UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O PAPEL DO FEEDBACK NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS NUM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM COLABORATIVA APOIADA PELO COMPUTADOR

Uma experiência de ensino em geometria com recurso ao GeoGebra

Júlio César Martins Ribeiro Silva Paiva

Orientadores: Prof. Doutora Susana Paula Graça Carreira
Prof. Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor no ramo de Educação, especialidade de Didática da Matemática

2018

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O PAPEL DO FEEDBACK NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS NUM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM COLABORATIVA APOIADA PELO COMPUTADOR

Uma experiência de ensino em geometria com recurso ao GeoGebra

Júlio César Martins Ribeiro Silva Paiva

Orientadores: Prof. Doutora Susana Paula Graça Carreira
Prof. Doutora Nélia Maria Pontes Amado

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor no ramo de Educação, especialidade de Didática da Matemática

Júri:

Presidente: Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático e Presidente do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

Vogais:

- Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa;

- Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, Professor Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade do Minho;

- Doutora Nélia Maria Pontes Amado, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, orientadora;

- Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

2018

RESUMO

O objetivo que norteia esta investigação é perceber quando e como surge feedback durante a resolução de tarefas em que os alunos trabalham colaborativamente com recurso a um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra) e quais as implicações desse feedback na forma como os alunos constroem significados. Com o intuito de cumprir esse objetivo mais geral foram formulados os seguintes objetivos mais específicos: (i) Identificar como funcionam as diferentes fases do feedback emergente na resolução das tarefas; (ii) Descrever e compreender o papel do feedback visual emitido pelo computador na construção de significados quando os alunos utilizam o GeoGebra; (iii) Descrever e compreender o papel do feedback oral entre os alunos na construção de significados.

O quadro conceptual tem como eixos organizadores a aprendizagem colaborativa desenvolvida num ambiente de geometria dinâmica e o feedback, em particular o feedback oral e o feedback do computador.

Assumindo um posicionamento interpretativo, a investigação adota a metodologia qualitativa de estudo de caso. No estudo participaram dois alunos, inicialmente de 14 anos, seleccionados de forma a poder cumprir os objetivos referidos da investigação. A recolha de dados decorreu nas aulas de matemática de uma turma, durante dois anos letivos, correspondentes ao sétimo e oitavo ano de escolaridade, percorrendo os tópicos de Geometria com recurso ao GeoGebra. Essa recolha consistiu na observação direta de trinta e três sessões de aulas, na recolha documental dos ficheiros produzidos por um par de alunos, assim como dos registos áudio e vídeo do seu trabalho, que foram posteriormente transcritos.

Como principais conclusões deste estudo saliento: (i) As fases de feedback emergentes (acção, emissão e receção de feedback visual e emissão e receção de feedback oral) levam ao surgimento de ciclos de feedback e esses ciclos ocorrem como laços evolutivos enquanto os alunos se envolvem na resolução das tarefas propostas com o GeoGebra. (ii) Foi possível compreender a importância do papel do feedback visual na evolução da forma como os alunos constroem significados, nomeadamente através das mudanças na intencionalidade e nos níveis de abstracção com que os alunos constroem ou arrastam figuras no GeoGebra. (iii) Foi possível compreender a importância do papel do feedback oral na forma como os alunos constroem significados, nomeadamente através do surgimento de momentos de: (a) partilha de significados ligada a momentos de avaliação de construções e de regulação retroativa; (b) negociação de significados quando os alunos se questionam numa regulação interativa (3) compreensão de significados em que os alunos se informam mutuamente sobre as estratégias a adotar, num formato de regulação proativa. Também foi possível aferir a existência de uma deslocação da construção de significados mais ligados à funcionalidade da ferramenta para significados com um carácter acentuadamente matemático.

Palavras-chave: Aprendizagem Colaborativa; Estratégias de Construção e de Arrastamento; Feedback; Geometria Dinâmica; Construções de Significados.

ABSTRACT

The goal of this research is to understand when and how feedback emerges during task resolution in which students work collaboratively using a dynamic geometry environment (GeoGebra) and what are the implications of this feedback on how students construct meanings. In order to fulfil this more general purpose, the following specific objectives were formulated: (i) To identify how the different emerging feedback phases function in task resolution; (ii) To describe and understand the role of visual feedback delivered by the computer in the way that students construct meanings when using GeoGebra; (iii) To describe and understand the role of oral feedback among students in the way they construct meanings.

The conceptual framework has its organizing axes in collaborative learning developed in a dynamic geometry environment and feedback, in particular oral feedback and computer feedback.

Assuming an interpretative position, the research follows a qualitative case study methodology. The study involved two students, initially aged 14, selected as to address the stated objectives of the research. Data collection took place during two academic years, in mathematics classes, corresponding to the seventh and eighth grades of schooling, covering the topics of Geometry with the use of GeoGebra. This collection consisted of direct observation of thirty-three class sessions, the collection of documents produced by the two students, as well as audio and video recordings of their work, which were later transcribed.

The main conclusions of this study are: (i) The emergent feedback phases (action, emission and reception of visual feedback and the emission and reception of oral feedback) lead to feedback cycles, and these cycles emerge as evolving loops while students are involved in solving the tasks proposed with GeoGebra. (ii) It was possible to understand the importance of the role of visual feedback in the development of the way that students construct meanings, namely through the changes in intentionality and the levels of abstraction with which students construct or drag figures in GeoGebra. (iii) It was possible to understand the importance of the role of oral feedback in the way students construct meanings, namely through the emergence of moments of: (a) sharing of meanings linked to moments of construction evaluation and retroactive regulation; (b) negotiation of meanings when students question themselves in interactive regulation; (c) understanding of meanings in which students inform each other about strategies to adopt, in moments of proactive regulation. It was also possible to verify the existence of a displacement of the construction of meanings more related to the functionality of the tool towards the construction of meanings with a distinct mathematical nature.

Keywords: Collaborative Learning; Construction and Dragging Strategies; Feedback; Dynamic Geometry; Meanings Constructions.

Agradecimentos

Pela natureza, qualidade e paciência no trabalho de orientação agradeço às Professoras Susana Carreira e Nélia Amado.

Pelas horas roubadas à presença com a minha família agradeço a compreensão. Em particular agradeço a confiança e apoio transmitidos pelos meus pais. Aos meus filhos agradeço o espaço de trabalho concedido e neles deposito a esperança de que, de alguma forma, este trabalho lhes sirva de exemplo, para que um dia também eles consigam atingir os seus objetivos. Por último agradeço especialmente à minha mulher pelas intermináveis horas de trabalho doméstico apenas partilhado por mim à distância no computador.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, começo por discutir a motivação e pertinência que servem de base à investigação, para depois apresentar o seu âmbito. Seguidamente, são explanados o problema e os objetivos do estudo. A estrutura da tese é descrita no final deste capítulo.

1.1. Motivação e Pertinência

A motivação e a pertinência do presente estudo têm duas dimensões: a primeira, de caráter pessoal, tendo em conta o meu próprio interesse enquanto professor de matemática do ensino básico em conhecer mais acerca da utilização pedagógica da tecnologia no ensino da matemática. E uma segunda, como investigador em Educação Matemática, que procura contribuir com novo conhecimento para uma área que apesar de muito estudada, continua a colocar novas interrogações, para além das que permanecem em aberto, como seja a de saber como pode o uso da tecnologia beneficiar a aprendizagem da matemática.

Como professor de matemática anseio proporcionar aos meus alunos as melhores experiências de aprendizagem, o que me leva, com alguma frequência, a evitar aulas meramente expositivas e a criar condições para que nas aulas o aluno possa construir o seu conhecimento de forma independente. Uma possibilidade de proporcionar essa autonomia é integrar o computador na sala de aula, recorrendo a tarefas adequadas que sejam proveitosamente exploradas com o apoio de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) acessível aos alunos. Ambientes desta natureza, associados a tarefas poderosas, permitem otimizar as oportunidades para os alunos construírem significados para as estruturas matemáticas (Pratt & Ainley, 1997). Estes ambientes têm o potencial de promover a aprendizagem centrada no aluno e a aprendizagem ativa (Saha, Ayub & Tarmizi, 2010).

Segundo Olive, Makar, Hoyos, Kor, Kosheteva e Sträβer (2010), o papel dos alunos, quando trabalham em AGDs, torna-se análogo ao dos cientistas: observando, registando, manipulando, prevendo, conjeturando e testando. Desta forma, os alunos conseguem desenvolver teorias e explicações para as questões que estão a estudar. Se a estes ambientes juntarmos a colaboração entre os alunos, potenciamos as capacidades de argumentação, explanação e reflexão (Andriessen, Baker & Suthers, 2003; Slavin, 1995). Numa estrutura de ajuda recíproca (King, 1997), como no caso da aprendizagem colaborativa em que se integra o computador, não é apenas o professor que pede justificações ou evidências das conjeturas ou regras emergentes das contribuições dos alunos, mas são os próprios alunos que assumem essa responsabilidade (Beatty & Geiger, 2010). Numa perspetiva construtivista, a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos comparam e partilham as suas ideias com outros (Good & Brophy, 1994). De facto, os alunos podem aprender, pedindo ajuda e recebendo explicações de um colega (Webb, 1989), podendo este processo ser designado por construção colaborativa do conhecimento (Scardamalia & Bereiter, 1996; Stahl, 2000). Estas ideias estão em sintonia com o que é defendido pelo NCTM (2007) como cultura da aula de matemática, onde os alunos analisam e avaliam o pensamento matemático e as estratégias de outros; comunicam o pensamento matemático coerentemente e de forma clara aos seus colegas; investigam e fazem conjeturas matemáticas. Neste contexto, ganham especial relevância as interações que se estabelecem entre os alunos, durante o processo de resolução de uma tarefa, e entre estes e o computador. Falamos de *interação* como um tipo de ação que ocorre entre duas ou mais entidades quando a ação de uma delas provoca uma reação da(s) outra(s). Um estudo de Hattie e Yates (2013) destacam os efeitos positivos nas intervenções dos alunos em que o computador é utilizado de forma a permitir que estes assumam o controlo da sua aprendizagem. A tecnologia é vista como forma de mediar as interações sociais, envolvendo representações dinâmicas (Beatty & Geiger, 2010). Num Ambiente de Geometria Dinâmica os alunos são confrontados com situações nas quais observam e resolvem problemas num contexto geométrico realístico e investigam as invariantes de figuras geométricas, assim como as relações submetidas a mudanças realísticas. No campo da conceptualização matemática, uma utilização regular de um Ambiente de Geometria Dinâmica leva a que os alunos comecem por conceptualizar as restrições ao movimento e as regularidades, em termos de propriedades geométricas formais (Jones, 2000; Battista, 2009).

1.2. Âmbito da Investigação

Os computadores são uma ferramenta tecnológica que constitui um marco incontornável no avanço da ciência e da tecnologia com repercussões ímpares no mundo atual. Tendo em conta as vantagens e potencialidades que lhes são amplamente reconhecidas, continua a ser um desafio e uma prioridade integrá-los no ensino, como instrumento pedagógico eficaz ao serviço da aprendizagem da Matemática. Hegedus e Moreno-Armella (2009) acreditam que à medida que os ambientes de aprendizagem evoluem, tornando-se mais dinâmicos, interativos e sociais, torna-se igualmente necessário construir novas teorias que ajudem a estruturar e analisar a natureza da aprendizagem. A integração dos AGDs em sala de aula traz consequências para a dinâmica da própria sala de aula, tornando o processo de aprendizagem mais interativo e integrando uma componente social diferente. Neste tipo de ambiente, de natureza construtivista, quer o professor, quer os alunos, quer o computador poderão fornecer um suporte acrescido à aprendizagem (De Corte, 1992), resultante de acréscimo de comunicação composta por inúmeras oportunidades de feedback – formas de reação a ações que são primordialmente relacionadas com a utilização do computador.

Apesar de existirem já muitos estudos relacionados com a utilização das tecnologias na sala de aula, poucos o relacionam com o feedback. Senti, por isso, a necessidade de entender melhor o que se passa quando os alunos trabalham colaborativamente, nos AGDs. Existem alguns estudos envolvendo a Aprendizagem Colaborativa Apoiada pelo Computador (ACAC)[1]. Atualmente sabe-se, por exemplo, que estes ambientes podem potenciar a performance académica dos alunos (Cho, Gay,

[1] Em Inglês designada por Computer-Supported Collaborative Learning (CSCL).

Davidson & Ingraffea, 2007). Nestes ambientes é inegável a importância das interações estabelecidas e do feedback resultante.

Sendo o feedback uma poderosa influência na aprendizagem (Hattie & Timperley, 2007) e uma forma eficaz de intervenção educativa (Hattie, 1999; Wiliam, 2007), o seu impacto na aprendizagem dos alunos pode ser mais ou menos benéfico (Torrance & Pryor, 1998; Hattie & Timperley, 2007), dependendo de diversos fatores designadamente de carácter social, psicológico e cognitivo (Torrance & Pryor, 1998).

A vantagem do feedback será bastante reduzida se a sua utilização estiver limitada à comunicação unívoca do professor para o aluno, como acontece na maioria das aulas expositivas. Esta abordagem baseia-se, em grande parte, no conceito comportamentalista de feedback, associado essencialmente com a avaliação do progresso do aluno, no seu sentido mais estrito. Os professores avaliam a *performance* dos alunos em tarefas, como o trabalho em sala de aula, o trabalho de casa e os testes, e comunicam os resultados aos alunos. Em contrapartida, quando se proporciona a possibilidade de os alunos entrarem em diálogo, o feedback emergente desses diálogos poderá fazer com que os alunos aprendam a autoavaliar-se e autorregular-se de forma mais eficaz (Pollock, 2012).

Esses processos de autorregulação e de construção de significados induzidos pelo feedback ainda se encontram pouco estudados. Esta investigação procura dar um contributo para essa problemática.

1.3. Problema e Objetivos

Este estudo parte da conjetura de que a envolvência dos alunos em tarefas de geometria, projetadas de forma cuidadosa, pode levar os alunos a desenvolver a sua própria construção de significados matemáticos no estudo de tópicos de Geometria. A ideia do computador como um mediador e promotor de colaborações é hoje partilhada por diversos autores (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006). A utilização de AGDs, como o GeoGebra, permite que os alunos se envolvam numa aprendizagem ativa, que é enriquecida e estimulada através do feedback que ocorre de forma mais intensa a partir da resposta do *software* e da reação que desperta nos alunos em função dos seus objetivos na resolução da tarefa (Edwards & Jones, 2006). Existe a noção de que para além das tecnologias servirem de base ao discurso entre pares se deve examinar com mais atenção o que é que as novas tecnologias tornam único no processo de ensino/aprendizagem (Scardamalia & Bereiter, 1996, 2003). Assim, o estudo da forma como decorre esse feedback apresenta-se como uma ideia fundamental nesta investigação.

Com o intuito de melhorar a caracterização do conceito de feedback, ou seja, perceber quem, quando e como se emite ou recebe feedback, farei a distinção entre emissão de feedback e receção de feedback. Assim, considera-se que um sujeito ou um objeto emite feedback quando reage a um determinado estímulo ou ação[2]. Um sujeito recebe feedback quando retira informação do feedback emitido.

Esse feedback pode ser caracterizado como sendo visual, quando provem das imagens do computador, ou oral, quando provem da verbalização dos alunos. Portanto podem-se distinguir várias fases relacionadas com o conceito de feedback. Uma fase de ação, em que um sujeito age no computador. Uma fase de emissão de feedback visual, quando o computador emite a imagem resultante da ação. Uma fase de receção de feedback visual, quando o sujeito receciona a imagem do computador. Uma fase de emissão de feedback oral, quando um sujeito verbaliza determinada ideia, tendo em conta o contexto, e uma fase de receção de feedback oral quando outro sujeito receciona o feedback oral emitido.

Quando um sujeito age perante um Ambiente de Geometria Dinâmica escolhe determinada ferramenta e põe em prática algum tipo de estratégia de construção ou arrastamento. Por outro lado, quando dois sujeitos comunicam entre si, podem fazê-lo com diferentes intencionalidades. Ao verbalizar determinada ideia sobre o que está a decorrer à sua volta, um sujeito pode ter a intencionalidade de avaliar, questionar, ou simplesmente informar sobre determinada situação. Ao comunicar essas ideias com outro sujeito podem surgir momentos de negociação, compreensão e partilha de significados entre sujeitos.

A informação obtida através do feedback é mediada pela perceção ou interpretação do sujeito e pode conter pistas que acionam e guiam a procura de mais

[2] Para o aluno, esse estímulo pode ser externo (como por exemplo uma ação verbal de outro aluno, ou a imagem que surge do ecrã de computador), ou interno (como, por exemplo, a consecução de determinado objetivo). Para o computador esse estímulo é sempre externo (quando o aluno realiza uma ação com o rato ou com o teclado).

informação. Em particular, a receção de feedback pode contribuir para o desenvolvimento de estratégias com a intenção de resolver um determinado problema (Pollock, 2012). Estas estratégias podem encurtar a distância entre o estado do aluno na resolução de um problema e o objetivo a atingir (Ramaprasad, 1983).

Deste modo, foi formulado o seguinte problema de investigação:

Quando e como surge o feedback durante a resolução de tarefas em que os alunos trabalham colaborativamente com recurso a um ambiente de geometria dinâmica e quais as implicações para a construção de significados em tópicos de geometria?

Tendo como contexto de investigação o trabalho colaborativo entre alunos no processo de resolução de tarefas com o GeoGebra, proponho-me com este estudo atingir os seguintes objetivos:

1. Identificar como funcionam as diferentes fases do feedback emergente na resolução das tarefas.
   a. *Propor um modelo para descrever o feedback emergente na resolução das tarefas, quando os alunos utilizam o GeoGebra.*
   b. *Identificar quando e como surgem as fases de ação, emissão e receção de feedback visual, assim como de emissão e receção de feedback oral.*

2. Descrever e compreender o papel do feedback visual emitido pelo computador na construção de significados quando os alunos utilizam o GeoGebra.
   a. *Identificar um modelo para caracterizar as ações dos alunos no computador. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem estratégias de construção e de arrastamento na resolução das tarefas.*
   b. *Descrever e compreender o papel exercido pelo feedback visual emitido pelo computador sobre as ações dos alunos, nomeadamente quando estes aplicam estratégias de construção e de arrastamento.*

c. *Descrever e compreender o papel das estratégias de construção e de arrastamento na construção de significados, nomeadamente através da adequabilidade da escolha de ferramentas, da correção das estratégias aplicadas e da forma como os alunos avaliam o feedback visual emitido pelo computador.*

3. Descrever e compreender o papel do feedback oral entre os alunos na construção de significados.

a. *Propor um modelo para descrever o feedback oral entre alunos. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem os tipos de feedback oral de avaliação, questionamento e informação.*

b. *Descrever e compreender o papel do feedback oral na construção de significados, nomeadamente quando os alunos utilizam o GeoGebra e surgem momentos de negociação, compreensão e partilha de significados.*

Como forma de cumprir os objetivos do estudo, foram recolhidos dados em contexto de sala de aula, em diversos momentos, durante um período de tempo alargado, que abrangeu dois anos letivos, correspondendo ao 7.º e 8.º ano de escolaridade. Nesse contexto, foram propostas sequências de tarefas associadas ao estudo de um conjunto de subtópicos de Geometria que constituem parte integrante do currículo de matemática do ensino básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Estas tarefas foram preferencialmente exploradas pelos alunos, em trabalho de pares, cabendo ao professor um papel orientador e de suporte, buscando incentivar a autonomia dos alunos e a discussão entre eles.

1.4. Estrutura

No capítulo dois apresenta-se o enquadramento teórico, composto por duas vertentes. Na primeira, introduzo algumas características e potencialidades da aprendizagem colaborativa num ambiente de geometria dinâmica. Começo por discutir o conceito de aprendizagem colaborativa e, em seguida, o de aprendizagem colaborativa apoiada por computador. Na sequência, refiro o que a literatura aponta acerca da utilização de ambientes de geometria dinâmica na aprendizagem da Matemática, especialmente na aprendizagem da geometria, finalizando com uma discussão sobre a aprendizagem colaborativa nos ambientes de geometria dinâmica. Na segunda vertente, introduzo o conceito de feedback, dando enfoque ao feedback na aprendizagem. Discuto o conceito de feedback oral e, especificamente, o feedback entre alunos, assim como os seus efeitos no processo de ensino/aprendizagem. Em seguida, abordo o feedback do computador e o seu papel na construção de significados quando os alunos utilizam o GeoGebra. Para finalizar, refiro a ideia de ciclo de feedback como uma forma de ver os processos de autorregulação da aprendizagem e apresento a noção de aprendizagem colaborativa apoiada pelo computador como estando em simbiose com a noção de feedback.

No capítulo três apresento uma descrição do contexto de investigação e das opções didáticas que o sustentam. Nesse capítulo, é dado destaque aos trabalhos de Brousseau. Aí, abordo o meu papel como professor, especificando as principais características desse papel e do modelo a-didático; descrevo a dinâmica de sala de aula; a forma como é entendida, neste contexto, a avaliação nas aprendizagens dos alunos; o meu posicionamento, como professor, face às tecnologias e face à aprendizagem colaborativa. Depois, faço menção ao papel atribuído ao aluno neste processo. Finalizo este capítulo com uma descrição das tarefas, em particular, explicando a forma como foram selecionadas e preparadas, passando pelos tópicos, subtópicos e objetivos envolvidos, e respetiva cronologia de implementação; para terminar, foco-me em questões epistemológicas, cognitivas, didáticas e instrumentais das tarefas.

As opções metodológicas deste estudo são apresentadas no quarto capítulo. Fundamento a opção por uma metodologia qualitativa, salientando as suas principais características. Passo depois à descrição do significado de estudo de caso, especificando as suas limitações e credibilidade. Abordo, em seguida, o papel do professor como investigador, no âmbito do desenvolvimento de uma investigação sobre a própria prática. Na descrição do processo de investigação, apresento o local e os participantes do estudo e a forma como foi realizada a recolha de dados.

A apresentação e análise de dados surgem no quinto capítulo. Tem início com a forma como foi efetuado o tratamento dos dados recolhidos. Seguidamente, apresento e analiso sete episódios, tendo como base as categorias e subcategorias de análise definidas. No final da análise de cada um dos episódios incluo uma pequena síntese do mesmo.

No sexto capítulo, apresentam-se as principais conclusões do estudo, revisitando os objetivos propostos, coloco alguns comentários finais e são levantadas algumas questões para futuras investigações.

CAPÍTULO 2

Enquadramento Teórico

O enquadramento teórico desenvolve-se em torno de duas linhas temáticas. A primeira prende-se com o conceito de aprendizagem colaborativa no processo de ensino-aprendizagem da matemática que é posteriormente adaptado à questão da aprendizagem colaborativa em ambientes de geometria dinâmica. Na segunda linha, são discutidas várias formas de entender o conceito de feedback, considerando ainda a sua conexão com a atividade desenvolvida com recurso ao computador. É ainda tratado o modo como o feedback tem influência na construção de significados matemáticos. Este capítulo encerra com uma síntese da relação entre a aprendizagem colaborativa apoiada por um ambiente de geometria dinâmica e o feedback envolvido neste processo.

2.1. A Aprendizagem Colaborativa num Ambiente de Geometria Dinâmica

Nesta seção começo por abordar, de forma breve, a aprendizagem colaborativa na aula de matemática, intimamente ligada à interação entre os elementos de um grupo. Em seguida, procuro estabelecer uma relação entre a aprendizagem colaborativa e a utilização do computador, tendo presente que a utilização de espaços de aprendizagem colaborativa para partilhar ideias, pensamentos e hipóteses é uma forma de atender ao princípio de que a tecnologia deve ser utilizada para colocar os alunos em diálogo (Smith, 2010). Antes de concluir, irei focar-me nos ambientes de geometria dinâmica, apresentando algumas ideias sobre a aprendizagem e metodologias de ensino da geometria, assim como sobre o papel do computador, os *softwares* existentes, e as características da geometria dinâmica.

No que concerne à aprendizagem, Sfard (1998) introduziu duas metáforas que considero relevantes: a metáfora de aquisição, na qual a aprendizagem consiste na aquisição de conhecimento que é armazenado no cérebro dos indivíduos, e a metáfora da participação, na qual a aprendizagem consiste em incrementar a participação em comunidades de prática. Mais tarde, Lipponen, Hakkarainen e Paavola (2004) acrescentaram uma terceira metáfora, baseando-se em Bereiter (2002) e Engeström (1987): a metáfora da criação de conhecimento, na qual os objetos de novo conhecimento ou práticas sociais são criados no mundo através de colaboração. Este estudo, à semelhança de outros, emerge associado a esta última metáfora.

2.1.1. Aprendizagem Colaborativa

Existe um grande manancial de investigação no campo da aprendizagem colaborativa em matemática (e.g. Barron, 2003; Esmonde, 2009; Slavin & Lake, 2008; Webb & Farivar, 1994). Um conceito central inerente à aprendizagem colaborativa é o de adicionar conhecimento à base comum (“common ground”, no original)[3] (Clark & Brennan, 1991; Pfister, 2005), cujo significado pode ser traduzido simplesmente por passar de um estado de não partilha para informação partilhada. A colaboração pode aumentar a eficácia através de atividades que são mais complicadas de fazer a sós, tais como a argumentação, explanação e reflexão (Andriessen, Baker & Suthers, 2003; Slavin, 1995). Um dos benefícios da aprendizagem colaborativa é proporcionar aos alunos uma estrutura de ajuda recíproca (King, 1997).

Esta conceção de aprendizagem colaborativa atribui a aprendizagem à interação de grupo em vez da tradicional e unidirecional transferência de informação entre indivíduos. Apesar de as interações professor-aluno serem cruciais, a interação entre pares (alunos) tem-se tornado, na atualidade, cada vez mais importante (Kumpulainen & Kaartinen, 2000).

[3] Constituído pelo conhecimento, crenças e premissas mútuas que se tornam essenciais ao estabelecimento de comunicação entre duas pessoas.

É através da comunicação natural, tal como as expressões verbais, linguagem corporal, expressões faciais, gestos e ações que os alunos interagem para resolver problemas e desenvolverem as aprendizagens (Daft & Lengel, 1984; Dillenbourg & Evans, 2011; Evans, Feenstra, Ryon & McNeill, 2011). Para Koschmann, Zemel, Conlee-Stevens, Young, Robbs e Barnhart (2005), a aprendizagem pode ser encarada como produto das interações entre os participantes, mas também como sinónimo dessas mesmas interações. De modo semelhante, Hicks (1996) considera a aprendizagem como o produto de diferentes significados quando colocados em contacto. De uma forma mais geral, a aprendizagem é entendida como um processo dinâmico, concebido socialmente, no qual os alunos desempenham um papel ativo para se perceberem uns aos outros, formularem uma linguagem comum, construírem uma base de conhecimento comum e levarem a cabo uma determinada tarefa ou conjunto de tarefas (Salkind, 2004).

De uma forma incisiva Roschelle e Teasley (1995) veem a colaboração como um processo no qual os indivíduos *negoceiam e partilham significados*. A colaboração é, na sua génese, conceptualizada como um processo de *construção de significados*[4] *partilhados* (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006). Talvez, mais importante, a colaboração é um processo de participação em que cada elemento de um grupo, ao propor uma ação com o objetivo de atingir uma solução tem de convencer os restantes membros do grupo. Num contexto em que nenhum dos alunos conhece a solução "correta", como acontece geralmente numa tarefa mais aberta, todos terão de se envolver ativamente na avaliação dos argumentos para cada etapa da resolução (Stahl, 2016).

Durante muitos anos, as teorias de aprendizagem colaborativa tiveram tendência a focar-se na forma como os indivíduos funcionam dentro de um grupo. Esta posição dominou tanto a psicologia cognitiva como a inteligência artificial nos anos setenta e oitenta. Assim, o contexto de interação social era visto essencialmente como um *background* para a atividade individual, em vez de foco de investigação. Recentemente, o grupo é tido como sendo ele próprio uma unidade de análise e o foco mudou para as propriedades de interação emergentes, construídas socialmente (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006), como é o caso do *feedback*. O que não significa que a aprendizagem individual não tenha importância. Na aprendizagem colaborativa, os alunos trabalham

[4] O termo "construção de significados" resulta da tradução de "meaning-making", no original.

em conjunto numa tarefa, onde cada indivíduo é tão responsável pela aprendizagem do outro como pela sua, porque existe um objetivo comum e partilhado a atingir. O construtivismo proporciona um enquadramento teórico para a aprendizagem colaborativa, onde os alunos são colocados no centro do processo de aprendizagem e são eles que constroem o seu próprio conhecimento, sendo vitais os diálogos estabelecidos entre eles (Wei & Ismail, 2010).

Numa perspetiva construtivista, a aprendizagem é mais eficaz quando os alunos comparam e partilham as suas ideias com outros, e essa interação social funciona melhor em grupos pequenos (Good & Brophy, 1994). Num contexto colaborativo, os alunos fornecem explicações aos seus colegas (cf. Hausmann, Chi & Roy, 2004; Webb, 1989) e isso requer que tornem o seu pensamento explícito e verbalizem o seu conhecimento, sendo esse um dos principais benefícios da aprendizagem colaborativa (Teasley, 1995).

Acontece que, frequentemente, os alunos têm de reformular e clarificar as suas afirmações se o seu colega tiver dificuldades em perceber ou se as questionar. Esta verbalização e reformulação do conhecimento requerem uma melhor elaboração do conteúdo de aprendizagem (O'Donnell, 1999), algo que é relevante para o desenvolvimento do conhecimento (Mullins, Rummel & Spada, 2011). De facto, os alunos podem aprender pedindo ajuda e recebendo explicações de um colega (Webb, 1989), podendo este processo ser designado por construção colaborativa do conhecimento (Scardamalia & Bereiter, 1996; Stahl, 2000).

A construção de significados não é aqui entendida como uma expressão de representações mentais dos participantes, mas sim como um produto das várias interações entre os alunos. A construção de significados pode, portanto, ser analisada através do surgimento de interações entre os vários participantes (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006).

As ideias referidas anteriormente sobre o papel da interação entre alunos na aprendizagem colaborativa estão em sintonia com o que é defendido pelo NCTM (2007) como cultura da aula de matemática, onde os alunos analisam e avaliam o pensamento matemático e as estratégias de outros; comunicam o pensamento matemático coerentemente e de forma clara aos seus colegas; investigam e fazem conjeturas matemáticas. Particularmente, no domínio da matemática, a co-construção do conhecimento melhora o desempenho dos alunos (Berg, 1994). Este tipo de ambiente leva naturalmente ao aparecimento de erros e esse aparecimento torna-se crítico para uma aquisição de conhecimento bem-sucedida (Baker, Corbett & Koedinger, 2004). Quando os alunos trabalham no erro e na sua correção, aumentam a sua compreensão (Mullins *et al.*, 2011). Nestas situações, os participantes podem não estar de forma consciente a desenvolver um esforço para aprender determinado assunto, no entanto, ao tentarem fazer com que determinada situação tenha sentido para eles, estão a construir a sua aprendizagem (Dervin, 2003). Criando um contexto de partilha dentro da sala de aula, os alunos estão mais envolvidos no trabalho conjunto, libertando o professor da sua posição de autoridade do saber e permitindo uma maior abertura na comunicação e partilha de significados entre os alunos (Carnell, 2000).

Segundo Baker (2003), a construção de significados atinge-se e revela-se pela conjugação de várias interpretações que vão evoluindo de forma dinâmica. A construção de significados intersubjetiva emerge quando vários participantes contribuem para a composição de interpretações inter-relacionadas. Por outras palavras, a composição conjunta de interpretações é o cerne da construção de significados (Suthers, 2006).

Estudos recentes sobre intersubjetividade sugerem a existência de uma *cognição de grupo*[5]. A cognição de grupo incorpora, mas transcende, a cognição individual. Esta noção pode lançar uma fundação para a aprendizagem colaborativa. Na cognição de grupo, participam várias pessoas com interações coerentes que atingem resultados cognitivos que são melhor analisados, pelo menos em parte, pela unidade de grupo, em vez de atribuir as contribuições e a autoria apenas ao individual. Mesmo quando as contribuições são individuais, estas podem ter sido influenciadas por interações anteriores e, assim, serem consideradas um produto da cognição de grupo. No entanto, empiricamente, raramente se consegue atingir a cognição de grupo, como uma forma efetiva de aprendizagem colaborativa (Stahl, 2015).

Na comunicação dentro de um grupo é fundamental que cada um dos membros compreenda as ações levadas a cabo pelo outro, assim como as referências feitas a essas ações. A intersubjetividade do grupo é baseada nessa partilha de significados. Apesar da partilha de significados ser um produto da interação de grupo isso não significa que cada membro do grupo seja capaz de articular a mesma expressão de significado quando questionado ou que tenha a mesma representação individual. Significa, pois, que os

[5] Denominação proposta por Stahl (2006).

membros do grupo respondem de forma adequada às várias solicitações decorrentes da sua atividade, mediante as interações de grupo, num entendimento tácito partilhado (Stahl, 2016).

2.1.2. Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador

A utilização dos computadores pode não estar necessariamente ligada à aprendizagem colaborativa. Atualmente, ainda se recorre pouco à estratégia de colocar os alunos a interagir e a aprender com os seus pares. Uma das razões para esta situação é o sistema de avaliação vigente, em particular porque fomenta a preparação dos alunos para os exames finais de ciclo, valorizando o que os alunos sabem independentemente ou individualmente. No entanto, na vida ativa, os indivíduos têm de desenvolver as suas atividades profissionais e socias em grupo, isto é, questionamo-nos uns aos outros, procuramos informação e aprendemos com os nossos colegas de trabalho, frequentemente mediados pelo uso da tecnologia (Prensky, 2010).

Um estudo de Hattie e Yates (2013) revela algumas das potencialidades da utilização do computador na aprendizagem colaborativa. Em particular, estes autores destacam os efeitos positivos nas intervenções em que o computador é utilizado de forma a permitir que os alunos assumam o controlo da sua aprendizagem (por exemplo, pela individualização da velocidade com que é introduzido novo material) e para servir de base à aprendizagem colaborativa.

Taylor (1981) sugeriu que os computadores podem ser usados, em contexto de aprendizagem da matemática, com uma dimensão de tutor-aluno-ferramenta. Willis e Kissane (1989) utilizaram a caracterização de Taylor (1981) e acrescentaram uma nova categoria: o computador como um catalisador. Nesta categoria, o ambiente computacional é usado como meio de provocar explorações e discussões matemáticas ou invocar a utilização de capacidades de resolução de problemas. Este avanço reconhece o potencial da tecnologia como base para as interações entre alunos com vista à aprendizagem e atribui-lhe um papel de mediador de aprendizagens. Mais tarde, Goos e Cretchley (2004) aprofundam a metáfora propondo o computador como uma ferramenta e um catalisador para a visualização, raciocínios aprofundados e colaboração. A ideia do computador como um mediador e promotor de colaborações é hoje partilhada por diversos autores (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006). De salientar que, neste contexto, para além da componente da aprendizagem de conceitos matemáticos, os alunos também se podem ajudar uns aos outros para aprender e desenvolver capacidades básicas e procedimentos (Davidson, 1990).

Goos e Geiger (1995) preocuparam-se em estudar a atividade metacognitiva na aprendizagem colaborativa, utilizando o computador como meio de explorar as ideias matemáticas. Estes investigadores recolheram indícios, através das interações informais entre pares, de que o estilo de discussões colaborativas emergentes funcionou como veículo para a atividade metacognitiva. Contudo, não deixam de alertar para o facto de que a atividade metacognitiva e a interação colaborativa, por si só, não são garante de obtenção de resultados matemáticos produtivos. Para os alunos aplicarem, com sucesso, as estratégias metacognitivas devem adquirir uma disposição para a construção de significados. Para além disso, podem ocorrer várias adversidades: o aluno pode estar confiante e justificar uma estratégia incorreta, ou rejeitar erradamente uma estratégia do seu par, ou ainda o par de alunos ao trabalhar colaborativamente pode ser incapaz de transpor determinado obstáculo. Neste contexto, o desafio para o professor consiste em encontrar formas de intervenção para ajudar os alunos a trabalhar, em conjunto, para se desembaraçarem, eles próprios, das dificuldades (Goos & Geiger, 1995).

O termo "computer-supported collaborative learning" (CSCL)[6] foi proposto por O'Malley e Scanlon (1989) e é utilizado por vários autores (e.g. Lehtinen, 2003; Stahl, Koschmann & Suthers, 2006; Dillenbourg, Jarvela & Fischer, 2009). Neste estudo, este termo é traduzido como Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador (ACAC). Ao contrário da Aprendizagem Apoiada por computador (AAC) (Coleman-Martin, Heller, Cihak & Irvine, 2005), a ACAC é um método que providencia práticas conjuntas (em vez de individuais) através da utilização de computadores. Existem muitos estudos que revelam as vantagens da perspetiva da ACAC relativamente à AAC (Rysavy & Sales, 1989; Shlechter, 1991; Lou Abrami & d'Apollonia, 2001; Lou, 2004; Chen, 2008).

Há atualmente um vasto campo de investigação que estuda o modo como a tecnologia pode facilitar a partilha, a criação de conhecimento e *expertise* através da interação entre pares e processos de aprendizagem em grupo (Resta & Laferrière, 2007). Embora seja um assunto relativamente novo, já existe alguma literatura que salienta as

[6] Também pode ser utilizado o termo "computer-supported cooperative learning" (McConnell, 1994; English & Yazdani, 1999).

potencialidades dos ambientes de ACAC (Garrison, Anderson & Archer, 2001; Puntambekar, 2006; Stahl, Koschmann & Suthers, 2006), aparecendo normalmente associada à aprendizagem à distância ou à e-aprendizagem (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006).

De acordo com Crook (1994), existem dois tipos de ACAC. O primeiro que consiste em aprender *através do computador*. Isto significa que os membros do grupo de colaboração utilizam a internet para estarem ligados entre si e comunicarem. O segundo e, do meu ponto de vista, mais interessante, é denominado *aprendizagem em torno do computador.* Neste caso, a utilização do computador facilita a comunicação cara a cara entre membros do grupo ou entre pessoas que formam um par colaborativo. Mas tanto os ambientes ACAC assíncronos como os síncronos potencializam as interações entre alunos quando estes participam em intercâmbios sociais como tentativas de extrair um significado comum e realizar tarefas (Kraiger, 2008). Ao conceber essas tarefas é obviamente importante ter em atenção o papel da interação em pequeno grupo que nelas pode ocorrer (Mercier & Higgins, 2013).

No entanto, só recentemente os investigadores começaram a avaliar os contornos do método ACAC nas abordagens ao processo de ensino/aprendizagem e a examinar com mais atenção o que é que as novas tecnologias tornam único, para além de servirem de base ao discurso entre pares. Os investigadores começam a identificar as oportunidades que as tecnologias oferecem aos processos de partilha, crítica, troca e debate de ideias, como forma de desenvolver tanto o conhecimento comunitário como a compreensão e participação individual (Scardamalia & Bereiter, 1996, 2003) e procuram saber como a tecnologia pode servir de base a ambientes de aprendizagem qualitativamente diferentes (cognição de grupo, construção colaborativa de conhecimento) (Resta & Laferrière, 2007).

De facto, existem algumas questões centrais, na teoria da aprendizagem colaborativa, tais como:

- Como é que os alunos podem resolver problemas, construir conhecimento, realizar tarefas, e atingir outros resultados cognitivos em conjunto?
- Como é que os alunos partilham ideias e dialogam sobre os mesmos assuntos?
- Como é que os alunos entram em sintonia quando falam, pensam, compreendem, e trabalham da mesma forma?

Dentro da ACAC, estas questões têm sido referidas de formas diversas, como: construir e manter uma conceção partilhada de um problema (Roschelle & Teasley, 1995), construir uma base comum de conhecimento (Baker, Hansen, Joiner & Traum, 1999; Clark & Brennan, 1991), ou desenvolver práticas de *construção de significados* (Koschmann, 2002). Esta última perspetiva corresponde à que irá ser adotada no presente estudo.

Stahl (2006) tece algumas considerações relativamente às ferramentas tecnológicas necessárias ao estabelecimento de comunidades colaborativas:

1. A utilização de ferramentas cognitivas por uma comunidade colaborativa toma lugar através de muitas e variadas interações entre pessoas.
2. A cognição que as ferramentas fomentam é inseparável da colaboração a que estas servem de base.
3. A cognição relevante é a cognição de grupo; isto é, um fenómeno linguístico que ocorre no discurso e não um fenómeno psicológico que toma lugar no cérebro de um determinado indivíduo.
4. As ferramentas podem estar mais próximas dos meios de comunicação do que das calculadoras – estas não se limitam a amplificar as capacidades cognitivas individuais, tornando possível formas específicas de interação de grupo.
5. Em vez de serem artefactos físicos relativamente simples, as ferramentas para as comunidades podem ser estruturas complexas.

Alguns autores que se debruçam sobre a ACAC (Baker *et al*., 1999; Rummel & Spada, 2005; van der Pol, Admiraal & Simons, 2003) desenvolvem o seu trabalho bebendo na fonte do interacionismo[7], tendo por base a metáfora da construção de uma base comum, referida anteriormente. Nos ambientes ACAC síncronos, as interações em tempo real constituem o meio de comunicação. Essa comunicação, sendo síncrona, diminui significativamente os níveis de ambiguidade (Kock, Garza & Rangel, 2009) e pode-se assumir como um *feedback individual*; a receção desse feedback faz com que o aluno esteja mais predisposto a contribuir para o trabalho de grupo (Kimmerle & Cress, 2008). Nesta estrutura de discurso, o professor não tem de impor a necessidade de apresentar justificações ou dar evidências das conjeturas dos alunos, mas são os próprios alunos que sentem essa obrigação e assumem essa responsabilidade. O

[7] Perspetiva teórica que é proveniente dos processos sociais da interação humana.

fundamento teórico que está na base, tanto dos estudos com comunicação assíncrona como síncrona, enfatiza a importância do discurso e da colaboração como essenciais para o processo de aprendizagem da matemática. Todos usam tarefas ricas abertas e todos evidenciam as *affordances* específicas de cada tipo de tecnologia utilizada para engendrar comunidades de prática colaborativa. A tecnologia é vista como forma de mediar as interações sociais, tanto em plataformas de discussão geridas pelos alunos, como envolvendo representações dinâmicas (Beatty & Geiger, 2010).

Informalmente sabe-se que as interações síncronas podem ser mais eficazes em termos de aprendizagem colaborativa. Essa constatação deve-se ao cumprimento, por parte dos alunos, de tarefas cognitivamente mais exigentes, com contribuições individuais de discurso dentro de um grupo pequeno.

Ao considerar as interações cara-a-cara mediadas pela tecnologia, os estudos em que a tecnologia é o catalisador à volta do qual as discussões ocorrem, frequentemente as expressões dos participantes são incompreensíveis, pois estão ligadas às imagens dos ecrãs que são uma componente integral do discurso (Lavy & Leron, 2004; Olive, 2000). Por esta razão, neste estudo as imagens do ecrã de computador, assim como os diálogos, serão alvos de gravação e de análise.

Entre as metodologias utilizadas no campo da ACAC encontra-se a investigação descritiva, nomeadamente através de estudos de caso, que incluem análise de diálogos (Sacks, Schegloff & Jefferson, 1974) e análise de interações (Jordan & Henderson, 1995), entre outros. Para além disso, Stahl (2006) argumenta que os pequenos grupos são a unidade de estudo mais frutuosa, por duas razões. É nos pequenos grupos que os métodos para a construção de significados intersubjetivos podem ser observados e os pequenos grupos ficam no limite da mediação entre indivíduos e a comunidade. Assim, este autor propõe que, na agenda investigativa no campo da ACAC, se troque a aprendizagem pela construção de significados como conceito analítico. Para além disso, o mesmo autor refere que a tecnologia deve ser concebida especificamente para mediar e encorajar atos de construção de significados intersubjetivos.

2.1.3. Ambientes de Geometria Dinâmica

2.1.3.1. Abordagens ao Ensino da Geometria

O NCTM (2007) descreve a geometria como uma área rica na qual os alunos podem descobrir padrões e formular conjeturas. De facto, pode-se considerar a geometria como um tema privilegiado para desenvolver o poder matemático. Esse poder é caracterizado não só pela capacidade de conjeturar, mas também pelas capacidades de explorar e raciocinar logicamente (Schoenfeld, 1991), tendo por base um contexto de resolução de tarefas ou problemas (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). No estudo da geometria os alunos reagem às evidências empíricas quer provenham do papel e lápis ou do computador, de várias formas. Estas evidências podem proporcionar exemplos a partir dos quais os alunos indutivamente inferem uma conjetura e, posteriormente poderão prová-la, utilizando métodos dedutivos. Por vezes, os alunos tendem a olhar para essas evidências como prova suficiente de que a sua conjetura é sempre verdadeira (Chazan, 1993b; Edwards, 1997).

Existem claramente diversas abordagens sobre o ensino/aprendizagem da geometria. Tradicionalmente a abordagem curricular da geometria tem um foco dedutivo, imbuído de um sistema axiomático onde abundam as definições. Neste contexto, o trabalho de construção geométrica é realizado com compasso, régua e eventualmente transferidor. Esse trabalho constitui uma maneira de dar a conhecer aos alunos a forma como determinadas figuras foram construídas num passado longínquo, sendo desfasado da realidade atual dos alunos (Paniati, 2009). Neste caso, a Geometria é apresentada aos alunos como sendo um produto finalizado; como um sistema fixo de axiomas, definições, teoremas, postulados, construções e demonstrações, elaborados por pessoas desconhecidas e por razões desconhecidas para serem passivamente consumidos pelos alunos.

Numa outra abordagem, mais atual, pretende-se que os alunos “façam geometria”. Isto é, os alunos necessitam de se envolver ativamente em tarefas abertas que lhes permitam definir objetos matemáticos e descobrir as suas propriedades. Para além disso, os alunos precisam de explorar e fazer conjeturas acerca das relações, desenvolver demonstrações explanatórias e criar esquemas de classificação para sistematizar a sua compreensão (Blair & Canada, 2009). Nesta abordagem assume-se que a aprendizagem da geometria envolve um tipo de discurso abstrato, rigoroso, sistemático e argumentativo que é comum ao trabalho científico (Stahl, 2016).

2.1.3.2. Uma Panorâmica da Evolução da Tecnologia para o Ensino da Geometria

LeBaron (2002) refere que a tecnologia não existe de forma independente da sua utilização. Se às novas tecnologias associarmos uma nova cultura, envolvendo novos modelos de trabalho e de vida, faz todo o sentido a sua inclusão na escola (Osta, 1998). Nos anos oitenta, a Apple introduziu no mercado o computador Macintosh com uma interface, entre utilizador e gráfico, impulsionada pelo rato. Esta tecnologia estimulou o desenvolvimento dos ambientes de geometria dinâmica (Hollbrands & Smith, 2009). O *Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1991) surgiu como resultado de um trabalho de pesquisa na Universidade de Swarthmore. Este *software* de carácter eminentemente vocacionado para o ensino da geometria teve, em 1993, a sua terceira versão a funcionar com o Microsoft Windows. No entanto, as alterações mais significativas estavam reservadas para a sua quarta versão (2001) onde as potencialidades do *software* deixaram de estar limitadas à geometria dinâmica e se alargaram ao ensino/aprendizagem do cálculo e da álgebra como pode ser comprovado ao consultarmos o 'The Geometer's Sketchpad Resource Center'.

Para além do aparecimento do Geometer's Sketchpad, o final da década de noventa foi uma época particularmente pródiga em que se assistiu ao nascimento de mais *softwares* de geometria dinâmica tais como: Cabri-Géomètre (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1988), Cinderella (Kortenkamp & Richter-Gebert, 1999), Geometry Inventor (Brock, Cappo, Dromi, Rosin, & Shenkerman, 1994), e, de forma parcial, Super-Supposer (Schwartz & Yerulshalmy, 1992).

As possibilidades gráficas e de cálculo de algum *software* possibilitam atualmente a reificação dos objetos abstratos. Este facto acarreta implicações de forma particular para os objetos matemáticos (Laborde, 1998).

Existe um consenso generalizado entre educadores e professores de que o computador pode proporcionar meios válidos para visualizar situações geométricas. Os pacotes de *software* de vários tipos utilizam as capacidades de animação para proporcionar formas de construção, movimento e configurações de rotação (por exemplo a visualização 3D), para as observar de vários ângulos e para modificar algumas das suas características. Estas funções demonstrativas levam a um papel do computador mais prático, como ferramenta de exploração, fazendo com que a intuição, a construção e o sentido de espaço sejam fatores mais importantes, mas simultaneamente, proporcionando formas de as ligar aos aspetos teóricos (Osta, 1998).

Embora em Portugal o ensino da geometria tenha sido, de alguma forma, negligenciado, Veloso vaticinou o importante papel dos computadores na inversão da situação "Será através dos computadores e da sua utilização no ensino que a geometria iniciará o seu regresso" (Veloso, 1998, p.32).

Atualmente existe um esforço de investimento na criação de ambientes de aprendizagem inovadores que tenham em conta a argumentação dedutiva como elemento de base à aprendizagem. Estes contextos projetam situações de aprendizagem que ajudam os alunos a sentir uma necessidade intrínseca para as justificações, proporcionando assim um convite a apreciar o potencial das justificações dedutivas como ferramenta de explicação. Os maiores e mais importantes esforços curriculares que englobam estes aspetos são aqueles que se baseiam no *software* de geometria dinâmica (Hershkowitz, 1998). Os *softwares* de geometria dinâmica providenciam um modelo de geometria Euclidiana que fornece feedback através do "arrastamento" como verificação da veracidade de construções ou teoremas. Pode-se fazer variar os parâmetros para que as relações invariantes se façam notar, ou a medição de comprimentos ou ângulos de tal modo que sejam observados os "resultados" nos padrões invariantes das medidas (Laborde, 1998).

2.1.3.3. Os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGDs)

A constante evolução das tecnologias e a sua integração em situações de aprendizagem mudam o próprio processo de aprendizagem. Hegedus e Moreno-Armella (2009) acreditam que à medida que os ambientes de aprendizagem evoluem, tornando-se mais dinâmicos, interativos e sociais, torna-se necessário construir novas teorias que ajudem a estruturar e analisar a natureza da aprendizagem.

De todos os tópicos abordados no currículo de matemática a geometria é o que está mais no limiar de ser influenciado pelo progresso, tanto a nível do desenvolvimento de *hardware* como de *software*. Apesar destas influências se poderem refletir em todos os tópicos, é na geometria que poderão ter uma marca maior, nomeadamente através dos ambientes de geometria dinâmica (Osta, 1998). O aparecimento destes ambientes veio corroborar esse panorama, abrindo novas janelas de oportunidades, possibilitando novas perspetivas para a utilização das tecnologias em sala de aula, funcionando como uma ferramenta ao serviço da aprendizagem (Burril, 2011). Atualmente o computador destaca-se como um elemento chave no ensino/aprendizagem da geometria, não se limitando a atrair as pessoas pelo seu grafismo fascinante, mas também permitindo explorações que, de outra forma, seriam demasiado complexas ou mesmo impossíveis de realizar (Graf & Hodgson, 1998).

O termo "geometria dinâmica" foi originalmente usado por Nicholas Jackiw e Steven Rasmussen e rapidamente se tornou num termo generalizado para designar as características dos *softwares* emergentes que possibilitam a transformação contínua e em tempo real conhecida por "arrastamento".

- Caraterísticas dos AGDs

Os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGDs) são constituídos por qualquer meio tecnológico que proporcione ferramentas, ao utilizador, para criar os elementos básicos da geometria Euclidiana (pontos, retas, segmentos de reta e circunferências) através de um movimento direto por meio de um dispositivo que direciona, e os meios para construir relações geométricas entre estes objetos. Uma vez construídos, os objetos são transformáveis simplesmente pelo arrastamento de qualquer uma das suas partes constituintes (Olive *et al*., 2010). Para além disso, existem outras características que fazem com que estes ambientes tenham grandes potencialidades. As figuras geométricas podem ser construídas conectando as suas componentes. Por exemplo, um triângulo pode ser construído conectando três segmentos de reta. No entanto, esse triângulo não é um representante estático e isolado da classe dos triângulos, como os desenhados com papel e lápis. Esse triângulo é, na sua essência, um protótipo de todos os triângulos. Para obter outros, basta arrastar um dos vértices para alterar, continuamente, o comprimento e a direção dos lados do triângulo adjacentes a esse vértice (Goldenberg & Cuoco, 1998). Os AGDs testam as propriedades geométricas baseadas em certas relações geométricas ou medidas dentro das figuras (Sangwin, Cazes, Lee & Wong, 2010).

Já em 1998, e mesmo com a pouca quantidade de estudos existentes, Ponte, Matos e Abrantes, chamavam a atenção para as potencialidades dos AGDs. Também Veloso (2002) destaca algumas das características dos AGDs: "Trata-se de um poderoso instrumento para a construção exacta e exploração de figuras, que podem ser manipuladas interactivamente, mas que conservam sempre as relações matemáticas impostas na sua construção" (p. 21).

Os AGDs deixam sobressair uma diferença essencial entre desenho (significante) e figura (significado) (Parzysz, 1988). Esse significado corresponde ao que Fishbein (1993) denomina de *figural concept*. O desenho refere-se à entidade material (ou representação externa) ao passo que a figura corresponde ao conceito teórico (ou representação mental) que é criado pelos alunos, através do desenvolvimento da sua capacidade de formulação e exploração de conjeturas (Laborde & Laborde, 1992; Schwartz, 1992).

De facto, a passagem de objeto para figura depende da interpretação humana, daí decorrendo que:

— um determinado leitor pode não interpretar um desenho geométrico como correspondente a um objeto geométrico;

— existem múltiplas possibilidades de interpretação de um mesmo desenho como significante de um objeto geométrico, por duas razões: a primeira decorre de que as interpretações dependem do contexto, do leitor e dos seus conhecimentos; a segunda decorre da própria natureza do desenho; sozinho, não pode caracterizar um objeto geométrico (Laborde & Capponi, 1994).

O processo de construir uma figura que represente um objeto geométrico requer que exista uma *comunicação com o computador* que inclua uma sequência de objetos geométricos e construções através da seleção de itens do menu, correspondendo a princípios base de geometria. Assim, do ponto de vista da aprendizagem existe uma promoção do conhecimento geométrico (Laborde, 1998).

O aparecimento de *software* geométrico veio permitir que as construções funcionem como um veículo para melhorar, nos alunos, a capacidade de resolução de problemas, o desenvolvimento da sua linguagem geométrica e o estabelecimento de conexões com outros tópicos, incluindo a necessidade de demonstração (Paniati, 2009). Em termos metodológicos, os AGDs têm o potencial de promover a aprendizagem centrada no aluno e a aprendizagem ativa (Saha *et al*., 2010). Autores como Olive e colegas (Olive *et al.*, 2010) consideram que estes ambientes possibilitam que os alunos assumam um papel mais investigativo, podendo desenvolver explicações e teorias para as situações que vão encontrando ao longo da sua interação com o computador.

- Potencialidades dos AGDs

No que concerne às potencialidades destes ambientes, segundo um estudo comparativo realizado por Keyton (1997), os alunos que trabalharam com um AGD no estudo dos quadriláteros, revelaram um incremento significativo na capacidade de fazer emergir os teoremas relacionados com o tópico. Goldenberg e Cuoco (1998) referem que esse facto se pode justificar pelas características do próprio AGD. Segundo estes autores, o AGD (neste caso o *Sketchpad*) permite que os alunos ultrapassem os seus próprios limites tácitos, sem o intencionarem, na medida em que se encontram perante alguma forma de desequilíbrio, que sentem necessidade de ultrapassar.

As oportunidades inerentes aos ambientes de geometria dinâmica de "ver" as propriedades matemáticas no ecrã podem ser perspetivadas no sentido de reduzir ou até substituir qualquer necessidade de uma prova matemática; alternativamente essas propriedades podem constituir-se como novas formas de promover a consciência dos alunos sobre a necessidade de prova (Hoyles & Jones, 1998).

Nestes ambientes, os alunos podem trabalhar sobre uma ideia matemática de formas variadas, sendo relativamente limitada a possibilidade de se desviarem do objetivo e de se perderem nas suas explorações. Podem ainda realizar ações com um propósito matemático, de forma encadeada, observando as consequências e refletindo nas implicações matemáticas dessas ações (Burril, 2011).

Estas características levaram Schwartz (1993) a denominar os AGDs como "espelhos intelectuais", destacando o papel do feedback visual, como apoio na resolução de problemas, nomeadamente quando se procede ao arrastamento e construção de figuras.

O *software* dinâmico permite que facilmente surjam vários procedimentos que levam ao mesmo tipo de resultado. A utilização de ambientes de geometria dinâmica permite a análise de muitas variantes dum tema particular com o objetivo de descobrir as propriedades invariantes de todas elas (Laborde & Laborde, 1992).

2.1.3.4. Argumentação e Raciocínios Indutivo e Dedutivo

Como foi referido, um ambiente de geometria dinâmica leva a que os alunos construam a matemática e não a encarem como um produto final, estático, como um conjunto de resultados impostos e de exercícios mecanizados. Neste contexto, os alunos constituem-se como parceiros na descoberta de factos geométricos e na reinvenção das relações geométricas, através da exploração e da argumentação indutiva. Para além disso, os alunos aprofundam o seu conhecimento acerca das formas e relações geométricas e, simultaneamente, aprofundam o seu 'vocabulário' de formas legítimas de argumentação. Assim, a argumentação dedutiva torna-se um veículo para compreender e explicar porque é que as conjeturas descobertas de forma indutiva se verificam ou não (Hershkowitz, 1998). Cumulativamente, a argumentação dedutiva torna-se um meio de convencer os outros acerca da validade da conjetura pela descoberta (de Villiers, 1998).

Se, por um lado, o ensino em ambientes tecnológicos de geometria deve ter, preferencialmente, um formato de análise indutiva de propriedades e relações que se mantêm inalteradas quando manipuladas (Yu, Barrett & Presmeg, 2009), por outro, as justificações das construções feitas nestes ambientes levarão a um desenvolvimento da argumentação dedutiva (Paniati, 2009). É, pois, possível considerar o computador como um contexto de ligação entre a argumentação empírica e a dedutiva (Laborde, 1998).

A importância da argumentação dedutiva está patente na literatura (Jones, 2000). Durante os últimos vinte anos, a investigação sobre a utilização de *software* interativo, a nível nacional e internacional, incidiu em dois aspetos particularmente importantes do pensamento geométrico: (1) os seus efeitos na compreensão pelos alunos das figuras geométricas e das suas propriedades e (2) os seus efeitos na argumentação dedutiva dos alunos (Hollebrands & Smith, 2009).

Num estudo realizado num contexto de aprendizagem, em sala de aula, sobre as propriedades dos quadriláteros com recurso a *software* de geometria dinâmica, Jones (2000) concluiu que os significados atribuídos pelos alunos a raciocínios dedutivos foram moldados, não só pelas tarefas realizadas, pelas interações com o professor e outros alunos, mas também pelas características do próprio software.

Existem algumas questões que têm sido levantadas quanto à natureza das 'verdades matemáticas' emergentes das resoluções efetuadas com os AGDs (Chazan, 1993a; Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000; Hoyles & Jones, 1998). Essa mudança é descrita por Fonseca (2004), da forma seguinte: "Com os AGD os alunos facilmente se convencem da validade das suas conjecturas, retirando assim ao raciocínio dedutivo a função principal que exercia noutros tempos: garantir a verdade" (p.178).

No entanto, se o foco incidir nas dependências entre os elementos das construções, tal pode ajudar os alunos a notar relações matemáticas relevantes (Jones, 2000). As construções geométricas dinâmicas estão, em todo o caso, associadas com a geometria formal dado que as dependências que nelas estão subjacentes podem ser encaradas como estando intimamente relacionadas com as provas matemáticas (Stahl, 2013).

Apesar de as características do *software* proporcionarem uma boa forma de trabalho com teoremas geométricos, pode demorar algum tempo até que comecem a sentir-se os efeitos benéficos dessa aprendizagem, especialmente quando os alunos estão numa fase inicial ou intermédia do uso desse *software* (Jones, 2000).

Não devemos assumir que (a) os alunos "verão" automaticamente as propriedades geométricas formais que estão "construídas dentro" das figuras que se podem arrastar (resistentes ou que não se "desfazem" por arrastamento) ou (b) que os alunos "verão" uma figura resistente como "representante" de algum conceito geométrico formal. É necessário um grande investimento no trabalho conceptual para iniciar os alunos na interpretação das invariantes, por via de arrastamento, em termos de propriedades geométricas formais. De facto, quando os alunos estão num estádio inicial de contacto com o ambiente analisam as figuras resistentes e começam por notar as *restrições* ao movimento. Mais tarde, e frequentemente só após um grande esforço e apoio educativo, começam por conceptualizar as restrições ao movimento e as regularidades, em termos de propriedades geométricas formais (Battista, 2009). Jones (2000) descreve um exemplo dessa evolução durante um estudo com implementação de uma sequência de tarefas num *software* interativo de geometria com quadriláteros.

Para além da investigação das formas geométricas pela manipulação existem mais dois tipos de possíveis tarefas para alunos com mais experiência. Primeiro, os alunos podem, eles próprios, utilizar as ferramentas do *software* para construir figuras resistentes, para que as propriedades cruciais da construção permaneçam inalteradas quando partes da figura são arrastadas. Em segundo lugar, é solicitado que os alunos justifiquem ou provem as conjeturas emergentes das suas explorações com o *software* geométrico (Battista, 2009).

Uma característica chave é o que Gravemeijer (1998) denomina por "reinvenção através da matematização progressiva". Os alunos são confrontados com situações nas quais observam e resolvem problemas num contexto geométrico realístico e investigam as invariantes de figuras geométricas e as relações submetidas a mudanças realísticas.

Um exemplo disso é o estudo apresentado por Flores (2009), em que num contexto de utilização de figuras interativas emerge a descoberta de propriedades das formas e transformações, assim como a criação de oportunidades para a formulação de conjeturas.

2.1.3.5. Aprendizagem Colaborativa num Ambiente de Geometria Dinâmica

Desde cedo se reconheceu que as vantagens da utilização das tecnologias não se esgotam na capacidade de visualização, pois estas permitem aos alunos (e matemáticos) atribuir sentido às ideias matemáticas (Burril, 2002; Tall, 2009) e, deste modo, construir significados. Em particular, o GeoGebra providencia um ambiente que possibilita que pequenos grupos de alunos, de forma colaborativa, discutam, trabalhem e explorem problemas matemáticos. Traduz-se, assim, num ambiente rico de aprendizagem, de exploração e de construção (Tacaci, Stankov & Milanovic, 2015).

Dos estudos realizados até ao momento é sabido que a utilização de *softwares* de geometria dinâmica pode trazer benefícios em termos académicos (Johnson, 2002; Han, 2007; Bhagat & Chang, 2015). Mas interessa fazer uma análise mais profunda dos processos utilizados pelos alunos nestes ambientes e entender como é que os alunos aprendem, em conjunto, utilizando o computador (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006).

Wei e Ismail (2010) analisaram as interações entre alunos no âmbito da Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Ambientes de Geometria Dinâmica (ACAGD), recorrendo ao GeoGebra. Estes autores referem que o principal estilo de intervenção, utilizado pelos alunos, é a *condução*, que se caracteriza por um longo fluxo de intervenções dos alunos com vista a uma determinada resposta ou posição, envolvendo frequentemente explicações detalhadas e o questionamento. Para além disso, as estratégias mais utilizadas foram: a *verificação*, em que os alunos procuram perceber se existe um entendimento partilhado; o *convite*, em que os alunos exploram uma nova direção, para ver "o que acontece se..."; e a *travagem*, em que um aluno procura focar o seu par numa determinada ideia ou quando pretende encerrar uma discussão (Wei & Ismail, 2010). No estudo realizado por estes autores surgem interacções dos alunos quando estão a colaborar para resolver problemas em conjunto. No entanto, o estilo de *condução* surge porque, por vezes, alguns alunos dominam ligeiramente a colaboração.

Também Sinclair (2005) estudou os estilos e estratégias de intervenção entre pares num ambiente de geometria dinâmica *online* e concluiu que os alunos intervêm para corrigir erros, informar, parar diálogos, iniciar experimentações e comunicar ao par o seu ponto de vista de forma a desenvolver a compreensão matemática.

Stahl (2016) num outro estudo que envolveu o trabalho de grupo num AGD *online*, concluiu que a forma como os alunos interagiram resultou num desenvolvimento de grupo superior à soma das suas partes, estendendo o significado de desenvolvimento proximal de Vygotsky, que se foca na intervenção de um adulto ou de um par com mais conhecimento.

Os estudos referidos vêm enfatizar a importância do estudo das interações existentes nestes ambientes e, por consequência, permitem reconhecer a importância do feedback, não só entre alunos, mas também o que provém do computador.

2.2. Feedback

Esta seção começa por abordar a noção de feedback, tal como ela é utilizada no quotidiano. Seguidamente, é apresentado o conceito de feedback adotado neste estudo, para depois desenvolver um enquadramento histórico do feedback na aprendizagem. No que se refere ao contexto da aprendizagem, é considerado o feedback que emerge das interações entre alunos bem como o feedback proporcionado pelo computador. É ainda destacado o contributo do feedback para a construção de significados. Por fim, são analisados modelos que se referem à natureza cíclica do feedback como mecanismo de autorregulação.

2.2.1. Uma Perspetiva Evolutiva do Papel Atribuído ao Feedback

O termo feedback foi inicialmente utilizado na engenharia do som e tem origem inglesa. Atualmente, o termo feedback é utilizado em áreas tão díspares que vão desde a administração de empresas até à psicologia, passando naturalmente pela educação. Assim sendo, consoante o contexto, pode assumir vários significados, como realimentar, retroalimentar, dar resposta ou, simplesmente reagir. Em particular, os dois últimos significados são utilizados na comunicação, sendo o feedback a reação ou a resposta do recetor a uma mensagem enviada.

O feedback ainda pode ser visto como informação dada acerca da diferença entre o nível atual e um nível de referência de determinado parâmetro de um sistema, a qual é usada para alterar, de alguma forma, essa mesma diferença (Ramaprasad, 1983).

O feedback tem sido um dos aspetos mais incompreendidos no processo de ensino e aprendizagem (Cohen, 1985; Black & Wiliam, 2010). No entanto, a sua importância neste processo está patente na forma como é caracterizado e considerado, designadamente: um dos fios condutores da avaliação formativa (Black & Wiliam, 1998), uma das influências mais poderosas na aprendizagem e no desempenho escolar (Hattie & Timperley, 2007), a força vital da aprendizagem (Smith, 2007) ou, ainda, a forma mais eficaz de intervenção educativa (Hattie, 1999; Wiliam, 2007).

Apesar de não ser um conceito definido de forma consensual, no contexto educativo, pode-se considerar o feedback como qualquer tipo de mensagem que surja como resposta à ação do aluno (Mason & Bruning, 2001).

Neste estudo, o conceito de feedback assume uma perspetiva mais abrangente: um sujeito, ou um objeto, emite feedback quando reage a um determinado estímulo ou ação[8]. Um sujeito recebe feedback quando retira informação do feedback emitido. Essa informação advém da perceção ou da interpretação do sujeito e pode conter pistas que acionam e guiam a procura de mais informação. Em particular, para os alunos, receber feedback pode contribuir para o desenvolvimento de estratégias, tendo em vista a resolução de um problema (Pollock, 2012). Estas estratégias podem encurtar a distância entre a posição do aluno e o objetivo a alcançar (Ramaprasad, 1983).

A psicologia behaviorista descreve o modo como o comportamento de pessoas (e animais) é o resultado das suas repostas a estímulos. Esta corrente desenvolveu a capacidade de generalizar a ideia de estímulo e resposta para criar cenários de previsibilidade, assumindo que a forma como uma pessoa melhora o seu desempenho resulta do feedback emitido através de um estímulo exterior. Assim, esta abordagem procurava estabelecer as leis do comportamento, aplicando um estímulo e observando as respostas (Pollock, 2012).

[8] Para o aluno, esse estímulo pode ser externo (como por exemplo uma ação verbal de outro aluno, ou a imagem que surge do ecrã de computador), ou interno (como por exemplo a consecução de determinado objetivo). Para o computador esse estímulo é sempre externo (quando o aluno realiza uma ação com o rato ou com o teclado).

Nesta fase, a maior parte da investigação sobre feedback era conceptualizada dentro do enquadramento associacionista ou behaviorista no qual o feedback é visto como um contingente de eventos que reforçam ou enfraquecem as respostas do individuo. Segundo este ponto de vista, os erros, ao contrário das respostas corretas, não recebiam feedback construtivo. Esta visão de funcionamento do feedback, apesar de mecanicista, de facto enfatizava as consequências positivas das performances de sucesso e ajudava os professores a movimentarem-se para uma postura educativa mais positiva. No entanto, esta abordagem não providenciava uma forma sistemática para a correção dos erros e, deste modo, representava um conceito limitado do papel que o feedback poderia ter na aprendizagem (Mason & Bruning, 2001).

Assim, nesta primeira abordagem, o conceito de feedback limitava-se a uma informação que era dada ao aluno acerca da sua performance sendo que o seu principal objetivo era assinalar ideias erróneas ou erros, focando-se acima de tudo na dicotomia entre o certo e o errado (James, 2008). Nesta visão, o feedback tem um único sentido – do professor para o aluno. Esta abordagem parece ainda prevalecer em muitas salas de aula. O feedback tende a focar-se nos resultados e na performance dos alunos nos testes em vez de se debruçar sobre as aprendizagens. Parece ainda persistir uma tendência dos professores para a adoção de pedagogias mais ligadas a abordagens comportamentalistas (OCDE, 2012).

O conceito de feedback embora não se circunscreva ao domínio da avaliação, está muito ligado a esta problemática (Irons, 2008) e, em particular, ao modo de encarar o erro no processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, na perspetiva behaviorista o feedback dado pelo professor reflete a incoerência existente entre a produção do aluno e uma resposta pré-estabelecida (a resposta considerada certa) (Pinto & Santos, 2006).

Uma abordagem pós-behaviorista do feedback tem lugar a partir do desenvolvimento da psicologia cognitiva na qual os erros são encarados como uma parte importante do processo de ensino e aprendizagem (Locke & Latham, 2002; Mason & Bruning, 2001). Neste contexto, o professor deve aproveitar o erro, procurando, através do feedback, regular o processo de ensino e aprendizagem. Analogamente, a avaliação passa a ser entendida como um meio de reunir informação acerca do progresso dos alunos face aos objetivos de aprendizagem e o fornecimento de feedback como uma forma de melhorar a aprendizagem (Heritage, 2007). Assim, é dada ênfase ao diálogo entre o professor e o aluno e à reflexão do aluno sobre a sua realização de determinada tarefa.

Nesta caracterização de feedback está inerente a ideia de que a informação proporcionada é utilizada e aproveitada para diminuir o diferencial entre o estado atual da aprendizagem e o que se pretende que venha a acontecer. Assim sendo, pode-se dizer que o feedback é um processo no qual a informação acerca do passado ou do presente influencia necessariamente o mesmo fenómeno, no presente ou no futuro.

É comum falar-se de "dar" e "receber" feedback, mas, por vezes, o feedback não é uma "dádiva" de uma pessoa para outra. Numa perspetiva construtivista o feedback é um processo recíproco (Askew & Lodge, 2000). Os professores recorrem ao feedback para oferecerem aos alunos pontos de reflexão, promovendo assim numa comunicação com dois sentidos (discussão) ou criar um *pingue-pongue*, como referem Askew e Lodge (2000). Assim, o feedback não provém só dos professores para os alunos, mas também percorre o sentido contrário, dos alunos para o professor. Neste último sentido, do aluno para o professor, acentua a procura, por parte do professor, das perspetivas dos alunos. É através das respostas dos alunos que o professor tenta promover a aprendizagem (Swaffield, 2008), reintegrando essa informação no processo de ensino.

No contexto avaliativo, o feedback formativo é caracterizado como sendo qualquer tipo de informação, processo ou atividade que comporte ou potencie a aprendizagem dos alunos (Irons, 2008). Ou de forma mais geral, o feedback formativo é aquele que é dado ao aluno com o propósito de o ajudar a modificar o seu raciocínio ou comportamento de forma a atingir os objetivos da atividade em que se encontra envolvido (Shute, 2008).

Da revisão da literatura produzida por Black e Wiliam (1998) sobressai o poder do diálogo na atribuição de feedback formativo aos alunos.

Um conceito intimamente ligado ao de feedback é o de coavaliação. Segundo Applebaum (2008), a coavaliação envolve, não só a formulação de impressões pessoais sobre o trabalho dos colegas, relativamente a normas de performance previamente estabelecidas, mas também engloba as contribuições dos alunos para a aprendizagem dos seus pares. Como exemplo, é apresentado o questionamento entre pares durante a realização de trabalhos de investigação em matemática. De facto, a coavaliação pode ser formativa se envolver feedback qualitativo detalhado acerca de aspetos melhores ou piores com implicações nas melhorias do produto atual ou de outros subsequentes. Os conceitos de autoavaliação e de coavaliação estão intimamente ligados através da noção de feedback. Os momentos de coavaliação podem constituir excelentes oportunidades para os alunos fornecerem feedback uns aos outros (O'Donnell & Topping, 2009).

Tendo como referência o sistema educativo português, a OCDE refere que um enfoque mais pronunciado numa cultura de feedback para as aprendizagens levaria a que, em primeiro lugar, houvesse um reforço do papel do aluno no processo de aprendizagem e um maior envolvimento e responsabilidade dos aprendentes de todas as idades no sistema escolar (OCDE, 2012).

Assim, considera-se que o feedback deve: (1) focar-se na aprendizagem do aluno; (2) focar-se preferencialmente na tarefa em vez de no estudante; (3) focar-se no processo em vez do produto; (4) focar-se no progresso; (5) focar-se nas qualidades particulares do trabalho; (6) aconselhar sobre como melhorar; (7) encorajar os alunos a pensar; (8) requerer um tipo de ação que seja desafiadora mas exequível; (9) ser específico; (10) evitar comparação com outros; (11) ser entendível pelo aluno (Swaffield, 2008).

Seguindo essa linha de pensamento, o feedback pode ser visto como sendo um elemento integrante de um reportório de estratégias conectadas que promovem a aprendizagem (Gipps, 1996; Gipps & Stobart, 1997), tornando-se uma força vital na aprendizagem (Smith, 2007).

Já em 1960, Miller, Galanter e Pribram ao desenvolverem o seu trabalho sobre a estrutura do comportamento descreviam os *loops* de feedback como sendo constituídos por quatro elementos: uma função de entrada, um valor de referência, um comparador e uma função de saída. Estes *loops* são acionados a partir de um estímulo exterior que causa um efeito no ambiente. A função de entrada funciona como um sensor de perceção, detetando um valor percecionado que é depois comparado com o valor de referência ou *standard*. A função de saída pode levar a ajustamentos (se necessário), para mudar o valor percecionado na direção *standard*.

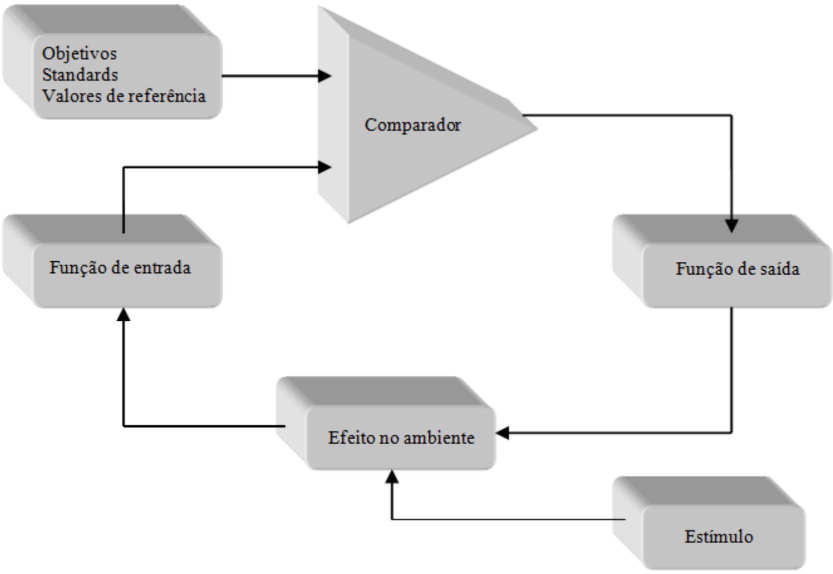


Fig. 2.1. Esquema de *loop* de feedback apresentado em Carver e Scheier (2000, p.43) e Carver (2004, p.14).

No modelo de ensino co-construtivista, o feedback é um diálogo alimentado por este tipo de *loops* conectando os participantes envolvidos numa atividade. Aqui o papel do professor consiste em promover o diálogo, com e entre os seus alunos (diálogos co-construtivistas entre pares), e o papel do aluno pressupõe um envolvimento ativo no processo de aprendizagem (Askew & Lodge, 2000).

De facto, aprendemos através das conversações em que nos envolvemos, connosco próprios e com outras pessoas (Smith, 2007). Já o diálogo é uma forma dinâmica e criativa de conversação onde existe espaço para todas as vozes, em que cada pessoa é representada na sua totalidade e em que a troca decorre nos dois sentidos num cruzamento de ideias, pensamentos, opiniões e sentimentos. Da mesma forma, a aprendizagem e o desenvolvimento de conhecimento também são um processo dinâmico e criativo (Anderson, 1999).

Kulhavy e Stock (1989) descrevem a verificação e a elaboração como sendo dois processos que os indivíduos empregam quando utilizam o feedback com resultados produtivos. A verificação é a tarefa simples de determinar se a resposta está correta ou incorreta. A elaboração é o processo informal que guia o aprendente na direção das respostas corretas. Nesta abordagem, o feedback ou o diálogo não está essencialmente preocupado com a produção de juízos. Por isso, esse feedback segue uma lógica menos dogmática e mais interativa.

Neste contexto, a causa e o efeito não são consideradas tão importantes, pois todas as partes do sistema estão conectadas. Como consequência, em vez da punição e da crítica têm lugar a procura da resolução de problemas e a construção da aprendizagem a partir do diálogo. Todas as partes envolvidas nesses diálogos têm expectativas de aprendizagem (Askew & Lodge, 2000).

No modelo sociocultural ou co-construtivista, o feedback é parte de um diálogo em curso, o qual tanto pode ser iniciado pelo professor como pelos alunos e perante o qual os alunos contribuem com os seus conhecimentos para que todos aprendam, incluindo o professor. As distinções entre alunos e professor são difusas e o feedback recíproco aparece integrado na aprendizagem, assemelhando-se a laçadas em desenvolvimento (Askew & Lodge, 2000).

O diálogo requer que exista um estado de participação refletido na vontade de seguir a conversação quando esta segue por direções "não ensaiadas", promovendo consequências que não foram previamente antecipadas, provocando vulnerabilidade, um sentido de evolução no tempo e um sentido de autenticidade, bem como assumindo a honestidade (Anderson, 1999).

Como refere Carnell (2000), a ideia chave do diálogo é a transformação. Esse estado de mudança pode não se relacionar com o comportamento, mas antes com a alteração das perceções das experiências – a mudança na forma como nós nos vemos em relação aos outros.

Mercer, Dawes, Wegerif e Sams (2004) classificam o diálogo exploratório como sendo uma situação na qual:

- É partilhada toda a informação acerca de determinadas ideias.
- Todos os membros do grupo são encorajados a contribuir.
- As opiniões e ideias individuais são respeitadas e consideradas.
- As argumentações são realizadas de forma clara.
- Os desafios e alternativas são explícitos e negociados.
- O grupo procura um acordo antes de tomar uma decisão ou atuar (p.146).

Robinson (2011) identifica quatro características que permitem um diálogo eficaz em sala de aula:

- Um ambiente que encoraje e valorize o diálogo;
- Experiências enriquecedoras que inspirem o espirito da investigação;
- Potencializar a aprendizagem através da colaboração;

- Avaliar o processo de aprendizagem.

