$

$$g(v_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2} + 1 ; \lim (g(v_n)) = \lim \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1 //$$

$$g(w_n) = \left(-1 + \frac{1}{2n}\right)^2 + 1 = 1 - \frac{2}{2n} + \frac{1}{4n^2} + 1 = \frac{1}{4n^2} - \frac{2}{2n} + 2 ; \lim (g(w_n)) = \lim \left(\frac{1}{4n^2} - \frac{2}{2n} + 2\right) = 2 //$$

$n = -2 - \frac{1}{n}$

Figura 3 – Cálculo de limites por métodos analíticos - resolução de um grupo de alunos.

Um dos grupos chega a usar duas estratégias de resolução alternativas para o cálculo analítico de um limite, como se mostra na figura 4. Esta resolução é muito interessante pois revela a capacidade de mobilização de conhecimentos adquiridos no domínio da álgebra de limites de sucessões.

- 2) Considera a função $g(x) = x^2 + 1$ em que $D_g =]-2, +\infty[$.
- a) Indica uma sucessão (i_n) de elementos do domínio de g convergente para -2 . Calcula $\lim (g(i_n))$

$$i_n = -2 + \frac{1}{n} \quad i_1 = -1$$

$$\lim (g(i_n)) = \lim (i_n^2 + 1) = \lim (i_n^2) + \lim (1) = (\lim i_n)^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$\lim (g(i_n)) = \lim \left(\left(-2 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \right) \rightarrow (-2 + 0)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Figura 4 - Cálculo de limites por métodos analíticos usando álgebra de limites de sucessões – resolução de um grupo de alunos.

É curioso verificar que os alunos dão um grande salto cognitivo nas respostas às questões da tarefa 4 (Anexo 12) na 4ª aula. Parece que se apropriam rapidamente da simbologia de limites de funções abandonando as sucessões (apesar de na discussão estas aparecerem implicitamente) e isso aparentemente parece contribuir para aumentar o seu nível de compreensão do conceito de limite. Apresentamos como exemplo o diálogo do grupo 2 na discussão da questão 3 da tarefa 4 onde se percebe que estão a usar intuitivamente as sucessões objeto e imagem que explicitamente se fazia referência nas tarefas anteriores (falas 1, 3 e 5). Igualmente, as falas 5 e

11 demonstram que as alunas compreendem a noção de limites laterais e a “necessidade” de serem iguais para existir limite, apesar de não o conseguirem verbalizar corretamente a nível formal. A apresentação verbal da noção de limite não é rigorosa, mas mostra que os alunos apreenderam os conceitos descritos.

1. S: Quando x vai para 1, depende. Tenho que ver quando vai daqui para aqui e ao contrário. Então, quando x tende para 1 menos, é da esquerda para a direita,
2. M: Dá zero.
3. S: É para zero, não é? Deixa escrever isto como deve ser. Limite de $h(x)$ é igual a zero quando o x tende para 1 menos e o limite de $h(x)$ quando o x tende para 1 mais ... É zero na mesma, não é?
4. M: Eu acho que sim.
5. S: Porque eles vão dar os dois ao mesmo sítio. Então é zero, tem limite. Agora o 3.
6. Quando vem daqui para aqui...
7. M: Está a ir para o 3.
8. S: Para o 2.
9. M: Quando está a ir para o 3?
10. S: Sim, da esquerda para a direita, porque é o menos, vem assim, sobe, e vai para o 2.
11. M: Só está aí 3.
12. S: Quando está aí um número tens que fazer dos dois para ver se tem igual.
13. M: Mas é 2 aberto....
14. S: Pois é. Mas pode ser 2 na mesma, não faz mal.
15. M: E este também é 2.
16. S: Sim eles estão juntos. Então isto é 2. Agora quando é para mais infinito, aqui não é preciso dividir. Quando x está a ir para mais infinito ... é daqui para aqui, para cima. É 3, não?
17. M – Sim, está a aproximar-se do 3.
18. S – Isto parece estar a aproximar-se vai estar a subir.
19. E agora quando está a ir para menos infinito
20. M: está a aproximar-se de -2.
21. S: Sim.

As falas 16, 19 e 20 evidenciam ainda uma boa compreensão do conceito de limite e da simbologia $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ e a sua relação com a representação gráfica. O uso das expressões “Quando x está a ir para mais infinito...” e “está a aproximar-se de -2” indica ainda que se apropriaram da imagem visual do conceito de limite.

Na questão 4 da tarefa 4 apresenta-se uma função definida analiticamente e é importante realçar que encontramos vários exemplos de resoluções onde os alunos procuram recorrer à imagem visual da função ou mesmo à representação gráfica para calcular os limites pretendidos. Parece que tentam usar diferentes representações para calcular o limite pedido.

O grupo 1 tem o seguinte diálogo onde, de uma forma visual, tentam perceber qual o comportamento das imagens da função $t(x)$. Apesar de não terem conseguido calcular os limites laterais no ponto -1 houve um esforço por mobilizar a representação gráfica.

B: Calcula o limite de $t(x)$ quando x tende para -1 para cima.

M: É à direita, não é para cima. Se é -1 à direita tem que ser maior que -1. Ou é menos que -1?

B: Maior que -1. Se for à esquerda é menor que -1.

M: Então tem que ser o $1 - x$. Eu não sei como vou fazer isto se não tenho nenhum gráfico.

B: Usa a expressão, calcula. Faz o primeiro termo, o segundo termo,

M: Mas tu queres as imagens

B: O primeiro é maior que -1 logo, tens que começar no zero. É 1, 1-1 é zero, 1-2 é -1, vai descer para menos infinito Aqui vai para mais infinito, é o inverso. Para maior que -1 vai para menos infinito e quando é menor vai para mais infinito.

Outro grupo, para a mesma questão, apresenta a resolução da figura 5. Aqui a mobilização da representação gráfica para calcular o limite de uma função definida analiticamente é evidente e os gráficos apresentados mostram ainda que estes alunos conseguiram utilizar e representar sucessões objeto adequadas e concluir sobre o comportamento da função em torno de -1.

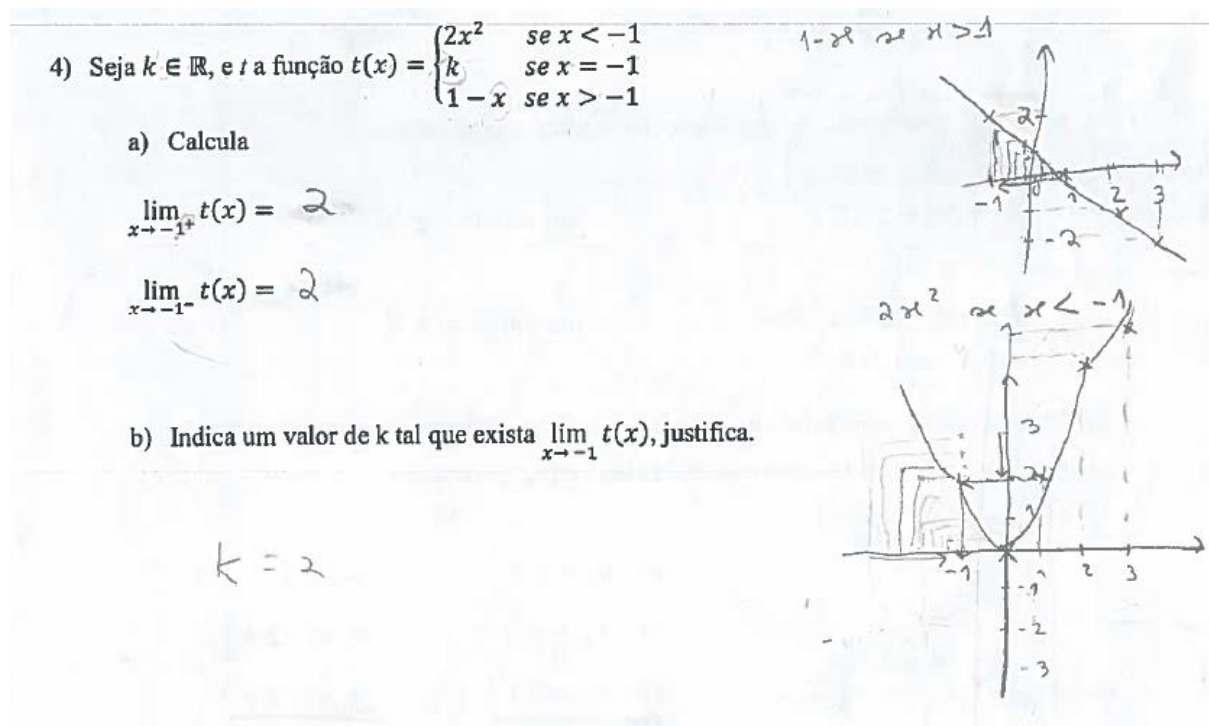


Figura 5 – Resolução da questão 4 da tarefa 4.

O comentário de espanto, “E não tivemos que fazer contas!”, feito pela aluna S. do grupo 2, que sempre demonstrou muita competência na resolução repetitiva de exercícios e pouco à vontade na procura de estratégias para resolução de novos problemas, pode ser o despertar para uma forma diferente de olhar a Matemática.

A forma como os alunos verbalizam os seus raciocínios está diretamente relacionada com a solidez dos seus conhecimentos e tem um impacto decisivo na forma como entre eles procuram resolver as tarefas propostas. Apresentamos alguns exemplos de como a forma de se expressar na discussão em grupo pode ser um fator de bloqueio no trabalho autónomo e dificultar o processo de aprendizagem.

Na questão 1 da tarefa 1, quando se pede que calculem o limite da sucessão $(f(u_n))$, os alunos estabelecem um diálogo pouco rigoroso e confuso que revela muita insegurança na interpretação da simbologia:

- M1: Calcula os limites $\dots u_n \dots$ está aqui. Isto é de multiplicar, não é? Está a multiplicar. Não?
B: É aquilo da função!
M2: ... a função de $u_n \dots$
M1: ... a função de u_n igual a $x+2$. Mas então f não vai fazer alguma coisa? Tens $f(x)$... ali em cima ...
M2: ...calma...
M1: ... por isso é que eu perguntei se estava a multiplicar!?
M2: Então agora isto ... tens de meter esta função depois desta função ...
M1: Então e eu estou a perguntar se está a multiplicar?
B - Porque é que não meteste vezes?

Ao discutirem a resolução da questão 3 da tarefa 1 outro grupo tem o seguinte diálogo ao analisar o gráfico da função:

1. S: Repara, o limite de f acaba aqui no 1 e depois começa outra vez no 1 aqui. Calma, o limite é o x ou o y ?
2. M: É o y . Tivemos a ver que era no y .
3. S: Então, o limite desta aqui é 1 e depois aqui começa no 2 mas não conta. Então o limite do $f \dots$
4. M: Temos que ver, sai de u_n para $f(u_n)$. Sai de natural para real.
5. S: Eu estou a ver só da $f \dots$
6. M: O natural é o objeto.
7. S: Esta aqui é u ? E porque está aqui ao pé do $f \dots$ aqui está o $f \dots$

A aluna S. está a tentar analisar o limite da função f , mas sem a preocupação de o fazer na vizinhança de um qualquer ponto (falas 1 e 3). Pelo diálogo parece que a aluna está mais a descrever a função que a calcular qualquer limite. A colega M. apercebe-se que algo está errado e, nas falas 4 e 6, tenta chamar a atenção de S. para a necessidade de ter de usar as sucessões u_n e $f(u_n)$ para poderem calcular o limite. Ao não conseguir expressar-se corretamente não consegue alterar o raciocínio da sua colega.

Este mesmo grupo, ao discutir a questão 3 da tarefa 2 tem o seguinte diálogo que revela uma evolução na construção do conceito-imagem de limite da aluna S., mas mostra que a sua expressão verbal ainda dificulta a comunicação com a sua colega:

1. M: Estava a tentar perceber isto. Quando é ímpar
2. S: Está sempre a ir para 5.
3. M: Está sempre?
4. S: Olha, isso está a ir para 2, o x mas depois quando tu fores desenhar aqui, uns estão aqui acima e estão a vir cada vez mais perto e estão aqui de baixo este e a vir cada vez mais perto. Uns vão assim e os outros vão assim. Mas estão sempre a ir para 5.
5. M: Os ímpares estão a decrescer ou a crescer?
6. S: Os ímpares estão a decrescer. Estão a ir de cima para baixo para 5.
7. (...)
8. M: Os pares vão para 2, vão para 2 da direita para a esquerda. E os ímpares
9. S: Mas tu não precisas de saber isso.