A importância do diálogo e a forma como este pode servir de base à aprendizagem da matemática está retratada na obra *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique;* da autoria de Alrø e Skovsmose (2004). Tendo por base a educação matemática crítica, estes autores desenvolvem uma teoria de aprendizagem da matemática onde tomam a noção de diálogo como elemento central.

A função do diálogo torna-se patente quando tentamos explicar ideias a outros, porque a nossa compreensão é testada sempre que tentamos ligar as ideias e usar um vocabulário que estruture o nosso discurso de forma a ser compreendido pelo outro. Para tirar todo o potencial do diálogo na aprendizagem da matemática, torna-se importante criar um ambiente que fomente a comunicação, considerando com especial atenção o papel do questionamento como meio de promoção do raciocínio e da aprendizagem (Briten, Stevens & Treby, 2012).

As interações dos alunos podem ser conceptualizadas como um 'diálogo' entre o aluno e *milieu* (Brousseau, 1997). O feedback gerado por esse *millieu* inclui tanto o feedback verbal dos alunos como o do professor. Esta visão de Brousseau será desenvolvida mais à frente.

2.2.2. Feedback Oral

Neste enquadramento, assume especial importância o feedback oral, que parece ter menor estatuto em sala de aula relativamente ao escrito, mas cuja importância é amplamente reconhecida na aprendizagem dos alunos (Hodgen & Webb, 2008).

2.2.2.1. Feedback entre Professor e Alunos

Na gestão da sua aula, o professor necessita não só de saber observar e ouvir, mas também de saber comunicar, em particular, colocando questões que irão ajudar os alunos a progredir numa tarefa (Smith & Stein, 2011). A forma mais antiga e talvez a mais usual de questionamento obedece a um padrão em que o professor inicia com uma questão à qual o aluno responde (frequentemente com uma ou duas palavras) e o professor *avalia* a resposta do aluno como estando certa ou errada (Mehan, 1979).

A distinção entre o feedback oral mais eficaz ou menos depende do tipo de questões colocadas e da forma como estas são utilizadas (Hodgen & Webb, 2008). O facto de uma determinada questão ser desafiante para o aluno irá depender necessariamente do seu conhecimento. Assim sendo, a qualidade das questões depende igualmente do conhecimento que o professor tem acerca do aluno. Em todo o caso, a colocação de questões de alto nível torna-se mais difícil, pois pressupõe que os alunos construam novo conhecimento a partir delas. Normalmente, as questões de alto nível requerem a existência de tempo e espaço para que os aprendentes consigam interiorizar o desafio e gerar respostas (Hodgen & Webb, 2008). O tempo normal de espera pelas respostas dos alunos, depois de questionados, na maioria das salas de aula, é de cerca de um segundo; esse tempo de espera, para questões de alto nível, passa a três segundos, tendo efeitos significativos no envolvimento dos alunos nas discussões (Rowe, 1974), incluindo um maior número de alunos na participação, permitindo respostas mais prolongadas, a existência de alunos a comentar as ideias uns dos outros e uma maior variedade de ideias. Para além disso, o aumento do tempo de espera dá ênfase à importância atribuída às respostas, assim como transmite expectativas positivas quanto à qualidade das respostas. No entanto, se esse tempo de espera aumentar para mais do que cerca de cinco segundos, pode ter um efeito indesejado e diminuir a qualidade dos diálogos (Tobin, 1986).

Independentemente da matemática que as questões pretendam levar a aprender, elas devem partir do que o aluno sabe, movendo-se entre o ponto em que o aluno está e aquele em que se deseja que esteja no final da aprendizagem. Nas palavras de Dewey (1902) trata-se de uma "reconstrução contínua" (p.11). Portanto, o questionamento funciona como uma ponte entre a matemática que o aprendente sabe e a matemática que ele deverá vir a saber. Considerar só uma das partes pode resultar em questões sem resposta por parte dos alunos e à estagnação do seu pensamento. Assim, o enquadramento das questões é fundamental (Smith & Stein, 2011).

Clarke (2003) encontrou ligações fortes entre a linguagem dos professores e a cultura de sala de aula. A natureza e a qualidade do feedback ajudam a criar a cultura de sala de aula e, inversamente, a cultura predominante de sala de aula influencia a forma como os alunos respondem ao feedback (Swaffield, 2008).

Kluger e DeNisi (1996) identificaram quatro possíveis formas de reação ao feedback: (1) aumento de esforço; (2) aumento ou diminuição das normas almejadas;

(3) abandono do objetivo; (4) rejeição do feedback e negação da existência de uma discrepância.

As ideias e conceitos debatidos, presentes em grande parte na literatura, têm como protagonistas o professor e o aluno. No entanto, à semelhança deste estudo, nas tarefas de investigação o questionamento muda de protagonistas (Alrø & Skovsmose, 2004), centrando-se principalmente entre os alunos.

2.2.2.2. Feedback entre Alunos

O processo de resposta ao feedback é um processo complexo, pois sabe-se que as pessoas reagem de diferentes formas ao que pode parecer o mesmo feedback, fazendo assim variar os efeitos do feedback. Esses efeitos irão depender do aluno e da sua relação com quem providencia o feedback (Swaffield, 2008). Também se sabe que os alunos reagem de forma diferente ao feedback dado por colegas e adultos (Dweck & Bush, 1976). Os colegas são capazes de criticar e aconselhar de uma forma não ameaçadora e fazem-no numa linguagem que os alunos utilizam normalmente (Towler & Broadfoot, 1992; Black, Harrison, Lee, Marshal & Wiliam, 2003). Para além disso, nalguns casos em que existe discrepância entre a performance atual e a desejada, os alunos mais eficazes procuram feedback de fontes externas, como sejam as contribuições dos seus colegas em grupos colaborativos (Butler & Winne, 1995).

As evidências empíricas dizem-nos que, nas condições certas, os alunos que trabalham com os seus pares, para além de receberem mais feedback e apoio, podem cumulativamente obter melhor qualidade de feedback e apoio do que obteriam de um professor. Isto não se deve só ao facto de continuarem a questionar-se uns aos outros quando não compreendem (ao contrário das interações com o professor), mas porque os alunos utilizam uma linguagem mais acessível e compreensível entre eles do que a do professor (Smith, 2007).

Especificamente, o diálogo estabelecido pelos alunos ao trabalharem em grupo, em atividades investigativas que envolvem descrever, predizer, explorar e explicar, ajuda a melhorar a compreensão (Briten, Stevens & Treby, 2012).

As características do diálogo são: igualdade, partilha, espontaneidade, colaboração e reciprocidade. Os diálogos permitem que os alunos sejam mais independentes do professor e adquiram um maior controlo e responsabilidade pela sua aprendizagem. Apesar das vantagens dos diálogos entre os alunos, estes geralmente consideram que os mesmos não são admitidos na sala de aula (Carnell, 2000). Os alunos não estão habituados a estabelecerem diálogos para desenvolver a sua aprendizagem (Brookes & Brookes, 1993). Este facto transparece nas palavras de uma aluna que participou no presente estudo: “Os outros professores chateiam-se quando falamos, o professor chateia-se quando não falamos.”

Naturalmente a aprendizagem colaborativa maximiza as oportunidades de feedback. Os alunos que não formam pares e que não partilham com os seus colegas durante o tempo designado para o fazer, não são tão bem-sucedidos (Pollock, 2012).

Goos e Geiger (1995) descrevem um estudo desenvolvido no âmbito da aprendizagem colaborativa, com a utilização de computadores, em que codificam o estilo de discussão colaborativa incorporando três elementos:

Auto-divulgação: Afirmações e respostas auto-orientadas que clarificam, estendem, avaliam ou justificam o seu próprio raciocínio;

Pedido de feedback: Questões auto-orientadas que convidam o par a criticar o seu próprio raciocínio;

Monitorização do par: Afirmações orientadas para o par, questões e respostas que representam uma tentativa para percecionar o raciocínio do par.

Analogamente, Alrø e Skovsmose (2004) enfatizam o papel das interações entre alunos num contexto em que estes podem colocar questões e escolher caminhos diferentes de investigação. Referem ainda que os ambientes de geometria dinâmica podem estabelecer esse contexto e que nesse ambiente as questões do professor do tipo “E se…?” ou “Porque é que é assim?” passam a ser as questões formuladas pelos alunos.

Reynolds (2009) discute os benefícios da avaliação e críticas entre alunos. Este autor defende que as críticas dos pares proporcionam aos alunos um feedback autêntico e mais similar ao feedback que um dia encontrarão num contexto profissional. O autor descreve numerosos benefícios das críticas dos pares tais como, a melhoria dos produtos finais, discussões mais vivas em sala de aula, um ambiente de sala de aula colegial e uma compreensão mais concreta da audiência.

Considerar o feedback como uma estratégia de aprendizagem e não como algo que é imposto, inspira os professores a ensinar os alunos a autoavaliarem-se e a utilizarem o feedback de outros como uma parte crítica de todas as aulas. Para além disso, quando os alunos recebem frequentemente feedback dos seus pares nas aulas existem menos interrupções ou perturbações e os alunos mantêm-se mais focados, realizando as tarefas de modo mais aprofundado (Pollock, 2012).

Cumulativamente, se os alunos não percebem algo depois de uma segunda explicação do professor diferentes reações podem surgir. Os rapazes tendem a não voltar a perguntar receando revelar ignorância. Por seu lado, as raparigas evitam voltar a perguntar para não fazerem o professor perder tempo. Mas quando estão numa situação entre pares irão continuar a perguntar uns aos outros (Black *et al*., 2003).

As implicações pedagógicas do feedback interativo só recentemente começaram a ser consideradas nos debates e na investigação educacional, sendo geralmente reconhecidas como significantes, mas não lhes sendo ainda dado o devido realce (Black & Wiliam, 2010).

2.2.3. Feedback do Computador

Brousseau (1997) coloca como ideia central aproximar o trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador. Cabe ao aluno formular hipóteses, testar conjeturas, provar, construir modelos, conceitos, teorias e socializar os resultados. O papel do professor centra-se em providenciar situações favoráveis para que o aluno aja sobre o saber, transformando-o em conhecimento para o mesmo. Ao enveredar por determinada tarefa, o aluno interage com o meio (*milieu*, no original) e, em particular, com o computador. As interações entre o aluno e o meio podem ser conceptualizadas como um diálogo entre o aluno (ou grupo de alunos) e o feedback do meio (Brousseau, 1997). Este autor considera que existem três tipos de interações entre o aluno e o meio, que designa por: ação, formulação e validação. Torna-se impossível isolar totalmente a ação dos seus atores e dos mediadores (Santos & Rodrigues, 1998), uma vez que estão em constante interação e, como consequência, em constante mudança. A ação envolve a construção, por parte do aluno, de uma solução para um determinado problema ou objetivo. Pode dar-se como exemplo a construção de um quadrado que mantém as propriedades que o definem como quadrado mesmo depois de se arrastar um dos seus vértices (Laborde, 2014). Neste caso, se o aluno chega logo à solução correta, aparentemente o feedback do meio parece estar a desempenhar um papel pouco representativo ou nulo. No entanto, Brousseau refere que, nestes casos, o aluno pode estar a antever os resultados das suas próprias escolhas e estratégias. Assim, o meio emite efetivamente feedback num formato que pode ser entendido como expectável, não sendo por isso necessário que o aluno adapte as suas estratégias (Brousseau, 1997).

O feedback do computador no caso dos AGDs ocorre sempre que os alunos testam uma determinada estratégia. Essas estratégias podem ser melhoradas quando o aluno incorpora a informação proveniente do feedback obtido anteriormente (Joubert, 2013).

Seguindo a linha de raciocínio exposta anteriormente sobre a noção de feedback, nesta investigação, o feedback do computador é toda a reação produzida pelo computador quando nele é executada uma determinada ação.

Curiosamente, muita da investigação sobre feedback, desde 1970, foi dedicada a processos de ensino assistidos por computador. Os programadores que desenvolvem os *softwares* empenharam um número considerável de recursos para identificar como incorporar o feedback para manter a motivação dos utilizadores individuais pelo *software* computacional e também terem ganhos de compreensão de conteúdos ou de capacidades. Como o *software* do computador reduz intencionalmente a interação humana, algumas das preocupações dos investigadores não se transportaram para a sala de aula, onde os professores podem mediar a aprendizagem (Mason & Bruning, 2001).

Embora desprovido da presença humana, um feedback bem concebido dado por meio de *softwares* de aprendizagem pode ser mais encorajador e menos ameaçador do que o dos professores cuja atitude pode, eventualmente, contaminar a interação (Swaffield, 2008). Há mais de três décadas que Papert (1980) enfatizou o potencial das tecnologias ao propiciar feedback impessoal e de forma não sentenciosa. Observou então como a motivação dos alunos aumentava e as aprendizagens eram potenciadas. Essa forma não sentenciosa é igualmente enfatizada por Kieran e Drijvers (2006). Outra vantagem comparativa resulta do facto de os professores não conseguirem atribuir feedback a cada aluno individualmente e em tempo útil e de esse feedback ser muitas vezes assíncrono (Sangwin *et al*., 2010).

O feedback que provem de fontes externas ao indivíduo pode ser acidental, quando emerge de interações não planeadas com o meio envolvente, colegas ou professores. Ou pode ser intencional quando providenciado por professores (por exemplo através de comentários escritos) ou ainda pelos *media* (por exemplo, através do ecrã do computador) (Butler & Winne, 1995).

A existência de feedback do computador é referida por autores como Papert (1980), Weir (1987), Hillel, (1992), Beare (1993), Junqueira (1995), Coelho (1996), Arzarello, Gallino, Michelletti, Olivero, Paola e Robutti (1998), Laborde (1998, 2014), Coelho e Saraiva (2000), Kieran e Drijvers (2006), Swaffield (2008), Sangwin e colegas (2010), Bokhove e Drijvers (2011), Irving e Crawford (2011) e Leung (2015), entre outros, o que fundamenta o alargamento do conceito de feedback ao computador. Outros autores adotam formas diferentes para designar o feedback do computador como é o caso de De Corte (1992), ao referir o fornecimento de suporte aos alunos através do computador ou, no caso de Noss, Healy, Hoyles e Hoelzl (1994), quando referem o termo "computational scaffolding", ou ainda, no caso de Margolinas (1993) que fala de "retroações do meio".

Por exemplo, no construcionismo de Papert (1980) a aprendizagem ocorre quando o conhecimento é construído fora da mente e os resultados dessa construção são avaliados através de um processo de feedback do sujeito ao observar e interagir com o objeto e com outros sujeitos. Assim, a aprendizagem passa a ser o resultado da perceção baseada no feedback de algo ou alguém. Papert (1996) especifica que esse objeto poderá ser o ecrã de um computador (num processo que o autor denomina de criação de entidades públicas, ou seja, entidades que estão sujeitas ao escrutínio de outros sujeitos). Papert acrescenta ainda que, ao criar estas entidades, o aluno é capaz de interagir com elas e desta forma entrar num ciclo de feedback que estabelece uma base para a aprendizagem.

Os computadores permitem que sejam realizadas inúmeras operações com objetos, fornecendo várias formas de feedback. O feedback emitido pelo computador pode assumir formas muito sofisticadas quando comparado com uma situação de papel e lápis (Laborde, 1998). No entanto, pode-se associar determinadas características ou formas de feedback comuns a grande parte dos *softwares* computacionais. Neste contexto, o computador surge como um elemento interveniente no processo de aprendizagem pois fornece feedback visual imediato e modela as interações dos alunos.

Existem alguns estudos (Papert, 1980; Beare, 1993; Deaney, Ruthven & Hennessy, 2003; Kieran & Drijvers, 2006) que mostram que o feedback do computador pode ser considerado um fator importante para potencializar as aprendizagens dos alunos. A produção de feedback qualitativo útil é um dos maiores desafios para o ensino. Esse feedback é visto como um dos maiores benefícios quando se utiliza o computador (Sangwin *et al*., 2010).

Nos AGDs o feedback do computador vai além da natureza dual do certo ou errado. Butler e Winne (1995) referem que o feedback mais produtivo tem duas facetas, ao proporcionar: a) informação acerca de determinado domínio e b) informação que serve de guia a estratégias que processem a informação desse domínio específico.

Essa formulação de estratégias constitui um ponto fulcral na caracterização do feedback. Laborde (2014) reforça esta ideia, ao referir que o feedback do computador funciona como um catalisador para a mudança das estratégias, no caso de o aluno estar a seguir uma estratégia errada. Assim, os alunos não só ficam convencidos de que a sua resposta está errada, como também podem extrair informação desse feedback. Na sequência, essa informação pode ser utilizada para encontrar uma estratégia de resolução mais apropriada. Este processo também pode ser descrito como sendo um "refinamento de conjeturas" (Gravina, 1996).

A extração de informação do feedback do computador está relacionada com a forma como os alunos o interpretam. Junqueira (1995) considera que a interação entre a visualização e o conhecimento geométrico conduz à interpretação do feedback e essa interpretação é realizada a diferentes níveis conceptuais.

De uma forma geral, o feedback do computador traz benefícios ao processo de ensino e aprendizagem da matemática; pode providenciar oportunidades de rapidamente testar ideias, observar invariantes e tornar o aluno mais ousado para fazer generalizações (Hillel, 1992). A forma, quase instantânea, como num ambiente digital, se obtém uma resposta, a par das interações que desencadeia, permite que, com facilidade, os alunos explorem as suas ideias (Sacristán, Calder, Rojano, Santos-Trigo, Friedlander, Meissner, Tabach, Moreno & Perrusquía, 2010). Assim, à medida que os resultados das predições ou conjeturas são rapidamente observados e são facilmente comparados, a discussão é estimulada.

O feedback também ajuda a aperfeiçoar a exatidão requerida para os procedimentos estruturais e a introduzir as operações matemáticas de forma mais explícita (Battista & Van Auken Borrow, 1998). Sangwin e colegas (2010) valorizam também a sofisticação matemática do feedback gerado pelo computador.

Este feedback obtido através da tecnologia proporciona uma oportunidade para a criação de novas formas de entender a matemática; por exemplo, o feedback obtido através de um AGD leva à reflexão através da generalização/abstração dos resultados das ações (Laborde, 2006).

Uma das características dos AGDs é que marca uma diferença essencial entre desenho (significante ou construção empírica) e figura (significado ou construção geométrica). Este significado corresponde ao que Fishbein (1993) denomina por *figural concept*. O desenho é visto como uma construção empírica, não resistente ao arrastamento e uma entidade material. Enquanto uma figura é vista como uma construção geométrica e pode ser considerada um objeto teórico (Laborde, 1993a).

Uma construção geométrica é constituída por uma hierarquia de relações que mantém as propriedades que a caracterizam quando um dos seus elementos é arrastado. O processo de construção geométrica requer a existência de uma comunicação com o computador que inclui uma sequência de objetos geométricos e construções através da seleção de itens do menu e correspondendo a princípios base geométricos (Laborde, 1998).

O feedback visual fornece os alicerces necessários à passagem do desenho para a figura (Junqueira, 1995; Coelho, 1996; Coelho & Saraiva, 2000). No entanto, os alunos podem ficar “presos” algures entre uma construção empírica e uma construção geométrica (Hölzl, 1995, 1996). Se esse feedback dá indícios da inadequabilidade de determinada solução (ou processo) cria uma necessidade de procura de uma outra solução (ou processo). O facto de o *software* incorporar conhecimento e reagir de acordo com a teoria tem um impacto na forma como o aluno aprende (Laborde, 2006). Ao utilizar computadores existem implicações que são inerentes à capacidade do computador de ‘fazer matemática’. Esta capacidade pode ser utilizada para que os alunos trabalhem indutivamente em vez de dedutivamente como é mais usual na aula de matemática (Joubert, 2013). Por exemplo, num AGD, na construção de figuras geométricas, os alunos podem desenvolver conjeturas baseadas nas observações e arrastamentos de características, propriedades e famílias dessas figuras ou de partes das mesmas.

Especificamente, uma característica importante do GeoGebra é que permite que os alunos se envolvam numa aprendizagem ativa através do feedback, arrastando, trabalhando com imagens dinâmicas, fazendo conexões, entre outras (Edwards & Jones, 2006). Mais ainda, este *software* incorpora as definições e axiomas da geometria, providenciando de forma extensiva feedback relativo à validade matemática nas tentativas de *construção e arrastamento* (Stahl, 2016).

Laborde (2014) valoriza a importância do feedback atribuído pelo computador quando os alunos resolvem problemas, funcionando como um catalisador para a mudança de estratégias de resolução, no caso de o aluno estar a seguir uma estratégia errada e apresenta vários exemplos desse facto com o Cabri e o Cabri 3D. Os alunos não só ficam convencidos de que a sua resposta está errada, mas podem ainda extrair informação do feedback que pode ser então utilizada para encontrar uma estratégia de resolução mais apropriada. Hollebrands (2007) distingue dois tipos de estratégias: a reativa, como resposta ao feedback do computador e a proactiva, na qual o aluno antecipa o que o computador é suposto fazer. O que, segundo Makar e Confrey (2006) pode fazer dos alunos, respetivamente, divagadores ou imaginativos (*wanderers* ou *wonderers*, no original). Zbiek e Glass (2001) conjeturam que, provavelmente, os alunos argumentam mais extensivamente e aprofundadamente quando se deparam com um feedback gerado pela tecnologia que entra em conflito com o que eles esperavam (o resultado de uma estratégia proactiva). Esta conjetura foi testada e verificada por Zbiek e Hollebrands (2008) com exemplos utilizando o *Geometer's Sketchpad*.

Tem, por isso, sentido analisar a forma como os alunos interpretam o feedback do computador. Junqueira (1995) considera que a interação entre a visualização e o conhecimento geométrico conduz à interpretação do feedback e essa interpretação é realizada a diferentes níveis conceptuais.

De acordo com a maioria dos investigadores, as ações e estratégias dos alunos, quando interagem com a tecnologia para resolver tarefas matemáticas, são moldadas pela tecnologia. As construções nos AGDs são objetos externos cujo comportamento e feedback requerem interpretação por parte do aluno. As invariantes espaciais nas construções aquando do seu arrastamento representam invariantes geométricas. A tecnologia oferece feedback às ações do utilizador. O papel do feedback tem lugar quando os alunos verificam as suas construções através do modo de arrastamento ou quando utilizam outras ferramentas para verificar as suas conjeturas (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006).

Como foi descrito anteriormente, os AGDs encorajam os alunos a fazer conjeturas e o feedback que obtêm, das medições e do arrastamento, permite que os alunos rapidamente testem essas conjeturas e, assim, as refinem num ciclo recursivo de conjetura – teste – nova conjetura (Olive *et al*., 2010). Já antes e, de forma similar, num contexto de utilização da linguagem *Logo*[9], Weir (1987) referia que um aluno ao executar determinada tarefa pode: tentar uma ação, observar o efeito e responder ao feedback.

Por exemplo, para desenhar um paralelogramo de forma correta com o GeoGebra o aluno necessita de conhecer as propriedades dessa forma e saber como elas se traduzem através das ferramentas disponíveis. Esta construção pode ser realizada de várias formas e, em cada caso, a forma que obtemos irá reagir de diferentes formas ao teste do arrastamento. A parte interessante não é realizar as diferentes construções, mas antever e analisar o seu comportamento ao arrastar (Faggiano & Ronche, 2011).

O arrastamento é a característica mais proeminente dos sistemas de geometria dinâmica. De facto, o arrastamento é o que torna a geometria dinâmica. Tipicamente, uma figura geométrica estática mostra apenas uma posição possível para um determinado objeto ou uma configuração de objetos. No entanto, as proposições geométricas aplicam-se a intervalos de diferentes posições de objetos ou configurações, as quais correspondem ou são consistentes, na sua totalidade, com o conjunto de condições especificadas. O arrastamento permite que uma figura passe por muitas dessas posições diferentes (Stahl, 2016). Assim, o arrastamento torna visível o que só estava acessível a matemáticos experientes, pela forma como eles utilizam a imaginação para colocar as figuras a mudar de posição e de aparência.

Do ponto de vista do aluno que utiliza o rato, o arrastamento torna possível observar os efeitos imediatos da sua ação. Para um aluno que assiste a um arrastamento efetuado por um dos seus pares, isso abre uma janela para o aparecimento de comentários significativos.

Stahl (2016) refere os possíveis papéis que o arrastamento pode ter no trabalho com geometria dinâmica:

- Dar ao aluno um sentido palpável de noções e de relações geométricas.
- Dar ao aluno uma imagem visual de figuras, variações de figuras e de relações invariantes que não podem ser alteradas (dadas as dependências de construção).
- Colocar múltiplos objetos geométricos em relação uns com os outros.

[9] Logo é uma linguagem de programação utilizada no âmbito educativo, criada em 1967 por Bobrow, Feurzeig, Papert e Solomon. Atualmente a linguagem é usualmente relembrada pelo uso da tartaruga (pequeno robot utilizado para fazer as representações gráficas).

- Modificar a forma de uma dada figura geométrica para ver que algumas características se mantêm e outras não.
- Explorar quais os pontos ou figuras que podem mudar de posição ou forma e os que são dependentes e que apenas podem ser movidos indiretamente.
- Testar se uma figura satisfaz condições específicas conforme foi enunciado num problema ou questão.
- Investigar a sua conjetura acerca de determinadas características invariantes, testando se podem ser alteradas.
- Testar se uma construção mantém as relações pretendidas tentando quebrá-las. (Este é o "teste de arrastamento").

Stahl (2016) apresenta ainda os possíveis papéis que podem ser desempenhados pelas construções:

- Dar aos alunos um sentido palpável de construção de figuras geométricas.
- Dar aos alunos uma imagem visual das figuras que vão sendo construídas e das dependências que vão sendo impostas.
- Testar ideias para figuras.
- Testar procedimentos para a construção de figuras.
- Testar procedimentos para a imposição de dependências ou relações.
- Testar se os planos estão corretos e completos.

Resumidamente, o feedback pode ser visto como um auxílio de aprendizagem quando os alunos verificam as suas construções ou teoremas através do modo de arrastamento (NCTM, 2007) ou quando utilizam várias ferramentas para verificar as suas conjeturas (Hoyles & Jones, 1998; Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser, 2006). Por um lado, as invariantes espaciais nas construções aquando do seu arrastamento representam invariantes geométricas que se tornam visíveis para o aluno. Por outro lado, o arrastamento pode funcionar como critério de validação. Uma determinada construção é válida se não for possível "estragá-la" (Healy, Hoelzl, Hoyles & Noss, 1994; Noss, Healy, Hoyles & Hoelzl, 1994) por arrastamento ou se, por outras palavras, a figura for "robusta" (Balacheff & Sutherland, 1994).

Arzarello, Olivero, Paola & Robutti (2002), dando sequência ao trabalho desenvolvido por Hölzl (1995, 1996), categorizaram algumas modalidades de arrastamento na resolução de problemas abertos:

- *Arrastamento divagante*: mover os pontos básicos sobre o ecrã aleatoriamente, sem um plano, a fim de descobrir configurações interessantes ou regularidades nos desenhos.
- *Arrastamento limitado*: mover um ponto semi-arrastável (que esteja ligado a um objeto, ou seja, que só pode ser arrastado nesse objeto).
- *Arrastamento guiado*: arrastar os pontos básicos de um desenho, a fim de lhe dar uma forma particular.
- *Arrastamento de localização encoberta*: mover um ponto básico para que o desenho mantenha a propriedade descoberta; o ponto que é movido segue um percurso, mesmo que os utilizadores não se apercebam – o lugar percorrido não é visível e não "fala" com os alunos, pelo que estes nem sempre se apercebem do lugar geométrico descrito pelos pontos arrastados.
- *Arrastamento em linha*: construir novos pontos ao longo de uma linha com a finalidade de manter a regularidade da figura.
- *Arrastamento ligado*: ligar um ponto a um objeto e movê-lo com esse objeto.
- *Arrastamento teste*: mover pontos arrastáveis ou semi-arrastáveis, com a finalidade de ver se a construção mantém as propriedades iniciais. Se assim for, a figura passa o teste; caso contrário, o desenho não foi construído de acordo com as propriedades geométricas pretendidas.

Os autores denominam por modalidades de arrastamento aquilo que irei designar, à semelhança de Forsythe (2011), por estratégias de arrastamento, pois ao arrastar um objeto, o aluno está a seguir determinada estratégia.

Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) adotaram uma outra categorização de estratégias de arrastamento como se segue: *arrastamento de manutenção* que consiste em arrastar um ponto base tal que a figura no AGD mantém uma determinada propriedade. Esta estratégia tem alguns pontos de semelhança com a estratégia *arrastamento de localização encoberta*, mas na estratégia *arrastamento de manutenção* o aluno tem a intenção específica de manter uma certa propriedade constante. Como caso particular da estratégia *arrastamento de manutenção* surge com Forsythe (2011) *arrastamento de manutenção de simetria*, ou seja, arrastar para manter a simetria constante.

Os AGDs oferecem uma janela para a investigação de estratégias em tarefas de construção geométricas dos alunos. Hollebrands, Laborde e Straber (2008) consideram extremamente importante a utilização, por parte dos alunos, das estratégias empíricas e a sua evolução para estratégias com um carácter mais geométrico.

2.2.4. O Feedback na Construção de Significados

Dois fatores chave da aprendizagem são o feedback (Pollock, 2012) e a construção de significados (Sherman, 2012). Na construção de significados assumem especial importância as interações sociais (Rodrigues, 1997).

A aprendizagem com computadores, dentro e fora da sala de aula, é caracterizada pelo facto de o significado ser construído momento a momento, de forma espontânea, mas contextualizada, onde a informação, em primeira mão, pode emergir facilmente, num formato colaborativo e auto-avaliável (no sentido de que pode ser verificável pelos aprendentes) mas menos estruturado (Carnell, 2000). Essa construção de significados pode emergir a dois níveis: a nível instrumental, quando os alunos interagem com o computador e a nível oral, quando os alunos interagem entre si e comunicam oralmente.

2.2.4.1. O Feedback Instrumental na Construção de Significados

O processo segundo o qual os alunos constroem significado sobre as ferramentas digitais (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2016) tem sido referenciado por outros autores como génese instrumental (Damsa 2014; Drijvers & Trouche, 2008; Guin & Trouche, 1999; Lonchamp 2012; Overdijk, van Diggelen, Andriessen & Kirschner, 2014; Rabardel, 2002; Rabardel & Beguin 2005; Rabardel & Bourmaud, 2003; Ritella & Hakkarainen, 2012; Verillon & Rabardel, 1995). Estes autores indicam dois sentidos segundo os quais o processo de génese instrumental pode ocorrer: a instrumentação e a instrumentalização. A primeira requer que o artefacto seja integrado na estrutura cognitiva do utilizador (representações, esquemas de ação, etc.), a segunda é dirigida a um contexto exterior podendo atingir fins e propriedades funcionais atribuídas pelo utilizador. Só depois de o utilizador se consciencializar da forma como o artefacto pode estender as suas capacidades numa determinada tarefa, e só depois de ter desenvolvido formas de utilizar o artefacto para esses objetivos, o artefacto passa a ser um instrumento valioso e útil que medeia a atividade (Drijvers & Trouche, 2008).

Os processos de instrumentação são relativos à emergência e à evolução dos esquemas de utilização e das ações mediadas pelo instrumento: a sua constituição, o seu funcionamento, a sua evolução por adaptação, combinação coordenada, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefactos dentro de esquemas já constituídos, etc. (Rabardel, 2002).

A ideia chave da génese instrumental, no contexto da educação matemática, consiste em considerar não só a forma como a atividade modela a tecnologia, mas também a forma como a atividade é modelada pela tecnologia (Jones, Mackrell & Stevenson, 2010).

Por outro lado, a abordagem *humanos-com-media* de Borba e Villarreal (2005) assenta em duas ideias fundamentais: primeiro, a construção de conhecimento é feita num contexto social entre sujeitos que trabalham em conjunto; em segundo lugar os *media* envolvidos são parte integrante dessa construção porque colaboram na reorganização do pensamento, assumindo um papel diferente do assumido pela linguagem escrita ou oral. O ponto de vista destes autores amplia a abordagem instrumental referida anteriormente porque se foca principalmente na comunidade de aprendentes como é o caso de pequenos grupos. Assim, à semelhança do que foi referido para a génese instrumental, Borba e Villarreal (2005) consideram que os *media* interagem biunivocamente com os humanos. Num sentido as tecnologias transformam e modificam a argumentação humana. No outro sentido, os humanos estão constantemente a transformar as tecnologias de acordo com os seus propósitos.

Desde há algum tempo que se tem a noção de que o computador funciona como organizador e, simultaneamente, como constrangedor da ação (Pea, 1993). Assim, é com naturalidade que surgem novas noções como a de *co-ação* (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008). Este termo surge do latim *cōgere* cujo significado abrange a ação restringida e a instigada. No contexto educativo e tecnológico o processo em que o aluno e o meio reagem, um ao outro, denomina-se por *co-ação* (Moreno-Armella *et al*., 2008). A *co-ação* entre o computador e o aluno, tem duas vertentes, é um ato cognitivo e social (Moreno-Armella & Hegedus, 2009).

A forma como os humanos são influenciados pelas atividades mediadas por artefactos é traduzido por um processo progressivo de enculturação. Esse processo de enculturação constitui o âmago da *co-ação*. A noção de *co-ação* permite-nos ir além do ponto de vista tradicional de interação com o digital pois engloba a possibilidade de pensar e explorar, guiando e sendo guiado, pelo ambiente. A *co-ação* integra uma relação recíproca de interação. O ambiente guia a nossa forma de pensar e as nossas ações futuras à medida que vamos interpretando o feedback numa configuração avaliativa (Moreno-Armella & Hegedus, 2009; Hegedus & Moreno-Armella, 2011). A noção de *co-ação* vem dar relevo à importância do papel da realidade em que o aluno está envolvido (Hegedus & Moreno-Armella, 2010). Nesta realidade, o computador (ambiente de geometria dinâmica) é integrado num processo simultaneamente introspetivo (aluno) e dialético (aluno/aluno e aluno/professor). No entanto, esta noção de *co-ação*, também inclui um processo Baldwiniano[10] ativado pela exequibilidade (Moreno-Armella & Hegedus, 2009). De facto, o que permite a *co-ação* entre o aluno e o meio digital é a exequibilidade (Moreno-Armella & Hegedus, 2009; Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008). A exequibilidade é vista como a característica principal das representações semióticas digitais e uma qualidade que não está presente no papel e lápis (Moreno-Armella & Hegedus, 2009).

Os utilizadores estão a mudar ativamente o estado do objeto de investigação através da examinação e exequibilidade do ambiente. Ao utilizar os símbolos digitais, a intencionalidade mistura-se com a exequibilidade das suas representações (Hegedus & Moreno-Armella, 2009). A forma como se projeta (intencionalidade) e se executa (exequibilidade) requer uma colaboração entre o utilizador e o ambiente, em que ambos são atores e reatores. Ambos agem e reagem ao outro, num processo de *co-ação*, através do qual o utilizador pode procurar, encontrar e negociar significados (Moreno-Armella & Hegedus, 2009).

Para além disso, a génese instrumental pode ajudar a conceptualizar a forma como os alunos melhoram as suas capacidades de utilização do GeoGebra, através do arrastamento e construções, em particular criando padrões com as ferramentas de transformação (Stahl, 2016), como é o caso das tarefas relativas ao subtópico de isometrias abordado neste estudo.

De acordo com a génese instrumental, para o aluno dar significado à ferramenta é essencial que consiga construir o significado matemático a ela associado (Sherman, 2012).

[10] O efeito Baldwiniano, também conhecido como a evolução Baldwiniana, ou evolução ontogénica descreve o efeito dos comportamentos aprendidos na evolução.
(http://en.wikipedia.org/wiki/Baldwin_effect).

2.2.4.2. O Feedback Oral na Construção de Significados

A forma como os alunos reagem internamente aos estímulos foi descrita por Vygotsky (1987), através do denominado processo de internalização. Este processo de reconstrução interna é caracterizado por envolver dois tipos de estímulo. Pode ser um estímulo provocado por determinada atividade externa sobre um objeto, ou pode resultar do estímulo de um processo interpessoal (da interação com outros sujeitos). Essas atividades ou interações podem depois ser transformadas em processos intrapessoais, quando o sujeito perceciona e racionaliza, tentando extrair um sentido para informação obtida. A fala interna relaciona-se com a forma como se organiza o pensamento, dando primazia ao sentido (Duarte & Rezende, 2007). Para haver um verdadeiro entendimento é necessário que a informação percecionada faça sentido para o sujeito.

Por outro lado, a fala externa, entre dois sujeitos, difere na sua estrutura e função. A origem da palavra comunicar, do latim *comunicare*, tem por significado pôr em comum. Na verdade, comunicar pressupõe uma comunhão entre o significado daquilo que o locutor quis dizer e aquilo que o interlocutor percecionou como aquilo que foi dito. “O ato comunicativo (…) exige um foco comum de atenção e cooperação na partilha de significados” (Sim-Sim, Silva & Nunes, 2008, p. 31).

Na fala externa (ou linguagem) é dada primazia ao significado e à partilha do mesmo. Para que exista comunicação é necessário que os significados atribuídos à linguagem sejam partilhados. No diálogo entre sujeitos torna-se predominante a procura de um entendimento comum para o significado a atribuir a determinado conceito ou objeto. Particularmente quando os sujeitos são alunos e estes têm parte ativa na sua aprendizagem. Tanto o professor como o aluno devem compreender a importância de saber comunicar, isto é, a importância de conseguir dar a entender o que quisemos dizer com o que dissemos (Lima, 1989).

> *Se os alunos são os construtores do seu próprio conhecimento, na medida em que este resulta de um processo pessoal de atribuição de significado ao que está a aprender, então o acesso ao saber pode fazer-se de uma forma directa, isto é, pondo o aluno em relação com o corpo de conhecimentos que se pretende que aprenda. Se os alunos são os construtores do seu próprio conhecimento, o acesso ao saber pode fazer-se de uma forma imediata e direta. O professor não se anula, muda simplesmente de papel. De transmissor de saber passa a organizador de contextos e a acompanhante privilegiado dos alunos nas aprendizagens* (Pinto & Santos, 2006, pp. 37-38).

Por outro lado, a própria matemática é, à semelhança da linguagem, um sistema para a construção de significados (Pimm, 1987). A importância da linguagem estende-se à formação histórico-social do sujeito. Por exemplo, só se pode desenvolver o significado de uma palavra através do desenvolvimento de interações sociais (Vygotsky, 1995). Bakhtin (2003) também defende que para existir significado é necessário que duas ou mais vozes entrem em contacto. "...o ouvinte, ao perceber e compreender o significado (linguístico) do discurso ocupa simultaneamente em relação a ele uma posição ativa responsiva: concorda ou discorda dele (total ou parcialmente), completa-o, aplica-o, prepara-se para usá-lo, etc." (p. 271). O significado fica a dever a sua existência à interação social e a construção de significados é um conceito central na ação mediada. Os estudos das interações reconhecem os seus efeitos cognitivos (Serrazina, 1995) e os seus efeitos na construção de significados matemáticos (Coelho & Saraiva, 2000), nomeadamente através da internalização (Vygotsky, 1995) e emergência de novos significados partilhado**s** (Rodrigues, 1997).

Os princípios do pensamento humano que a ciência cognitiva oferece, segundo Battista (2007) são:

Princípio 1: A mente humana constrói significados em vez de os receber;

Princípio 2: O indivíduo constrói novo conhecimento e compreende-o baseando-se naquilo que já sabe e pensa.

Trazendo estes princípios para a aprendizagem da matemática, pode alegar-se que para compreender e aprender matemática é necessário que seja o aluno a construir os significados para as ideias matemáticas (Pinheiro & Carreira, 2013).

A linguagem é vista como um dos sistemas semióticos, na teoria da ação mediada, determinante na construção de significados, pois é através da linguagem que ocorrem as principais e mais significativas ações humanas (Giordan, 2005). Estas ações conferem um significado personalizado aos objetos matemáticos, num contexto empírico, desenvolvendo, na sequência, uma compreensão teórica, de natureza reflexiva e consciente, pela qual os alunos fazem generalizações (Rodrigues, 1997).

A compreensão de conceitos está ligada à forma como os alunos constroem os significados essenciais nos seus próprios termos. A utilização desses termos deverá ter um carácter flexível para se adaptar às necessidades de determinado argumento, problema, utilização, ou aplicação do momento. Apesar dessa adaptabilidade devem manter os mesmos significados essenciais de forma a serem aceites cientificamente e, na maioria dos casos, terem uma utilidade prática (Lemke, 1990).

Relativamente à utilização da linguagem é de notar que o significado original de diálogo seja a partilha de ideias e significados com o intuito de promover pontos de vista integrados não atingíveis individualmente (Senge, 1990).

Para além da compreensão e partilha já referidos, a negociação de significados é vista como sendo uma condição necessária para a aprendizagem da matemática (Voigt, 1994). Segundo este autor, a negociação pode ser realizada implícita ou explicitamente. A forma implícita tem lugar quando um aluno ajusta as suas ações de acordo com o que o colega espera que aconteça ou de acordo com as reações ou feedback deste. A forma explícita ocorre quando os alunos argumentam segundo pontos de vista diferentes. Sendo que nestes casos é possível estudar diretamente a negociação de significados (Voigt, 1994; Rodrigues, 1997). Estes processos podem conduzir a situações de nova compreensão (Rodrigues, 1997).

As tecnologias constituem-se, a si mesmas, como uma parte ativa na aprendizagem dos alunos, podendo modificar os processos de aprendizagem da matemática. Em particular, a utilização das tecnologias pode favorecer as interações e a comunicação entre alunos quando estes se encontram envolvidos na construção de significados matemáticos (Arzarello & Robutti, 2010).

Além de tudo, a investigação já mostrou que a construção e a observação de figuras geométricas dinâmicas podem levar à construção de significados matemáticos importantes, nomeadamente através da exploração, definição, verificação, criação de conjeturas e da sua validação (Faggiano & Ronchi, 2011).

As ferramentas de construção do GeoGebra e a forma como são utilizadas tornam-se parte da conceptualização do grupo ou do aluno. Ao descobrirem formas de utilizar as ferramentas disponíveis, os grupos de alunos constroem o que Hoyles e Noss (1992) denominam como abstrações situadas. Estas são formas nas quais os alunos atribuem significados matemáticos aos resultados das suas ações. São como mecanismos de construção de significados que estão situados, no sentido em que derivam de experiências concretas dentro de situações matemáticas específicas. No entanto, o facto de derivarem de experiências concretas não é impeditivo de, nalguns casos, poderem ser generalizadas, partilhadas e aceites como práticas de grupo (Stahl, 2016).

2.2.5. Ciclos de Feedback

A perspetiva mais presente no estudo do feedback é a sua função no processo de autorregulação. A ideia de feedback, como base dos processos de autorregulação ou processos adaptativos, é originária da engenharia e, em particular, da procura de mecanismos que regulem ou ajudem a controlar o comportamento dos sistemas, de modo a levá-los a um resultado pretendido (dispositivos de controlo automático). Richardson (1999) lembra que desde os termostatos às simples válvulas de enchimento dos autoclismos e aos atuais sistemas de “cruise control” dos automóveis, estamos rodeados de mecanismos de controlo que constituem formas de ajuste entre a condição atual de um sistema, detetada por algum tipo de sensor, e a condição ou estado pretendido do sistema. A essência do conceito é a de um ciclo de interações, ou melhor, um ciclo fechado (*loop*) de ação e informação.

A autorregulação é a tendência de um indivíduo ou de um grupo para tentar manter-se num certo estado ou numa condição preferida. A ideia geral consiste em postular algum objetivo ou situação a alcançar e a obtenção de uma perceção que pode estar alinhada com o objetivo ou, pelo contrário, revelar uma divergência. A discrepância entre o estado percecionado e o estado preferido geram uma pressão para levar a cabo ações que visam reduzir a disparidade e conduzir o sistema a um estado de equilíbrio.

A figura seguinte (Fig. 2.2) ilustra aquilo a que Richardson (1999) designa por *loop* de feedback autorregulatório, isto é, um *loop* que procura colocar o indivíduo ou grupo num estado de equilíbrio relativamente a um objetivo a atingir. Este tipo de *loop* foi durante muitos anos designado por feedback negativo, mas atualmente é também conhecido como feedback balanceador ou neutralizador.

Um exemplo muito elementar e a título ilustrativo seria o seguinte: coloco água a aquecer para fazer um chá. Quando a água ferve, verto-a na chávena sobre a saqueta e espero breves minutos que o chá repouse (estado atual do chá). O intuito é beber o chá quente, mas a uma temperatura suportável (objetivo). Bebo um pequeno gole de chá para sentir a temperatura (estado percecionado) e sinto que está demasiado quente (disparidade detetada). A disparidade revela que a temperatura do chá é superior à desejada pelo que decido reduzir a temperatura, soprando ou juntando água fria (ação planeada). Sobre a superfície, sopro durante alguns segundos (ação implementada) ou adiciono água fria. A intenção da ação é a de baixar a temperatura do chá (ação intencionada). O chá está atualmente num novo estado. Agora volto a beber um gole para sentir a temperatura (estado percecionado) e percebo que a temperatura do chá é a desejada, logo a disparidade foi reduzida ou eliminada, ou seja, foi atingido o equilíbrio entre o estado percecionado e o meu objetivo.

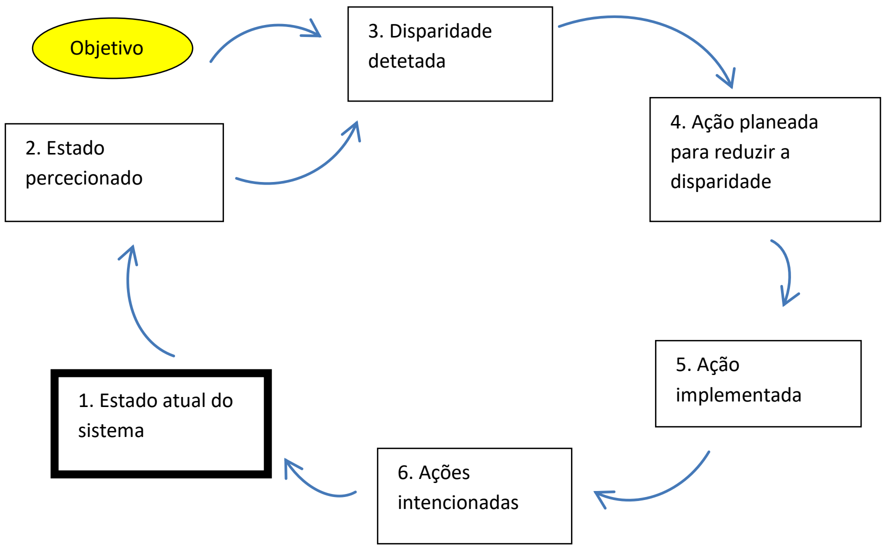


Fig.2.2. Ciclo de feedback balanceador num sistema autorregulatório (Richardson, 1999)

Outros autores, como Carver e Scheier (2000) referem-se ao *loop* de feedback genérico, com origem no controlo cibernético, como sendo formado por quatro componentes: i) uma entrada (*input*), ii) um valor de referência, iii) um comparador e iv) uma saída (*output*). Estes autores consideram que a entrada é uma perceção, adquirida por algum tipo de sensor, acerca do estado do sistema, que também pode ser encarada como um elemento de informação. Outro elemento corresponde ao valor de referência que poderá ser considerado como um modelo ou um objetivo a atingir. Um comparador é um meio de realizar comparações entre o *input* e o valor de referência. A comparação pode gerar dois resultados: os valores são percecionados como diferentes ou não. Segue-se um *output* que é equivalente a um comportamento ou uma ação. Se o resultado da comparação for a ausência de discrepância, o *output* será o de manter o comportamento; se a comparação der como resultado uma discrepância, o comportamento é alterado para reduzir a discrepância.

Reigel (2005), que estudou o feedback positivo na aprendizagem de uma língua estrangeira, olha para o sistema de autorregulação como um sistema dinâmico complexo, entendido como um grupo de agentes que interagem, gerando um comportamento que é diferente da soma das partes. Apesar de tais interações não serem lineares, o sistema dinâmico procura e atinge eventualmente uma coesão e um equilíbrio global.

Reigel (2005) cita diversos estudos em áreas científicas muito variadas, desde a Biologia, à Química, à Climatologia, à Teoria do Caos, em que o mecanismo de feedback tem um papel primordial e é usado para explicar a ocorrência de cadeias de ações e reações dentro de um sistema, tendo como fim levá-lo a um estado de equilíbrio. Também nas Ciências da Educação, Reigel nota que alguns investigadores têm vindo a adotar o conceito de sistema dinâmico não linear para descrever a aprendizagem. Por exemplo, Ennis (1992) argumenta que, tal como na teoria dos sistemas dinâmicos, a apreensão de novas ideias no decurso da aprendizagem é feita de forma seletiva, isto é, nem todas as informações são processadas automaticamente e armazenadas na memória. Por isso, Ennis defende que a aprendizagem não é previsível e que é necessário identificar os pontos críticos na aprendizagem de um aluno – correspondentes a pontos de bifurcação na teoria do caos – e depois olhar para os resultados na sequência das decisões tomadas.

A investigação de Reigel (2005, 2008) sobre o efeito do feedback positivo na aprendizagem de uma língua estrangeira parte da análise de estudos que mostram que o louvor dado pelo professor na sala de aula revela ter um impacto positivo sobre a aprendizagem, mas alerta que a maior parte desses estudos apresenta o professor como o único distribuidor de feedback. Para Reigel, é necessário reconhecer que os alunos podem receber feedback positivo tanto dos seus pares como dos seus professores e que tem de se ultrapassar a imagem do professor omnipotente como o único emissor de feedback corretivo ou negativo.

Na área da aprendizagem da matemática, assumem particular relevância para este estudo as ideias e resultados de Olsson (2015, 2017) relativos ao papel do feedback fornecido pela tecnologia digital interativa, designadamente, o *software* de geometria dinâmica, na aprendizagem colaborativa em tarefas de resolução de problemas. Desde logo, Olsson começa por afirmar que o planeamento de ações e a avaliação dos respetivos resultados no decurso da resolução de um problema com um *software* de geometria dinâmica são influenciados pelo feedback dado pelo computador. O autor descreve o feedback fornecido pelo computador em termos de várias características: i) o resultado é preciso; ii) está em consonância com os comandos executados; iii) é devolvido instantaneamente; iv) responde às ações dos alunos sem formulação de juízos; v) incentiva a experimentação e a testagem; vi) gera tensão entre o resultado atual e o resultado esperado, motivando a alteração do comportamento.

Para Olsson, o feedback produzido pelo computador corresponde ao *output* que este devolve em resultado de algum *input* ou ação executada com base nos comandos do *software* em uso.

Note-se, antes de mais, que esta designação introduz algum desacordo com o sentido de feedback anteriormente descrito. Na verdade, o sentido de feedback como mecanismo de autorregulação, deverá referir-se ao sistema que é composto pelo indivíduo em atividade de resolução de problemas com um *software* de geometria dinâmica. Por exemplo, vamos supor que o aluno pretende determinar se as diagonais de um retângulo poderão ser perpendiculares entre si. O seu plano consiste em construir um retângulo genérico que pode ser alterado, mantendo as caraterísticas de retângulo, e construir as suas diagonais. Constrói um retângulo de lados não todos iguais e as respetivas diagonais – o estado atual do sistema (Fig. 2.3); mede os ângulos formados pelas diagonais e recebe como *output no ecrã* as amplitudes dos ângulos – esta informação é o estado percecionado do sistema (ângulos diferentes de 90º, Fig. 2.3).

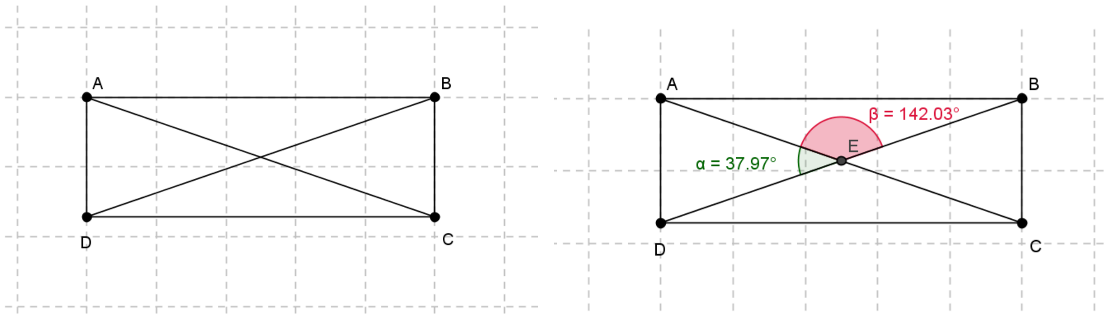


Fig. 2.3. Retângulos, diagonais e ângulos

O objetivo é saber se os ângulos serão sempre diferentes de 90º, qualquer que seja o retângulo. A ação planeada consiste em alterar os ângulos, diminuindo o ângulo AÊB e aumentando o ângulo AÊD. Isto pode ser concretizado pelo aluno através da alteração do retângulo, arrastando um ponto. Esta ação é acompanhada pela visualização imediata das amplitudes dos ângulos e pela alteração da perceção do estado atual do sistema (os ângulos vão-se aproximando um do outro (Fig. 2.4)). Portanto, vai aumentando a convicção de que existirá um retângulo com as diagonais perpendiculares. A certa altura, o estado atual do sistema é a exemplificação de um retângulo com as diagonais perpendiculares (um quadrado (Fig. 2.4)) e, portanto, o aluno atingiu o objetivo: obter (pelo output do software) um retângulo com as diagonais perpendiculares.

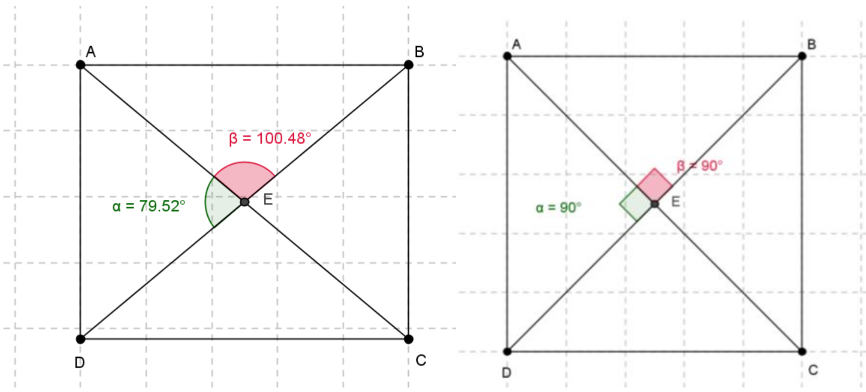


Fig. 2.4. Quadrados, diagonais e ângulos

Note-se então que o *output* providenciado pelo *software* está na base do estado percecionado pelo aluno (*input*) que ele compara com o seu objetivo, dando origem a uma discrepância ou, pelo contrário, a uma coincidência entre o estado percecionado da figura e o objetivo de encontrar ângulos retos formados pelas diagonais.

2.3. A Aprendizagem Colaborativa Apoiada pelo Computador e o Feedback: uma Simbiose

Segundo Brousseau (1997), quando os alunos se debruçam sobre determinado problema os seus processos de resolução evoluem devido às suas interações com o *milieu*. Para o autor, o aluno recebe feedback do *milieu* com diferentes formatos, facilitando algumas ações e coibindo outras. Esta noção de *milieu* é muito abrangente e tanto se refere ao *milieu* material, com o qual o aluno interage, como ao *milieu* cultural (por exemplo, a turma e o seu sistema de regras implícitas ou mesmo o contexto escolar). As interações entre os alunos e o *milieu* podem ser conceptualizadas como um diálogo do aluno (ou grupo de alunos) com o feedback do *milieu*. Neste estudo, o *milieu* refere-se às interações entre os alunos e entre estes e o computador. Se, por um lado, a interação entre pares (feedback entre alunos) tem surgido, na atualidade, como um tema cada vez mais importante (Kumpulainen & Kaartinen, 2000), por outro lado, a importância do feedback não pode ser desvalorizada (Balacheff, 1990). Recentemente, o foco das investigações mudou para as propriedades das interações emergentes, construídas socialmente (Stahl, *et al*., 2006), como é o caso do feedback. Naturalmente a aprendizagem colaborativa maximiza as oportunidades de feedback. Nalguns casos em que existe discrepância entre a performance atual e a desejada, os alunos mais eficazes procuram feedback de fontes externas, como sejam as contribuições dos seus colegas em grupos colaborativos (Butler & Winne, 1995) e também o feedback do computador (Joubert, 2017).

Segundo Brousseau (1997), o comportamento dos alunos durante a resolução de um problema depende fortemente do feedback que, entretanto, lhe é fornecido. Em particular, o feedback visual que o computador emite tem uma influência importante na resolução de problemas (Olsson, 2005, 2017). Acontece com frequência que as interações entre os alunos e o computador são condicionadas e, simultaneamente, facilitadas pelo *software* utilizado. As restrições de comunicação com o *software* podem desviar a atenção dos alunos, não só para o tipo de ferramenta utilizada (numa perspetiva instrumental), mas também podem conduzir a diferentes compreensões de conceitos matemáticos (Joubert, 2017). Por outras palavras, a comunicação alunos-computador pode levar à construção de significados mais associados aos instrumentos utilizados, mas também pode levar à construção de significados ligados aos próprios conceitos matemáticos subjacentes. Por exemplo, no caso da construção de retas paralelas num AGD, para que a construção seja resistente ao arrastamento é necessário recorrer a uma ferramenta que relaciona a paralela com um ponto e uma determinada reta. Assim, a noção de reta paralela pode deixar de ser uma reta ou simplesmente um conjunto de pontos para passar a ser uma entidade que é função de um ponto e de uma reta. A colaboração entre alunos pode facilitar essa aprendizagem. Nesse sentido, a ideia do computador como um mediador e promotor de colaborações é hoje partilhada por diversos autores (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006). No entanto, só recentemente é que os investigadores começaram a avaliar os contornos das relações entre a aprendizagem colaborativa e o computador. Existe a noção de que para além das tecnologias servirem de base ao discurso entre pares se deve examinar com mais atenção o que é que as novas tecnologias tornam único no processo de ensino/aprendizagem (Scardamalia & Bereiter, 1996, 2003).

Em resumo, a aprendizagem colaborativa com o computador maximiza e promove as oportunidades de feedback, tanto entre alunos (através das intervenções orais) (Stahl, *et al*., 2006), como entre alunos e computador (através do feedback visual emitido pelo computador) (Joubert, 2017). Esse feedback emerge em ciclos (como é ilustrado na Fig. 2.2) ligados a determinados objetivos que surgem através dos problemas propostos aos alunos, como estratégia para a aprendizagem de um tópico matemático.

CAPÍTULO 3

Uma Experiência de Ensino como Contexto de Investigação

Neste capítulo apresento o contexto de investigação deste estudo e as opções didáticas que presidiram à experiência de ensino implementada em sala de aula – apoiadas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau – dando destaque ao meu posicionamento e tendo em conta o quadro teórico da presente investigação. A planificação das aulas segue as recomendações do programa de matemática para o terceiro ciclo do ensino básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007), em vigor nos anos letivos 2011/2012 e 2012/2013, respetivamente para o sétimo e oitavo ano de escolaridade.

Para uma melhor perceção do ambiente de sala de aula onde foi desenvolvida a investigação, começo por descrever as minhas opções didáticas, o contexto de aprendizagem, os tópicos e subtópicos tratados, assim como os recursos e as estratégias utilizados, destacando as aprendizagens esperadas. Para concluir, apresento uma síntese das tarefas propostas, assim como os respetivos objetivos de aprendizagem.

3.1. Opções Didáticas na Experiência de Ensino

O contexto de investigação apoia-se na criação de um ambiente de sala de aula que tem como suporte a Teoria das Situações Didáticas, na perspetiva de Brousseau (1986). Nesta perspetiva, parte-se do pressuposto de que a aprendizagem do aluno reflete o meio em que este desenvolve a sua atividade, razão pela qual se torna fundamental trabalhar esse meio que é designado, nesta teoria, por *milieu.* Este *milieu* deve ser concebido e sustentado por uma intencionalidade didática no qual o aluno, ao adaptar-se, aprende (Brousseau, 1986). A aprendizagem está relacionada com a existência de situações, problemas, tarefas que coloquem o aluno em desequilíbrio face ao seu conhecimento atual (o que significa um ambiente antagónico) e que possibilite a interação autónoma do sujeito com a tarefa, levando-o a refletir sobre as suas ações e as respostas do meio a essas ações (ambiente autónomo). A teoria alerta ainda para a importância de o desequilíbrio ser bem doseado, isto é, nem ser uma atividade demasiado difícil que o impeça de avançar nem uma tarefa demasiado fácil que não constitua um desafio para o aluno (Silva, Ferreira & Tozetti, 2015).

Esta teoria parte então de dois pressupostos: por um lado, o aluno elabora conhecimento através da interação com um problema que gera um desequilíbrio e do *feedback* que resulta das suas ações com o meio, influenciando, assim, o desenvolvimento do seu conhecimento matemático; por outro lado, a intencionalidade didática do professor é um aspeto inerente ao processo de produção de conhecimento em sala de aula e ao estabelecimento de conexões entre esse conhecimento e o conhecimento cultural (o conhecimento que o aluno já traz consigo para a sala de aula).

As interações entre o aluno e o *milieu* são descritas em termos do conceito teórico de situação a-didática, que modela a atividade do aluno de produção de conhecimento, de forma independente da mediação do professor. Nesta situação, o aluno age como sujeito cognitivo e não como um “aluno” ou sujeito de uma instituição escolar.

Assim, o sujeito envolve-se numa interação com o problema, expondo o seu conhecimento, sujeitando-o a modificação ou rejeição e levando a um novo conhecimento, dependendo da interpretação dos resultados das suas próprias ações (o *feedback* que ele recebe do *milieu*). Então, o conceito de *milieu* inclui o problema matemático ao qual o sujeito procura responder, assim como um conjunto de relações, essencialmente matemáticas, que são modificadas à medida que o sujeito produz conhecimento no decurso da situação, modificando assim a realidade com a qual ele interage (Sadovsky & Sassa, 2005).

O processo de aprendizagem no presente contexto de investigação centra-se nas interações entre os alunos e o computador através da resolução de uma tarefa. Neste contexto, a tarefa é considerada como parte do contrato didático (evidência da intenção didática do professor) entre o aluno e o professor. As construções dos alunos no GeoGebra são consideradas como parte da "realidade" que pode ser conhecida e alterada através das ferramentas que o *software* disponibiliza e também das ferramentas que a própria geometria oferece. Essas interações e essas confrontações com a "realidade" proporcionam espaço para que os alunos testem as suas conjeturas por comparação com o *feedback* que provém dessa "realidade". É através dessa confrontação com a "realidade" (que envolve as interações com o computador e com os colegas) que o aluno aprende a controlá-la e a reconhecer as limitações das relações que pode utilizar.

Transpondo a teoria de Brousseau (1986) para o contexto computacional, o computador pode ser visto como uma ferramenta, não só de validação, mas também de transformação no processo de produção de conhecimento matemático. A teoria das situações didáticas foca-se em considerar as possibilidades de ação do sujeito, quando este se confronta com uma tarefa problemática, o *feedback* do *milieu* e as formas de validação que o sujeito pode gerar (através da perceção ou interpretação) dentro dessas interações (Sadovsky & Sessa, 2005).

A partir da leitura do trabalho de Brousseau e Gibel (2005), pode-se notar a distinção entre "razões didáticas" e "razões para saber". Neste sentido, o professor ao invés de apresentar o conhecimento como um dado adquirido, problematiza as situações e devolve-as aos alunos para que sejam eles a construir o seu próprio conhecimento.

Em consonância com as ideias propostas por Brousseau e Gibel (2005), nesta experiência de ensino, está presente um fator de risco que o aluno deve assumir – a possibilidade de o aluno abordar uma tarefa que lhe foi proposta sem ter a certeza de alcançar uma resposta ou solução correta. O conteúdo dessas respostas inclui um conhecimento que não foi institucionalizado anteriormente. No entanto, os alunos podem chegar a essas respostas de forma autónoma. Estes autores consideram que ao professor cabe a tarefa de "devolução" (Brousseau & Gibel, 2005, p.23), que consiste em fazer com que os alunos aceitem esse risco. Segundo estes autores, a devolução é eticamente aceitável se: a) for realístico assumir que os alunos são capazes de resolver a tarefa, por si próprios; b) a tarefa puder ser resolvida utilizando a informação dada e o conhecimento adquirido anteriormente e, ainda c) o raciocínio utilizado for tornado explícito pelo professor nas discussões em grupo turma.

Tendo em atenção o contexto deste estudo e a integração do computador na sala de aula, poderei reformular o conteúdo das alíneas anteriores, nomeadamente: b) a tarefa pode ser resolvida utilizando o conhecimento adquirido anteriormente, a informação dada e a informação que vai emergindo do *feedback* do computador e c) o raciocínio utilizado é tornado explícito pelos alunos através das suas produções escritas, respondendo às questões colocadas nas tarefas, seja durante a resolução das mesmas ou num relatório escrito posteriormente, aos quais o professor proporciona *feedback* (cf. Paiva, 2009).

Essa devolução pressupõe um contrato didático como sendo um conjunto de comportamentos esperados da parte do professor e do aluno (Brousseau, 1997), que inclui os papéis atribuídos a cada um como descrevo adiante.

3.2. O Modelo A-Didático

3.2.1. O Contexto de Aprendizagem

Como professor, procuro levar os alunos a experienciarem, em primeira mão, a aprendizagem matemática (Steffe & Thompson, 2000) da mesma forma que os matemáticos a experienciam quando fazem matemática, tendo a oportunidade de construir o seu próprio conhecimento (Brousseau, 1997). Considero fundamental que os alunos partilhem entre si as suas ideias e os seus pontos de vista, esclareçam dúvidas e compartilhem informações, tal como é recomendado em diferentes documentos curriculares (Ponte *et al*, 2007; NCTM, 2007). Esta recomendação é suportada pelo facto de que os solucionadores eficazes de problemas monitorizam o seu próprio processo mental à medida que planeiam, executam e refletem ao longo do processo de resolução. Os alunos necessitam que lhes sejam dadas oportunidades para discutir os seus raciocínios. Isto requer que sejam criadas oportunidades para praticar, refletir, desafiar e tentar de novo, se necessário (Earl & Katz, 2008).

Assim, torna-se necessário criar um ambiente no qual os alunos possam sentir-se confiantes, independentes, responsáveis e que promova a emergência de oportunidades genuínas de envolvimento (Earl & Katz, 2008), procurando deste modo combater a falta de vontade dos alunos em arriscar e dar visibilidade ao seu pensamento. Neste estudo, opto conscientemente pela criação de um ambiente de partilha de ideias entre alunos baseado na relevância da produção de feedback. Por um lado, pretendo promover um diálogo colaborativo que permita aos alunos, durante o processo de resolução da tarefa, construir significados e, simultaneamente, promover a aprendizagem de um determinado conteúdo matemático ou curricular. Por outro lado, ambiciono criar um espaço de discussão onde os alunos possam defender as suas ideias e perspetivas com os seus pares. Esses diálogos entre pares devem ocorrer ao longo da resolução de uma tarefa, tanto no momento inicial de escolha de uma estratégia para atacar o problema como a partir do momento em que surgem as imagens no ecrã de computador, com a necessidade de os alunos justificarem ou clarificarem as suas conjeturas (Yu, Barrett & Presmeg, 2009).

Deste modo, procuro criar um contexto, em sala de aula, que possibilite simultaneamente o surgimento de feedback entre pares e o surgimento de feedback do computador. Na aplicação do modelo a-didático (Fig. 3.1), para além do que já foi referido, as tarefas foram planeadas de acordo com a minha intencionalidade como professor, de modo a integrar o conhecimento matemático com a utilização do computador. Para além disso, também foi intencionalidade do professor que as tarefas tivessem um carácter predominantemente aberto permitindo que, naturalmente, os alunos implementassem estratégias distintas para atingirem o objetivo proposto. O feedback do computador emerge então das ações dos alunos, isto é, o computador fornece feedback quando os alunos, durante o processo de resolução das tarefas, implementam estratégias de *construção* e *arrastamento*.

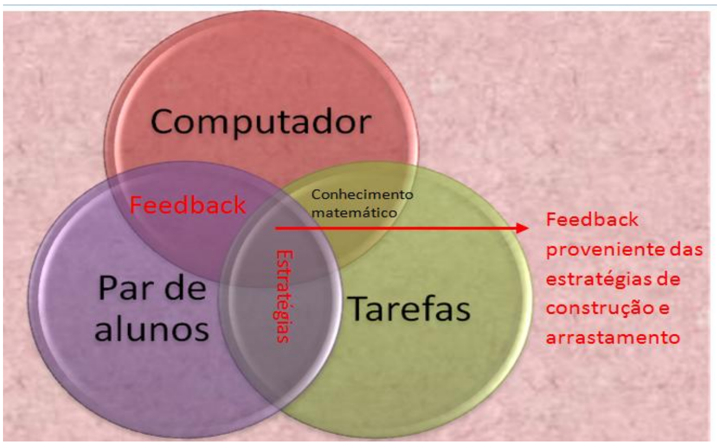


Fig. 3.1. Estratégia de aplicação do modelo a-didático

Na figura anterior os três círculos representam cada *Par de alunos*, o *Computador*, associado à utilização de um AGD, e as *Tarefas*. Esses círculos constituem três dimensões que se intersetam. O feedback emerge na interseção das dimensões *Par de alunos* e *Computador*, quando os alunos interagem com o computador ou entre eles, impulsionados pelos outputs do computador. Por seu lado, as *Estratégias* emergem da interseção das dimensões *Par de alunos* e *Tarefas*, sendo que os alunos adotam determinadas estratégias face às tarefas propostas. O *Conhecimento matemático* está presente na interseção entre as dimensões *Tarefas* e *Computador*, pois a cada tarefa realizada no computador está associado um determinado objetivo relacionado com conteúdos matemáticos. Na interseção das três dimensões emerge o feedback do computador, como resultado das *estratégias de construção e arrastamento* de cada par de alunos face a determinada tarefa.

No que respeita à organização da aula, numa fase inicial, opto por permitir que os alunos escolham entre si os pares de trabalho. No decurso das aulas, mantém-se em aberto a possibilidade de alterar os pares, desde que haja uma razão plausível.

Em termos de dinâmica de sala de aula, o trabalho tem início com a distribuição da tarefa a resolver. Seguidamente, os alunos ligam os computadores, abrem o GeoGebra e começam a tentar resolver a tarefa em pares. Apesar do trabalho ser quase todo realizado no computador, solicito que os alunos vão tomando notas nos seus cadernos de matemática sobre o trabalho que estão a realizar de modo a que possam responder às questões colocadas ou realizar um relatório solicitado em algumas tarefas, para o qual é disponibilizado um guião (Anexo 1). Os alunos podem, se necessário, circular dentro na sala de aula e consultar ou discutir com outros colegas.

Habitualmente, procuro atribuir feedback às produções dos alunos, privilegiando sempre que possível, a componente escrita. Nomeadamente, atribuo feedback descritivo às respostas dos alunos e aos relatórios (realizados pelos alunos num processador de texto e enviados ao professor por correio eletrónico, no final da aula).

Dentro deste contexto de aprendizagem a avaliação integra todo o trabalho realizado pelos alunos no decurso das aulas, bem como as suas produções escritas.

Numa perspetiva pedagógica de utilização das tecnologias (Amado, 2007), devem ser privilegiadas as tarefas de investigação e exploração. Avaliar este tipo de tarefas acarreta uma dificuldade acrescida, atendendo ao seu carácter mais subjetivo, que se pode constituir como um fator inibidor (Candeias, 2005). Na avaliação das tarefas de investigação “torna-se difícil para qualquer observador aceder aos processos e raciocínios em que os alunos se envolvem — o que complica claramente a tarefa do professor no que respeita à avaliação” (Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira, 1999), (p. 6). Em contrapartida, Dias (2008) argumenta que este tipo de tarefas, de carácter mais aberto, propiciam um feedback mais regulador das aprendizagens. Tal como no estudo realizado por Paiva (2009), também no presente contexto de aprendizagem, a implementação das tarefas tem em conta a observação direta do trabalho dos alunos em sala de aula e a atribuição de feedback individualizado a cada par de alunos.

3.2.2. O Papel do Professor na Experiência de Ensino

Vários investigadores (Amado, 2007; Adler, 2000) apontam o professor como o recurso mais importante na sala de aula. Em particular, esse papel torna-se ainda mais exigente e desafiante quando lhe acrescentamos as tecnologias na sala de aula.

> *A tecnologia não substitui o professor de matemática. Ao utilizar ferramentas tecnológicas, é frequente os alunos passarem o seu tempo a trabalhar de forma aparentemente independente do professor, porém, esta impressão é ilusória. O professor desempenha vários papéis fundamentais num ambiente de ensino tecnológico, tomando decisões que afectam a aprendizagem dos alunos de formas bastante significativas* (NCTM, 2007, p. 28).

Que tipo de decisões e que papel que me está reservado, como professor de matemática? De forma sequencial, este pode abranger três etapas: estádio da preparação, estádio da ação e, por último, estádio da regulação (Paiva, 2009). Estes estádios podem ainda ser denominados por estádio pré-ativo (planificação); interativo (realização) e pós-ativo (reflexão) (Jackson, 1990).

Sendo assim, quais são as mudanças que a introdução da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem acarreta em cada um destes estádios? Atendendo ao facto de que as tarefas associadas à utilização do computador têm tendencialmente um carácter mais aberto, requerem, da parte do professor, um maior investimento no estádio de preparação das mesmas. Neste estádio, tenho em conta, para além do que já foi referido, o tipo de *software* que mais se coaduna com o pretendido (neste caso o GeoGebra) e uma estruturação sequencial cuidada das tarefas a apresentar.

No estádio da ação, assumo um papel diametralmente diferente do papel de transmissor de conhecimentos. Assim, o meu papel é o de organizador dos contextos, orientador e acompanhante das aprendizagens; como tal, pretendo dar particular enfoque à monotorização das aprendizagens, procurando aceder-lhes através das produções dos alunos na realização de tarefas (Pinto & Santos, 2006).

Paralelamente, a introdução de software computacional como instrumento pedagógico na sala de aula provoca grandes mudanças no ambiente pedagógico, nomeadamente, pelo facto do professor deixar de ser o detentor e transmissor incontestável do conhecimento e passar a ser co-aprendente com os alunos (Ponte, 2000); é esse o papel que pretendo assumir na sala de aula:

> *O professor deixa de ser quem domina todo o conhecimento para passar a ser aquele que em determinados momentos também é capaz de ter dúvidas, tal como os seus alunos, e de aprender com eles* (Amado, 2007, p.139).

Cabe-me a mim, como professor, reconhecer que o que realmente interessa já não é aquilo que o aluno sabe, mas aquilo que o aluno pode aprender a partir daquilo que já sabe. Tapscott (2009) propõe sete estratégias que podem ajudar a ser um melhor professor nesta era digital:

- Não atirar a tecnologia para dentro da sala de aula e esperar que aconteçam coisas boas. A focagem deve ser feita na mudança da pedagogia, não na tecnologia. Usar a tecnologia para focar o ensino no aluno, de forma personalizada, num ambiente de aprendizagem colaborativo.
- Reduzir as palestras. O professor não tem todas as respostas. Para além disso, a aprendizagem pela exposição não funciona com os alunos atuais. Deve começar por colocar questões aos alunos e ouvir as suas respostas. Também deve ouvir as questões dos alunos e deixá-los descobrir as respostas. Deve deixá-los realizar uma experiência de aprendizagem com o professor.

- Auto capacitar os alunos a colaborar. Encorajá-los a trabalhar uns com os outros e mostrar-lhes como aceder ao mundo da informação disponibilizada na internet.
- Focar na aprendizagem ao longo da vida, não praticar o ensino para o teste. No final da escolaridade, não importa o que sabem, mas a capacidade e gosto pela aprendizagem ao longo da vida. Os alunos não devem ser obrigados a memorizar informação que facilmente podem procurar. O foco deve estar em como aprender.
- Usar a tecnologia para ficar a conhecer melhor as capacidades de cada aluno e construir sequências de tarefas personalizadas onde cada aluno possa seguir ao seu ritmo.
- Nas experiências de aprendizagem dos alunos deve existir possibilidade de escolha, personalização, transparência, integridade, colaboração, divertimento, velocidade e inovação. Impulsionar as forças da cultura e comportamentos da *Net Generation* numa aprendizagem baseada em projetos.
- Reinventar o papel do professor como educador de forma a poder entusiasmar-se no trabalho com os seus alunos.

Podem-se distinguir três tipos de abordagem ou posicionamento pedagógicos, perante ambientes de geometria dinâmicos: a demonstração pelo professor, os alunos interagirem com ficheiros criados pelo professor e, por fim, os alunos criarem os seus próprios ficheiros. Na abordagem pela demonstração do professor, este promove a discussão dos alunos sobre uma construção geométrica e pode colocar questões acerca dos objetos situados no ecrã para que os alunos possam explicar o que, para eles, seria espectável de acontecer se determinada configuração ou conjunto de objetos fossem movidos ou mudados. Esta abordagem permite a professores com pouca experiência na utilização de tecnologias em sala de aula correrem poucos riscos de algo correr mal na sua experimentação. Assim, esta abordagem também permite que não hajam grandes mudanças metodológicas e que seja viável mesmo com poucos recursos. A segunda abordagem – os alunos interagem com ficheiros criados pelo professor – os alunos podem experimentar os ficheiros num ambiente de geometria dinâmica. Estes ficheiros irão conter limites ao que os alunos podem experimentar e o tempo não é gasto, pelos alunos, na conceção das construções. Assim, os alunos podem utilizar o seu tempo na exploração para chegar aos objetivos específicos almejados em cada tarefa. Nesta abordagem, também existe algum controlo do professor sobre aquilo que é verdadeiramente importante em cada tarefa, mas ela pode, apesar de tudo, proporcionar oportunidades para que os alunos desenvolvam raciocínios criativos e para que consigam resolver problemas. A terceira abordagem é a adotada neste estudo – os alunos criam os seus próprios ficheiros – a qual providencia um sentido de posse aos alunos e faz emergir um sentido diferente para a resolução de problemas. Simultaneamente, os alunos tendem a desenvolver a sua independência, criatividade e sentido de descoberta (Jones, Lavicza, Hohenwarter, Lu, Dawes & Parish, 2009). Tenho a perceção de que as minhas intervenções poderão em determinados momentos ser essenciais, no entanto, tento apenas utilizá-las como último recurso. Este tipo de intervenção pode mesmo ser caracterizado como “regulação por falta” (Perrenoud, 1999).

Esta forma potencialmente produtiva de planificar o ensino inclui uma abertura para a existência de flexibilidade na interação com o ambiente tecnológico, abrindo a porta ao aparecimento da iniciativa dos alunos na análise dos objetos e das relações emergentes. No entanto, essa interação deve ser realizada com uma cuidada supervisão para que os alunos não divirjam demasiado do objetivo pretendido. Ao optar pela integração das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem e ao potencializar a capacidade dos alunos de as utilizar, estarei a privilegiar a intenção de ensinar matemática de uma forma significativa (Prue, 2011). Quando solicitado assumo preferencialmente a forma de questionamento: O que é que descobriste? Que conselho darias a alguém acerca de …? O que é que foi fácil/difícil nesta tarefa? (Hodgen & Webb, 2008).

Assumo a perspetiva de que a tecnologia pode e deve ser utilizada pelos alunos para melhorarem as suas aprendizagens. No entanto, o fator chave e o maior desafio para os professores do século XXI, não é sentirem-se confortáveis com os detalhes das novas tecnologias, mas sim estarem à vontade com um melhor e novo tipo de pedagogia: a formação de parcerias (ou co-construtivismo) (Prensky, 2010).

Neste contexto cabe-me a mim proporcionar situações como descreve Santos (2002):

Situações que levem os alunos a apoiar os outros e a receber ajuda dos pares constituem experiências ricas na reestruturação dos seus próprios conhecimentos, na regulação das suas aprendizagens, e no desenvolvimento da responsabilidade e da autonomia (p.79).

Deste modo, cabe-me a mim encorajar tanto quanto possível a partilha e aprendizagem entre pares para que os alunos de aprendizagem mais lenta em relação aos seus pares possam acompanhá-los (Prensky, 2010). Analogamente, Pollock (2012) descreve experiências de aprendizagem cooperativa informal, em que surgem oportunidades para que os alunos ensinem os seus pares e procurem correção e, simultaneamente, proporcionam ao professor oportunidades para interagir deliberadamente (*expert feedback*) com os alunos durante a aula.

Apesar de este estudo incidir maioritariamente nas interações entre pares de alunos, a importância das interações entre aluno e professor não deve ser ignorada. Naturalmente, num ambiente de aprendizagem com um cunho investigativo e aberto, aparecem caminhos imprevistos e, por vezes, desajustados. Apesar disso, a minha principal função é a de ajudá-los a articular as suas próprias ideias e, sempre que possível, expor os alunos à terminologia adequada, fazer conexões entre conceitos e levantar questões ou encorajar investigações. Embora as minhas intervenções devam ser mínimas, durante as aulas, recorro a algumas expressões de encorajamento, fornecedoras de pistas ou outras indicações, como seja:

- Diz-me qual é o problema.
- O que é que sabes acerca do problema? Podes descrever o problema a outra pessoa?
- Lembras-te de encontrar um problema parecido?
- O que é que é parecido…? O que é que é diferente…?
- Tens algum palpite? ...uma conjetura?
- O que é que aconteceria se …? É sempre verdade que …?
- Como é que sabes que …? Podes justificar …? Consegues encontrar um método diferente?
- Podes explicar … melhorar/juntar a essa explicação …?

Assim, tento criar oportunidades para que os alunos procurem feedback não só do professor, mas principalmente dos seus pares, da interação com o computador e de outros colegas da turma (Pollock, 2012).

3.2.3. O Papel do Aluno na Experiência de Ensino

Neste contexto de trabalho é atribuído aos alunos um papel ativo no processo de aprendizagem.

> (…) *o aluno vai identificando o que conhece, o que observa e o que dizem os demais, valorizará o que lhe interessa, tomando decisões sobre se é útil assimilar as novas informações e as novas formas de raciocinar, de fazer ou de falar* (Sanmartí, 2009, p. 21).

O papel do aluno pode tornar-se mais central na aprendizagem quando esta se constrói através da descoberta com o uso de uma ferramenta apelativa, intuitiva e construtiva. Nesta situação estão abertas as portas para a experimentação. Em particular os AGDs têm o potencial de promover a aprendizagem centrada no aluno e a aprendizagem ativa (Saha, Ayub & Tarmizi, 2010). Segundo Olive e colegas (2010), nestes ambientes o papel dos alunos torna-se igual ao dos cientistas: observando, gravando, manipulando, prevendo, conjeturando e testando. Deste modo, os alunos desenvolvem teorias e explicações para os fenómenos ocorridos. A utilização dos AGDs permite que o aluno, através da manipulação, experimente situações que de outro modo seriam impossíveis de recriar.

> *O envolvimento dos alunos com ideias matemáticas abstractas, incluindo as suas próprias, pode ser fomentado através da utilização da tecnologia. A tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações, ao fornecer um meio de visualizar noções matemáticas sob múltiplas perspectivas. A aprendizagem dos alunos é auxiliada através do* ***feedback*** *que a tecnologia pode proporcionar: num ambiente de trabalho de geometria dinâmica, arrasta-se um ponto e a forma observada no ecrã altera-se; modificam-se as regras definidas numa folha de cálculo e observam-se as alterações dos valores dependentes. A tecnologia constitui ainda um contexto para as discussões entre alunos e o professor acerca dos objectos visualizados no ecrã e dos efeitos das diversas transformações dinâmicas que a tecnologia permite* (NCTM, 2007, p.27, ênfase do autor).

Numa perspetiva de co-construtivismo o âmago da questão da aprendizagem está na forma como os alunos são levados a investigar e conjeturar. Numa estrutura de ajuda recíproca (King, 1997), onde se integra o computador, não é o professor que pede justificações ou evidências das conjeturas ou regras emergentes das contribuições dos alunos, mas são os próprios alunos que assumem essa responsabilidade (Beatty & Geiger, 2010). Neste contexto, o papel que as tecnologias desempenham está intimamente ligado ao dos alunos, pela sua utilização e ao do professor pela avaliação da qualidade dessa utilização. O papel da tecnologia é o de servir de apoio à pedagogia das parcerias (co-construtivismo) e permitir que cada aluno personalize a sua aprendizagem. Neste contexto de sala de aula, as tecnologias não surgem de forma desgarrada. A integração do computador é feita de forma planificada, ao serviço da regulação e co-regulação das aprendizagens.

O trabalho em parcerias com o computador possibilita que o aluno esteja envolvido, desde o início de cada aula, em descobrir por si próprio (e partilhando mutuamente) o que é necessário fazer e a forma de lá chegar. É importante que, numa perspetiva co-construtivista, os alunos tomem consciência de que o seu papel consiste primariamente em raciocinar de forma mais empenhada e mais crítica. Simultaneamente, o trabalho em parcerias possibilita que os alunos observem e avaliem como eles, e os seus pares, pensam (Prensky, 2010).

Neste ambiente, os alunos desempenham três papéis específicos:

1. Os alunos precisam de se percecionar como “profissionais de parcerias”, estar conscientes de quais são as questões importantes em qualquer assunto que estejam a estudar e como responder a essas questões.
2. Os alunos precisam de pensar por eles próprios, colaborando quando apropriado e criando respostas que outros deverão entender e, simultaneamente, produzindo trabalho do qual sintam orgulho.
3. Os alunos precisam de estar conscientes das capacidades que estão a desenvolver em simultâneo com os conteúdos (Prensky, 2010, p.50).

Assim, neste contexto é necessário que os alunos estejam conscientes de uma mudança de paradigma e valorizem o trabalho entre pares e a autonomia.

Nestes ambientes, o aluno não se limita a reproduzir procedimentos ou cálculos. Ele é convidado a adotar uma atitude crítica relativamente às suas conjeturas em contraste com a aceitação de verdades inquestionáveis emitidas pelo professor (Fonseca, 2004). Por outras palavras, o papel do aluno não é receber informação de forma passiva, mas participar ativamente na *construção de novos significados* (Shapiro, 1994).

Assim, os alunos devem tomar consciência de que a aprendizagem tem de ser construída por eles, em lugar de ser algo que lhes é dado (Black *et al.*, 2003; Keeley & Tobey, 2011). Os alunos têm que desenvolver uma combinação sofisticada de capacidades, atitudes e disposições de modo a tornarem-se aprendentes independentes. Têm de aprender a refletir sobre a sua própria aprendizagem, a rever as suas experiências de aprendizagem (O que faz sentido e o que não faz? Em que é que isto se relaciona com o que eu já sei, ou penso que sei?) e a aplicar o que aprenderam na sua aprendizagem futura (Hodgen & Webb, 2008).

Mais especificamente, os alunos devem desenvolver hábitos de pensamento investigativo (*inquiry habit of mind* no original), como componente essencial para uma aprendizagem proveitosa, tanto a nível individual como de grupo (Newmann, 1996; Costa & Kallick, 2000; Earl & Lee, 2000; Katz, Sunderland & Earl, 2002). Precisam, portanto, de desenvolver competências de questionamento reflexivo, para a *construção de significados* através do conhecimento pessoal e, simultaneamente, precisam de proceder à auto-monitorização do seu trabalho, detetando o que não entendem e escolhendo o caminho a seguir (Earl, 2003).

A capacidade de uma boa autoavaliação, associada a uma capacidade de identificação de objetivos e reconhecimento de metas, para além da capacidade de interpretação e utilização do feedback na aprendizagem, caracteriza um aluno bem-sucedido (Brookhart, 2001; MacDonald & Boud, 2003).

Para além disso, esses alunos normalmente sabem tirar partido do feedback, pois aparentemente de forma natural ou instintiva geram feedback dirigido a eles próprios, levando algum tempo para refletir ou interagindo propositadamente com os seus pares, ou procurando feedback do professor. Essa procura torna-se por vezes "invisível" pois toma contornos informais. Em particular, as discussões entre pares permitem que os alunos procurem feedback com o intuito de clarificar e gerar questões. A discussão entre pares também pode motivar os alunos a praticar a produção de feedback útil (Pollock, 2012). Segundo Pope (2011) uma das grandes oportunidades de os alunos beneficiarem da utilização das tecnologias em Matemática é aprenderem com o feedback.

3.3. As Tarefas

3.3.1. Seleção e Preparação

A elaboração de tarefas assume especial importância pois pode providenciar um ambiente favorável aos padrões de funcionamento de sala de aula em que é dado poder ao aluno na construção de conhecimento mediado socialmente. Assim, as tarefas devem estar ao alcance dos alunos, mas também devem permitir que os alunos construam conhecimentos que não possuem à partida (Brousseau, 1997).

De acordo com James (2008), procuro preparar tarefas de modo a que o aluno possa completar com eventual ajuda e que aquele que ajuda, ou seja, "o mais especialista", seja o professor ou preferencialmente um colega, possa apoiar a aprendizagem no sentido de levar o outro a conseguir sucesso pelos seus próprios meios. O processo de devolução (Brousseau, 1997), relativo à autonomia do aluno, atrás referido, pode envolver, em determinados casos, um afastamento daquilo que era o plano de aula, pois podem surgir estratégias próprias dos alunos que levem a caminhos fora do âmbito inicialmente previsto. Assim, neste contexto, ensinar envolve dois níveis de planificação ou decisão: conceber tarefas e atividades previamente e a adaptação, a cada momento, das atividades com base no feedback dos alunos (Perrenoud, 1998).

Na conceção de um conjunto de tarefas diversificado, é dada primazia a uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005). Assim, procura-se que as tarefas revelem o mínimo de informação possível relegando, para os alunos, o papel da descoberta na construção do seu conhecimento.

Numa fase inicial tive uma preocupação com a introdução gradual da utilização do GeoGebra (Tarefas A e B) (Anexos 2 e 3). Intencionalmente, não coloquei instruções diretas de utilização do menu, com a intenção de levar os alunos a explorar o *software*. Depois, à medida que os alunos vão conhecendo melhor a ferramenta são dadas menos instruções. Um exemplo de uma fase adiantada é a tarefa I7 (Anexo 21), em que o enunciado inclui apenas uma sequência de figuras.

Ao longo do sétimo ano de escolaridade, algumas tarefas foram realizadas de forma mista, recorrendo à resolução no GeoGebra e ao papel e lápis. Geralmente, as tarefas contêm algumas questões que solicitam que os alunos descrevam os seus raciocínios. No oitavo ano de escolaridade, as tarefas recorreram na sua totalidade apenas ao GeoGebra e solicitavam, na sua grande maioria, a elaboração de relatórios, em formato digital.

Tendo em atenção os tópicos curriculares foi preparado um conjunto de trinta e três aulas, distribuídas por dois anos letivos (sétimo e oitavo), pelos tópicos de Geometria: Triângulos e Quadriláteros (TQ) e Semelhança (S), no sétimo ano de escolaridade, e Isometrias (I) e Teorema de Pitágoras (TP), para o oitavo ano.

A seleção e preparação das tarefas é uma atividade complexa que envolve várias dimensões. Em particular, as tarefas propostas neste contexto de sala de aula (Anexos 2 a 27) seguem as recomendações de Laborde (2011) no sentido de envolverem questões de natureza variada (epistemológicas, cognitivas, didáticas e instrumentais), num contexto de trabalho apoiado por um AGD:

- Questões epistemológicas: existe algum problema a ser resolvido? Que tipo de conhecimento matemático é requerido para resolver a tarefa com tecnologias? Tendo por base o conhecimento matemático pretendido pela tarefa, estará a estratégia de resolução mais eficiente dentro do ambiente escolhido?

- Questões cognitivas: que tipo de aprendizagem a tarefa proporciona? Esta análise tem de ser efetuada tendo em conta o conhecimento e as conceções anteriores dos alunos.
- Questões didáticas: Quais são os meios de ação proporcionados pelo ambiente para resolver a tarefa? Os valores das variáveis da tarefa são escolhidos de forma a promover as estratégias desejadas? Existe feedback do ambiente de forma a invalidar estratégias erradas? Este fator é particularmente importante em ambientes de geometria dinâmica, pois estes fornecem feedback com o arrastamento.
- Questões instrumentais: O que é que os alunos sabem acerca da utilização do ambiente para resolver a tarefa? O seu conhecimento matemático permitir-lhes-á resolver a tarefa usando as ferramentas do ambiente sobre o qual não estão familiarizados ou, inversamente, podem construir uma nova estratégia de resolução capitalizando a sua familiaridade com o ambiente? (Laborde, 2011, p. 82).

Estas questões serão atendidas na descrição das tarefas que irá surgir mais à frente.

As tarefas propostas (Anexos 2 a 27) requerem que os alunos forneçam explicações, justificações ou fundamentações e apontam para o desenvolvimento do espírito crítico. A escolha de tarefas está intimamente ligada às discussões matemáticas entre os alunos.

Segundo Smith e Stein (2011) as tarefas de alto nível podem ser divididas em duas categorias: estabelecimento de conexões e construção de novo conhecimento matemático, tendo a segunda maior peso na preparação das tarefas deste estudo. Tentei adaptar/criar tarefas denominadas de alto nível matemático, de forma a proporcionar discussões matemáticas produtivas entre alunos. Isto não significa que em todas as tarefas surjam obrigatoriamente discussões matemáticas produtivas entre os alunos, mas é pouco provável que estas aconteçam com tarefas de baixo nível (Smith & Stein, 2011). Em particular, na preparação das tarefas tive o cuidado de não sugerir explicitamente uma abordagem ou um caminho. O recurso ao GeoGebra é, deste modo, facilitador do surgimento de diferentes abordagens.

Acresce ainda o facto da utilização contínua do GeoGebra dotar os alunos de maiores competências em relação a este *software* o que poderá contribuir para melhorar não só a forma como os alunos trabalham no GeoGebra mas também possibilitar a resolução de tarefas mais ricas e exigentes.

Os tópicos escolhidos estão enquadrados no estudo da Geometria e a sequência da sua apresentação tentou seguir uma linha de continuidade, numa lógica crescente de dificuldade e enquadrada no programa de matemática em vigor.

Nesta experiência de ensino algumas tarefas são criadas com base nos materiais de apoio à implementação do programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Tarefas A, B, TQ1, TQ2, TQ4-TQ7, S1, S3, S4, TP1-TP3).

3.3.2. Tópicos, Subtópicos e Objetivos

As tarefas relativas ao tópico Triângulos e Quadriláteros (Anexos 2 a 10) envolvem os subtópicos: Soma dos Ângulos Internos e Externos de um Triângulo (Tarefas TQ1-TQ3), com o objetivo de possibilitar a dedução da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo; Congruência de Triângulos (Tarefa TQ4), com o objetivo de abrir caminho à compreensão dos critérios ALA, LAL e LLL de congruência de triângulos e explicação da inexistência de um critério LLA; Propriedades, Classificação e Construção de Quadriláteros (Tarefas TQ5-TQ7), com o objetivo de possibilitar o estudo das propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo.

As tarefas do tópico Semelhanças (Anexos 11 a 14) integram os subtópicos: Noção de Semelhança (Tarefa S1), com o objetivo de os alunos compreenderem a noção de semelhança; Ampliação e Redução de um Polígono (Tarefas S2-S3), com o objetivo de os alunos ampliarem e reduzirem um polígono, dada a razão de semelhança; Polígonos Semelhantes (Tarefas S2-S4), com o objetivo de os alunos identificarem e construírem polígonos semelhantes e Semelhança de Triângulos (Tarefa S4), com o objetivo de os alunos compreenderem os critérios de semelhança de triângulos e serem capazes de usá-los na resolução de problemas. Para além disso, a Tarefa S3 contempla ainda o estudo do efeito da ampliação e redução de uma figura sobre o seu perímetro ou área e a tarefa S4 possibilita relacionar o Teorema de Tales com a semelhança de triângulos.

As tarefas referentes ao tópico Isometrias (Anexos 15 a 21) contêm tarefas de revisão sobre os conceitos de rotação (Tarefas I1-I2 e I4) e de reflexão (Tarefas I2 e I4) nos subtópicos: Translação Associada a um Vetor (Tarefas I3 e I5-I7), com o objetivo de os alunos compreenderem as noções de vetor, de translação, identificarem e efetuarem translações. A Tarefa I3 envolve a construção de um friso e as Tarefas I5-I7 incluem o estudo de pavimentações, que podem ser vistas como a melhor forma de explorar as transformações geométricas.

> *No ensino básico, este tipo de actividades, ao mesmo tempo que desenvolve o espírito de observação e de detecção de regularidades nos alunos é um campo fértil onde podem exprimir livremente o seu espírito criativo, pode servir, do ponto de vista do ensino, para introduzir naturalmente as transformações geométricas* (Veloso, 1998, p.191).

As tarefas relativas ao tópico Teorema de Pitágoras (Anexos 22 a 27) enquadram-se no subtópico Demonstração e Utilização e têm como objetivos levar os alunos a descobrir e demonstrar a fórmula da área do trapézio (Tarefa TP1); Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa (Tarefa TP2); Levar os alunos à descoberta do Teorema de Pitágoras (Tarefa TP3); Demonstrar o Teorema de Pitágoras (Tarefas TP4-TP5) e resolver problemas (TP6).

As informações descritas anteriormente encontram-se sintetizadas na tabela seguinte:

Tabela 3.1. Tópicos, subtópicos e objetivos

Tópicos	Subtópicos	Tarefas	Objetivos
Triângulos e Quadriláteros	Soma dos Ângulos Internos e Externos de um Triângulo	TQ1 TQ2 TQ3	Possibilitar a dedução da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um triângulo
	Congruência de Triângulos	TQ4	Abrir caminho à compreensão dos critérios ALA, LAL e LLL de congruência de triângulos e explicação da inexistência de um critério LLA
	Classificação e Construção de Quadriláteros	TQ5 TQ6 TQ7	Possibilitar o estudo das propriedades relativas aos lados, aos ângulos e às diagonais de um paralelogramo
Semelhanças	Noção de Semelhança	S1	Compreensão da noção de semelhança
	Ampliação e Redução de um Polígono	S2 S3	Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança
	Polígonos Semelhantes	S2 S3 S4	Identificar e construir polígonos semelhantes
	Semelhança de Triângulos	S4	Compreender os critérios de semelhança de triângulos e ser capaz de os usar na resolução de problemas
Isometrias	Revisão dos Conceitos de Rotação e Reflexão	I1 I2 I4	Rever e construir figuras utilizando os conceitos de rotação e reflexão
	Translação Associada a um Vetor	I3 I5 I6 I7	Compreender as noções de vetor e de translação. Identificar e efetuar as translações
Teorema de Pitágoras	Demonstração e Utilização	TP1	Obter e demonstrar a fórmula da área do trapézio
		TP2	Explorar as alturas e medianas dos triângulos com vista a justificar as propriedades dos triângulos
		TP3	Obter o Teorema de Pitágoras
		TP4 TP5	Demonstrar o Teorema de Pitágoras
		TP6	Resolver problemas

3.3.3. Roteiro da Experiência de Ensino

Durante o sétimo ano de escolaridade as aulas de matemática estiveram distribuídas por 5 tempos semanais, com uma aula de noventa minutos e outra de 90 + 45 minutos, sendo a aula de 90 minutos lecionada em assessoria ao abrigo do Plano da Matemática II.

No oitavo ano, as aulas distribuíram-se por quatro tempos semanais com duas aulas de noventa minutos. As tarefas seguem a seguinte ordem cronológica:

Tabela 3.2. Calendarização

Data	Tarefas	Tópicos	Duração (min)
2012/03/02	Tarefa A – Elementos base da geometria dinâmica e construção de figuras	Triângulos e Quadriláteros	90 + 45
2012/03/09	Tarefa B – Construção de triângulos e trapézios		90
2012/03/12	Tarefa TQ1 - Ângulos internos de um triângulo		90
2012/03/16	Tarefa TQ2 – Ângulos externos de um triângulo		90 + 45
2012/03/19			90
2012/04/13	Tarefa TQ3 – Resolução de problemas em triângulos		90+45
2012/04/16	Tarefa TQ4 – Investigando congruências de triângulos		90
2012/04/20			90+45
2012/04/27	Tarefa TQ5 – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos		90+45
2012/04/30	Tarefa TQ6 – Investigando quadriláteros e pontos médios		90
2012/05/04	Tarefa TQ7 – Problemas com triângulos e quadriláteros		90+45
2012/05/06	Tarefa S1 – Noção de semelhança	Semelhança	90
2012/05/11	Tarefa S2 - Construção de um pantógrafo		90+45
2012/05/14	Tarefa S3 – Ampliações e reduções		90
2012/05/18	Tarefa S4 – Triângulos e quadriláteros semelhantes		90+45
2013/01/08	Tarefa I1 – O relógio	Isometrias	90
2013/01/15	Tarefa I2 – Os moinhos		90
2013/01/18	Tarefa I3 – A corrente		90
2013/01/22	Tarefa I4 – O Caleidoscópio		90
2013/01/25	Tarefa I5 – Os fantasmas		90
2013/01/29	Tarefa I6 – Os peixes		90
2013/02/01	Tarefa I7 – Os gatos		90
2013/02/15	Tarefa TP1 – À descoberta da área do trapézio	Teorema de Pitágoras	90
2013/02/22	Tarefa TP2 – Explorando as medianas e a altura do triângulo		90
2013/02/26	Tarefa TP3 – À descoberta do teorema de Pitágoras		90
2013/03/01	Tarefa TP4 – Demonstrando o teorema de Pitágoras		90
2013/03/05	Tarefa TP5 – Demonstrando o teorema de Pitágoras II		90
2013/03/08	Tarefa TP6 – Os postes		90

Para que os alunos adquiram familiaridade no trabalho com o AGD e possam efetivamente tirar partido desta ferramenta, é importante proporcionar uma experiência de ensino prolongada, razão pela qual considerei necessário prolongá-la por dois anos letivos. A própria gestão do tempo durante a implementação das tarefas é algo que vai melhorando com a experiência (Christou, Jones, Mousoulides & Pittalis, 2006; Zachariades, Pamfilos, Christou, Maleev & Jones, 2007).

3.3.4. Questões Epistemológicas, Cognitivas, Didáticas e Instrumentais

Na construção das tarefas são tidas em conta as recomendações de Laborde (2011) relativamente às questões epistemológicas, cognitivas, didáticas e instrumentais que as caracterizam.

3.3.4.1. Triângulos e Quadriláteros

Este conjunto de tarefas (Anexos 2 a 10) foi adaptado de uma brochura publicada pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, da autoria de Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

Questões epistemológicas

As tarefas são constituídas por vários problemas a ser resolvidos. Os alunos irão necessitar dos conhecimentos com que trabalharam em figuras geométricas simples nos 1.º e 2.º ciclos, que serão descriminados adiante para cada uma das tarefas.

Questões cognitivas

O tipo de trabalho reveste-se de um cunho exploratório e investigativo. As tarefas aqui apresentadas são tarefas pensadas para levar os alunos a formular estratégias de resolução próprias, servindo-se dos conhecimentos e capacidades adquiridos anteriormente.

Questões didáticas

O GeoGebra permite que os alunos façam uso de elementos base da geometria, como pontos, segmentos de reta, retas e circunferências, entre outros, para a realização de construções mais elaboradas que envolvem relações entre diversos elementos. Para além disso, o GeoGebra proporciona a oportunidade de os alunos explorarem e descobrirem mais facilmente relações entre figuras, procurar invariantes e resolver problemas geométricos. Ao investigar, os alunos formulam conjeturas e argumentam sobre a sua veracidade ou falsidade. Essa capacidade ou poder de avaliação é realizado pelos alunos a partir do feedback do computador. Esse feedback surge como resultado das construções e dos arrastamentos que os alunos realizam. Assim, é dada oportunidade para que os alunos desenvolvam e construam significados matemáticos.

Questões instrumentais

Por se tratar de uma fase de introdução e de primeiro contacto com o GeoGebra, as duas primeiras tarefas refletem a preocupação da adaptação inicial a este ambiente. As seguintes já incorporam novas noções, mas sempre com o cuidado de incluir conhecimentos construídos anteriormente. As tarefas estão pensadas de forma a permitir a sua resolução apesar de os alunos não dominarem todas as funcionalidades deste *software*.

Tarefas A e B

Questões epistemológicas

Nestas tarefas são postas em ação algumas propriedades e conceitos como: ponto, segmento de reta, semirreta, reta, reta paralela, reta perpendicular, triângulo, circunferência, ângulo, ângulo interno, amplitude do ângulo, rotação, critérios de igualdade de amplitude de ângulos, classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, critérios de relação entre ângulos e lados, trapézios e critérios de relação entre os lados e os ângulos dos trapézios.

Existem questões relacionadas com construções e medição que o *software* facilita comparativamente às construções de régua e compasso. Existe também uma questão que solicita a construção de um triângulo retângulo que se mantenha retângulo por arrastamento. Neste tipo de construção, denominada construção resistente, acresce a dificuldade, no entanto, pode trazer vantagens para a abordagem de conceitos que lhe estão associados como o de perpendicularidade, que constitui a génese da construção de régua e compasso de um triângulo retângulo.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas envolvem propriedades e conceitos que fazem parte de conteúdos programáticos já lecionados em anos letivos anteriores. Para além disso, as questões estão colocadas de forma a possibilitar que os alunos se adaptem a um ambiente de aprendizagem com menos exposição de conceitos e buscando a sua crescente autonomia.

Questões didáticas

Na adaptação ao *software*, é de referir que o GeoGebra proporciona menus de fácil acesso, exploração e entendimento, dando mesmo algumas pistas de como utilizar algumas ferramentas quando o cursor do rato se aproxima das mesmas. A adaptação ao software é feita, sempre que possível, sem recorrer a instruções específicas de recurso a determinado menu ou ferramenta. Esta opção pode trazer mais dificuldades aos alunos, mas, simultaneamente, apresenta a vantagem de colocar de imediato os alunos na atividade de experimentação e descoberta.

Questões instrumentais

As tarefas A e B são introdutórias e foram concebidas para os alunos do sétimo ano se iniciarem na utilização do AGD, em geometria plana. O facto de estarem envolvidos conceitos abordados anteriormente poderá permitir-lhes que se foquem maioritariamente na sua adaptação ao *software*.

Tarefa TQ1

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa os alunos terão de medir a amplitude de ângulos, distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos. O GeoGebra permite a medição dos ângulos de forma simples, facilita a visualização das propriedades e permite que rapidamente, por arrastamento, se testem as conjeturas.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas envolvem a formulação, testagem e demonstração de conjeturas relacionadas com a soma das amplitudes dos ângulos internos e com a amplitude de um ângulo externo de um triângulo. Para além disso pretende-se levar os alunos a identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo, exprimir resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Questões didáticas

O GeoGebra vem possibilitar que surjam formas diferentes das habituais de os alunos testarem conjeturas como por exemplo nas questões 2 e 4 desta tarefa, onde são solicitadas demonstrações.

Questões instrumentais

O GeoGebra facilita o surgimento de conjeturas através das medições e arrastamentos, assim como as demonstrações apoiadas pelos arrastamentos executados.

Tarefa TQ2

Questões epistemológicas

Para resolver a tarefa é requerido que os alunos meçam a amplitude de um ângulo, distingam ângulos complementares e suplementares, identifiquem ângulos verticalmente opostos, bem como ângulos alternos internos e compreendam o resultado da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

Apesar de os alunos, no 2.º ciclo, terem estudado o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo, recorrendo a processos informais, apoiados em materiais didáticos, não necessitam desse conhecimento para resolver a tarefa.

Questões cognitivas

A tarefa está pensada de forma a levar os alunos a formular, testar e demonstrar conjeturas relacionadas com a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo. Para além disso também tem como objetivo fazer com que os alunos identifiquem e utilizem o raciocínio indutivo e dedutivo (questões 1.2 e 2.3, respetivamente), compreendam o papel das definições em matemática e discutam resultados, processos e ideias matemáticas.

Questões didáticas

O professor deve sublinhar que as conclusões obtidas (por exemplo na questão 1.2) não são, necessariamente, válidas em todos os casos. Na sequência o professor deve tirar proveito da questão 2.3. para chamar a atenção dos alunos para o facto de os argumentos apresentados nas questões 2.1. e 2.2. serem válidos, em geral, para qualquer triângulo, apesar de o raciocínio ter sido apoiado num esquema que representa um triângulo particular.

Questões instrumentais

Apesar de os alunos ainda terem pouca experiência na utilização do GeoGebra facilmente verificam que a soma dos ângulos externos do triângulo é 360º, bastando para isso atender ao feedback do computador obtido por arrastamento de qualquer um dos seus vértices, podendo levar os alunos a compreender as razões pelas quais a referida soma é igual a 360º.

Tarefa TQ3

Questões epistemológicas

Esta tarefa é constituída por duas partes, sendo que a primeira (original) consiste na construção de uma figura análoga a um peixe, no GeoGebra, com triângulos, onde os alunos manipulam entes geométricos e reveem, informalmente, conceitos como o paralelismo, perpendicularidade, reflexão e rotação, como mostra a figura:

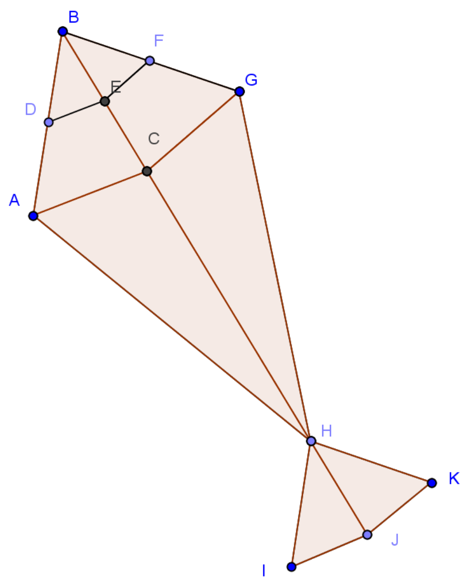


Fig. 3.2. O Peixe

Em particular a construção do primeiro triângulo é realizada tendo como ponto de partida dois ângulos. A segunda parte da tarefa apela à medição de ângulos e à resolução de problemas, apoiando-se na construção feita no GeoGebra e utilizando os conceitos explorados nas duas tarefas anteriores (soma dos ângulos internos e externos de um triângulo).

Questões cognitivas

Com esta tarefa os alunos devem desenvolver a sua capacidade de resolução de problemas envolvendo a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo; devem identificar os dados, as condições e o objetivo de um problema; devem conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; por fim, terão de discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

Questões didáticas

A questão 2 da segunda parte da tarefa pode dar origem a um diálogo matemático muito rico entre os alunos, uma vez que se refere à variação da amplitude do ângulo DBC, que depende da amplitude dos ângulos CAB e BCA. É natural que esta situação leve à discussão sobre a existência ou não do triângulo nos casos limite: pode o ângulo DBC medir 0º ou 180º? Neste caso, como em muitos outros, a figura degenerada já não tem as mesmas propriedades da figura original.

Questões instrumentais

Apesar de os alunos ainda estarem numa fase de adaptação ao GeoGebra poderão surgir várias estratégias para atingir os mesmos objetivos.

Tarefa TQ4

Questões epistemológicas

Para a resolução desta tarefa é requerido que os alunos recorram a alguns conhecimentos de anos anteriores, como: construir triângulos sendo dados os comprimentos dos três lados, os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado, ou as amplitudes de dois ângulos e o comprimento do lado comum a esses ângulos; medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude.

Questões cognitivas

Pretende-se com esta tarefa proporcionar uma aprendizagem relacionada com a compreensão da noção de congruência de triângulos e o conhecimento dos critérios LLL, LAL e ALA de congruência de triângulos. Para além disso, também faz parte do objetivo que os alunos compreendam o que é uma conjetura, um teorema, um exemplo e um contraexemplo (por exemplo as questões 2 e 4) e interpretem informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos.

Questões didáticas

Nesta tarefa, os alunos têm oportunidade de raciocinar indutivamente, formulando conjeturas a partir dos casos particulares que analisam. Os alunos têm de interpretar informação, ideias e conceitos, com destaque para os conceitos de congruência e critérios de congruência.

Questões instrumentais

Os alunos podem construir novas estratégias de resolução, capitalizando a sua crescente familiaridade com o ambiente.

Tarefa TQ5

Questões epistemológicas

Os alunos partem dos seus conhecimentos anteriores para a identificação dos elementos de um polígono, compreensão das suas propriedades e classificação de polígonos.

Questões cognitivas

Esta tarefa foi idealizada para possibilitar aprendizagens relacionadas com a determinação da soma dos ângulos internos de um quadrilátero e com a classificação de quadriláteros, construindo-os a partir de condições dadas e investigando as suas propriedades. Para além disso, também se procura que os alunos compreendam o papel das definições em Matemática e representem informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas.

Questões didáticas

Esta tarefa surge como instrumento de transição entre o estudo dos triângulos e o estudo dos quadriláteros. O GeoGebra poderá facilitar a determinação da soma dos ângulos internos, a classificação de quadriláteros, a sua construção a partir de condições dadas e potenciar a investigação das suas propriedades. Um dos fatores que poderão contribuir para esta facilidade é o facto de possuir ferramentas intuitivas de construção de polígonos.

Questões instrumentais

Os alunos podem construir novas estratégia de resolução, capitalizando a sua crescente familiaridade com o ambiente.

Tarefa TQ6

Questões epistemológicas

Os alunos precisarão de identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos bem como classificar quadriláteros e conseguir construí-los a partir de condições dadas.

Questões cognitivas

Com esta tarefa procura-se que os alunos investiguem as propriedades de quadriláteros. Para além disso, proporciona-se a oportunidade de que os alunos exprimam resultados, ideias e processos matemáticos por escrito, utilizando vocabulário próprio, através da elaboração de um relatório escrito.

Questões didáticas

Apoiando-se nos conhecimentos explorados na tarefa anterior parte-se para a investigação de propriedades dos quadriláteros, no GeoGebra, e explora-se as potencialidades dos relatórios escritos. Para tal, inclui-se um guião de elaboração do relatório onde se dá ênfase à importância da descrição dos processos utilizados.

Questões instrumentais

Como os alunos já possuem prática na construção de quadriláteros utilizando o GeoGebra, poderão concentrar os seus esforços na investigação.

Tarefa TQ7

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa os alunos podem recorrer a conhecimentos resultantes das tarefas anteriores.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas com esta tarefa estão relacionadas com a capacidade de utilizar critérios de congruência de triângulos e propriedades de quadriláteros na resolução de problemas e na justificação de propriedades de figuras. Para além disso, esta tarefa proporciona oportunidades para que os alunos selecionem e utilizem vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração e exprimam processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Questões didáticas

Nesta tarefa existe uma heterogeneidade de questões em que o ambiente tem um papel importante a desempenhar nas estratégias a desenvolver. Existe uma questão relacionada com a análise exaustiva de casos (questão 1), outra com cálculo de medidas (questão 2), outra com sistematização e comparação de propriedades dos quadriláteros de acordo com as duas hierarquias estabelecidas (questão 3). Também há questões que envolvem raciocínio dedutivo (questões 4 e 6) e raciocínio indutivo (questão 7).

Questões instrumentais

A crescente familiaridade dos alunos com o GeoGebra e a própria natureza do *software* proporciona a possibilidade de os alunos fazerem uma análise exaustiva de casos (questão 1), sistematizarem e comparem as propriedades dos quadriláteros de acordo com as duas hierarquias estabelecidas (questão 3). Trata-se de uma tarefa que incide maioritariamente na resolução de problemas (à exceção da questão 3), utilizando a congruência de triângulos e as propriedades dos quadriláteros.

3.3.4.2. Semelhança

Algumas das tarefas propostas para o estudo das semelhanças (Anexos 11 a 14) são adaptadas da brochura *Semelhança – proposta de sequência de tarefas para o 3.ºciclo*, publicada pela DGIDC, que é da autoria de diversos professores das turmas-piloto do 8.º ano de escolaridade (2009/2010).

Retomando as questões colocadas por Laborde (2011), relativamente às tarefas deste subtópico tem-se:

Questões epistemológicas

As tarefas são constituídas por vários problemas a ser resolvidos, para os quais os alunos necessitam dos conhecimentos anteriores sobre noções básicas de geometria e sobre a proporcionalidade direta.

Questões cognitivas

Este conjunto de tarefas tem como objetivos que os alunos desenvolvam a visualização e o raciocínio geométrico e sejam capazes de os usar; que compreendam e sejam capazes de usar as relações de semelhança de triângulos; que desenvolvam e sejam capazes de utilizar as propriedades e relações relativas a figuras semelhantes no plano; que desenvolvam a compreensão das semelhanças; que compreendam a noção de demonstração e que façam raciocínios dedutivos; que sejam capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Questões didáticas

O feedback do computador assume clara importância na verificação de semelhança quer através das formas, quer das medições.

Questões instrumentais

A crescente familiarização com o GeoGebra possibilita a realização de tarefas mais exigentes a nível das construções e a nível do conhecimento matemático.

Tarefa S1

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa é requerido que os alunos utilizem conhecimentos de proporcionalidade direta.

Questões cognitivas

Esta tarefa encontra-se dividida em duas partes. Na primeira, pretende-se que os alunos reconheçam e compreendam a noção de semelhança a partir de situações conhecidas, estabelecendo a diferença entre o que é “parecido” e o que é “semelhante” em Matemática. Na segunda parte, pretende-se que os alunos calculem uma distância real a partir da fotografia de um objeto do qual se conhece a medida de comprimento de um dos seus elementos ou a escala da fotografia. Calculam-se distâncias reais a partir de representações.

Questões didáticas

Esta é a única tarefa em que não se apela à utilização do GeoGebra, mas é sugerido o recurso a fotografias da sala de aula ou do ambiente da escola, como mostra a figura:

Fig. 3.3. Fotografias.

Questões instrumentais

Na segunda parte da tarefa utilizam-se medições acessíveis para ter acesso a medições de objetos de acessibilidade difícil.

Tarefa S2

Questões epistemológicas

Os alunos recorrem aos conhecimentos dos elementos de base da geometria para a construção de um Pantógrafo, como ilustra a figura.

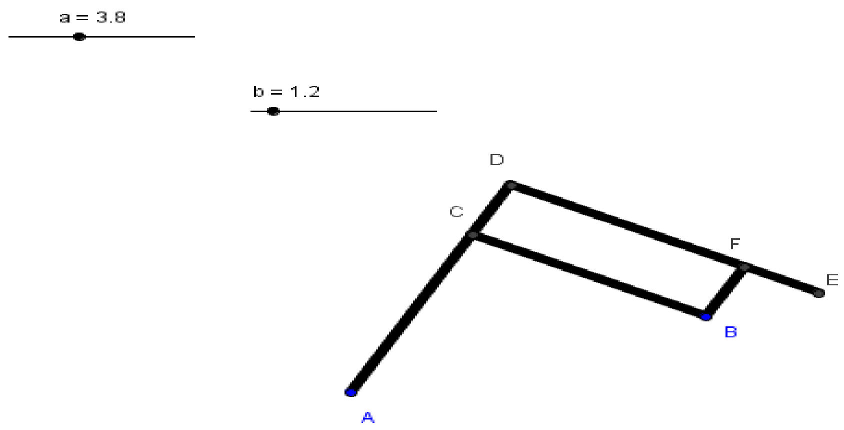


Fig. 3.4. Pantógrafo.

Questões cognitivas

A utilização do pantógrafo possibilita que os alunos desenvolvam a sua noção de figuras semelhantes.

Questões didáticas

O feedback do computador é traduzido pela construção simultânea de uma figura semelhante ao desenho do aluno. Para além, disso o aluno pode alterar as dimensões do pantógrafo alterando os valores dos seletores.

Questões instrumentais

A crescente destreza na utilização do GeoGebra permite que os alunos realizem uma construção complexa que depois podem explorar com o surgimento de figuras semelhantes.

Tarefa S3

Questões epistemológicas

Para a resolução desta tarefa é requerida a noção de perímetro e a ideia de paralelismo. Para além disso, os alunos devem compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade direta; utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões.

Questões cognitivas

Os objetivos da tarefa estão relacionados com a capacidade de os alunos ampliarem e reduzirem um polígono, dada a razão de semelhança, para além de identificarem e construírem polígonos semelhantes.

Questões didáticas

Recorre-se com frequência às funcionalidades de medição do GeoGebra para a construção de figuras semelhantes.

Questões instrumentais

Existe a possibilidade do surgimento de várias estratégias de medição e construção de figuras semelhantes.

Tarefa S4

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa é necessário que os alunos compreendam a noção de semelhança.

Questões cognitivas

Os objetivos desta tarefa passam pela capacidade de identificar e construir polígonos semelhantes; compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas; relacionar o Teorema de Thales com a semelhança de triângulos. Em particular, na questão 1 da tarefa é solicitada a construção de um triângulo com os lados paralelos para depois os alunos explorarem as relações existentes.

Questões didáticas

Pretende-se proporcionar situações que permitam que os alunos identifiquem e construam polígonos semelhantes, tendo por pano de fundo os vários casos de semelhança de triângulos.

Questões instrumentais

A crescente destreza na utilização do GeoGebra permite que os alunos realizem várias construções que depois podem auxiliar na exploração das questões colocadas, como a formulação e testagem de conjeturas para os critérios de semelhança de triângulos e a forma como se relaciona o teorema de Thales com a semelhança de triângulos (questão 5), como mostra a figura:

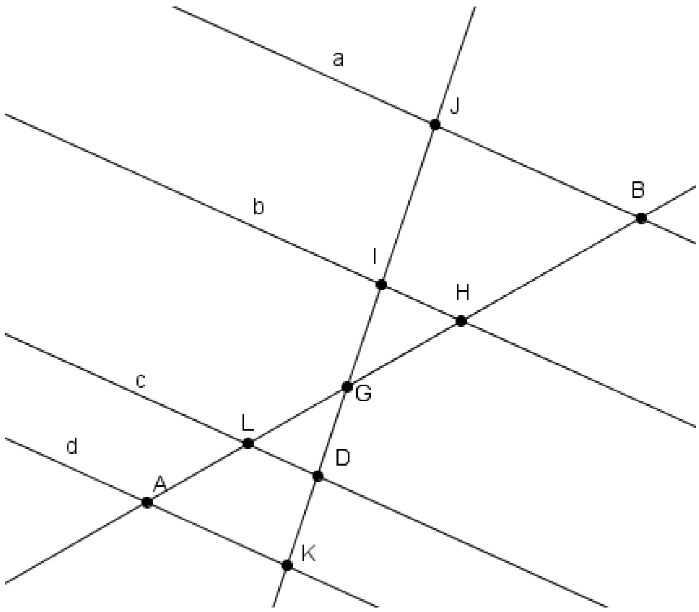


Fig. 3.5. Teorema de Thales.

3.3.4.3. Isometrias

O conjunto de tarefas a propor no estudo deste subtópico é adaptado de Paiva (2009) e requer em todas as situações o uso do GeoGebra. Em todas as tarefas, exceto na I4 (por motivos de gestão do tempo disponível), é solicitada a elaboração de um relatório escrito, apoiado num guião disponibilizado para o efeito (Anexos 15 a 21), onde os alunos descrevem as diferentes fases do seu trabalho.

De novo, adotando a categorização proposta por Laborde (2011), relativamente às tarefas deste subtópico tem-se:

Questões epistemológicas

As tarefas são compostas por vários problemas. Neste caso são antecipados conhecimentos que os alunos não tiveram oportunidade de tratar nos anteriores e, por esta razão, decidi inclui-los com o estudo dos frisos e das rosáceas. Os alunos também vão ter oportunidade de recordar as noções de reflexão e rotação e aprofundar a noção de translação associada a um vetor.

Questões cognitivas

Neste conjunto de tarefas os alunos têm oportunidade de desenvolver a capacidade de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria; desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e a capacidade de os usar; compreender e utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano; desenvolver a compreensão das isometrias. Para além disso, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, comunicando e raciocinando matematicamente em contextos geométricos, bem como de formular, testar e demonstrar conjeturas.

Questões didáticas

As preocupações decorativas estão presentes ao longo das tarefas, tanto na utilização de cores, como em algumas das construções dos alunos. Nas tarefas onde se recorre às translações tem-se em conta que a noção de vetor é uma noção que tradicionalmente envolve alguma dificuldade de compreensão.

Questões instrumentais

Numa fase inicial é natural que exista uma adaptação às ferramentas específicas utilizadas neste subtópico, como é o caso das ferramentas utilizadas para as reflexões, rotações e translações.

Tarefa I1

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa é necessário que os alunos tenham presente a noção de circunferência para conseguirem colocar os ponteiros do relógio a rodar (questão 3). Para além disso, nesta tarefa os alunos podem recordar e aplicar o conceito de rotação, estudado no 2.º ciclo, embora este conhecimento não seja impeditivo de resolver a tarefa.

Questões cognitivas

Nesta tarefa é aplicado o conceito de rotação juntamente com o conceito de circunferência na construção de um relógio, como mostra a figura:

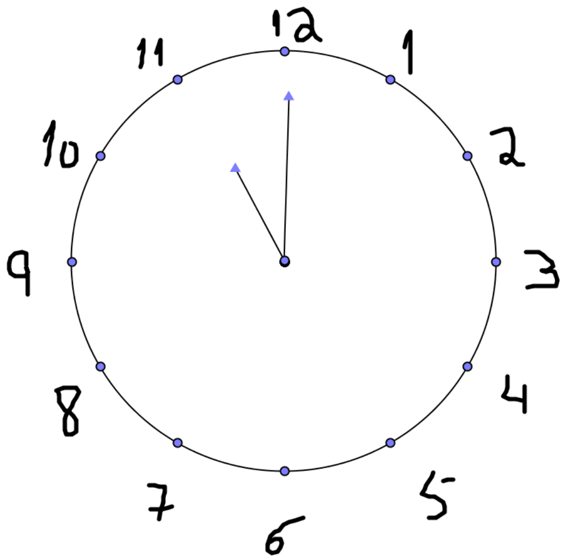


Fig. 3.6. O relógio.

Questões didáticas

Durante a resolução da tarefa o professor deve projetar um relógio, como produto final idêntico ao da figura anterior e com os ponteiros a rodar. O objetivo é que os alunos entendam que as extremidades dos ponteiros são pontos que estão a movimentar-se em circunferências que se encontram escondidas.

Questões instrumentais

Os alunos nesta fase já estarão adaptados às características do GeoGebra, como por exemplo, a possibilidade de esconder objetos, o que poderá propiciar que alguns grupos de alunos consigam autonomamente resolver a tarefa.

Tarefa I2

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa os alunos irão necessitar dos conhecimentos sobre rotações da tarefa anterior.

Questões cognitivas

Ao resolver esta tarefa os alunos devem desenvolver o seu raciocínio matemático, explicando ideias e processos e argumentando, especificamente, sobre rotações. Devem compreender a noção de simetria axial. Para além disso, devem desenvolver a comunicação matemática, interpretando e comunicando, oralmente e por escrito, informação, ideias e conceitos.

Questões didáticas

Esta tarefa tem o intuito de levar os alunos a recordar os conceitos de rotação e reflexão, para isso constroem-se dois moinhos, sendo um a reflexão do outro, como mostra a figura:

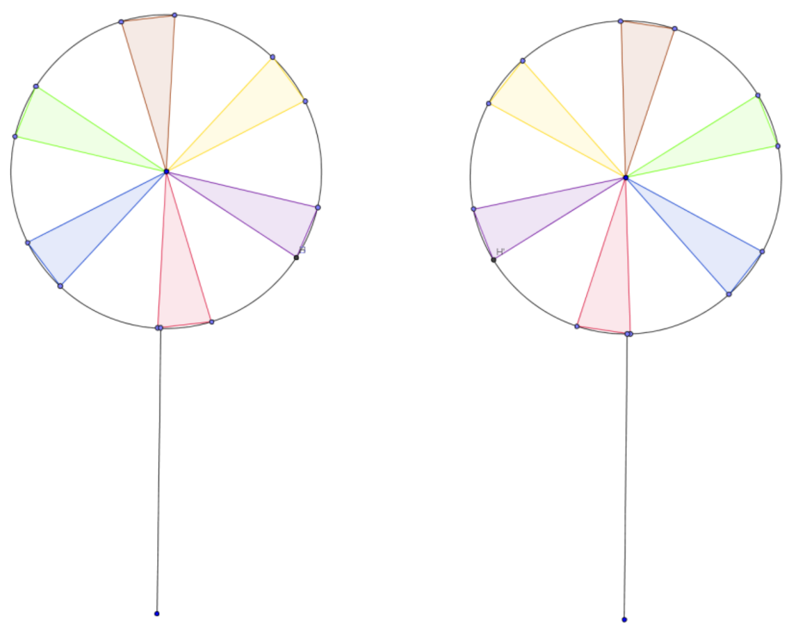


Fig. 3.7. Os moinhos.

Simultaneamente, à semelhança da tarefa anterior, recorre-se ao movimento para melhor visualizar os efeitos das rotações e reflexões.

Questões instrumentais

Espera-se que os alunos nesta fase estejam familiarizados com as características do GeoGebra, como por exemplo, sabendo colocar os objetos a movimentar-se, o que poderá levar a que a maioria dos grupos consiga autonomamente resolver a tarefa.

Tarefa I3

Questões epistemológicas

Os alunos devem ter presente as noções de perpendicularidade, ponto médio, circunferência e vetores. Apesar do estudo de frisos pertencer ao 2.º ciclo, os alunos não o abordaram.

Questões cognitivas

Os alunos devem, no final da tarefa, ter uma noção de vetor e translação e identificar e efetuar translações; construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria; identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado.

Questões didáticas

Esta tarefa consiste na construção de um friso, como mostra a figura:

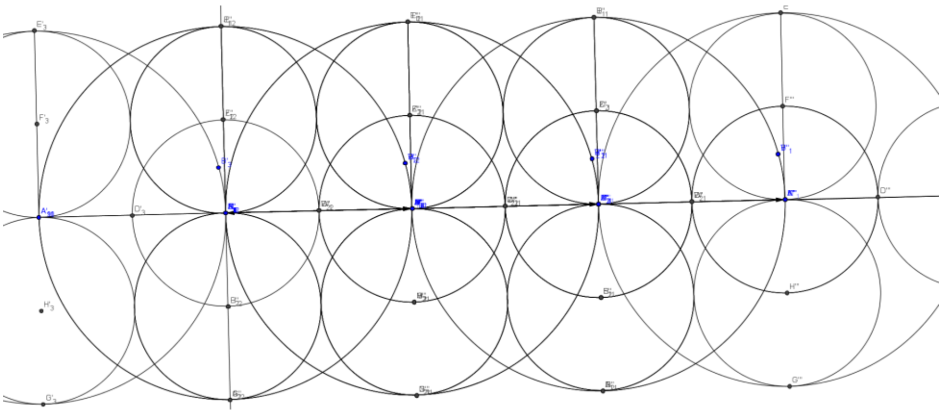


Fig. 3.8. O friso.

Ao mesmo tempo, dá-se início ao estudo das translações. Inicialmente, apela-se ao raciocínio espacial na construção de uma figura à base de circunferências (Questões 1-5) que depois é repetida através de translações associadas a um vetor dado (Questões 6-7).

Questões instrumentais

Neste momento os alunos manuseiam sem dificuldades o Geogebra, mas vão utilizar pela primeira vez a ferramenta relativa às translações, o que poderá levantar algumas dúvidas.

Tarefa I4

Questões epistemológicas

Nesta tarefa será feira uma revisão dos conceitos de rotação e reflexão na construção de uma rosácea (O estudo das rosáceas estava previsto no 2.ºciclo, mas não foi abordado). Para além do estudo e da aplicação de rotações e reflexões, a tarefa inicia-se com a construção de um triângulo, dados os seus ângulos.

Questões cognitivas

Esta tarefa tem um carácter mais lúdico, pois consiste na construção de um caleidoscópio, com rotações e reflexões como mostra a figura:

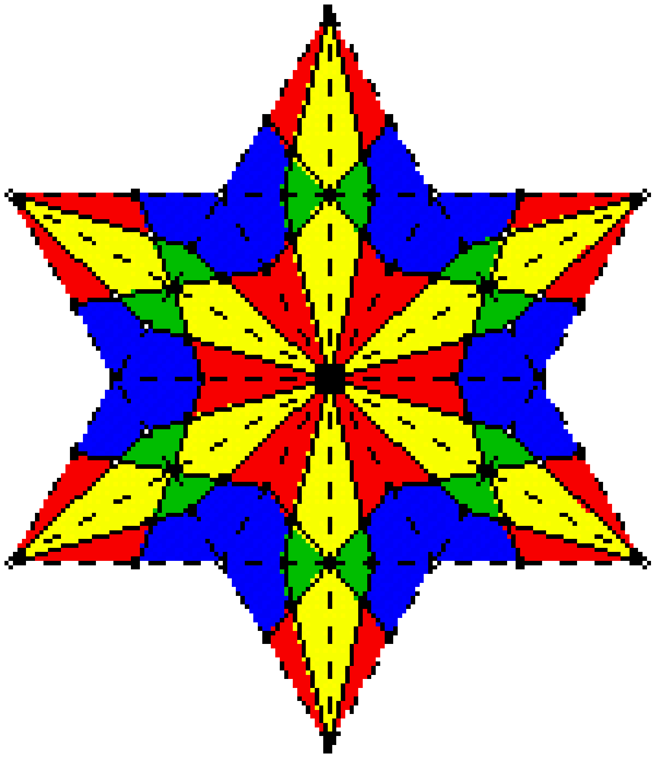


Fig. 3.9. O caleidoscópio

A tarefa começa com a construção de um triângulo, dados os ângulos internos, passando, em seguida, a exigir a utilização sucessiva de reflexões. Por fim, recorre-se ao movimento para obter um efeito visual interessante.

Questões didáticas

Deve-se chamar a atenção dos alunos para que não percam de vista os pontos que pertencem os lados do triângulo inicial, pois, no final estes serão movimentados. Esta figura pode ser utilizada para ajudar os alunos a compreender as noções de simetria axial e rotacional.

Questões instrumentais

Os alunos nesta fase dominam o funcionamento do Geogebra o que poderá permitir que a grande maioria dos grupos resolva autonomamente a tarefa.

Tarefa I5

Questões epistemológicas

Os alunos terão de recordar as translações iniciadas na tarefa I3.

Questões cognitivas

Os alunos devem, no final da tarefa, ter uma melhor compreensão das noções de vetor e translação, e identificar e efetuar translações; construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria; identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado.

Questões didáticas

Esta tarefa consiste na construção de uma pavimentação, como mostra a figura:

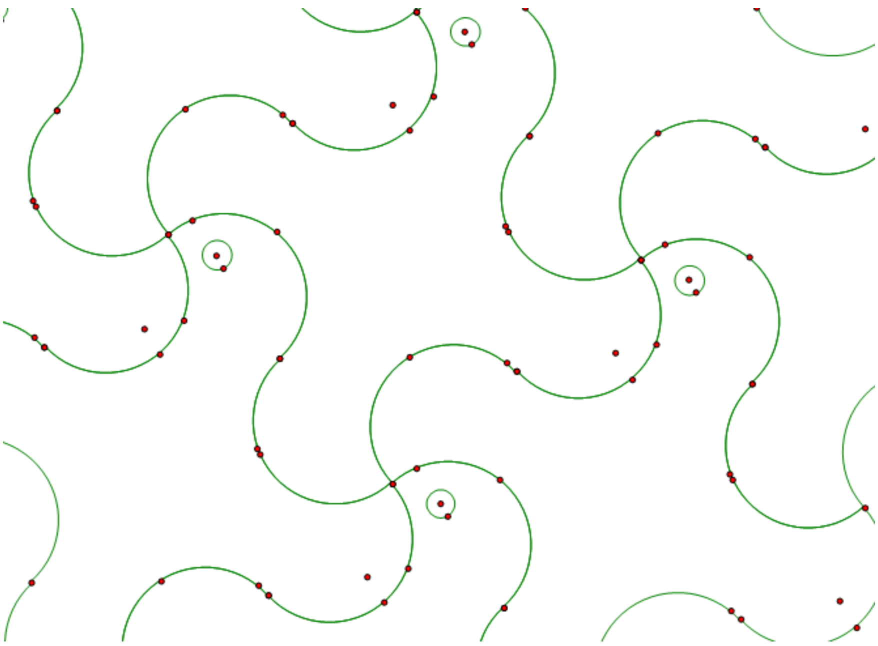


Fig. 3.10. Os fantasmas.

Para a construção da figura inicial, que se assemelha a um fantasma, é solicitada a construção de uma ferramenta, que depois é aplicada a um quadrado. Para construir o padrão serão utilizadas translações associadas a vetores que não estão estabelecidos previamente. Por fim, é solicitado que se experimente o mesmo procedimento com base noutras figuras sem ser um quadrado.

Questões instrumentais

Os alunos vão utilizar pela primeira vez a ferramenta relativa às translações no plano, o que constitui uma novidade nesta fase.

Tarefa I6

Questões epistemológicas

Os alunos necessitam de ter uma ideia de como se realizam as translações iniciadas na tarefa I3 e utilizadas na tarefa I5.

Questões cognitivas

Os alunos devem, no final da tarefa, aprofundar a compreensão das noções de vetor e translação e identificar e efetuar translações; construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria; identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado.

Questões didáticas

Esta tarefa consiste na construção de uma pavimentação, como mostra a figura:

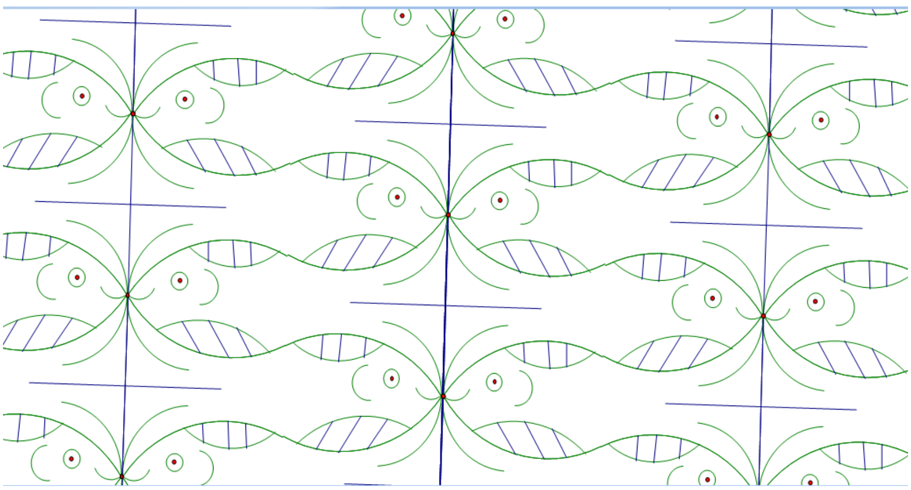


Fig. 3.11. Os peixes

A tarefa inicia-se com a construção de um triângulo. Seguidamente, o triângulo é transformado numa figura representativa de um peixe (motivo do padrão). A pavimentação resulta de reflexões e translações sucessivas. Por fim, é solicitado que se experimente este procedimento com outras figuras e se relate a experiência.

Questões instrumentais

Os alunos já conhecem bem as características do GeoGebra, podendo, contudo, apresentar dúvidas relativamente às translações no plano.

Tarefa I7

Questões epistemológicas

Os alunos devem ter presentes os conhecimentos adquiridos nas tarefas anteriores deste subtópico.

Questões cognitivas

Os alunos devem, no final da tarefa, ter uma compreensão efetiva das noções de vetor e de translação e identificar e efetuar translações; construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria; identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado.

Questões didáticas

Esta tarefa consiste na construção de uma pavimentação, como mostra a figura:

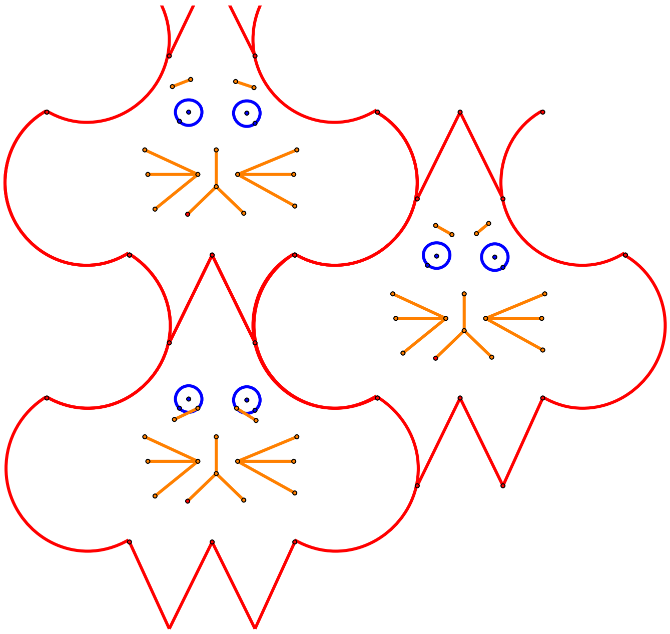


Fig. 3.12. Os gatos

Para a construção da pavimentação apenas é dada uma sugestão visual para a sequência a realizar para a obtenção do motivo do padrão (o gato), como mostra a figura:

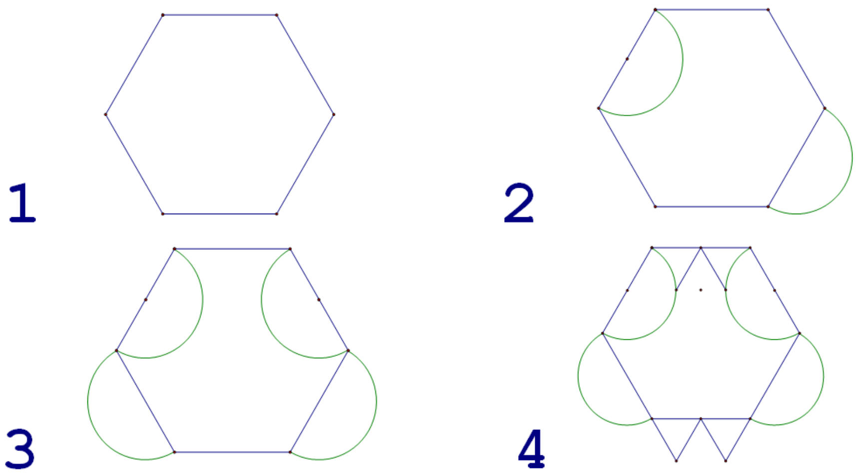


Fig. 3.13. Sugestão.

Questões instrumentais

Atendendo à experiência dos alunos no trabalho com o GeoGebra espera-se que a maioria dos grupos trabalhe na resolução da tarefa sem grandes dificuldades.

3.3.4.4. Teorema de Pitágoras

Algumas das tarefas apresentadas neste tópico (Anexos 22 a 27) são adaptadas da brochura referida anteriormente e publicada pela DGIDC, da autoria de professores das turmas-piloto do 8.º ano de escolaridade (2009/2010). Em todas as tarefas é solicitada a utilização do GeoGebra assim como a elaboração de um relatório, apoiada num guião disponibilizado aos alunos (Anexo 1).

Questões epistemológicas

A articulação com as aprendizagens anteriores é feita recorrendo aos tópicos já estudados: congruência, semelhança, equivalência de figuras e operações com binómios, particularmente, os casos notáveis da multiplicação.

Questões cognitivas

No final deste conjunto de tarefas os alunos devem ser capazes de compor e decompor polígonos, recorrendo a triângulos e quadriláteros; decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa; demonstrar o Teorema de Pitágoras; resolver problemas no plano.

Questões didáticas

Nas tarefas sucedem-se situações em que os alunos compõem e decompõem figuras, constroem figuras equivalentes e obtêm a fórmula da área do trapézio. De seguida, os alunos chegam ao resultado do Teorema de Pitágoras com composições e decomposições de figuras. Finalmente, propõe-se aos alunos várias demonstrações do teorema puramente geométricas ou recorrendo a figuras e a expressões algébricas e coloca-se um problema real no plano, para que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos.

Questões instrumentais

Os grupos de alunos conhecem bem as ferramentas do GeoGebra, o que lhe facilitará um trabalho autónomo nas tarefas propostas.

Tarefa TP1

Questões epistemológicas

Os alunos devem recorrer à noção de trapézio conhecida desde o 2.º ciclo.

Questões cognitivas

Esta tarefa tem por objetivo obter uma fórmula para calcular a área de um trapézio, a partir da sua decomposição, como mostra a figura:

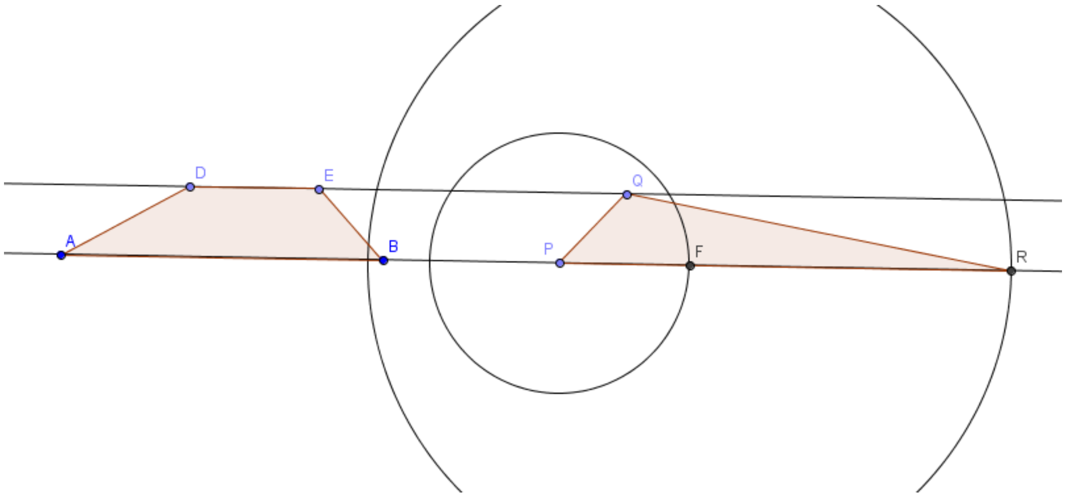


Fig. 3.14. Área do Trapézio.

Questões didáticas

Na questão 1, desta tarefa, é solicitado o arrastamento visando confirmar a relação entre as áreas e obter a fórmula da área de um trapézio por meio de raciocínio indutivo.

Questões instrumentais

Os alunos conhecem bem as ferramentas do GeoGebra e a sua utilização devendo por isso ser capazes de trabalhar autonomamente na resolução das tarefas.

Tarefa TP2

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa, os alunos devem ter presente as noções de mediana, área de um triângulo, paralelismo, perpendicularidade, semelhanças, rotações e translações. Para além disso, devem ser capazes de recorrer à composição e decomposição de polígonos, através de triângulos e quadriláteros.

Questões cognitivas

O objetivo da tarefa relaciona-se com a decomposição de um triângulo por uma mediana e de um triângulo retângulo pela altura referente à hipotenusa.

Questões didáticas

Pretende-se que o aluno justifique propriedades dos triângulos envolvendo medianas (questão 1) e alturas (questão 2). A questão 1 c) invoca o raciocínio indutivo e a questão 2 d) apela ao raciocínio dedutivo.

Questões instrumentais

Espera-se que os alunos trabalhem de forma autónoma com recurso ao GeoGebra.

Tarefa TP3

Questões epistemológicas

Os alunos deverão ter presente, para resolver esta tarefa, a classificação de triângulos.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas relacionam-se com a conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras.

Questões didáticas

Inicialmente, procura-se estabelecer uma relação entre as áreas dos quadrados adjuntos aos lados do triângulo (questão 1):

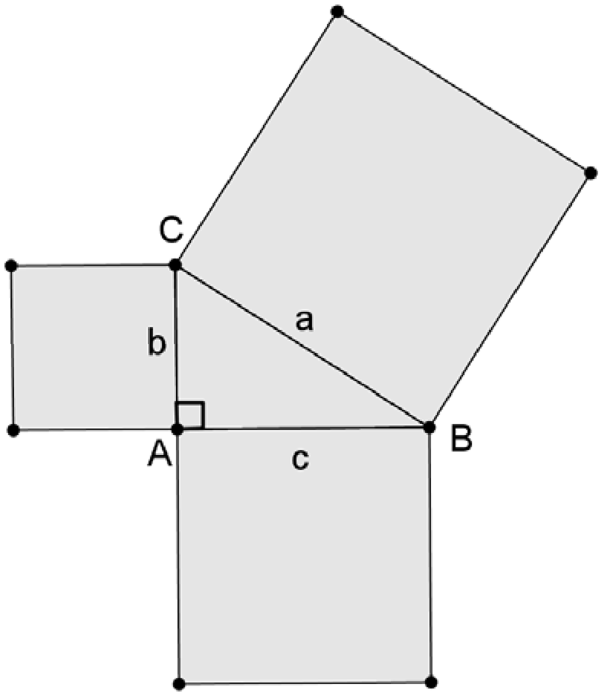


Fig. 3.15. Teorema de Pitágoras

Seguidamente, podem estudar a possibilidade de o mesmo resultado se verificar com outros polígonos regulares (questão 2). Por último, solicita-se a experimentação para triângulos não retângulos.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos tomem contacto com o Teorema de Pitágoras; espera-se que, ao realizarem estas construções, conjeturem e verifiquem a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. A questão 3 é essencial para os alunos compreenderem que esta relação só se verifica em triângulos retângulos.

Questões instrumentais

Os alunos já dominam o GeoGebra e espera-se que consigam autonomamente resolver a tarefa.

Tarefa TP4

Questões epistemológicas

Na resolução desta tarefa, os alunos deverão ter presente a classificação de triângulos, assim como as rotações, reflexões e translações.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas relacionam-se com a conjetura e verificação do Teorema de Pitágoras.

Questões didáticas

Parte-se da construção de um triângulo retângulo escaleno (questão 1), para a construção de um quadrado inscrito noutro, com rotações, reflexões e translações do triângulo inicial (questão 2), como mostra a figura:

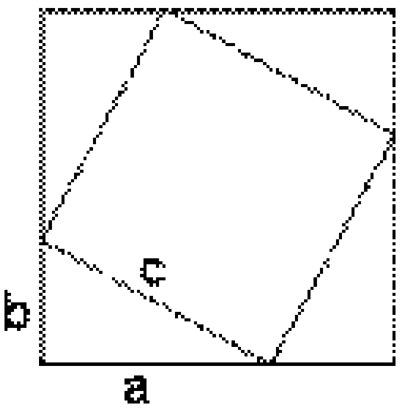


Fig. 3.16. Demonstração do teorema de Pitágoras

Seguidamente, de forma indutiva (questões 1.3-1.5), aplica-se o cálculo de áreas, para seguidamente, se deduzir a fórmula do Teorema de Pitágoras (questões 1.6-1.7).

Questões instrumentais

Os alunos estão já adaptados às características do GeoGgebra e à utilização de todo o tipo de ferramentas, assim como a descortinar as relações existentes entre as várias construções. Estes fatores poderão propiciar que a grande maioria dos grupos consiga autonomamente resolver a tarefa.

Tarefa TP5

Questões epistemológicas

Os alunos deverão ter presente, nesta tarefa, a noção de área.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas relacionam-se com a verificação do Teorema de Pitágoras.

Questões didáticas

Pretende-se, com esta tarefa, levar os alunos a compreender que existem várias possibilidades de demonstração. A tarefa inicia com a construção de um triângulo e de dois seletores (questões 1.1 e 1.2). Seguidamente, são solicitados alguns procedimentos relativos aos seletores (questões 1.3 a 1.5). Os seletores irão possibilitar a generalização e será pedida a demonstração do teorema. A parte restante da tarefa baseia-se na construção de dois quadrados com quatro triângulos retângulos no seu interior, como mostra a figura:

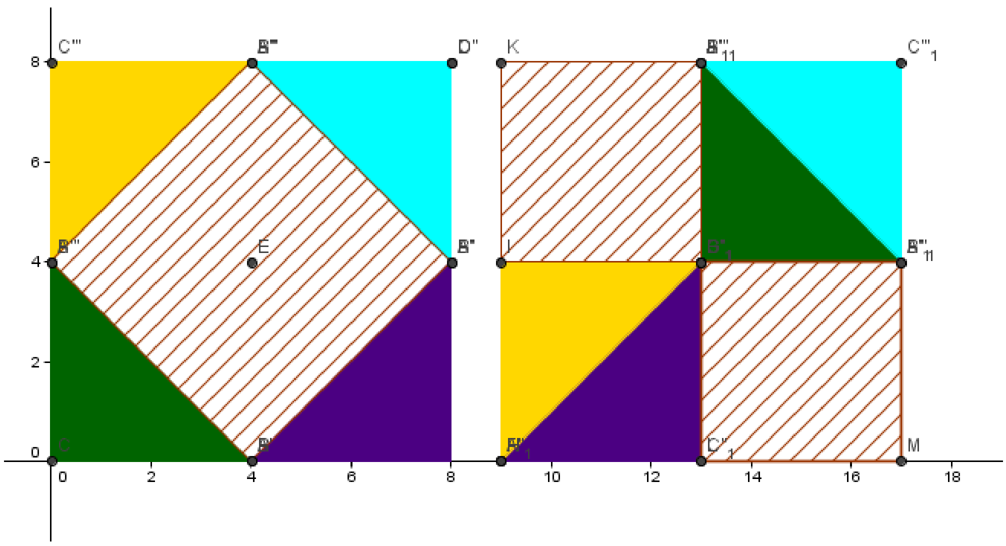


Fig. 3.17. Demonstração do Teorema de Pitágoras II

Questões instrumentais

Os alunos não devem apresentar dificuldades de manuseamento do GeoGebra para resolver a tarefa.

Tarefa TP6 (Adaptada de Trigo, 2004)

Questões epistemológicas

Para resolver esta tarefa, os alunos deverão recordar a noção de perpendicularidade, paralelismo, para além dos conhecimentos adquiridos nas tarefas anteriores para a resolução de problemas no plano.

Questões cognitivas

As aprendizagens visadas relacionam-se com a resolução de problemas no plano recorrendo a situações reais.

Questões didáticas

Esta tarefa pretende determinar a menor quantidade de fio elétrico necessária para ligar dois postes, tendo o fio de estar ligado à terra entre os postes, como mostra a figura:

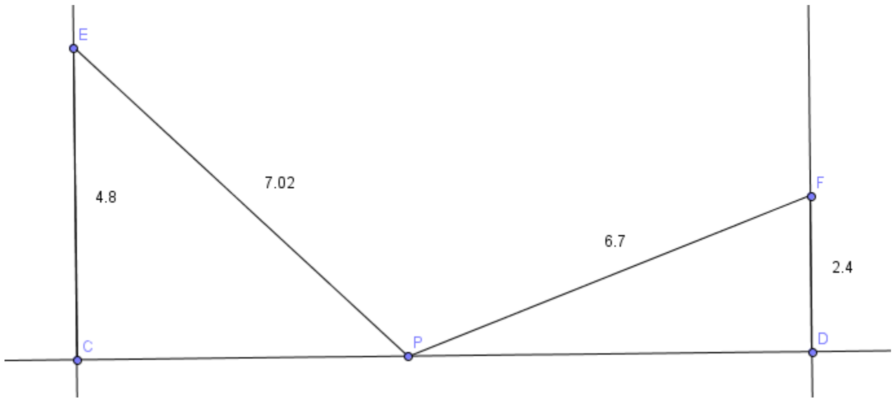


Fig. 3.18. Os postes elétricos.

De salientar que o feedback visual da figura assim como os comprimentos dos fios elétricos, que alteram por arrastamento, não permitem provar que a solução encontrada por tentativas é ótima. No entanto, existem outras formas de comprovar com recurso ao GeoGebra.

Questões instrumentais

Nesta fase da experiência de ensino, os alunos devem estar bastante familiarizados com as características do GeoGebra, em particular, com a utilização das suas ferramentas. Espera-se que a maioria dos alunos não manifeste uma dificuldade significativa na resolução da tarefa.

CAPÍTULO 4

Metodologia

Neste capítulo apresento as razões pelas quais opto por uma metodologia qualitativa, destacando os aspetos que distinguem a investigação qualitativa da quantitativa e, na sequência, dou relevo à investigação qualitativa como um caminho em construção. Posteriormente, descrevo o papel do professor como investigador e, por último, exponho o processo de investigação, apresentando os participantes deste estudo e os procedimentos de recolha e análise de dados.

4.1 Opção por uma Metodologia Qualitativa

Ao optar por realizar um trabalho de investigação centrado nas interações dos meus próprios alunos, deparo-me com um conjunto de dados que carecem de ser descritos e interpretados, de modo que sejam claramente compreendidos pela comunidade de investigação em Educação Matemática. Deste modo, senti necessidade de enveredar por um caminho que me permita olhar, em profundidade, o problema em estudo que visa compreender e descrever as interações que emergem quando os alunos trabalham, em pares, na resolução de tarefas com um ambiente de geometria dinâmica e as respetivas implicações na construção de significados, em tópicos de geometria.

Neste processo, a metodologia de investigação qualitativa revela-se a mais adequada, atendendo às características complexas e multifacetadas do fenómeno em análise.

Num estudo de natureza qualitativa o caminho não está absolutamente traçado à partida. À medida que se vão recolhendo e analisando os dados, o caminho vai sendo traçado. A investigação qualitativa está vocacionada para a análise de casos concretos, nas suas particularidades de tempo e de espaço, partindo das manifestações e actividades das pessoas nos seus contextos próprios (Flick, 2005, p.13).

A investigação qualitativa pode ser vista, de uma maneira geral, como uma estratégia de investigação que dá primazia às palavras e às ações dos sujeitos, na recolha e análise de dados (Bryman, 2008). Mas a investigação qualitativa, pode ser ainda encarada como um *chapéu* que cobre um conjunto de atitudes face à investigação e de estratégias para a realização de uma investigação cujo objetivo principal será descobrir como é que os seres humanos compreendem, experienciam, interpretam e produzem o mundo social (Sandelowski, 2004).

Essencialmente, a escolha da metodologia qualitativa fundamenta-se na ênfase atribuída à importância da compreensão dos significados do comportamento humano e do contexto social de interação (Patton, 1987). Esta ideia é corroborada por Denzin e Lincoln (2011) que salientam essa ênfase nos processos e significados como subjacente à própria noção de investigação qualitativa. As pesquisas qualitativas têm conseguido, muitas vezes, com sucesso, apreender a riqueza e a especificidade de cada situação e compreender as ocorrências, induzindo novas formas de estar na investigação, mais implicadas com as realidades e os contextos sociais. Como refere Ponte (2006), as investigações com metodologia qualitativa em situações educativas envolvem uma "grande complexidade" provocadas pelo "facto de elas serem vividas por actores humanos com uma grande variedade de intenções e significados" (p.15). Por outro lado:

Tentando descobrir o sentido que as coisas têm para a acção humana, estes métodos querem compreender os procedimentos dos sujeitos com a visão daquele que age e nos contextos em que ele é. Para isso, apresentam os fenómenos, descrevendo-os e situando-os na relação com o contexto social mais amplo. (Leite & Terrasêca, 1993, p.67)

O mundo complexo das interações humanas tem, pela sua própria condição, uma expressão heterogénea. Penso que, à semelhança do que acontece no mundo natural e físico, o mundo humano e social, não deve ser entendido como um somatório de elementos manipuláveis, mensuráveis e controláveis. A descrição e caracterização das múltiplas vertentes de um fenómeno requerem uma metodologia de carácter flexível e abrangente, mas que simultaneamente permita aprofundar especificidades concretas e localizadas.