As alunas estão a estudar o $\lim(g(w_n))$ sendo que (w_n) é uma sucessão definida por ramos com limite 2. A aluna S. percebeu que as imagens de ambos os ramos tendem para 5 e, na fala 4, tenta explicar à sua colega. Apesar de se perceber que S. já interiorizou o conceito, esta não consegue utilizar os termos corretos para transmitir o conceito à sua colega. Este facto parece ser decisivo para a dificuldade de compreensão de M.. A sequência das falas seguintes parece mostrar que, ao usar apenas linguagem natural e não os termos mais formais como *objeto*, *imagem*, para distinguir as sucessões objeto e imagem e a expressão *tende para* torna-se um impedimento para a compreensão da sua colega.

O exercício da tarefa 3.0 pede para calcular limites de uma função por interpretação da sua representação gráfica. As mesmas alunas dos diálogos anteriores discutem o limite da função $h(x)$ no ponto 1:

- S – Quando x vai para 1, depende. Tendo que ver quando vai daqui para aqui e ao contrário. Então, quando x tende para 1 menos, é da esquerda para a direita,
- M – Dá zero.

S – É para zero, não é? Deixa escrever isto como deve ser. Limite de $h(x)$ é igual a zero quando o x tende para 1 menos e o limite de $h(x)$ quando o x tende para 1 mais (...). É zero na mesma, não é?

M – Eu acho que sim.

S – Porque eles vão dar os dois ao mesmo sítio. Então é zero, tem limite.

Este diálogo parece indicar uma evolução decisiva no “conceito-imagem” de limite que proporciona uma melhoria significativa na forma como as alunas se expressam e na segurança com que o fazem. A representação verbal do conceito de limite é trabalhada com um vocabulário mais rico e rigoroso. Esta evolução expressa-se pelo uso de expressões como “quando o x tende para” e na forma como interpretam a simbologia $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$. É ainda importante realçar que os alunos passam a mobilizar intuitivamente os conceitos de sucessão objeto e sucessão imagem e utilizam os limites laterais sem que isso lhes seja pedido de forma direta.

Em síntese, os alunos apresentam dificuldades no cálculo de limites de funções reais de variável real quando estas estão representadas graficamente. Estas dificuldades devem-se sobretudo ao facto de terem poucas competências no domínio das funções. Não conseguem interpretar a relação objecto-imagem, $(x, f(x))$, nem fazer a sua correspondência no gráfico da função. Conseguem calcular o limite de uma sucessão de forma isolada, mas quando introduzimos o conceito de sucessão objeto e sucessão imagem, os alunos sentem grande dificuldade em interpretar a situação.

O cálculo de limites de funções de forma analítica é feito de forma bastante competente não tendo sido possível validar se os alunos conseguem interpretar de forma correta os resultados que obtêm. No entanto, verificou-se que quando conseguem interpretar e manipular a representação gráfica de funções parece que começam intuitivamente a relacionar as diferentes representações para calcular os limites pretendidos.

Capítulo 6 – Conclusões e Reflexão Final

Neste capítulo final apresentam-se as principais conclusões deste trabalho procurando responder às questões orientadoras que nos serviram de guia. O capítulo inicia-se com uma síntese do estudo, seguindo-se a suas principais conclusões que tiveram como base as aulas lecionadas e a análise dos dados recolhidos. Finaliza com uma reflexão pessoal sobre o meu percurso ao longo deste processo de formação, as aprendizagens que realizei com a realização deste projeto e o seu contributo para o meu desempenho enquanto futuro professor de Matemática.

Síntese do estudo

A intervenção letiva em que se baseia este estudo realizou-se no ano letivo 2018/2019 com uma turma de Matemática A do 11.º ano, do curso de ciências e tecnologia, da Escola Secundária Padre Alberto Neto, do Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas (AEQB). O relatório foca-se em sete blocos letivos de 90 minutos onde foi trabalhado o tema de limites de funções reais de variável real pertencente ao domínio das funções reais de variável real.

O programa e metas curriculares Matemática A para o ensino secundário (ME, 2014) indica que o conceito de limite de uma função deve ser introduzido por via da definição de limite segundo Heine aproveitando o estudo do limite de sucessões e a sua álgebra de limites para a estender de forma imediata ao caso das funções. Foram ainda trabalhados os conceitos de ponto de acumulação, limites laterais e dentro da Álgebra de limites foram analisados os casos de limites indeterminados e os procedimentos para o levantamento dessas indeterminações.

Para o cumprimento destes objetivos programáticos foi elaborada uma planificação que previa a leção de seis blocos de 90 minutos. A fase de concretização deste plano obrigou à realização duma sétima aula para o cumprimento dos objetivos definidos. Procurei implementar uma estratégia de “ensino-aprendizagem exploratório” propondo um conjunto de tarefas de cariz exploratório, que idealizei, com o objetivo de permitir que através do seu esforço, em momentos de trabalho autónomo, a pares, os alunos descobrissem (ou pelo menos se aproximassem) dos resultados pretendidos. A avaliação dos alunos foi sobretudo de cariz formativo tendo por base a observação do seu empenho no trabalho autónomo e a qualidade da sua participação na discussão coletiva. No final da sétima aula foi também proposto um mini teste que os alunos resolveram a pares.

Este estudo teve por objetivo compreender o papel das representações matemáticas na aprendizagem da noção de limite de Funções Reais de Variável Real, por alunos de uma turma do 11.º ano. Tendo em conta este objetivo formulei as seguintes questões orientadoras do estudo, às quais procurarei dar resposta na secção seguinte:

- a) De que modo a representação gráfica contribui para a compreensão do conceito de limite?
- b) Como os alunos trabalham uma representação ao longo da resolução de tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?
- c) Como os alunos passam de uma representação para outra para resolver tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?

Efetuei uma revisão da literatura de referência centrada nos aspetos cognitivos envolvidos no ensino da Matemática, nas dificuldades do processo de ensino-aprendizagem do conceito de limite e na importância dos diferentes tipos de representações dos conceitos e objetos matemáticos.

Os dados que serviram de base ao estudo foram recolhidos através de notas de campo da observação direta do trabalho em sala de aula e das reflexões após as aulas, dos registos áudio do trabalho autónomo de dois grupos de dois alunos e das produções escritas da resolução das tarefas de todos os grupos da turma.

Principais conclusões

A apresentação das principais conclusões orienta-se pela tentativa de dar resposta às questões do estudo suportada na análise dos dados recolhidos.

De que modo a representação gráfica contribui para a compreensão do conceito de limite?

Verificou-se que parte dos alunos não consegue interpretar os conceitos associados à representação gráfica de uma função. Esta lacuna cognitiva dificultou a sua progressão no trabalho autónomo quando era pedido que calculassem o limite de uma sucessão imagem por leitura e interpretação do gráfico de uma função. Este tipo de pergunta causou um conflito cognitivo a dois níveis: estes alunos não conseguiam estabelecer a relação entre sucessão objeto e sucessão imagem e não conseguiam reconhecer o gráfico apresentado como uma forma de representação de uma função.

É, por isso, fundamental garantir à priori que o aluno disponha dos conceitos básicos do domínio das funções e que consiga reconhecer uma função como um processo dinâmico entre a variável dependente e independente, vendo uma função como um processo e não como um instrumento que permite realizar determinados procedimentos algébricos. Caso contrário, terá dificuldade em compreender a dinâmica inerente ao conceito de limite (Tall, 1992).

A definição de limite segundo Heine procura aproveitar todo o estudo feito no domínio das sucessões para, de uma forma “natural”, introduzir o conceito de limite de uma função. No entanto, tem implícito uma dinâmica de movimento simultâneo de diferentes objetos matemáticos relacionados entre si que causa outro tipo de conflito cognitivo. Nos momentos de discussão coletiva que existiram ao longo das aulas, o uso da representação gráfica tornou-se indispensável na tentativa de ultrapassar este conflito pois permitiu a criação de uma imagem visual e intuitiva da definição e contribuir para a compreensão do conceito de limite. Estas dificuldades estão relacionadas não só com o fraco domínio dos conceitos básicos descritos atrás, mas também poderão estar relacionados com o facto de terem contacto com a definição formal de limite sem que tenham tido tempo de construírem um “conceito imagem” consistente, como chamam a atenção Tall e Vinner (1981).

Constatei que os alunos que não dominavam esta ferramenta continuaram, nas aulas seguintes, a demonstrar muita aversão ao uso de conceitos visuais no cálculo. Exemplos onde uma interpretação visual do gráfico resolveria o exercício de forma trivial, os alunos procuram sempre uma resolução numérica por ser o processo mais familiar e enraizado ao longo de anos (Tall, 1992). Foi evidente a surpresa para muitos alunos que a determinação de um limite pudesse ser feita sem recurso a cálculos algébricos. Por outro lado, os alunos que detinham as competências na manipulação e interpretação do gráfico de uma função conseguiram mais facilmente a construção de um “conceito imagem” sólido e mais consistente com o conceito formal de limite (“conceito definição”).

Os esforços para eliminar ou atenuar este “conflito cognitivo” foram infrutíferos enquanto a abordagem do cálculo de limites de funções representadas graficamente se fez por via da definição segundo Heine. Quando se abandonou a terminologia de “sucessão de objetos” e “sucessão das imagens” associada à definição de limite segundo Heine, a manipulação e interpretação da representação gráfica de uma função associada ao cálculo de limites tornou-se mais intuitiva para a generalidade dos alunos. O facto de o foco da sua atenção passar a centrar-

se no traçado da função e não no que se passa nos eixos coordenados torna mais intuitiva a interpretação gráfica da expressão « $f(x)$ tende para b quando x tende para a ».

Esta abordagem no estudo de limites de funções não revelou nos alunos as dificuldades cognitivas identificadas por Tall (1992) e Tall e Vinner (1981), quer ao nível da interpretação da terminologia técnica como: “*limite*”, “*tender para*”, “*aproxima*”, “*tão pequeno quanto se queira*”, quer na problemática relacionada com a existência de limites finitos quando a função se aproxima de uma assintota sem nunca a atingir.

Como os alunos trabalham uma representação ao longo da resolução de tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?

Verifiquei que o cálculo de limites por métodos analíticos é o preferido pelos alunos que o procuram de forma espontânea. Nota-se uma necessidade de encontrar procedimentos mecânicos que lhes dê segurança na procura dos resultados pretendidos. Apesar de algumas dificuldades ao nível da manipulação algébrica, os alunos revelam competência no uso deste procedimento de cálculo quando recordados sobretudo dos casos notáveis de multiplicação de polinómios e das regras de simplificação de frações racionais.

Uma dificuldade que compromete o processo de ensino-aprendizagem, no estudo de limites por métodos algébricos, está na tendência, que os alunos demonstraram, para contentar os seus esforços na obtenção do resultado correto, instrumentalizando o processo de cálculo o que contribui para dificultar a aquisição do significado ou da natureza matemática do conceito de limite e causa dificuldades de interpretação dos resultados (Friendland & Tabach, 2001) e de aquisição de um adequado “conceito-imagem” em sintonia com o “conceito-definição”. Em termos didáticos, a distinção entre a definição e o conceito propriamente dito é muito importante, pois conhecer a definição não garante que o sujeito se apodere do conceito (Cornu, 2002).

O início do estudo de limites de funções revelou grandes dificuldades dos alunos na sua expressão verbal sobretudo devido à pobreza do vocabulário utilizado. Esta dificuldade causa problemas ao nível da exteriorização e aplicação das suas representações internas dos conceitos e pode criar ambiguidades e provocar associações irrelevantes ou enganadoras (Friendland & Tabach, 2001). Não conseguindo verbalizar as suas representações internas, quer aos colegas,

quer ao professor, os alunos criam obstáculos à criação matemática e à evolução do seu processo de aprendizagem.

Esta dificuldade de linguagem que os alunos demonstraram no início foi sendo vencida à medida que se foi fortalecendo o seu “conceito-imagem” de limite. A passagem para a linguagem simbólica de limites na forma $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ fez surgir nas discussões de trabalho autónomo expressões como “quando x vai para $+\infty$ a função tende para...” o que demonstra um vocabulário mais rico e rigoroso. Penso que as discussões coletivas contribuíram de forma decisiva para a melhoria da expressão verbal dos alunos na medida em que procurei insistentemente que fizessem um esforço para exporem as suas ideias matemáticas a todo o grupo numa linguagem o mais formal possível em cada circunstância.

Como os alunos passam de uma representação para outra para resolver tarefas com limites? Que dificuldades apresentam?

Os alunos têm a tendência para usar as diferentes representações dos conceitos matemáticos como compartimentos estanques sem qualquer ligação entre si. Os alunos estimulados a resolver um exercício por um determinado método, algébrico ou gráfico, não se sentem impelidos a mudar de representação para mais facilmente obter ou comprovar os resultados. As conversões (trabalhar com diferentes representações) são mais complexas do que os tratamentos (trabalhar dentro da mesma representação) pois requerem que se reconheça o mesmo objeto matemático em duas representações diferentes cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum (Duval, 2006).