Enquadrado no ambiente natural que é a sala de aula, procuro focar-me em processos em detrimento dos resultados assim como nos significados; estas características são inerentes a uma investigação qualitativa (Denzin & Lincoln, 2011). Para além disso, há que atender à imponderabilidade inerente ao próprio contexto das experiências de ensino-aprendizagem. Entendo que deverei estar preparado e atento ao aparecimento de situações localizadas, porventura inesperadas, que possam surgir na sala de aula, contexto em que decorre o presente estudo. Esse tipo de situações, são as que, no meu entender, podem potencializar, verdadeiramente, uma compreensão mais profunda dos fenómenos. Não são as situações expectáveis que provocam desequilíbrios e avanços na busca do conhecimento. Pelo contrário, as situações inesperadas, que possam levar a um novo enquadramento e questionamento, serão as que mais contribuirão para a minha perceção da realidade, tendo em conta o conhecimento teórico e prático que levo para essa mesma realidade.

Acresce o facto de que o tipo de dados a recolher não é passível de medição ou quantificação, não se colocando a preocupação em controlar as variáveis ou em criar um crivo estreito para isolar as dimensões observáveis e manipuláveis, pois isso significaria um forte risco de perder informação importante. De facto,

> *... só se torna possível captar a complexidade do fenómeno de aprendizagem , inseparável do contexto educativo, se estudarmos todas as suas componentes – a natureza dos significados construídos pelos alunos na sua atividade matemática, a utilização do computador, e as interações sociais – de uma forma holística, relacionando-as intrinsecamente, de tal forma que, ao atendermos a uma das dimensões consideradas, tenhamos simultaneamente em conta, a influência recíproca das outras* (Rodrigues, 1997, p.116).

Outro factor a considerar é a forma como se apresenta ao leitor um estudo desta natureza, pois exige que a descrição seja realizada através de uma narrativa de sucessão de acontecimentos. Essa narrativa deve permitir que o leitor compreenda os acontecimentos, os factos, os ambientes, etc. Os dados recolhidos devem ser ricos em informação e necessitam de ser lidos, interpretados e analisados exaustivamente, tendo em atenção os contextos em que estão inseridos.

Por outro lado, observar a aprendizagem em situações de colaboração é diferente do que observar em situações de aprendizagem individual e isolada. Em situações de colaboração, os participantes tornam a sua aprendizagem visível como parte do processo de colaboração. Acresce que, as interações de grupo ocorrem durante curtos espaços de tempo, em vez de longos períodos supostamente mensuráveis por pré e pós-testes (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006).

Os conceitos de "metodologia interpretativa" e "metodologia qualitativa" referem-se a um conjunto de abordagens nas quais o cerne da investigação é o significado atribuído pelo ser humano às suas experiências e interações sociais. Em particular, no trabalho em grupos colaborativos, é através das interações sociais, que os alunos evidenciam aos seus pares a *compreensão do significado que está a ser construído*. Esta característica torna, em princípio, mais acessível o estudo da aprendizagem num contexto de trabalho em grupo (Stahl, Koschmann & Suthers, 2006).

O interpretativismo pode ser visto como uma perspetiva (Ponte, 2006) ou uma filosofia metodológica (Hammersley, 2013). Uma ideia central da perspetiva interpretativa, que inspira a investigação qualitativa, é ver a atividade humana como uma experiência social em cada ser humano constrói constantemente significados (Ponte, 2006).

A perspetiva interpretativa apoia-se em duas fontes teóricas: a fenomenologia e o interacionismo simbólico. Em termos gerais, a fenomenologia visa compreender os significados das ações e interações em situações contextualizadas. O interacionismo simbólico parte dos pressupostos de que os significados advêm da interpretação atribuída nas interações sociais e que esses significados vão sendo alterados (construídos) através de um processo interpretativo dos símbolos encontrados na vida diária (Meltzer, Petras & Reynolds, 2014).

Genericamente, a investigação interpretativa envolve uma participação a longo prazo, num determinado campo e uma recolha cuidadosa de uma coleção de dados, seguida de uma reflexão e de uma escrita, rica em descrições, vinhetas narrativas e citações diretas (Erickson, 1986; Mulholland, 2007). Apesar disso, essa escrita rica pode ser considerada como um procedimento de análise de dados ou uma técnica de investigação, podendo assim, embora não seja usual, integrar outros paradigmas metodológicos. O único fator característico e diferenciador das investigações de cunho interpretativo reside no "interesse central no significado humano na vida social e na sua elucidação e exposição por parte do investigador" (Erickson, 1986, p. 119).

Uma das marcas deste tipo de metodologia está no facto de ser o próprio investigador que faz a interpretação dos dados e de funcionar como elemento fulcral da investigação. Os investigadores qualitativos foram descritos como sendo *meaning-makers* (fazedores de significado), em 1992, por Glesne e Paskin, pois desenham as suas próprias experiências, conhecimento e pontos de vista teóricos, para a recolha e análise de dados e sua apresentação ao mundo, envolvendo-se neles. Assim, pode-se dizer que os investigadores qualitativos elucidam e expõem os significados, no sentido em que são mediadores dos significados que observam (Merriam, 1988).

O nível de importância do investigador na metodologia interpretativa transparece, desde logo, através do seu papel de escritor. Ao pôr em prática a intenção de tratar os participantes do estudo como pessoas, o investigador não pode ser dominado pela aspiração da objetividade e adotar um tratamento despersonalizado dos seus dados; há que retirar a capa que cobre o investigador/narrador para que possa mostrar-se e descobrir os outros, descobrindo-se a si próprio. O processo de investigação inclui, portanto, uma fonte de crescimento pessoal para o investigador (Mulholland, 2007).

Contudo, nem sempre a investigação qualitativa foi aceite e legitimada como um processo de construção do conhecimento científico.

> *Presentemente, a investigação qualitativa parece ter ultrapassado o complexo de inferioridade em relação a outras metodologias de investigação. Hoje já não há a falsa pretensão de objectividade e imparcialidade. O pós-modernismo reivindica que a escrita é sempre parcial, local e situacional, e que o nosso Eu está sempre presente.* (Amado, 2007, p. 282)

Tendo em conta as considerações anteriores, o objetivo deste estudo e as questões enunciadas, decidi enveredar por uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa. Este tipo de abordagem pode ser caracterizado por vários fatores: a fonte direta dos dados é o ambiente natural; o investigador é o principal instrumento, ou o instrumento primário de recolha dos dados (Merriam, 1988).

4.1.1. *Design* de Estudo de Caso

Um estudo de caso é basicamente um *design* (Ponte, 2006) ou uma estratégia (Yin, 2013) de investigação. O *design* de investigação pode ser entendido como a lógica que une os dados a recolher com as questões iniciais do estudo e, por último, com as suas conclusões. Dito de outra forma, um *design* de investigação é um plano de ação que permite percorrer o caminho entre o ponto de partida (as questões do estudo) e o ponto de chegada (as conclusões do estudo – respostas às questões colocadas). Neste trajeto, o investigador terá de dar um certo número de passos, entre os quais a recolha e análise dos dados (Yin, 2013). Especificamente, um estudo de caso é uma investigação sistemática de um evento ou de um conjunto de eventos relacionados entre si, cujo objetivo é descrever e explicar o fenómeno visado (Bromley, 1990).

Segundo Yin (2013), as questões mais usuais que devem ser atendidas num estudo de caso envolvem: a forma de definir o caso do estudo; como determinar a relevância dos dados recolhidos e o que fazer com os dados depois de recolhidos, questões estas que serão consideradas ao longo desta investigação.

De uma forma geral, existe um denominador comum a vários autores (Merriam, 1988; Matos & Carreira, 1994; Miles & Huberman, 1994; Stake, 1995, 1998; Gillham 2001; Ponte, 2006; Yin, 1993, 2006, 2013), que permite afirmar que um estudo de caso é uma investigação de um caso (objeto de estudo) em que o fenómeno investigado:

- É uma unidade de funcionamento complexa.
- É investigado no seu contexto natural com uma variedade de métodos.
- É contemporâneo: decorre em simultâneo com a investigação.

O contexto de investigação em que decorre o estudo de caso é ainda (Lessard-Hébert; Goyette & Boutin, 2010, p.169):

- O menos construído, portanto, o mais real;
- O menos limitado, portanto, o mais aberto;
- O menos manipulável, portanto, o menos controlado

Yin (2013) aponta como um critério possível, mas não exclusivo, do estudo de caso a existência de questões que envolvam o "como" e o "porquê", acerca de um conjunto contemporâneo de eventos, nos quais o investigador tem pouco ou nenhum controlo. Este é um critério para que a estratégia de investigação de estudo de caso consiga tirar o máximo proveito de todas as suas potencialidades.

Este estudo assume-se como um estudo de caso pois envolve a compreensão de uma situação específica associada a um fenómeno social complexo. À semelhança de alguns estudos qualitativos, essa compreensão tem o intuito de ser realizada, de forma aprofundada e holística (Patton, 1987, 2015). Para além disso, pretende ser um estudo de características heurísticas (Merriam, 1988) devido à riqueza e completude das descrições da realidade, tal como ela surge, em particular, no que se refere à procura de interações entre fatores determinantes reveladores da realidade (Yin, 2013). Também nesta linha de pensamento Matos e Carreira (1994) referem que “A metodologia de estudo de caso utiliza procedimentos e técnicas para descrever e analisar uma variedade de elementos presentes no fenómeno em estudo, devendo esta descrição realçar o que há de peculiar no caso” (p.24).

É esta procura que está presente neste estudo, no que concerne ao funcionamento e implicações do *feedback* na forma como os alunos constroem significados quando recorrem a um AGD.

Aliás uma das características do estudo de caso é incluir a classificação e o desenvolvimento de hipóteses do processo de construção do conhecimento (Benbasat, Goldstein & Mead, 1987). Outra das características do estudo de caso reside no processo de recolha de informações, que devem ser:

> *tão numerosas e tão pormenorizadas quanto possível com vista a abranger a totalidade da situação. É a razão pela qual ele se socorre de técnicas variadas de recolha de informação (observações, entrevistas, documentos)* (De Bruyne, Herman & De Schoutheete, 1975, p.11).

Para além da natureza das suas questões, centradas na compreensão, o estudo de caso caracteriza-se por ser um estudo aberto onde as fronteiras entre o fenómeno e o contexto se encontram esbatidas e onde existe pouco controlo sobre os acontecimentos que decorrem no momento do estudo (Yin, 2013). Embora não existam, à partida, hipóteses previamente formuladas para testagem, existem hipóteses iniciais de trabalho, sujeitas a alteração, nas quais a teoria pode ter um papel importante a desempenhar, nomeadamente, pelo seu carácter indutivo: os conceitos e as relações entre estes, emergentes dos dados para a teoria (Merriam, 1988). Mas também há outra função a atribuir à teoria:

> *A teoria é necessária para orientar a investigação, tanto em termos da recolha de dados como da sua análise. Ajuda a responder a questões como: Que coisas observar? Que dados colher? Que perguntas fazer? Que categorias construir?* (Ponte, 2006, p.12).

Este estudo de caso, tal como sucedeu com diversas investigações realizadas por outros investigadores no campo da educação matemática, em Portugal, (Matos, 1991; Duarte, 1993; Abrantes, 1994; Monteiro, 1994; Paiva, 2005; Alves, 2007, entre outros) visa compreender questões relacionadas com a aprendizagem dos alunos e permite que o investigador concentre o processo de recolha e análise de dados num reduzido número de participantes, que se constituem como casos em estudo, ao invés de lidar com a generalidade dos participantes, como seria o conjunto de todos os alunos da turma. Como indica o próprio nome "estudo de caso", a incidência da investigação está no caso ou casos (Matos & Carreira, 1994). Assim, a investigação de estudo de caso:

> *É uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, deste modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse* (Ponte, 2006, p.2).

Este tipo de investigação pode ainda ser considerado como particularista e de cunho descritivo (Merriam, 1988). Tal descrição deve ter o intuito de levar o leitor a compreender o fenómeno investigado e, simultaneamente, contribuir para a descoberta de novos significados acerca do mesmo (Merriam, 1988). Essa descrição pode envolver processos e interações entre pessoas (Abrantes, 1994) e entre pessoas e computadores, como no presente estudo. Nesta investigação, tendo em consideração o exposto acerca do estudo de caso, o caso é constituído por um grupo de dois alunos de uma mesma turma que trabalham colaborativamente na resolução de tarefas de geometria com recurso ao GeoGebra.

Num estudo de caso existem tipicamente várias fontes de dados (Yin, 2013), como é o caso de recolha documental (em particular, produções dos alunos, em papel ou em formato digital), observações (registadas em áudio e/ou vídeo) e entrevistas. Só após a compreensão global do contexto e de realizar uma primeira leitura dos dados é que é possível estabelecer uma relação com a teoria existente (Gillham, 2001). Neste processo, a linha de ação mais adequada é uma permanente busca de comparação (Merriam, 1988). Nesta linha torna-se da maior importância a forma como o investigador interpreta a informação, faz escolhas sobre o que incluir e dá ênfase aos aspetos mais relevantes.

Na realização de um estudo de caso podem definir-se, numa primeira análise, três etapas: Preparação; Desenvolvimento; e Finalização. O estudo tem início com a necessária revisão da literatura em torno do objetivo inicial do estudo, seguindo-se a seleção do caso, ou dos casos, prosseguindo para definição dos métodos de recolha de dados. Estes métodos devem estar em sintonia com o objetivo e a perspetiva teórica adotada, concluindo-se assim a etapa da preparação, embora esta possa ser retomada se necessário em qualquer momento da investigação. Uma das características da investigação de estudo de caso é o facto de existir uma influência reciproca entre a recolha de dados e a sua análise (Yin, 2013). Na etapa de desenvolvimento ocorrem os procedimentos de recolha de dados, procede-se ao tratamento desses dados, descrevem-se os casos ou o caso e, por último, estabelecem-se conexões e procuram-se padrões nos dados. A etapa da finalização começa com a interpretação das relações estabelecidas na análise do caso, o que leva à sua teorização através de ligações à teoria existente e à eventual criação de novos conceitos teóricos. Por último, extraem-se as conclusões do estudo face às questões levantadas inicialmente.

Apesar da relevância e da aceitação que o estudo caso merece na investigação qualitativa, designadamente nas Ciências Sociais, a literatura sobre o estudo de caso refere algumas limitações que importa destacar. Desde logo, os resultados das investigações de estudos de caso não são generalizáveis a toda a população. Não se pode afirmar que as conclusões retiradas da investigação incidente num certo grupo de alunos sejam aplicáveis a outro grupo, mesmo que o contexto seja idêntico.

A subjetividade inerente à interpretação do investigador pode, de certa forma, influenciar a compreensão dos significados emergentes e, como tal, as conclusões do estudo (Merriam, 1988). Consequentemente, como forma de evitar esses desvios, o investigador deve manter, dentro do possível, algum distanciamento dos dados. No entanto, esse distanciamento cria uma tensão porque simultaneamente é fundamental a aproximação e a interação do investigador com a experiência e, portanto, com os dados, como referem Matos e Carreira (1994): “Os papéis de observador, inquiridor e ouvinte, parecem não ser imediatamente conciliáveis com os papéis de avaliador, negociador, intérprete e narrador” (p.50).

Toda a ação subjacente à experiência de ensino-aprendizagem é difícil de replicar devido à existência de inúmeras variáveis sobre as quais não é possível exercer um controlo total.

De referir também que a necessidade de recolher dados de diferentes fontes, proceder à sua análise de acordo com a teoria e teorizar sobre as inferências encontradas é todo um processo extremamente moroso e exigente. Em particular, o estudo de caso único pode ser encarado, pela sua unicidade, como idiossincrático e como tendo um valor limitado face à circunstância de se tratar de um único caso. Para além disso, existe uma perda natural face à impossibilidade de entrar em comparações como possíveis contribuições para a análise (Yin, 2006). Por fim, é de ter em consideração o alerta de Yin (2013) para a dificuldade que acarreta a construção de um bom estudo de caso, a qual parece acrescida quando se opta por considerar um caso único.

4.1.2. A Validade no Estudo de Caso

A validade pode ser vista de forma interna ou externa. Quando nos referimos a validade interna, estamos a verificar se as relações entre causa e efeito são estabelecidas de forma correta (Yin, 2013) ou se o investigador revela capacidade para iluminar os significados emergentes da experiência (Jorgensen, 1989). Neste sentido, tornam-se importantes fatores como a clarificação de pressupostos, assim como as observações em longos períodos temporais (Merriam, 1988). Deste modo, procurou-se nesta investigação efetuar uma recolha de dados prolongada – dois anos letivos – o que permite acompanhar e reconhecer a evolução que os alunos do par selecionado revelam à medida que se vão familiarizando com o AGD, com o tipo de tarefas propostas e até com o trabalho colaborativo.

Segundo Merriam (1988) e Yin (2013), o investigador deve reger o seu trabalho pela tolerância, mantendo-se aberto à ambiguidade e tendo sensibilidade ao contexto. Para além disso, deve ter uma boa capacidade de adaptação e flexibilidade associada a um bom poder de observação e comunicação. Esta flexibilidade pode ser necessária quando o estudo segue uma orientação diferente da que estava planeada originalmente (Yin, 2013). O investigador deve apresentar as evidências num formato suficientemente claro que permita ao leitor julgar, de forma independente, as interpretações realizadas pelo investigador (Yin, 2006). Por isso, a descrição do contexto é fundamental na medida em que é assumida a sua pertinência no estudo dos fenómenos. Acresce ainda que nem sempre é possível distinguir, em situações da vida real, o fenómeno do seu contexto (Yin, 2013). Simultaneamente, o investigador deve manter uma boa empatia com os participantes do estudo. A "atitude "compreensiva" [do investigador] pressupõe uma participação activa na vida dos sujeitos observados e uma análise em profundidade do tipo introspetivo" (De Bruyne *et al*., 1975, p. 210).

Apesar dessa profundidade, o investigador não deve perder um ponto de vista mais alargado do contexto. Cabe ao investigador dar visibilidade ao ambiente, mesmo que tenha tendência a passar-lhe despercebido pela sua familiaridade (Erickson, 1986).

Yin (2013) refere uma dimensão próxima da validade interna: a validade do constructo. A validade do constructo pode ser aferida através de dois passos: 1) selecionar os tipos de mudanças específicas a estudar e 2) demonstrar que as medições seleccionadas para essas mudanças refletem, de facto, os tipos de mudanças específicas selecionados. Uma das táticas relevantes para aumentar a validade do constructo é, segundo Yin (2013), estabelecer uma cadeia de evidências decorrente da análise de dados.

Na validade externa o que está em causa é a comparação com os resultados de outros estudos e, portanto, os processos de generalização parecem ganhar maior importância. No entanto, a generalização, no estudo de caso, é deixada a cargo do leitor à luz da sua experiência (Merriam, 1988) ou é realizada em termos teóricos (Merriam, 1988; Matos & Carreira, 1994, Yin, 1993, 2013), na procura de algo muito universal no mais particular (Erickson, 1986). Segundo Matos e Carreira (1994): "Entre outras exigências, o investigador é compelido a isolar e multiplicar evidências que suportem as interpretações, explicações e teorias formuladas, tornando-as capazes de ser creditadas como produções de conhecimento científico" (p.51).

O processo de generalização, no estudo de caso, é descrito por Erickson (1986) pela procura de padrões e estabelecimento de ligações entre categorias conceptuais. Para além desta forma de generalização, Punch (2014) prevê outra: o nascimento de hipóteses, baseadas no caso analisado, envolvendo relações entre conceitos ou fatores relevantes para o progresso do conhecimento na área.

Segundo Yin (2013), um estudo de caso deve ter a propriedade de refletir de forma adequada os pontos de vista e os significados dos participantes (ou construídos pelos participantes).

Um pouco à semelhança da descrição anterior dos investigadores qualitativos, pode-se descrever os investigadores dos estudos de caso como sendo reconstrutores e edificadores de significados. Reconstrutores, no sentido em que reconstroem os significados decorrentes da interpretação dos dados. Edificadores, no sentido em que erguem, edificam, modelam ou estruturam a reconstrução dos significados emergentes nas suas experiências, a níveis teóricos.

No que concerne à fiabilidade e, como já foi referido, não havendo garantia de que uma repetição da experiência leve aos mesmos resultados, então, em alternativa, fará sentido promover a triangulação de dados, recolhendo dados de várias fontes e cruzando-os (Yin, 2013).

A falta de replicabilidade dos estudos, no contexto educativo, é referida por Merriam (1988), da seguinte forma:

> *Dado que é assumido que aquilo que é objeto de estudo na investigação em educação está em fluxo permanente, multifacetado e altamente contextual, e uma vez que a informação recolhida depende das fontes e do treino do investigador na sua recolha, e porque o método de estudo de caso torna impossíveis os controlos a priori, não só é utópico como é também impossível conseguir um grau aceitável de replicabilidade dos estudos no sentido tradicional do termo* (p.171).

Num estudo de caso, o investigador pode inferir a causa de determinado acontecimento. A verificação dessas inferências, que está a cargo do investigador, deve ser acautelada (Yin, 2013), aferindo a consistência interna da investigação (Stake, 1995; Punch, 2014). Neste sentido, a fiabilidade aproxima-se da validade interna. De uma forma mais específica, Ponte (2006) define três critérios: 1) *Boa definição do objeto de estudo*, o que neste trabalho está definido como o *feedback* num contexto de trabalho colaborativo de um par de alunos, com recurso a um AGD; 2) *Evidenciação dos aspetos característicos e fundamentais do caso*, o que neste estudo corresponde a obter evidências do modo como os alunos utilizam os diversos tipos de *feedback* envolvidos na sua atividade ao longo da experiência de ensino-aprendizagem, não descurando as características dos alunos que formam o par, que tornam este caso único; 3) *Produção de novo conhecimento*, que neste estudo representa um esforço por compreender melhor e acrescentar evidências acerca de um fenómeno relativamente conhecido mas insuficientemente estudado na Educação Matemática que está relacionado com a atribuição e construção de significado na interação entre os alunos em torno de um ambiente digital interativo. Assim, o caso em estudo retrata acontecimentos contemporâneos através de uma lente teórica pouco explorada na literatura de investigação.

4.2. O Professor como Investigador

4.2.1. O Papel do Investigador em Estudos Qualitativos

O investigador em Educação Matemática precisa de abranger um grande espectro de conhecimentos, capacidades, formas de raciocínio, emprego de ferramentas, uso da imaginação e hábitos de reflexão. Para além das suas competências, o investigador deve fazer uso da sua paixão, perseverança e sentido de responsabilidade, para que consiga responder de forma flexível, mas determinada, perante as adversidades. “A investigação não é algo que se possa realizar de forma rotineira, sem paixão, sem um verdadeiro investimento intelectual e afectivo” (Ponte, 2002, p.15).

A captação de evidências no processo de ensino e aprendizagem é um trabalho extremamente difícil, que corre o risco de ser enganador, quando feito de forma superficial e pouco cuidada. Este processo envolve, em particular, um conjunto de emoções, tanto dos alunos como dos professores, que assumem um papel fundamental porque influenciam as decisões dos intervenientes (Shulman, 1985; Malara & Zan, 2002).

O trabalho dos investigadores consiste na exploração e compreensão das relações entre diferentes fatores nas situações educacionais, ao longo de um processo de questionamento, enquadramento e análise de hipóteses, efetuando leituras criteriosas, recolhendo testemunhos, analisando informação, revendo as hipóteses e fazendo afirmações (Boaler, Bell, & Even, 2003).

Os investigadores devem desenvolver um conjunto de competências no âmbito das atitudes a privilegiar, nomeadamente a dúvida, a aptidão para lidar com a surpresa, a capacidade de produzir evidências que contrariem determinadas ideias e a capacidade de procurar, considerar e encontrar alternativas. Se assim não fosse, a investigação passaria a ser uma mera validação de algo pertencente ao senso comum.

Ponte (2002) sublinha a necessidade de o investigador ser capaz de utilizar vários instrumentos metodológicos e realça, no campo das atitudes, a disposição para questionar. Mas existem outras práticas inerentes ao trabalho de pesquisa que Boaler, Bell e Even (2003) consideram ser fundamentais:

- Selecionar questões investigáveis;
- Fazer leituras diversificadas e um bom uso da teoria e dos conceitos teóricos no seu domínio de estudo;
- Ser capaz de generalizar;
- Desenvolver conceitos e formular relações;
- Rever e melhorar hipóteses;
- Considerar interpretações alternativas, usando apropriadamente os testemunhos;
- Descrever ideias por escrito.

A formulação de questões, em particular, assume uma importância vital para o trabalho do investigador. Neste estudo esta foi uma das etapas mais complexas, na medida em que a formulação das questões de investigação exigiu múltiplas iterações e uma compreensão profunda do fenómeno que pretendo estudar.

Para a formulação adequada de uma questão, não existe nenhum método ou estratégia que garanta um resultado bem-sucedido (Boaler, Bell & Even, 2003). A dificuldade de produção de questões reside na seleção de um problema de investigação não trivial, mas, simultaneamente, passível de tratamento em tempo útil. Quer dizer, o investigador deverá escolher um problema cuja solução seja viável, embora não óbvia, tendo em conta as várias condicionantes que tem no seu contexto de investigação.

O esquema seguinte sintetiza os principais atributos de questões de investigação adequadas:

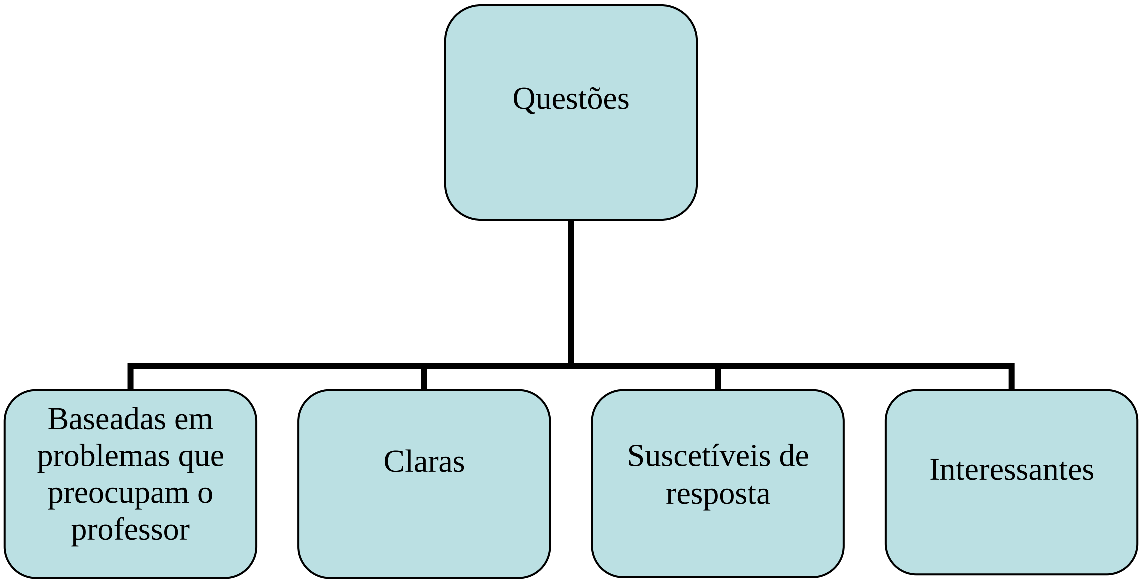


Fig. 4.1. Condições a verificar na formulação de "boas questões"

Para Janesick (2000), a investigação qualitativa começa com um determinado problema, ou com uma curiosidade intelectual, mas também pode ser motivado por uma paixão por um determinado tópico. As questões colocadas devem-se focar nesse tópico e devem explicar especificamente o que o estudo trata (Maxwell, 2005). Deste modo, as questões devem ser claras, refletindo problemáticas que surjam em contexto educacional, deve haver a possibilidade de conseguir chegar a respostas, ainda que parciais ou temporárias, atendendo aos recursos existentes e devem conter motivos de interesse para o professor, para que o trabalho possa incluir um investimento afetivo. Muitas das primeiras tentativas de formular questões surgem num formato demasiado generalista e com falta de referências do seu contexto específico. Podem surgir algumas questões que não sejam passíveis de resposta dadas as limitações de tempo ou recursos do investigador. As questões não devem ser demasiado ambiciosas, de modo a evitar correr o risco de não haver qualquer possibilidade de resposta. Se ocorrerem adaptações das questões, ao longo do estudo, estas não devem mudar de forma radical, pois pode acontecer que a informação entretanto recolhida e as inferências correspondentes passem a estar fora do contexto (Ponte, 2002). Richards (2005) lista três questões que podem ser colocadas ao formular as questões de investigação: (1) O que estamos a perguntar?; (2) Como estamos a perguntar?; e (3) De que dados vamos precisar para poder proporcionar uma boa resposta?. Se uma questão estiver focada e estabelecer claramente os dados de que necessita para a sua resposta, é provável que o processo de investigação decorra sem grandes sobressaltos e seja concluído num espaço de tempo razoável (Agee, 2009).

As questões podem ir sendo alteradas ao longo do estudo num processo de focagem iterado e refletivo. Esse processo leva à criação de dados específicos que podem acrescentar conhecimento ao campo de investigação mais abrangente (Agee, 2009). Como refere Flick (2006), o processo de formular questões ajuda-nos a circunscrever uma área específica de campo complexo essencial para a investigação.

As questões a formular pelo investigador devem apoiar-se em enquadramentos teóricos coerentes. A teoria possibilita a explanação de novos caminhos e ideias aos investigadores, sendo um trabalho de exploração de visões diferentes, de compreensão de resultados já obtidos e de extrapolação dos limites da experiência adquirida por outros investigadores. A teoria vem adicionar, simultaneamente, coerência à investigação, possibilitando o relacionamento harmonioso de dados recolhidos e ideias geradas, que de outra forma estariam condenados a uma aparência desconexa (Boaler, Bell & Even, 2003).

Outro aspeto que neste estudo ganha especial relevância diz respeito à atividade de narração e descrição, associada à apresentação e análise do caso em estudo.

Como referido anteriormente, um aspeto importante na investigação é o processo de partilha e de comunicação junto da comunidade científica. O processo de investigação ficará incompleto até que o investigador possa comunicar os seus pontos de vista de uma forma clara, persuasiva e efetiva (Shulman, 1997; Boaler, Bell & Even, 2003). A comunicação é um ato generativo, pois ele próprio "produz" ideias. E para que haja comunicação é necessária reflexão.

O processo de reflexão pode ser definido como sendo o questionamento de um conjunto de pensamentos críticos sobre as nossas ideias e atos, que serve de ferramenta de progresso pessoal e social e que está cada vez mais integrada nas idiossincrasias do desenvolvimento profissional (Carrilho, 2002).

Von Glasersfeld (1994), Polettini e Sabaraense, (1999) fazem outra descrição de reflexão, como sendo uma capacidade de origem misteriosa que permite olhar de fora para uma experiência e representar grande parte do seu fluxo, vendo-a como uma experiência direta que não o é.

Em Portugal, têm sido publicados vários estudos (Alarcão, 1996; Serrazina, 1999) onde a reflexão sobre a prática assume um papel fundamental. A reflexão é um processo frutuoso, mas ao contrário da comunicação, é algo que reside no indivíduo. O estudo sobre o próprio (*self-study*), para ficar completo, requer que o conhecimento, análise e inferências, resultantes das práticas descritas sejam comunicados para que possam ser postos em causa, estendidos e transformados por outros (Loughran, 2007).

Segundo Schön (1987) pode-se distinguir a reflexão na ação, a reflexão sobre a ação e a reflexão sobre a reflexão na ação. As duas primeiras distinguem-se no tempo – a primeira toma lugar durante a prática e a segunda num momento posterior. A reflexão sobre a ação possibilita uma consciencialização do conhecimento tácito, a busca e o questionamento de crenças e a reformulação do pensamento (Oliveira & Serrazina, 2002). Essa reflexão consiste numa formulação mental e retrospetiva da ação, possibilitando um ponto de vista mais global e uma perspetiva geral sobre a ação, no sentido em que há um maior distanciamento da envolvência nessa ação (Alarcão, 1996). A reflexão sobre a reflexão na ação aparece conectada com a reflexão para a ação futura, é uma reflexão contextualizada que procura ajudar a compreender novos problemas e orientar ações futuras (Oliveira & Serrazina, 2002).

Para Eraut (1995) e para Oliveira e Serrazina (2002), faz mais sentido distinguir a reflexão antes da ação, a reflexão depois da ação e a reflexão distanciada da ação. Segundo Brubacher, Case e Reagan (1994), para o professor reflexivo, a reflexão sobre a sua prática permite-lhe atuar de forma consciente, intencional e deliberada e ajuda-o a libertar-se de comportamentos impulsivos e rotineiros.

A condição de profissional reflexivo é uma condição necessária, mas não suficiente, para que se consiga realizar uma investigação sobre a prática (Oliveira & Serrazina, 2002; Ponte, 2002). Trata-se de dois conceitos que se sobrepõem parcialmente, mas que não são idênticos (Ponte, 2002).

Entretanto, é difícil precisar o momento em que o processo reflexivo passa a configurar-se como processo investigativo. "Parece haver uma fronteira fluida ou nebulosa entre prática reflexiva e prática investigativa" (Fiorentini, 2002, p.102).

Os investigadores procuram congregar cuidadosamente as relações entre factos, análises, verdade e opinião. Para o conseguir, procedem à modelação das ideias em formatos acessíveis aos leitores, isto é, importa que o autor da investigação possua a habilidade de reconhecer as ideias formadas e a capacidade de as representar de forma flexível (Boaler, Bell & Even, 2003).

As reflexões do investigador sobre as suas acções e observações no terreno, as suas impressões, irritações, sentimentos, etc., constituem dados de pleno direito, fazendo parte da interpretação e ficando documentados no diário de investigação e nos protocolos do contexto (Flick, 2005, p.6).

Segundo este autor, o texto para além de constituir um meio fundamental de apresentação e comunicação dos resultados, é a base da interpretação e organiza os dados essenciais em que se baseia a descoberta (Flick, 2005). O esquema seguinte é um reflexo das interações descritas.

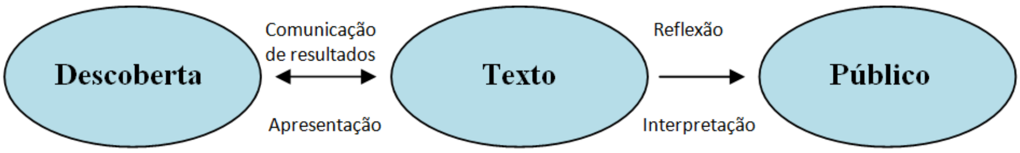


Fig. 4.2 Interações entre os momentos de descoberta, texto e público

Flick (2005) distingue três tipos de relatos possíveis numa investigação interpretativa:

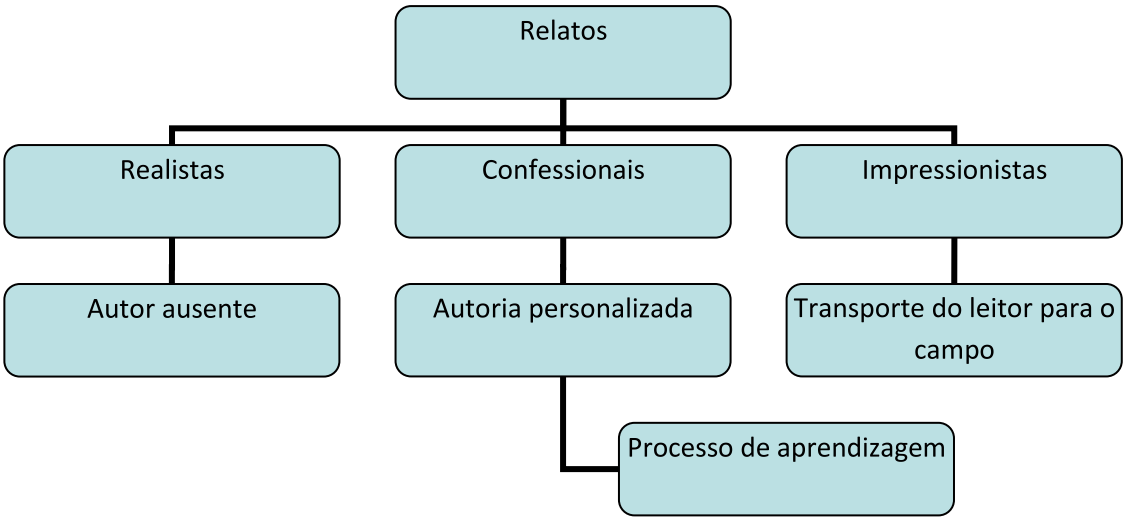


Fig. 4.3 Tipos de relatos, segundo Flick (2005)

Nos processos realistas o autor não marca a sua presença de forma vincada, ao contrário do que acontece nos relatos confessionais. A autoria personalizada possibilita que seja descrito o processo de aprendizagem do próprio autor, bem como fica evidente a genuinidade do campo e dos seus intervenientes. Os relatos impressionistas são escritos como uma recordação dramática em que o objetivo é prender o leitor e, simultaneamente, conjugar coerência e credibilidade.

Estes diferentes tipos de relato podem-se complementar. Um exemplo desse facto é construir inicialmente uma narrativa realista seguida de uma versão de um contacto no terreno, que é apresentada mais tarde como uma confissão. "Nos últimos tempos tem havido um acréscimo nos relatos confessionais e impressionistas, o que deixa transparecer a consciência crescente da não existência de uma teoria perfeita nem do relatório perfeito sobre ela" (Flick, 2005, p.244).

Desde há alguns anos, tem sido notória uma crescente preocupação com a forma como se comunica a investigação aos outros (Boaler, Bell & Even, 2003; Flick, 2005, Amado, 2007). A investigação inclui, pois, não só a interação entre o investigador e o assunto, mas também entre o investigador e os seus potenciais leitores.

Ruivo (2003) parece partilhar a ideia de que o investigador tem voz, afirmando que o cientista faz a natureza falar, mas é ele que prepara o palco e é ele que salienta os aspetos que lhe parecem mais significativos.

Amado (2007) defende que o investigador deve dar alma e luz ao seu trabalho, transmitindo-lhe vida. E acrescenta:

> *O investigador observa uma realidade que tenta compreender e interpretar segundo um quadro teórico. Mas para a descrever e dar a conhecer aos outros deve ser criativo e imaginativo, o que não significa fantasiar ou inventar. Antes, implica ser hábil com as palavras de modo a dar a conhecer aos outros a realidade que observou da forma mais real e vívida possível* (Amado, 2007, p. 279).

4.2.2. A Investigação sobre a Própria Prática

No presente estudo, assumirei simultaneamente o papel de investigador e de professor. Esta duplicidade de papéis apresenta as suas vantagens e desvantagens. O facto de estar a investigar na minha própria sala de aula permite-me aceder em primeira mão às várias situações e agir diretamente sobre elas. O meu conhecimento dos alunos, no que se refere à sua maneira de ser, de estar, de sentir, de reagir, de se relacionar, de trabalhar na sala de aula, etc., permitir-me-á compreender melhor as situações de ensino/aprendizagem em curso. Este conhecimento pode ser uma mais-valia para o meu trabalho de investigação. A contextualização de determinado tipo de comportamentos, atitudes e formas de raciocínio torna-se necessariamente mais fácil quando se conhece o percurso do aluno, a sua forma de estar e ser.

Um outro aspeto que merece algumas considerações é a questão da gestão do tempo para desempenhar simultaneamente o papel de investigador e professor. Este aspeto tem duas cambiantes: uma fora da sala de aula e outra dentro. "O impedimento mais sério para o desenvolvimento dos professores como investigadores e, desde logo, como actores do ensino, é essencialmente a falta de tempo" (Leite & Terrasêca, 1993, p.61).

Um professor tem uma tarefa, só por si, exigente em disponibilidade. Por isso, o desafio é redobrado pois, dentro da sala de aula, terá de ser o professor a gerir o tempo e as tarefas do processo de ensino/aprendizagem e, simultaneamente, a desempenhar o papel de investigador. E parece ainda aumentar nos casos em que há uma forte presença da utilização das tecnologias na sala de aula, em particular quando estas são colocadas nas mãos dos alunos para a resolução de tarefas. Sabe-se que uma das maiores dificuldades na utilização das tecnologias nas aulas de matemática é a presença de um único professor na sala de aula (Amado, 2007), o que poderá também dificultar a tarefa de investigação numa aula com tecnologias. Para aligeirar esta dificuldade, conto com a colaboração de um(a) colega na sala de aula, em parceria, numa das aulas de 90 minutos da turma escolhida.

A investigação sobre a própria prática também requer que sejam desenvolvidas estratégias de auto-observação. Será este um facto negativo? Segundo Leite e Terrasêca (1993), a resposta a esta questão pode levar à formulação de uma outra questão, por analogia: Qual a diferença entre o ator amador e o profissional? A auto-observação melhora a consciencialização do artista, desenvolvendo assim a capacidade de se usar a si mesmo como instrumento para o seu desempenho.

A propósito da falta de imparcialidade que este tipo de estudo pode levantar, Leite e Terrasêca (1993) consideram que não se trata de uma objeção sólida. Estas autoras fundamentam-se na sua experiência de análise de trabalhos, ao nível de licenciatura e de doutoramento, para concluírem:

- A dedicação dos investigadores profissionais às suas teorias é uma fonte mais grave de parcialidade do que a dedicação dos professores à sua prática (Leite & Terrasêca, 1993, p.60).

- Existe uma maior vulnerabilidade dos investigadores profissionais, do que dos professores, pois eles encontram-se mais longe da prática (Leite & Terrasêca, 1993, p.61).

Como professor, o meu principal objetivo é o de tentar promover as aprendizagens dos alunos. Como investigador, o meu principal objetivo é o de tentar responder, fundamentadamente, às questões apresentadas neste estudo. Embora, numa primeira instância, os objetivos principais do investigador e do professor pareçam distintos, na realidade eles convergem para a melhoria das aprendizagens dos alunos e para a sua formação matemática. Em suma, penso ser perfeitamente possível coordenar os dois papéis e espero que o presente estudo me ajude a compreender melhor o fenómeno que pretendo investigar, sem descurar o contexto educativo e social mais vasto em que o mesmo tem lugar.

4.2.2.1. O Papel do Professor como Investigador da sua Prática

O grande desafio do envolvimento de um professor num projeto investigativo está na exigência da capacidade de sacrifício, da gestão de tempo e de recursos. Numa sociedade onde a profissão de professor é, por vezes, depreciada, o exercício das funções docentes requer o apelo à paixão pela arte de ensinar.

O professor/investigador deve ter firmeza nas suas convicções, no entanto, tem de estar disposto a pô-las em causa e a ponderar alterações nas suas formas de encarar o processo educacional. Deve ser perseverante, mas ter flexibilidade para introduzir algumas mudanças nas suas práticas.

Recomendações recentes apontam para a necessidade de se investigarem a partir da prática problemáticas que se colocam à profissão docente (Ponte, 2002). Essa necessidade também é salientada por Oliveira e Serrazina, (2002):

> *Os problemas surgem na prática e o envolvimento do professor é fundamental. Não se procura apenas resolver o(s) problema(s), procura-se também que a actividade educativa seja melhorada. Neste tipo de pesquisa não se está apenas preocupado com a interpretação da situação mas em simultâneo com a modificação da situação e dos actores educativos* (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 287).

Desta forma, o professor poderá, de forma mais fundamentada e sistemática, transformar a sua prática pedagógica e melhorar as suas ações dentro e fora da sala de aula.

Exige-se, hoje, da profissão docente, competências e compromissos, não só de ordem cultural, científica e pedagógica, mas igualmente de ordem pessoal e social, como sejam, perspetivas atuais sobre a Matemática, a Educação, o Ensino, Escola e Currículo (Perez, 2004).

Atualmente, a profissão docente adquiriu novas componentes, desafios e exigências, que impelem a uma constante atualização, numa atividade que não é rotineira e onde as metodologias utilizadas não devem estar pré-determinadas.

> *Os problemas da construção e gestão do currículo, bem como os problemas emergentes da prática profissional nos seus mais diversos níveis, requerem do professor capacidades de problematização e investigação, para além do simples bom senso e boa vontade profissionais* (Ponte, 2002, p.7).

O facto de os professores serem profissionais que estão constantemente a adaptar-se, ajustando e alterando a sua prática em resposta às necessidades e preocupações do seu contexto, é um ponto que, neste momento, se encontra clarificado (Richert, 1997; Schuck & Segal, 2002, Loughran, 2007). O mesmo se aplica à forma pela qual interpretam e incorporam a aprendizagem de terceiros no seu próprio trabalho. Para que seja possível efetuar essa adaptação numa investigação sobre a prática docente, torna-se importante que haja uma compreensão robusta do contexto no qual o estudo é conduzido, possibilitando a outros investigadores a interpretação do trabalho produzido e o respetivo ajuste à própria situação (Loughran, 2007).

Obviamente que os professores que denotam preocupação com a aprendizagem dos seus alunos procuram constantemente formas de melhorar a sua prática. Assim, os seus métodos de investigação tornar-se-ão inevitavelmente mais disciplinados e sofisticados (Breen, 2003). Esta evolução é também referida por Ponte (2002):

Na verdade, esta investigação pode contribuir fortemente para o desenvolvimento profissional dos professores implicados e o desenvolvimento organizacional das respectivas instituições, bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral. É um facto incontornável que os professores estão em situação privilegiada para fornecer uma visão de dentro da escola sobre as suas realidades e problemas (Ponte, 2002, p.13).

Outra vertente a salientar no trabalho do professor/investigador é o seu carácter motivador e de estímulo intelectual:

O trabalho de investigação parece contribuir para que os professores se sintam mais motivados e interessados no exercício da sua profissão. O delineamento de uma investigação, as entrevistas, as observações, a recolha e o tratamento de dados, a reflexão sobre as conclusões e a descoberta de novos procedimentos, são desafios intelectuais que muito estimulam os professores que se dedicam à investigação (Sousa, 2005, p. 30).

O esquema seguinte mostra, de maneira sucinta, a influência mútua entre a teoria e a prática na atividade do professor como investigador.

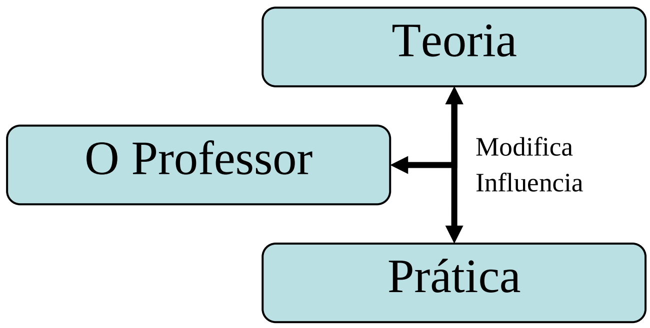


Fig. 4.4. Relações teoria/prática (Esquema adaptado de Malara & Zan, 2002, p. 566)

De uma forma simplificada, a teoria modifica/influencia os pontos de vista e crenças dos professores, o que induz mudanças nas suas práticas. Por outro lado, a prática modifica/influencia os pontos de vista e crenças dos professores, o que induz mudanças na forma como ele encara a teoria e a reconstrói. Esta relação é mediada pelo professor, através de uma determinada metodologia de trabalho, que deve assentar num plano de investigação em que é feita a recolha de elementos que permitam responder às questões levantadas (Ponte, 2002).

A investigação empírica envolve uma focagem num determinado conjunto de elementos que se antevêem como portadores de dados relevantes para o estudo. A forma de conjugar essa focagem com as questões formuladas na investigação pode ser delicada. Para conseguir ultrapassar esse problema intricado e importante, o investigador deve procurar retirar o significado de determinados detalhes específicos na interpretação dos dados e ser capaz de formular argumentos generalizados. Assim sendo, o investigador deve descrever incidentes críticos decisivos que sejam funcionalmente relevantes e inseri-los num contexto social mais abrangente (Boaler, Bell & Even, 2003).

Tendo em consideração a especificidade inerente aos estudos qualitativos, os papéis de professor e investigador podem ser eticamente desafiadoras, pois o professor-investigador está pessoalmente envolvido em diferentes estádios do estudo. No entanto, no caso específico deste estudo, o papel do professor centra-se maioritariamente na preparação de tarefas e na gestão do ambiente de sala de aula. Já o papel de investigador centra-se maioritariamente no tratamento dos dados pós aula. Os diferentes papéis de professor e investigador centram-se em momentos diferentes, minimizando possíveis influências. Para além disso, o foco do estudo não se encontra no professor nem nas interações do mesmo com os alunos, mas sim nas interações entre alunos. Neste contexto o investigador deve ter a preocupação ética de relatar, o mais fidedignamente possível, o ambiente de sala de aula e, em particular as interações entre alunos e entre alunos e o computador.

Crawford, Adler (1996) e Breen (2003), referem que a participação ativa de professores em atividades de investigação associadas à sua prática profissional pressupõe um pré-requisito de mudança. Este processo de mudança é feito a dois níveis: nos processos e na qualidade da educação matemática, resultando em potenciais benefícios para os estudantes.

Richardson (1994) e Ponte (2002) sublinham que teremos todas as condições de desenvolver processos de mudança se os resultados sugerirem novas formas de olhar o contexto e o problema e/ou as possibilidades de mudança da prática.

> *A investigação sobre a prática deve emergir como um processo genuíno dos actores envolvidos, em busca do desenvolvimento do seu conhecimento, procurando solução para os problemas com que se defrontam e afirmando assim a sua identidade profissional* (Ponte, 2002, p.14).

4.3. O Contexto de Investigação

4.3.1. A Escola

A escola em que decorreu este estudo está inserida numa zona piscatória do sul de Portugal e num meio social predominantemente desfavorecido. O meio envolvente carenciado vem refletir-se nas crianças e jovens que frequentam a escola e no seu aproveitamento escolar. Alguns alunos trabalham nas férias para ajudarem a família, sobretudo em trabalhos sazonais relacionados com o turismo nesta zona.

Trata-se de uma escola que integra o projecto Território de Intervenção Prioritária TEIP, que visa estabelecer condições para a promoção do sucesso educativo de todos os alunos e, em particular, das crianças e dos jovens que se encontram em territórios marcados pela pobreza e exclusão social (Despacho Normativo n.º 20/2012**)**.

O número de alunos na escola tem vindo a diminuir drasticamente, sendo atualmente frequentada por cerca de duzentos e cinquenta alunos. Existe um bom ambiente entre os professores e um quadro docente relativamente estável. Nos anos letivos em que decorreu a recolha de dados, 2011/2012 e 2012/2013, funcionaram uma ou duas turmas do ensino regular por cada nível de escolaridade. Este facto tem como consequência que todos se conhecem e isso permite um acompanhamento dos alunos mais personalizado, pelo pessoal docente e não docente. Para além disso, por vezes, são formadas turmas pequenas, o que proporciona um bom ambiente de trabalho, facilita a individualização do ensino e a diversificação de estratégias, nomeadamente, com a utilização das tecnologias em sala de aula.

4.3.2. A Sala de Aula

Por proposta minha as aulas de matemática decorrem sempre num laboratório onde se encontram doze computadores fixos com acesso à Internet, um quadro interativo e as mesas dispostas em U, conforme a planta da sala (Fig. 4.5).

Trata-se de uma sala equipada com vários materiais manipuláveis, calculadoras, jogos didáticos, manuais de matemática, um projetor, um quadro interativo, doze computadores. A sala é agradável e os alunos parecem apreciar as aulas neste espaço.

Durante a experiência de ensino, foi disponibilizado, em sala de aula, um computador para cada par de alunos.

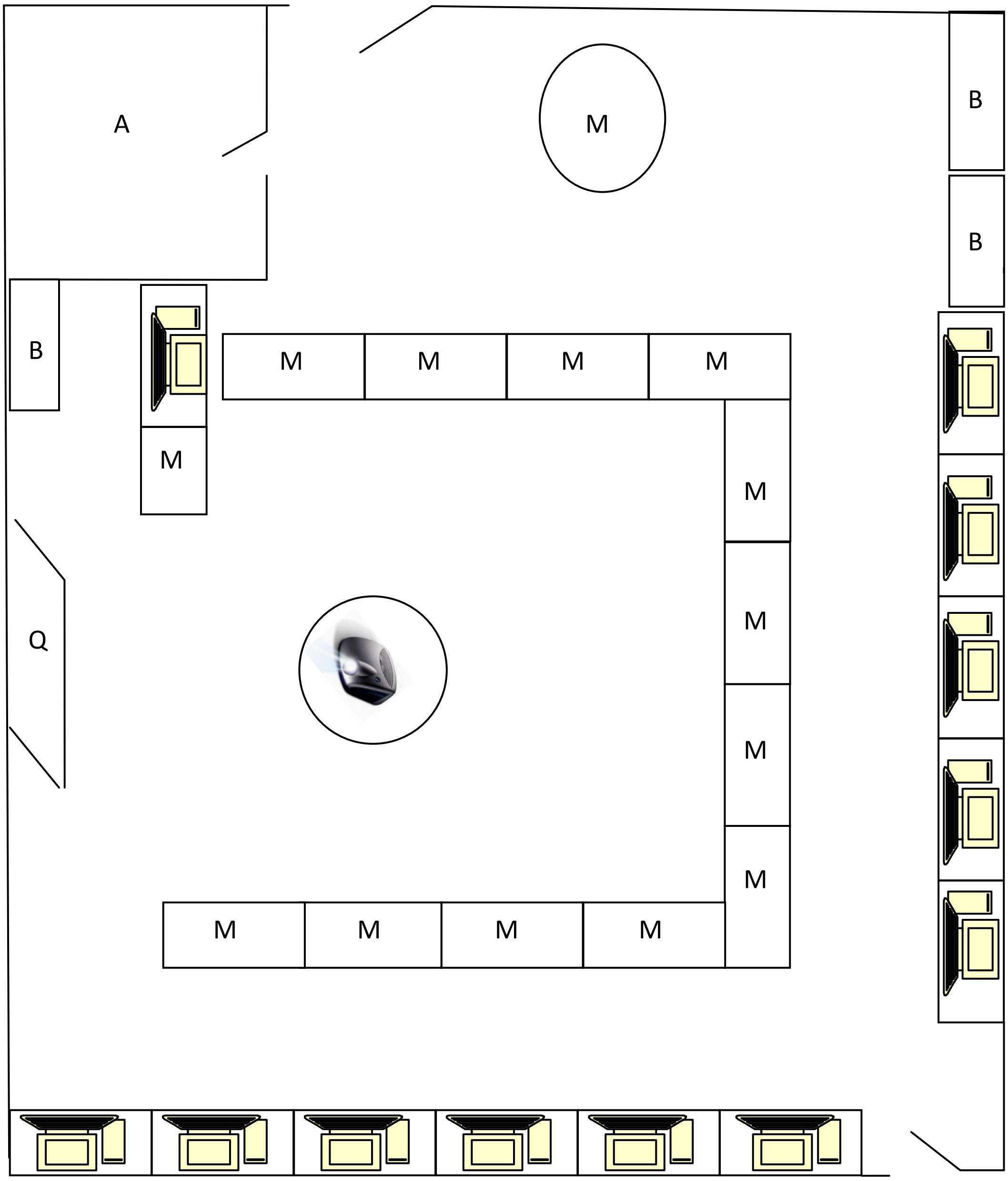


Fig. 4.5 Planta da sala

Legenda:

A – Arrecadação — Computador — Projector

B – Armário — Q – Quadro interactivo — M – Mesa

4.3.3. A Turma

No ano letivo de 2011/2012 foi-me atribuída uma turma do sétimo ano do ensino regular, constituída por vinte alunos: nove rapazes e onze raparigas cujas idades variavam entre os onze e treze anos. A maioria dos alunos pertencia à mesma turma desde o primeiro ciclo de escolaridade.

Esta foi a única turma de sétimo ano que lecionei neste ano letivo, o que determina a seleção da turma envolvida no estudo.

No geral, o rendimento escolar destes alunos é bastante heterogéneo, ou seja, grande parte dos alunos reporta dificuldades a matemática e vê a matemática como a disciplina mais difícil. No entanto, três alunos afirmam não ter dificuldades a matemática e consideram que obtiveram sucesso nos anos anteriores.

Em termos de rendimento escolar, de acordo com o relatório de avaliação diagnóstica (Anexo III), cinco alunos denotam um bom desempenho e sete revelam dificuldades, estando os restantes numa situação intermédia.

4.3.3.1. Os Grupos

Pela minha experiência como professor, considero o trabalho em pares ou em pequenos grupos como a forma de organização mais adequada para as aulas com recurso ao computador. Por outro lado, o trabalho em grupo, no ensino básico e secundário, é recomendado na aula de matemática, na medida em que permite a discussão de diferentes processos de resolução das tarefas (Amado, 1998), sendo esse um dos aspetos que pretendo observar no estudo.

Neste estudo foi dada oportunidade aos alunos para se agruparem de acordo com a sua vontade, o que apresenta algumas vantagens e desvantagens. Esta possibilidade pode contribuir para um melhor ambiente de trabalho e para um melhor relacionamento entre os elementos dos grupos. Além disso a constituição dos grupos não foi considerada imutável, podendo ser alterada em caso de necessidade.

4.3.3.2. O Grupo Selecionado para o Estudo

A seleção do par de alunos para o estudo foi feita tendo em conta a maior probabilidade da riqueza dos dados recolhidos, assim como a existência de evidências preliminares encontradas na situação a estudar (Yin, 2006).

Inicialmente foram recolhidos dados de três pares de alunos. A escolha destes três pares foi realizada por exclusão de partes, recorrendo aos únicos pares de alunos que não tinham nenhum aluno em risco de retenção no sétimo ano. Esse critério visou assegurar que seria possível seguir os mesmos alunos no sétimo e oitavos anos. Face a esta escolha foram transcritos todos os diálogos emergentes, durante a realização das tarefas propostas, dos três pares de alunos. Face à excessiva quantidade de dados produzidos optou-se por fazer uma primeira redução que resultou num estudo de caso único, com a análise de apenas um par de alunos. A escolha do par de alunos teve como fatores de seleção o facto de serem alunos com níveis de aproveitamento semelhantes e que face aos dados entretanto recolhidos (alguns diálogos transcritos) mostravam uma boa capacidade de diálogo. Um fator importante era que os alunos escolhidos tivessem normalmente desempenhos análogos para que não houvesse um domínio de um deles na relação de trabalho colaborativo. Também era importante que os alunos conseguissem exteriorizar, naturalmente, através da oralidade, grande parte dos seus pensamentos. Assim, a escolha recaiu numa amostra de conveniência (Bravo & Eismen, 1988), sendo escolhido o par de alunos mais conveniente face à experiência desenvolvida e ao foco do estudo.

O grupo alvo do estudo é constituído por dois alunos. Por questões éticas, para proteger a identidade dos alunos, atribuí os nomes fictícios de André e Lucas. Estes alunos revelam normalmente um desempenho um pouco acima da média e um bom relacionamento no trabalho em par; no entanto, não são alunos que mostrem um particular interesse pela utilização das tecnologias em sala de aula. Estes dois alunos revelam intenção em prosseguir estudos e preocupação em ter bons níveis de aproveitamento, num contexto em que existem alunos com muitas dificuldades a todos os níveis.

À semelhança de outros alunos (Paiva, 2009), estes estudantes preferem o trabalho com o papel e lápis, considerando que a avaliação externa (exame de 9.º ano) a que são sujeitos não está em sintonia com este tipo de trabalho envolvendo tecnologia. Apesar disso, na prática, estes alunos envolvem-se de uma forma ativa e empenhada na resolução das tarefas propostas, existindo, com alguma frequência, momentos de negociação relacionados com a manipulação do computador.

André evidencia alguma facilidade de aprendizagem que ele potencia com o trabalho que desenvolve em casa. Apesar da determinação com que normalmente atua, este aluno demonstra, por vezes, pouca rapidez de raciocínio. Também não é muito sociável; por vezes, mostra-se pouco solidário com os colegas, dá sinais de insegurança e pouca independência, sentindo a necessidade de aprovação em tudo o que faz.

Por seu turno, Lucas denota alguma autonomia na forma como encara as tarefas. Este aluno não revela dificuldades de aprendizagem, é determinado e mostra algum espírito de liderança, no entanto, nem sempre aceita bem as críticas e correções.

4.4. Recolha de Dados

Segundo Merriam (1984), e Matos e Carreira (1994), o investigador assume o papel de instrumento fundamental no processo de recolha e análise de dados. A forma como analisa os dados é influenciada pelo seu ponto de vista e pelas suas crenças, razão pela qual os resultados da investigação terão sempre a presença do investigador no estudo.

Uma das estratégias seguidas neste estudo foi o recurso a uma variedade de fontes de dados, que implicaram diferentes procedimentos de recolha de dados. A intenção subjacente é a de produzir um retrato da realidade tão fidedigno e completo quanto possível, de modo a proporcionar ao leitor um acesso tão vasto quanto possível a todos os elementos da experiência educacional realizada.

4.4.1. Observação de Aulas

Na implementação das atividades propostas, a observação participante deve ter um papel muito importante, tanto do ponto de vista da prática na sala de aula como do ponto de vista da investigação. A observação permite uma descrição detalhada da atividade, dos participantes e do significado que estes lhe atribuem (Lessard-Hérbert, Goyette & Boutin, 2010).

Realizei a gravação em áudio e vídeo de todas as aulas em que decorreu a experiência de ensino. Ao longo dessas aulas os alunos resolveram as atividades propostas no computador ou, eventualmente, com recurso à calculadora e elaboraram as respetivas produções escritas. Além disso, nas aulas com recurso ao computador foi solicitado a todos os alunos a gravação dos ficheiros eletrónicos numa pasta do computador para posterior recolha.

4.4.2. Recolha Documental

Neste estudo, a recolha documental incidiu sobre registos de natureza escrita (produções escritas e relatórios) e registos vídeo e áudio (do ecrã do computador e dos diálogos dos alunos). A gravação do ecrã do computador foi feita através do *software* Camstudio-2.0-w32. Foram ainda recolhidos os ficheiros eletrónicos que os alunos produziram com recurso ao GeoGebra. Todos os ficheiros do GeoGebra produzidos pelos alunos foram gravados em pastas com os respetivos nomes dos alunos e das tarefas.

4.5. Análise de Dados

Os dados recolhidos são, na sua maioria, descritivos e qualitativos, refletindo o ambiente das aulas, as questões levantadas pelos alunos, as suas dúvidas, anseios, descobertas e conquistas.

Ao estudar as interações nas quais os alunos mostram, um ao outro, a sua compreensão emergente, pode-se ver a aprendizagem colaborativa a decorrer. Este facto torna acessível, ao investigador, todo o processo iterativo de construção de conhecimento (Stahl, 2016).

Os dados recolhidos a partir dos diálogos aluno-aluno, professor-aluno e das *frames* do computador foram transcritos, o mais minuciosamente possível e, posteriormente, filtrados e analisados (Lessard-Hérbert, Goyette & Boutin, 2010). Foi dessa análise que nasceu, de forma indutiva, um primeiro esboço das categorias de análise.

O facto de não ter definido categorias de análise estanques à partida teve o intuito de não me sentir implicitamente restringido pelas expectativas de funcionamento de nenhum tipo de modelos pré-concebidos. Mas, simultaneamente exigiu ter em conta os resultados de vários dos estudos já disponíveis e o quadro teórico estabelecido. Caso contrário, podia correr o risco de não ir além do conhecimento existente.

As categorias emergem inicialmente de uma envolvência muito próxima com os dados recolhidos e foram sendo criadas e ajustadas, atingindo níveis maiores de abstração ao longo de um processo de comparação constante (Glaser & Strauss, 1967). Esse processo consistiu em comparar constantemente a informação proveniente dos dados, possibilitando a conceptualização dos mesmos. Tratou-se de um processo cíclico e flexível de triangulação que pretendeu assegurar a validade do estudo. Este processo de comparação constante foi prosseguido até à saturação dos dados. Nalguns casos foi possível adaptar alguns conceitos já existentes para formar as categorias, como é o caso das construções e arrastamentos, noutros casos foi necessário criar novas categorias. A sua fundamentação é feita no capítulo seguinte por estar intimamente ligada ao tratamento de dados.

No decurso da experiência de ensino-aprendizagem, o computador foi introduzido gradualmente ao longo de 33 sessões que atravessaram os quatro subtemas da Geometria (Triângulos e Quadriláteros; Semelhança; Isometrias; Teorema de Pitágoras), distribuídos por dois anos letivos, designadamente, 7.º e 8.º ano de escolaridade, o que permitiu que os alunos se familiarizassem com a tecnologia e se tornassem utilizadores naturais do GeoGebra.

À semelhança do que foi descrito por Noss e Hoyles (1996), aqui o computador teve uma dupla função: servindo como uma janela para os alunos desenvolverem as suas construções e, simultaneamente, servindo como uma janela para o investigador poder observar. Esta observação pode não traduzir exatamente aquilo que os alunos pensam ao resolverem a tarefa, mas traduz perfeitamente, pelas manifestações no ecrã, aquilo que estão a fazer. As formas como os alunos constroem e manipulam as construções podem dar algumas informações privilegiadas sobre os significados construídos no processo (Pratt & Ainley, 1997).

Procurei minimizar a especulação interpretativa acerca das intenções dos alunos que estão na base das suas ações e das suas falas, recorrendo à gravação do ecrã do computador, podendo desta forma aceder a todas as construções e arrastamentos que os alunos executam.

Foram identificados vários episódios para análise, tendo em conta os seguintes critérios: i) a sua ocorrência distribuída por cada ano letivo (7.º e 8.º) e ii) a incidência nos vários subtemas abordados (Triângulos e Quadriláteros; Semelhança; Isometrias; Teorema de Pitágoras). Deste modo, foram selecionados dois episódios de cada subtema, com exceção do subtema Semelhança, no qual apenas foi selecionado um episódio, dado que a sua extensão no currículo é menor. Para além disso, também constituiu um fator de seleção dos episódios analisados, o facto de os alunos desenvolverem diálogos significativos e produtivos, trocando ideias de uma forma relevante para a construção de significados.

CAPÍTULO 5

Apresentação e Análise de Dados

Na análise de dados, para cada episódio começo por apresentar a respetiva tarefa proposta aos alunos, depois faço uma descrição geral do que se passou nesse episódio, dando ênfase aos aspetos mais importantes. Seguidamente, passo à análise e interpretação de cada episódio. Em primeiro lugar, faço uma análise global do episódio à luz dos objetivos perseguidos pelos alunos onde simultaneamente realço algumas categorias de análise que vão surgindo. Em segundo lugar, aprofundo essa análise concentrando-me no feedback visual e no feedback oral entre alunos e, para cada um deles, considero a forma como os alunos vão construindo significados.

5.1. Processo de Categorização

5.1.1. Ciclo de Feedback

Para melhor clarificar o processo em que o par de alunos estava envolvido durante as aulas, criei um esquema onde saliento as diferentes fases de feedback que surgiram (Fig. 5.1):

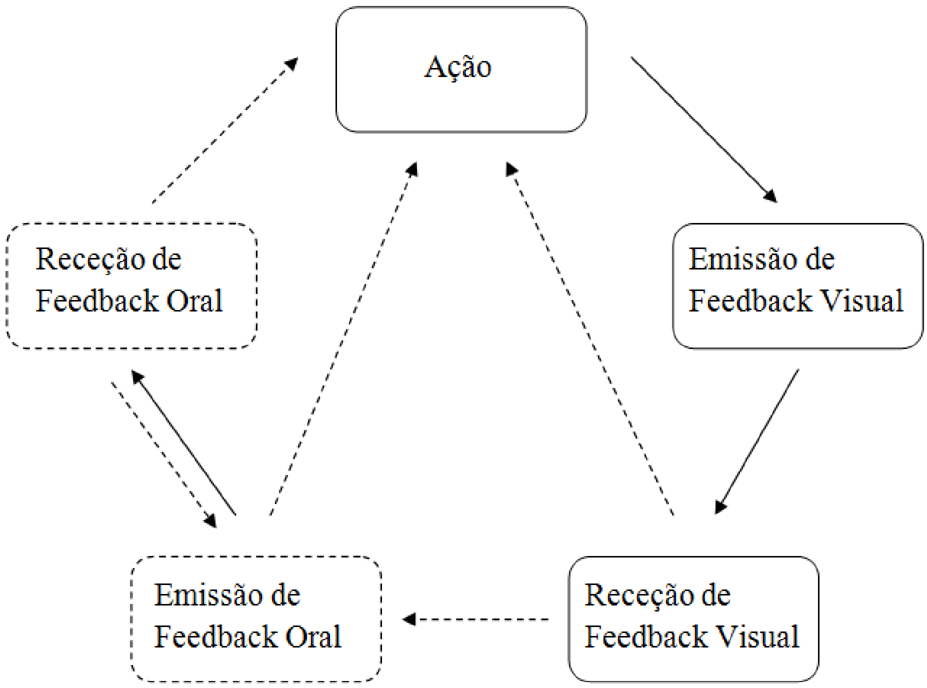


Fig. 5.1 Ciclo de fases do feedback

Os traços contínuos representam passagens e fases que ocorreram sempre. Pelo contrário, os traços tracejados representam passagens e fases que podem ter surgido ou não.

Nesta figura estão representadas as várias fases dos ciclos de feedback contidos nos dados. A uma ação de construção no computador segue-se a correspondente emissão de feedback visual. Consequentemente, dá-se a receção desse feedback visual emitido pelo computador. Nessa receção, os alunos percecionam a figura que surge no ecrã do computador. A fase seguinte tanto pode ser uma nova ação, como uma emissão de feedback oral. Se um dos alunos estabelecer uma nova ação, reinicia-se o ciclo. Se acontecer uma intervenção oral segue-se necessariamente a fase de receção de feedback oral. Seguidamente, um dos alunos pode proceder a uma nova ação e o ciclo reinicia-se, ou então um dos alunos pode emitir um novo feedback oral. As fases sucedem-se até que os alunos percecionem o feedback visual emitido como correspondendo ao que é pretendido.

Podem-se caracterizar resumidamente as diferentes fases de feedback:

Ação

Realização de alguma atividade com vista a resolver alguma questão ou atingir algum objetivo. Esta ação pode resultar de uma estratégia estabelecida com outro aluno ou não.

Emissão de Feedback

Emissão de Feedback Visual – Após determinada ação de um aluno surge feedback visual emitido pelo computador,

Emissão de Feedback Oral – O feedback visual pode ser seguido por um feedback oral fornecido pelo outro aluno. Este feedback oral foca-se no processo usado na ação, podendo revelar dúvidas, discordância ou aprovação, indicações ou descobertas simples baseadas nas suas ações, procedimentos ou raciocínios.

Receção de Feedback

Receção de Feedback Oral - A receção de *feedback* oral por parte de um aluno pode levar ao surgimento de uma resposta (constituindo-se como feedback ao feedback) podendo levar a um processo cíclico, denominado como diálogo interativo, cujo objetivo consiste em clarificar ações, procedimentos ou raciocínios, podendo ser usados como alavanca para o processo de corregulação.

Receção de Feedback Visual – A forma como os alunos percecionam a emissão de feedback visual.

Por exemplo, no episódio 3, registou-se a seguinte sequência: André constrói um triângulo (Ação). O computador mostra um triângulo isósceles (Emissão de feedback visual). Lucas perceciona que a figura não corresponde ao solicitado (Receção de feedback visual). Lucas não concorda com a construção e refere que deveria ser um triângulo normal. (No enunciado da tarefa era solicitada a construção de um triângulo qualquer) (Emissão de feedback oral). André aceita o feedback (Receção de feedback oral) e apaga a construção (Ação).

Depois de refletir sobre os dados, procurei delinear um processo de análise para os diferentes tipos de feedback ocorridos no triângulo constituído pelo par de alunos e o computador. Nomeadamente, quis analisar com mais detalhe o Feedback Visual e o Feedback Oral.

5.1.2. Feedback Visual

Para analisar o feedback visual percebi que seria necessário atender à forma como os alunos constroem as figuras e as arrastam, para depois entender o funcionamento do feedback visual dai resultante. Comecei então pelas construções.

5.1.2.1. Construções

Um fator determinante em ambientes de geometria dinâmica é a “resistência das construções por arrastamento” (construções que não se desmancham quando são arrastadas) (Balacheff & Sutherland, 1994, p.147). Vários autores fazem a distinção entre desenho e figura (e.g. Parzysz, 1988, Arsac, 1989; Laborde, 1993b), tendo em conta a sua resistência. Ao contrário de um desenho, uma figura, por ser resistente, corresponde a uma família de objetos com determinadas propriedades em comum que se podem verificar por arrastamento. Ou seja, um aluno constrói uma figura, quando é capaz de “produzir a partir dela vários (ou um número infinito de) desenhos que preservam as propriedades intencionadas quando os elementos da figura são modificados” (Talmon & Yerushalmy, 2006, p.5).

À semelhança de Mariotti (2002), neste estudo optou-se por designar o desenho por “construção empírica” e a figura por “construção geométrica” (p.710). Apesar dessas duas designações serem importantes, não são suficientes para caracterizar totalmente as construções produzidas. Acontece com frequência os alunos atingirem construções que não são empíricas nem geométricas. Então necessitei de encontrar algumas categorias que especificassem o que se passa entre estes dois extremos. Como se vai poder verificar, a opção pela nomenclatura, construção empírica e construção geométrica, possibilita que se denomine intuitivamente, outras categorias intermédias que surgiram entre essas. Assim, definiram-se as seguintes categorias:

Construção Empírica – Os alunos representam a figura dada ou intencionada através de uma construção não robusta baseada em estratégias empíricas (sem qualquer fundamento de análise geométrica) (Laborde & Capponi, 1994)[11].

[11] Também denominados objetos empíricos (Arzarello, *et al*., 2002).

Exemplo: André utiliza, no episódio 1, uma ferramenta que lhe permite construir polígonos, para construir um triângulo que tenciona que seja retângulo.

Construção Geométrico-Empírica - Os alunos constroem uma figura incompleta ou diferente da requerida, baseando-se em estratégias contendo simultaneamente conceitos geométricos e ideias empíricas diferentes das propriedades ou conceitos geométricos intencionados. Exemplo: Lucas também utiliza a ferramenta Polígono para fazer coincidir os ângulos internos de um triângulo com os ângulos previamente marcados com uma ferramenta que lhe permite marcar os ângulos com uma amplitude pré-determinada pelo utilizador.

Construção Empírico-Geométrica - Os alunos representam a figura pretendida pela tarefa sem algumas das suas propriedades, isto é, a construção não mantém todas as propriedades exigidas quando é arrastada, resultando numa construção parcialmente robusta ou numa construção não robusta. Exemplo: André, no episódio 6, constrói um triângulo retângulo escaleno com a ferramenta *Polígono*, tendo por base a *affordance* grelha e, em seguida, constrói um quadrado em cada lado do triângulo recorrendo à ferramenta *Polígono Regular.*

Construção Estático-Geométrica - Os alunos constroem uma figura visualmente igual à pretendida mas que não responde ao arrastamento. Exemplo: André, no episódio 7, constrói a figura inicial aplicando os postes perpendiculares à terra e a interseção do fio elétrico com a terra como sendo o ponto médio (estático) do segmento de reta delimitado pelos postes.

Construção Geométrica - Os alunos constroem a figura pretendida ou um representante da família da figura pretendida, tendo em conta todas as suas propriedades, formando os denominados objetos genéricos (Arzarello *et al.*, 2002). Exemplo: André, no episódio 7, reconstrói a figura solicitada, repetindo os mesmos procedimentos, mas definindo agora o ponto de interseção, do fio elétrico com a terra, como sendo um ponto livre (em vez do ponto médio) no segmento de reta horizontal.

Para além de caracterizar cada uma das construções considero ainda relevante analisar a sequência seguida ao longo de cada episódio em termos dessa mesma caracterização de construções.

Adaptando as ideias de Saada-Robert (1989), Olivero (1999), e Arzarello, Olivero, Paola e Robutti (2002), relativas às tipologias cognitivas, para o contexto deste estudo considerei que os alunos podem implementar várias estratégias de construção para a mesma tarefa percorrendo sequências caracterizadas pelos seguintes processos:

Processos ascendentes - das construções empíricas para as geométricas, aumentando o nível de abstração;

Processos descendentes - das construções geométricas para as empíricas, diminuindo o nível de abstração.

5.1.2.2. Arrastamentos

Relativamente aos arrastamentos segui um processo semelhante. Foi possível encontrar alguns tipos de arrastamentos já caracterizados na literatura. Arzarello, Olivero, Paola e Robutti (2002) adaptaram uma caracterização inicial de Hölzl (1995, 1996) e consideraram as seguintes modalidades de arrastamento[12]:

Arrastamento Divagante – consiste em mover os pontos básicos sobre o ecrã aleatoriamente, sem um plano, a fim de descobrir configurações interessantes ou regularidades nos desenhos.

Arrastamento Limitado – consiste em mover um ponto semi-arrastável (que esteja ligado a um objeto (só pode ser arrastado nesse objeto)).

Arrastamento Guiado – consiste em arrastar os pontos básicos de um desenho, a fim de lhe dar uma forma particular.

Arrastamento Teste – consiste em mover pontos arrastáveis ou semi-arrastáveis, com a finalidade de ver se o desenho mantém as propriedades iniciais. Se assim for, então a figura passa o teste; caso contrário, o desenho não foi construído de acordo com as propriedades geométricas pretendidas.

No entanto, estas categorizações não se revelaram suficientes para caracterizar completamente os arrastamentos realizados pelos alunos. Um arrastamento limitado

[12] Por considerar que o termo utilizado por Forsythe (2011) - estratégia de arrastamento – se adapta melhor ao contexto do estudo irá ser a minha opção, em detrimento de modalidade de arrastamento.

pode ser simultaneamente um arrastamento teste. Por exemplo, no episódio 7, para testar a sugestão de Lucas, André arrasta um ponto, limitado dentro de um segmento de reta, no sentido contrário do inicial.

Assim sendo, optei por criar novas categorizações por conjugação, ficando com as seguintes:

Arrastamento Impossível - quando o aluno tenta arrastar um ponto fixo, por definição (por exemplo um ponto médio), ou arrastar uma construção que não se mexe (por estar hierarquicamente dependente de procedimentos anteriores). Exemplo: Lucas, no episódio 7, tenta arrastar o ponto médio de interseção do fio elétrico com a terra.

Arrastamento Guiado – ocorre quando o aluno arrasta os pontos básicos de uma construção com a intencionalidade de lhe dar uma forma particular. Exemplo: Lucas, no episódio 2, arrasta os vértices para que os ângulos formados por três dos lados do triângulo coincidam com os ângulos marcados anteriormente.

Arrastamento Divagante-Limitado – ocorre quando o aluno move um ponto semi-arrastável (só pode ser arrastado num determinado objeto) aleatoriamente sem uma intencionalidade explicitamente pré-concebida, esperando receber pistas do feedback do computador para estabelecer uma conjetura. Exemplo: André, no episódio 7, experimenta arrastar o ponto de interseção do fio elétrico com a terra, com a única intencionalidade de observar o efeito nas medições dos comprimentos dos segmentos de reta que representam o fio elétrico.

Arrastamento Divagante-Teste – quando o aluno move um ponto sem restrições com a intencionalidade de testar determinadas conjeturas ou de testar o efeito do feedback do computador. Exemplo: Lucas, no episódio 3, arrasta um triângulo inicial, sem quaisquer restrições, para testar se o segundo se mantém semelhante.

Arrastamento Limitado-Teste – ocorre quando o aluno arrasta um ponto semi-arrastável com o intuito de testar determinadas conjeturas. Exemplo: quando André, no episódio 7, seguindo a sugestão de Lucas, inverte o sentido de arrastamento de um ponto contido num segmento de reta com a intenção de testar se o comprimento do fio elétrico diminui.

À semelhança do que foi considerado para a análise das construções, em termos de trajetórias, segui a mesma lógica para os arrastamentos, pois os alunos podem implementar várias estratégias de arrastamento para a mesma tarefa, percorrendo sequências caracterizadas por processos ascendentes ou descendentes, conforme fazem tipos de arrastamento que requeiram um maior ou menor nível de abstração, respetivamente. Por exemplo, pode-se considerar que um arrastamento divagante-limitado tem um menor grau de abstração do que um arrastamento limitado-teste.

De referir que existem episódios para os quais não me foi possível caracterizar as trajetórias de construções e arrastamentos pelo número limitado das mesmas. Esse fator deve-se essencialmente à natureza de cada tarefa que pode levar a que os alunos realizem, ou não, diferentes tipos de construções e arrastamentos.

5.1.2.3. Construção de Significados a Partir do Feedback Visual

Para além das categorias anteriores, analiso ainda as produções dos alunos segundo o prisma da construção de significados a partir do feedback visual. Assim, os dados são também analisados segundo: (1) a adequabilidade da escolha da ferramenta para resolver o problema; (2) a adequação da estratégia ao problema; e (3) a forma como os alunos avaliam o feedback visual emitido pelo computador.

Por exemplo, no episódio 5, os alunos escolhem adequadamente a ferramenta que lhes permite efetuar a translação, mas aplicam uma estratégia incorreta quando definem um vetor o que deixa a figura sobreposta. Seguidamente, tiram partido do feedback emitido pelo computador não validando a construção resultante.

5.1.3. Feedback Oral

Depois de uma análise cuidada e exaustiva das transcrições dos episódios, comecei a aperceber-me de que existiam determinadas características comuns no feedback oral entre alunos. Essas características possibilitaram-me definir três categorias que conseguem abarcar tipos de feedback oral presentes nos dados: (1) **Avaliação**, em que o aluno profere determinada afirmação em que avalia uma ação do seu par ou sua, confirmando ou não determinadas estratégias implementadas, resultados ou conclusões obtidas, corrigindo, ou dialogando sobre a validade de determinada construção ou estratégia. Por exemplo, quando André, no episódio 4, refere que o resultado obtido para a relação entre os comprimentos dos lados dos triângulos não é válida, indicando o valor esperado; (2) **Questionamento**, quando um aluno coloca uma determinada questão ao outro, ou quando entram em diálogo sobre determinado significado ou relação. Por exemplo, no episódio 4, quando os alunos dialogam sobre o facto de os ângulos se manterem iguais; e (3) **Informação**, quando o aluno dá informação através de respostas, estabelece conexões, refere possíveis estratégias a implementar, ou resultados obtidos, ou ainda situações em que o aluno revê ou relembra estratégias implementadas anteriormente. Por exemplo, no episódio 4, quando Lucas solicita a André que efetue o cálculo do comprimento que o lado do segundo triângulo deveria ter.

No entanto, dada a diversidade de emissões de feedback oral ocorridas, senti que esta categorização não era suficiente para descrever todas particularidades desse feedback. Por exemplo, surgem situações num mesmo episódio em que pode existir uma dupla, ou tripla, intenção do feedback oral, razão pela qual cada uma das três categorias anteriores precisa de ser ramificada. Assim decidi criar novas subcategorias para cada uma dessas categorias que, como as anteriores, fui adaptando, acrescentando e revendo à medida que analisava os dados:

5.1.3.1. Feedback Oral de Avaliação

O feedback oral de avaliação foi dividido nas subcategorias seguintes:

Feedback de Certificação: O aluno certifica a Ação do colega ou a sua própria como certa ou errada, confirmando ou refutando estratégias implementadas, resultados ou conclusões obtidas, sem referir o porquê. Exemplo: André, no episódio 6, mostra discordar de uma afirmação anterior de Lucas.

Feedback de Apreciação: O aluno faz uma apreciação da Ação do colega, ou da sua própria, no que concerne a construções, estratégias ou resultados obtidos, dando o seu ponto de vista. Exemplo: Lucas, no episódio 5, comenta a construção de André referindo que não resulta fazer a construção aleatoriamente.

Feedback de Verificação: Os alunos dialogam sobre a validade de determinada construção ou estratégia. Por exemplo, no episódio 5, os alunos entram em diálogo sobre a validade do ponto marcado por André de forma aleatória.

Feedback de Correção: O aluno corrige a linguagem do colega. Exemplo: André, no episódio 4, corrige a forma como Lucas se exprime, referindo que bastava dizer-lhe para mudar de direção.

5.1.3.2. Feedback Oral de Questionamento

O feedback oral de questionamento foi dividido nas subcategorias seguintes:

Feedback de Orientação: O aluno questiona sobre qual a estratégia a implementar, ou sobre determinado valor a utilizar. Exemplo: no episódio 4, Lucas questiona André sobre a estratégia a implementar e André questiona Lucas sobre qual o ponto a utilizar.

Feedback de Exploração: O aluno questiona, ou os alunos dialogam, sobre determinado significado ou relação. Exemplo: Lucas, no episódio 6, questiona André sobre a relação existente entre um conjunto de valores numéricos.

Feedback de Sondagem: O aluno deixa uma frase incompleta, para o colega, completar; ou o aluno questiona o outro, solicitando-lhe que articule, elabore, ou clarifique ideias relativas a determinada construção, relação, conjetura ou estratégia. Exemplo: Lucas, no episódio 6, refere parte de uma frase: "*A relação é que o maior…*".

5.1.3.3. Feedback Oral de Informação

O feedback oral de informação foi dividido nas subcategorias seguintes:

Feedback de Resposta: O aluno dá uma resposta direta de informação ao colega depois de questionado, ou depois de ele próprio questionar. Exemplo: Lucas, no episódio 6, refere o resultado da soma proposta por André.

Feedback de Estratégia: O aluno propõe estratégias a implementar, ou refere o resultado de uma estratégia por ele próprio implementada. Exemplo: André, no episódio 6, na procura da relação do teorema de Pitágoras, propõe como estratégia a análise dos quadrados dos quadrados dos catetos.

Feedback de Conexão: O aluno estabelece conexões com outras ideias, resultados ou tarefas realizadas anteriormente. Lucas, no episódio 7, estabelece a conexão com o resultado obtido anteriormente.

Feedback de Focagem: O aluno profere determinada informação que os ajuda a focarem-se em elementos chave ou aspetos da situação para que estes possam resolver o problema. Exemplo: Lucas, no episódio 1, refere que o triângulo tem de ter um ângulo de noventa graus.

Feedback de Revisão: O aluno interrompe para fazer uma revisão da estratégia implementada. Exemplo: André, no episódio 2, pede um tempo para voltar atrás na construção.

5.1.3.4. Construção de Significados a Partir do Feedback Oral.

À semelhança do que sucedeu para análise do feedback visual, também no caso do feedback oral optei por analisar a atividade dos alunos segundo o prisma da construção de significados a partir do feedback oral. A partir da revisão da literatura emergiram três conceitos que surgiram por diversas vezes nos trabalhos de investigação revistos e que decidi adaptar para o contexto deste estudo: (1) a **Negociação**, que ocorre quando os alunos estão a negociar um com o outro o significado do feedback do computador, relativo à validade de determinado resultado, construção ou propriedade, ou ainda, quando os alunos negoceiam a estratégia implementada ou a implementar, por vezes, recuando no processo de construção das figuras. Por exemplo, no episódio 2, perante a afirmação de Lucas de que iriam dar ao mesmo resultado, André sugere marcar o ângulo no sentido anti-horário; (2) a **Compreensão**, que ocorre quando um aluno mostra ou procura compreender determinado significado. Essa compreensão pode surgir na forma de: a) Argumentação: "A formulação de um argumento pode transparecer compreensão na medida em que construímos um enunciado com nossas próprias palavras em resposta ao enunciado de outro." (Duarte & Rezende, 2007, p.4). Por exemplo, no episódio 3, André afirma que desenhando os lados paralelos isso produz um triângulo maior que o dado, mas semelhante; (b) Procura de informação junto do seu par, outro aluno ou o professor, sobre: significados, estratégias implementadas ou a implementar, incluindo a perceção do feedback do computador, ou ainda, através da revisitação da tarefa. Por exemplo, no episódio 5, André questiona Lucas sobre a utilização da ferramenta *arco circuncircular (Três Pontos)* e Lucas volta alguns passos atrás na construção; e (3) a **Partilha**, que ocorre quando os alunos chegam à partilha de determinado significado ou estratégia (normalmente ligado ao feedback do computador, com a validação de determinada construção, ou estratégia a implementar). Por exemplo, no episódio 5, após um momento de negociação, os alunos ficam de acordo sobre a ornamentação do gato e sobre a forma como fazem a pavimentação. Na análise, incluirei nos momentos de partilha, situações em que os alunos apagam determinada construção, ou pelo contrário, quando continuam a construção ou a dão por concluída, por estar implícito que estão a partilhar o significado de que essa construção não é, ou é, adequada para resolver o problema.

5.2. Episódio 1: O Triângulo Retângulo

5.2.1. Apresentação da Tarefa

Este episódio está inserido numa tarefa de iniciação ao AGD. Esta é uma tarefa de produção de figuras e medição dos seus elementos. Neste tipo de tarefas, o ambiente de geometria dinâmica pode facilitar as ações sobre os objetos sem que isso altere a natureza da tarefa (Laborde, 2011). As características do *software* possibilitam que facilmente se ensaie várias estratégias, mas as estratégias de construção são semelhantes à utilização de régua, transferidor e compasso.

Num momento de adaptação dos alunos ao AGD, abordam-se alguns conceitos e construções matemáticas, como a construção e classificação de triângulos escalenos, isósceles e equiláteros. Entre outros, é abordado o conceito de triângulo retângulo que surge neste episódio. Para essa construção, dada a pertinência da utilização do GeoGebra, surge a possibilidade de os alunos aprofundarem as relações existentes num triângulo retângulo. Em particular, procura-se que os alunos construam ou reconstruam (no sentido de ampliarem ou aprofundarem) o significado de triângulo retângulo em termos das relações entre os elementos do triângulo: lados e ângulos. Abre-se a possibilidade de os alunos utilizarem o conceito de perpendicularidade para a construção do triângulo. Esse conceito pode surgir através da utilização da ferramenta

Reta Perpendicular. Para utilizar essa ferramenta os alunos devem selecionar um ponto por onde passe a reta perpendicular e uma reta, face à qual a nova reta será perpendicular. Na sequência, os alunos podem esconder as retas e aproveitar os pontos de interseção para construir o triângulo. Ao abordar o significado de esconder, em vez de apagar, os alunos podem aperceber-se da importância associada à hierarquia de construções, pois se apagarem as retas deixam de ter acesso aos vértices para a construção do triângulo solicitado na questão (3.1) da tarefa. Nessa questão é solicitada a construção de um triângulo retângulo que continue a ser retângulo mesmo quando os vértices são arrastados (Fig. 5.2).

3.1. Constrói um triângulo que se mantenha como triângulo retângulo quando os seus vértices são arrastados. Descreve como procedeste.

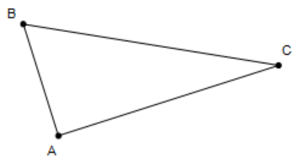


Fig. 5.2. Enunciado de construção do triângulo retângulo (Tarefa TQB; questão 3.1)

De salientar que, apesar de os alunos estarem a iniciar a sua adaptação ao programa, não é dada nenhuma indicação de como proceder, nem de ferramentas ou menus a utilizar. Esta opção de não inclusão vem criar algumas dificuldades acrescidas aos alunos, mas por outro lado, dá-lhes a possibilidade de que surjam várias hipóteses de resolução e exploração, não só do programa em si, mas também de outros conceitos matemáticos associados às estratégias implementadas pelos alunos.

5.2.2. Descrição do Episódio

Ao iniciar a resolução da tarefa, Lucas toma de imediato controlo do computador, mas mais tarde André sugere que o façam à vez, ao longo da resolução das várias questões. No entanto, André acaba por assumir predominantemente o controlo do computador.

Como se pode verificar (Fig. 5.2), a questão 3.1. foi ilustrada com um triângulo escaleno retângulo no vértice A.

André começa a construir o triângulo depois de Lucas ter referido que teria de ter um ângulo de noventa graus. A sua primeira ação foi rodar o ponto A com uma amplitude de noventa graus, com centro em B, usando a ferramenta “rotação (objeto, centro, amplitude)”. Com esta ferramenta, obtiveram um triângulo ABA’ retângulo em B e isósceles.

Os pontos resultantes constituem o feedback visual da *ação* do aluno que aproveita as características do *software* (Figura 5.3).

Figura 5.3. Ângulo com uma dada amplitude

Lucas reage de imediato, fazendo notar que o ângulo de noventa graus deveria ter o vértice em A (tal como a figura 5.2 apresenta) e oferece-se para realizar outra construção, mas André não aceita e apaga a construção. Recomeça o processo de construção, marcando os três pontos A, B e C utilizando a ferramenta “polígono”. De seguida, arrastando os vértices tenta obter um ângulo de noventa graus. Entretanto, com o intuito de compreender a forma como o ângulo foi feito, Lucas coloca a André algumas questões. Lucas quer assegurar-se de que o ângulo se mantém inalterável. Os dois alunos dialogam sobre esse facto e Lucas percebe que o ângulo se altera quando os vértices são arrastados. Depois do feedback visual do computador, André aceita o facto de que não resolveu o problema, concordando que o ângulo deveria manter-se sempre com uma amplitude de noventa graus.

Lucas sugere que André deveria recuar e repetir o procedimento inicial, marcando um ângulo de noventa graus, utilizando dois dos vértices do polígono elaborado anteriormente. Seguidamente, ele arrasta um dos vértices do polígono anterior para que o lado AB coincida com um dos lados do triângulo retângulo, como mostra a figura 5.4.

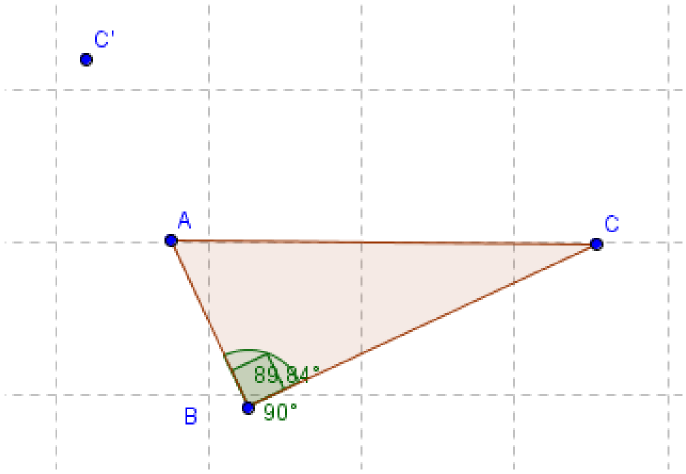


Figura 5.4. Coincidindo com o lado AB

Lucas continua a levantar questões acerca do resultado e insiste em querer ter a certeza. André responde que está bem feito, mas Lucas desfaz a última ação de André no computador e repete o procedimento de arrastar o vértice.

Lucas: Espera, eu vou ver.
André: Não. Está bem.
André: Bem, fizeste o triângulo outra vez.
Lucas: É 89.84. Não é 90!
André: Porque é que apagaste o outro?!
Lucas: Anda, André!
André: Olha, isto é como devias fazer. Usa a tua cabeça.

André mede o ângulo e obtém 90.42. Tenta arrastar de novo e consegue obter 90 graus. Neste momento, ambos concluem que não conseguiram resolver o problema porque o ângulo continua a alterar-se.

Lucas: Tenho uma ideia. Posso? [Manipula o computador e opta por mostrar os eixos].
Lucas: André, porque é que não pensámos nisto? [Constrói um triângulo retângulo colocando os vértices em pontos da grelha].

Lucas: A forma é a mesma (referindo-se ao triângulo dado na ficha da tarefa).
André: Não, não é.
Lucas: Sim, é.

Ao tentar convencer o seu colega, Lucas decidiu mostrar que o triângulo podia rodar mantendo, mesmo assim, a sua forma. Construiu uma circunferência com centro no vértice A do triângulo retângulo, passando pelo vértice C como mostra a figura 5.5. Seguidamente, Lucas arrastou o ponto C e verificou que a sua conjetura estava errada, porque o feedback visual do computador mostrou que o ângulo mudou (Figura 5.5).

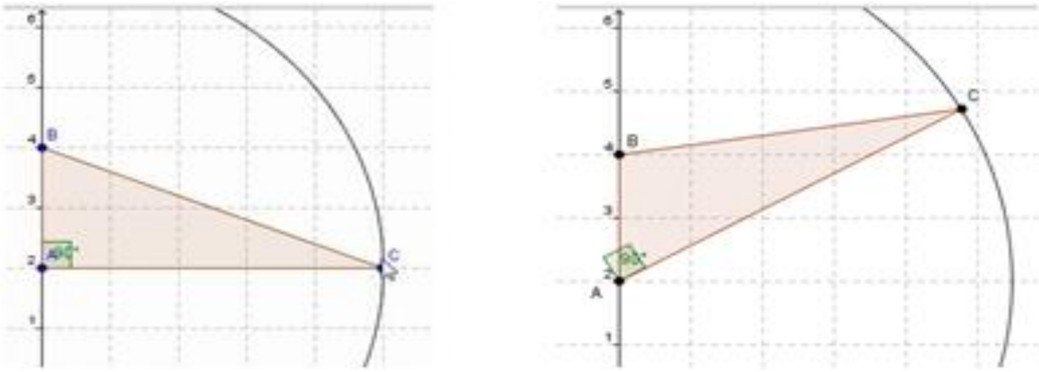


Figura 5.5. Uma tentativa para rodar o triângulo

Quando isto aconteceu, Lucas e André sentiram-se incapazes de resolver a questão e decidiram chamar o professor no sentido de pedir ajuda. No entanto, pouco tempo depois Lucas afirma:

Lucas: Agora eu sei! André, sabes qual é o desafio? O desafio é arrastar [os vértices] e o ângulo continuar a ser de 90º!

Nesse momento, o professor aproximou-se dos alunos e perguntou-lhes qual a característica dos segmentos de reta que formavam os lados do triângulo retângulo. A questão colocada pelo professor ajudou os alunos a pensar sobre a perpendicularidade e abriu caminho à construção baseada na criação de duas retas perpendiculares para definir dois lados do triângulo retângulo.

5.2.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta, os alunos passaram por dois objetivos: (1) A construção de um triângulo com um ângulo interno de 90º; (2) A construção robusta de um triângulo retângulo.

Seguidamente aproveito para dividir o episódio segundo esses objetivos e abordar os pontos-chave sob a lente da codificação dos ciclos de feedback referidos anteriormente: fases do feedback, estratégias de construção e de arrastamento, feedback oral entre alunos e construção de significados.

(1) Construção de um triângulo com um ângulo interno de 90º

André começa por construir um *ângulo com uma dada amplitude*: 90 graus. Esta ação pode ser vista como sinónimo da compreensão de que um dos ângulos internos do triângulo teria de ter obrigatoriamente uma amplitude de noventa graus. Nesse sentido Lucas confirma essa informação através da emissão de feedback oral, levando André a focar-se nesse conceito.

André abandona essa estratégia e opta então por uma das ferramentas adequadas para resolver o problema: *Rotação (objeto, centro, amplitude)*. Seguidamente utiliza uma estratégia correta, rodando o ponto A noventa graus, com centro em B. O computador emite então feedback visual de um triângulo ABA' retângulo em B e isósceles. Apesar da construção obtida ser geométrica, isto é, possuir todas as propriedades requeridas, Lucas emite feedback oral, apreciando o feedback visual emitido pelo computador, mas fá-lo de forma incorreta. Lucas faz notar que o ângulo de noventa graus deveria ter o vértice em A (tal como mostra a figura 5.1 com o enunciado da tarefa). André recebe e aceita o feedback oral de Lucas, partilhando a opinião do colega e apaga a construção.

De referir que tanto o conceito de triângulo retângulo como o de rotação não eram conceitos desconhecidos dos alunos, por terem sido abordados em anos letivos anteriores. Apesar de não ter previsto inicialmente a utilização de rotações, os alunos utilizaram uma estratégia que envolveu uma rotação. E através da implementação desta estratégia poderiam ter concluído logo o problema. No entanto, surgiu o entrave de estarem "agarrados" à figura inicial, pela atribuição das letras representativas dos pontos. Trata-se de uma situação que pode ser considerada como um exemplo prototípico e que tem sido referenciado noutros estudos (e.g. Junqueira, 1995; Coelho, 1996). Essa capacidade de generalização pelos alunos ainda não surge nesta fase do estudo. Aliado a esse facto, surge o denominado processo de instrumentação. Os alunos ainda se estão a habituar aos instrumentos disponibilizados pelo *software*. Numa fase mais adiantada facilmente poderiam ter “renomeado” os pontos, alterando assim as letras representativas dos pontos.

(2) A construção robusta de um triângulo retângulo

Na sequência, André escolhe a ferramenta *Polígono* e executa a ação de construir um polígono de 3-lados e através de um arrastamento guiado arrasta os vértices para formar um ângulo reto (por tentativa e erro). O computador emite feedback visual mostrando uma figura idêntica à requerida. Ao receber esse feedback visual os alunos reconhecem a analogia. Lucas emite feedback oral, sondando o seu colega com o intuito de compreender a forma como o ângulo foi feito. Através de um arrastamento divagante-teste, Lucas percebe que o ângulo se altera quando os vértices são arrastados. Encetando um processo de emissão e receção de feedback oral, os alunos exploram as ideias através do questionamento, negociando sobre a alteração da amplitude do ângulo. É através da receção de feedback oral que André partilha da avaliação do feedback visual emitido pelo computador que Lucas realizou de forma correta.

Lucas emite então feedback oral, informando sobre a estratégia a seguir: não apagar a figura e usar a ferramenta *ângulo com uma dada amplitude* como já tinham realizado anteriormente. André recebe esse feedback oral, aceitando a estratégia sugerida, prossegue então com a ação de realizar uma construção empírico-geométrica: constrói um ângulo reto utilizando dois vértices do polígono anterior e tenta ajustar o triângulo ao ângulo reto fazendo um arrastamento guiado de um dos vértices. Apesar da escolha da ferramenta ser adequada, a estratégia de arrastamento implementada foi incorreta. O computador emite feedback visual mostrando, para o mesmo vértice, dois ângulos: um reto e o outro quase reto. Depois de receber esse feedback visual Lucas emite feedback oral de carácter apreciativo, questionando a construção de André. Este, por sua vez, responde de forma apreciativa certificando a sua própria construção. Os alunos envolvem-se mutuamente num processo de negociação, com emissão e receção de feedback oral, com a intencionalidade de verificar e apreciar a validade da construção. Durante esse diálogo André também questiona Lucas, sondando a razão que o levou a apagar o triângulo, ao que Lucas responde, informando que irá implementar uma estratégia de arrastamento que depois acaba por não funcionar. Ao procederem a uma nova ação de arrastamento divagante-teste, os alunos avaliam de forma correta o feedback visual emitido pelo computador, partilhando a ideia de que a construção não era a requerida.

Lucas emite feedback oral, informando estar na posse de uma nova estratégia que ele próprio executa. Apesar de André receber o feedback oral com um pequeno protesto inicial, Lucas avança para uma ação de construção empírica usando as ferramentas *grelha* e *polígono* que não são adequadas para resolver o problema. O computador emite feedback visual mostrando um triângulo retângulo fora da posição desejada. Lucas recebe esse feedback visual, compreendendo que independentemente da posição a sua forma é correta. Lucas aprecia a sua própria construção, certificando-a como correta. Os alunos entram num novo processo de negociação, emitindo e recebendo feedback oral. Esse diálogo centra-se em expressões de apreciação e verificação da validade da construção obtida. Seguidamente, com um arrastamento limitado-teste, Lucas testa o triângulo sobre o qual tinha construído uma circunferência de forma a conter o vértice a arrastar. O computador emite feedback visual que mostra um triângulo que se vai modificando. Os alunos recebem esse feedback visual, partilhando a perceção de que o ângulo se vai alterando.

Os alunos decidem então solicitar ajuda do professor, mas antes de essa ajuda chegar, Lucas emite feedback oral, focando-se na informação de que o desafio consistia em manter o ângulo de noventa graus quando se arrastam os vértices, mostrando assim compreender o foco do problema.

Depois de o professor aludir ao conceito de perpendicularidade, os alunos concluem o problema com a escolha da ferramenta *reta perpendicular*, utilizando uma estratégia correta, finalizam uma construção geométrica e apreciam corretamente o feedback visual emitido pelo computador, como sendo a figura requerida.

Importa notar que a estratégia utilizada inicialmente pelos alunos de marcarem um ângulo de amplitude “fixa” de 90º poderia ter resultado caso tivessem baseado a construção do triângulo nos três pontos de marcação do ângulo, em vez de tentarem arrastar o triângulo para se ajustar ao ângulo.

De referir também que os alunos só consideraram a estratégia associada à perpendicularidade dos lados que formam o ângulo reto quando o professor forneceu uma pista nesse sentido, conseguindo assim concluir a tarefa com sucesso.

De notar ainda que a noção de perpendicularidade é inerente à construção do triângulo retângulo com régua e compasso. De facto, existe uma intencionalidade associada à criação de um *software* e das suas ferramentas. Essa intencionalidade cruzada com a intencionalidade do utilizador "condiciona" a(s) forma(s) de construção e, em especial, a(s) forma(s) de obter construções resistentes, que mantêm as suas propriedades quando arrastadas. Neste caso, só com a ajuda do professor, a intencionalidade dos alunos contemplou a estratégia do recurso a retas perpendiculares. O conceito de triângulo retângulo que os alunos possuíam à partida, apesar de correto, não tinha a abrangência necessária para que os alunos recorressem, de forma autónoma, à utilização das retas perpendiculares. A utilização do AGD, nesta tarefa em particular, permitiu desvendar lacunas num conceito que facilmente passariam despercebidas noutro ambiente de ensino-aprendizagem.

5.2.3.1. Análise e Caraterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

No percurso realizado pelos alunos, ao nível da sequência de estratégias de construção e arrastamento, é possível inferir uma deslocação de um nível teórico para um nível perceptual e vice-versa (Arzarello *et al.*, 2002). Com efeito, os alunos começaram por uma Construção Geométrica (nível teórico), não efetuando qualquer arrastamento posterior. Seguidamente, entraram num processo descendente para uma Construção Empírica (nível perceptual), voltando a um processo ascendente para uma Construção Empírico-Geométrica, ambas seguidas de Arrastamentos Guiados e Arrastamentos Divagante-Teste. Por fim, voltaram a um processo descendente com uma Construção Empírica seguida de um arrastamento que é simultaneamente limitado e de teste, para concluírem, depois da ajuda do professor, com uma Construção Geométrica.

Ao contrário de outros, neste episódio, os processos ascendentes e descendentes (Saada-Robert, 1989; Olivero, 1999; Arzarello *et al*., 2002) descritos anteriormente para as construções surgem de forma transparente:

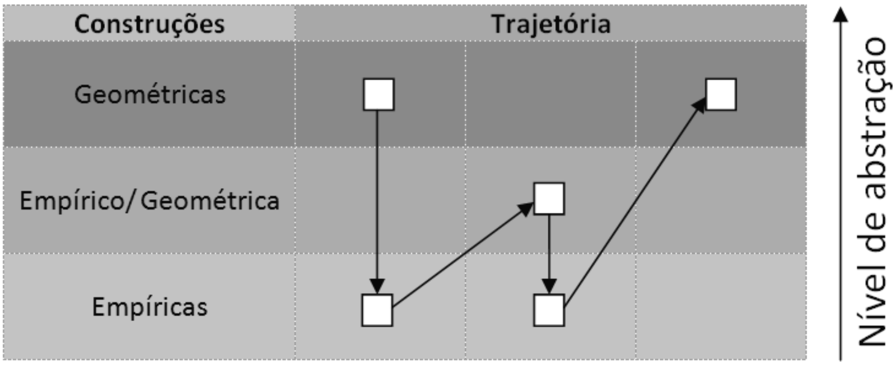


Fig. 5.6. Trajetória de construções do episódio 1

Estabelecendo um paralelo para os arrastamentos, obtém-se o esquema da figura 5.6, onde também se nota uma variação entre processos ascendentes e descendentes.

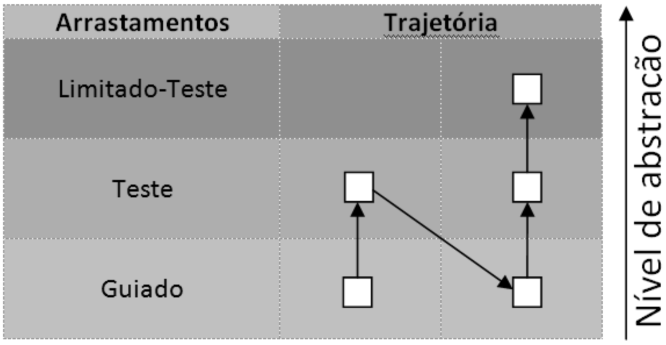


Fig. 5.7. Trajetória de arrastamentos do episódio 1

Construção de significados a partir do feedback visual

Na construção de significados a partir do feedback do computador, a sequência de várias ferramentas experimentadas e depois rejeitadas deixa transparecer o processo de experimentação instrumental que guiou os alunos neste episódio. Neste processo, os alunos utilizam ferramentas que não são adequadas para resolver a tarefa, mas também utilizam ferramentas que são potencialmente adequadas. No entanto, à exceção da última, as ferramentas potencialmente adequadas acabam por ser rejeitadas por dois motivos: ou por serem utilizadas estratégias incorretas ou por serem avaliadas de forma incorreta face ao feedback visual emitido pelo computador. Essas avaliações incorretas do feedback visual emitido pelo computador podem ficar a dever-se ao facto de os alunos estarem a adaptar-se ao AGD.

5.2.3.2 Análise e Caraterização do Feedback Oral

Ao longo deste episódio surgem pequenos ciclos de emissão e receção de feedback oral em forma de pequenos diálogos, normalmente impulsionados pelo feedback visual emitido pelo computador.

Tipos de feedback oral

Os alunos intervieram oralmente de forma frequente e diversificada ao longo do episódio. Ao todo, sinalizei sete subcategorias distintas, sendo a mais frequente o Feedback de Estratégia, em que os alunos referem a estratégia a implementar. Saliento ainda a categoria de Feedback de Focagem, que surge em situações em que Lucas informa sobre uma determinada construção a realizar ou sobre o objetivo que devem atingir. Para além disso, emergem as categorias de Feedback de Apreciação, quando Lucas aprecia a construção ou o resultado obtido, secundando essa apreciação com a sua opinião; Sondagem, quando um dos alunos questiona o outro sobre o porquê de uma construção ou duma estratégia; Certificação, quando os alunos certificam as suas próprias construções e, finalmente, a Validação que ocorre quando os alunos dialogam sobre a validade das construções. O facto de a subcategoria mais representativa ser o Feedback de Estratégia deve-se à ocorrência das várias sugestões de estratégias que estiveram na base das várias experiências realizadas pelos alunos. Deste modo, uma das categorias mais representativas é a Informação (na qual está integrada a subcategoria de feedback de estratégia) conjuntamente com a categoria de Avaliação. Esta surge distribuída de forma mais uniforme pelas subcategorias de apreciação, certificação e verificação, denotando uma preocupação premente em avaliar a construção do par, justificando, ou em certificar as suas próprias construções, ou ainda, em verificar as construções através do diálogo. Essa preocupação parece estar mais presente nesta fase inicial dadas as incertezas com que os alunos percecionam o feedback visual emitido pelo computador.

Construção de significados a partir do feedback oral

Neste episódio surgiram quatro momentos de Partilha em que os alunos partilharam a ideia de que a construção realizada não servia o propósito da tarefa. Esses momentos de Partilha são interpolados por momentos de Compreensão e Negociação. Os momentos de Compreensão, retratados neste episódio, estão mais ligados à categoria de questionamento, pois são momentos em que Lucas argumenta ou questiona André, com o intuito de compreender a forma de percecionar o feedback visual emitido pelo computador ou os procedimentos realizados. Por sua vez, os momentos de Negociação surgem em diálogos entre os alunos ou quando estes recuam no processo de construção da figura, com o intuito de negociar a estratégia a implementar; neste caso na categoria de Questionamento é mais evidente a subcategoria de feedback de exploração, onde surgem vários diálogos nos quais os alunos procuram chegar à partilha de significados. Esses diálogos também são resultado de os alunos ainda se encontrarem numa fase de experimentação do AGD e mostrarem opiniões contrárias sobre a validade das construções e a forma como percecionam o feedback visual emitido pelo computador. Assim, neste episódio, o tipo de feedback oral que denominei por Questionamento, apesar de ser o menos representativo, tornou-se decisivo tanto para permitir a Compreensão como a Negociação.

5.2.4. Síntese

Desde o início da primeira construção que efetuam, constata-se que os alunos têm presente a noção de que um dos ângulos internos do triângulo tem de ter a amplitude de noventa graus. Por esta razão, para a construção inicial do triângulo, os alunos optam pela implementação de uma estratégia que envolve o conceito de rotação. De referir que tanto o conceito de triângulo retângulo como o de rotação, não eram conceitos desconhecidos dos alunos, por terem sido abordados em anos letivos anteriores. Apesar do conceito de rotação não estar previsto inicialmente, como conceito a rever, os alunos utilizaram-no e poderiam ter obtido a resposta correta se não estivessem tão "agarrados" à figura inicial, pela atribuição das letras representativas dos pontos. Aliado a esse facto surge o denominado processo de instrumentação. Os alunos ainda se estão a habituar aos instrumentos disponibilizados pelo AGD. Facilmente poderiam ter "renomeado" os pontos, alterando assim as letras representativas dos mesmos. No seguimento acabam por abandonar a estratégia, implementando outras, em particular, recorrendo à utilização das ferramentas *Ângulo com uma Dada Amplitude* e *Polígono*, quando marcam um ângulo de amplitude "fixa" 90º. Esta estratégia poderia ter resultado se tivessem baseado a construção do triângulo nos três pontos de marcação do ângulo, em vez de tentarem arrastar o triângulo para o ângulo. De referir que os alunos só consideraram a estratégia associada à perpendicularidade dos lados que formam o ângulo reto quando o professor forneceu uma pista nesse sentido, conseguindo assim concluir a tarefa com êxito. De notar ainda que, a noção de perpendicularidade é inerente à construção do triângulo retângulo com régua e compasso. De facto, existe uma intencionalidade associada à criação de um programa e das suas ferramentas. Esta intencionalidade do software cruzada com a intencionalidade do utilizador "condiciona" a forma de construção e, em especial, as formas de chegar às construções resistentes, que mantêm as suas propriedades quando arrastadas. Neste caso, a intencionalidade dos utilizadores não contemplou a estratégia das retas perpendiculares. O conceito de triângulo retângulo que os alunos possuíam à partida, apesar de correto, não tinha a abrangência necessária para cruzar com a intencionalidade inerente à ferramenta, de forma satisfatória.

Quanto ao papel do GeoGebra, para além de permitir o manuseamento de objetos geométricos e a experimentação, a sua utilização nesta tarefa permitiu desvendar lacunas num conceito que facilmente passariam despercebidas caso não tivesse sido utilizado um ambiente de geometria dinâmica.

5.3. Episódio 2: O Peixe

5.3.1. Apresentação da tarefa

Este episódio é parte inicial de uma tarefa (TQ3), que contempla a construção de um triângulo (parte da cabeça de um peixe), usando rotações de segmentos com amplitudes de 40 e 60 graus. Esta é uma tarefa em que o ambiente de geometria dinâmica facilita as ações materiais, mas que não altera a tarefa para os alunos

(Laborde, 2011). À semelhança do episódio anterior, esta tarefa consiste na produção de figuras e na medição dos seus elementos. As estratégias de construção são semelhantes à utilização de régua, transferidor e compasso, mas o ensaio de estratégias é facilitado pelas características do *software*. Este episódio também está relacionado com a construção de um triângulo (Questão 1 - Tarefa TQ3), sendo que nesta caso são dados dois ângulos de 40 e 60 graus, respetivamente. O problema possibilita que os alunos reconstruam o significado de ângulo associado às rotações e requer a capacidade de o aplicar na construção de um triângulo. Nesta fase, é natural que surjam algumas dificuldades em articular o raciocínio de forma a integrar o significado atribuído às rotações na construção do triângulo requerido. Ao utilizar a ferramenta *Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)* o aluno é levado a dividir o conceito em entidades que entram na definição de rotação (centro e amplitude) e depois optar por uma estratégia com a qual consiga aplicar duas rotações consecutivas para determinar um triângulo. O procedimento final de esconder o que não necessitam, para depois formar o triângulo, já deve estar, nesta fase, internalizado.

Parte 1 – Desenho do peixe

1. Para desenhar um peixe começa por desenhar o segmento de reta AC, seguidamente roda-o 60º, depois roda o segmento de reta resultante AB 40º. Desenha o triângulo resultante escondendo o resto. Marca o ponto D e faz passar por ele uma paralela a AC.

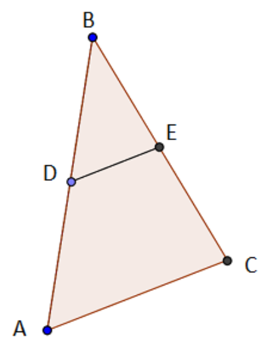


Figura 5.8. Enunciado da construção do triângulo

Este triângulo irá depois integrar a construção de uma figura análoga a um peixe, formado por vários triângulos:

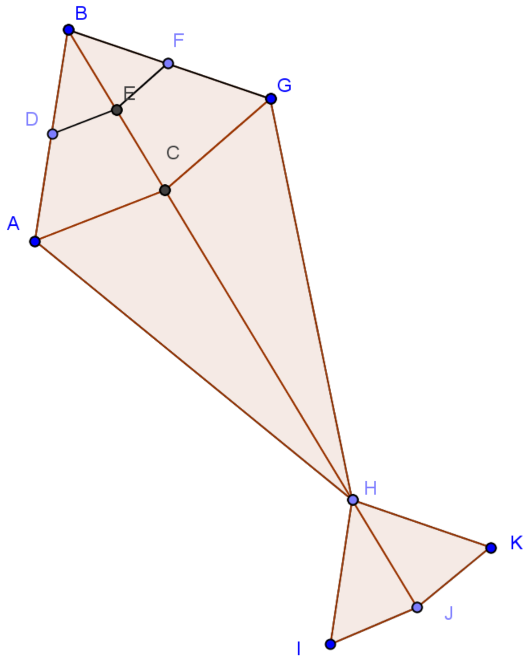


Figura 5.9. Figura do enunciado da construção do peixe

Este episódio reporta-se à construção do primeiro desses triângulos. O objetivo principal é construir um triângulo dadas as amplitudes de dois dos seus ângulos internos.

De salientar que, à semelhança do episódio anterior, apesar de os alunos estarem num período inicial de adaptação ao programa, não é dada nenhuma indicação de como proceder a nível de ferramentas ou menus a utilizar. No entanto, é indicada, implicitamente, a utilização de rotações para a construção de um triângulo com dois dos ângulos internos de amplitudes 40º e 60º, e alguns procedimentos geométricos.

6.3.2. Descrição do Episódio

Lucas começa por construir um segmento de reta AC. Seguidamente escolhe a ferramenta de medição de ângulos. André opõe-se e os alunos optam pela ferramenta de marcação de *ângulo com uma dada amplitude*. André relê o enunciado e dá a sua opinião:

André: Não, acho que não é assim.
Lucas: Deve ser aqui. Olha. (Apontando para o ponto A' para formar o triângulo.)

Com a ferramenta de construção de polígonos, Lucas constrói um triângulo, arrastando-o, mas não tem em conta a amplitude dada para o outro ângulo, como mostra a figura seguinte.

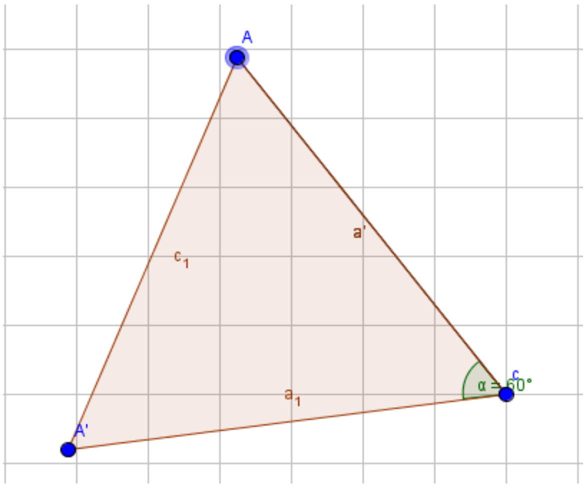


Figura 5.10. Construção do triângulo com um ângulo de 60º

Apercebendo-se que não tinham obtido o resultado desejado, os alunos decidem apagar a figura e recomeçar. Os alunos questionam-se mutuamente de como fazer uma rotação, mas sem chegarem a uma conclusão. Lucas constrói um segmento de reta e utiliza a ferramenta de medição de ângulo. André opõe-se novamente. Lucas volta atrás e volta a utilizar o *ângulo com uma dada amplitude*, como mostra a figura (5.11).

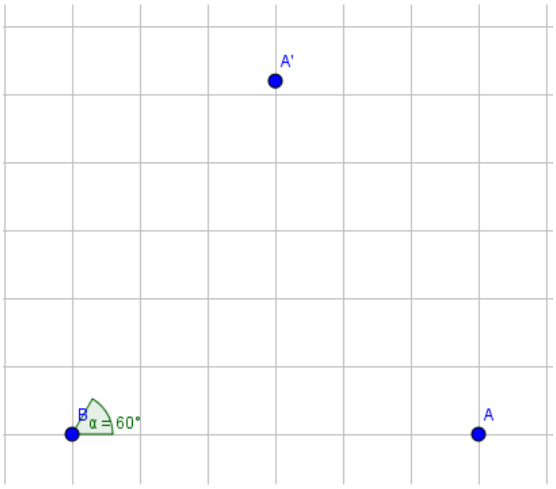


Figura 5.11. Estratégia do ângulo com uma dada amplitude

Seguidamente Lucas questiona André:

Lucas: E agora?
André: Segmento de reta. (Indicando a Lucas que deveria unir os pontos).

Lucas utiliza novamente a ferramenta de *ângulo com uma dada amplitude*, mas esquece novamente que seria possível a construção do terceiro vértice do triângulo na interseção dos segmentos de reta, como mostra a figura seguinte.

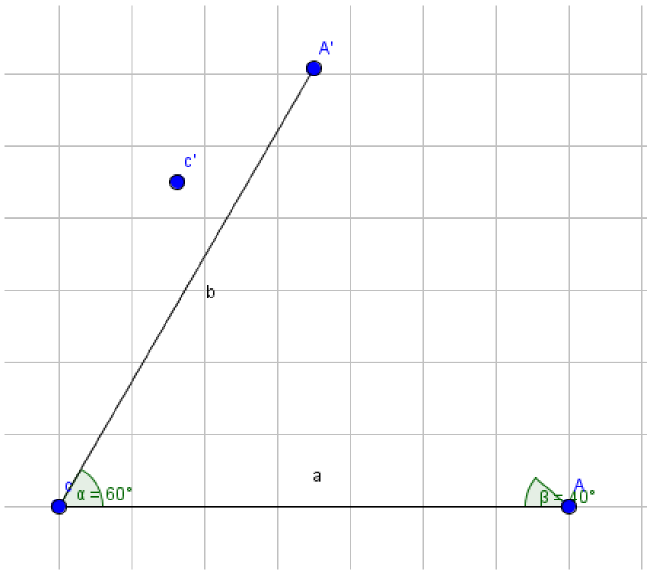


Figura 5.12. Estratégia dos dois ângulos com uma dada amplitude

Os alunos trocam de papéis, passando André a manipular o computador. André reinicia a construção, voltando a repetir a mesma estratégia, Lucas faz um reparo:

Lucas: Vamos dar ao mesmo.
André: Anti-horário. (Sugerindo que invertessem o sentido da marcação do ângulo)

André marca o ângulo no sentido anti-horário. Mas deparam-se com uma situação aparentemente irresolúvel, como mostra a figura seguinte.

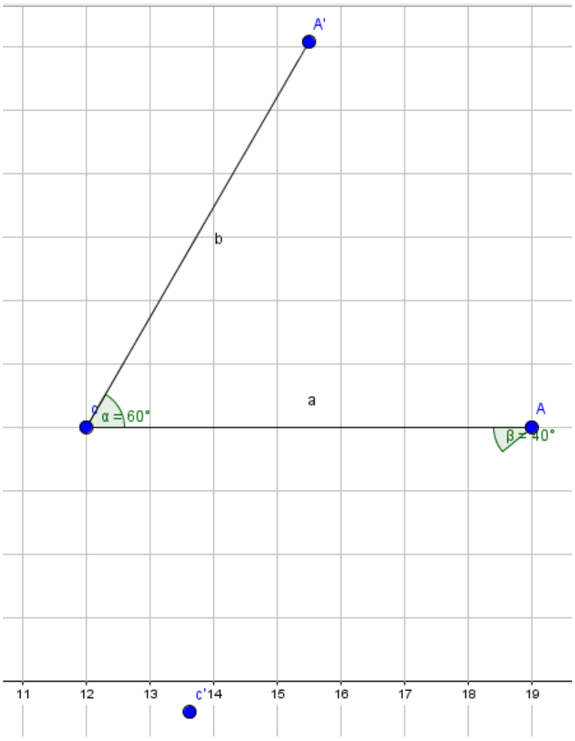


Figura 5.13. Estratégia com sentido anti-horário

Entretanto, outro aluno da turma indica-lhes a localização da ferramenta da rotação. André apaga a última construção que tinha feito e tenta utilizar a ferramenta da rotação. No entanto, os alunos não reparam na indicação dada pela ferramenta de que precisam de indicar o objeto, centro e amplitude da rotação. André faz uma nova tentativa, desta vez beneficiando do feedback proporcionado pelo computador e executa duas rotações: selecionando primeiro o objeto (segmento de reta), depois o centro de rotação (uma das extremidades do segmento de reta) e com as amplitudes de 40 e 60 graus, como mostra a figura seguinte.

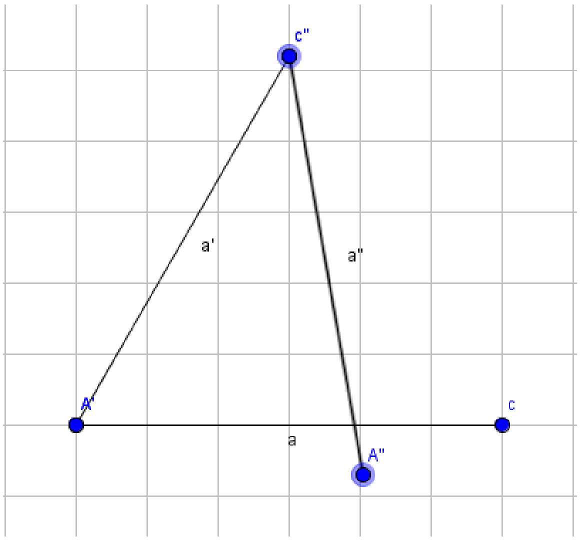


Figura 5.14. Estratégia com rotações

Apesar de André ter construído um triângulo, os alunos não identificam o terceiro vértice como sendo o ponto da interseção de dois dos segmentos de reta que servem de suporte aos lados do triângulo. Depois de observar a figura resultante, Lucas exclama:

Lucas: Vês, vimos dar outra vez a isto!
André: Espera.

André volta atrás até à segunda rotação.

Lucas: É 45, não é?
André: Não, é 40.
Lucas: Já tenho uma ideia.

Os alunos decidem apagar o trabalho realizado e Lucas volta a interagir com o computador, recorrendo à ferramenta *ângulo com uma dada amplitude*, para obter os dois ângulos dados, como novamente é ilustrado na figura 5.12. Depois, por arrastamento, faz sobrepor um triângulo construído com a ferramenta de construção de polígonos. Em seguida utiliza a ferramenta de construção de retas paralelas para dar continuidade ao problema, construindo uma paralela à base do triângulo.

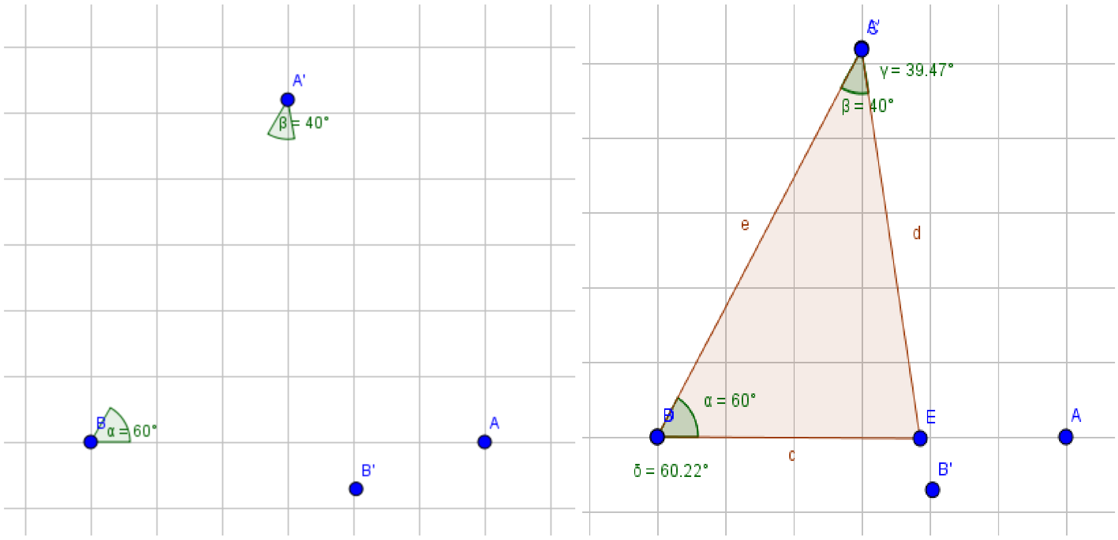


Figura 5.15. Estratégia dos dois ângulos com uma dada amplitude com arrastamento do triângulo

Depois de marcar a reta paralela à base, Lucas exclama:

Lucas: É o D!
André: Mas é mais abaixo.
Lucas: Não interessa, desde que este dê, e este dá. (Referindo-se aos ângulos).
André: Agora faz copiar, colar.
Lucas: Espera aí, primeiro vou tentar… (Volta a medir o ângulo e tenta arrastar para dar o valor exato do ângulo).

Os alunos decidem apagar novamente. Por fim, Lucas faz uma rotação de 60 graus seguida de uma de 40. Ficando com um triângulo com segmentos de reta que se prolongam, à semelhança da figura 5.14. No seguimento da imagem Lucas reage:

Lucas: Ah, agora este dá 60 e este 40.
André: Está torto.
Lucas: Não interessa. (Apaga os segmentos de reta).
André: Mas se fizermos assim depois não dá para fazer.
Lucas: Dá sim, dá.(Une os vértices do triângulo com segmentos de reta).

Deste modo, os alunos concluíram a construção do triângulo e puderam continuar a tarefa.

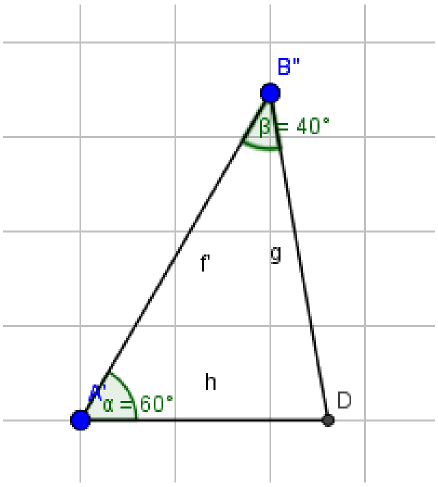


Figura 5.16. Triângulo final

5.3.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta, os alunos passaram por dois objetivos: (1) A construção de um triângulo com um ângulo interno de 60º. (2) A construção de um triângulo com dois ângulos internos de 60º e 40º. Seguidamente irei dividir o episódio segundo esses objetivos e abordar os pontos-chave do episódio sob a lente da codificação dos ciclos de feedback referidos anteriormente: fases do feedback, estratégias de construção e de arrastamento, feedback entre alunos e construção de significados.

(1) Construção de um triângulo com um ângulo interno de 60º

Apesar de ser indicado que devem rodar o segmento de reta, os alunos optam por utilizar outras ferramentas. Lucas começa por realizar uma construção empírica: constrói um segmento de reta e escolhe a ferramenta *ângulo*, não adequada para resolver o problema. Esta ação é secundada pela emissão de feedback oral de André de apreciação e certificação, opondo-se à escolha. Lucas recebe esse feedback e de forma correta, mostra partilhar a ideia, apagando a construção.

André passa à ação, utilizando a ferramenta *ângulo com uma dada amplitude* e efetua uma construção geométrico-empírica. Lucas foca-se na compreensão do enunciado do problema e ao receber o feedback visual emitido pelo computador, emite feedback oral, informando que não concorda com a construção. Inicia-se assim um processo de negociação pois, ao receber esse feedback, Lucas também decide informar, fornecendo a estratégia a seguir e indicando a localização do terceiro ponto. Aparentemente os alunos partilham a ideia de prosseguir com a estratégia incorreta proposta por Lucas. Este aluno passa à ação com uma construção empírica: utiliza a ferramenta *polígono* para construir um triângulo. Seguidamente, efetua um arrastamento guiado nos vértices para enquadrar o ângulo. O computador emite feedback visual mostrando apenas a amplitude de um ângulo de 60º justaposto a dois dos lados do triângulo. Os alunos rececionam e avaliam o feedback visual emitido pelo computador de forma correta, compreendendo que a construção não está conforme o que era requerido.

Os alunos emitem e recebem feedback oral, questionando-se mutuamente, tentando explorar e compreender como fazer uma rotação, aparentemente sem chegar a nenhuma conclusão.

Lucas prossegue com nova ação, utiliza as ferramentas *ângulo* e *segmento de reta* numa construção empírica. Face ao feedback visual emitido pelo computador André aprecia e não certifica a construção de Lucas. Os alunos partilham a ideia de que a escolha da ferramenta não foi a adequada para resolver o problema.

(2) Construção de um triângulo com os ângulos internos de 60º e 40º

Lucas volta à ação utilizando a ferramenta *ângulo com uma dada amplitude*, para marcar um ângulo de amplitude fixa de 60º. Segue-se um momento de emissão e receção de feedback oral entre os alunos. Primeiro, Lucas questiona André, com a intencionalidade de se orientar e compreender como implementar uma nova estratégia. André responde, informando Lucas que deve seguir a estratégia de unir os pontos. Lucas volta à ação e utiliza novamente a ferramenta *ângulo com uma dada amplitude*, para marcar um novo ângulo fixo de 40º. Para chegar a essa construção geométrica o aluno seguiu uma estratégia correta que poderia permitir resolver o problema. O computador emite feedback visual no qual aparece o terceiro ponto necessário para concluir a construção. No entanto, na receção de feedback visual emitido pelo computador os alunos avaliam de forma incorreta esse feedback, partilhando a ideia de que a construção não é válida.

André passa à ação, repetindo a construção geométrica anterior. Ao receber o feedback visual do computador, Lucas emite feedback oral de apreciação ao referir que a figura do André estaria igual à sua.

Segue-se um momento de negociação onde André emite feedback oral informando da estratégia a implementar: utilizar o sentido anti-horário para a marcação do segundo ângulo. Esta estratégia é incorreta para resolver o problema. O feedback visual emitido pelo computador mostra uma construção com o surgimento de um ponto exterior ao potencial triângulo, localizado na parte de baixo do ecrã. Os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador e partilham o significado de que a construção não resolve o problema.

André consegue localizar a ferramenta *Rotação (Objeto, Centro, Amplitude),* beneficiando da informação de focagem vinda de outro aluno da turma. Depois tenta utilizar a ferramenta, aplicando-a num segmento de reta, mas o feedback visual emitido pelo computador não mostra qualquer alteração. Ao receber esse feedback visual, os alunos percecionam e partilham a ideia da existência de uma possível falha na utilização da ferramenta. Para compreender como utilizar a ferramenta os alunos tiram proveito da informação contida no feedback visual emitido pelo computador. Nomeadamente, tal acontece quando André toma a ação de colocar o cursor por cima da ferramenta indicando a sequência a selecionar: "Objeto (a rodar) – Centro (da rotação) – Amplitude (da rotação)". André passa à ação, aplicando duas vezes as rotações, com uma construção geométrica. O computador emite feedback visual mostrando um triângulo formado por três segmentos de reta que incluem os lados do triângulo, mas sem o terceiro vértice assinalado. Lucas emite feedback oral de apreciação, indicando novamente que a nova construção de André foi dar ao mesmo que tinham anteriormente, não identificando o ponto de interseção. Assim, os alunos partilham da mesma ideia, não interpretando corretamente o feedback visual emitido pelo computador.

André emite feedback oral de informação com a intencionalidade de rever a estratégia utilizada. André toma a ação de voltar atrás no processo de construção. Depois, segue-se um momento de emissão e receção de feedback oral, num diálogo em que André começa por questionar Lucas com a intencionalidade de se orientar relativamente à amplitude do segundo ângulo. Lucas informa, respondendo que o ângulo terá uma amplitude de 40º.

Lucas emite feedback oral, informando que vai aplicar uma nova estratégia. Em seguida, escolhe adequadamente as ferramentas *Ângulo com uma Dada Amplitude* e *Polígono*. No entanto, segue uma estratégia incorreta e apaga a construção. Lucas reinicia a construção, utilizando a ferramenta *ângulo com uma dada amplitude*, para os dois ângulos dados e, por arrastamento guiado, faz coincidir um triângulo construído com a ferramenta *polígono*. Depois utiliza a ferramenta de *reta paralela* (fig. 5.15). Lucas obtém assim uma construção geométrico-empírica. Emite feedback oral de informação, focando-se no ponto D (ponto de interseção da paralela à base com um dos lados do triângulo). Segue-se um momento de emissão e receção de feedback oral de verificação num diálogo que os alunos estabelecem acerca da posição do ponto D. Então, André aprecia a construção, referindo que o ponto deveria estar mais abaixo. Lucas volta à ação, medindo o ângulo e arrastando um dos vértices do triângulo, de forma guiada, para tentar acertar o valor do ângulo. Ao receber o feedback visual, os alunos voltam a partilhar a ideia de que a construção é inadequada, pois ao arrastar os vértices os alunos verificam que os ângulos mudam.

Lucas regressa à ação e faz novamente a construção geométrica, com a escolha adequada de ferramenta e estratégia corretas, recorrendo a duas rotações com as amplitudes requeridas. Depois, emite feedback oral, apreciando e certificando a sua própria construção quanto à amplitude dos ângulos. Mas André não a certifica e refere que a figura está torta. Lucas, ao contrário de André, parece compreender que, apesar da figura não estar exatamente igual à solicitada, tem as características e propriedades requeridas. Os alunos entram em diálogo, apreciando e verificando, num processo de negociação, o posicionamento do triângulo face à figura dada no enunciado, com base na emissão e receção de feedback oral. Depois de Lucas assegurar a André que a posição do triângulo não interfere com a exequibilidade da parte seguinte da tarefa, os alunos partilham esse significado, avaliando corretamente o feedback visual emitido pelo computador.

5.3.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

Os alunos iniciaram a sequência de construções e arrastamentos com estratégias de Construção Empírica, seguindo pelo meio uma estratégia de Construção Geométrico-Empírica. Na segunda metade da sequência emergiram estratégias de Construção Geométrica intervaladas com estratégias de construção Geométrico-Empírica, terminando com uma estratégia de Construção Geométrica. No percurso realizado pelos alunos transparecem várias deslocações de forma intercalada de um nível teórico para um nível percetual e vice-versa (Arzarello *et al.*, 2002). No entanto, o processo tem um carácter geral ascendente, pois na segunda metade da sequência os alunos abandonaram as estratégias de Construção Empírica. Estes apenas utilizaram por duas vezes a estratégia de Arrastamento Guiado, com o mesmo intuito: tentar arrastar o triângulo para que os ângulos interiores coincidissem com os ângulos marcados anteriormente.

Seguidamente, apresento a sequência de evidências empíricas para as categorias definidas anteriormente no que concerne à construção de significados.

Neste episódio, os processos ascendentes e descendentes (Saada-Robert, 1989; Olivero, 1999; Arzarello *et al.*, 2002) tornam-se transparentes através da análise do trajeto de estratégias de construção seguidas pelos alunos:

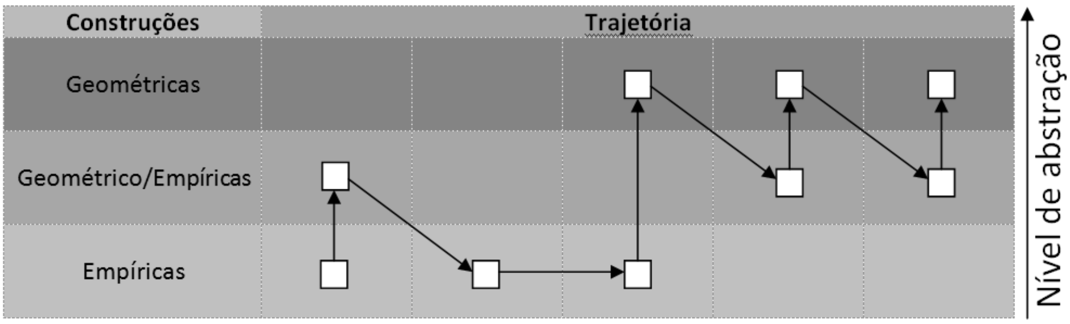


Fig. 5.17. Trajetória de construções do episódio 2

Construção de significados a partir do feedback visual

Um dos alunos começa por utilizar uma ferramenta que serve para medir os ângulos, não adequada para resolver a tarefa. Na sequência, o aluno é corrigido pelo seu par. Mais tarde, esse cenário repete-se, mas antes disso tentam resolver o problema através das ferramentas *Ângulo com uma Dada Amplitude* e *Polígono*, ainda que considerando apenas um dos ângulos pedidos. A utilização da ferramenta *Ângulo com uma Dada Amplitude* de forma independente ou juntamente com a ferramenta *Polígono* é recorrente ao longo do episódio e surge intercalada na fase final com a ferramenta *Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)*. No entanto, a utilização da ferramenta *Ângulo com uma Dada Amplitude* aparece associada a estratégias incompletas ou incorretas. Quando esta ferramenta surge associada a estratégias corretas, a avaliação do Feedback Visual emitido pelo computador não é feita de forma correta pelos alunos. Analogamente, a primeira vez que utilizam a ferramenta *Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)* esta surge associada a uma estratégia correta, mas a avaliação do Feedback Visual emitido pelo computador é, de novo, incorreta. Por fim, os alunos utilizam a ferramenta *Rotação (Objeto, Centro, Amplitude)* associada a uma estratégia correta e a sua avaliação do Feedback Visual emitido pelo computador é feita corretamente. Nesta análise ressalta o facto de os alunos ainda estarem num processo inicial de experimentação, recorrendo, em certas situações a ferramentas e a estratégias que não são adequadas para resolver o problema e repetindo, por vezes, essas opções. Para além disso, fazem avaliações incorretas do feedback visual emitido pelo computador, em situações que para um utilizador mais experiente seriam facilmente interpretadas.

5.3.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

À semelhança do que sucedeu no episódio anterior, existe aqui uma grande diversidade de feedback oral entre os alunos. Neste episódio, destacam-se nove subcategorias distintas, sendo a mais frequente o Feedback de Estratégia, em que os alunos referem a estratégia a implementar. De salientar que esta sequência inicia com uma categoria de Feedback de Certificação, que se repete mais à frente, onde, por duas vezes, André se opõe à utilização da ferramenta *ângulo* e onde Lucas certifica a sua própria construção quanto à amplitude dos ângulos, seguida da afirmação de André em que a mesma estaria torta. Para além disso, emergem as categorias: Feedback de Focagem, primeiro, quando André lê o enunciado e dá a sua opinião, depois quando um aluno da turma fornece ao grupo informação sobre a localização da ferramenta *Rotação*

(Objeto, Centro, Amplitude) e, por último, quando Lucas chama a atenção para a localização de um ponto; Feedback de Exploração, quando os alunos se questionam mutuamente sobre como fazer a rotação; Feedback de Orientação, quando primeiro Lucas questiona André sobre a estratégia a implementar e depois quando André questiona sobre a amplitude do ângulo; Feedback de Apreciação, quando Lucas refere por, duas vezes, terem chegado à mesma construção e quando André refere que o posicionamento de um ponto está deslocado; Feedback de Revisão, quando André pede um tempo para revisitar os passos da construção; Feedback de Resposta, quando Lucas dá uma resposta direta a André; e Feedback de Verificação, quando os alunos entram em diálogo sobre a melhor posição para um ponto e, no final, sobre o posicionamento do triângulo face à figura dada no enunciado.

À semelhança do episódio anterior, surgem muitas referências à estratégia a implementar denotando que os alunos têm a preocupação constante de verbalizar as possíveis estratégias alternativas a implementar, tentando fazer com que o trabalho prossiga experimentando várias formas de chegar ao pretendido. Esse facto faz com que a categoria da Informação seja uma das mais representativas, a par da Avaliação. Na Avaliação, à semelhança do episódio anterior, as subcategorias surgem representadas de forma semelhante entre a Certificação, Apreciação e a Verificação. No entanto, neste episódio, as emissões de feedback oral, englobadas na subcategoria de Certificação, surgiram não apenas relativamente às construções do próprio aluno, mas também do seu par. Atendendo a que no caso desta subcategoria os alunos não expressam nenhuma justificação para certificarem ou não as construções, parece que estas justificações são subentendidas, não sendo por isso apresentadas explicitamente.

Construção de significados a partir do feedback oral

A sequência de evidências empíricas de construção de significados de origem oral, torna evidente a forma como os momentos de Negociação, Compreensão e Partilha se entrecruzam na realização da tarefa. A sequência começa por um momento em que os alunos partilham a estratégia a implementar e termina com a partilha do significado atribuído à construção como solução para o problema. Pelo meio, surgem vários momentos em que os alunos partilham o significado, por vezes, de forma errada, de que as várias construções que vão produzindo não servem para atingir, ou não são solução do problema. Esses momentos surgem em situações em que os alunos mostram não ter ainda a capacidade de percecionar completamente o feedback visual emitido pelo computador, nomeadamente quando apagam construções com as quais poderiam concluir o problema acrescentando uns poucos passos.

Emergem também alguns momentos de Compreensão em situações em que os alunos releem o enunciado, colocam questões, interagem com o computador e, por último, quando Lucas encara a construção como uma figura representativa de uma família de triângulos com as mesmas propriedades. Os momentos de Negociação surgem em situações de diálogo para discussão de opiniões, estratégias e adequabilidade de construções. Assim, neste episódio, os momentos de Compreensão e Negociação surgem, não só em situações de diálogo, mas também em situações que provêm mais diretamente do feedback visual emitido pelo computador. Por exemplo, quando André consegue utilizar a ferramenta Rotação *(Objeto, Centro, Amplitude),* beneficiando do feedback proporcionado pelo computador nas tentativas anteriores.

5.3.4. Síntese

Este episódio está inserido numa tarefa com duas partes distintas, que consiste na construção de uma figura semelhante a um peixe (Fig.5.9), através da construção de vários triângulos. Este episódio refere-se à construção do primeiro destes triângulos. O objetivo é construir um triângulo dadas as amplitudes de dois dos ângulos internos.

De salientar que, à semelhança do episódio anterior, apesar de os alunos estarem num período inicial de adaptação ao AGD, não é dada nenhuma indicação de como proceder a nível de ferramentas ou menus a utilizar. No entanto, é sugerido que os alunos utilizem rotações para a construção de um triângulo com dois dos ângulos internos de amplitudes 40º e 60º; apesar disso, os alunos partem para a criação de ângulos e não de rotações. Com esta estratégia, os alunos, estiveram quase a solucionar o problema (Fig. 5.12). Aparentemente, os alunos parecem não se recordar do procedimento de rotação utilizado anteriormente (Episódio 1) e só o fazem após um colega da turma dar uma sugestão nesse sentido. Os alunos estiveram novamente perto de resolver o problema com rotações (Fig. 5.14). Apesar disso, foram incapazes de determinar o ponto de interseção que daria origem ao surgimento do terceiro vértice do triângulo. O surgimento de algumas dificuldades, no final do processo de resolução, deve-se, principalmente, ao facto de os alunos ainda estarem a desenvolver o seu processo de instrumentação, nesta fase de adaptação ao AGD. De referir que Lucas demonstra e manifesta, nesta fase, uma noção de generalização em termos de posicionamento do triângulo face ao triângulo dado no enunciado, que significa um afastamento do exemplo prototípico.

5.4. Episódio 3: Os Triângulos Semelhantes

5.4.1. Apresentação da Tarefa

Este episódio faz parte da tarefa S4 que tem como objetivo principal a formulação e a testagem de conjeturas no estudo dos critérios de semelhança de triângulos. Esta é uma tarefa em que o ambiente facilita a exploração e análise pelos alunos (Laborde, 2011), pois a tarefa baseia-se na identificação de relações através do arrastamento em que se procura generalizar um resultado, procurando rapidamente vários casos particulares. Em particular, a questão 1, analisada neste episódio, procura fomentar e testar conjeturas sobre a invariância da amplitude dos ângulos internos dos triângulos e a relação de proporcionalidade entre os comprimentos dos lados correspondentes. Trata-se de uma oportunidade para os alunos reconstruírem o significado atribuído à semelhança de triângulos. Em particular, na construção do significado dos invariantes dos triângulos formados por lados paralelos, isto é, a amplitude dos ângulos, e do significado dos não invariantes, isto é, a proporcionalidade entre os comprimentos dos lados. Na sequência, o aluno deve aproveitar o potencial de medição, cujos procedimentos se supõem estar, nesta fase, internalizados, para a subsequente comparação entre amplitudes de ângulos e entre comprimentos dos segmentos de reta que compõem os lados do triângulo.

Inicialmente, na questão analisada, é solicitada a construção de dois triângulos com lados paralelos (Fig. 5.18).

1.

1.1. Constrói um triângulo ABC.

1.2. Constrói outro triângulo DEF, com os lados paralelos aos do triângulo ABC.

1.3. Mede as amplitudes dos ângulos internos desses triângulos e os comprimentos dos seus lados.

Que relações podem estabelecer entre os elementos destes triângulos que te permitam afirmar que são semelhantes?

1.4. Qual a razão de semelhança?

1.5. Arrasta um dos vértices do triângulo ABC e verifica se as relações que estabeleceste na alínea 1.3. se mantêm.

Figura 5.18. Enunciado da construção de triângulos de lados paralelos

A construção da figura solicitada, de forma correta e robusta, e a medição dos lados e dos ângulos, devem possibilitar que os alunos consigam formular conjeturas e testá-las através do arrastamento das figuras. As imagens projetadas no ecrã através do GeoGebra tornam as invariâncias dos ângulos e a forma como variam os comprimentos dos lados mais visíveis. Com efeito, à medida que os comprimentos variam, os ângulos permanecem com a mesma amplitude.

5.4.2. Descrição do Episódio

Segundo as gravações da imagem do computador e das vozes, André começa por construir um triângulo isósceles. Lucas reage, afirmando que deveria ser um "triângulo normal". Isto significa que para Lucas o triângulo não deveria possuir nenhuma característica em particular.

André afirma que o triângulo desenhado é equilátero; Lucas contesta a afirmação do colega, mas acaba por aceitar o comentário e recomeça a construção, construindo um triângulo isósceles, apoiando-se na grelha (Fig. 5.19).

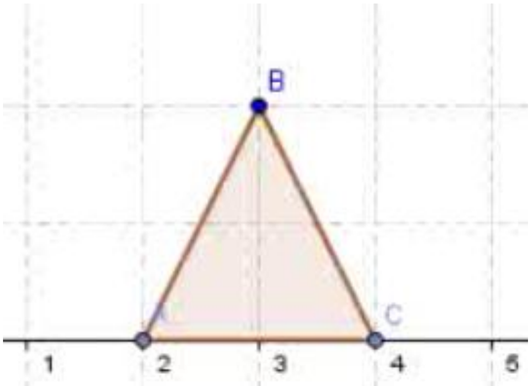


Figura 5.19. Construção de um triângulo isósceles

André afirma que o triângulo é isósceles e ambos parecem entender que, se era solicitado a construção de um triângulo qualquer, este poderia eventualmente ser um triângulo isósceles. Seguidamente, Lucas sugere que avancem para a construção de outro triângulo usando retas paralelas. Para tal, André fixa um ponto (ponto D) e usa o comando “Reta paralela” para construir uma paralela a um dos lados do triângulo, passando por D (Fig. 5.20). Em seguida fixa, outro ponto, que designa por E, e constrói uma reta paralela a outro lado do triângulo, passando por esse ponto (Fig. 5.20). O resultado é um par de retas concorrentes entre si e, cada uma delas, também é concorrente com o eixo das abcissas. Os pontos de interseção destas retas definem um triângulo semelhante ao dado inicialmente. Perante a imagem obtida, André não se mostra totalmente satisfeito, considerando que o resultado não corresponde exatamente ao que era solicitado.

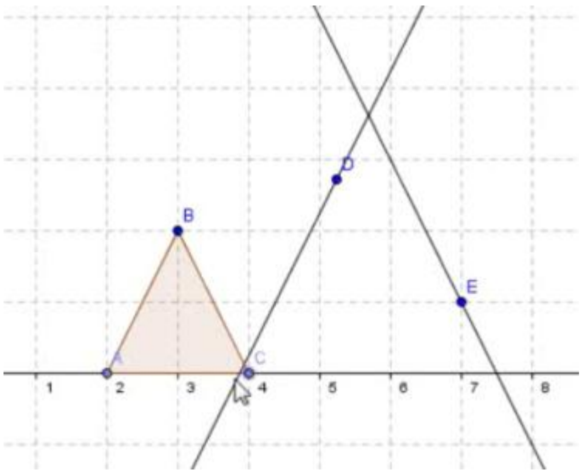


Figura 5.20. Construção de retas paralelas

Perante a imagem, André reage.

André: Não, não é isto.
Lucas: O que é que estás a fazer?
André: Então? Está paralela…
Lucas: Por acaso a ideia está certa, mas os pontos tão mal. Estás a ver…
André: Mas está paralela.

Decidem apagar e recomeçar a construção. André constrói um novo triângulo de forma idêntica à anterior, mas Lucas responde que o ponto D (o ponto escolhido que foi usado para traçar uma das paralelas) está mal, defendendo que este deve estar situado na interseção. Na sequência desta afirmação, André refaz a construção, usando um único ponto para tirar paralelas a dois dos lados do triângulo (ponto D). Seleciona outro ponto (ponto E) numa das retas e faz passar por esse ponto uma reta paralela ao terceiro lado do triângulo inicial.

André consegue então chegar à compreensão do problema, afirmando:

André: É, se pusermos paralelos, fazemos o triângulo maior e é semelhante. Não é?

Lucas assume o trabalho no computador e retoma a construção. Os alunos discutem se a razão de semelhança é 1 ou 2 e recorrem à medição dos comprimentos dos lados para concluírem que é 2. Em seguida, é pedido que estabeleçam relações entre os elementos desses triângulos que permitam afirmar que são semelhantes e verificar se estas se mantêm por arrastamento.

Lucas mede os ângulos dos dois triângulos. André fica surpreendido com o facto de as amplitudes dos ângulos serem iguais, mas Lucas assegura-lhe que era suposto obter esse resultado e mede os comprimentos dos lados, como era sugerido, obtendo as medidas dos ângulos e dos lados dos dois triângulos (Fig. 5.21).

Lucas: Como é o comprimento?
André: É vezes dois.
Lucas: Os comprimentos são vezes dois. E os ângulos?
André: São iguais.

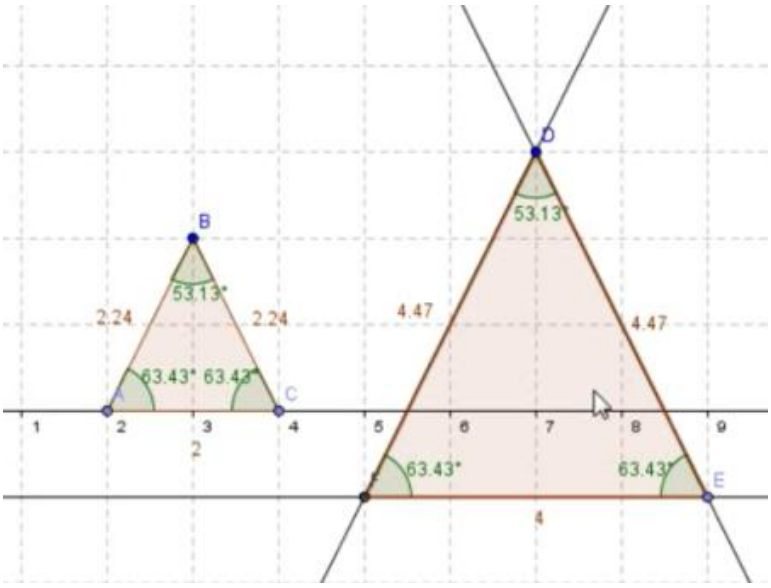


Figura 5.21. Construção de um triângulo com retas paralelas

Encontram as medidas 2.24 e 4.47 para lados correspondentes dos triângulos.

André: Então, 4.4… não é oito… [o oito refere-se ao último dígito que o aluno esperava encontrar]
Lucas: Pois não. Espera aí, olha lá. Ah! Já sei… é porque isto já não…. Olha os ângulos mantêm-se. Faz lá aí 2,24×2.
André: Dá 4,48.
Lucas: Mas este computador! Mas 2,24×2 dá 4,48 e aqui está 4,47…!

Na sequência deste diálogo, questionam o professor para perceber a razão pela qual não obtiveram 4,48 (para o lado do triângulo maior), que lhes explicou que o resultado está relacionado com os arredondamentos efetuados pelo GeoGebra.

Na questão seguinte é pedido que arrastem um dos vértices do triângulo inicial e verifiquem se as relações se mantêm. André movimenta um dos vértices e depara-se com a movimentação, em simultâneo, dos dois triângulos, verificando assim que os ângulos correspondentes de cada um dos triângulos mantêm a mesma amplitude (Fig. 5.22).

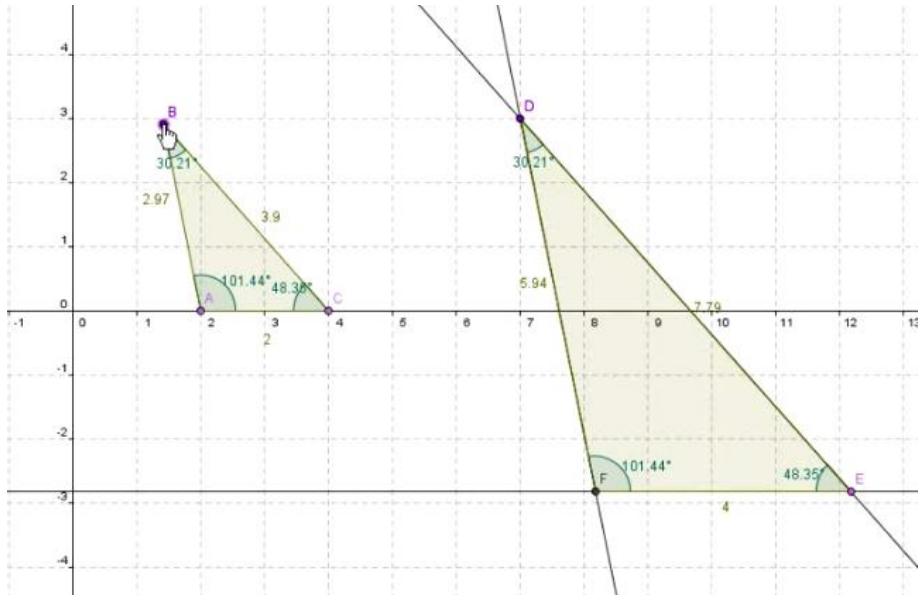


Figura 5.22. Novos triângulos semelhantes resultantes de arrastamento

5.4.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta os alunos passaram por diversos objetivos que foram evoluindo: (1) A construção de um triângulo “qualquer”, ou seja, um triângulo que seja genérico. (2) Construção de um triângulo semelhante, utilizando retas paralelas. (3) Formulação da conjetura para a invariância de amplitudes dos ângulos e para a relação entre os comprimentos dos lados. (4) Testagem para a invariância de amplitudes dos ângulos e para a relação entre os comprimentos dos lados.