Procurei criar contextos nas tarefas que levassem os alunos a motivar-se para o uso de diferentes estratégias de resolução que empregassem diferentes representações de uma função para o cálculo de um limite. Dou como exemplo o exercício 2 da tarefa 3 onde se pedia aos alunos que calculassem os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2}$$

Como não era apresentado o gráfico da função, todos os alunos calcularam o limite de forma analítica tendo chegado a um resultado que se revelou inconclusivo, $\frac{2}{0} = \infty$

Neste ponto, estimei os alunos a tentarem representar graficamente a função (Friendland & Tabach, 2001). Apesar de todos possuírem uma calculadora gráfica, não é para estes alunos um movimento natural o uso desta ferramenta para comprovar graficamente os resultados obtidos analiticamente. O aproveitamento das potencialidades da calculadora gráfica pode conduzir a uma maior destreza na interligação das várias representações.

O cálculo de limites de funções de forma analítica é feito de forma expedita não tendo sido possível validar se os alunos conseguem interpretar de forma correta os resultados que obtêm. No entanto, verificou-se que quando os alunos conseguem interpretar e manipular a representação gráfica de funções parece que começam intuitivamente a relacionar as diferentes representações para calcular os limites pretendidos.

O trabalho com diferentes representações no processo de aprendizagem é importante pela necessidade de moldar os conceitos à forma de pensar de cada aluno (Friendland & Tabach, 2001). É importante a utilização interativa das várias representações para que seja facilitado ao aluno a exploração de vários pontos de vista, o que promove a sua compreensão, sentido crítico, e desenvolve o sentido de abstração necessário no conceito de limite (Juter, 2008). Os alunos terão maior capacidade de resolver problemas se conseguirem mover-se facilmente entre diferentes tipos de representações (NCTM, 2007).

Reflexão final

O meu percurso de formação como professor de Matemática que culmina com a realização deste trabalho ficou marcado por quatro aspetos decisivos, que queria começar por destacar nesta minha reflexão final, que, como quatro faróis guiaram o meu percurso e alteraram profundamente a minha visão sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

A primeira situação marcante aconteceu numa das primeiras aulas no Instituto de Educação quando tive o primeiro contacto com os conceitos de “tarefa exploratória” (Ponte, 2005) e ensino de “cariz exploratório” (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013; Ponte, 2005). Até este momento o meu conceito de ensino estava centrado no ensino tradicional expositivo onde o professor tem o papel central como transmissor de saber.

O segundo marco do meu percurso de aprendizagem foi ter ouvido de forma explícita que, “o papel do professor não é ensinar, mas fazer com que os alunos aprendam” o que me fez refletir sobre qual o verdadeiro papel do professor perante os seus alunos e o cumprimento do currículo.

Outro dos marcos essenciais do meu percurso de aprendizagem foi o trabalho em sala de aula com o professor cooperante. Restava-me comprovar se seria possível um professor ensinar de forma diferente da tradicional cumprindo os objetivos programáticos definidos pelo Ministério da Educação. O professor cooperante com quem trabalhei ao longo de todo o ano letivo, mostrou-me, com muita mestria, que é possível propor aos alunos um trabalho em sala de aula onde predominam os momentos em que estes deixam de ser meros espectadores e têm um papel ativo na aprendizagem. Por fim, a minha paixão por ajudar outros a aprender e a ganhar o gosto pela fascinante área da Matemática foi crescendo ao longo deste percurso e culminou com esta experiência extraordinária da prática letiva em sala de aula.

Todos estes fatores contribuíram decisivamente para o meu desempenho em sala de aula. Procurei criar um ambiente propício ao desenvolvimento das aprendizagens onde os alunos se pudessem sentir à vontade para apresentar os seus pontos de vista e estratégias de resolução e onde pudessem responder às questões sem constrangimento e medo de errar. Para isso procurei dar continuidade à dinâmica implementada pelo professor titular da turma proporcionando momentos de trabalho autónomo na resolução de tarefas diversificadas e outros momentos de discussão coletiva para debate de pontos de vista diferentes, esclarecimento de dificuldades e consolidação de conceitos. Dada a minha inexperiência e a natureza da turma não consegui que estes momentos de discussão se tornassem sempre espaços de verdadeira discussão de ideias matemáticas que confrontassem processos diferentes e que produzissem aprendizagens relevantes. Para que isso acontecesse tive de assumir algum protagonismo e levar os alunos a confrontarem-se com alguns conflitos cognitivos que enriquecessem a sua aprendizagem.

Um dos fatores decisivos que contribuiu para o desempenho seguro que tive foi o esforço em fazer uma planificação detalhada das aulas. Apesar de nem sempre ter sido cumprido com rigor o plano, este exercício constituiu um importante apoio à reflexão prévia sobre as estratégias a aplicar e a prever as diferentes formas de resolução das tarefas e antecipar as dificuldades dos alunos. Apesar deste esforço de planeamento e de antecipação senti sempre bastante dificuldade em fazer o acompanhamento do trabalho autónomo respondendo às solicitações dos alunos e ao mesmo tempo ter a clarividência para ir selecionando as situações adequadas para uma discussão coletiva enriquecedora.

Notei com satisfação que os alunos, apesar de alguns problemas cognitivos ao nível dos conceitos básicos, se empenharam genuinamente perante os desafios que lhes foram propostos através das tarefas que elaborei. A opção pela implementação dum modelo de “ensino-

exploratório” revelou-se bastante positiva e adequado dado o empenho e a progressão nas aprendizagens dos alunos.

Tendo em conta os conteúdos lecionados, a prática letiva que desenvolvi e a análise da literatura de referência, gostava de ter oportunidade de aprofundar a pesquisa sobre os seguintes tópicos:

- Será a definição de limite segundo Heine adequada para a introdução do conceito de limite de uma função real de variável real em alunos do ensino secundário? Será a definição de limite segundo Cauchy mais adequada para a formalização do conceito? Será fundamental para a aprendizagem dos alunos, ao nível do 11.º ano de escolaridade, confrontá-los com qualquer destas definições formais em detrimento duma abordagem mais informal do conceito de limite?
- De que modo o uso de ferramentas computacionais na aprendizagem da definição de limite pode minimizar estes conflitos cognitivos?

Referências

- Abrams, J. (2001). Teaching mathematical modelling and the skills of representation. In Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 269-282). Reston, VA: NCTM.
- AEQB (2018). *Projeto educativo 2018-2022*. Queluz: Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas.
- Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo*. Coimbra: Edições 70, Grupo Almedina.
- Becker, H. S., & Geer, B. (1969). Participant observation and interviewing: a comparison. In J. G. McCall, & J. L. Simmons (Eds), *Issues in participant observation: a text and reader* (pp. 322-331). Reading, MA: Addison-Wesley.
- Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Cohen, C., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). New York, NY: Routledge.
- Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- Ferreira, J. C. (1990). *Introdução à análise matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.
- Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

- Gafanhoto, A., & Canavarro, A. (2011); Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 107-121). Lisboa: APM.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A., Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Second ed., pp. 176-201). New York: Routledge.
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115- 141.
- Juter, K. (2008). Students' concept development of limits. *Proceedings of the V congress of the European society for research in mathematics education CERME 5* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus.
- MEC (2014). *Programa e metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Nunes, F. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da Matemática? In *Actas ProfMat 96* (pp. 79-91). Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 29-53.
- Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro, & E. Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 61-84). *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(4), 153-180.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P.; Pereira, J.; & Henriques, A. (2012). O Raciocínio matemático dos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa. Ponta Grossa*, 7(2), 355-377.

- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51-66.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (2005). *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Santos, L. (2005). Avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 169-187). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editores.
- Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7* (pp. 13-28). Quebec:ICMI
- Tall, D. (2001) Natural and formal infinities. Disponível em: University of Warwick institutional repository: http://wrap.warwick.ac.uk/476/1/WRAP_Tall_dot2001p-esm-infinity.pdf
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.
- Woleck, K. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's. In Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 215-227). Reston, VA: NCTM.

Anexos

Anexo 1: Plano de Aula 1

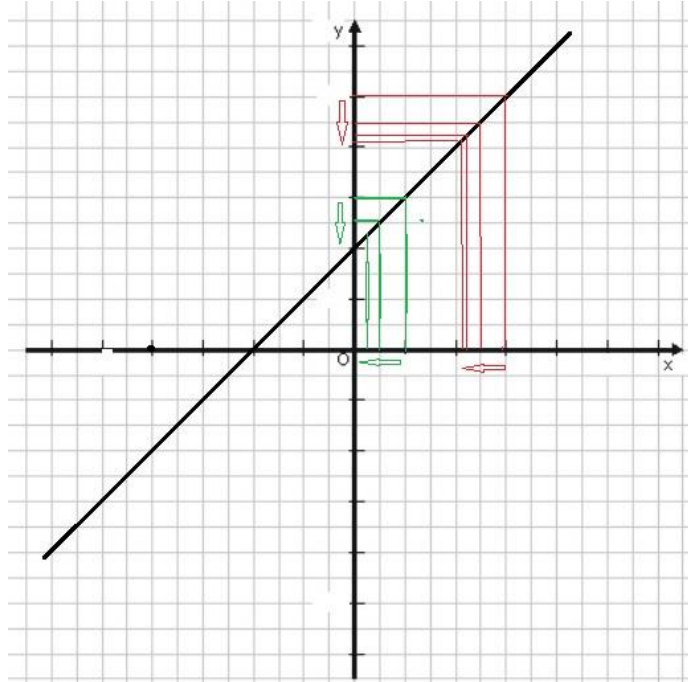
Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 12/03/2019 Hora: 17h00m

Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Transformada de uma sucessão convergente por uma função real de variável real. Cálculo do seu limite. Limites laterais.	
Sumário	
Sucessões de termos pertencentes ao domínio de uma função, suas imagens e limites. Resolução de uma tarefa exploratória sobre limites de sucessões.	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Saber identificar sucessões, convergentes para um número real dado, de termos pertencentes ao domínio de uma função.○ Saber identificar as imagens dos termos de uma sucessão, por uma função dada, e calcular o limite dessa nova sucessão.○ Conhecer a definição de ponto aderente a um conjunto.○ Identificar os limites laterais de uma função num ponto aderente a seu domínio.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">● Raciocínio matemático● Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão da tarefa.	

Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none"> • Limites de sucessões • Noção de função 	
Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none"> • Planificação da aula • Quadro branco • Marcador 	<ul style="list-style-type: none"> • Enunciado da tarefa 1 • Calculadora Gráfica • Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Entrada dos alunos e informações. 2. Breve revisão sobre funções. 3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 da tarefa 4. Discussão da questão 1 da tarefa. 5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 2 e 3 da tarefa. 6. Discussão das questões 2 e 3 da tarefa e sistematização de conceitos. 	<p>5 minutos</p> <p>5 minutos</p> <p>20 minutos</p> <p>20 minutos</p> <p>20 minutos</p> <p>20 minutos</p>
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>O professor iniciará a aula com uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais que os alunos devem ter presente para a resolução da tarefa e compreensão da definição de limite segundo Heine.</p> <p>A tarefa a realizar pelos alunos é composta por um conjunto de exercícios exploratórios que conduzirá os alunos ao conceito de limite de uma função real de variável real recorrendo ao limite de sucessões pela definição de limite de funções segundo Heine.</p> <p>A tarefa será realizada a pares existindo dois momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Breve revisão sobre funções	5 minutos
<p>Antes de se iniciar a resolução da tarefa o professor irá recordar os alunos de alguns conceitos de funções importantes para poder apreender mais facilmente a definição de limite seguindo Heine.</p> <p>Relembrar a definição de função como aplicação que transforma elementos de um conjunto (Domínio) em elementos pertencentes a outro conjunto, o conjunto de chegada. Ao conjunto de todos estes elementos chamamos contradomínio.</p> $f: D_f \rightarrow \text{Conjunto de chegada}$ $x \mapsto f(x)$ <p>Relembrar ainda que:</p> <p>A cada objeto só pode corresponder uma imagem; Todos os elementos do domínio têm que ser transformados pela função.</p>	
3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 da tarefa.	20 minutos
<p>1) Considera a função $f(x) = x + 2$ de domínio \mathbb{R} e as sucessões de termo geral $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n}$ e $w_n = -1 + \frac{1}{2n}$.</p> <p>a) Indica os limites das sucessões (u_n), (v_n) e (w_n)</p> $\lim(u_n) = 2$ $\lim(v_n) = 0$ $\lim(w_n) = -1$ <p>b) Calcula os limites das sucessões, $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ e $(f(w_n))$. Sugestão: Começa por esboçar o gráfico de f e assinalar os pontos $(u_1, f(u_1))$, $(u_2, f(u_2))$, $(u_3, f(u_3))$, ...</p>	



$$f(u_n) = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 4 + \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(u_n)) = \lim\left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$$

$$f(v_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(v_n)) = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

$$f(w_n) = f\left(-1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2n}$$

$$\lim(f(w_n)) = \lim\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$$

Resolução alternativa:

$$\lim(u_n) = 2$$

$$f(u_n) = u_n + 2$$

$$\lim(f(u_n)) = \lim(u_n + 2) = \lim(u_n) + \lim(2) = 4$$

$$\lim(v_n) = 0$$

$$f(v_n) = v_n + 2$$

$$\lim(f(v_n)) = \lim(v_n + 2) = \lim(v_n) + \lim(2) = 2$$

$$\lim(w_n) = -1$$

$$f(w_n) = w_n + 2$$

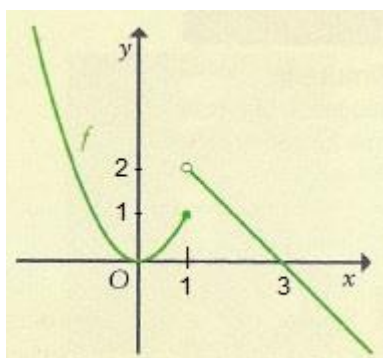
$$\lim(f(w_n)) = \lim(w_n + 2) = \lim(w_n) + \lim(2) = 1$$

Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>O aluno poderá não conseguir perceber quais os objetos a ser transformados pela função. O facto de os objetos serem os termos de uma sucessão pode gerar confusão.</p> <p>Tentar calcular o limite da sucessão ($f(u_n)$) listando a sequência de termos:</p> $u_1 = 3, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = \frac{7}{3}, \dots$ $f(3) = 5, f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{2}, \dots$	<p>Questões do professor:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Quais os objetos a ser “transformados” ? - Como a função transforma o primeiro termo da sucessão? - Como consigo obter uma “regra” para transformar todos os termos da sucessão?
<p>4. Discussão da questão 1 da tarefa.</p>	
<p style="text-align: right;">20 minutos</p> <p>Questões a levantar na discussão:</p> <ul style="list-style-type: none"> - E se a sucessão u_n for $u_n = 2 - \frac{1}{n}$? <p>ou</p> <p>E se eu me quiser aproximar de 2 “pelo outro lado”?</p> <p>Destacar que:</p> <p>Este estudo permite-nos analisar como a função se comporta na vizinhança do ponto 2.</p>	

<p>5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 2 e 3 da tarefa.</p>	<p>20 minutos</p>
<p>2) Considera a função $g(x) = x^2 + 1$ em que $D_g =]-2, +\infty[$.</p>	
<p>a) Indica uma sucessão (i_n) de elementos do domínio de g convergente para -2. Calcula $\lim (g(i_n))$</p>	
$i_n = -2 + \frac{1}{n}$	
$\lim (g(i_n)) = \lim \left(\left(-2 + \frac{1}{n} \right)^2 + 1 \right) = \lim \left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} + 1 \right) = 5$	
<p>ou</p>	
$\lim (g(i_n)) = \lim((i_n)^2 + 1) = (\lim i_n)^2 + 1 = 5$	
<p>b) Para as sucessões da questão 1, calcula $\lim (g(u_n))$, $\lim (g(v_n))$ e $\lim (g(w_n))$</p>	
$g(u_n) = g\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} + 1$	
$\lim(g(u_n)) = \lim\left(5 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 5$	
$g(v_n) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + 1$	
$\lim(g(v_n)) = \lim\left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1$	
$g(w_n) = g\left(-1 + \frac{1}{2n}\right) = \left(-1 + \frac{1}{2n}\right)^2 + 1 = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}$	
$\lim(g(w_n)) = \lim\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) = 2$	
<p>Resolução alternativa:</p>	
$\begin{aligned} \lim(u_n) &= 2 \\ g(u_n) &= u_n^2 + 1 \\ \lim(g(u_n)) &= \lim(u_n^2 + 1) = (\lim(u_n))^2 + \lim(1) = 5 \end{aligned}$	
$\begin{aligned} \lim(v_n) &= 0 \\ g(v_n) &= v_n^2 + 1 \\ \lim(g(v_n)) &= \lim(v_n^2 + 1) = (\lim(v_n))^2 + \lim(1) = 1 \end{aligned}$	

$\lim(w_n) = -1$ $g(w_n) = w_n^2 + 1$ $\lim(g(w_n)) = \lim(w_n^2 + 1) = (\lim(w_n))^2 + \lim(1) = 2$	
Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>Os alunos poderão ter dificuldade em conseguir encontrar a sucessão i_n com termos pertencentes ao domínio da função.</p> <p>O facto de termos uma função quadrática poderá gerar dificuldades na obtenção do termo geral da sucessão $(g(i_n))$.</p>	<p>- “Os termos da sucessão são maiores ou menores que -2”?</p> <p>Sugerir que analisem as sucessões do exercício 1.</p> <p>- “Lembrem-se dos casos notáveis...”</p>

3) Considera a função f representada na figura seguinte:



Sabemos que $\lim (f(u_n)) = 2$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?

a) $u_n = \frac{1}{n}$

c) $u_n = 1 + \frac{2}{n}$

b) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

d) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$

Justifica a tua opção.

Opção c)

$$\lim \left(f \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) = 2$$

As imagens dos termos da sucessão $u_n = 1 + \frac{2}{n}$ pela função f , aproximam-se de 2 quando os termos da sucessão se aproximam de 1.

Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>A descontinuidade da função no ponto de abcissa 1 pode criar dificuldades de interpretação do gráfico e identificação das imagens.</p>	<p>Sugerir aos alunos que testem as diferentes opções de resposta apresentada e tirem conclusões.</p>

21 Discussão das questões 2 e 3 da tarefa.

20 minutos

Definir ponto aderente a um conjunto.

Conjunto de pontos que são limite de pelo menos uma sucessão de termos pertencentes ao conjunto dado.

Será $\lim (f(u_n)) = 2$ se verifica para todas as sucessões u_n que tendem para 1?

Introduzir a noção de limite lateral com a notação:

$$\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n) = 2, \text{ com } x_n > 1$$

E em seguida:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Anexo 2: Plano de Aula 2

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 14/03/2019 Hora: 11h45m

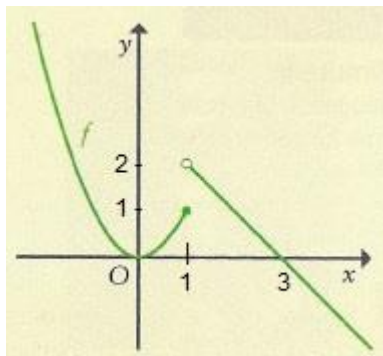
Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Limite de uma função real de variável real. Limites laterais.	
Sumário	
Limites laterais. Definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine. Resolução de uma tarefa exploratória sobre limites de sucessões.	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Identificar os limites laterais de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar o limite de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar os casos de não existência de limite.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">● Raciocínio matemático● Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão da tarefa.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none">● Limites de sucessões● Noção de função	

Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none">• Planificação da aula• Quadro branco• Marcador	<ul style="list-style-type: none">• Enunciado da tarefa 2• Calculadora Gráfica• Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
<ol style="list-style-type: none">1. Entrada dos alunos e informações.2. Discussão de um exercício da aula anterior3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 1 e 2 da tarefa 24. Discussão das questões 1 e 2 da tarefa 2.5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 3 da tarefa 2.	<p>5 minutos</p> <p>20 minutos</p> <p>25 minutos</p> <p>25 minutos</p> <p>15 minutos</p>
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>O professor iniciará a aula com a discussão de um exercício resolvido na aula anterior. Em seguida, será proposta uma nova tarefa, composta por um conjunto de exercícios exploratórios que conduzirá os alunos ao conceito de limite de uma função real de variável real recorrendo ao limite de sucessões pela definição de limite de funções segundo Heine.</p> <p>A tarefa será realizada a pares existindo dois momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Discussão do exercício da aula anterior	20 minutos

Considera a função f representada na figura seguinte:



Sabemos que $\lim (f(u_n)) = 2$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?

c) $u_n = \frac{1}{n}$

c) $u_n = 1 + \frac{2}{n}$

d) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

d) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$

Justifica a tua opção.

Opção c)

$$\lim \left(f \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right) = 2$$

As imagens dos termos da sucessão $u_n = 1 + \frac{2}{n}$ pela função f , aproximam-se de 2 quando os termos da sucessão se aproximam de 1.

Discussão:

Começar a discussão com a resposta da Ana que tinha indicado a opção a).

Pedir a um aluno que justifique porque esta opção não é correta e que marque no gráfico o comportamento da sucessão objeto e da sucessão imagem.

Qual é então a resposta correta? Pedir justificação.

Como se comporta a função à esquerda do 1? Retomar a ideia que a função é “mal comportada” no ponto 1.

Destacar o facto de ao nos aproximarmos do ponto 1 por “caminhos diferentes” as imagens têm limites diferentes.

Introduzir a noção de limite lateral com a notação:

$$\lim_{x_n \rightarrow 1} f(x_n) = 2, \text{ com } x_n > 1$$

E em seguida:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

Se eu quiser estudar a sucessão à esquerda do ponto 0 que sucessão podia usar?

Qual o domínio da função? Como se comporta a função quando os objetos tendem para $\pm\infty$.

3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 e 2 da tarefa 2.

25 minutos

1) Considera a função $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Para a sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, calcula $\lim(g(w_n))$.

Resolução:

$$w_n = 2 + \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ par}$$

$$w_n = 2 - \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ impar}$$

$$g(w_n) = 1 + \frac{1}{n} \text{ para } w_n > 2$$

$$g(w_n) = 4 - \frac{1}{n} \text{ para } w_n \leq 2$$

$$\lim(g(w_n)) = 1 \text{ se } w_n > 2$$

$$\lim(g(w_n)) = 4 \text{ se } w_n \leq 2$$

Não existe limite da sucessão $g(w_n)$

Dificuldades Previstas

Papel do Professor

Os alunos podem não se recordar como utilizar funções definidas por ramos.

Os alunos podem ter dificuldade em perceber que os termos de ordem par se devem substituir no ramo

- “Que valores de x posso usar em cada ramo?”

<p>inferior e que os termos de ordem ímpar se devem usar no ramo superior.</p>	<p>- “Lista os primeiros termos da sucessão. Como posso calcular a imagem de cada um pela função f?”</p>
<p>2) Considera a função $f(x) = x - 1$. Para a sucessão (w_n) do exercício anterior, calcula $\lim(f(w_n))$</p> <p>$w_n = 2 + \frac{1}{n}$ se n par $w_n = 2 - \frac{1}{n}$ se n ímpar</p> <p>$f(w_n) = 1 + \frac{1}{n}$ para $w_n > 2$ $f(w_n) = 1 - \frac{1}{n}$ para $w_n \leq 2$</p> <p>$\lim(f(w_n)) = 1$</p>	
Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>A substituição direta do termo geral da sucessão na função f poderá causar alguma dificuldade em determinar $\lim(f(w_n))$.</p> <p>Não prevejo dificuldades na resolução deste exercício</p>	<p>- Qual o limite de $\frac{(-1)^n}{n}$?</p>
<p>4. Discussão da questão 1 e 2 da tarefa 2.</p>	<p>25 minutos</p>
<p>Resolver as duas questões em paralelo no quadro para poder confrontar um caso em que existe limite com outro que não existe. Representar graficamente as duas funções.</p>	

Introduzir a definição de ponto aderente

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ quando a interseção de qualquer vizinhança de a com o conjunto A é não vazia.

O ponto 2 é aderente aos seguintes conjuntos?

$A =]2,5]$; $B = \{2,5\}$; $C = [3,5] \cup \{2\}$; $D =]-3,1[$

Introduzir a definição de limite segundo Heine

(Dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$ aderente ao domínio de f , diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de $f(x)$ quando x tende para a quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos do domínio de f , convergente para a , a sucessão $f(x_n)$ tende para b . Se o limite existir é único e representa-se por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$)

Apresentar a definição desta forma:

Se para todas as sucessões $(x_n) \rightarrow a$ respetiva sucessão $f(x_n) \rightarrow b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Com o auxílio do gráfico da função f explorar os casos:

- a) em que o ponto 2 não pertence ao domínio mas os limites laterais são iguais

$$2 \notin D_f \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{O LIMITE EXISTE}$$

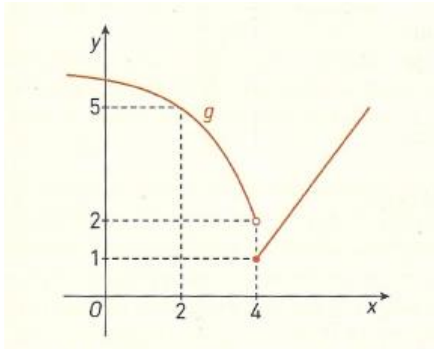
- b) em que o ponto 2 pertence ao domínio mas a sua imagem é diferente dos limites laterais

$$2 \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{O LIMITE NÃO EXISTE}$$

5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 3 da tarefa.