Para a análise deste episódio, considerarei esses objetivos e abordarei os pontos-chave do episódio sob a lente da codificação dos ciclos de feedback: fases do feedback, estratégias de construção e de arrastamento, feedback entre alunos e construção de significados.

(1) A construção de um triângulo “qualquer”, ou seja, um triângulo que seja genérico

André começa por realizar uma ação, optando pela ferramenta *polígono* e faz uma construção empírica: um triângulo isósceles. Ao receber o feedback visual emitido pelo computador, Lucas emite feedback oral, apreciando a construção de André, referindo que deveria ser um triângulo “normal” (no enunciado da tarefa era solicitada a construção de um triângulo qualquer). Neste processo de negociação, André afirma que o triângulo é equilátero, mas é contrariado por Lucas. Depois André, aparentemente, partilha da informação emitida no feedback oral de Lucas ao referir que deveria ser um “triângulo normal” e apaga a construção.

André volta à ação, repetindo a construção empírica do triângulo isósceles. André aprecia e certifica a sua própria construção, afirmando que é um triângulo isósceles. Lucas não reage e ambos parecem compreender que, se era solicitado a construção de um triângulo qualquer, este pode eventualmente ser um triângulo isósceles.

(2) Construção de um triângulo semelhante, utilizando retas paralelas.

Lucas emite feedback oral de informação, indicando a estratégia a seguir: a construção de outro triângulo usando retas paralelas. André passa à ação e começa a construir retas paralelas aos lados do triângulo, utilizando uma estratégia correta. O feedback visual mostra a formação de um novo triângulo semelhante ao primeiro, numa construção geométrica. André emite feedback oral, apreciando, mas não certificando a sua própria construção. Lucas receciona e emite feedback oral, questionando André sobre a estratégia implementada no sentido de procurar informação e rever o processo. Surge depois um momento de emissão e receção de feedback oral, num diálogo de negociação, questionamento e exploração sobre a validade da figura obtida. Os alunos partilham a perceção de que os lados estão paralelos, conforme solicitado. Mas os pontos utilizados para a construção das retas paralelas não se encontram nos vértices do triângulo, conforme parece que era pretendido e compreendido pelo par de alunos.

André age novamente, refazendo a construção geométrica anterior, mas com um ponto da construção localizado noutro ponto (que seria o vértice). Face à nova construção de André, Lucas emite feedback oral, apreciando a construção e referindo que o ponto D deveria estar colocado na interseção das retas paralelas aos lados do triângulo inicial. André também emite feedback oral com o sentido de informar, focando-se na noção de semelhança.

André consegue executar uma ação conforme o pretendido com uma construção geométrica em que os pontos usados para a construção do segundo triângulo são os respetivos vértices. Os alunos validam a nova construção com base no significado partilhado. André emite feedback oral onde mostra compreender que obtiveram um triângulo maior semelhante ao dado. Lucas passa agora à ação, medindo os ângulos. Ao receber o feedback visual, André mostra-se surpreendido. Os alunos questionam-se e exploram o facto de os ângulos se manterem iguais, dialogando, emitindo e recebendo feedback oral. No final, André parece compreender a propriedade da igualdade da amplitude dos ângulos em triângulos semelhantes.

(3) Formulação da conjetura para a invariância de amplitudes dos ângulos e para a relação entre os comprimentos dos lados.

Lucas passa novamente à ação, medindo o comprimento dos lados. Surge novamente um momento de emissão e receção de feedback oral sobre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos. Lucas começa por questionar, procurando explorar a relação entre as amplitudes dos ângulos e a relação entre os comprimentos dos lados. André aprecia os resultados da medição dos comprimentos dos lados e refere que não são os esperados. Os alunos continuam o diálogo na busca de informação que lhes permita compreender o porquê de os resultados não serem os esperados. Lucas interrompe André para fazer uma revisão da estratégia implementada. Depois foca-se no facto de a amplitude dos ângulos permanecer igual. O mesmo aluno estabelece uma estratégia, solicitando a André para fazer o cálculo do comprimento que o lado do segundo triângulo deveria ter. André responde com o resultado do cálculo solicitado. Lucas aprecia os resultados obtidos, não os validando. Nesta fase os alunos não se apercebem de que o *software* está a fazer arredondamentos e só partilham esse significado depois de consultarem o professor.

(4) Testagem para a invariância de amplitudes dos ângulos e para a relação entre os comprimentos dos lados.

Lucas passa novamente à ação, fazendo um arrastamento divagante-teste num dos vértices do primeiro triângulo para testar se o segundo triângulo se mantém semelhante. Face ao feedback visual emitido pelo computador, os alunos reconhecem e partilham as noções de invariância das propriedades pelo arrastamento, fazendo assim uma avaliação correta do feedback visual emitido pelo computador.

5.4.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

Neste episódio surge apenas uma estratégia de arrastamento (divagante-teste) que tem a função de testar as propriedades dos triângulos semelhantes. Esse facto deve-se à própria estrutura da tarefa que requer predominantemente que os alunos façam construções. Os alunos iniciam com uma estratégia de Construção Empírica conforme solicitado, repetem-na depois de um processo de negociação de significado e, posteriormente, emergem algumas estratégias de Construção Geométrica, num processo ascendente de um nível perceptual para um nível teórico (Arzarello et al, 2002).

Construção de significados a partir do feedback visual

Neste episodio apenas existem duas variações para uma escolha de ferramentas. Este facto deve-se à natureza da tarefa em si que se centra mais nas propriedades que os alunos podem retirar das construções e do arrastamento do que nas construções por si só. Para além desse facto, os alunos começam já a ter alguma familiaridade com o AGD e, neste caso, escolhem de forma adequada as ferramentas e aplicam as estratégias corretas. Fazem a primeira avaliação do feedback visual emitido pelo computador de forma incorreta, por pensarem que os pontos que ajudam a construir o segundo triângulo têm que ser necessariamente os seus vértices. Mas depois fazem-no de uma forma correta, pois ao arrastar os vértices os alunos verificam que os ângulos se mantêm, mostrando já alguma evolução na forma como são capazes de manusear as ferramentas do AGD.

5.4.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

Durante o episódio surgem pequenos ciclos de emissão e receção de feedback oral na forma de expressões ou pequenos diálogos normalmente impulsionados pelo feedback visual.

Tipos de feedback oral

A sequência de categorias de feedback oral é ilustrativa da diversidade do feedback emergente entre alunos. Neste episódio destacam-se oito subcategorias distintas, sendo a mais frequente o Feedback de Apreciação, em que os alunos não validam a construção ou o resultado obtido, indicando a sua opinião. De salientar que este episódio inicia e finaliza com a categoria de Feedback de Apreciação. Para além desta categoria emergem as seguintes categorias de Feedback entre alunos: Certificação, quando André, numa primeira situação, valida a sua construção, e num segundo momento não valida a continuação dessa mesma construção; Estratégia, quando Lucas sugere a construção de outro triângulo utilizando retas paralelas; Revisão, quando Lucas questiona ou interrompe André para fazer uma revisão da estratégia implementada; Exploração, quando os alunos entram em diálogo sobre as paralelas e os pontos de interseção ou sobre o facto da amplitude dos ângulos não se alterar; Sondagem, quando Lucas questiona André sobre a relação dos comprimentos dos lados e sobre a relação das amplitudes dos ângulos; Focagem, quando Lucas chama a atenção de que a amplitude dos ângulos se mantém constante; Resposta, quando André refere a solução do cálculo solicitado por Lucas. De notar que apesar de se reconhecer a preocupação constante em validar as construções, os alunos não deixaram de exprimir o motivo que os levava a percecionar o feedback visual emitido pelo computador como não estando de acordo com o pretendido. Este facto levou a que as categorias principais mais representativas fossem a Avaliação e a Informação. A Informação surge distribuída de forma uniforme pelas diferentes subcategorias, à exceção da Conexão. Isto pode ser interpretado como um episódio em que os alunos estiveram preocupados não só em fornecer estratégias, mas também em focar-se em aspetos determinantes para resolver o problema e ainda em encetar processos de revisão de estratégias implementadas.

Construção de significados a partir do feedback oral

A forma como as categorias Negociação, Compreensão e Partilha surgem em abundância e numa sequência aparentemente não ordenada, deixa transparecer a forma envolvente como os alunos abordaram a tarefa. A Compreensão de um significado incorreto na construção inicial do triângulo semelhante, não impede que os alunos consigam depois chegar ao objetivo da tarefa (compreender as propriedades associadas à noção de semelhança entre triângulos). Os momentos de Negociação emergem devido aos diálogos encetados pelos alunos, abordando as estratégias implementadas ou a implementar, assim como a validade de resultados e propriedades das figuras. Trata-se de momentos em que os alunos não estão apenas preocupados em apreciar a construção efetuada pelo seu par, mas também em negociar, dentro da categoria de Questionamento, os conceitos geométricos subjacentes ao problema. Esses momentos, ao contrário de episódios anteriores, centram-se mais em questões relacionadas com as propriedades geométricas do que propriamente em questões relacionadas com o funcionamento das ferramentas. Este facto mostra que a preocupação dos alunos se deslocou, concentrando-se mais, nesta fase, nos conceitos matemáticos. Os momentos de Compreensão emergem quando os alunos mostram compreender a validade de poderem utilizar um triângulo qualquer, em particular um triângulo isósceles, ou quando mostram assumir que os pontos de construção das retas paralelas deveriam estar colocados nos vértices do segundo triângulo, ou ainda, quando André compreende que, na semelhança de triângulos, a amplitude dos ângulos se mantém. Esse momento surge impulsionado não só pelo feedback oral emitido pelo par, mas também pelo feedback visual emitido pelo computador. Os momentos de Partilha surgem quando um dos alunos aceita o feedback oral do outro ou quando validam, ou não, as construções, os resultados e as propriedades.

5.4.4. Síntese

Este episódio está inserido numa tarefa que tem como objetivo principal a formulação e a testagem de conjeturas para os critérios de semelhança entre triângulos. Em particular, a questão 1, analisada neste episódio, procura fomentar e levar a testar conjeturas sobre a invariância da amplitude dos ângulos internos dos triângulos e a relação de proporcionalidade entre os comprimentos dos lados correspondentes.

Inicialmente, pretende-se que os alunos construam a figura solicitada de forma correta e robusta e efetuem as respetivas medições. Depois de construída a figura, procura-se tirar partido das potencialidades do GeoGebra na formulação e testagem de conjeturas, ao proporcionar a exploração de vários exemplos por arrastamento. As imagens projetadas no ecrã através do GeoGebra tornaram mais evidentes as invariâncias dos ângulos e a forma como variam os comprimentos dos lados.

No início do episódio emerge a capacidade de generalização quando é solicitada a construção de um triângulo qualquer e os alunos optam por um triângulo isósceles (Fig. 5.19). Por outro lado, no momento da construção do triângulo semelhante através de retas paralelas (Fig. 5.20), os alunos partem do princípio de que os pontos auxiliares de construção das retas paralelas deveriam ser os vértices do novo triângulo. Apesar disso, o primeiro objetivo de formulação de conjeturas para a o critério de semelhança entre triângulos e, em particular, para a manutenção da amplitude dos ângulos, foi atingido. O segundo objetivo, testagem da conjetura relativa à manutenção da amplitude dos ângulos, também foi atingido. Os alunos só conseguem completar a testagem da conjetura relativa às relações dos comprimentos depois de receberem feedback do professor relativamente aos arredondamentos efetuados pelo AGD. A ocorrência de muitas subcategorias no feedback entre alunos (cinco), na testagem da conjetura relativa aos comprimentos, deve-se ao facto de os alunos não estarem a obter os resultados que conjeturaram devido aos arredondamentos efetuados pelo software. Assim, a comunicação oral entre os dois alunos intensificou-se para discutir os resultados e rever as estratégias implementadas.

5.5. Episódio 4: Os Fantasmas

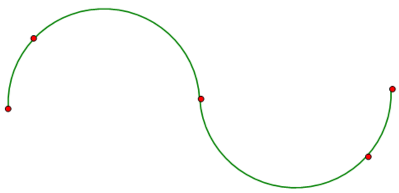
5.5.1. Apresentação da Tarefa

A tarefa proposta (I5) tem como objetivo que os alunos construam uma pavimentação com “fantasmas”. Este é o tipo de tarefa que admite um trabalho correspondente com papel e lápis. No entanto, pode ser resolvida de diferentes formas num ambiente de geometria dinâmica (Laborde, 2011). Nomeadamente, ao utilizar uma transformação geométrica, como é o caso das translações associadas a vetores, os alunos têm acesso ao feedback visual emitido pelo computador face à estratégia adotada.

A nível instrumental, os alunos têm um conjunto de procedimentos iniciais para a construção de uma ferramenta. Esses procedimentos devem estar, nesta fase, internalizados, à exceção da ferramenta *Arco Circuncircular (Três Pontos)*, com o qual os alunos devem definir um arco de circunferência através de três pontos. Para além dos procedimentos iniciais, os alunos devem utilizar a ferramenta *Translação (Objeto, Vetor)*. Estes procedimentos incluem definir inicialmente o objeto, ou conjunto de objetos a serem alvo da translação e os dois pontos (por ordem) que definem o vetor associado à translação. Nesta fase, os alunos podem ainda não ter internalizado, na sua totalidade, os procedimentos relativos à translação. Assim, espera-se que os alunos tirem proveito das características do AGD que facilitam a experimentação das translações para a formação da pavimentação.

A tarefa contém propositadamente poucas instruções pois os alunos estão mais familiarizados com este AGD. A tarefa tem início com a construção de uma ferramenta (fig. 5.23).

1. Construção da ferramenta
   a) Construam um segmento de reta AB.
   b) Construam o ponto médio C.
   c) Construam duas semicircunferências e escondam o resto de maneira a ficar:



   d) Na barra de ferramentas, cliquem em criar uma nova ferramenta com toda a figura selecionada e concluam o procedimento.

Fig. 5.23. Enunciado da construção de uma ferramenta

Após a construção desta ferramenta, os alunos terão de a aplicar para construir um “fantasma”. Para essa construção apenas é dada a indicação de que devem começar por construir um quadrado, conforme se pode constatar na figura seguinte.

2. Depois de apagarem a figura, construam um quadrado.
3. Tendo por base o quadrado, utilizem a nova ferramenta para fazer:

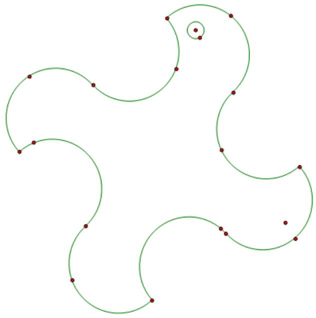


Fig. 5.24. Enunciado da construção do fantasma

Na última questão é solicitado que os alunos pavimentem o plano, apenas com a indicação de utilizarem translações como mostra a figura seguinte (Fig. 5.25).

4. Utilizem translações de modo a pavimentar o plano:

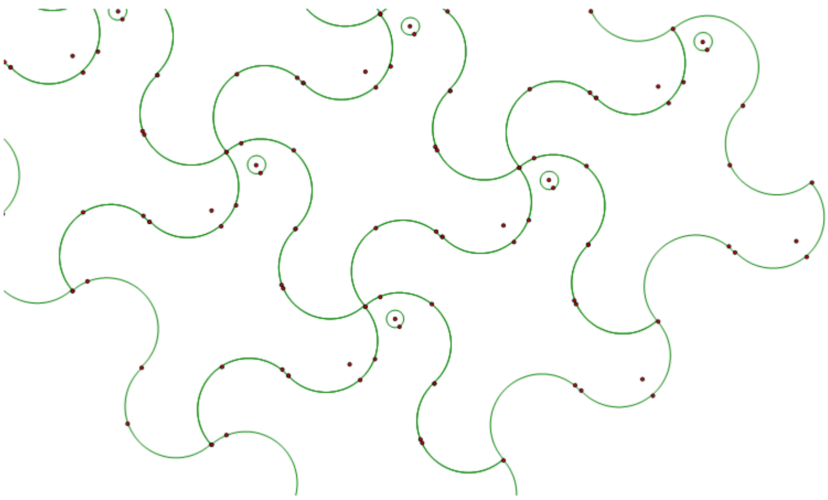


Fig.5.25. Enunciado da pavimentação com fantasmas

5.5.2. Descrição do Episódio

Lucas toma a iniciativa de assumir o comando no início e, à semelhança do episódio anterior, os alunos vão trocando a manipulação do computador ao longo da tarefa, embora com alguns protestos de parte a parte.

Ao tentar criar a ferramenta, Lucas não esconde o segmento de reta AB (Fig. 5.26).

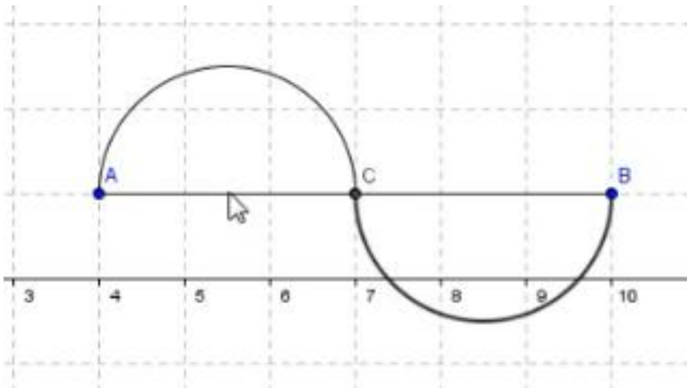


Figura 5.26. Nova ferramenta com segmento de reta

André avisa que a figura não está correta. Lucas concorda e relê a questão. Acaba por esconder o segmento de reta, explora o menu Ferramentas no GeoGebra e encontra a possibilidade de criar uma nova ferramenta. Seguidamente, passam à questão 2 e 3 da tarefa.

Depois de Lucas experimentar por várias vezes a nova ferramenta e conseguir funcionar com ela de forma correta, desenha um quadrado. De seguida, recorre à ferramenta criada, selecionando os respetivos vértices do quadrado (Fig. 5.27).

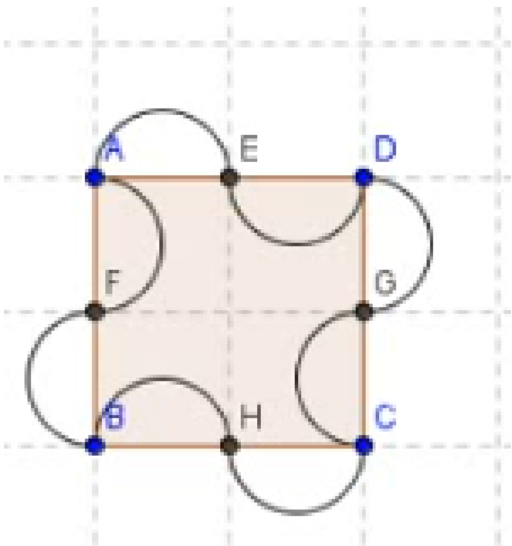


Figura 5.27. O fantasma

Depois de conseguirem que ficasse só o fantasma na imagem, Lucas tenta fazer as translações correspondentes ao solicitado na questão 4 (Fig. 5.27), sem obter qualquer resposta do computador.

André: É translação.
Lucas: Onde?
André: Aqui! (aponta para a ferramenta, devem então selecionar o objeto e depois o vetor).

Lucas faz algumas tentativas (Fig. 5.28), seguidas de comentários de desagrado do André.

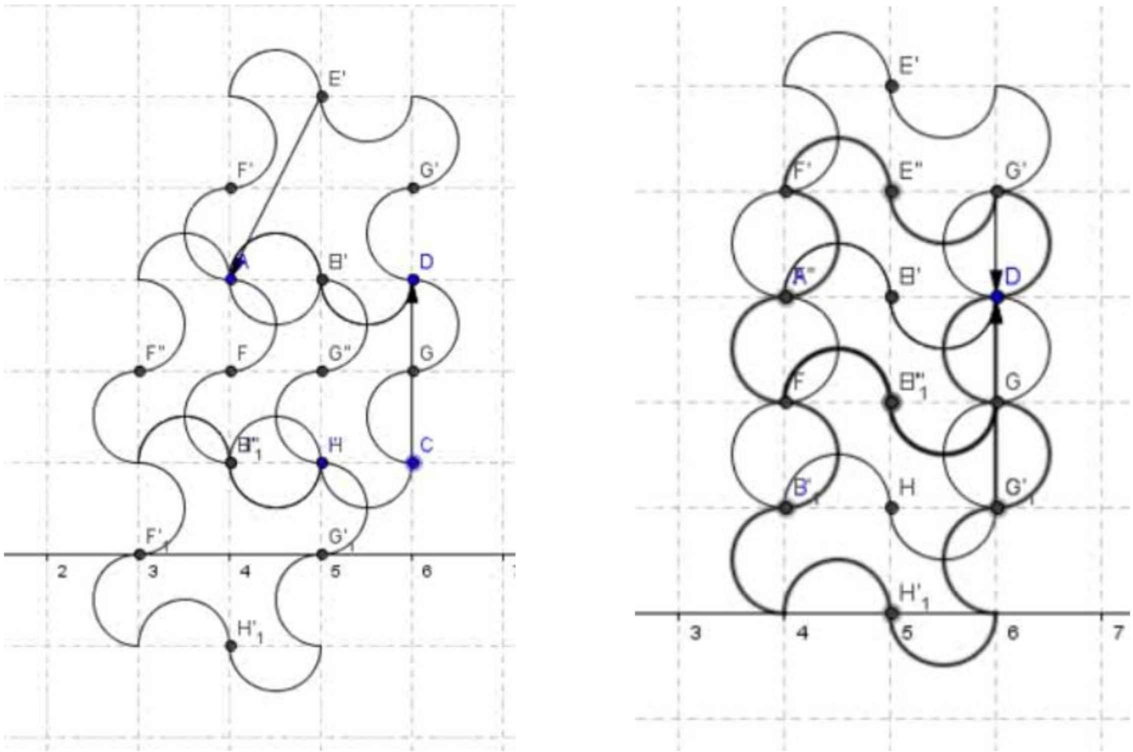


Figura 5.28. Tentativas de formar o padrão

André: Está mal.
Lucas: Eu sei. O que é que está mal? Queres trabalhar?
(André vai então para o computador e começa a experimentar fazer as translações, inicialmente sem qualquer tipo de alteração na imagem.)
André: Era no ponto G?
Lucas: Agora para baixo. Agora experimenta…
André: Como se eu não soubesse… Basta dizer "muda de direção". Eu percebo. Posso fazer assim?
Lucas: Experimenta.

Por fim conseguem terminar a figura (Fig. 5.29).

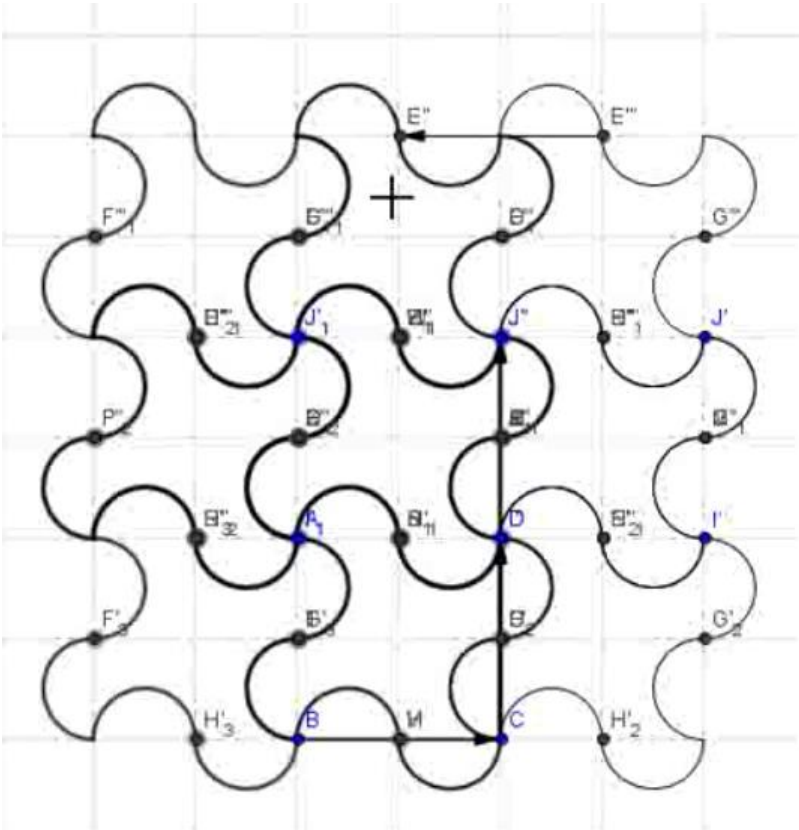


Figura 5.29. A pavimentação de fantasmas

5.5.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta, os alunos passaram por diversos objetivos que foram evoluindo: (1) Construção da ferramenta. (2) Construção do fantasma. (3) Construção da pavimentação.

Analiso este episódio segundo esses objetivos e abordando os pontos-chave do episódio sob a lente da codificação dos ciclos de feedback: fases do feedback, estratégias de construção e de arrastamento, feedback entre alunos e construção de significados.

(1) Construção da ferramenta.

Lucas começa por realizar a ação de construção da nova ferramenta. Para isso, escolhe adequadamente as ferramentas *Semicircunferência (Dois Pontos)* e *Segmento de*

Reta. André tenta negociar, emitindo feedback oral de apreciação não certificando a construção de Lucas. Este tenta compreender, relê a questão e esconde o segmento de reta. Lucas parece então partilhar a opinião de André e adota a estratégia correta de esconder os segmentos de reta que tinham servido de apoio para a construção. Assim, conclui a construção geométrica e os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo comutador.

(2) Construção do fantasma.

Lucas recorre corretamente à estratégia de experimentar por várias vezes a nova ferramenta, de forma adequada, e os alunos avaliam corretamente o feedback visual. Esta estratégia possibilita que depois consigam funcionar com a nova ferramenta de forma correta. Lucas passa novamente à ação, construindo um quadrado. De seguida, recorre à nova ferramenta criada, aplicando-a aos respetivos vértices do quadrado (Fig. 5.27). Lucas obtém assim a construção geométrica do "fantasma", a qual os alunos avaliam corretamente como sendo a construção requerida.

(3) Construção da pavimentação.

Lucas tenta fazer uma translação, mas o feedback visual emitido pelo computador mostra que a construção não se altera visto o aluno não ter selecionado a figura alvo da translação. Segue-se um momento de diálogo e de negociação com emissão e receção de feedback oral. André começa por informar Lucas que deve seguir a estratégia de utilizar as translações. Lucas sonda o colega sobre a localização da ferramenta translação. André informa, apontando para a localização da ferramenta no menu do GeoGebra. Em seguida, Lucas faz várias translações obtendo figuras sobrepostas, através de construções geométrico-empíricas.

Face ao feedback visual emitido pelo computador, que mostra as figuras sobrepostas nas translações realizadas por Lucas, André profere alguns comentários de desagrado, apreciando e não certificando as construções obtidas. Por fim, André refere que a estratégia não está correta, o que Lucas confirma, partilhando essa ideia. Assim, os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador.

Segue-se mais um momento de emissão e receção de feedback oral. Os alunos enveredam por um diálogo em que inicialmente se questionam para se orientarem:

Lucas questiona André sobre a estratégia a implementar e André, por sua vez, questiona sobre qual o ponto a utilizar. Lucas aceita que podem mudar de estratégia e propõe que seja André a usar o computador. André volta a questionar, como forma de se orientar, sobre se a translação é realizada com o vetor a partir do ponto G. Lucas sugere a André que faça uma experimentação, fornecendo simultaneamente a indicação da direção do vetor associado à translação. André aprecia e corrige o feedback oral emitido por Lucas referindo que bastava mudar de direção. André volta a questionar o colega com o intuito de negociar a possibilidade de utilizar uma determinada estratégia de translação. Lucas responde novamente que André deve experimentar. Finalmente, André constrói a pavimentação desejada, com uma construção geométrica, e os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador. Assim, os alunos partilham a ideia de que completaram a tarefa.

5.5.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

O episódio tem a ver com uma tarefa de construção, não motivando qualquer arrastamento. A sequência de estratégias de construção não deixa transparecer toda a interatividade existente ao longo do episódio. No entanto, pode-se retirar alguma informação. A Construção Geométrica inicial é motivada pelas instruções dadas na elaboração de uma ferramenta a ser utilizada. Depois os alunos atingem facilmente a segunda Construção Geométrica, a construção do “fantasma”. Ao experimentar as translações, Lucas constrói figuras sobrepostas (Construções Geométrico-empíricas); essas figuras têm, por um lado, uma base de Construção Geométrica, mas, por outro lado, as translações são realizadas com base numa estratégia empírica. Nessas tentativas o feedback do computador fornece pistas mediante a forma como as figuras se sobrepõem, permitindo aos alunos refinarem as suas estratégias.

Construção de significados a partir do feedback visual

Os alunos começam por utilizar as ferramentas *Semicircunferência (Dois Pontos)* e *Segmento de Reta* de forma correta, criando uma nova ferramenta conforme solicitado na tarefa. Depois passam a uma fase de experimentação dessa nova ferramenta. Seguidamente, conseguem aplicar as ferramentas *Nova Ferramenta* conjuntamente com o *Quadrado* de forma adequada. Por último, utilizam a ferramenta *Translação (Objeto, Vetor)*, implementando primeiro estratégias incorretas, tendo em conta que os objetos que surgem no ecrã estão sobrepostos e, depois de várias tentativas, conseguem tirar proveito do feedback visual emitido pelo computador e realizar as translações requeridas. Ao longo do episódio, os alunos fizeram sempre uma escolha adequada das ferramentas a utilizar, à exceção das tentativas de translação, utilizaram sempre estratégias corretas e avaliaram sempre corretamente o feedback visual emitido pelo computador. Este facto é demonstrativo de que os alunos, nesta fase, estavam adaptados ao AGD. As dificuldades sentidas estiveram relacionadas com a própria noção de um vetor associado à translação. Se os alunos não tivessem a possibilidade de experimentar e testar as suas hipóteses, de forma relativamente simples e rápida, dificilmente teriam entendido a forma de realizar a pavimentação e os conceitos inerentes à realização de translações.

5.5.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

Tipos de feedback oral

A forma como vão surgindo as subcategorias de feedback oral é ilustrativa da diversidade do feedback emergente entre os alunos. Neste episódio destacam-se seis categorias distintas, sendo a mais frequente o Feedback de Estratégia, em que os alunos referem a estratégia a implementar e onde Lucas, por duas ocasiões, apela à experimentação. De salientar que esta sequência inicia com uma categoria de Feedback de Certificação, que se repete mais à frente, onde, por duas vezes, André não dá o seu aval às construções de Lucas e este concorda. Para além dessas, emergem as categorias de: Feedback de Sondagem, onde Lucas questiona André sobre a localização da ferramenta *Translação (Objeto, Vetor)*; Feedback de Resposta, onde André aponta para a localização da ferramenta; Feedback de Orientação, onde um aluno questiona o outro sobre a estratégia a implementar; Feedback de Correção, onde André corrige a forma como Lucas se exprime oralmente.

À semelhança de outros episódios, a subcategoria de Feedback de Estratégia é a mais representativa. No entanto, saliento que, por duas ocasiões, em vez desse feedback surgir como uma estratégia pré-estabelecida, surgiu numa forma em que o aluno solicitava a experimentação. Esse facto pode significar que os alunos se começam a aperceber da importância da experimentação na resolução de problemas e, em particular, na resolução de problemas que envolvem a emissão e receção de feedback visual, onde podem recolher informação.

As categorias principais aparecem distribuídas de forma praticamente uniforme. As categorias de Avaliação, Informação e Questionamento surgem praticamente com a mesma representatividade. Tal facto pode levar a encarar este episódio como contendo situações que destacam especialmente. Ou seja, os alunos estiveram igualmente preocupados em avaliar, informar e questionar. Embora exista esta paridade entre as várias categorias, o questionamento tem aqui uma maior relevância do que noutros episódios. Isso pode-se dever ao facto de a noção de vetor associado a uma translação ser uma noção que requer alguma reflexão e um debate de ideias e experimentação.

Construção de significados a partir do feedback oral

A sequência de categorias de construção de significados não deixa transparecer toda a interatividade existente ao longo do episódio. No entanto, pode-se retirar alguma informação das categorias emergentes. Existe apenas um momento explícito de Compreensão, quando Lucas relê o enunciado da tarefa. O que significa que os alunos não sentiram necessidade de expressar os momentos em que estavam a compreender determinada situação ou conceito. No entanto, existem vários momentos de Negociação e Partilha explícitos que levam os alunos a completar a tarefa e a construir o significado de translação associada a um vetor. Os momentos de Negociação surgem ligados à validade de construções, ao questionamento relativo à localização das translações ou dos vetores a elas associados. Apesar dos momentos de partilha não serem explícitos, os momentos em que os alunos se questionam deixam percecionar que, de facto, existiram momentos de compreensão que não são explícitos. Os debates de ideias referidos anteriormente, presentes na categoria de Questionamento, refletem-se em momentos de Negociação. Os momentos de Partilha surgem quando os alunos entram em acordo sobre a adequabilidade das construções.

5.5.4. Síntese

Este episódio está inserido numa tarefa que tem como principais objetivos compreender as noções de vetor e de translação, identificar e efetuar as translações, em particular, na construção de padrões.

Nesta tarefa os alunos mostraram alguma dificuldade em efetuar as translações, primeiro por não conseguirem entender o feedback visual emitido pelo computador que mostrou as figuras indevidamente sobrepostas (Fig. 5.28). O facto de não surgir uma resposta no computador à ação do aluno foi interpretado corretamente como uma falha ao nível do procedimento, que consistiu na não seleção da figura alvo da translação. A sobreposição das figuras foi interpretada corretamente como uma falha ao nível da estratégia implementada.

De referir que, perante as questões de André, Lucas apela por duas vezes à experimentação. Apesar das dificuldades sentidas, no final os alunos conseguiram cumprir o objetivo de chegar ao padrão desejado (Fig. 5.29).

5.6. Episódio 5: Os Gatos

5.6.1. Apresentação da Tarefa

A tarefa I7 tem como objetivo que os alunos construam uma pavimentação com "gatos". À semelhança do episódio anterior, este é um tipo de tarefa que admite um trabalho correspondente com recurso ao papel e lápis, mas que pode ser resolvida de diferentes formas no ambiente de geometria dinâmica (Laborde, 2011). Dadas as dificuldades normalmente manifestadas pelos alunos no trabalho com transformações geométricas, como é o caso das translações associadas a vetores, optei por propor a construção de uma pavimentação como forma de melhorar a aprendizagem deste conteúdo. A possibilidade de utilizar um AGD para efetuar esta construção, permite aos alunos tirar partido do feedback visual emitido pelo computador. As instruções disponibilizadas inicialmente na tarefa consistem numa sequência de figuras (fig. 5.30), que os alunos devem executar de modo a obter pavimentação desejada (fig. 5.31).

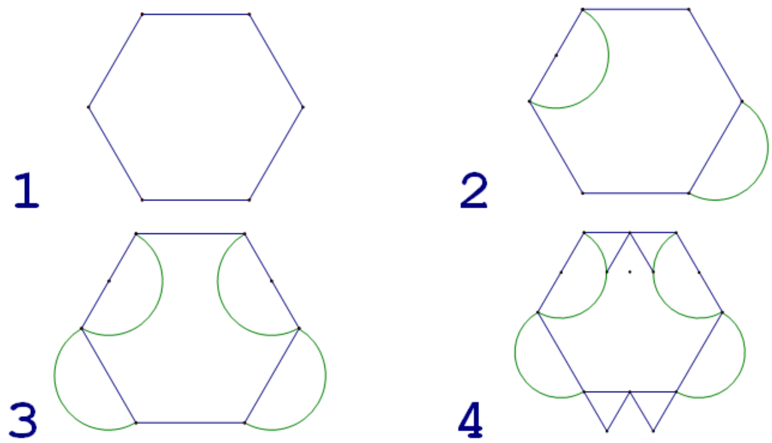


Figura 5.30. Enunciado da sequência de figuras

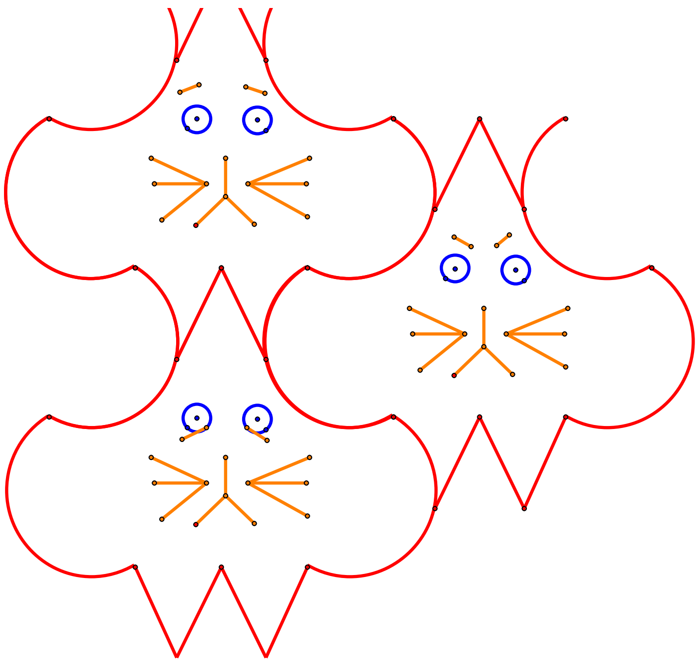


Figura 5.31. Enunciado da pavimentação de gatos

5.6.2. Descrição do Episódio

Lucas lê a tarefa proposta em voz alta e André começa a interagir com o computador, recorrendo à grelha e à ferramenta *Polígono Regular* para o ajudar na construção de um polígono. Lucas afirma que sabe o que é necessário fazer, ao que André responde que também sabe e começam a discutir sobre o número de lados do polígono que pretendem construir.

Lucas: Não, são 5. Espera, posso? (Solicitando ao colega a vez para interagir com o computador)
André: Não! Então são 5. São 5… Não, espera, 6. (Referindo-se ao número de lados do polígono regular)

André constrói um hexágono regular e, utilizando a ferramenta *Semicircunferência (Dois Pontos)*, traça semicircunferências sobre lados do polígono, como mostra a figura seguinte (Fig. 5.32).

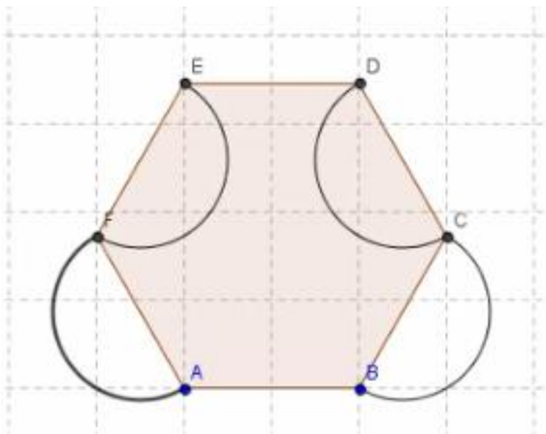


Figura 5.32. Construção de hexágono e semicircunferências

Para realizar a quarta etapa de construção da figura pretendida, Lucas afirma que é necessário marcar o ponto médio. André marca um ponto sobre o segmento de reta AB, apoiando-se na grelha em vez de utilizar a ferramenta para a marcação do ponto médio. Os alunos iniciam uma discussão em torno da validade deste processo. Lucas discorda da ação do colega e passa a interagir com o computador, recorrendo então à ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, para completar a figura.

Depois de marcar o segmento de reta AB e o respetivo ponto médio, Lucas não se apercebe que seria necessário completar segmentos de reta e escolhe a ferramenta de *Arco Circuncircular*, mas rapidamente é corrigido por André, como se pode verificar pelo diálogo seguinte:

André: Para que é que estás a usar isso? (referindo-se à ferramenta *Arco Circuncircular*) *O que é que estás a fazer? São triângulos…*
Lucas: Olha espera aí, mas a gente tinha que… (Lucas parece um pouco indeciso e volta alguns passos atrás).
André: Ah, isto é para fazer um gatinho! Ah, já percebi.
Lucas: Pronto, mas agora… E se fizer isto ao calhas? Não, não dá. (tentando novamente recorrer ao ponto médio).

Lucas constrói a figura seguinte:

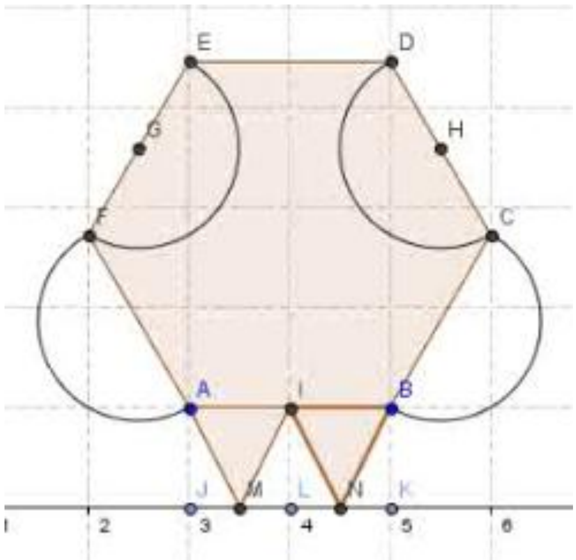


Figura 5.33. Construção de hexágono e semicircunferências e triângulos

Na figura anterior é possível verificar que Lucas após marcar o ponto médio dos segmentos de reta AB, JL e LK, rapidamente construiu os triângulos INB e AIM. Marcou o ponto médio de ED e, em seguida, construiu um triângulo com vértices no ponto médio de ED e nos pontos de interseção das semicircunferências FE e DC, com o semento de reta GH. Para finalizar, escondeu os segmentos de reta e os triângulos que serviram de auxiliares e construiu segmentos de reta obtendo a seguinte figura:

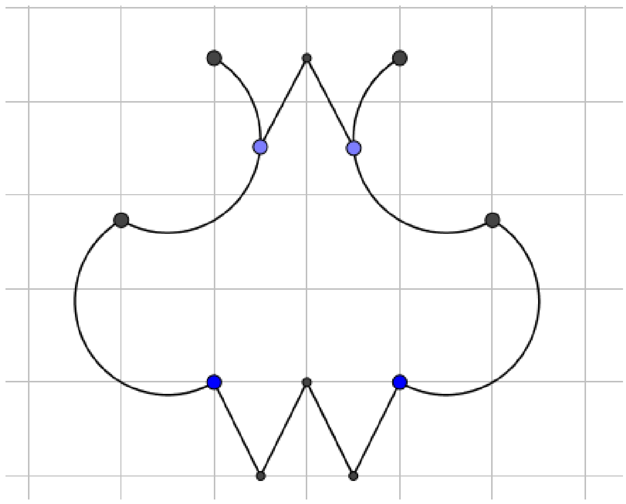


Figura 5.34. Construção dos contornos do gato

André passa a interagir com o computador para acabar de ornamentar o gato. O diálogo seguinte mostra que os alunos não estão de acordo quanto à forma de construir os elementos decorativos da figura (olhos, boca e bigodes do gato), especificamente se esses elementos podem ser livremente posicionados ou se devem estar de acordo com a figura original.

> *Lucas: Não é, deixa-me. O outro era para fazer como a gente quiser mas este não, é para fazer igual.* (Referindo-se à tarefa anterior).
> *André: Mas fica mais bonito.*
> *Lucas: Mas não é para ficar bonito.*
> *André: Mas fica…*
> *Lucas: Fazes uns olhos do tamanho disto…*

Os alunos optaram por fazer uma figura idêntica à dada, apoiando-se na grelha e utilizando segmentos de reta e circunferências.

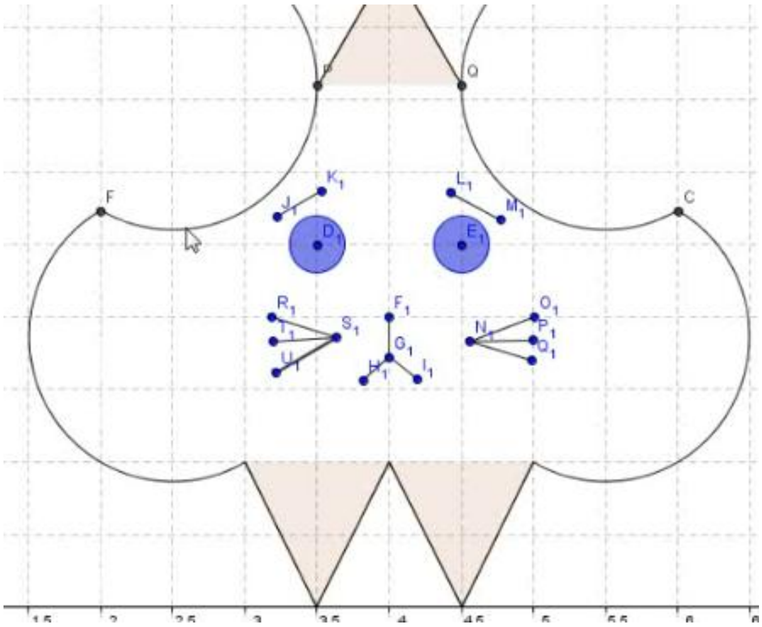


Figura 5.35. Ornamentação do gato

Seguidamente, os alunos conseguem construir a pavimentação sem mostrarem grandes dificuldades.

5.6.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta, os alunos passaram por diversos objetivos que foram evoluindo: (1) Construção de um hexágono regular; (2) Construção dos contornos da figura; (3) Ornamentação da figura; e (4) Construção da pavimentação.

(1) Construção de um hexágono regular

André começa por uma ação que faz recurso da grelha do GeoGebra como apoio para a construção geométrica de um pentágono regular, usando a ferramenta *Polígono Regular*. Apesar da escolha desta ferramenta ser adequada, a estratégia implementada inicialmente foi incorreta, porque começou por construir um pentágono em vez de um hexágono. Surge um momento de emissão e receção de feedback oral no qual os alunos negoceiam e trocam informação entre si, estabelecendo uma estratégia para resolver a tarefa proposta. Entretanto, face ao feedback visual proporcionado pelo computador, Lucas aprecia, mas não certifica a construção de André, pois considera que não se pretende construir um pentágono. André procura informação para verificar qual o número de lados requerido para o polígono, passando a partilhar a opinião de Lucas e os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador.

(2) Construção dos contornos da figura

André passa novamente à ação com a construção geométrica de um hexágono regular e, em seguida, utiliza a ferramenta *Semicircunferência (Dois Pontos)* numa construção geométrica. Lucas parece aceitar a construção, mas questiona o colega, focando-se no ponto médio de AB. Apesar desta informação, André opta por marcar um ponto a meio baseando-se na grelha, passando a ter uma construção geométrico-empírica. Seguidamente surge um momento de negociação, onde se dá a emissão e receção de feedback oral, no qual os alunos fazem uma apreciação da ação no sentido de compreender e verificar a validade do ponto marcado por André. Os alunos parecem partilhar agora a opinião de Lucas e o aluno passa à ação e utiliza a ferramenta *Ponto Médio ou Centro*, para determinar os vértices dos triângulos da parte inferior da figura (fig. 5.33). Seguidamente Lucas escolhe a ferramenta *arco circuncircular*. Visando a Compreensão, André questiona Lucas, procurando apreciar o porquê da utilização dessa ferramenta, sublinhando que se trata de desenhar triângulos. André avalia corretamente o feedback visual. Lucas procura informação através de uma revisão recuando alguns passos na construção. Em seguida, Lucas age fazendo uma nova construção geométrica – um hexágono com pontos médios, semicircunferências e triângulos. Lucas utiliza as ferramentas adequadas e as estratégias certas e os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador. Aparentemente os dois alunos parecem partilhar a ideia de que a construção dos contornos obtida é a pretendida.

(3) Ornamentação da figura

Lucas mostra compreender o que se pretende ainda fazer nesta tarefa, avaliando a necessidade de rigor geométrico na implementação da estratégia para acrescentar os novos elementos decorativos. O aluno informa o colega de que a tarefa não é idêntica à anterior, no que se refere à questão da ornamentação. Segue-se um momento de emissão e receção de feedback oral, onde os alunos apreciam e verificam a validade/necessidade da reprodução rigorosa da figura. Os alunos negoceiam sobre a necessidade de os adornos ficarem de acordo com o que é proposto no enunciado.

André passa à ação, ornamentando a construção geométrica. Os alunos partilham a validade da ornamentação do gato.

(4) Construção da pavimentação

Para efetuar a translação, os alunos escolhem a ferramenta adequada, utilizam uma estratégia correta e avaliam corretamente o feedback visual. Por fim, os alunos partilham a ideia da validade da sua construção geométrica em forma de pavimentação.

5.6.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

A sequência de construções tem um carácter quase exclusivamente geométrico, André adotou uma única estratégia de Construção Empírica quando escolheu marcar o ponto entre A e B baseando-se apenas na grelha. Esta sequência contínua de construções geométricas, como foi referido pode ser associada a um maior nível de abstração. Esse facto pode advir da circunstância de os alunos se encontrarem numa fase final do estudo das isometrias e estarem mais familiarizados com a utilização deste AGD.

Construção de significados a partir do feedback visual

Os alunos começam por utilizar as ferramentas *Grelha* e *Polígono Regular* de forma incorreta, em relação ao número de lados do polígono solicitado. Em seguida, optam pelas ferramentas de *Grelha*, *Polígono Regular*, *Semicircinferência (Dois Pontos)* e *Novo Ponto,* sendo esta última considerada inadequada e substituída pela ferramenta de *Ponto Médio ou Centro*. Na sequência, surge a ferramenta *Arco Circuncircular (Três Pontos),* face à necessidade de construir triângulos, como estava na figura dada. Os alunos concluem não estar a recorrer à ferramenta adequada, pois nesta fase sabem perfeitamente recorrer à ferramenta básica de construção de triângulos. Para finalizar a construção da figura requerida, os alunos constroem triângulos, utilizando as ferramentas *Grelha, Ponto Médio ou Centro,* e *Polígono*. Por fim, os alunos utilizam a ferramenta *Translação (Objeto, Vetor)* para construir a pavimentação requerida. De salientar que, apenas, em duas ocasiões, os alunos escolheram ferramentas que não eram adequadas, apenas utilizaram uma estratégia incorreta (no engano inicial do número de lados do polígono) e avaliaram sempre, de forma correta, o feedback visual emitido pelo computador. Estes factos sugerem que os alunos revelam um nível bastante razoável de conhecimento do *software*, tirando maior vantagem da utilização do AGD escolhido.

5.6.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

Tipos de feedback oral

A sequência de subcategorias de feedback oral emergentes é ilustrativa da diversidade do feedback oral entre os alunos. Neste episódio, destacam-se sete categorias distintas, o Feedback de Estratégia, que ocorre no início do episódio e onde os alunos referem já ter alinhavado uma estratégia para fazer face à tarefa; o Feedback de Certificação, onde Lucas não certifica a construção inicial de André; o Feedback de Revisão, onde André começa por interromper Lucas, pedindo-lhe para rever o número de lados do polígono e, finalmente, quando Lucas interrompe André para rever a construção; o Feedback de Focagem, onde Lucas questiona André sobre o ponto médio e quando André refere o objetivo da tarefa; o Feedback de Verificação, que ocorre por duas vezes, quando os alunos entram em diálogo, primeiramente acerca do ponto marcado de forma inexata e, em seguida, acerca da validade ou da necessidade de ornamentação da figura; o Feedback de Apreciação, onde André questiona Lucas sobre a utilização da ferramenta *arco circuncircular*, que este se preparava para utilizar, referindo que se trata de triângulos, e onde Lucas afirma que não resulta fazer a construção de forma aleatória e, o Feedback de Conexão, onde Lucas faz referência à tarefa anterior para justificar a sua opinião.

De salientar que, neste episódio, as categorias principais de Avaliação e de Informação, foram igualmente representativas. No que se refere à categoria de Questionamento, esta não foi identificada. Uma explicação para esta ausência de Questionamento, pode estar no facto de os alunos estarem na fase final do estudo das translações e revelarem uma maior compreensão dos conceitos envolvidos.

Construção de significados a partir do feedback oral

Esta sequência de evidências empíricas de construção de significados, teve início com um momento de Negociação que, apesar de estar ligado à compreensão da estratégia a implementar, teve como principal objetivo negociar qual dos alunos iria interagir com o computador. Os momentos de Negociação atravessam todo o episódio, embora nem sempre surjam de forma explícita. Também foram identificados momentos de Negociação relacionados com a marcação do ponto médio, que levou à troca de utilizador do computador (André trocou de lugar com Lucas) e, por último, os momentos de Negociação surgem ligados à necessidade, ou não, de adornos na construção da figura. Emergem ainda momentos de Compreensão quando os alunos procuram compreender qual a melhor estratégia ou atribuir significado à tarefa. Os momentos de Partilha estão relacionados com a validade das construções e das ornamentações. Pelas razões apontadas no ponto anterior, surgem alguns momentos de negociação ligados às questões pontuais referidas. Dada a fase avançada do estudo das translações, os alunos mostraram-se mais preocupados em avaliar o feedback emitido pelo computador e a informar, promovendo momentos de partilha e de compreensão.

5.6.4. Síntese

Este episódio está inserido numa tarefa que tem como principais objetivos levar os alunos a compreender as noções de vetor e de translação. Ao contrário do episódio anterior, os alunos não tiveram dificuldades em construir o padrão por aplicação de translações, mostrando cumprir o objetivo proposto. A ocorrência que levantou dúvida aos dois alunos, foi a utilização de um ponto médio ou de um ponto livre na construção. Outra das questões emergentes foi a forma e a necessidade das ornamentações geométricas. Em ambos os casos foi Lucas o impulsionador das questões, emitindo feedback oral face ao feedback visual emitido pelo computador. Merece destaque a destreza que os alunos evidenciaram, neste momento, na manipulação do GeoGebra e na forma válida como sistematicamente avaliaram o feedback visual emitido pelo computador.

5.7. Episódio 6: À Descoberta do Teorema de Pitágoras

5.7.1. Apresentação da Tarefa

A tarefa TP3 tem como objetivo que os alunos compreendam o teorema de Pitágoras. Tal como no episódio 3, estamos igualmente perante uma tarefa em que o AGD facilita a exploração e análise pelos alunos (Laborde, 2011). Nomeadamente, porque proporciona a identificação de relações entre elementos de uma figura através do arrastamento, em que se procura generalizar um resultado, testando rapidamente vários casos particulares.

Este episódio visa a construção de significado das relações envolvidas no teorema de Pitágoras, a nível geométrico e algébrico. Ao nível da construção de significados, o arrastamento surge como uma via para a verificação de conjeturas. A construção do triângulo e dos respetivos quadrados envereda por processos que já devem estar internalizados pelos alunos. Inicialmente, foi solicitada a construção de um triângulo retângulo escaleno. Seguidamente, é colocada a questão 1.2 (Fig. 5.36).

1.2. Sobre cada lado do triângulo construam quadrados, conforme a figura

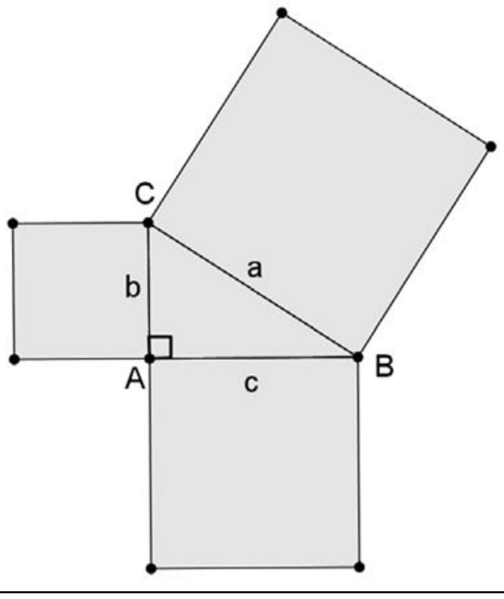


Figura 5.36. Enunciado da construção de suporte para o Teorema de Pitágoras

Depois são colocadas as questões seguintes (Fig. 5.37):

1.3.	Determinem a área de cada um dos quadrados
1.4.	Estabeleçam uma relação entre as áreas desses quadrados

Figura 5.37. Enunciado das questões relacionadas com a tarefa do Teorema de Pitágoras

6.7.2. Descrição do Episódio

Lucas começa por ler a questão e André constrói um triângulo retângulo escaleno, utilizando a grelha e a ferramenta *Polígono*. Seguidamente, com a ferramenta *Polígono Regular*, seleciona dois pontos e define quatro vértices, repetindo este procedimento até completar uma construção semelhante à figura 5.36.

Lucas comenta com André que é necessário calcularem as áreas. André efetua o cálculo das áreas utilizando a ferramenta *Área*, como mostra a figura seguinte.

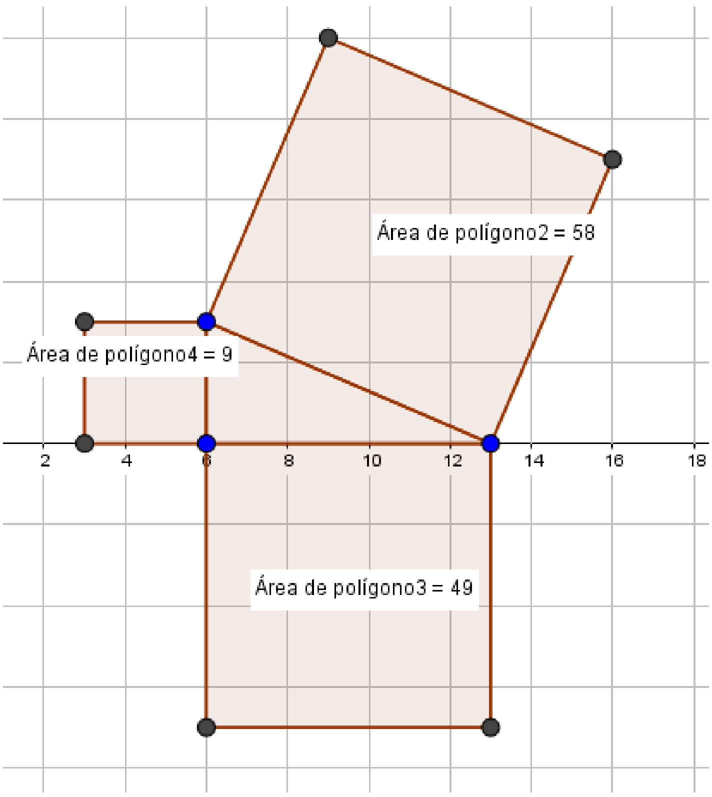


Figura 5.38. Construção de suporte para o Teorema de Pitágoras com áreas

Na sequência, os alunos procuram responder à questão 1.4 quando surge o diálogo seguinte:

Lucas: Há relação entre as áreas dos quadrados? 9, 49, 58? Deixa ver na tabuada, 58:9?
André: Espera, soma lá estes. Soma lá estes, soma lá!! (pede ao colega que parece não querer saber do seu raciocínio).
Lucas: Vai dar 58.
Lucas: Olha, sabes qual é a relação? (pergunta decidido).
André: Espera aí, eu sei qual é a relação.

André tenta perceber o exercício, porém parece ainda não conseguir acompanhar as ideias do colega e a pressão do colega não parece ajudar, como mostra o diálogo seguinte:

Lucas: É que este mais este, dá igual a este. (afirma, concluindo).
André: Não, não, não.
Lucas: Dá sim. 49+9 dá 58.
André: Sim, mas é como a gente estava a fazer. Os quadrados… (tenta explicar).
Lucas: Vá 58 ao quadrado, dá 3364.
André: 3000… E o outro?
Lucas: 3364.
André: Vês! E 49+9...
Lucas: Dá 58. A relação é que o maior… (Lucas não percebe bem o raciocínio).
André: Os dois mais pequenos é igual ao comprimento maior. (explica).
Lucas: A área do maior. Sim, é isso.
André: A soma da área dos mais pequenos é igual à área do maior…
Lucas: Então…
André: Então é o teorema de Pitágoras! (conclui).

Seguidamente, André arrasta o triângulo, mantendo-o retângulo, com a ajuda da grelha, obtendo outros valores, que Lucas afirma manterem a relação encontrada.

5.7.3. Análise do Episódio

Na abordagem ao problema proposto, os alunos passam por quatro objetivos: (1) Construção da figura; (2) Determinação da área dos quadrados; (3) Procura da relação existente entre as áreas; (4) Verificação da relação existente entre as áreas. Seguidamente, analiso este episódio segundo os objetivos referidos e sob a lente da codificação dos ciclos de feedback: Fases do Feedback, Estratégias de construção e arrastamento, Feedback oral entre alunos e Construção de significados.

(1) Construção da figura

Lucas começa por ler a questão com o intuito de compreender a tarefa.

André é o primeiro a agir, escolhendo de forma adequada a grelha e a ferramenta *Polígono*. Depois, aplicando a estratégia correta, construiu um triângulo retângulo escaleno. Por último, os alunos avaliaram corretamente o feedback visual emitido pelo computador aprovando o triângulo retângulo escaleno construído.

Seguidamente, André volta à ação, construindo um quadrado em cada lado do triângulo, para tal, recorreu adequadamente à ferramenta *Polígono Regular* e estabeleceu a estratégia correta. Por último, os alunos avaliaram corretamente o feedback visual aprovando a construção empírico-geométrica obtida.

(2) Determinação da área dos quadrados.

Lucas emite feedback oral informando o colega de que é necessário medir as áreas. André parece concordar com a opinião de Lucas e calcula as áreas, recorrendo à ferramenta *Área*.

(3) Procura da relação existente entre as áreas.

Nesta fase, surge um momento de emissão e receção de feedback oral. Com o intuito de compreender, Lucas questiona André sobre a relação a explorar entre os três valores numéricos. Neste momento, inicia-se um processo de Negociação. Lucas informa sobre uma possível estratégia, que consiste em dividir o valor da área maior por um dos valores das mais pequenas. Por sua vez, André informa que a estratégia a seguir é a de somar os dois valores menores. Essa informação é seguida de nova informação, por parte de Lucas, em forma de resposta, indicando que o valor da soma é 58. Depois Lucas sonda André, questionando-o sobre o significado desse valor, tentando verificar se este teria compreendido. Segue-se um momento em que os alunos se informam mutuamente, em formato de resposta, onde André afirma saber qual é a relação. Por sua vez, Lucas afirma que a soma dos valores menores é igual ao valor maior. Seguidamente, os alunos iniciam um processo de apreciação. André não certifica a afirmação anterior de Lucas. Em seguida, os alunos iniciam um diálogo com o intuito de verificar a estratégia implementada, da soma dos valores. Entretanto, André informa sobre uma estratégia possível, que consiste na análise dos quadrados dos quadrados. Os alunos dialogam, apreciando e verificando os novos valores obtidos. Para se orientar, André volta a questionar sobre a soma dos valores numéricos menores. Lucas informa novamente, em forma de resposta, que o valor da soma é 58. Segue-se um momento de questionamento, onde Lucas tenta sugerir uma solução, deixando no ar uma frase incompleta: "A relação é que o maior…". Dentro do questionamento, segue-se uma fase de exploração onde os alunos entram em diálogo, completando as ideias um do outro, negociando a melhor forma de formalizar o enunciado do Teorema de Pitágoras. Por fim, os alunos partilham o significado do enunciado do Teorema de Pitágoras.

(4) Verificação da relação existente entre as áreas

André volta à ação, fazendo arrastamentos divagante-teste nos vértices do triângulo, para obter novos valores para as áreas. André compreende que o arrastamento tem de ser feito de forma a manter a perpendicularidade entre os catetos do triângulo e Lucas mostra compreender como conferir a relação. Assim, os alunos rececionam o feedback visual emitido pelo computador e percecionam que a relação se mantém com os novos valores.

5.7.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

Na resolução desta tarefa apenas emerge uma construção e um arrastamento, não traduzindo toda a profundidade e interatividade do episódio, no entanto, tal não impede a ocorrência de feedback visual. A construção Empírico-Geométrica realizada por André baseia-se no recurso à Grelha, em vez de utilizar os conceitos de perpendicularidade, à semelhança do que tinham feito no episódio 1, realizando assim uma Construção Empírico-Geométrica em vez de uma Construção Geométrica. Deste modo, o arrastamento em vez de ser um Arrastamento Limitado-Teste, passou a ser Arrastamento Divagante-Teste, pois o ponto arrastado não é semi-arrastável, mas um ponto "completamente arrastável" sem restrições, embora André tenha recorrido à ajuda da grelha, mantendo a perpendicularidade e, deste modo, resolvido o problema. Isto denota uma certa mestria na utilização do AGD, embora revele que os alunos não foram capazes de construir um triângulo retângulo resistente quando os seus vértices são arrastados.

Construção de significados a partir do feedback visual

André começa por utilizar as ferramentas *Grelha* e *Polígono* de forma correta e, em seguida, completa a tarefa recorrendo à ferramenta *Polígono Regular*. Não revelou dificuldade na escolha das ferramentas nem nas estratégias a implementar, assim como na forma como avaliou o feedback visual emitido pelo computador. A restante tarefa foi realizada através de medições e arrastamentos. A natureza da tarefa não oferece grande dificuldade, em termos de construções, a alunos como Lucas e André, que estão habituados a utilizar o GeoGebra. A parte que requer alguma reflexão e interpretação é a forma como percecionam o feedback visual emitido pelo computador através dos arrastamentos e medições, que só é possível constatar através do feedback oral.

5.7.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

Tipos de feedback oral

A sequência de subcategorias de feedback oral é ilustrativa da diversidade do feedback emergente entre alunos. Neste episódio destacam-se sete categorias distintas, sendo as mais frequentes, o Feedback de Estratégia e o Feedback de Resposta. O primeiro ocorre quando os alunos referem a estratégia a implementar e o segundo, quando estes respondem diretamente à questão lançada. Para além disso, emergem as categorias de: Feedback de Exploração, quando Lucas questiona André sobre a relação do terno de valores numéricos e, no final, quando os alunos entram em diálogo, completando as ideias um do outro, sobre a melhor forma de formalizar o enunciado do Teorema de Pitágoras; Feedback de Sondagem, quando Lucas questiona André sobre se é do seu conhecimento a relação existente entre os valores numéricos obtidos; Feedback de Certificação, quando André mostra discordar de Lucas que afirma que a soma dos valores menores é igual ao valor maior; Feedback de Verificação, quando os alunos dialogam, primeiro sobre a estratégia de somar os dois valores menores e, seguidamente, sobre a comparação dos valores obtidos ao calcularem os quadrados dos quadrados; Feedback de Orientação, quando André volta a questionar sobre a estratégia da soma dos valores numéricos menores.

De salientar que o feedback de resposta aparece como um dos mais representativos. Este facto deve-se à própria natureza da tarefa que potenciou o diálogo entre alunos, na procura de soluções para os cálculos da soma das áreas dos quadrados.

A categoria principal mais representativa é a Informação seguida do Questionamento, sendo a Avaliação a menos representativa. Este facto pode significar que, neste episódio, os alunos estiveram menos preocupados em avaliar as construções e mais preocupados em informar e questionar. Como referi anteriormente, a própria tarefa é pouco exigente em termos de construções para alunos com experiência de trabalho no GeoGebra, o que originou a reduzida representatividade da Avaliação e, pelo contrário, uma maior representatividade das categorias de Questionamento e Informação.

Construção de significados a partir do feedback oral

A sequência de evidências empíricas de construção de significados torna visível a existência dos vários momentos pelos quais os alunos passam até chegarem à explicitação do Teorema de Pitágoras e ao seu significado. Esse processo tem início com dois momentos de Compreensão, com o Questionamento sobre a tentativa de perceção do objetivo da tarefa e da estratégia a implementar. Estes dois momentos foram intervalados por um momento de Partilha, no processo de cálculo das áreas. Depois, emergem momentos de Negociação, onde os alunos negoceiam a estratégia a implementar e a melhor forma de formalizar a relação obtida. Esses momentos de Negociação foram intervalados, primeiro por um momento de Compreensão, onde Lucas questiona André sobre a estratégia a implementar, e depois por um momento de Partilha. No momento de Partilha, os alunos compartilham a ideia de que a estratégia da soma das áreas é a mais indicada. No final, emerge outro momento de Partilha, em que os alunos partilham o significado atribuído ao Teorema de Pitágoras, seguido de um momento de Compreensão no que concerne à direção a imprimir ao arrastamento e à forma de conferir a relação obtida. Apesar do que foi constatado no ponto anterior, surgiram poucas situações de emissão de feedback oral em que os alunos se preocuparam em avaliar as construções. Os momentos de construção de significados, a partir do feedback oral, surgiram com igual representatividade. Seria de supor que a reduzida emissão de feedback oral de apreciação levasse a uma menor representatividade dos momentos de partilha. No entanto, esses momentos surgem ligados a situações onde essa Avaliação não surge. À semelhança dos momentos de Negociação, os momentos de partilha surgem em situações em que os alunos partilham os significados matemáticos ligados ao Teorema de Pitágoras.

5.7.4. Síntese

Este episódio está inserido na tarefa TP3 que tem como principal objetivo a compreensão do Teorema de Pitágoras. Inicialmente os alunos constroem um triângulo retângulo e um quadrado sobre cada um dos lados. Depois de medirem as áreas dos quadrados, os alunos dialogam procurando estabelecer uma relação. Por fim, os alunos através do arrastamento, testaram a situação para outros casos, até à formalização do Teorema de Pitágoras. Os alunos mostram destreza na manipulação do AGD, no estabelecimento de estratégias e na forma como avaliam o feedback visual emitido pelo computador. De realçar o diálogo entre os alunos onde se registam momentos de negociação, visando a compreensão e partilha de significados da relação entre as áreas.

5.8. Episódio 7: Os Postes

5.8.1. Apresentação da tarefa

A tarefa TP3 tem como objetivo desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Este é um exemplo de uma tarefa no qual o recurso a um ambiente de geometria dinâmica se revela decisivo (Laborde, 2011). A tarefa consiste numa construção dinâmica que depois, através da experimentação, torna possível identificar um conjunto de propriedades. Este episódio insere-se na resolução do problema de estabelecimento do comprimento mínimo de um fio elétrico que liga à terra entre dois postes. Especificamente, possibilita que os alunos vão construindo o significado do problema, em termos matemáticos, discernindo as variáveis em causa (comprimentos do fio elétrico e ângulos do fio com a terra) e as relações entre elas. Em termos de construção de significado instrumental, nesta fase os alunos devem ter acesso a um manancial de ferramentas internalizadas, e assim devem integrá-las naturalmente nas estratégias utilizadas.

O enunciado inicialmente é composto por um conjunto de indicações para a construção de uma figura dada:

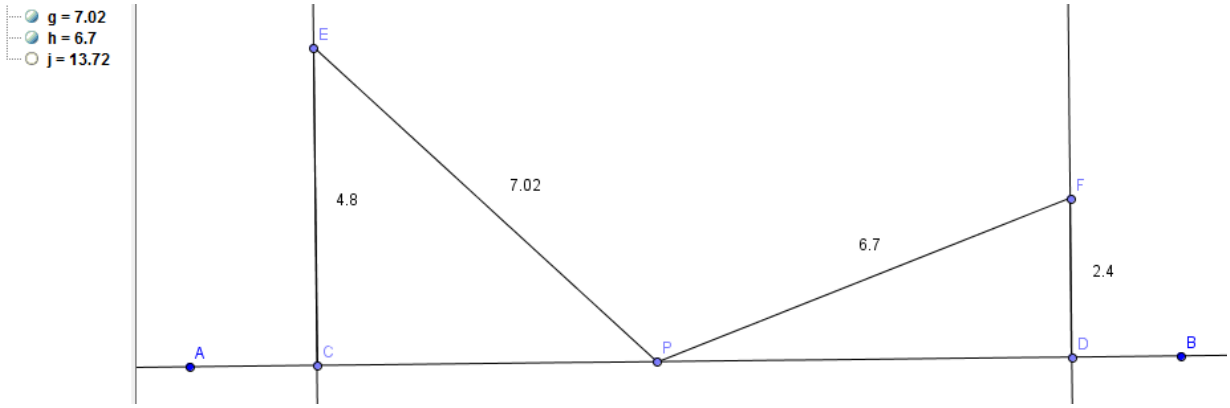


Figura 5.39. Figura do enunciado para a conexão com fio elétrico dos postes

Os segmentos de reta verticais representam os postes de eletricidade conectados com um fio elétrico que precisa de estar preso à terra algures entre os postes. O objetivo é determinar o local entre os postes de forma a gastar a menor quantidade de fio possível, de acordo com as seguintes instruções:

1.4. Depois de posicionarem o ponto P reflitam o triângulo [ECP] segundo a reta AB
1.5. Unam o ponto E' ao ponto F através de um segmento de reta.
1.6. Marquem o ponto G como sendo a interseção desse segmento de reta com a reta AB.
1.7. Comparem a posição do ponto G com o ponto P.
1.8. Alterem os comprimentos dos postes por arrastamento e registem soluções para o problema.

Fig. 5.40. Parte do enunciado dos postes elétricos

5.8.2. Descrição do Episódio

Inicialmente, André assume a interação com o computador e, ao longo da tarefa, os alunos vão trocando. André começa por construir uma reta horizontal que passa por dois pontos e decide rapidamente utilizar a grelha do menu que, no seu ponto de vista, iria tornar-se útil. Seguidamente, começa por construir retas adicionais como se pode ver na figura 5.41.

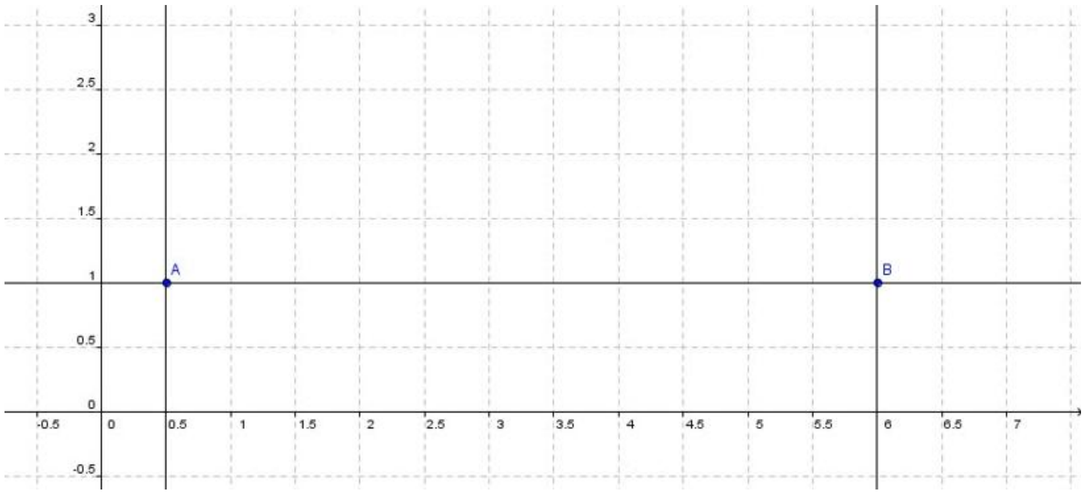


Figura 5.41. Construção inicial dos postes

Na sequência marca os pontos que definem as extremidades de cada poste e constrói os segmentos de reta que representam os postes. Mede os dois segmentos cujos comprimentos são duas e uma unidade, respetivamente. Depois, define o ponto médio do segmento de reta horizontal entre as bases dos dois postes. Finalmente, constrói os segmentos que representam os postes as duas partes de fio elétrico, ligando o ponto mais alto de cada poste com o ponto médio do segmento horizontal. Os alunos trocam de papéis e Lucas passa a interagir com o computador.

Lucas renomeia os pontos e deflecte o triângulo retângulo tendo o poste mais alto como um dos lados, seguindo a sugestão do André (Fig. 5.42).

Lucas também constrói o segmento que une o extremo do poste mais alto refletido (ponto E_2) ao extremo do poste mais baixo (Ponto F), conforme solicitado no enunciado, sendo que esse segmento interseta a reta horizontal.

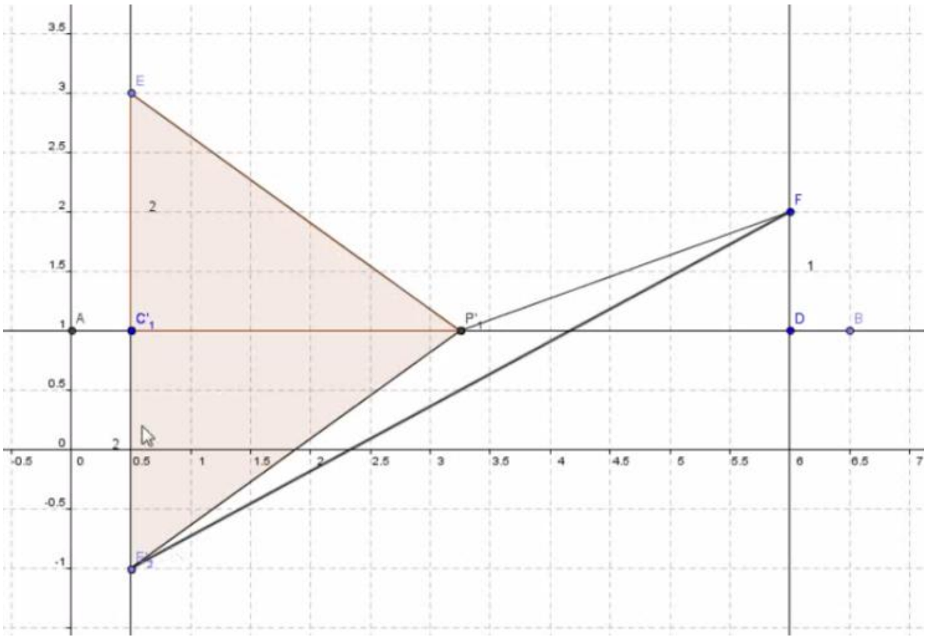


Figura 5.42. Construção com o triângulo refletido

Seguidamente, Lucas tenta arrastar o ponto onde as duas partes de fio elétrico se cruzam, mas o ponto não se move, pois André tinha-o definido como ponto médio do segmento de reta horizontal, sendo assim um ponto fixo. Lucas esconde o ponto onde os fios elétricos se cruzam (o ponto médio do segmento de reta horizontal), depois de ter a anuência de André, e procura a ferramenta que permite encontrar o ponto de intersecção entre os dois segmentos de reta.

Nessa altura o professor chama a atenção da turma para a necessidade de utilizar medidas para investigar a melhor localização para o ponto onde as duas partes de fio elétrico se cruzam.

Lucas, olhando atentamente para a imagem do ecrã, repara nos comprimentos dos postes e comenta:

Lucas: Olha! Este é mais alto; será verdade que a distância deste ao ponto de intersecção é maior?

Pouco depois, Lucas decide apagar todas as construções e recomeçar. Sugere então que seja o André a interagir com o computador. André reconstrói a figura até ao momento onde seria necessário mover o ponto onde as duas partes de fio elétrico se cruzam.

André repete os mesmos procedimentos para a construção dos postes e finalmente define o ponto P como sendo um ponto livre no segmento de reta horizontal. Depois de construir os segmentos EP e FP (desde o topo dos postes até ao ponto P na terra), André mede os seus comprimentos. As alturas dos postes são novamente de duas e uma unidade respetivamente.