15 minutos

3) Seja a função g representada na figura seguinte:



Considera as sucessões $u_n = 4 + \frac{1}{n}$, $v_n = 4 - \frac{1}{n^2}$ e

$$i_n = n^2 .$$

a) Calcula:

$$\lim(g(u_n)) = 1$$

$$\lim(g(v_n)) = 2$$

$$\lim(g(w_n)) = 5$$

$$\lim(g(i_n)) = +\infty$$

b) O que podes concluir sobre os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) \text{ não existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Anexo 3: Plano de Aula 3

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 15/03/2019 Hora: 15h10m

Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Limite de uma função real de variável real. Limites laterais. Limites infinitos e limites no infinito.	
Sumário	
Limites infinitos e limites no infinito. Resolução de uma tarefa exploratória sobre limites de sucessões.	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Identificar os limites laterais de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar o limite de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar os casos de não existência de limite.○ Identificar limites infinitos e no infinito.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">● Raciocínio matemático● Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão da tarefa.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none">● Limites de sucessões● Noção de função	

Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none"> • Planificação da aula • Quadro branco • Marcador 	<ul style="list-style-type: none"> • Enunciados da tarefa 2 e tarefa 3 • Calculadora Gráfica • Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Entrada dos alunos e informações. 2. Sistematização da definição de limite de uma função segundo Heine. 3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 3 da tarefa 2 4. Discussão da questão 3 da tarefa 2. 5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 da tarefa 3. 6. Discussão da questão 1 da tarefa 3. 	<p>5 minutos</p> <p>20 minutos</p> <p>15 minutos</p> <p>15 minutos</p> <p>15 minutos</p> <p>20 minutos</p>
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>O professor iniciará a aula com uma sistematização da definição de limite e uma função real de variável real através da definição segundo Heine. Em seguida, será concluída a resolução da tarefa 2 apresentada na aula anterior. Introduzir-se-á ainda uma nova tarefa onde se pretende trabalhar o conceito de limite infinito e de limite no infinito.</p> <p>O trabalho proposto com as tarefas será realizado a pares existindo momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

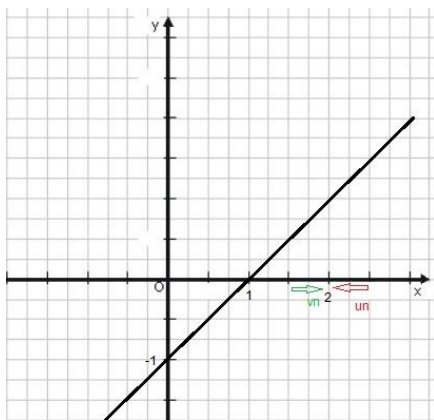
DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Sistematização da definição de limite de uma função segundo Heine.	20 minutos

Após os alunos terem trabalhado as questões 1 e 2 da tarefa 2 fez-se uma primeira aproximação à definição de limite de uma função segundo Heine que agora se procura sistematizar com detalhe aproveitando a equação do exercício 2.

$$f(x) = x - 1$$

$$D_f = \mathbb{R}$$



Famílias de sucessões com termos pertencentes a D_f que tendam para 2:

$$u_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(u_n)) = 1$$

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(v_n)) = 1$$

$$w_n = 2$$

$$\lim(f(w_n)) = 1$$

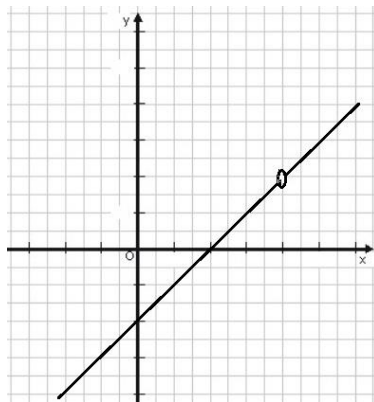
Se, para todas as sucessões de elementos do domínio de f que tendem para 2, as sucessão imagem tendem para 1 então existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

Se para todas as sucessões $(x_n) \rightarrow a$ respetiva sucessão $f(x_n) \rightarrow b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 = f(2)$$

$$f_1(x) = x - 1$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



Famílias de sucessões com termos pertencentes a D_f que tendam para 2

$$u_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(u_n)) = 1$$

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}$$

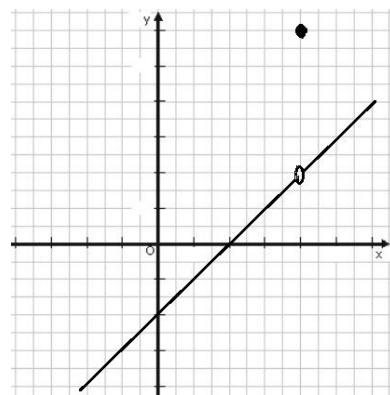
$$\lim(f(v_n)) = 1$$

Se, para todas as sucessões de elementos do domínio de f que tendem para 2, as sucessão imagem tendem para 1 então existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

$$2 \notin D_f \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{O LIMITE EXISTE}$$

$$f_2(x) = x - 1$$

$$D_{f_2} = \mathbb{R}$$



Famílias de sucessões com termos pertencentes a D_f que tendam para 2:

$$u_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(u_n)) = 1$$

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(v_n)) = 1$$

$$w_n = 2$$

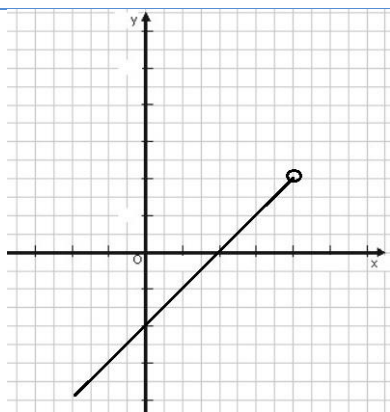
$$\lim(f(w_n)) = 3$$

Logo, não existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

$$2 \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{O LIMITE NÃO EXISTE}$$

$$f_3(x) = x - 1$$

$$D_{f_3} =] - \infty, 2[$$



Neste caso só esta família de sucessões tende para 2

$$u_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim(f(u_n)) = 1$$

Logo, existe o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

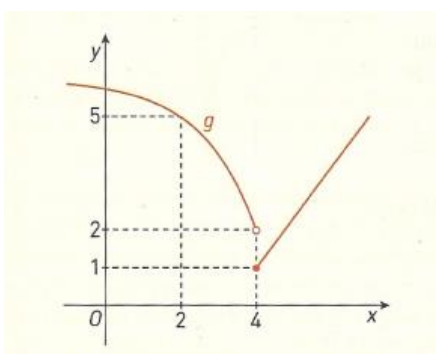
Qual o limite de $f(x)$ quando x tende para 3?

Como 3 não é ponto aderente ao domínio não posso calcular o limite quando x tende para 3.

3. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 3 da tarefa 2.

15 minutos

4) Seja a função g representada na figura seguinte:



Considera as sucessões $u_n = 4 + \frac{1}{n}$, $v_n = 4 - \frac{1}{n^2}$ e

$$i_n = n^2.$$

c) Calcula:

$$\lim(g(u_n)) = 1$$

$$\lim(g(v_n)) = 2$$

$$\lim(g(w_n)) = 5$$

$$\lim(g(i_n)) = +\infty$$

d) O que podes concluir sobre os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
Dificuldades Previstas	Papel do Professor
Não prevejo dificuldades na resolução deste exercício	
4. Discussão da questão 3 da tarefa 2.	25 minutos
Destacar que: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$	
5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 da tarefa 3.	16 minutos
1) A função g encontra-se representada graficamente no referencial da figura seguinte:	
a) Indica o termo geral de uma sucessão (v_n) tal que $\lim g(v_n) = 0$ $v_n = n^2$ ou $v_n = -n^2$	
b) Seja (w_n) uma sucessão tal que $w_n = a + \frac{b}{n}$. Indica a(s) opção(ões) correta(s) de modo a que $\lim(g(w_n)) = +\infty$.	

$$b_1) a = -1 e b = 1$$

$$b_2) a = -1 e b = -2$$

$$b_3) a = 1 e b = -1$$

$$b_4) a = 2 e b = -1$$

$$b_5) a = 2 e b = 1$$

$$b_6) a = 2 e b = 0$$

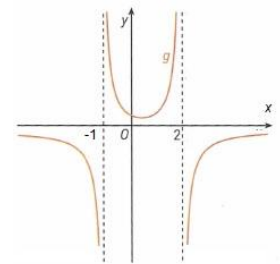
Opções $b_1)$ e $b_4)$

Indica, justificando:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \text{ não existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$



Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>A alínea b) pode gerar dificuldades de interpretação das constantes a e b e em visualizar a sucessão:</p> $w_n = a + \frac{b}{n}$	<p>“- Atribuí valores a a e b e verifica que sucessão obténs.”</p> <p>“ Qual o comportamento dos termos desta sucessão?”</p>

Anexo 4: Plano de Aula 4

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 19/03/2019 Hora: 17h00m

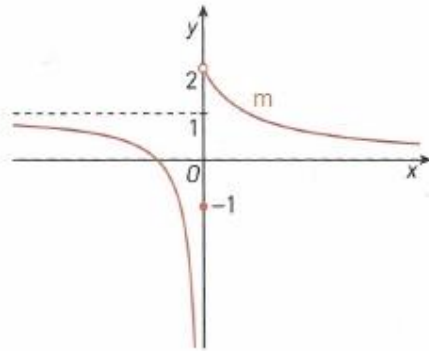
Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Limite de uma função real de variável real. Limites laterais. Limites infinitos e limites no infinito.	
Sumário	
Limites infinitos e limites no infinito. Resolução de uma tarefa sobre limites de funções.	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Identificar os limites laterais de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar o limite de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar os casos de não existência de limite.○ Identificar limites infinitos e no infinito.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">● Raciocínio matemático● Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão da tarefa.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none">● Limites de sucessões● Noção de função	

Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none"> • Planificação da aula • Quadro branco • Marcador 	<ul style="list-style-type: none"> • Enunciados das tarefas 3 e 4 • Calculadora Gráfica • Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Entrada dos alunos e informações. 2. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 e 2 da tarefa 4. 3. Discussão das questões 1 e 2 da tarefa 4. 4. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 3 e 4 da tarefa 4. 5. Discussão das questões 3 e 4 da tarefa 4. 6. Resolução/Discussão das questões 1 e 2 da tarefa 3. 	<p style="text-align: right;">5 minutos</p> <p style="text-align: right;">15 minutos</p> <p style="text-align: right;">20 minutos</p> <p style="text-align: right;">15 minutos</p> <p style="text-align: right;">20 minutos</p> <p style="text-align: right;">15 minutos</p>
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>A aula inicia-se com a resolução e discussão de uma nova tarefa que tem como objetivo final introduzir de forma mais “suave” o conceito de limites laterais, limites infinitos e limites no infinito. Pretende-se, também, tornar familiar aos alunos a linguagem de limites de funções sem o recurso explícito às sucessões de objetos e imagens.</p> <p>O trabalho autónomo proposto com as tarefas será realizado a pares existindo momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 e 2 da tarefa 4.	15 minutos

2) A função m , de domínio \mathbb{R} , está representada graficamente na figura seguinte:



c) Determina $\lim(m(u_n))$ sabendo que:

$$a_1) u_n = \frac{1}{n}$$

$$a_2) u_n = -\frac{1}{n^2}$$

$$a_3) u_n = 2^n$$

$$a_4) u_n = -n^2$$

d) Indica, justificando, o valor lógico das seguintes igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = 1$$

$$a_1) \lim(m(u_n)) = 2$$

$$a_2) \lim(m(u_n)) = -\infty$$

$$a_3) \lim(m(u_n)) = 0$$

$$a_4) \lim(m(u_n)) = 1$$

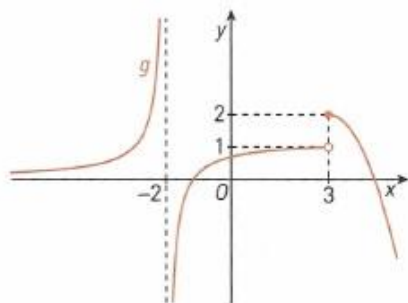
$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = 2 \quad \text{F}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = -\infty \quad \text{V}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = +\infty \quad \text{F}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = 1 \quad \text{V}$$

- 3) Seja g a função representada no referencial da figura. Sabemos que $\lim(g(u_n)) = 2$ e $\lim(g(v_n)) = +\infty$. Os termos gerais de (u_n) e (v_n) podem ser:



- a) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ $v_n = n^2$
 b) $u_n = 3 - \frac{2}{n}$ $v_n = -2 + \frac{1}{n}$
 c) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ $v_n = -2 - \frac{1}{n}$
 d) $u_n = 3$ $v_n = -n^2$

Alínea C

Dificuldades Previstas	Papel do Professor
Os alunos podem ter dificuldade em representar os termos da sucessão (objetos) e as suas imagens pela função m .	Incentivar os alunos a representar o no gráfico o par objeto imagem e pedir para que indique para onde tende cada uma das sucessões..

3. Discussão das questões 1 e 2 da tarefa 4.

20 minutos

Convidar alguns alunos a representarem no quadro as sucessões objeto e imagem para verificarmos qual o limite de cada uma das sucessões.

Calcular os limites das sucessões imagem para cada uma das opções proposta para se trabalhar os limites infinitos e no infinito.

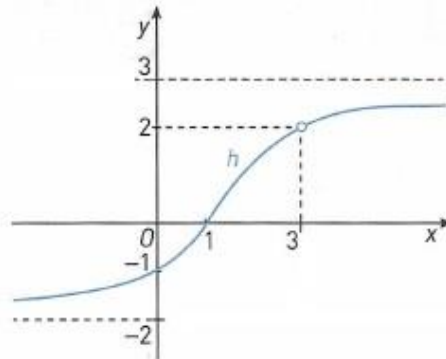
Na função g estudar os limites laterais para $x=3$.

Perguntar se existe algum ponto do domínio em que o limite da função seja zero.

4. Trabalho autónomo dos alunos: resolução das questões 3 e 4 da tarefa 4.

15 minutos

4) Considera a função h representada na figura abaixo:



Indica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2$$

5) Seja $k \in \mathbb{R}$, e t a função $t(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x < -1 \\ k & \text{se } x = -1 \\ 1 - x & \text{se } x > -1 \end{cases}$

a) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} t(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) = 2$$

b) Indica um valor de k tal que exista $\lim_{x \rightarrow -1} t(x)$, justifica.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) = t(-1) = 2 = k$$

Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>Os alunos poderão ter dificuldade em se apropriar da simbologia usada e deixar as sucessões.</p> <p>Verificar se há dificuldades em perceber que as retas $y=3$ e $y=-2$ são assintotas horizontais.</p>	<p>“Quais os caminhos para chegar ao ponto $x=1$?”</p> <p>“Quando percorremos esses caminhos para onde estão a ir as imagens?”</p>

Cálculo de limites laterais em diferentes pontos.

$x=3$ pertence ao domínio? É ponto aderente?

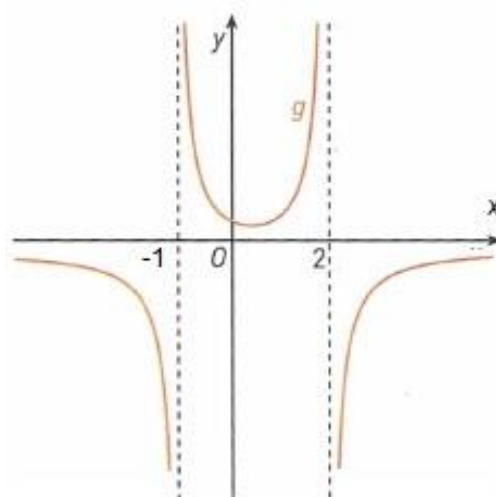
Voltar a explicitar que se um ponto a pertence ao domínio de h

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = h(a)$$

5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 1 da tarefa 3.

17 minutos

6) A função g encontra-se representada graficamente no referencial da figura seguinte:



e) Indica o termo geral de uma sucessão (v_n) tal que $\lim g(v_n) = 0$

$$v_n = n^2 \text{ ou } v_n = -n^2$$

f) Seja (w_n) uma sucessão tal que $w_n = a + \frac{b}{n}$. Indica a(s) opção(ões) correta(s) de modo a que $\lim(g(w_n)) = +\infty$.

$$b_1) a = -1 e b = 1$$

$$b_2) a = -1 e b = -2$$

$$b_3) a = 1 e b = -1$$

$$b_4) a = 2 e b = -1$$

$$b_5) a = 2 e b = 1$$

$$b_6) a = 2 e b = 0$$

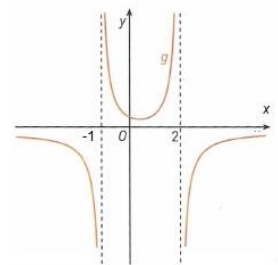
Opções $b_1)$ e $b_4)$

Indica, justificando:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \text{ não existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$



Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>A alínea b) pode gerar dificuldades de interpretação das constantes a e b e em visualizar a sucessão:</p> $w_n = a + \frac{b}{n}$	<p>“- Atribui valores a a e b e verifica que sucessão obténs.”</p> <p>“ Qual o comportamento dos termos desta sucessão?”</p>

Anexo 5: Plano de Aula 5

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 21/03/2019 Hora: 11h45m

Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Limite de uma função real de variável real. Limites laterais. Limites infinitos e limites no infinito. Indeterminações	
Sumário	
Resolução de uma tarefa sobre limites de funções. Indeterminações	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Identificar o limite de uma função num ponto aderente a seu domínio.○ Identificar os casos de não existência de limite.○ Identificar limites infinitos e no infinito.○ Identificar situações de indeterminações. Levantamento algébrico de indeterminações.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">● Raciocínio matemático● Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão da tarefa.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	

- Limites de sucessões
- Noção de função

Recursos do Professor

- Planificação da aula
- Quadro branco
- Marcador

Recursos dos Alunos

- Enunciado das tarefas 3 e 4
- Calculadora Gráfica
- Material de escrita

MOMENTOS DA AULA

1. Entrada dos alunos e informações.	5 minutos
2. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 4 da tarefa 4.	10 minutos
3. Discussão da questão 4 da tarefa 4.	15 minutos
4. Resolução/Discussão das questões 1 da tarefa 3.	15 minutos
5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 2 da tarefa 3.	15 minutos
6. Discussão da questão 2 da tarefa 3.	15 minutos
7. Introdução breve da operatória de limites de funções e apresentação dos casos de possível indeterminação.	15 minutos

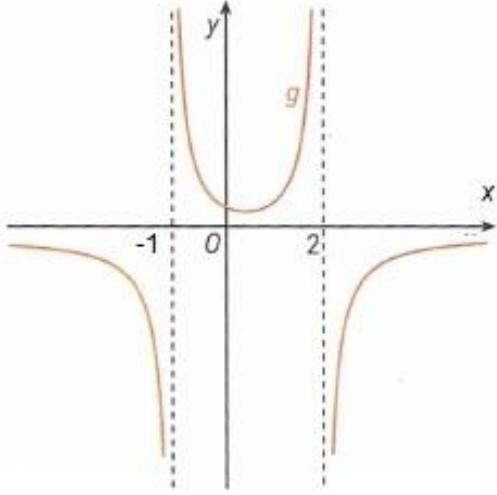
METODOLOGIA DE TRABALHO

A aula vai centrar-se na resolução e discussão de tarefas que trabalham os conceitos de limite de uma função num ponto aderente ao seu domínio, limites infinitos e limites no infinito.

Pretende-se, também, fazer uma breve introdução às propriedades operatórias dos limites e apresentar os casos de limites indeterminados.

O trabalho autónomo proposto com as tarefas será realizado a pares existindo momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 4 da tarefa 4	10 minutos
<p>4) Seja $k \in \mathbb{R}$, e t a função $t(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x < -1 \\ k & \text{se } x = -1 \\ 1 - x & \text{se } x > -1 \end{cases}$</p> <p>c) Calcula</p> $\lim_{x \rightarrow -1^+} t(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) = 2$ <p>d) Indica um valor de k tal que exista $\lim_{x \rightarrow -1} t(x)$, justifica.</p> $\lim_{x \rightarrow -1^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) = t(-1) = 2 = k$	
Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>Os alunos podem ter dificuldade em calcular os limites laterais de forma analítica pelo facto dos ramos não estarem definidos para $x=-1$.</p> <p>Os alunos podem não se recordar que -1 pertence ao domínio da função t, para existir limite nesse ponto não basta que os limites laterais iguais.</p>	<p>Incentivar os alunos a visualizar o gráfico da função na calculadora gráfica e determinarem para onde tendem as imagens quando os objetos tendem para -1.</p> <p>“-Qual o domínio da função?”</p> <p>“- Qual a imagem de -1?”</p>

3. Discussão da questão 4 da tarefa 4.	15 minutos
<p>Na discussão desta questão é importante sistematizar:</p> $a \notin D_f \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $a \in D_f \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	
4. Resolução/Discussão das questões 1 da tarefa 3	15 minutos
<p>1) A função g encontra-se representada graficamente no referencial da figura seguinte:</p>  <p>g) Indica o termo geral de uma sucessão (v_n) tal que $\lim g(v_n) = 0$</p> <p>$v_n = n^2$ ou $v_n = -n^2$</p> <p>h) Seja (w_n) uma sucessão tal que $w_n = a + \frac{b}{n}$. Indica a(s) opção(ões) correta(s) de modo a que $\lim(g(w_n)) = +\infty$.</p> <p> $b_1) a = -1 e b = 1$ $b_2) a = -1 e b = -2$ $b_3) a = 1 e b = -1$ $b_4) a = 2 e b = -1$ $b_5) a = 2 e b = 1$ $b_6) a = 2 e b = 0$ </p> <p>Opções $b_1)$ e $b_4)$</p>	

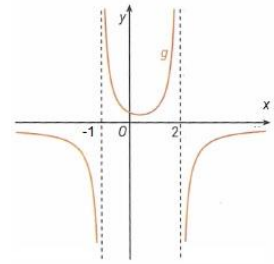
Verificar com os alunos qual o limite de $g(w_n)$ em cada caso.

Indica, justificando:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \text{ não existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$



5. Trabalho autónomo dos alunos: resolução da questão 2 da tarefa 3.

18 minutos

2) Considera a função $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

(Recorrendo à definição de limite segundo Heine) Determina:

Nesta fase os alunos já deverão calcular os limites abaixo sem recorrer à definição de limite segundo Heine:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{-2^++2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{-2^-+2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1$ INDETERMINAÇÃO

Dificuldades Previstas	Papel do Professor
<p>Os alunos poderão ter dificuldade em determinar algebricamente os limites laterais no ponto $x=-2$</p> <p>Os alunos poderão ter dificuldade em identificar a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.</p>	<p>-“Representa graficamente a função.</p> <p>- “ Observa o seu comportamento em torno de $x=-2$.”</p> <p>-“ Estuda o sinal da reta $y=x-2$”</p>
<p>6. Discussão da questão 2 da tarefa 3</p>	
<p>15 minutos</p> <p>Dar o exemplo da função $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$ para calcular</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$</p> <p>e/ou usar:</p> <p>$h(x) = \frac{x}{-x^2 + 4}$</p>	

7. Introdução breve da operatória de limites de funções e apresentação dos casos de possível indeterminação

15 minutos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Notas:

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + b = +\infty, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + b = -\infty, \quad b \in \mathbb{R}$$

$\infty - \infty$ é uma indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Notas:

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \quad -\infty \times (-\infty) = +\infty \quad +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \times b = +\infty, \quad b > 0 \quad -\infty \times b = -\infty, \quad b > 0$$

$$+\infty \times b = -\infty, \quad b < 0 \quad -\infty \times b = +\infty, \quad b < 0$$

$0 \times \infty$ é uma indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Notas:

$$\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty, \text{ se } b > 0$$

$$\frac{\pm\infty}{b} = \mp\infty, \text{ se } b < 0$$

$$\frac{b}{0^+} = +\infty \text{ e } \frac{b}{0^-} = -\infty, \text{ se } b > 0 \text{ ou } b = +\infty$$

$$\frac{b}{0^+} = -\infty \text{ e } \frac{b}{0^-} = +\infty, \text{ se } b < 0 \text{ ou } b = -\infty$$

$$\frac{b}{\pm\infty} = 0 \text{ se } b \in \mathbb{R}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ são indeterminações.