Lucas: Agora, se este tem duas unidades de altura e este tem só uma unidade de altura, qual dos dois irá precisar de mais fio elétrico de cima a baixo?
André: Precisa?
Lucas: Aqui, se pensares em altura, este irá precisar do dobro da altura do outro. O que importa mais? A altura ou a base?
André: O que é dito aqui [no problema]? Gastar o menos possível?
Lucas: Sim.
André: O menos possível significa que deveríamos fazer os dois [fios elétricos] iguais.

André experimenta arrastar o ponto P e observa o resultado. Quando o aluno arrasta o ponto de interseção emerge o seguinte diálogo:

André: Faz a soma: 3.12 + 3.26.
Lucas:Ah, sim. Eu sei como é que vamos fazer. (O aluno utiliza a máquina de calcular).
André: É 6.38. E agora se alterarmos isto para 3.2 (referindo-se a um dos pedaços de fio elétrico), *dá 6.36* (soma dos comprimentos).
Lucas: Sim. Para que lado é que o arrastaste?
André: Este lado.
Lucas: Esse lado? Então estás errado, tens de o arrastar para o outro lado.
André: Sim (ele arrasta de novo). *Com 3.1* (referindo-se a um dos pedaços de fio elétrico) *dá 6.39* (soma dos comprimentos).
Lucas: A resposta será 6.36, então.
André: Sim, é desta forma.
Lucas: Espera, não o mexas. Olha, esta não é a resposta correta.
André: Ah, agora está aqui. (O aluno arrasta o ponto de novo).

Seguidamente André mede os ângulos e nota que os ângulos entre os fios elétricos e a reta horizontal têm amplitudes muito próximas.

André: Não, não é. Está aqui: vinte e oito, vinte e oito. (Referindo-se à amplitude dos ângulos).

Levando a cabo o arrastamento e a observação das amplitudes dos ângulos (figura 5.43), os alunos reconheceram que a solução correspondia ao ponto onde os dois ângulos teriam amplitudes iguais.

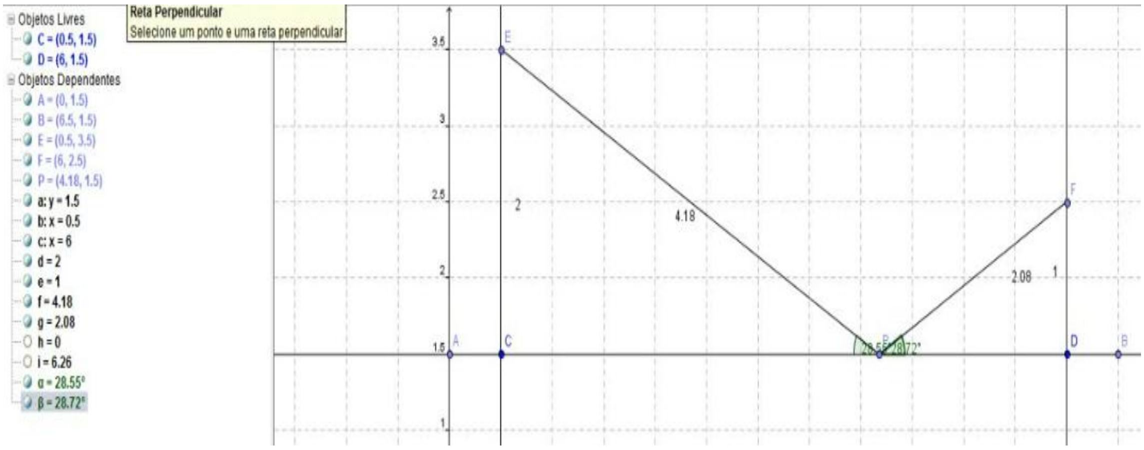


Figura 5.43. Construção final com os ângulos

5.8.3. Análise do Episódio

Na abordagem à questão proposta os alunos passaram por dois objetivos: (1) Construir a figura; (2) Encontrar o posicionamento do ponto requerido. A análise do episódio é feita segundo esses objetivos e os pontos-chave sob a lente da codificação dos ciclos de feedback: fases do feedback, estratégias de construção e de arrastamento, feedback oral entre alunos e construção de significados.

(1) Construir a figura

Antes de iniciar uma ação, André opta, de forma adequada, por usar a grelha e a ferramenta *Reta (Dois Pontos)* e depois escolhe uma estratégia para construir um triângulo retângulo. Os alunos avaliam corretamente o feedback visual emitido pelo computador, considerando a figura válida. André volta à ação acrescentando novas construções à anterior. Este aluno começa por optar pelas ferramentas *Ponto Médio ou Centro, Segmento de Reta (Dois Pontos) e Reflexão Axial (Objeto, Eixo)*. A escolha dessas ferramentas foi adequada, à exceção do *Ponto Médio ou Centro*. Esta escolha leva a que Lucas tente fazer um arrastamento impossível, pois não consegue arrastar o ponto de interseção. No entanto, os alunos acabam por avaliar corretamente o feedback visual do computador invalidando a construção estático-geométrica.

Segue-se um momento de emissão e receção de feedback oral onde André aprecia e certifica a estratégia de Lucas de esconder o ponto onde os fios elétricos se cruzam, mas que não resulta. Lucas questiona e sonda o colega, tentando perceber se a posição do ponto depende da altura dos postes.

Entretanto, André volta à ação repetindo os mesmos procedimentos, mas, desta vez, escolhe adequadamente um ponto livre no segmento de reta horizontal, realizando uma construção geométrica. Os alunos irão agora conseguir mover o ponto de interseção.

(2) Encontrar o posicionamento do ponto requerido

Segue-se um novo momento de emissão e receção de feedback oral onde Lucas volta a questionar André, procurando informação e compreensão, sobre qual dos segmentos de fio elétrico ligados ao ponto de interseção com a terra precisará de mais comprimento, focando-se agora nas medidas dos comprimentos dos postes. André questiona, tentando explorar qual o significado do verbo precisar, que foi utilizado por Lucas. Lucas também questiona André, mas agora procurando compreender e explorar a relação entre as alturas e as bases, relativamente ao fio elétrico necessário. Segue-se um momento de troca de informação e negociação, no qual André revê e questiona, focando-se no objetivo da tarefa. Lucas responde, mostrando partilhar o significado atribuído ao objetivo por André. Seguidamente, André sugere a estratégia de fazer com que as duas partes de fio tenham o mesmo comprimento e age arrastando o ponto ao longo da reta, num arrastamento divagante-limitado. Face ao feedback visual emitido pelo computador, André também sugere, visando a compreensão, que Lucas efetue a soma dos comprimentos de fio que surgem no ecrã do computador. Lucas aprecia e certifica, mostrando partilhar a estratégia de André e efetua o cálculo. Segue-se um momento em que André emite feedback oral em forma de informação, primeiro respondendo a ele próprio, referindo o resultado: 6.38. Depois, sugerindo a estratégia de que alterando os comprimentos de um dos lados para um valor específico conseguem diminuir o valor da soma. E, finalmente responde com o novo valor da soma. Lucas aprecia a resposta, certificando o resultado.

André passa à ação, com um arrastamento divagante-limitado, movendo o ponto de interseção das linhas elétricas com a terra. O computador emite feedback visual mostrando o comprimento a aumentar. Visando a negociação, Lucas questiona André sobre qual o sentido em que arrastou o ponto para explorar a relação existente entre o arrastamento e o comprimento dos fios elétricos. André responde, informando de qual o sentido do arrastamento executado. Lucas aprecia a situação e refere que o sentido de arrastamento não é o correto, indicando que André deve arrastar o ponto no sentido contrário. André aprecia a indicação do colega, certificando, e mostra partilhar a ideia de Lucas. André volta à ação, alterando o sentido e procedendo a um arrastamento limitado-teste. André informa dos novos valores obtidos com a nova estratégia implementada. Lucas também informa, mas agora para estabelecer a conexão com o resultado obtido anteriormente que, sendo menor, refere ser a solução. Assim, Lucas conclui que a resposta ao problema é 6.36 unidades. André aprecia, certificando e mostrando partilhar a ideia de Lucas. No entanto, aparentemente, os alunos não ficaram totalmente convencidos e questionam-se sobre a validade das soluções. Entretanto, André volta a fazer um arrastamento divagante-limitado, procurando informações no feedback visual emitido pelo computador relativo à medição dos comprimentos dos comprimentos dos segmentos de reta que representam o fio elétrico. Os alunos voltam a negociar a veracidade da resposta. André compreende que a resposta depende dos ângulos e mede-os. André aprecia e refuta a solução anterior, tendo por base a amplitude dos ângulos. Os alunos partilham a ideia de que a solução corresponde ao ponto onde, face ao feedback visual, os dois ângulos teriam amplitudes iguais.

5.8.3.1 Análise e Caracterização do Feedback Visual

Construções e arrastamentos

A sequência de estratégias implementadas inicia-se com algumas estratégias de construção, tendo pelo meio um Arrastamento Impossível e terminando com várias estratégias de arrastamento. Esta sequência de estratégias reflete a trajetória seguida pelos alunos face à tarefa. A construção Estático-Geométrica inicial deu origem a um

Arrastamento Impossível. Depois de refazerem a construção, realizando uma construção Geométrica, iniciaram uma sequência de arrastamentos. Começaram com uma estratégia de Arrastamento Divagante-Limitado, indiciando a procura de informação no feedback visual emitido pelo computador com o intuito de afinar a estratégia de arrastamento. Com base no feedback visual emitido pelo computador relativo aos comprimentos, os alunos prosseguem com uma estratégia de Arrastamento Limitado-Teste. Não tendo a certeza de terem chegado à solução pretendida, voltam a implementar uma estratégia de Arrastamento Divagante-Limitado. Seguidamente, concluem, implementando uma estratégia de Arrastamento Limitado-Teste tendo por base duas fontes de feedback visual emitido pelo computador: o comprimento do fio elétrico e a amplitude dos ângulos.

À semelhança do episódio 1, neste episódio, os processos ascendentes e descendentes (Saada-Robert, 1989; Olivero, 1999; Arzarello *et al.*, 2002) descritos anteriormente para as construções tornam-se transparentes para as estratégias de arrastamento seguidas pelos alunos:

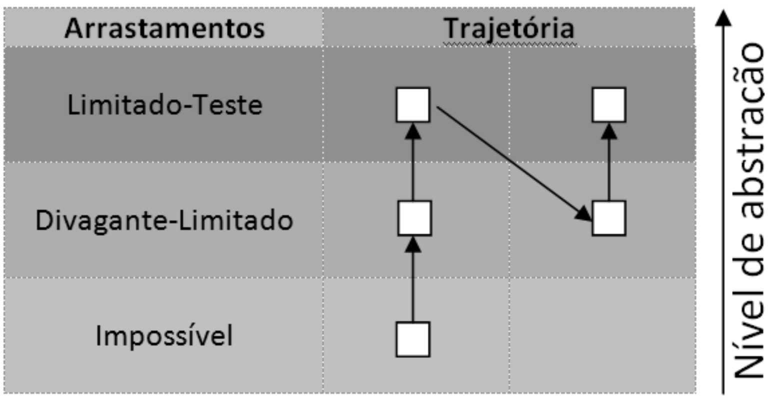


Fig. 5.44. Trajetória de arrastamentos do episódio 7

Construção de significados a partir do feedback visual

André começa por utilizar as ferramentas *Grelha* e *Reta (Dois Pontos)* de forma correta. Completando depois com as ferramentas *Ponto Médio ou Centro, Segmento de Reta (Dois Pontos) e Reflexão Axial (Objeto, Eixo).* A escolha da ferramenta *Ponto Médio ou Centro* não foi adequada. Antes de refazerem a construção, os alunos escolhem de forma não adequada a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*. Depois repetem a construção, mas a escolha recai agora, de forma adequada, sobre a ferramenta *Novo Ponto*, permitindo mais tarde que ele seja "arrastável". À exceção dessa ocorrência, os alunos não tiveram qualquer dificuldade nas construções, pois o próprio objetivo da tarefa não incidia nesse fator, mas sim naquilo que poderia advir dos raciocínios decorrentes dos arrastamentos e do feedback oral que estes provocariam.

5.8.3.2 Análise e Caracterização do Feedback Oral

Tipos de feedback oral

A sequência de subcategorias de feedback oral é ilustrativa da diversidade do feedback emergente entre os alunos. Neste episódio, destacam-se oito categorias distintas, sendo as mais frequentes o Feedback de Estratégia e o Feedback de Certificação. O primeiro é aquele em que os alunos propõem as estratégias a implementar ou referem o resultado da estratégia por eles implementada. O segundo é aquele onde os alunos certificam as estratégias implementadas ou confirmam resultados ou conclusões obtidas. Também emergem com muita frequência (por quatro ocasiões), durante este episódio, as categorias de Feedback de Exploração e Feedback de Resposta. O primeiro ocorre quando os alunos se questionam sobre significados ou relações, ou quando os alunos dialogam sobre a validade das soluções enquanto André arrasta o ponto de interseção. O segundo ocorre quando os alunos dão uma resposta direta a uma questão colocada pelo colega ou por ele próprio. Para além destas categorias, emergem as seguintes categorias de feedback oral entre alunos: Feedback de Sondagem, onde Lucas questiona André sobre a relação existente entre a altura do poste maior e a distância ao ponto de interseção; Feedback de Focagem, onde Lucas volta a questionar André, focando-se agora nas medidas dos comprimentos dos postes ou quando André revê e questiona Lucas sobre o objetivo da tarefa; Feedback de Apreciação, onde Lucas contraria o sentido de arrastamento efetuado por André e sugere o sentido contrário ou quando André refuta a solução obtida anteriormente, referindo os valores das amplitudes dos ângulos delimitados pelos fios elétricos e o solo; Feedback de Conexão, onde Lucas estabelece a conexão com um resultado obtido anteriormente, isto é, um valor menor do que os valores até então obtidos. A presença do Feedback de Certificação entre as subcategorias mais representativas tem a ver com o facto de que os alunos sentiram a preocupação de confirmar os resultados obtidos, mas não sentiram a necessidade de explicarem o porquê, porque na maioria dos casos essa explicação estaria subentendida. Por se tratar de uma tarefa em que os alunos sentiram a necessidade da experimentação através da medição dos resultados dos arrastamentos, também surgem como subcategorias mais representativas, o Feedback de Resposta (normalmente como resultado dos cálculos propostos pelo par) e o Feedback de Exploração, resultado da tendência exploratória das ações dos alunos.

A categoria principal mais representativa de forma destacada é a Informação. São categorias menos representadas a Avaliação, seguida do Questionamento. A representatividade das subcategorias de Feedback de Resposta e de Feedback de Estratégia justificam a maior representatividade da categoria de Informação. A representatividade da Avaliação deve-se sobretudo à subcategoria de Feedback de Certificação e a representatividade do Questionamento surge maioritariamente dada pela representatividade do Feedback de Exploração, pelas razões já apresentadas.

Construção de significados a partir do feedback oral

A sequência de evidências empíricas de construção de significados inicia-se com dois momentos de Compreensão. O primeiro, com o Questionamento sobre o possível resultado do problema; o segundo com um momento de Compreensão do significado da tarefa em causa. Depois de partilharem o objetivo a alcançar e compreenderem que têm de somar os comprimentos, surgem dois momentos intercalados de Partilha e Negociação enquanto arrastam o ponto de união dos fios. No final, os alunos partilham a ideia de validade da resposta, apoiando-se no facto de André ter compreendido que a resposta dependia das amplitudes dos ângulos e de os ter medido. Neste episódio, existem duas partes; a primeira, em que os alunos seguem um trajeto que os leva a chegar à compreensão e partilha do real objetivo do problema; a segunda, em que desenvolvem um processo que os leva a concluir o problema. Esses trajetos são caracterizados por pontos de viragem categorizados como momentos de Compreensão e Partilha: quando os alunos partilham a ideia de que o comprimento deve ser o menor possível e compreendem que devem fazer a soma dos comprimentos dos dois segmentos de reta que compõem o fio; quando André compreende que a resposta depende da amplitude dos ângulos e os alunos partilham a ideia de que a solução corresponde ao ponto onde os dois ângulos têm amplitudes iguais.

5.8.4. Síntese

Este episódio tem lugar no decurso da resolução da tarefa TP6 que tem como principal objetivo levar os alunos a resolver um problema real sem que esteja definida, à partida, uma estratégia para o resolver. Desde o início do episódio foram surgindo conjeturas. Depois de os alunos procederem à construção inicial, com um erro de marcação de um ponto fixo (ponto médio), na ligação do fio elétrico com a terra, refizeram a construção com um ponto semi-arrastável. A construção foi seguida de arrastamentos. Esses arrastamentos foram acompanhados por cálculos que envolveram as medidas dos comprimentos dos fios elétricos. Esses resultados vão sendo discutidos. Com a análise dos arrastamentos em função dos comprimentos não foi possível resolver o problema, apesar de os alunos tentarem mediante uma análise quase exaustiva de casos. Depois emerge uma estratégia de medição da amplitude dos ângulos dos fios elétricos com o solo. As medições das amplitudes dos ângulos, juntamente com a medição dos comprimentos associado aos arrastamentos, conduziram os alunos à solução do problema.

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo apresento os comentários finais, fazendo face às questões do estudo, integrando os conhecimentos teóricos e as inferências possíveis, com base nos dados empíricos e nas descrições e análises apresentadas. Não pretendo com este estudo obter respostas definitivas e acabadas; pretendo essencialmente dar um contributo para a compreensão dos processos que envolvem o feedback oral e o feedback visual do computador na sala de aula.

Durante a experiência realizada, a interação com o computador foi alternando entre os dois alunos do par investigado, permitindo assim que cada um tivesse oportunidade de pôr em prática as estratégias que, por uma ou outra razão, achavam melhores em dado momento para a resolução do problema.

Irei agora revisitar os objetivos a que me propus com o presente estudo.

6.1. Retomando o Primeiro Objetivo

Identificar como funcionam as diferentes fases do feedback emergente na resolução das tarefas.

(a) *Propor um modelo para descrever o feedback emergente na resolução das tarefas quando os alunos utilizam o GeoGebra.*

(b) *Identificar quando e como surgem as fases de ação, emissão e receção de feedback visual, assim como de emissão e receção de feedback oral.*

6.1.1. Retomando o Primeiro Sub-objetivo

(a) *Propor um modelo para descrever o feedback emergente na resolução das tarefas quando os alunos utilizam o GeoGebra.*

Nos episódios descritos e analisados no capítulo anterior, os alunos começavam por uma leitura das tarefas que lhes eram propostas. Depois disso, regra geral, um deles executava uma determinada ação no computador. Como resultado dessa ação, surgia uma imagem no computador que constitui uma emissão de feedback visual. Os alunos rececionavam esse feedback visual, construindo uma perceção do resultado da sua ação. Constatou-se que essa perceção do resultado da ação inicial pode levar a que os alunos teçam comentários ou entrem em diálogo. Se isso acontece, quando um deles emite feedback oral o outro receciona esse feedback e interpreta-o, levando a uma nova perceção da situação em resolução. Em muitos casos, pode inverter-se o sentido da interação se o outro aluno do par emite feedback oral e o que tinha emitido inicialmente receciona agora o feedback oral do seu par. Estas fases de feedback estão representadas no modelo seguinte (Fig. 6.1).

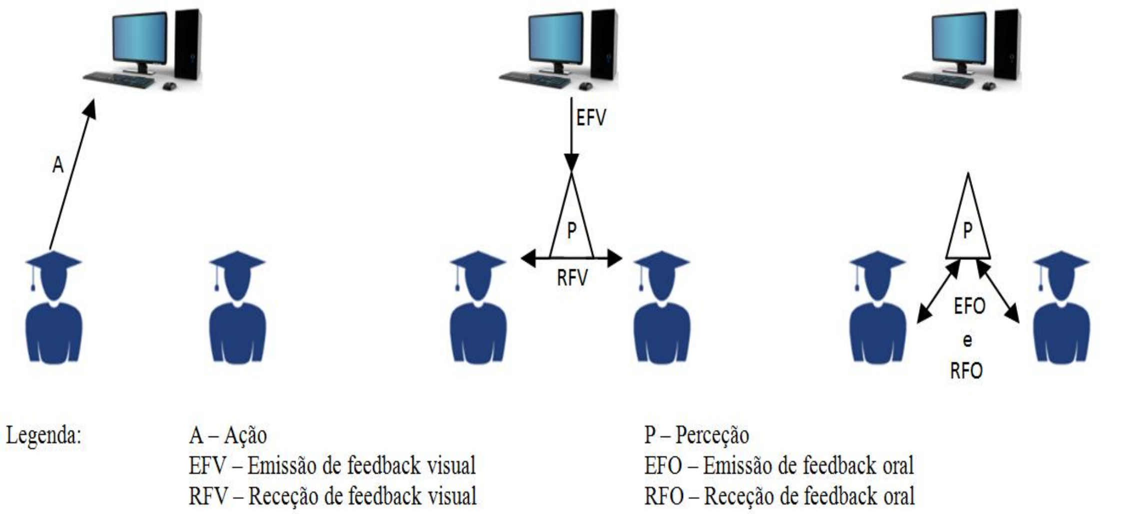


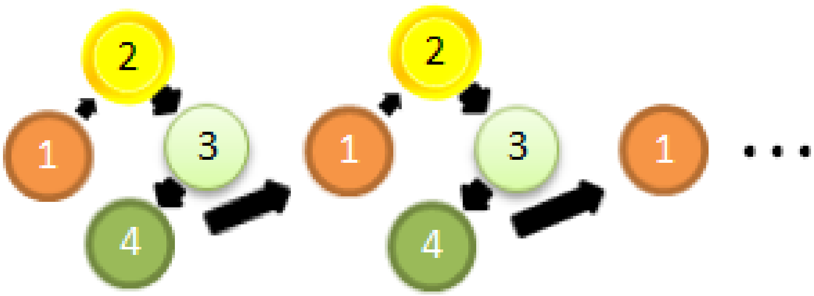
Fig. 6.1. Modelo sequencial das fases de feedback

A implementação deste modelo de fases do feedback permitiu-me interpretar os dados como uma sequência de etapas onde as fases de ação, emissão e receção de feedback visual, e de emissão e receção de feedback oral, se revelam de extrema importância para compreender a sequência de acontecimentos ao longo da resolução das tarefas com o AGD.

6.1.2. Retomando o Segundo Sub-objetivo

(b) *Identificar quando e como surgem as fases de ação, emissão e receção de feedback visual, assim como de emissão e receção de feedback oral.*

As fases referidas neste sub-objetivo podem levar ao surgimento de ciclos e esses ciclos emergem como laços em movimento, resultantes da atividade de resolução de problemas (Askew & Lodge, 2000). A sua estrutura parece reiterar-se de forma consistente (Fig. 6.2). Os ciclos de feedback terminam quando a perceção do feedback visual do computador corresponde à perceção dos alunos relativamente à obtenção do resultado que era solicitado.



Legenda:
1- Ação; 2- Emissão de feedback visual;

3- Receção de feedback visual; 4- Emissão e Receção de feedback oral

Fig. 6.2. Ciclos de Feedback

No entanto, na prática, esses ciclos não surgem num formato tão regular; alguns dos laços podem manifestar a ausência de alguma das fases. Isto é, por vezes, nem todas as fases do modelo emergem de uma forma sequencial e algumas fases não surgem de forma explícita. Podem, eventualmente, acontecer duas ou mais ações seguidas, sem qualquer emissão de feedback oral pelo meio. Ou pode surgir apenas uma emissão de feedback oral. O facto de os alunos não intervirem oralmente não significa que não tenham rececionado o feedback visual ou oral. A forma como os alunos rececionam o feedback oral ou o feedback emitido pelo computador pode não ser também completamente identificável. Por vezes, é possível induzi-lo a partir das ações posteriores no computador (por exemplo, apagando a construção no caso de a considerarem inválida), ou das emissões de feedback oral (quando exprimem a sua opinião explicitamente). A figura 5.1 apresentada e explicada no capítulo anterior mostra como surgem as diferentes fases de feedback.

6.2. Retomando o Segundo Objetivo

Descrever e compreender o papel do feedback visual emitido pelo computador na construção de significados quando os alunos utilizam o GeoGebra.

(a) *Identificar um modelo para caraterizar ações dos alunos no computador. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem estratégias de construção e de arrastamento na resolução das tarefas.*

(b) *Descrever e compreender o papel exercido pelo feedback visual emitido pelo computador sobre as ações dos alunos, nomeadamente quando estes aplicam estratégias de construção e de arrastamento.*

(c) *Descrever e compreender o papel das estratégias de construção e de arrastamento na construção de significados, nomeadamente através da adequabilidade da escolha de ferramentas, da correção das estratégias aplicadas e da forma como os alunos avaliam o feedback visual emitido pelo computador.*

6.2.1. Retomando o Primeiro Sub-objetivo

(a) *Identificar um modelo para caraterizar ações dos alunos no computador. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem estratégias de construção e de arrastamento na resolução das tarefas.*

Quando o professor prepara uma determinada tarefa tem propósitos pedagógicos ou uma intencionalidade que está relacionada com os objetivos de aprendizagem. A intencionalidade da tarefa dá início a um *loop* representado na figura 6.3. Após o primeiro contacto dos alunos com a tarefa, eles interpretam o que é pretendido como resposta a essa solicitação do professor. Quando os alunos recorrem a um AGD, começam por elaborar as suas estratégias de construção ou de arrastamento, as quais originam ações que funcionam como *inputs* no computador. Associada a cada estratégia existe uma determinada expetativa ou intencionalidade por parte do aluno que executa a ação. Os *loops* vão surgindo de forma iterada à medida que os alunos vão validando ou não as suas construções, com base no feedback visual emitido pelo computador.

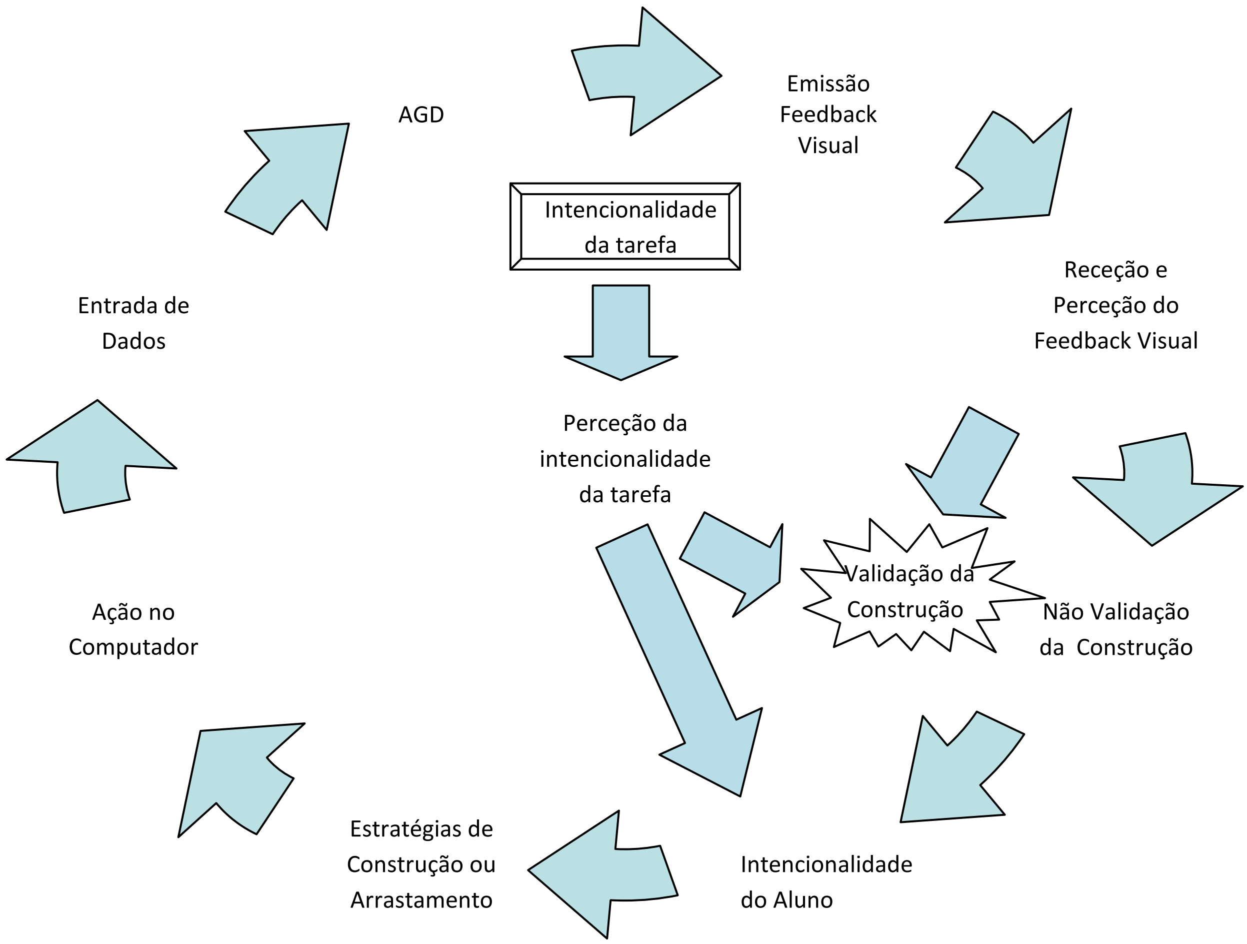


Figura 6.3. Modelo para as ações dos alunos com o computador

Neste contexto, o *software* assume a função de transformar os dados de entrada de acordo com a sua estrutura de funcionamento, numa imagem. Através dessa imagem o computador está a emitir um feedback visual sobre a ação do aluno. A perceção dos alunos desse feedback visual pode não estar de acordo com a sua expectativa e nesse caso não validam a construção. No entanto, os alunos podem retirar alguma informação do feedback visual emitido pelo computador. Essa informação pode levar a uma alteração da intencionalidade inicial ou a criar uma nova expectativa para uma próxima estratégia de construção ou arrastamento. Por sua vez, uma nova estratégia leva a uma nova ação no computador, isto é, a uma nova entrada de dados que o *software* transforma numa nova emissão de feedback visual. O ciclo continua até que os alunos validem a construção que aparece na imagem do computador. Ou seja, os alunos consideram o problema resolvido no momento em que a perceção do feedback visual do computador estiver em sintonia com a sua perceção da intencionalidade da tarefa.

6.2.2. Retomando o Segundo Sub-objetivo

(b) *Descrever e compreender o papel exercido pelo feedback visual emitido pelo computador sobre as ações dos alunos, nomeadamente quando estes aplicam estratégias de construção e de arrastamento.*

O feedback visual emitido por um AGD não se limita à forma dual de certificação da resposta (certo ou errado). O feedback visual emitido pelo computador pode conter pistas para possíveis estratégias, podendo, por isso, ser qualificado como feedback produtivo (Butler & Winne, 1995). Essas pistas são percecionadas pelos alunos de forma diferente. Por exemplo, no episódio 2 surgem vários *loops* de feedback visual que levam ao aparecimento sucessivo de pistas (Fig.5.12 e Fig.5.14) que poderiam conduzir os alunos à consecução do objetivo da tarefa. No entanto, estes não percecionaram as pistas incluídas no feedback do computador como potenciais exemplos de triângulos com dois ângulos de amplitudes dadas. Os alunos não atribuíram esse significado à informação proporcionada pelo computador, isto é, ao feedback visual emitido. De facto, podem ser atribuídos, perante o mesmo feedback, vários significados à informação gerada, nem sempre da forma mais produtiva. Este facto pode ser visto como resultado de alguma opacidade do feedback do computador, face à capacidade de perceção dos alunos. Esta opacidade é mais significativa numa fase inicial, como a que se localiza nos primeiros episódios, em que os alunos ainda estão a adaptar-se às características do AGD. De salientar que apesar de os alunos estarem, nos primeiros episódios, numa fase de experimentação das ferramentas, para as poderem utilizar nas suas construções têm de aplicar propriedades relacionadas com a noção de ângulo e raciocinar para encontrar um processo que lhes garanta a construção de um triângulo que integre ângulos internos com a amplitude solicitada. Nos últimos episódios, já numa fase em que os alunos se encontram perfeitamente adaptados às potencialidades do programa, os sucessivos *loops* de feedback, envolvendo medição e exploração, influenciam a forma como os alunos percecionam o feedback visual emitido pelo computador. Face ao conhecimento adquirido, os alunos adquirem expetativas relativas ao surgimento de informação proveniente do feedback visual emitido pelo computador. Essas expetativas estão patentes na forma como procedem a ajustamentos da ação, traduzidos, por exemplo, no episódio 4, por ajustamentos na direção das translações e, no episódio 7, por um aperfeiçoamento das estratégias de arrastamento. A existência dessas expetativas vem criar a intencionalidade que precede as ações de construção e arrastamento.

6.2.2.1. Intencionalidades

De notar que, à semelhança das intencionalidades já referidas, quer do aluno quer da tarefa, há ainda a considerar a intencionalidade da ferramenta. Naturalmente que a ferramenta não tem qualquer expetativa, mas pode-se considerar a intencionalidade da ferramenta como sendo a intencionalidade ou a expetativa inerente a quem programou e desenvolveu a conceção das funcionalidades do *software*. Cada ferramenta é criada com determinado propósito. Em particular, no caso dos ambientes de geometria dinâmica, os seus *designers* conceberam expetativas de utilização. Para isso, integraram relações entre os conceitos geométricos e respetivas propriedades facilitando a operacionalização dos mesmos.

As interações entre humanos ou entre um utilizador (humano) e um computador (media) são distintas, no entanto ambos transportam uma dose de intencionalidade (Hegedus & Moreno-Armella, 2009; Carreira *et al*., 2016). Em particular, nos AGDs, grande parte da intencionalidade da ferramenta consiste em reagir (isto é, fornecer feedback) ao utilizador (Carreira *et al*., 2016). Apesar dessas reações estarem programadas face a determinada ação e, nesse sentido, estarem associadas a uma intenção do *designer*, a sua natureza não é humana e não é variável; para uma mesma ação obtém-se uma mesma resposta.

No entanto, a forma como é percecionada a informação contida na resposta do computador é um factor humano, logo variável. Este é, na verdade, um fator recorrente ao longo dos episódios analisados neste estudo.

Por exemplo, no episódio 7, a intencionalidade da ferramenta associada à possibilidade de um arrastamento permitiu ao aluno alterar a posição de um ponto e com essa alteração, alterar os restantes objetos geométricos que dele dependiam, levando a descobrir o comprimento mínimo do fio elétrico pretendido. Assim, o feedback visual emitido pelo computador consistiu em mostrar as relações de dependência desses objetos e coube aos alunos percecionarem essas relações. Em particular, isso evidenciou a importância da variação da amplitude dos ângulos associados ao movimento do ponto livre. Nesse episódio, quando os alunos fazem as medições, com vista à sua exploração, apercebem-se não só das alterações das medições dos comprimentos, mas também de uma mudança na amplitude dos ângulos por dependência com os comprimentos. No mesmo episódio, mesmo quando os alunos faziam arrastamentos divagantes estavam na expetativa de encontrar pistas no feedback visual do computador. Mais tarde, encontraram essas pistas que os levaram a ajustar as suas ações, primeiro em termos de redirecionar os arrastamentos e depois para encontrar a relação entre os ângulos. Embora os arrastamentos divagante-limitado possam ser considerados como uma atividade exploratória matematicamente pouco significativa essa aparência é alterada quando, numa fase posterior, os alunos fazem explorações mais focadas onde testam conjeturas e alteram o seu nível de abstração (Joubert, 2017). Ao provocar a alteração dos comprimentos, os alunos deparam-se com a alteração da amplitude dos ângulos, sendo que essa variável "amplitude dos ângulos" começou a ganhar significado para os alunos. Os arrastamentos limitado-teste que se seguem mostram na prática o aumento do nível de abstração (Fig. 5.44) e testam a conjetura de que a solução corresponde ao caso em que os ângulos são iguais. Essa capacidade de perceção demonstrada pelos alunos pode ficar a dever-se ao desenvolvimento das expetativas para o feedback visual emitido pelo computador. O propósito de cada ação e, em particular, de cada arrastamento foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo (pois este episódio refere-se a uma fase final da experiência). A expetativa do resultado de uma ação e a intencionalidade correspondente foram evoluindo no sentido de integrar potenciais pistas incluídas no feedback visual emitido pelo computador. A utilidade do feedback do computador é visível e reconhecida quando a intencionalidade "exploratória" do aluno é ajustada à intencionalidade da ferramenta e converge com o objetivo da tarefa. No final dos episódios os alunos encontram, não só a solução do problema, mas também uma forma de a validar. Portanto, a sua intencionalidade estava centrada não só no "como", mas também no "porquê" das suas ações.

6.2.2.2. Convergências

Sendo o feedback visual um resultado da ação do aluno no computador, pode existir maior ou menor convergência entre a intencionalidade do aluno, ao executar determinada ação, e a intencionalidade da ferramenta perante essa mesma ação. Algumas passagens do episódio 2 mostram a existência de uma clivagem entre essas intencionalidades. Era solicitado que os alunos utilizassem rotações para a construção de um triângulo, mas estes recorreram a outras ferramentas. Por exemplo, a ferramenta de marcação de um ângulo com uma dada amplitude foi colocada no menu do programa, pelo programador, com uma certa expetativa ou intencionalidade de funcionamento. Por sua vez, o aluno planeia utilizá-la de outra forma, ou seja, com outra intenção. Assim o computador devolve uma informação que não corresponde, por inteiro, ao pensamento inicial do aluno. Esse distanciamento serve de alavanca a um desencadear sucessivo de mudança de estratégia e escolha de ferramentas como se pode constatar na análise do episódio 2. Assim, o feedback visual emitido pelo computador surge como catalisador para essa mudança de estratégias (Laborde, 2014).

Outro tipo de clivagem reflete o afastamento do aluno face à "inteligência" da ferramenta tecnológica. A "inteligência" da ferramenta significa a forma como a ferramenta está ligada a determinadas noções ou conceitos matemáticos. Por exemplo, no episódio 7, existe uma progressiva convergência entre a intencionalidade dos alunos e a intencionalidade da ferramenta, no sentido em que a intencionalidade da ferramenta vai fornecendo pistas sobre as relações existentes entre a colocação do ponto e a amplitude dos ângulos. Esta convergência é formada por *loops* de ação-reação (*loops* de feedback) (Hegedus, Donald & Moreno-Armella, 2007) e este processo é conhecido na literatura pelo termo "co-ação" (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008; Moreno-Armella & Hegedus, 2009; Hegedus & Moreno-Armella, 2009, 2011; Carreira *et al.*, 2016).

Em qualquer dos dois tipos de clivagem o ambiente guia a forma de pensar e as ações futuras, à medida que os alunos vão percecionando o feedback visual emitido pelo computador (Moreno-Armella & Hegedus, 2009; Hegedus & Moreno-Armella, 2011). Nessa perceção há uma revisão do pensamento matemático dos alunos, mesmo quando, como acontece no episódio 2, existe um abandono sucessivo de estratégias. Pois essa mudança implica que se mude a maneira de pensar matematicamente, reconstruindo os conceitos matemáticos subjacentes às ferramentas. Para qualquer aluno/utilizador é essencial conseguir construir um significado próximo do significado matemático associado à ferramenta (Sherman, 2012). Assim, tendo em conta os dados analisados, o feedback visual emitido pelo computador, quando em dissonância, vem provocar nos alunos a necessidade de olharem para o problema por outras perspetivas, abordando outros procedimentos e relações matemáticas associadas a diferentes ferramentas (como no episódio 2) ou abordando outros significados matemáticos (envolvendo outras visões, perspetivas, propriedades ou conceitos matemáticos, como é o caso do episódio 7). O aparecimento de qualquer um dos tipos de clivagem acaba por se traduzir em repensar matematicamente, com um efeito regulador. No decorrer desse processo o aluno poderá recolher pistas do feedback visual do computador que tornem percetível o porquê da clivagem e possibilitem uma ação "conjunta". Essa ação será tanto mais "conjunta" ou convergente quanto mais se aproximarem as intencionalidades do aluno e da ferramenta.

6.2.2.3. Trajetórias de Construção e Arrastamento

Os AGDs possibilitam a realização de tarefas abertas em que há uma multiplicidade de caminhos possíveis para atingir os objetivos pretendidos. Esta flexibilidade facilita a atividade exploratória dos alunos, levando a que estes construam uma trajetória "personalizada" de estratégias de construção e arrastamento (vejam-se, por exemplo, as Fig. 5.6, 5.7, 5.17 e 5.44). Nessas figuras é possível constatar que o nível de abstração das trajetórias dos alunos vai variando. A alternância entre os processos ascendentes e descendentes, que emerge destes episódios, reflete a evolução de um nível percetual para um nível teórico (associada a um aumento do nível de abstração) (Arzarello *et al*., 2002). A evolução da utilização, por parte dos alunos, das estratégias empíricas e a sua evolução para estratégias com um carácter geométrico mais formal é extremamente importante (Hollebrands, Laborde & Straber, 2008), sendo que o feedback visual emitido pelo computador fornece as escoras necessárias a esta evolução (Junqueira, 1995; Coelho, 1996; Coelho & Saraiva, 2000). Como se pode observar no episódio 2, o nível de abstração associado a cada estratégia depende da escolha inicial da ferramenta, mas também depende essencialmente das ações que são implementadas depois dessa escolha. Se, no episódio 2, a escolha de ferramentas como a "medição de ângulos" ou a "construção de polígonos" limita desde logo o nível das estratégias, o mesmo já não acontece com as ferramentas restantes utilizadas, onde os diferentes níveis de abstração surgem associados às estratégias de construção e arrastamento posteriores à escolha da ferramenta. Essas estratégias são caracterizadas pela aplicação de conceitos e relações geométricas de acordo com a intencionalidade do aluno. A evolução para níveis superiores de abstração está associada aos processos de convergência referidos anteriormente. Embora a evolução, associada ao nível de abstração, não decorra de forma linear (Fig. 5.6, 5.7, 5.17 e 5.44), é evidente, ao longo do estudo, um aumento do nível de abstração nas estratégias de construção e arrastamento.

Segundo Arzarello, Olivero, Paola e Robutti (2002), as práticas de arrastamento podem mediar a relação entre o nível de perceção e o nível de teorização, ao criarem entidades (construções) com um novo estatuto. Estes autores referem a necessidade de se investigar como isso se processa, dado que os alunos precisam de 'internalisar' (Vygotsky, 1987) o funcionamento do arrastamento para serem capazes de o utilizar de forma produtiva. Essa forma é considerada produtiva quando a intencionalidade dos alunos converge com a intencionalidade da ferramenta. Por outras palavras, a evolução verificada nas trajetórias de construção e arrastamento deixa transparecer o processo de 'internalização' dos conceitos geométricos associados à intencionalidade da ferramenta.

6.2.3. Retomando o Terceiro Sub-objetivo

(c) *Descrever e compreender o papel das estratégias de construção e de arrastamento na construção de significados, nomeadamente através da adequabilidade da escolha de ferramentas, da correção das estratégias aplicadas e da forma como os alunos avaliam o feedback visual emitido pelo computador.*

As estratégias de construção e arrastamento utilizadas pelos alunos são responsáveis por vários tipos de construção. Podem surgir construções em que os alunos representam a figura dada ou pretendida através de uma construção não robusta, baseando-se em estratégias empíricas (sem estarem sustentadas por propriedades geométricas). Neste estudo, essas construções surgem principalmente nos primeiros episódios, quando os alunos ainda estão numa fase de adaptação ao uso do GeoGebra. Nesta fase inicial, os alunos, por vezes, optam por utilizar ferramentas que não são adequadas ou não são as mais eficazes para resolver as questões em que estão a trabalhar. Essa escolha não adequada de ferramentas leva a que surjam construções não robustas. De salientar também que sempre que os alunos utilizaram construções precedidas de uma escolha não adequada de ferramentas, eles avaliaram corretamente o feedback visual emitido pelo computador. Isto significa que a perceção do feedback visual do computador, face às construções e aos arrastamentos, mesmo no caso do primeiro episódio, foi suficiente para que os alunos conseguissem, de forma independente, ter o poder de validar ou não as suas construções.

Apesar de inicialmente prevalecerem as estratégias de construção empíricas (sem fundamentação em propriedades geométricas), o mesmo não se passa com as estratégias de arrastamento. Por exemplo, logo no primeiro episódio essas construções surgem acompanhadas de estratégias mais simples em que um aluno apenas arrasta os pontos básicos de um desenho com o intuito de lhe dar uma forma particular. Mas ainda no mesmo episódio surgem estratégias de arrastamento de um ponto sem restrições com a intencionalidade de testar determinadas conjeturas ou de testar o efeito resultante através do feedback visual emitido pelo computador.

À exceção dos dois primeiros episódios, apenas surgiram duas situações pontuais em que os alunos não escolheram adequadamente as ferramentas: no episódio 5, em que marcaram um ponto novo num segmento numa posição aproximada, em vez do ponto médio desse segmento. Pelo contrário, no episódio 7 em vez de marcarem um ponto livre arrastável num segmento, aplicaram o ponto médio, e também utilizaram desnecessariamente a ferramenta *Interseção de dois objetos* nesse mesmo ponto médio (que era um ponto já determinado). Essas construções não foram validadas quando os alunos avaliaram o feedback visual emitido pelo computador. No episódio 5, a não validação foi realizada com base num comentário de Lucas a indicar que seria necessário utilizar o ponto médio, e no episódio 7 por ser requerido um arrastamento que seria impossível com aquela construção.

Para além da escolha não adequada de ferramentas, os alunos, por vezes, implementaram estratégias que não eram corretas para resolver o problema. Por exemplo, no episódio 1 surge uma estratégia que não era a correta associada à construção não robusta de um triângulo retângulo. Outro exemplo ocorreu no episódio 5, numa situação em que o aluno se enganou no número de lados do polígono a construir. Todas as outras estratégias utilizadas que continham simultaneamente conceitos geométricos e ideias empíricas diferentes das propriedades ou conceitos geométricos envolvidos, levaram a construções que não eram válidas. Essas construções eram incompletas, ou diferentes das pretendidas, ou ainda, aparentemente corretas mas que não mantinham todas as propriedades requeridas quando eram arrastadas, resultando em construções não robustas ou parcialmente robustas.

De resto, todas as construções válidas são precedidas de uma escolha adequada de ferramentas e da implementação de estratégias corretas. Isto significa que para os alunos construírem uma determinada figura ou um representante da família de figuras pretendida, tendo em conta todas as suas propriedades, têm necessariamente de fazer uma escolha correta de ferramentas e aplicar estratégias corretas. Ou seja, os alunos não conseguem chegar a uma construção válida se não aplicarem estratégias que tenham a potencialidade de resolver o problema. Este facto é revelador da necessidade de congruência entre a intencionalidade da tarefa e as características e potencialidades do AGD.

Para uma análise vertical dos dados recolhidos sobre a adequabilidade da escolha da ferramenta, a correção da estratégia implementada e a interpretação do feedback visual, elaborei a tabela seguinte (Tabela 6.1).

Tabela 6.1. Indicadores de adequabilidade da ferramenta, da estratégia e da utilização do feedback visual

Indicadores	**Episódios**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Totais
Escolha da Ferramenta	5	8	2	5	6	2	4	**32**
Adequada	3	6	2	5	4	2	2	**24**
Não adequada	2	2	-	-	2	-	2	**8**
Estratégia Implementada	3	6	2	5	4	2	2	**24**
Correta	2	3	2	4	3	2	2	**18**
Incorreta	1	3	-	1	1	-	-	**6**
Avaliação do Feedback Visual	5	8	2	5	6	2	4	**32**
Correta	4	6	1	5	6	2	4	**28**
Incorreta	1	2	1	-	-	-	-	**4**

Na fase inicial, os alunos mudam várias vezes de opção de ferramenta. Esta característica é reveladora de que, no início, os alunos ainda não têm bem definido o significado de cada ferramenta do GeoGebra. Para além desse facto, verificou-se ainda que eles insistiram na utilização de uma ferramenta mesmo quando esta não se revelou adequada. Esta reincidência ocorreu por diversas vezes nos primeiros episódios e é o resultado de um processo de experimentação, mas também de um processo de construção de significados para as ferramentas disponíveis visto que elas são experimentadas e usadas para implementar estratégias diferentes. Já na fase final, e em particular, no episódio 7, os alunos escolheram várias ferramentas para uma construção elaborada e falharam apenas na escolha de um ponto (ponto médio) e na utilização de uma ferramenta.

Os três primeiros episódios analisados são os únicos em que os alunos avaliam o feedback visual emitido pelo computador de forma incorreta e esses casos envolveram sempre construções geométricas. Este facto é revelador de duas situações. Em primeiro lugar, os alunos avaliaram o feedback visual emitido pelo computador de forma incorreta apenas quando estavam ainda na fase inicial do estudo. Em segundo lugar, apenas nos casos em que os alunos constroem a figura requerida ou um representante da família segundo as suas propriedades geométricas é que surgem avaliações incorretas do feedback visual emitido pelo computador. No episódio 1, os alunos avaliaram de forma incorreta o feedback do computador ao não validarem a construção por terem as letras trocadas nos vértices do triângulo. No segundo episódio, ao construírem o triângulo, os alunos não reconheceram por duas vezes o surgimento do terceiro ponto, nem quando surgiu como interseção de duas retas, nem quando surgiu de forma destacada (produto da rotação). No terceiro episódio os alunos avaliaram de forma incorreta o feedback emitido pelo computador porque consideraram que os pontos auxiliares de construção do segundo triângulo (semelhante ao primeiro) deveriam estar colocados nos respetivos vértices.

Por outro lado, pode-se verificar que nos casos em que as construções não têm características de construções geométricas, os alunos avaliam sempre corretamente o feedback visual emitido pelo computador. As características do *software* e das tarefas possibilitaram nestes casos que os alunos tivessem a capacidade de decidir corretamente por si próprios. Por outras palavras, a intencionalidade do AGD combinada com a intencionalidade da tarefa possibilitou, a médio e longo prazo, a atribuição de um poder de decisão aos alunos que estes usaram de forma válida e produtiva.

De um modo geral, regista-se a predominância da escolha adequada de ferramentas, das estratégias implementadas de forma correta e da avaliação correta do feedback visual emitido pelo computador. Nota-se uma diminuição de escolhas desadequadas de ferramentas ao longo do estudo, à exceção de alguns casos pontuais. De referir que, na fase final do estudo, existe uma ausência de estratégias incorretas e a ausência de avaliações incorretas do feedback visual emitido pelo computador. Estes factos deixam transparecer uma evolução na forma como os alunos constroem significados de natureza instrumental.

Em resumo, é notório que existiu ao longo dos dois anos uma construção evolutiva de significados instrumentais, isto é, relativos ao modo de funcionamento pré-estabelecido das ferramentas disponíveis. Essa construção de significados refletiu-se notoriamente no plano do conhecimento da ferramenta, mas também dos conceitos matemáticos. Com efeito, o conhecimento matemático também é revelado pela escolha de cada ferramenta, das estratégias implementadas e da forma como o feedback visual emitido pelo computador é compreendido.

6.3. Retomando o Terceiro Objetivo

Descrever e compreender o papel do feedback oral entre os alunos na construção de significados.

(a) *Propor um modelo para descrever o feedback oral entre alunos. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem os tipos de feedback oral de avaliação, questionamento e informação.*

(b) *Descrever e compreender o papel do feedback oral na construção de significados, nomeadamente quando os alunos utilizam o GeoGebra e surgem momentos de negociação, compreensão e partilha de significados.*

6.3.1. Retomando o Primeiro Sub-objetivo

(a) *Propor um modelo para descrever o feedback oral entre alunos. Em particular, pretende-se identificar quando e como surgem os tipos de feedback oral de avaliação, questionamento e informação.*

Durante a realização de cada tarefa, tanto o aluno que numa determinada fase ajuda, como aquele que é ajudado, fornecem feedback um ao outro. Esse feedback pode surgir de forma implícita (como por exemplo um franzir de olhos) ou de forma explícita (como por exemplo através de intervenções orais). São essas últimas informações orais que se constituem como feedback oral. O facto de os alunos estarem a trabalhar em pares favoreceu substancialmente a quantidade e a imediaticidade do feedback (Topping, 2005). Por outro lado, a natureza exploratória das tarefas permitiu que o feedback oral entre alunos fosse surgindo à medida que os alunos reagiam ao feedback visual emitido pelo computador. Esse feedback oral teve, por vezes, formatos de discussões matemáticas que assumiram várias dimensões relacionadas com a forma como os alunos avaliam, questionam ou discutem, e informam.

As situações em que o feedback oral entre alunos assume contornos associados à avaliação, são situações em que um aluno avalia oralmente o trabalho do par ou o seu próprio**,** confirmando ou não determinadas estratégias implementadas, resultados ou conclusões obtidas, corrigindo, ou dialogando sobre a validade de determinada construção ou estratégia. Essas emissões de feedback oral estão ligadas à retroatividade, no sentido em que se centram nos produtos das ações já realizadas anteriormente.

Noutros casos, o feedback oral entre alunos, encontra-se mais ligado à forma como os alunos se questionam ou entram em diálogo de uma forma interativa.

Por último, o feedback oral entre alunos pode assumir formatos mais ligados à informação, nomeadamente quando um determinado aluno informa o outro ou responde a um pedido de esclarecimento. Essa informação pode ser dada de forma direta ou a propósito de possíveis estratégias a implementar, de resultados obtidos, ou na revisão de estratégias implementadas anteriormente. Estas situações têm um carácter essencialmente proactivo, porque o seu foco é essencialmente ajustar ou delinear o caminho a seguir, ou seja, têm o objetivo de direcionar ou afinar a próxima ação.

Na figura 6.4 apresenta-se um esquema para ilustrar como o Questionamento pode surgir como eventual processo de transição entre a Avaliação e a Informação. O questionamento distancia-se fisicamente do computador no sentido em que se processa entre os alunos, não visando diretamente o que foi feito ou o que se vai fazer.

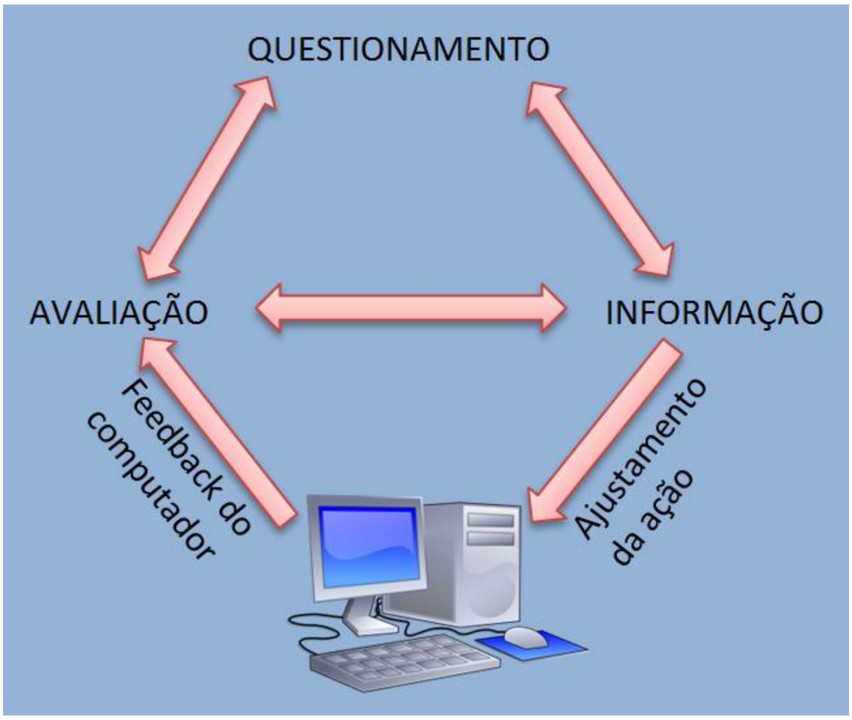


Fig. 6.4. Modelo das funções do feedback oral entre alunos

6.3.2. Retomando o Segundo Sub-objetivo

(b) *Descrever e compreender o papel do feedback oral na construção de significados, nomeadamente quando os alunos utilizam o GeoGebra e surgem momentos de negociação, compreensão e partilha de significados.*

Dada a quantidade e diversidade de subcategorias associadas às emissões de feedback oral, optei por resumir os dados numa tabela que permite, numa leitura transversal, ter a ideia da representatividade de cada categoria e subcategoria ao longo dos episódios.

Tabela 6.2. Representatividade das categorias e subcategorias de feedback verbal

Categorias	Episódios							
	1	2	3	4	5	6	7	Totais
Avaliação	6	8	6	3	5	3	7	38
Certificação	2	3	2	2	1	1	5	16
Apreciação	2	3	4	-	2	-	2	13
Verificação	2	2	-	-	2	2	-	8
Correção	-	-	-	1	-	-	-	1
Questionamento	3	3	3	3	0	5	5	22
Orientação	-	2	-	2	-	1	-	5
Exploração	1	1	2	-	-	2	4	10
Sondagem	2	-	1	1	-	2	1	7
Informação	4	9	7	4	6	6	12	48
Resposta	-	1	1	1	-	3	4	10
Estratégia	2	4	2	3	1	3	5	20
Conexão	-	-	-	-	1	-	1	2
Focagem	2	3	2	-	2	-	2	11
Revisão	-	1	2	-	2	-	-	5

6.3.2.1. Intencionalidades

As emissões de feedback oral estão ligadas à intencionalidade com que os alunos fazem cada intervenção oral. A análise das intervenções orais dos alunos foi feita segundo três categorias principais que se referem à intenção de avaliar, de questionar ou de informar. Da tabela anterior pode-se notar que dentro de cada uma dessas categorias existem algumas subcategorias mais representativas. Por exemplo, para a categoria de Avaliação as subcategorias mais representativas são o Feedback de Certificação e o Feedback de Apreciação. Isto significa que a forma utilizada preferencialmente quando os alunos tiveram a intencionalidade de certificar ou apreciar as ações e as estratégias implementadas, foi por meio de intervenções orais pontuais que não deram lugar a uma discussão ou à continuidade de um diálogo. Por seu lado, a subcategoria de Feedback de Correção é a menos representada, tendo apenas uma ocorrência, o que significa que o feedback fornecido raramente teve a intenção de corrigir, sendo normalmente aceite pelos alunos sem contestação.

Quando os alunos têm a intencionalidade de Questionar fazem-no de diferentes formas e são poucas as diferenças entre o número de ocorrências nas subcategorias do Questionamento. No entanto, pode-se verificar que a subcategoria mais representativa é o Feedback de Exploração. Este facto significa que quando os alunos se questionaram ou entraram em diálogo, tiveram preferencialmente a intenção de debater determinado significado ou relação, solicitando com menor frequência a clarificação de ideias ou estratégias a implementar. Em particular, a subcategoria de Feedback de Orientação é a que surge menos representada, ou seja, dentro dos diálogos e questões colocadas pelos alunos, um ao outro, as questões que surgem com menos frequência são aquelas em que um aluno tem o intuito de desbloquear a situação. Uma razão para tal acontecer é a de que qualquer um dos alunos pode a todo o momento aceder ao computador e testar determinada estratégia ou determinado valor sem ter de recorrer ao questionamento. Essa mesma razão pode explicar o facto de a categoria de Questionamento ser a menos representativa das três.

Na categoria de Informação, a subcategoria mais representativa é o Feedback de Estratégia. Isto revela que quando um aluno informa o colega, fá-lo preferencialmente de forma a propor a implementação de estratégias, ou a referir o resultado de estratégias que eles antes implementaram. Por outro lado, as subcategorias que surgiram com menos frequência ao longo do estudo são o Feedback de Conexão e o Feedback de Revisão, o que significa que os momentos em que os alunos estabelecem conexões com outras ideias, resultados ou tarefas realizadas anteriormente e os momentos em que os alunos fazem uma revisão da estratégia implementada, surgem com menos frequência. Tal não significa que implicitamente os alunos não tenham a intencionalidade de fazer revisões embora não o manifestem oralmente. De notar que as subcategorias citadas de Feedback de Conexão e de Feedback de Revisão são as únicas, dentro da categoria de Informação, ligadas a momentos de retroação, ou seja, a momentos em que a regulação é feita de forma retroativa. A categoria de Informação foi inicialmente vista como uma categoria essencialmente proactiva, porque apesar de recorrer a algumas subcategorias interativas e retroativas, o seu foco é essencialmente ajustar ou provocar novas ações. Assim, esta categoria vê o seu estatuto de proatividade confirmado através da representatividade das subcategorias. As subcategorias mais representadas foram, como se pode verificar pela tabela 6.2, o Feedback de Estratégias e o Feedback de Focagem, ambos ligados à proatividade. Por fim, a terceira subcategoria mais representada foi o Feedback de Resposta, mais associado à interatividade.

6.3.2.2. Convergências

Relativamente às categorias consideradas de Avaliação, Questionamento e Informação, elaborei o gráfico seguinte para as comparar (Fig. 6.5).

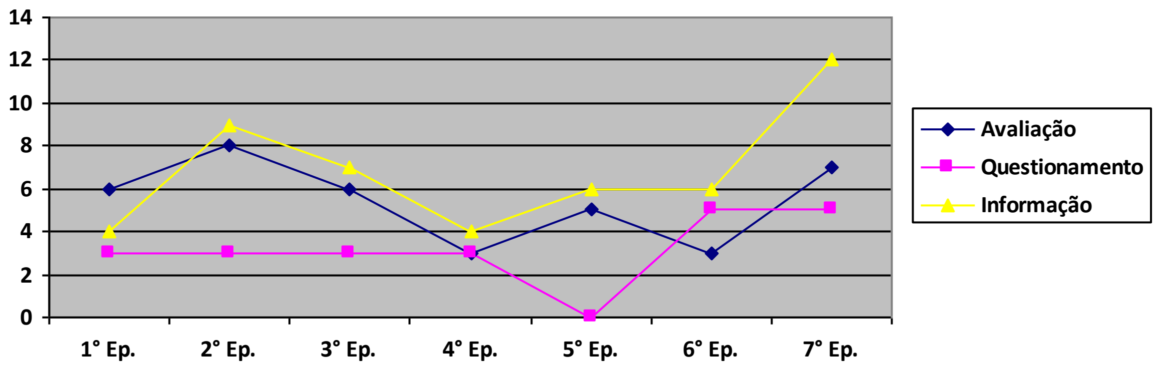


Fig. 6.5. Gráfico da representatividade das categorias de feedback oral.

Apesar de todas as variáveis que podem influenciar as interações orais, como sejam as características de cada tarefa ou até o estado de espírito de cada aluno, aparentemente há uma distribuição razoavelmente uniforme das três categorias. Este facto leva a que se possa considerar a existência de uma determinada convergência entre as três funções do feedback oral. No entanto, essa situação não é muito clara (Fig. 6.5). De uma forma geral, a categoria predominante ao longo do estudo é a Informação, logo seguida pela Avaliação, à exceção do episódio 6.

A predominância da Informação ao longo do estudo significa que ganham preponderância, no feedback oral entre alunos, os formatos em que um aluno transmite informação ao outro. São menos frequentes os momentos em que um aluno avalia as ações do outro ou as suas próprias, ou ainda os momentos em que os alunos se questionam ou entram em diálogo. A predominância da Informação pode ser reveladora da preponderância da intencionalidade dos alunos em delinear o caminho a seguir, direcionando ou afinando a próxima ação. Assim, surge uma predominância de uma intencionalidade proactiva ao longo do estudo e uma pequena diminuição de uma intencionalidade retroativa, na fase final. Essas intencionalidades estão ligadas a momentos de regulação da aprendizagem proativa (Allal, 1988) e retroativa (Allal, 1986), respetivamente. O facto de a categoria de Avaliação perder alguma representatividade na parte final do estudo pode estar associado à intencionalidade dos alunos nas suas intervenções orais. Nas intervenções orais associadas à Avaliação, a intencionalidade dos alunos concentrou-se em torno da forma como percecionavam o feedback visual emitido pelo computador. Apesar de essa intencionalidade estar sempre presente, surge, na parte final, com menor frequência, pois os alunos estariam possivelmente mais seguros daquilo que esperavam como feedback visual emitido pelo computador. Ou seja, na fase final, parece existir uma maior convergência entre a intencionalidade dos alunos e a intencionalidade da ferramenta.

6.3.3.3. O Feedback Oral na Construção de Significados

Com o intuito de facilitar a análise da relação entre o feedback oral e a construção de significados apresento o gráfico seguinte (Fig. 6.6), em que surgem os momentos de partilha, negociação e compreensão, associados à construção de significados, relacionados com a ocorrência de feedback oral de avaliação, questionamento e informação.

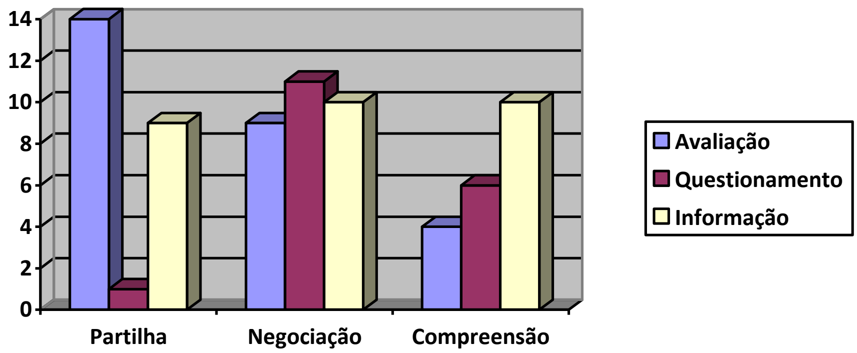


Fig. 6.6. Gráfico de cruzamento entre emissões de feedback oral e construção de significados

Pela análise do gráfico, pode-se concluir que nos momentos de partilha de significados, a função do feedback oral não foi a de Questionamento. Pelo contrário, os momentos de partilha surgiram maioritariamente quando um aluno certificou a ação do colega ou a sua própria, como certa ou errada, confirmando ou refutando estratégias implementadas, resultados ou conclusões obtidas. Os alunos poucas vezes referiram explicitamente o porquê dessas certificações. Isto parece sugerir que algumas vezes existe partilha de determinado significado ou estratégia, quando um aluno certifica uma determinada construção de forma implícita, sem que seja necessário explicitar oralmente as razões. Por vezes, os momentos de partilha também surgem associados à categoria de Informação. Em particular, tal sucede quando um aluno propõe estratégias a implementar, ou refere o resultado de uma estratégia por ele próprio implementada, ou ainda, quando um aluno dá uma resposta direta de informação ao colega depois de questionado, ou depois de ele próprio se questionar. De referir ainda que as ações de validar, ou não, determinadas construções também constituem maioritariamente momentos de partilha; por vezes, foram igualmente registadas em momentos de compreensão, mas nunca surgiram associadas a momentos de negociação. Assim, pode-se concluir que os momentos de partilha surgem associados a categorias de feedback oral mais "próximas do computador" (Fig. 6.4), como a Avaliação e a Informação.

Nos momentos de negociação, as categorias de feedback oral estão distribuídas de forma quase equitativa. Mas regista-se que a ocorrência do Questionamento é superior. Portanto os processos de negociação ocorrem com diversos tipos de feedback oral, mas com maior frequência quando os alunos se questionam, ou dialogam, sobre determinado significado ou relação matemática. A função de Avaliação surge maioritariamente nos processos de negociação quando os alunos dialogam sobre a validade de determinada construção ou estratégia. A categoria de Informação surge maioritariamente quando os alunos propõem estratégias a implementar.

Nos momentos de compreensão, a função de Avaliação do feedback oral só ocorre quando os alunos avaliam construções, estratégias ou resultados obtidos, dando o seu ponto de vista. Nos momentos de compreensão, a função de Informação surge quando um aluno dá informação que ajuda o outro a focar-se em elementos chave da situação para resolver determinado problema. A função de Questionamento ocorreu quando os alunos dialogaram sobre determinado significado ou relação, ou quando um aluno pediu ao colega para articular, elaborar, ou clarificar ideias relativas a determinada construção, relação, conjetura ou estratégia. Tendo em conta o papel do questionamento como meio de promoção do raciocínio e da aprendizagem (Briten *et al.*, 2012), este surge tradicionalmente ligado à compreensão (Webb & Jones, 2006; Black *et al.*, 2003).

Em suma, os momentos em que os alunos negociam entre si o significado do feedback do computador surgem com maior frequência quando os alunos questionam ou entram em diálogo. Esses processos de negociação são vistos como uma condição necessária à aprendizagem matemática (Voigt, 1994). Nos dados analisados as questões colocadas pelos alunos surgiram com naturalidade. Em alguns casos esse questionamento é mais intenso, como sucedeu no episódio 6, quando os alunos discutem a relação entre os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa num triângulo retâmgulo. À semelhança do que foi referido por Smith (2007), quando os alunos interagem entre si persistem até conseguirem chegar a um entendimento comum, ou seja, até chegarem a um momento de partilha de significados.

Em termos de conteúdo, as questões partiram da situação em que os alunos estavam e visavam alcançar o objetivo da tarefa. Segundo Dewey (1902), tratou-se de uma "reconstrução contínua" de significados. Por outras palavras, o questionamento funcionou como uma alavanca entre o conhecimento matemático que os alunos detinham e o conhecimento matemático alcançado no final das tarefas.

Os momentos em que os alunos procuram compreender determinado significado, surgem, maioritariamente, quando um aluno dá informação através de respostas, estabelecendo conexões, referindo possíveis estratégias a implementar, ou resultados obtidos, ou ainda revendo estratégias implementadas anteriormente, mas de uma forma proactiva.

Os momentos em que os alunos partilham determinados significados ou estratégias surgem maioritariamente associados a fases em que um aluno avalia a ação do colega ou a sua**,** confirmando ou não determinadas estratégias implementadas, resultados ou conclusões obtidas, corrigindo, ou dialogando sobre a validade de determinada construção ou estratégia, de uma forma retroativa.

Nos episódios analisados, o feedback contínuo e interativo, alimentado pelo AGD, deu origem a um conjunto de diálogos co-construídos (Askew & Lodge, 2000) entre alunos, que foi determinante para a construção de significados, não só dos instrumentos e ferramentas, mas também dos significados matemáticos. Neste contexto foram os momentos de questionamento e de negociação, que foram surgindo, que ajudaram os alunos a estabelecer a ponte entre os momentos de avaliação e partilha, e os momentos de informação e compreensão.

6.4. Comentários Finais

Com esta investigação pretendi compreender quando e como surge o feedback durante a resolução de tarefas em que os alunos trabalham colaborativamente com recurso a um ambiente de geometria dinâmica e quais as suas implicações para a construção de significados em tópicos de geometria.

Estudos anteriores realçam que a aprendizagem colaborativa com o computador maximiza e promove as oportunidades de feedback, tanto entre alunos (através das intervenções orais) (Stahl, *et al*., 2006), como entre alunos e computador (através do feedback visual emitido pelo computador) (Joubert, 2017, Olsson, 2017). No entanto, pouco se sabe sobre a caracterização, o funcionamento e os contornos que esse feedback pode assumir, particularmente, no caso da utilização de um AGD. Sabe-se, contudo, que as construções e os arrastamentos desempenham um papel fundamental em termos de feedback visual (Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006) e que esse feedback visual funciona como um catalisador para a mudança de estratégias na resolução dos problemas propostos (Laborde, 2014).

Apesar das limitações inerentes a um estudo de caso, os dados analisados nesta investigação deixam transparecer que, segundo as designações de Hollebrands (2007), os alunos utilizaram numa fase inicial, predominantemente, estratégias reativas para, numa fase posterior, passarem a estratégias proativas no teste de conjeturas. Ao longo do estudo, os alunos evoluíram nas suas ações, integrando nas suas estratégias a compreensão dos efeitos que uma determinada ação iria provocar. Essa evolução levou-os até a uma fase em que recorreram sobretudo a estratégias proativas. É nessa fase que se torna decisivo o feedback visual emitido pelo computador, quando este entra em contradição com o que os alunos tinham antecipado, provocando assim, em grande parte, ainda que não exclusivamente, a emissão e receção de feedback oral entre os alunos (Zbiek & Glass, 2001; Zbiek & Hollebrands, 2008).

Se, numa fase inicial, os alunos se preocupavam mais com o significado a atribuir a cada ferramenta do AGD, à medida que passavam a controlar melhor o programa, observou-se uma tendência para utilizarem as ferramentas numa estratégia proactiva, com vista a atingir determinado objetivo matemático. Essas expetativas, quando confirmadas pelo feedback visual do computador, geraram pouca discussão relativamente ao caminho seguido. É neste sentido que, conforme mostram as evidências relatadas no capítulo anterior, a construção de significados geométricos não está apenas associada à escolha de determinadas ferramentas. Tal não significa que os instrumentos deixem de ter importância neste processo. Pelo contrário, estes passam é a servir de ponte para raciocínios mais elaborados com intencionalidades mais direcionadas para os conceitos geométricos envolvidos. Esta preocupação de alavancar o processo de resolução em direção ao futuro (conhecido por *feedforward* de carácter proativo) é fundamental no desenvolvimento de possíveis estratégias personalizadas a implementar.

Ao invés de um ensino mais tradicional em que as aulas e os diálogos estão centrados no professor e as estratégias que surgem são as estratégias propostas pelo professor, no contexto desta experiência de ensino, os momentos de regulação da aprendizagem surgem maioritariamente com um carácter proativo (Allal, 1988).

Ao longo do processo de adaptação ao AGD e, mesmo na fase final, em que os alunos se mostram mais familiarizados com o *software*, o ambiente guia a forma de pensar e as ações futuras à medida que os alunos vão percecionando o feedback visual emitido pelo computador (Moreno-Armella & Hegedus, 2009; Hegedus & Moreno-Armella, 2011).

Neste estudo foi possível detetar uma evolução na forma como os alunos percecionaram o feedback visual emitido pelo computador, ou seja, com o tempo, os alunos souberam, não só, interpretar matematicamente o feedback visual emitido pelo computador, mas também pensar sobre as ações de construção e arrastamento com a expetativa de recolher informação das pistas que esse feedback oferece.

6.5. Implicações para Futuras Investigações

Este estudo poderia ter seguido vários caminhos diferentes. Dentro dessas possibilidades surgem possíveis questões que ficam em aberto. Por exemplo, seria interessante investigar dentro das estratégias de construção e das estratégias de arrastamento que sugiro neste estudo, quais as que permitem um maior retorno de feedback visual que possa guiar o aluno na sua compreensão dos conceitos geométricos. Outro exemplo seria investigar que tipo de pistas, designadamente matemáticas, o feedback visual emitido pelo computador contém e em que situações surgem. Outra problemática interessante, e que continua em discussão, é a ligação do trabalho no computador com o trabalho com papel e lápis, que está ausente deste estudo.

Para além de uma possível análise da relação entre o tipo de tarefas propostas e o feedback que foi gerado no decurso da sua resolução, existem outros tópicos mais específicos relacionados com as transformações geométricas que podem estar implícitos nas re-ações produzidas pelo computador para determinadas ações dos alunos. Por exemplo, seria importante perceber como é que o AGD permite que os alunos reconheçam propriedades das transformações geométricas, designadamente das isometrias. Com efeito, várias das ferramentas do GeoGebra assumem uma lógica de transformação geométrica. É o caso da ferramenta *Ângulo com uma Dada Amplitude*, que está concebida para receber 4 inputs (dois pontos e a amplitude e o sentido de um ângulo). De facto, o que a ferramenta faz é fornecer um terceiro ponto, que resulta da rotação do segundo ponto em torno do primeiro, com a amplitude e o sentido indicados pelo utilizador. Como se observou nos dados, os alunos aplicaram várias vezes esta ferramenta, mas não é claro que a tenham interpretado como uma forma de gerar a rotação de um ponto em torno de outro. Aliás, a razão pela qual o terceiro ponto fornecido pelo AGD está equidistante do centro da rotação é explicável pela própria definição de rotação central. Daí que, em determinados momentos, esta ferramenta tenha levado os alunos a produzirem triângulos isósceles com um certo ângulo interno, quando estes estavam interessados em triângulos de lados quaisquer. Esta e outras eventuais intencionalidades das ferramentas do AGD poderão requerer uma investigação mais detalhada, na medida em que a sua opacidade, como foi referido, pode estar, muitas vezes, subordinada a conceitos matemáticos que os alunos nem sempre reconhecem facilmente, apesar de os conhecerem e identificarem noutras situações.

Outra questão que necessita de ser aprofundada é a de perceber, com mais pormenor, as diferenças entre o feedback oral entre pares, num contexto de uma tarefa exploratória, com papel e lápis e com um AGD. Embora seja claro que o feedback oral é muitas vezes estimulado pela obtenção do feedback visual fornecido pelo AGD, o que não é muito óbvio é se os alunos o interpretam o meio digital como um co-ator na resolução de um problema ou apenas como um meio para obter e validar a resposta a uma questão matemática, ou seja, mais próximo da função desempenhada pelo papel e lápis.

Por último, seria interessante investigar, designadamente em estudos mais extensos, como é o caso do presente estudo, se a construção de significados poderá estar mais fortemente dependente do conhecimento associado ao funcionamento das ferramentas disponibilizadas pelo AGD ou do conhecimento matemático relativo a conceitos e propriedades geométricas envolvidas nas tarefas. Por outras palavras, permanece em aberto a questão de saber em que medida um conhecimento profundo e detalhado das caraterísticas de funcionamento das ferramentas e da sua intencionalidade e operacionalização pré-estabelecidas é determinante para uma utilização eficaz do

AGD ou se este conhecimento é o resultado de uma intensificação da co-ação entre o sujeito e a ferramenta, que pode assumir contornos essencialmente empíricos numa fase inicial da sua utilização.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projeto e a relação dos alunos com a matemática.* (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

Adler, J. (1996). *Secondary teachers' knowledge of the dynamics of teaching and learning mathematics in multilingual classrooms*. (Unpublished doctoral dissertation). University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.

Adler, J. (2000). Social practice theory and mathematics teacher education: A conversation between theory and practice. *Nordic Mathematics Education Journal*, *8*(3), 31-53.

Adler, J. (2009). Mathematics for teaching matters. In C. Hurst, M. Kemp, B. Kissane, L. Sparrow & T. Spencer (Eds.), *Mathematics: it's mine*, (pp. 3-16). Adelaide, Austrália: The Australian Association of Mathematics Teachers Inc.

Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (Eds.). (2003). *Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Agee, J. (2009). Developing qualitative research questions: a reflective process. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *22*(4), 431-447. DOI: 10.1080/09518390902736512.

Alarcão, I. (1996). *Formação reflexiva de professores: Estratégias de supervisão*. Porto: Porto Editora.

Allal, L. (1986). Estratégias de Avaliação Formativa: Concepções Psicopedagogicas e Modalidades de Aplicação. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Orgs.), *A Avaliação num Sentido Diferenciado* (pp. 175-209). Coimbra: Almedina.

Allal, I. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise. In M. Huberman, (Org.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires? Les propositions de la pédagogie de maîtrise*, (pp. 87-126). Neuchatel: Delachaux & Niestlé.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Alves, A. (2007). *E-Portfólio – Um estudo de caso*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Amado, N. (1998). *Concepções e práticas de professores de matemática do ensino secundário sobre avaliação*. (Tese de Mestrado não publicada). Universidade do Algarve. Disponível em: https://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/7578

Amado, N. (2007). *O Professor Estagiário de Matemática e a Integração das Tecnologias na Sala de Aula: Relações de mentoring numa constelação de práticas*. (Tese de Doutoramento) Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Anderson, H. (1999). Collaborative learning communities. In S. McNamee & K. Gergen (Eds), *Relational Responsibilities: resources for sustainable dialogue* (pp. 65-70). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (Eds.) (2003). *Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Arsac, G. (1989). La Construction du Concept de Figure chez les Élèves de 12 Ans. In V. Gerard, R. Janine, & A. Michele (Eds.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 85-92). Paris: PME.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM Mathematics Education, 42*, 715–731.

Arzarello F., Gallino G., Michelletti C., Olivero F., Paola D., & Robutti O. (1998). Dragging in Cabri and Modalities of Transition from Conjectures to Proofs in Geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 32-39). Stellenbosch: PME.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education*, *34*(3), 66-72.