Anexo 6: Plano de Aula 6

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 28/03/2019 Hora: 11h45m

Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Indeterminações	
Sumário	
Cálculo de limites de funções. Levantamento de indeterminações	
Objetivos Específicos	
<ul style="list-style-type: none">○ Identificar situações de indeterminações. Levantamento algébrico de indeterminações.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">• Raciocínio matemático• Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão das tarefas propostas.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none">• Limites de funções polinomiais• Decomposição de polinómios em fatores irredutíveis• Casos notáveis	

Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none">• Planificação da aula• Quadro branco• Marcador	<ul style="list-style-type: none">• Enunciado da tarefa 5• Calculadora Gráfica• Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
1. Entrada dos alunos e informações. 2. Discussão da questão 2 da tarefa 3. 3. Introdução breve da operatória de limites de funções e apresentação dos casos de possível indeterminação. 4. Resolução de exercícios propostos sobre cálculo de limites com levantamento de indeterminações (tarefa 5).	5 minutos 10 minutos 15 minutos 60 minutos
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>A aula vai centrar-se na resolução e discussão de exercícios de cálculo de limites que trabalham as diferentes técnicas de levantamento de indeterminações.</p> <p>Pretende-se, também, fazer uma breve introdução às propriedades operatórias dos limites e apresentar os casos de limites indeterminados.</p> <p>O trabalho proposto de resolução de exercícios será realizado a pares existindo momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

DESENVOLVIMENTO DA AULA	
1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Discussão da questão 2 da tarefa 3	10 minutos
<p>2) Considera a função $f(x) = \frac{x}{x+2}$.</p> <p>Calcula:</p> <p>e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{3}$</p> <p>Aplicação direta da definição: $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$</p> <p>f) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-2}{-2^++2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$</p> <p>g) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-2}{-2^-+2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$</p> <p>Mostrar com detalhe a diferença que existe no cálculo do limite pelo facto de x se aproximar de 2 por valores à direita e por valores à esquerda de 2.</p> <p>h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1$ INDETERMINAÇÃO</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2}$ Indeterminação $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = 1$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$</p>	
3. Introdução breve da operatória de limites de funções e apresentação dos casos de possível indeterminação	15 minutos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Notas:

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + b = +\infty, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$-\infty + b = -\infty, \quad b \in \mathbb{R}$$

$\infty - \infty$ é uma indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Notas:

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \quad -\infty \times (-\infty) = +\infty \quad +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \times b = +\infty, \quad b > 0 \quad -\infty \times b = -\infty, \quad b > 0$$

$$+\infty \times b = -\infty, \quad b < 0 \quad -\infty \times b = +\infty, \quad b < 0$$

$0 \times \infty$ é uma indeterminação

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Notas:

$$\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty, \text{ se } b > 0 \quad \frac{\pm\infty}{b} = \mp\infty, \text{ se } b < 0$$

$$\frac{b}{0^+} = +\infty \text{ e } \frac{b}{0^-} = -\infty, \text{ se } b > 0 \text{ ou } b = +\infty$$

$$\frac{b}{0^+} = -\infty \text{ e } \frac{b}{0^-} = +\infty, \text{ se } b < 0 \text{ ou } b = -\infty$$

$$\frac{b}{\pm\infty} = 0 \text{ se } b \in \mathbb{R}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$ são indeterminações.

4. Resolução de exercícios propostos sobre cálculo de limites com levantamento de indeterminações.

60 minutos

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3x^4 + 1}{x^3 + 5x - 2}$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3x^4 + 1}{x^3 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4(1 - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{3x^4})}{x^3(1 + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4}{x^3} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3 + 5x - 2}$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Da mesma forma que no exercício anterior:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3(1 + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3})} = 0$$

Recordar aos alunos o seguinte teorema:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } b_0 \neq 0$$

Geralmente temos os seguintes casos possíveis:

- Se $n = m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \frac{a_0}{b_0}$.
- Se $n > m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = -\infty$ dependendo do sinal de $\frac{a_0}{b_0}$.
- Se $n < m$, então $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = 0$.

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 1}$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 2x + 3)}{(x+1)} = \frac{7}{2}$$

Chamar a atenção para o facto de sabermos um zero de cada polinómio e com isso podermos decompor os polinómios em fatores.

Divisão de polinómios

Regra de Ruffini

Caso notável: diferença de quadrados

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Destacar que, se não estivermos perante uma indeterminação, não é necessário nenhum procedimento para simplificar a fração.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0}$$

Para decidirmos sobre a natureza deste limite temos de estudar o comportamento da função na vizinhança de -2, isto é, calcular os limites laterais no ponto -2. Para isso vamos estudar o comportamento de $x^2 - 4$ em torno de -2.

$x^2 - 4$ é uma parábola com concavidade voltada para cima com zeros -2 e 2. Quando x tende para -2 por valores à esquerda a parábola aproxima-se de zero por valores positivos, logo:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Quando x tende para -2 por valores à direita a parábola aproxima-se de zero por valores negativos, logo:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

Como os limites laterais são diferentes,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \text{ não existe.}$$

Anexo 7: Plano de Aula 7

Escola Secundária Padre Alberto Neto

Data: 29/03/2019 Hora: 15h05m

Disciplina	Ano de Escolaridade
Matemática A	11º Ano
Tema	Duração
Limites segundo Heine de funções reais de variável real	90 minutos
Tópicos, Noções e Conceitos	
Cálculo de limites com levantamento de indeterminações.	
Sumário	
Cálculo de limites de funções. Levantamento de indeterminações. Realização de mini-teste.	
Objetivos Específicos	
○ Identificar situações de indeterminações. Levantamento algébrico de indeterminações.	
Capacidades Transversais	
<ul style="list-style-type: none">• Raciocínio matemático• Estabelecimento de conexões	
Avaliação	
Observação do trabalho autónomo e da participação dos alunos na discussão das tarefas propostas. Realização de mini-teste para avaliação sumativa.	
Conhecimentos Prévios dos Alunos	
<ul style="list-style-type: none">• Limites de funções polinomiais• Decomposição de polinómios em fatores irredutíveis• Casos notáveis	

Recursos do Professor	Recursos dos Alunos
<ul style="list-style-type: none">• Planificação da aula• Quadro branco• Marcador	<ul style="list-style-type: none">• Enunciado da tarefa 5• Enunciado do mimi-teste• Calculadora Gráfica• Material de escrita
MOMENTOS DA AULA	
1. Entrada dos alunos e informações. 2. Revisão sobre decomposição de polinómios em fatores e utilização de casos notáveis. 3. Resolução de exercícios propostos sobre cálculo de limites com levantamento de indeterminações (tarefa 5). 4. Realização de mini-teste	5 minutos 20 minutos 45 minutos 20 minutos
METODOLOGIA DE TRABALHO	
<p>A aula vai centrar-se na resolução e discussão de exercícios de cálculo de limites que trabalham as diferentes técnicas de levantamento de indeterminações.</p> <p>Dadas as dificuldades apresentadas pelos alunos na aula anterior optei por fazer uma revisão exaustiva dos casos notáveis da multiplicação de polinómios, a regra de Ruffini e as técnicas de racionalização de denominadores.</p> <p>Será ainda proposto a realização de um mini-teste para avaliação sumativa.</p> <p>O trabalho proposto de resolução de exercícios será realizado a pares existindo momentos de trabalho autónomo seguidos de discussão coletiva dos resultados obtidos pelos grupos de trabalho.</p>	

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. Entrada dos alunos.	5 minutos
2. Revisão sobre decomposição de polinómios em fatores e utilização de casos notáveis.	20 minutos

Recordar a decomposição de polinómios em fatores:

Se a é um zero do polinómio então este é divisível por $(x - a)$.

Regra de Ruffini

Casos notáveis dando destaque sobretudo à diferença de quadrados. Fazer notar que

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

Trabalhar os seguintes exemplos de cálculo de limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{-x^2 + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{-x^2 + 4} = \frac{-2}{0}$$

Para decidirmos sobre a natureza deste limite temos de estudar o comportamento da função na vizinhança de -2 , isto é, calcular os limites laterais no ponto -2 . Para isso vamos estudar o comportamento de $-x^2 + 4$ em torno de -2 .

$-x^2 + 4$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo com zeros -2 e 2 . Quando x tende para -2 por valores à esquerda a parábola aproxima-se de zero por valores negativos e quando x tende para -2 por valores à direita a parábola aproxima-se de zero por valores positivos, logo:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{-x^2 + 4} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{-x^2 + 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

O limite não existe.

<p>3. Resolução de exercícios propostos sobre cálculo de limites com levantamento de indeterminações (tarefa 5)</p>	<p>45 minutos</p>
<p>1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{ 2-x -1}$</p> <p>Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$</p> <p>Dividir a função módulo por ramos. Ter em consideração que $a = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$</p> $ 2-x = \begin{cases} 2-x & \text{se } 2-x \geq 0 \\ -2+x & \text{se } 2-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2-x = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \leq 2 \\ -2+x & \text{se } x > 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{ 2-x -1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{-2+x-1} = 1$ <p>2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ 3-x^2 -3x^2}{2x^2}$</p> <p>Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.</p> $ 3-x^2 = \begin{cases} 3-x^2 & \text{se } 3-x^2 \geq 0 \\ -3+x^2 & \text{se } 3-x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3-x^2 = \begin{cases} 3-x^2 & \text{se } -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ -3+x^2 & \text{se } x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \end{cases}$ <p>Logo, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ 3-x^2 -3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+x^2-3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3-2x^2}{2x^2} = -1$</p>	

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x)$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Vamos “eliminar” a raiz quadrada usando a diferença de quadrados, multiplicando e dividindo a expressão por $\sqrt{x^2 + 2} - x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{(\sqrt{x^2 + 2} - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2} - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 2} - x)} = \frac{2}{+\infty - (-\infty)} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Vamos racionalizar o denominador usando a diferença de quadrados, multiplicando e dividindo ambos os membros da fração por $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1})^2 - \sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{1} = +\infty \end{aligned}$$

4. Realização do mini-teste.

20 minutos

1. Considera a função f , real de variável real, representada graficamente na figura. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim (f(u_n)) = +\infty$. Qual das seguintes expressões pode ser o termo geral de (u_n) ?

Assinalem a opção correta, indicando como pensaram.

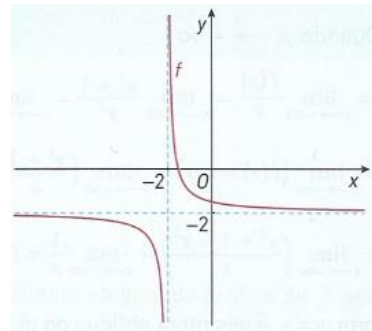
(7/20)

[] $-\frac{2n+1}{n}$

[] $-\frac{2n-1}{n}$

[] $\frac{1}{2} + n$

[] $\frac{2}{n-2}$



2. Seja g a função definida por $g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 2x & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$.

a) Calculem, justificando:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) =$

(3/20)

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) =$

(5/20)

b) Existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$? Justifiquem.

(5/20)

Anexo 8: Autorização Encarregados Educação



Estudar o uso de tarefas desafiantes e de diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

A turma do seu educando foi selecionada para participar no *EDUCATE*, um projeto de investigação europeu do ERASMUS+ conduzido por uma equipa de investigadores de Portugal, Chipre, Grécia e Irlanda, que pretende estudar como o uso de tarefas matemáticas desafiantes no ensino da Matemática pode promover a aprendizagem de todos os alunos. Esta investigação é importante uma vez que, com base nos seus resultados, serão produzidos materiais para a formação de professores que podem ser usados por muitos professores e futuros professores em toda a União Europeia. *A participação do seu educando nesta investigação é voluntária e requer o seu consentimento.*

O que está envolvido na participação do meu educando nesta investigação?

O professor de Matemática do seu educando, Dr. Paulo Alvega, juntamente com os dois mestrandos do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que estão a realizar a sua prática de ensino supervisionada no Colégio (Fernando Mendes e Francisco Aidos) irão gravar em vídeo algumas aulas nas próximas semanas. Embora o foco da observação recaia sobre os professores em formação, o seu educando poderá também ser, ocasionalmente, captado na gravação dessas aulas.

Como é que os dados pessoais do meu educando serão salvaguardados?

A identidade pessoal do seu educando permanecerá totalmente confidencial. Alguns pequenos excertos de vídeo das aulas serão visionados num contexto restrito com os professores em formação e os formadores, com a intenção de apoiar a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino da Matemática.

A participação do meu educando nesta investigação é obrigatória?

A participação do seu educando nesta investigação é voluntária. *Para indicar se dá o seu consentimento à participação do seu educando, por favor, preencha o formulário de resposta, em anexo, e devolva-o ao professor de Matemática.* Note-se que os alunos que não desejem participar na investigação serão colocados fora do alcance da câmara quando as aulas de Matemática estiverem a ser gravadas.

Muito apreciaríamos a sua resposta positiva, uma vez que consideramos que este estudo pode contribuir para compreender como os professores podem ensinar Matemática de uma forma adequada a todos os alunos e promotora de uma aprendizagem de qualidade. Consequentemente, acreditamos que a concretização da investigação e as sugestões e os materiais curriculares daí decorrentes, poderão contribuir para a qualidade do ensino da Matemática no nosso país, assim como promover as aprendizagens de todos os alunos nesta disciplina. O seu educando também será informado e solicitado a aceitar em participar do estudo.

Como poderei saber mais acerca desta investigação?

Para mais informação sobre a participação do seu educando nesta investigação, por favor, contacte o coordenador nacional do projeto:

Prof. Dr. João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa

Tel.: 21 794 37 77 Email: jpponte@ie.ulisboa.pt

Para alguma reclamação sobre esta investigação ou se pretender em qualquer momento anular o presente consentimento, entre em contacto com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte (detalhes de contacto acima).

Nota importante

Este projeto, intitulado "Melhorar o ensino diferenciado e a ativação cognitiva em aulas de matemática através da formação de professores (EDUCATE)" foi financiado com o apoio da Comissão Europeia.



Estudar o uso de tarefas desafiantes e de diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Consentimento do(a) Encarregado(a) de Educação

Declaro que li e compreendi a descrição do projeto de investigação EDUCATE. Estou informado que a participação do meu educando é voluntária e autorizo a sua participação no projeto de investigação no ano letivo de 2018-2019. Tomei conhecimento que o nome do meu educando não irá aparecer em nenhuma publicação e que os dados registados em vídeo irão ser mantidos num arquivo seguro e serão usados apenas para propósitos da investigação e na formação de professores.

Finalmente, compreendo que, se tiver alguma questão sobre a investigação, poderei contactar o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Se em algum momento eu tiver quaisquer comentários sobre o projeto ou questões sobre os direitos do meu educando como participante no estudo, posso entrar em contato com a pessoa acima mencionada. Para além disso, compreendo que posso retirar o meu educando do estudo, em qualquer momento e sem qualquer consequência. Para tal, deverei entrar em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Por favor, colocar um "X" na caixa abaixo; depois devolver esta página e manter as duas primeiras páginas para seu próprio registo:

- Dou** o meu consentimento para o meu educando ser gravado em vídeo em algumas aulas de matemática e para o vídeo poder ser usado para investigação no âmbito do projeto EDUCATE.
- Não dou** o meu consentimento para o meu educando ser gravado no âmbito do projeto EDUCATE.

Nome do aluno: _____

Nome do Encarregado de Educação: _____

Assinatura do Encarregado de Educação: _____

Data: _____ Escola Secundária Pedro Alberto Neto, Queluz

Nome do Professor: _____

Anexo 9: Tarefa 1

espALBERTONETO Queluz

ID: _____

matemática

∴ Funções



onze

Francisco Aidos

1) Considera a função $f(x) = x + 2$ de domínio \mathbb{R} e as sucessões de termo geral $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n}$ e $w_n = -1 + \frac{1}{2n}$.

a) Indica os limites das sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n)

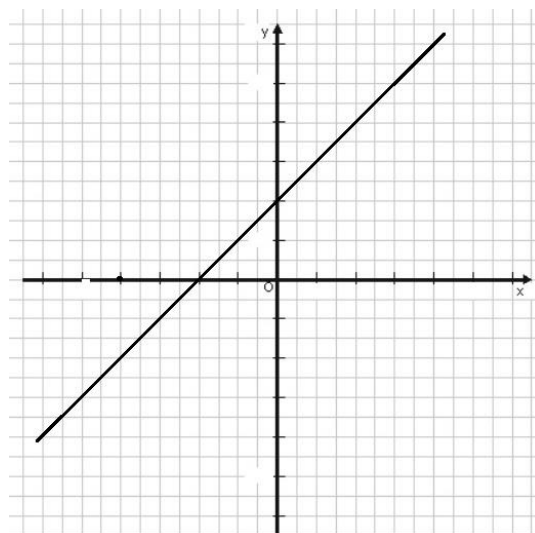
$$\lim(u_n) =$$

$$\lim(v_n) =$$

$$\lim(w_n) =$$

b) Calcula os limites das sucessões, $(f(u_n))$, $(f(v_n))$ e $(f(w_n))$.

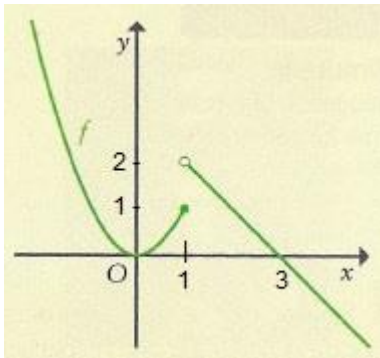
Sugestão: Começa por esboçar o gráfico de f e assinalar os pontos $(u_1, f(u_1))$, $(u_2, f(u_2))$, $(u_3, f(u_3))$, ...



- 2) Considera a função $g(x) = x^2 + 1$ em que $D_g =]-2, +\infty[$.
- a) Indica uma sucessão (i_n) de elementos do domínio de g convergente para -2 . Calcula $\lim (g(i_n))$

- b) Para as sucessões da questão 1, calcula $\lim (g(u_n))$, $\lim (g(v_n))$ e $\lim (g(w_n))$

- 3) Considera a função f representada na figura seguinte:



Sabemos que $\lim (f(u_n)) = 2$.

Qual dos seguintes pode ser o termo geral da sucessão (u_n) ?

a) $u_n = \frac{1}{n}$

c) $u_n = 1 + \frac{2}{n}$

b) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

d) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$

Justifica a tua opção.

Anexo 10: Tarefa 2

espALBERTONETO Queluz

ID : _____

matemática

∴ Funções 2



onze

Francisco Aidos

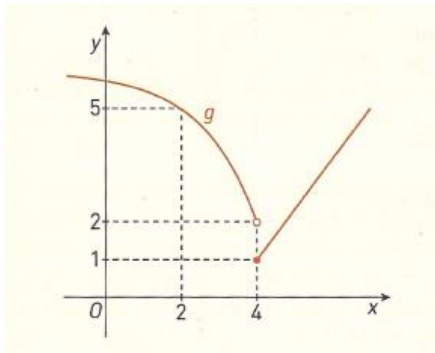
- 1) Considera a função $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Para a sucessão $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$, calcula $\lim(g(w_n))$.

- 2) Considera a função $f(x) = x - 1$.

Para a sucessão (w_n) do exercício anterior, calcula $\lim(f(w_n))$

3) Seja a função g representada na figura seguinte:



Considera as sucessões $u_n = 4 + \frac{1}{n}$, $v_n = 4 - \frac{1}{n^2}$, $i_n = n^2$ e $w_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Calcula:

$$\lim(g(u_n))$$

$$\lim(g(v_n))$$

$$\lim(g(w_n))$$

$$\lim(g(i_n))$$

b) O que podes concluir sobre os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Anexo 11: Tarefa 3

espALBERTONETO Queluz

ID : _____

matemática

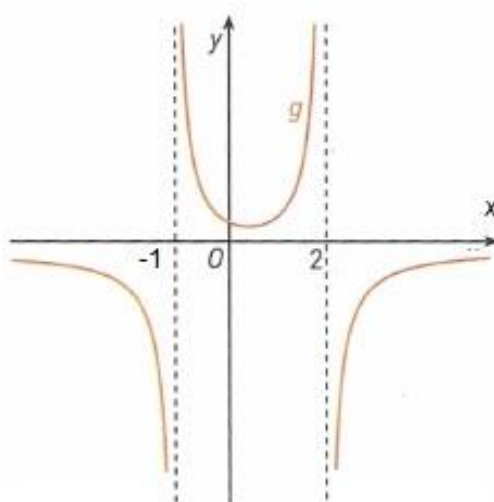
∴ Funções 3



onze

Francisco Aidos

1) A função g encontra-se representada graficamente no referencial da figura seguinte:



a) Indica o termo geral de uma sucessão (v_n) tal que $\lim g(v_n) = 0$

b) Seja (w_n) uma sucessão tal que $w_n = a + \frac{b}{n}$. Indica a(s) opção(ões) correta(s) de modo a que $\lim(g(w_n)) = +\infty$.

$b_1) a = -1 e b = 1$

$b_2) a = -1 e b = -2$

$b_3) a = 1 e b = -1$

$b_4) a = 2 e b = -1$

$b_5) a = 2 e b = 1$

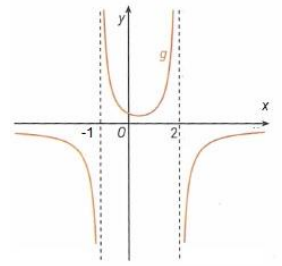
$b_6) a = 2 e b = 0$

c) Indica, justificando:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) =$$



2) Considera a função $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

Recorrendo à definição de limite segundo Heine, determina:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Anexo 12: Tarefa 4

espALBERTONETO Queluz

ID: _____

matemática

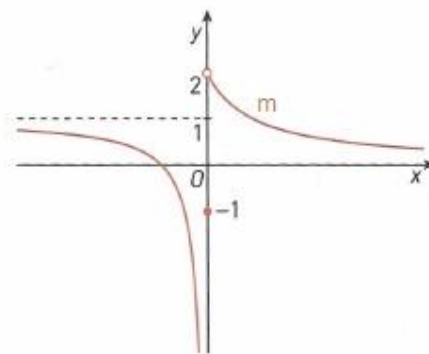
∴ Funções 3

FEQB
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

onze

Francisco Aidos

1) A função m , de domínio \mathbb{R} , está representada graficamente na figura seguinte:



a) Determina $\lim(m(u_n))$ sabendo que:

$$a_1) u_n = \frac{1}{n}$$

$$a_2) u_n = -\frac{1}{n^2}$$

$$a_3) u_n = 2^n$$

$$a_4) u_n = -n^2$$

b) Indica, justificando, o valor lógico das seguintes igualdades:

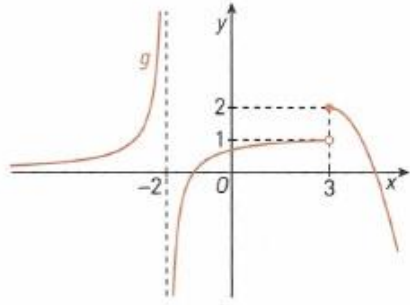
$$\lim_{x \rightarrow 0} m(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = +\infty$$

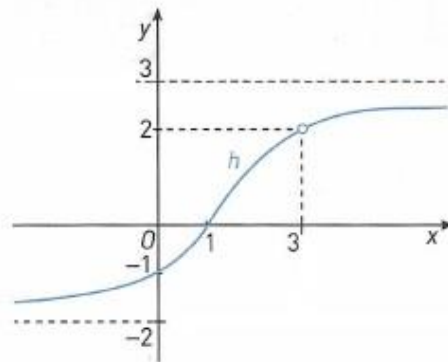
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = 1$$

- 2) Seja g a função representada no referencial da figura. Sabemos que $\lim(g(u_n)) = 1$ e $\lim(g(v_n)) = +\infty$. Os termos gerais de (u_n) e (v_n) podem ser:



- e) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ $v_n = n^2$
 f) $u_n = 3 - \frac{2}{n}$ $v_n = -2 + \frac{1}{n}$
 g) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ $v_n = -2 - \frac{1}{n}$
 h) $u_n = 3$ $v_n = -n^2$

- 3) Considera a função h representada na figura abaixo:



Indica:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) =$$

4) Seja $k \in \mathbb{R}$, e t a função $t(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x < -1 \\ k & \text{se } x = -1 \\ 1 - x & \text{se } x > -1 \end{cases}$

e) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} t(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} t(x) =$$

f) Indica um valor de k tal que exista $\lim_{x \rightarrow -1} t(x)$, justifica.

Anexo 13: Tarefa 5

espALBERTONETO Queluz

ID: _____

matemática

∴ Indeterminações



onze

Francisco Aidos

Calcula:

0) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3x^4+1}{x^3+5x-2}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3+5x-2}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{|2-x|-1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3-x^2|-3x^2}{2x^2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2} + x)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Anexo 14: Mini-Teste

espALBERTONETO Queluz

ID : _____

matemática

∴ MINITESTE

FEQE
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

onze

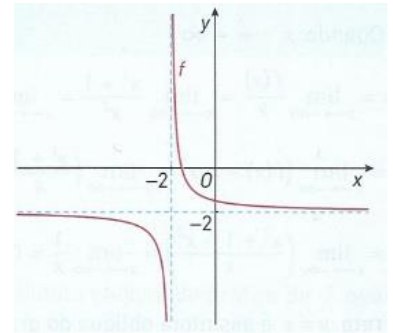
Francisco Aidos

3. Considera a função f , real de variável real, representada graficamente na figura. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim (f(u_n)) = +\infty$. Qual das seguintes expressões pode ser o termo geral de (u_n) ?

Assinalem a opção correta, indicando como pensaram.

(7/20)

- [] $-\frac{2n+1}{n}$
[] $-\frac{2n-1}{n}$
[] $\frac{1}{2} + n$
[] $\frac{2}{n-2}$



4. Seja g a função definida por $g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 2x & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$.

c) Calculem, justificando:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) =$

(3/20)

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) =$

(5/20)

d) Existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$? Justifiquem.

(5/20)