Askew, S. & Lodge, C. (2000). Gifts, ping-pong and loops – linking feedback and learning. In S. Askew (Ed.), *Feedback for learning* (pp. 1-18). London: Routledge Falmer.

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computing in Mathematics Learning*, *15*, 225-253.

Baker, M. (2003). Computer-mediated argumentative interactions for the co-elaboration of scientific notations. In J. Andriessen, M. Baker & D. Suthers (Eds.), *Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments*, (pp. 47–78). Dordrecht: Kluwer.

Baker, M., Hansen, T., Joiner, R., & Traum, D. (1999). The role of grounding in collaborative learning tasks. In P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative learning: Cognitive and computational approaches*, (pp. 31– 63). Amsterdam: Elsevier.

Baker, R. S., Corbett, A. T., & Koedinger, K. R. (2004). *Detecting student misuse of intelligent tutoring systems*. (Paper presented at the Proceedings of the 7th International Conference on Intelligent Tutoring Systems. Disponível em: https://users.wpi.edu/~rsbaker/BCK2004MLFinal.pdf).

Bakhtin, M. (2003). *Estética da Criação Verbal*. São Paulo: Martins Fontes.

Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 258–272.

Balacheff, N. & Sutherland, R. (1994). Epistemological domain of validity of microworlds: the case of Logo and Cabri-géomètre. In R. Lewis & P. Mendelsohn (Eds.), *Lessons from Learning* (pp. 137-150). Amsterdam: Elsevier.

Barron, B. (2003). When smart groups fail. *Journal of the Learning Sciences*, *12*(3), 307-359.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 843-907). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. & Borrow, C. (1998). Using spreadsheets to promote algebraic thinking. *Teaching Children Mathematics*, *4*, 470-478.

Baulac, Y., Bellemain, F. & Laborde, J. M. (1988). *Cabri-geometre, un logiciel d'aide a l'enseignement de la geometrie, logiciel et manuel d'utilisation*. Paris: Cedic-Nathan.

Beare, R. (1993). How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. In B. Jaworski (Ed.), *Technology in Mathematics Teaching: A Bridge Between Teaching and Learning* (pp. 18-43). Bromley: Chartwell-Bratt.

Beatty, R. & Geiser, V. (2010). Technology, communication, and collaboration: re-thinking communities of inquiry, learning and practice. In C. Hoyles e J.-B. Lagrange (Eds). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the terrain – The 17th ICMI Study* (pp. 251-286). London: Springer.

Benbasat, I., Goldstein, D. K., & Mead, M. (1987). The Case Research Strategy in Studies of Information Systems. *MIS Quarterly*, *11*(3), 369-386.

Bereiter, C. (2002). *Education and mind in the knowledge age*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Berg, K. F. (1994). *Scripted cooperation in high school mathematics: Peer interaction and achievement*. (Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, Louisiana).

Bhagat, K. & Chang, C.-Y. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry learning - A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(1), 77-86.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshal, B., & William, D. (2003). *Assessment for learning: putting into practice.* Maindenhead: Open University Press.

Black, P. & William, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *5*(1), 7-75.

Black, P. & William, D. (2010). A pleasant surprise. *Phi Delta Kappan*, *92*(1), 47-48.

Blair, S. & Canada, D. (2009). Using circle-and-square intersections to engage students in the process of doing geometry. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook) (pp. 283-296). Reston, VA: NCTM.

Boaler, J., Ball, D., & Even, R. (2003). Preparing Mathematics Education Researchers for Disciplined Inquiry: Learning from, in, and for Practice. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds), *Second International Handbook of Mathematics Education – Part Two*, (pp. 491-521). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bokhove, C. & Drijvers, P. (2011). Effects of feedback conditions for an online algebra tool. In M. Joubert, A. Clark-Wilson & M. McCabe (eds.) *Proceedings of the 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, (ICTMT10), (pp. 81-86). University of Portsmouth, UK.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. New York, NY: Springer.

Bravo, M. & Eisman, L. (1998). *Investigación Educativa* (3ª Ed.). Sevilha: Ediciones Alfar.

Breen, C. (2003). Mathematics Teachers as Researchers: Living on the Edge? In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds), *Second International Handbook of Mathematics Education – Part Two*, (pp. 523-544). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Briten, E., Stevens, S., & Treby, N. (2012). Using talk for learning in science and mathematics. In D. Jones & P. Hodson (eds.), *Unlocking Speaking and Listening*, (pp. 19-34). (2nd edition). London & New York: Routledge.

Brock, C. F., Cappo, M., Dromi, D., Rosin, M., & Shenkerman, E. (Designers) (1994). *Tangabile math: Geometry Inventor*. Cambridge, MA: Logal Educational Software and Systems.

Bromley, D. B. (1990). Academic contributions to psychological counseling. 1. A philosophy of science for the study of individual cases. *Counselling Psychology Quarterly*, *3*(3), 299-307.

Brookes, J. G. & Brookes, M. G. (1993). *In Search of Understanding: the case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Brookhart, S. (2001). Successful students' formative and summative uses of assessment information. *Assessment in Education*, *8*(2), 153-169.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-116.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes. In C. Laborde, M. Glorian & A. Sierpinska (Eds.), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom*, (pp. 13-58). Dordrecht: Springer.

Brubacher, J. W., Case, C. W., & Reagan, T. G. (1994). *Becoming a Reflective Educator: How to Build a Culture of Inquiry in the Schools* (pp. 131-133). Thousand Oaks: Corwin Press.

Bryman, A. (2008). The end of the paradigm wars?. In P. Alasuutari, L. Bickman & J. Brannen (Eds.), *The Sage Handbook of social research methods.* London: Sage.

Burril, G. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics*. Michigan State University and Texas Instruments.

Burril, G. (2011). ICT in the United States: Were we are today and a possibility for tomorrow. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematicacs Education with Digital Technology*, (pp. 12-22). London: Continuum International Publishing Group.

Butler, D. & Winne, P. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of Educational Research*, *65*(3), 245-281.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de Geometria Dinâmica.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carnell, E. (2000). Dialogue, discussion and feedback – views of secondary school students on how others help their learning. In S. Askew (ed.), *Feedback for learning*, (pp. 46-62). London: Routledge Falmer.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project*. New York, NY: Springer.

Carrilho, J. (2002). Comentário. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (pp. 309-323). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carver, C. S. (2004). Self-regulation of action and affect. In R. F. Baumeister & K. D. Vohs (Eds.), *Handbook of self-regulation – research, theory, and applications,* (pp. 13-39). New York: The Guilford Press.

Carver, C. S. & Scheier, M. F. (2000). On the structure of behavioral self-regulation. In M. Boekaerts, P. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation*, (pp. 41-84). New York: Academic Press.

Chazan, D. (1993a). Instructional implications of students' understanding of the differences between empirical verification and mathematical proof. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What is it a case of?,* (pp. 107–116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chazan, D. (1993b). High School geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Chen, C. (2008). *The Effectiveness of Computer Supported Collaborative Learning on Helping Tasks in a Mathematics Course*. Malacca, Malaysia: Proquest LLC.

Cho, H., Gay, G., Davidson, B., & Ingraffea, A. (2007). Social networks, communication styles, and learning performance in a CSCL community. *Computers & Education*, *49*(2), 309–329.

Christou, C., Jones, K., Mousoulides, N., & Pittalis, M. (2006). Developing the 3DMath dynamic geometry software: theoretical perspectives on design, *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *13*(4), 168-174.

Clark, H. H. & Brennan, S. E. (1991). Grounding in communication. In L. B. Resnick, J. M. Levine & S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition*, (pp. 127–149). Hyattsville, MD: American Psychological Association.

Clarke, S. (2003). *Enriching feedback in the primary classroom*. Abingdon: Hodder and Stoughton.

Coelho, M. I. P. (1996). *O Cabri-géomètre na resolução de problemas. Estudo sobre processos evidenciados e construção de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Coelho, M. & Saraiva, M. (2000). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. In Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. *Atas do Encontro Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 35-60). Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_02_MICoelho.pdf

Cohen, V. B. (1985). A reexamination of feedback in computer-based instruction: Implications for instructional design. *Educational Technology*, *25*(1), 33-37.

Coleman-Martin, M. B., Heller, K. W., Cihak, D. F., & Irvine, K. L. (2005). Using computer-assisted instruction and the nonverbal reading approach to teach word identification. *Focus on Autism & Other Developmental Disabilities*, *20*(2), 80-90.

Costa, A. & Kallick, B. (2000). *Activating and Engaging Habits of Mind*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Crawford, K. & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. In A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Crook, C. K. (1994). *Computers and the collaborative experience of learning*. London: Routledge.

Daft, R. L. & Lengel, R. H. (1984). Information richness: A new approach to managerial behavior and organization design. In B. M. Staw & L. L. Cummings (Eds.), *Research in organizational behavior*, (Vol. 6, pp. 191–233). Greenwich, CT: JAI Press Inc.

Damsa, C. I. (2014). The multi-layered nature of small-group learning: Productive interactions in object-oriented collaboration. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. *9*(3), 247-281.

Davidson, N. (Ed.) (1990). *Cooperative Learning in Mathematics: A Handbook for Teachers*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Deaney, R., Ruthven, K. & Hennessy, S. (2003). Pupil perspectives on the contribution of information and communication technology to teaching and learning in the secondary school. *Research papers in education*, *18*(2), 141-165.

De Bruyne, P., Herman, J., & De Schoutheete, M. (1975). *Dynamique de la recherché en sciences sociales.* Vendôme: P.U.F.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias de informação. In V. Teodoro & J. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores*, (pp. 89-159). Lisboa: ME – Gabinete de Estudos e Planeamento.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (2011). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-19). London: Sage.

Dervin, B. (2003). Chaos, order, and sense-making: A proposed theory for information design. In B. Dervin, L. Foreman-Wernet & E. Lauterbach (Eds.), *Sense-making methodology reader selected writings of Brenda Dervin*, (pp. 325–340). Cresskill, NJ: Hampton Press.

De Villiers, M. D. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing undersanding of geometry and space*. Mahwah; NJ: Lawrence Erlbaum.

Dewey, J. (1902). *The child and the curriculum.* Chicago: University of Chicago Press.

Dias, S. (2008). *O papel da escrita avaliativa na avaliação reguladora do ensino e das aprendizagens de alunos do 8.º ano na disciplina de matemática*. (Tese de Mestrado). Faculdade de Ciências – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa.

Dillenbourg, P. & Evans, M. (2011). Interactive tabletops in education. *International Journal of Computer Supported Collaborative Learning*, *6*, 491–514.

Dillenbourg, P., Jarvela, S., & Fischer, F. (2009). The evolution of research on computer-supported collaborative learning: from design to orchestration. In N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. De Jong, A. Lazonder, & S. Barnes (Eds), *Technology-enhanced learning* (pp. 3–19). Berlin: Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (Vol. 2, pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age.

Duarte, J. (1993). *O computador na Educação Matemática: percursos de formação*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Duarte, M. & Rezende F. (2007). Construção compartilhada de significados na interação colaborativa de estudantes com um sistema hipermídia de biomecânica. *VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – VI ENPEC – ATAS*. Florianópolis: ABRAPEC.

Dweck, C. S., & Bush, E. S. (1976). Sex differences in learned helplessness: I. Differential debilitation with peer and adult evaluators. *Developmental Psychology*, *12*, 147-156.

Earl, L. (2003). *Assessment as Learning: using classroom assessment to maximize student learning*. Thounsand Oaks, CA: Corwin.

Earl, L. & Katz, S. (2008). Getting to the core of learning – Using assessment for self-monitoring and self-regulation. In S. Swaffield (Ed.), *Unlocking Assessment – Understanding for reflection and application*, (pp. 90-104). London : Routledge.

Earl, L. & Lee, L. (2000). Learning for a change: school improvement as capacity building. *Improving Schools, 3,* 30-8.

Edwards, J. & Jones, K. (2006). Linking Geometry and Algebra with GeoGebra. *Mathematics Teacher*, *194*, 28-30.

Edwards, L. (1997). Exploring the territory before proof: student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International journal of computers for mathematical learning*, *2*, 187-215.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki, Finland: Orienta-Kosultit Oy.

English, S. & Yazdani, M. (1999). Computer-supported cooperative learning in a Virtual University. *Journal of Computer Assisted Learning*, *15*, 2-13.

Ennis, R. H. (1992). John McPeck's Teaching critical thinking. *Educational Studies, 23* (4), 462-472.

Eraut, M. (1995). Developing Professional Knowledge within a Client-centred Orientation. In T. R. Guskey & M. Huberman (Eds.), *Professional Development in Education*, (pp. 227-252). New York: Teachers College Press.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (ed.), *Handbook of research on teaching*, (pp. 119-161). New York: Macmillan.

Esmonde, I. (2009). Mathematics learning in groups: analyzing equity in two cooperative activity structures. *Journal of the Learning Sciences*, *18*, 247-284.

Evans, M. A., Feenstra, E., Ryon, E. & McNeill, D. (2011). A multimodal approach to coding discourse: Collaboration, distributed cognition, and geometric reasoning. *International Journal of Computer Supported Collaborative Learning*, *6*(2), 253–278.

Faggiano, E. & Ronchi (2011). Geogebra as a methodological resource. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered Learning – pathways to mathematical understanding using Geogebra*, (pp. 183-189). Rotterdam: Sense Publishers.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fiorentini, D. (2002). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. *Quadrante*, *2*, 97-107.

Flick, U. (2005). *Métodos Qualitativos na Investigação Científica*. Lisboa: Monitor – Projectos e Edições.

Flores, A. (2009). Area formulas with hinged figures. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 297-313). Reston, VA: NCTM.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Forsythe, S. K. (2011). Current report: Developing perceptions of symmetry in a Dynamic Geometry Environment. *Research in Mathematics Education*, *13*(2), 225-226.

Garrison, D., Anderson, T., & Archer, W. (2001). Critical thinking, cognitive presence, and computer conferencing in distance education. *American Journal of Distance Education*, *15* (1), 7–23.

Gillham, B. (2001). *Case Study Research Methods*. London & New York: Continuum.

Giordan, M. (2005). A internet vai à escola: domínio e apropriação de ferramentas culturais. *Educação e Pesquisa*, *31*(1), 57-78.

Gipps, C. (1996). *Assessment for the Millennium: form, function e feedback*. London: London Institute of Education.

Gipps, C. V. & Stobart, G. (1997). *Assessment: a teacher's guide to the issues* (3 Ed.). London, UK: Hodder and Stoughton.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine Pub. Co.

Glesne, C. & Peshkin, A. (1992). *Becoming qualitative researchers: An introduction*. New York: Longman.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, (pp. 351-368). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Good, T. & Brophy, J. (1994). *Looking in classrooms* (6th ed). New York: Harper Collins.

Goos, M. & Cretchley, P. (2004). Computers, multimedia, and the internet in mathematics education. In B. Perry, G. Anthony & C. Diezmann (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2000-2003*, (pp. 151-174). Flaxton, Queensland: Post Pressed.

Goos, M. & Geiger, V. (1995). Metacognitive activity and collaborative interactions in the mathematics classroom: A case study. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the eighteenth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 307-313). Darwin: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Graf, K. & Hodgson, B. (1998). The computer as a contexto for new possible geometrical activities. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on teaching of geometry for the 21st century*, (pp. 144-158). (ICMI Study). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. (1998). Developmental research as a research method. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, (Vol. 2, pp. 277-295). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravina, M. (1996). Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, (pp. 1-13). Belo Horizonte, Brasil.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 3*, 195–227.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127–150.

Hammersley, M. (2013). *What is qualitative research?*. Graham Crow, University of Southampton.

Han, H. (2007). *Middle School Students' Quadrilateral Learning: A Comparison Study*. (Doctoral Thesis), University of Minnesota, United States of America.

Hattie, J. T. (1999). *Influences on student learning*, Inaugural Professional Lecture, August. Disponivel em: www.education.auckland.ac.nz/uoa/education /staff/j.hattie/papers/influences.cfm.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, *77*, 81-112.

Hattie, J. & Yates, G. C. R. (2013). *Visible learning and the science of how we learn*. London: Routledge.

Hausmann, R., Chi, M., & Roy, M. (2004). Learning from collaborative problem solving: An analysis of three hypothesized mechanisms. *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, *26*(26), 547-552. Disponível em: https://cloudfront.escholarship.org/dist/prd/content/qt2ts2g2j6/ qt2ts2g2j6.pdf

Healy, L., Hoelzl, R., Hoyles, C. & Noss, R. (1994). 'Messing up'. *Micromath*, *10*(1), 14–16.

Hegedus, S., Donald, S., & Moreno-Armella, L. (2007). Technology that mediates and participates in mathematical cognition. In D. Pitta-Panzi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME 5*, (pp. 1419–1428). Cyprus: University of Cyprus.

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 399–412.

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 26-31.

Hegedus, S. & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 369–388.

Heritage, M. (2007). Formative Assessment: What do teachers need to know and do? *Phi Delta Kappan, 89*, 140-145.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on teaching of geometry for the 21st century*, (pp. 29-36). (ICMI Study). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hicks, D. (Ed.) (1996). *Discourse, learning, and schooling.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hillel, J. (1992). The Computer as a Problem-Solving Tool; It Gets a Job Done, but Is It Always Appropriate? In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies*, (pp. 205-218). New York: Springer-Verlag.

Hodgen, J. & Webb M. (2008). Questioning and dialogue. In S. Swaffield (Ed.) *Unlocking Assessment – Understanding for reflection and application* (pp. 73-89). London: Routledge.

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164-192.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Straber, R. (2008). Technology and the learning of Geometry at the secondary level. In M. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Research syntheses*, (Vol. 1, pp. 155-206). Reston, VA: NCTM.

Hollebrands, K. & Smith, R. (2009). Using interactive geometry software to teach secondary school geometry: Implications for research. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*, (pp. 221-232). (NCTM, 2009 Yearbook). Reston, VA: NCTM.

Hölzl, R. (1995). Between drawing and figure. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education*, (pp. 117-124). Berlin: Springer.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*, 169-187.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana e V. Villani (eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). (ICMI Study 8). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C., & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics*. *23*(1), 31-57.

Irons, A. (2008). *Enhancing learning through formative assessment and feedback*. Abingdon: Routledge.

Irving, A. & Crawford, A. (2011). Automated assessment and feedback on MATLAB assignments. In M. Joubert, A. Clark-Wilson & M. McCabe (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference for Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT10), (pp. 153-158). University of Portsmouth, UK.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, California: Key Curriculum Press.

Jackson, P. (1990). *Life in classrooms*. New York: Teachers College Press.

James, M. (2008). Assessment and learning. In S. Swaffield (Ed.) *Unlocking Assessment – Understanding for reflection and application*, (pp. 20-35). Abingdon: Routledge.

Janesick, V. (2000). The Choreography of Qualitative Research Design: Minuets, Improvisations, and Crystallization. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research*, (pp. 379-400). Thousand Oaks, California: Sage.

Johnson, C. D. (2002). *The effects of the Geometer's Sketchpad on the van Hiele levels and academic achievement of high school students*. (Unpublished doctoral dissertation). Wayne State University, Detroit, Michigan. Disponível em: http://digitalcommons.wayne.edu/dissertations/AAI3071795/.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-3), 55-85.

Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., & Parish, A. (2009). Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics software Geogebra. *Proceedings of the British society for research in to learning mathematics*. *29*(1), 97-102.

Jones, K., Mackrell, K., & Stevenson, I. (2010). Designing digital technologies and learning activities for different geometries. In C. Hoyles & J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology - Rethinking the terrain,* (pp. 47–60). New York: Springer.

Jordan, B. & Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundations and practice. *Journal of the Learning Sciences*, *4*(1), 39–103.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Joubert, M. (2013). Using computers in classroom mathematical tasks: revisiting theory to develop recommendations for the design of tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education*, *Proceedings of the International Conference for ICMI Study 22*, (pp. 69-78). Oxford, UK. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.591.1709&rep=rep&type=pdf

Joubert, M. (2017). Revisiting theory for the design of tasks. Special considerations for digital environments. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks:potential and pitfalls*, (pp. 17-40). Berlin: Springer.

Junqueira, M. M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos – Um estudo no 9.º ano de escolaridade* (Tese de mestrado). Lisboa: APM.

Katz, S., Sunderland, S., & Earl, L. (2002). Developing an evaluation habit of mind. *Canadian Journal of Program Evaluation*, *17*, 103-119.

Keeley, P. & Tobey, C. (2011). *Mathematics Formative Assessment – 75 pratical strategies for linking assessment, instruction, and learning.* Corwin: Sage and National Council of Teachers of Mathematics.

Keyton, M. (1997). Students discovering geometry using dynamic geometry software. In J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned on! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*, (pp. 63-68). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learn*ing, *11*, 205-263.

Kimmerle, J., & Cress, U. (2008). Group awareness and self-presentation in computer-supported information exchange. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *3*(1), 85–97.

King, A. (1997). Ask to Think-Tel Why: A model of transactive peer tutoring for Scaffolding higher-level complex learning. *Educational Psychologist*, *32*(4), 221-235.

Kluger, A. N. & DeNisi, A. (1996). The effects of feedback interventions on performance: a historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin*, *27*, 111-26.

Kock, N., Garza, V., & Rangel, M. (2009). *Media naturalness reduction and compensatory channel expression: A study of online and face-to-face sections of the same course*. Paper presented at the International Conference on Information Resources Management.

Kortenkamp U. H. & Richter-Gebert J. (1999). *The interactive geometry software "Cinderella"*. Berlin: Springer-Verlag.

Koschmann, T. (2002). Dewey's contribution to the foundations of CSCL research. In G. Stahl (Ed.), *Computer support for collaborative learning: Foundations for a CSCL community: Proceedings of CSCL 2002*, (pp. 17–22). Boulder, CO: Erlbaum.

Koschmann, T., Zemel, A., Conlee-Stevens, M., Young, N., Robbs, J., & Barnhart, A. (2005). How do people learn? Members methods and communicative mediation. In R. Bromme, F. W. Hesse & H. Spada (Eds.), *Barriers and biases in computer-mediated knowledge communication - And how they may be overcome*, (pp. 265–294). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Kraiger, K. (2008). Transforming our models of learning and development: Web-based instruction as enabler of third-generation instruction. *Industrial and Organizational Psychology*, *1*, 454–467.

Kulhavy, R. W. & Stock, W. A. (1989). Feedback in written instruction: The place of response certitude. *Educational Psychology Review*, *1*(4), 279-308.

Kumpulainen, K. & Kaartinen, S. (2000). Situational Mechanisms of Peer Group Interaction in Collaborative Meaning-Making: Processes and Conditions for Learning. *European Journal of Psychology of Education*, XV (4), 431-454.

Laborde, C. (1993a). The computer as part of the learning environment; The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 48-60). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C. (1993b). Do the pupils learn and what do they learn in a computer-based environment? The case of Cabri-géomètre. In B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the 1993 Technology in Mathematics Teaching Conference*, (pp. 39–52). University of Birmingham, UK.

Laborde, C. (1998). Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment. In C. Mammana & Villani, V. (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century – An ICMI Study*, (pp. 113-121). Dordrecht: Kluwer.

Laborde, C. (2006). Teaching and learning – An introduction. In F. K. S. Leung, K-D, Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *The 13th ICMI Study: Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West*, (pp. 285-290). New York: Springer.

Laborde, C. (2011). Designing substantial tasks to utilize ICT in mathematis lessons. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematicacs Education with Digital Technology*, (pp. 12-22). London: Continuum International Publishing Group.

Laborde, C. (2014). *Interactivity and flexibility exemplified with Cabri*. Plenary lecture given at the Asian Technology Conference in Mathematics. Disponível em: http://atcm.mathandtech.org/EP2014/invited/3672014_20625.pdf

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant díun milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Laborde, C. & Laborde, J. M. (1992). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice*, (pp. 177-192). Berlin: Springer-Verlag.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, (pp. 275-304). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lavy, I. & Leron, U. (2004). The emergence of mathematical collaboration in a interactive computer environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*, 1-23.

LeBaron, C. (2002). Technology does not exist independent of its use. In T. Koschmann, R. Hall & N. Miyake (Eds.), *CSCL 2: Carrying forward the conversation*, (pp. 433-439). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leite, C. & Terrasêca, M. (1993). *Ser Professor/a num Contexto de Reforma*. (Cadernos Correio Pedagógico). Porto: Edições ASA.

Lehtinen, E. (2003). Computer-supported collaborative learning: an approach to powerful learning environments. In E. De Corte, L. Verschaffel, N. Entwistle & J. van Merriënboer (eds), *Unravelling basic components and dimensions of powerful learning environments* (pp. 35-53). Amsterdam: Elsevier.

Lemke, J. (1990). *Talking science: Language, learning, and values*. Norwood, NJ: Ablex.

Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in Dynamic Geometry Environments. In S. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 451-470). New York: Springer.

Lessard-Hérbert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2010). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget. (4.ª edição, original em Francês publicado em 1990).

Lima, J. P. (1989). *Linguagem e acção – da filosofia analítica à linguística pragmática*. Lisboa: Apáginastantas.

Lipponen, L., Hakkarainen, K., & Paavola, S. (2004). Practices and orientations of CSCL. In J.-W. Strijbos, P. Kirschner & R. Martens (Eds.), *What we know about CSCL: And implementing it in higher education*, (pp. 31-50). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Locke, E. A. & Latham, G. P. (2002). Building a practically useful theory of goal setting and task motivation: A 35-year odyssey. *American Psychologist*, *57*, 705–717.

Lonchamp, J. (2012). An instrumental perspective on CSCL systems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. *7*(2), 211-237.

Loughran, J. (2007). History and Context of Self-study of Teaching. In J. J. Loughran, M. L. Hamilton, V. K. LaBoskey, T. L. Russell (Eds.), *International Handbook of Self-Study of Teaching and Teacher Education Practices – Part one,* (pp. 7-39). Dordrecht: Springer.

Lou, Y. (2004). Understanding Process and Affective Factors in Small Group versus Individual Learning with Technology. *Journal of Educational Computing Research*, *31*(4), 337-369.

Lou, Y., Abrami, P. C. & d'Apollonia, S. (2001). Small Group and Individual Learning with Technology: A Meta-analysis. *Review of Educational Research*, *71*(3), 449-521.

MacDonald, B. & Boud, D. (2003). The impact of self-assessment on achievement: The effects of self-assessment training on performance in external examinations. *Assessment in Education*, *10*(2), 209-220.

Makar, K. & Confrey, J. (2006). Dynamic statistical software: how are learners using it to conduct data-based investigations? In C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son & N. Sinclair (Eds), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.

Malara, N. & Zan, R. (2002). Research Methods in Mathematics Education. In L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 553-580). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Margolinas, C. (1993). *De I'importance du vrai et du/aux dans la classe de mathématiques*. Paris: La Pensée Sauvage.

Mariotti, M. A. (2002). Influences of technologies advances in students' math learning. In L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 695-723). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates publishers.

Mason, J. & Bruning, R. (2001). *Providing feedback in computer-based instruction: What the research tell us*. Disponível em: http://dwb.unl.edu/Edit/MB/ MasonBruning.html.

Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: DEFCUL.

Matos, J. F. & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática – Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), p. 19-53.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative Research Design: An Interactive Approach* (2nd Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

McConnell, D. (1994). *Implementing Computer Supported Cooperative Learning*. London: Kogan Page.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: social organization in the classroom.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Meltzer, B., Petras, J. & Reynolds, L. T. (2014). *Symbolic interactionisim: Genesis, varieties and criticism*. London: Routledge.

Mercer, N., Dawes, L., Wegerif, R. & Sams, C. (2004). Reasoning as a scientist: ways of helping children to use language to learn science. *British Educational Research Journal*, *30*(2), 359-77.

Mercier, E. & Higgins, S. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. *Learning and Instruction, 25*, 13-23.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco & London: Jossey-Bass Publishers.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis*. Thousand Oaks: Sage.

Miller, G. A., Galanter, E., & Pribram, K. H. (1960). *Plans and the Structure of Behavior*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ministério da Educação - Despacho Normativo N.º 20/2012. *Diário da República*, II série de 3 de outubro de 2012, 33344-33346.

Monteiro, M. C. (1994). *The impact of an in-service teacher training programme on teachers involved with computers in education*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies, *ZDM Mathematics Education*, *41*, 505–519.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 99–111.

Mulholland, J. (2007). Understanding the self as instrument. In P. C. Taylor & J. Wallace (Eds.). *Contemporary Qualitative Research – Exemplars for Science and Mathematics Educators*, (pp. 45-57). Dordrecht: Springer.

Mullins, D., Rummel, N., & Spada, H. (2011). Are two heads always better than one? Differential effects of collaboration on students' computer-supported learning in mathematics. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *6*(3), 421–443.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (tradução portuguesa da edição original de 2000).

Newmann, F. (1996). *Authentic Achievement: restructuring schools for intellectual quality*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Noss, R., Healy, L., Hoyles, C. & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for construction. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. III, pp. 360-367). Lisboa: PME.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings - Learning Cultures and Computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

O’Donnell, A. M. (1999). Structuring dyadic interaction through scripted cooperation. In A. M. O’Donnell & A. King (Eds.), *Cognitive perspectives on peer learning*, (pp. 179–196). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

O’Donnel, A. & Topping, K. (2009). Peers assessing peers: possibilities and problems. In K. Topping & S. Ehly (Eds.), *Peer-assisted learning*, (pp. 258-281). Mahwah, N.J.: Lawremce Erlbaum Associates (First edition 1998).

OCDE (2012). *OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education: Portugal 2012*. Disponível em: www.**oecd**.org/edu/school/50077677.pdf.

Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as activi-dades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt/textos/p_97-110.pdf .

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, (pp. 29-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Olive, J. (2000). Computer tools for interactive mathematical activity in the elementary school. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 241-262.

Olive, J.; Makar, K.; Hoyos, V.; Kor, L.; Kosheteva, O. & Sträber, R. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the terrain – The 17th ICMI Study*, (pp. 133-178). New York: Springer.

Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. In W. Maull & J. Sharp (eds), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Plymouth, UK.

Olsson, J. (2015). Feedback from dynamic software supports creative mathematical reasoning. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp.

2590-2591). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Olsson, J. (2017). The contribution of reasoning to the utilization of feedback from software when solving mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *1*, 1-21.

O'Malley, C. & Scanlon, E. (1989). *Computer-supported Collaborative Learning: Problem Solving and Distance Education* (Report No. 75). Milton Kyenes, Great Britain: Open University, Centre for Information Technology in Education.

Osta, I. (1998). Computer technology and the teaching of geometry - Introduction. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on teaching of geometry for the 21st century,* (pp. 109-113). (ICMI Study). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Overdijk, M., van Diggelen, W., Andriessen, J., & Kirschner, P. A. (2014). How to bring a technical artifact into use: A micro-developmental perspective. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. *9*(3), 283-303.

Paiva, A. (2005). *Constrangimentos na aprendizagem – Dificuldade de relação dos alunos com a matemática.* (Tese de Mestrado). Associação de Professores de Matemática.

Paiva, J. C. (2009). *Uma Experiência Educacional: Avaliação do Trabalho com o Geometer's Sketchpad na Aula de Matemática*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Paniati, J. (2009). Teaching geometry for conceptual understanding: one teacher's perspective. In T. Crane & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 175-188). Reston, VA: NCTM.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Papert, S. (1996). *The Connected Family*. Atlanta, GA: Longstreet Press.

Parzysz, B (1988). "Knowing" vs. "seeing": Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79-92.

Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation.* London: Sage Publications.

Patton, M. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice*. (4.ª edição). Saint Paul: Sage Publications.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 47-87). Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.

Perez, G. (2004). Prática Reflexiva do Professor de Matemática. In M. A. V. Bicudo, & M. C. Borba (Orgs.), *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento* (pp. 250-263). São Paulo: Editora Cortez.

Perrenoud, P. (1998). From formative assessment to a controlled regulation of learning processes: towards a wider conceptual field. *Assessment in Education*, *5*, 85-102.

Perrenoud, P. (1999). *Avaliação. Da excelência à regulação das aprendizagens. Entre duas lógicas.* Porto Alegre : ARTMED.

Pfister, H. R. (2005). How to support synchronous net-based learning discourses: Principles and perspectives. In R. Bromme, F. W. Hesse & H. Spada (Eds.), *Barriers and biases in computer mediated knowledge communication—And how they may be overcome*, (pp. 39–58). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pinheiro, A. & Carreira, S. (2013). O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Disponível em: http://eiem2013.spiem.pt/wp-content/uploads/2013/05/GD1C5PinheiroCarreira.pdf.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de Avaliação das Aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Polettinni, A. & Sabaraense, N. (1999). Inovações, mudança e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 8*, 189-212.

Pollock, J. (2012). *Feedback – The hinge that joins teaching & learning*. Thousand Oaks: Corwin.

Ponte, J. (2000). Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores. *Revista Ibero-Americana de Educação, 24*, 63-90.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Orgs.), *Reflectir e Investigar sobre a prática profissional*, (pp. 5-28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias N. (2009). *Triângulos e quadriláteros - Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo* – 7.º ano. Lisboa: DGIDC – Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Disponível em: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ ProgramaMatematica.pdf.

Pope, S. (2011). ICT and the English mathematics curriculum. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematicacs Education with Digital Technology*, (pp. 12-22). London: Continuum International Publishing Group.

Pratt, D. & Ainley, J. (1997). The construction of meanings for geometric construction: two contrasting cases. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 293-322.

Prensky, M. (2010). *Teaching Digital Natives – Partnering for real learning*. Thousand Oaks: Corwin.

Professores das turmas piloto do 8º ano (2010). *Proposta de sequência de tarefas para o 8.º ano - 3.º ciclo*. Disponível em: http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/054-cadeia_TPitagoras.pdf.

Prue, R. (2011). Home and school – bridging the gap. In A. Oldknow & C. Knights (Eds), *Mathematicacs Education with Digital Technology*, (pp. 118-122). London: Continuum International Publishing Group.

Punch, K. (2014). *Introduction to Social Research: Quantitative & Qualitative Approaches* (3.ª Edição). London: SAGE Publications.

Puntambekar, S. (2006). Analyzing collaborative interactions: divergence, shared understanding and construction of knowledge. *Computers and Education*, *47*(3), 332–351.

Rabardel, P. (2002) Le langage comme instrument? Éléments pour une théorie instrumentale étendue. In Y. Clot (ed.), *Avec Vygotski* (pp. 265-290). Paris: La Dispute.

Rabardel, P., & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: From subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science*, *6*(5), 429–461.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers*. *15*, 665–691.

Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Behavioral Science*, *28*(1), 4-13.

Reigel, D. (2005). *Positive feedback loops in second language learning*. (Unpublished Master Thesis). Portland State University, USA. (Disponível em: http://www.labschool.pdx.edu/research/current/Reigel%20Thesis.pdf).

Reigel, D. (2008). Positive Feedback in Pairwork and Its Association With ESL Course Level Promotion. *TESOL Quarterly*, *42*(1), 79–98.

Reynolds, R. (2009). *Teaching Studies of Society and Environment in the Primary School*. Melbourne, Australia: Oxford University Press.

Resta, P. & Laferrière, T. (2007). Technology in support of collaborative learning. *Educational Psychology Review*, *19*, 65-83.

Richards, L. (2005). *Handling Qualitative Data: A Practical Guide*. London: Sage Publications.

Richardson, V. (1994). Conducting research on practice. *Educational Researcher*, *23*(5), 5-10.

Richardson, G. P. (1999). *Feedback Thought in Social Science and Systems Theory*. Waltham, MA: Pegasus Communications.

Richert, E. S. (1997). Excelence and equity in identification and programming. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds), *Handbook of gifted education*, (2nd. Ed.), (pp. 75-88). Boston: Allyn & Bacon.

Ritella, G., & Hakkarainen, K. (2012). Instrumental genesis in technology-mediated learning: From double stimulation to expansive knowledge practices. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. *7*(2), 239-258.

Robinson, P. (2011). Task-Based Language Learning: A Review of Issues. *Language Learning, 61*, (Issue Supplement s1), 1–36.

Rodrigues, M. M. T. (1997*). A aprendizagem da matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (Tese de mestrado). Lisboa: APM.

Roschelle, J. & Teasley, S. (1995). The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. In C. O'Malley (Ed.), *Computer-supported collaborative learning*, (pp. 69-197). Berlin, Germany: Springer Verlag.

Rowe, M. B. (1974). Wait time and rewards as instructional variables, their influence on language, logic and fate control. *Journal of research in science teaching*, *11*, 91-94.

Ruivo, J. (2003). Os Docentes em Tempos de Mudança. In *Professores em Tempos de Mudança*, (pp. 65-71). Castelo Branco: RVJ Editores.

Rummel, N. & Spada, H. (2005). Instructional Support for Collaboration in Desktop Videoconference Settings. In R. Bromme, F. W. Hesse & H. Spada (Eds.), *Barriers and biases in computer-mediated knowledge communication—And how they may be overcome* (pp. 59-88). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Rysavy, S. D. M. & Sales, G. C. (1989). Cooperative Learning in Computer-Based Instruction. *Educational Technology, Research and Development*, *39*(2), 70-79.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la representation d'un problème. *Psychologie Française*, *34*(2/3), 193-206.

Sacks, H., Schegloff, E. A., & Jefferson, G. (1974). A simplest systematics for the organization of turn-taking in conversation. *Language*, *50*(4), 696 –735.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno, L., & Perrusquía E. (2010). The influence and shaping of digital Technologies on the learning – and learning trajectories – of mathematical concepts. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds), *Mathematics*

Education and Technology – Rethinking the terrain. (The 17th ICMI Study), (pp. 179-226). New York: Springer.

Sadovsky, P. & Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: A milieu for the emergence of new questions. In C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian e A. Sierpinska (Eds), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom*, (pp. 85-112). Dordrecht: Springer.

Saha, R., Ayub, A., & Tarmizi R. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning. *Procedia Social and Behavioural Sciences*, *8*, 686-693.

Salkind, N. J. (2004). *An introduction to theories of human development*. Thousand Oaks: Sage.

Sandelowski, M. (2004). Qualitative Research. In M. Lewis-Beck, A. Bryman & T. Liao (Eds.), *The sage encyclopedia of social science research methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A., & Wong, K. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. In C. Hoyles e J.-B. Lagrange (Eds), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the terrain*. (The 17th ICMI Study), (pp. 227-250). New York: Springer.

Sanmartí, N. (2009). *Avaliar para aprender.* Porto Alegre: Artmed. (Edição original de 2007)

Santos, E. & Rodrigues, M. (1998). O computador na sala de aula. *Actas do ProfMat 98*, (pp. 157-166). Lisboa: APM.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê, e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens*, (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Santos-Trigo, M. (2004). The Role of Technology in Students' Conceptual Constructions in a Sample Case of Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(2), 1-17.

Scardamalia, M. & Bereiter, C. (1996). Engaging student in a knowledge society. *Educational Leadership*, *54*(3), 6-10.

Scardamalia, M. & Bereiter, C. (2003). Knowledge building. In J. W. Guthrie (Ed.), *Encyclopedia of Education* (2nd ed.), (pp. 1370-1373). New York: Macmillan.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practicioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Schoenfeld, A. (1996). *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática*, (pp. 61–72). Lisboa: APM e Projecto MPT (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Schuck, S. & Segal, G. (2002) Learning about our teaching from our graduates, learning about learning with critical friends. In J. Loughran & T. Russell (Eds), *Improving teacher education practices through self-study,* (pp. 88–101). London: Routledge Falmer.

Schwartz, J. L. (1992). A caixa mágica newtoniana. *Educação e computadores*, 219-226. Lisboa: Ministério da Educação - GEP.

Schwartz, J. L. (1993). A personal view of the Supposer: Reflections on particularities and generalities in educational reform. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The Geometric Supposer: What is it a case of?*, (pp. 3-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schwartz, J., Yerushalmy, M. (designers). (1992). *The Geometric SuperSupposers*, Pleasantville, NY: Sunburst Communications.

Semana, S. (2008). *Os relatórios escritos como instrumentos de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8.º ano de escolaridade em Matemática*. (Tese de Mestrado não publicada). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Senge, P. (1990). The leader's new work: building learning organizations'. *Sloan Management Review*, *32*(1), 7-23.

Serrazina, M. L. (1995). Ensinar / aprender matemática. *Actas do ProfMat* 95, (pp. 33-41). Lisboa: APM.

Serrazina, L. (1999). Reflexão conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. *Quadrante*, *9*, 139-167.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27* (2), 4-13.

Shapiro, B. (1994). *What children bring to light: A constructivist perspective on children's learning in science*. New York: Teachers College Press.

Sherman, M. (2012). Supporting students mathematical thinking during technology-enhanced investigations using DGS. In D. Martinovic, D. Mcdougall & Z. Karadag (Eds), *Technology in mathematics education: contemporary issues*, (pp. 147-182). Santa Rosa, California: Informing Science Press.

Shlechter, T. M. (1991). What do We Really Know About Small Group CBT? *Annual Conference of the Association for the Development of Computer-Based Instructional Systems*. St. Louis, MO.

Shulman, B. H. (1985). Cognitive therapy and the individual psychology of Alfred Adler. In M. J. Mahoney & A. Freeman (Eds.), *Cognition and psychotherapy*, (pp. 243-258). New York: Plenum.

Shulman, L. (1997). Disciplines of inquiry in education: An overview. In R. M. Jaeger (Ed.). *Complementary methods for researchers in education* (pp. 3-19). Washington, D.C.: American Education Research Association,

Shute, V. J. (2008). Focus on Formative Feedback. *Review of Educational Research*, *78*(1), 153-189.

Silva, N., Ferreira, M. & Tozetti, K. (2015). Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau. In *Anais do XII Congresso Nacional de Educação - EDUCERE,* 19950-19961. Curitiba, PUCPR. Disponível em:
http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18159_8051.pdf.

Sim-Sim, I., Silva A. C., & Nunes, C. (2008). *Linguagem e comunicação no jardim-de-infância*. Lisboa: Ministério da Educação - Direção geral de inovação e de desenvolvimento curricular.

Sinclair, M. P. (2005). Peer Interactions in Computer Lab: Reflections on Results of a Case Study Involving Web-Based Dynamic Geometry Sketches. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 89-107.

Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research and practice*, (2nd ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Slavin, R. E. & Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: a best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, *78*(3), 427-515.

Smith, I. (2007). *Assessment & Learning Pocketbook.* Alresford, Hampshire: Teacher's Pocketbooks.

Smith, J. (2010). *The lazy teacher's handbook – How your students learn more when you teach less*. London: Crown House Publishing, Ltd.

Smith, M. & Stein, M. (2011). *Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Thousand Oaks: Corwin and The National Council of Teachers of mathematics.

Sousa, A. (2005). *Investigação em Educação*. Lisboa: Livros Horizonte, Lda.

Stahl, G. (2000). Collaborative information environments to support knowledge construction by communities. *AI & Society*, *14*, 71–97.

Stahl, G. (2006). *Group cognition: Computer support for building collaborative knowledge*. Cambridge, MA: MIT Press.

Stahl, G. (2013). *Translating Euclid: Creating a human-centered mathematics*. San Rafael, CA: Morgan & Claypool Publishers.

Stahl, G. (2015). *From intersubjectivity to group cognition. Computer Supported Cooperative Work.* Disponível em: http://GerryStahl.net/pub/intersubjectivity.pdf.

Stahl, G. (2016). *Constructing dynamic triangles together: The development of mathematical group cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Stahl, G., Koschmann, T., & Suthers, D. (2006). Computer-supported collaborative learning: an historical perspective. In R. K. Sawyer (Ed.), *Cambridge handbook of the learning sciences*, (pp. 409–426). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Stake, R. (1995). *The Art of case study Research*. Thousand Oaks: Sage.

Stake, R. (1998). Case Studies. In N. Denzin e Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry*. Thousand Oaks, London: Sage.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*, (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Suthers, D. (2006). Technology affordances for intersubjective meaning making: A research agenda for CSCL. *Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 315–337.

Swaffield, S. (2008). The central process in assessment for learning. In S. Swaffield (Ed.), *Unlocking Assessment – Understanding for reflection and application* (pp. 57-72). New York: Routledge.

Tacaci, D., Stankov, G., & Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education, 82*, 421-431.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structure in the calculus. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 481-492.

Talmon, V. & Yerushalmy, M. (2006). Computer "Knowledge" and Student's Images of Figures: The Case of Dragging. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, (vol. 5, pp. 241-248). Prague : PME.

Tapscott, D. (2009). *Grown Up Digital: How the Net Generation is Changing Your World*. New York : McGraw Hill.

Taylor, R. (Ed.) (1981). The *Computer in the School : Tutor, Tool, Tutee*. New York: Teachers College Press.

Teasley, S. D. (1995). The role of talk in children's peer collaborations. *Developmental Psychology*, *31*(2), 207–220.

Tobin, K. (1986). Efects of teacher wait time on discourse characteristics in mathematics and language arts classes. *American Educational Research Journal*, *23*, 191-200.

Topping, K. (2005). Trends in peer learning. *Educational Psychology*, *25*(6), 631-645.

Torrance, H. & Pryor, J. (1998). *Investigating formative assessment: teaching, learning and assessment in the classroom*. Maidenhead: Open University Press.

Towler L. & Broadfoot P. (1992). Self-assessment in primary school. *Educational Review*, *44*(2), 137-151.

van der Pol, J., Admiraal, W., & Simons, R. J. (2003). Grounding in electronic discussions: Standard (threaded) versus anchored discussion. In B. Wasson, S. Ludvigsen & U. Hoppe (Eds.), *Proceedings of CSCL 2003: Designing for change in networked learning environments*, (pp. 77–81). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: IIE.

Veloso, E. (2002). The Geometer´s Sketchpad (versão 4). *Educação e Matemática, 66*, 20-21.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts : a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 275-298.

von Glasersfeld, E. (1994). Pourquoi le Constructivisme Doit-il Être Radical? *Revue des Sciences de l'Éducation*, *20*(1), 21-27.

Vygotsky, L. (1987). *The collected Works of L. S. Vygotsky*, (Vol. 1). New York: Plenum.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamento e linguagem* (5ª ed.). São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora (Trabalho original em Inglês publicado em 1961).

Webb, N. M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Education Research, 13,* 21–39.

Webb, N. M. & Farivar, S. (1994). Promoting helping behavior in cooperative small groups in middle school mathematics. *American Educational Research Journal, 31*(2), 369-395.

Webb, M. E. & Jones, J. (2006). *Assessment for learning transforming classroom practice?*. Paper presented na British Educational Research Association Annual Conference. University of Warwick.

Wei, C. & Ismail, Z. (2010). Peer Interactions in Computer-Supported Collaborative Learning using Dynamic Mathematics Software. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 600–608.

Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: A Logo Casebook*. New York: Harper & Row.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track: Formative assessment and the regulation of learning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning*, (pp. 1053–1098). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Willis, S. & Kissane, B. (1989). Computer technology and teacher education in mathematics. In Department of Employment, Education and Training (Ed.), *Discipline review of teacher education in mathematics and science* (Vol. 3, pp. 57 - 92). Canberra: Australian Government Publishing Service.

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Newbury Park, California: Sage.

Yin, R. (2006). Case study methods. In J. L. Green, G. Camilli e P. B. Elmore (Eds.), *Handbook of Complementary Methods in Education Research*, (pp. 111-122). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Yin, R. (2013). *Case Study Research: Design and Methods*. (5th Edition). Thousand Oaks, CA: Sage Publishers.

Yu, P., Barrett, J., & Presmeg, N. (2009). Prototypes and Categorical Reasoning: A Perspective to Explain How Children Learn about Interactive Geometry Objects. In T. Crane, T. & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World*. (NCTM, 2009 Yearbook), (pp. 109-125). Reston, VA: NCTM.

Zachariades, T., Pamfilos, P., Christou, C., Maleev, R., & Jones, K. (2007). Teaching introductory calculus: Approaching key ideas with dynamic software. Paper presented at *CETL-MSOR Conference on Excellence in the Teaching and Learning, Stats & OP*, University of Birmingham. Disponível em: https://eprints.soton.ac.uk/50741/1/Jones-etc_teach_calculus_software_2007.pdf

Zbiek, R. M. & Glass, B. (2001). Conjecturing and formal reasoning about functions in a dynamic environment. In G. Goodell (Ed.), *Proceedings of the Twelfth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, (pp. 424-428). Reading, MA: Addison-Wesley.

Zbiek, R. M. & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by inservice and prospective teachers. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematics* (pp. 287-344). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

ANEXOS

ANEXO 1

Guião de Elaboração de um Relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve e critica toda a atividade desenvolvida na exploração de uma tarefa.

Um relatório para quê?

Desenvolver a vossa capacidade de comunicar matematicamente, por escrito.
Desenvolver o vosso pensamento crítico sobre o trabalho feito.
Contribuir para aprofundar a vossa compreensão sobre os vários assuntos estudados.

Pistas para a elaboração de um relatório:

- Tirem apontamentos durante a realização da tarefa;
- Descrevam o que fizeram de uma forma limpa, clara e organizada;
- Não se esqueçam de apresentar os vossos raciocínios e descobertas e descrever todas as tentativas que realizaram até chegar às conclusões finais, não deves pensar "o professor já sabe isto, por isso não vale a pena eu escrever";
- Identifica devidamente o teu relatório;
- Estrutura o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

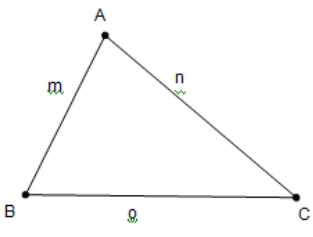
_ Introdução
Apresentem a tarefa proposta e indiquem qual o seu objetivo, usando as vossas próprias palavras. Indiquem os materiais utilizados.
_ Desenvolvimento
Relatem os passos do trabalho realizado, explicando como pensaram e as estratégias usadas.
Descrevam procedimentos e raciocínios as dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.
Apresentem as conclusões obtidas, devidamente fundamentadas.
Podem recorrer a tabelas, representações gráficas, esquemas ou *Print Screens*.
_ Conclusão
Façam um comentário global sobre o trabalho desenvolvido.
Autoavaliem o vosso trabalho.
Resumam o que aprenderam.
Comentem o interesse da tarefa.

Adaptado de Semana (2008)

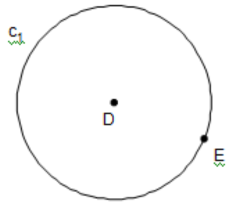
ANEXO 2

Tarefa A – Elementos base da geometria dinâmica e construção de figuras

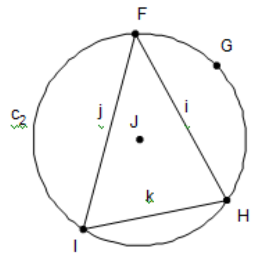
1. Constrói as seguintes figuras:



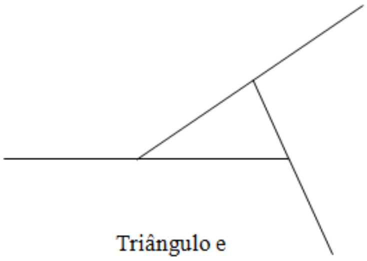
Triângulo



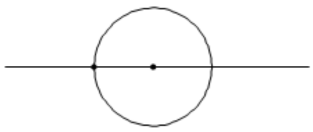
Circunferência



Triângulo sobre a circunferência



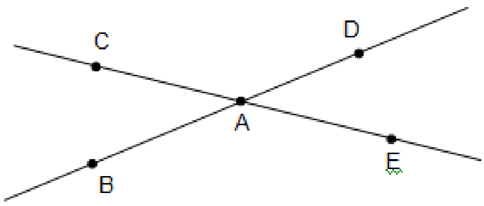
Triângulo e semi-rectas



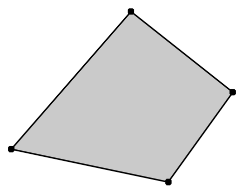
Circunferência e recta contendo o diâmetro

2. Constrói um segmento de recta e um ponto C exterior a esse segmento. Constrói uma recta paralela e uma recta perpendicular ao segmento inicial e que passem no ponto C.

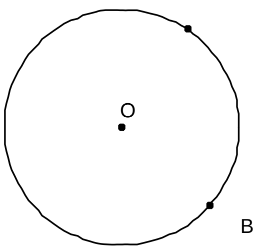
3. Constrói duas rectas que se intersectem num ponto A (ver figura). Mede as amplitudes dos ângulos BAC, CAD, DAE e BAE. Há alguma relação entre esses ângulos? Se sim, qual?



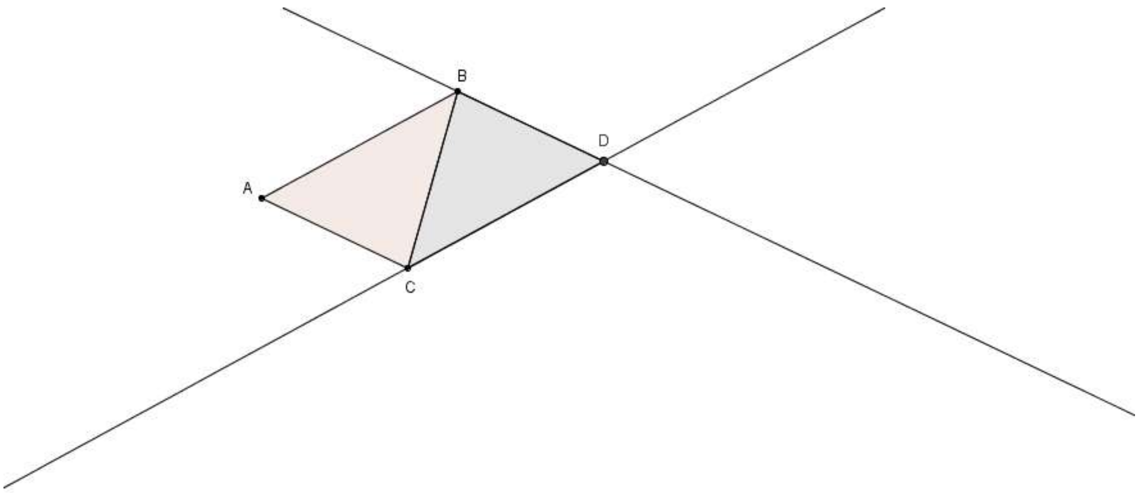
4. Constrói um quadrilátero como o da figura seguinte. Usando os menus, apresenta no ecrã as medidas das amplitudes dos seus ângulos internos, perímetro e área. Arrasta um dos vértices e verifica o que acontece a todas essas medidas.



5. Constrói uma circunferência e um ponto, B, sobre ela. Com centro em O, centro da circunferência, faz rotações sucessivas de 90º do ponto B. Une os pontos que obtiveste sobre a circunferência. Que figura se obtém? Mede os seus lados e ângulos para testar a tua conjectura.



6. Constrói um triângulo ABC e as rectas CD e BD paralelas a AB e AC respectivamen- te, como na figura. Mede os ângulos ABD, BDC, DCA, CAB. Que relações existem entre eles?

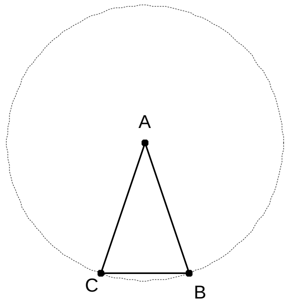


ANEXO 3

Tarefa B – Construção de triângulos e trapézios

O ambiente de geometria dinâmica permite fazer construções de figuras geométricas que, quando arrastadas, mantêm a sua forma. Assim, para uma dada questão, é possível analisar um grande número de casos e investigar relações e propriedades.

1. Constrói uma circunferência de centro A e um ponto B sobre ela. Depois, constrói os lados do triângulo ABC como mostra a figura. Mede os lados e os ângulos internos do triângulo.

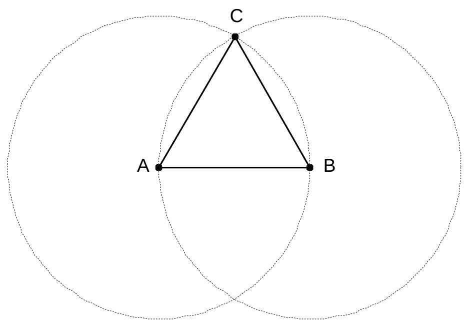


1.1. Como classificas este triângulo?

1.2. Sem medir os lados, conseguirias dizer alguma coisa sobre a relação entre eles? Justifica.

1.3. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

2. Constrói um segmento AB e duas circunferências como mostra a figura. C é um dos pontos onde as circunferências se intersectam. Mede os lados e os ângulos internos do triângulo.



2.1. Como classificas este triângulo?

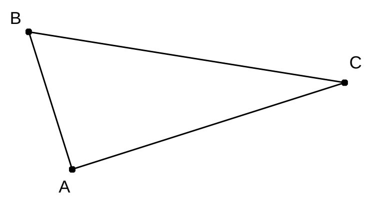
2.2.. Sem medir os lados, conseguirias dizer alguma coisa sobre a relação entre eles? Justifica.

2.3. Há alguma relação entre os ângulos? Se sim, qual?

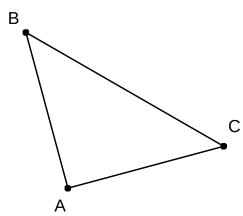
3. Também é possível classificar os triângulos tendo em conta os seus ângulos.

Triângulo **acutângulo**:	Um triângulo que tenha todos os ângulos agudos (**< 90º**)
Triângulo **rectângulo**:	Um triângulo que tenha um ângulo recto (**= 90º**)
Triângulo **obtusângulo**:	Um triângulo que tenha um ângulo obtuso (**> 90º e < 180º**)

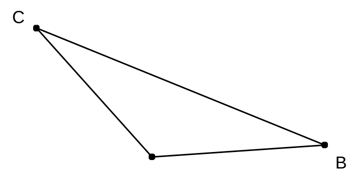
3.1. Constrói um triângulo rectângulo que se mantenha como triângulo rectângulo quando os seus vértices são arrastados. Descreve como procedeste.



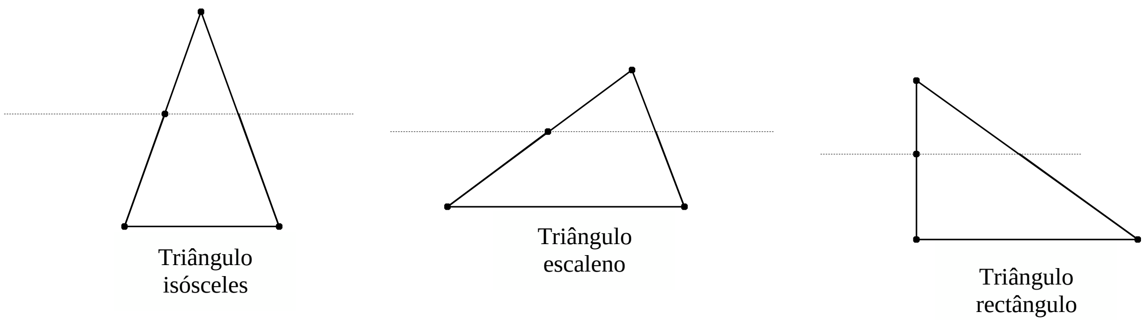
3.2. Constrói um triângulo rectângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



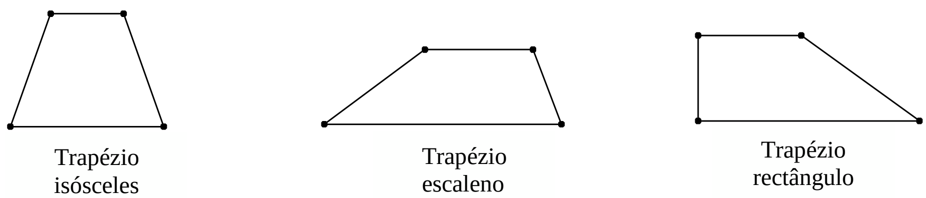
3.3. Constrói um triângulo obtusângulo que também seja isósceles. Descreve como procedeste.



4. Existem três tipos de trapézios, que podem ser obtidos facilmente a partir de triângulos. Constrói um triângulo isósceles, um escaleno e um rectângulo, e, para cada um deles, traça uma recta paralela a um lado, como mostra a figura seguinte.



A partir das figuras, constrói um trapézio de cada tipo.



Mede os lados e os ângulos internos dos trapézios.

4.1. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio isósceles? Se sim, qual?

4.2. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio escaleno? Se sim, qual?

4.3. Há alguma relação entre os lados e entre os ângulos do trapézio rectângulo? Se sim, qual?

ANEXO 4

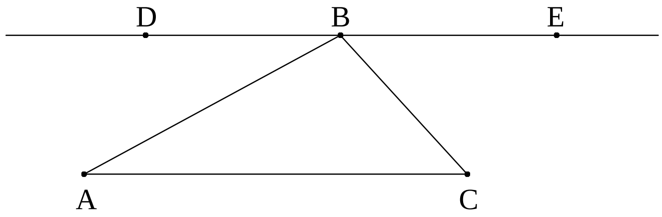
Tarefa 1 – Ângulos internos de um triângulo

1. Constrói um triângulo ABC.

1.1. Mede as amplitudes dos ângulos internos do triângulo ABC e adiciona as medidas obtidas.

1.2. Arrasta um vértice qualquer de modo a obteres um novo triângulo. Verifica o que se passa com as amplitudes dos ângulos e com a respectiva soma. Formula uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos internos num triângulo qualquer.

2. Considera o triângulo ABC da figura e a recta DE, paralela ao lado AC do triângulo, que passa pelo vértice B.



2.1. Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC? Porquê?

2.2. Qual é a relação entre os ângulos CBE e ACB? Porquê?

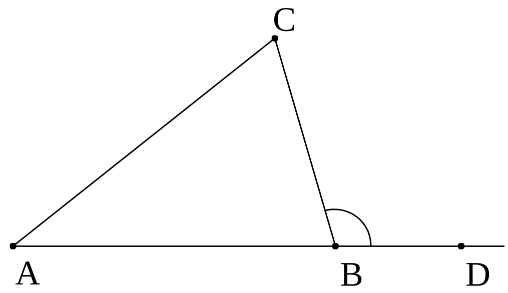
2.3. Qual é o valor da soma dos ângulos ABD, CBE e ABC? Porquê?

2.4. Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Porquê?

2.5. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. O João construiu vários triângulos sem utilizar o computador. Ao adicionar as amplitudes dos ângulos internos formulou a seguinte conjectura: "A soma dos ângulos internos num triângulo é sempre igual a 179º". Mas, depois de ter resolvido a questão 2., afirmou: "Medir as amplitudes dos ângulos pode conduzir a erros, mas isso não acontece com o processo usado nesta questão". Concordas com esta afirmação? Porquê?

4. Constrói uma semi-recta AB e um ponto C não pertencente à semi-recta.
Depois constrói o triângulo ABC e um ponto D como mostra a figura. Dizemos que o ângulo
CBD é um ângulo externo do triângulo ABC.



4.1. Mede as amplitudes dos ângulos BAC e ACB e adiciona-as. Mede a amplitude do ângulo CBD. O que concluis?

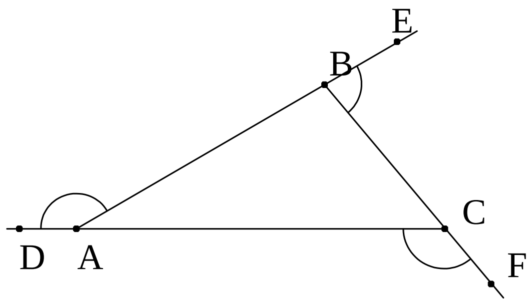
4.2. A conclusão que tiraste em 4.1. mantém-se se o ponto C estiver noutra posição? Porquê?

4.3. Após resolver as questões 4.1 e 4.2, o Francisco fez a seguinte afirmação: "Num triângulo qualquer, a amplitude do ângulo externo de um dos vértices é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos dos outros dois vértices". Esta afirmação é verdadeira ou falsa? Porquê?

ANEXO 5

Tarefa 2 – Ângulos externos de um triângulo (Geogebra)

1. Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, como mostra a figura, e acres- centa os pontos D, E e F.



1.1. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF e adiciona as medidas obtidas. O que concluis?

1.2. Arrasta um dos vértices do triângulo e escreve uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo. Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num triângulo qualquer.

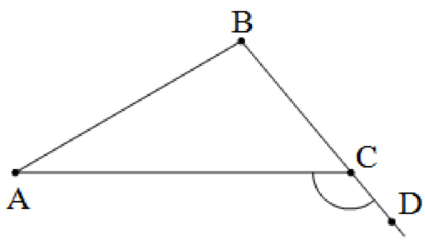
2. Considera novamente o triângulo ABC da figura anterior.

2.1. Qual é o valor da soma $\angle DAB + \angle BAC + \angle EBC + \angle ABC + \angle ACF + \angle BCA$?

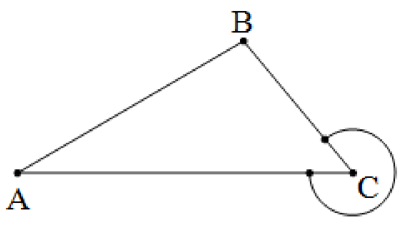
2.2. Tendo em atenção que o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, qual é o valor da soma dos ângulos externos no triângulo ABC?

2.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

3. As figuras seguintes sugerem duas definições possíveis para ângulo externo.

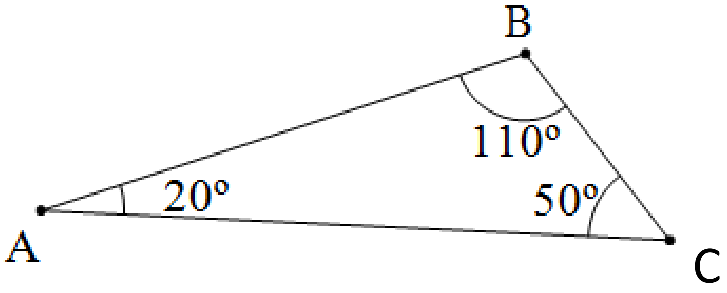


Definição 1



Definição 2

3.1. Observa o triângulo ABC da figura. Calcula a soma dos ângulos externos deste triângulo de acordo com a definição 1 e com a definição 2 de ângulo externo.



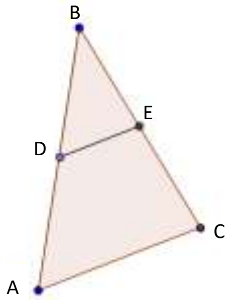
3.2. Qual é a possível vantagem de se usar a definição 1?

Anexo 6

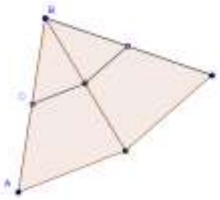
Tarefa 3 – Resolução de problemas em triângulos

Parte 1 – Desenho do peixe

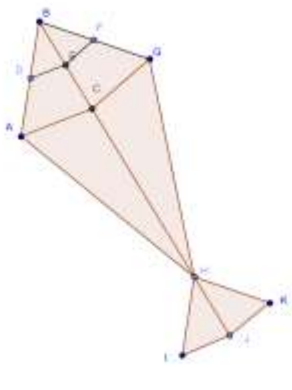
1. Para desenhar um peixe começa por desenhar o segmento de recta AC, seguidamente roda-o 60º, depois roda o segmento de recta resultante AB 40º. Desenha o triângulo resultante escondendo o resto. Marca o ponto D e faz passar por ele uma paralela a AC.



2. Faz agora uma reflexão do triângulo com BC como eixo de simetria



3. Completa agora o peixe



Parte 2 – Resolução de problemas

Justifica todas as respostas

1. Recorrendo ao desenho do peixe.

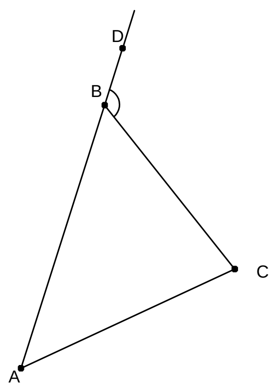
1.1. Qual é a amplitude do ângulo DEB?

1.2. Qual é a amplitude do ângulo DBC e do ângulo BCG?

1.3. Qual é a amplitude do ângulo GCH e do ângulo CHG?

1.4. Qual é a amplitude da soma dos ângulos HIJ, JHK com metade da amplitude do ângulo IHK?`

2. Para um triângulo ABC qualquer, **e**ntre que valores pode variar a amplitude do ângulo DBC?



ANEXO 7

Tarefa 4 – Investigando congruências de triângulos (Geogebra)

Dois triângulos são congruentes se têm, de um para o outro, os três lados e os três ângulos congruentes.

Ao longo desta tarefa, utilizando o software de geometria dinâmica, vais construir triângulos de várias maneiras e compará-los dois a dois. Pretende-se que descubras o número mínimo de lados congruentes e ângulos congruentes que dois triângulos têm que ter para podermos garantir que são congruentes.

1. Constrói um triângulo usando três segmentos de recta à tua escolha e mede o comprimento dos seus lados e a amplitude dos ângulos internos.

1.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando segmentos de recta com os mesmos comprimentos dos anteriores e mede a amplitude dos ângulos internos deste novo triângulo. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

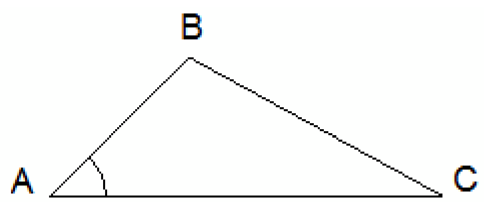
1.2. Será que dois triângulos com os três lados congruentes são sempre congruentes?

2. Constrói um triângulo usando três ângulos à tua escolha e mede o comprimento dos seus lados e a amplitude dos seus ângulos internos.

2.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando ângulos com as mesmas amplitudes dos anteriores. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

2.2. Será que dois triângulos com os três ângulos congruentes são sempre congruentes?

3. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta e de um ângulo que eles formam, por exemplo AB e AC.



O ângulo BAC é formado pelos lados AB e AC do triângulo ABC.

3.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando as mesmas medidas do triângulo anterior, para os comprimentos de dois dos seus lados e para a amplitude do ângulo que eles formam. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

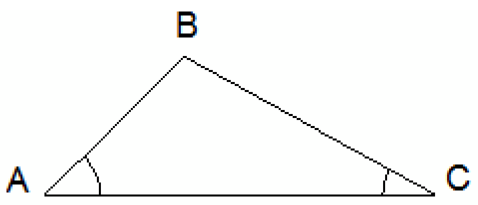
3.2. Dois lados de um triângulo e um ângulo formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

4. Constrói um triângulo a partir de dois segmentos de recta e de um ângulo de modo a que o ângulo não seja formado pelos dois segmentos de recta.

4.1. Constrói outro triângulo nestas condições, numa posição diferente do primeiro, mas usando as medidas anteriores. Compara este triângulo com o primeiro. O que verificas?

4.2. Dois lados de um triângulo e um ângulo não formado por eles são congruentes aos elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

5. Constrói um triângulo a partir de um segmento de recta AC e de dois ângulos que têm esse segmento como lado comum.

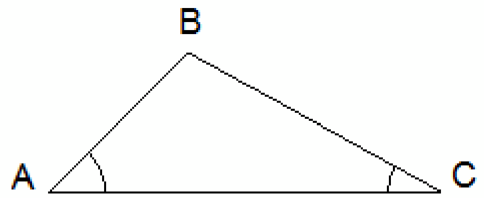


O lado AC do triângulo ABC é comum aos ângulos BAC e BCA.

5.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando um lado com o mesmo comprimento do anterior e dois ângulos com a mesma amplitude, que também tenham esse segmento como lado comum. Compara esse triângulo com o anterior. O que verificas?

5.2. Dois ângulos de um triângulo que têm um lado comum são congruentes com os elementos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

6. Constrói um triângulo a partir de dois ângulos à tua escolha e de um segmento de recta não comum a esses ângulos (por exemplo AB).



O lado AB do triângulo ABC não é comum aos ângulos BAC e BCA.

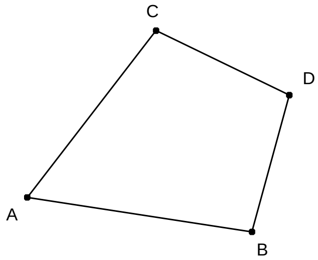
6.1. Constrói outro triângulo numa posição diferente do primeiro, mas usando um lado com o mesmo comprimento do anterior e dois ângulos com as mesmas amplitudes dos anteriores, que também não tenham esse segmento como lado comum. Compara esse triângulo com o anterior. O que verificas?

6.2. Dois ângulos de um triângulo que não têm um lado em comum são iguais aos ele- mentos correspondentes de outro triângulo. Nestas condições os triângulos são sempre congruentes?

ANEXO 8

Tarefa 5 – Quadriláteros: construções, diagonais e ângulos

1. Constrói um quadrilátero. Mede as amplitudes dos seus ângulos internos e adiciona as medidas obtidas.



1.1. Arrasta um vértice qualquer de modo a obter um novo quadrilátero. Verifica o que passa com as amplitudes dos ângulos e com a respectiva soma. Escreve uma conjectura sobre o que observas.

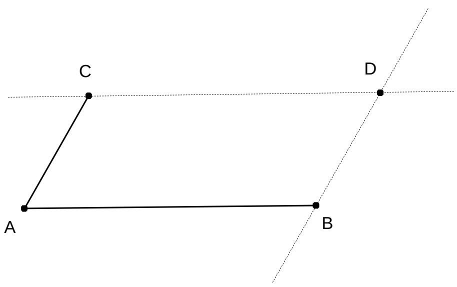
1.2. Procura demonstrar a tua conjectura. Para isso desenha uma das diagonais do quadrilátero.

2. Constrói um paralelogramo e um rectângulo de tal forma que quando se arrastar qualquer um dos seus vértices estes quadriláteros mantenham a sua forma. Para isso segue as instruções seguintes.

Segue as seguintes instruções para construir um paralelogramo. Constrói:

- os segmentos AB e AC;
- a recta paralela a AB e que passa pelo ponto C;
- a recta paralela a AC e que passa pelo ponto B;
- o segmento AC.

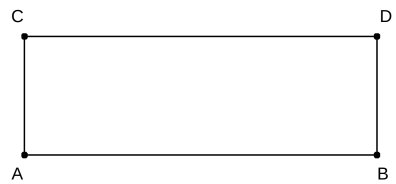
Esconde as rectas e constrói os segmentos BD e CD.



Segue as seguintes instruções para construir um rectângulo. Constrói:

- o segmento AB;
- a recta perpendicular a AB no ponto A;
- na recta anterior marca o ponto C;
- o segmento AC.

Acaba de construir o rectângulo ABCD.



Mede as amplitudes dos ângulos internos do paralelogramo e do rectângulo.

2.1. Arrasta o vértice A de modo a obter um novo paralelogramo. Compara as amplitudes dos ângulos e escreve uma conjectura sobre o que observas.

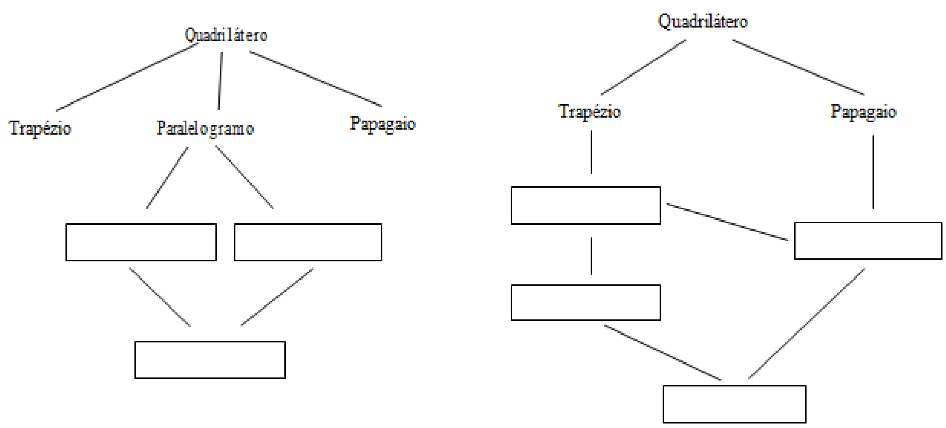
2.2. O rectângulo também verifica a conjectura que formulaste em 2.1. Procurara encontrar uma justificação para esse facto.

3. Para responder às seguintes perguntas considera, para além do paralelogramo e do rectângulo, o quadrado, o trapézio, o losango e o papagaio.

3.1. Quais são as características que cada um destes quadriláteros tem que o torna único? (Começa por medir os lados e os ângulos de cada um e compará-los...)

3.2. Constrói as diagonais dos quadriláteros anteriores e descreve as suas propriedades. (Começa por desenhar um esquema de cada um dos quadriláteros e das suas diagonais, para encontrar relações entre elas).

3.3. Tendo em atenção as características dos quadriláteros, é possível estabelecer hierarquias entre eles. Considera os esquemas seguintes e completa-os, justificando as ligações entre os quadriláteros.

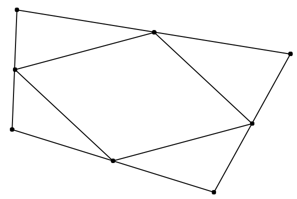


ANEXO 9

Tarefa 6 – Investigando quadriláteros e pontos médios

1. Constrói um quadrilátero à tua escolha e marca os pontos médios dos seus lados. Une os pontos médios de lados consecutivos. Que quadrilátero obtiveste?

2. Investiga o que se passa se o quadrilátero inicial for um quadrado, um losango, um paralelogramo …



3. Escreve as tuas conjecturas e tenta justificá-las elaborando para tal um relatório de acordo com o guião seguinte.

Guião para a elaboração de um relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve uma situação, analisando-a e criticando-a. Pretende-se que no relatório refiram não apenas as conclusões a que chegaram mas todos os procedimentos utilizados para chegar a essas conclusões.

Na elaboração do relatório deves ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

- Identificação do aluno ou grupo de alunos
- Título do trabalho e data da entrega
- Objectivo do trabalho incluindo as questões levantadas
- Descrição do processo de investigação, incluindo esboços de figuras ou esquemas das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas
- Conclusões e respectiva justificação sintética
- Apreciação da tua intervenção no trabalho
- Bibliografia consultada, caso exista

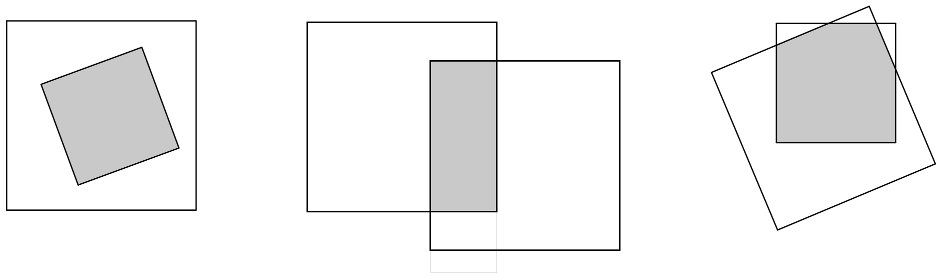
Sugestões para a elaboração do relatório:

- Tirar apontamentos detalhados durante a realização das tarefas
- Mais importante do que as conclusões a que chegaram é o processo que utilizaram para lá chegar, incluindo os erros que cometeram em termos de conjecturas e o modo como os ultrapassaram
- No final deve ser incluído um pequeno resumo das conclusões

ANEXO 10

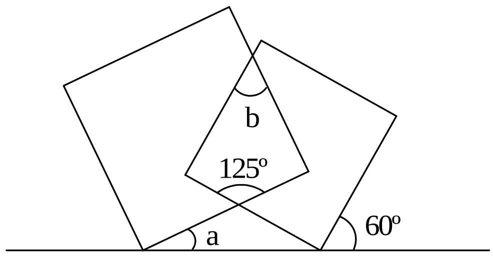
Tarefa 7 – Problemas com triângulos e quadriláteros

1. A sobreposição parcial de dois quadrados, não necessariamente com o mesmo lado, gera um polígono, exemplificado na figura pelas zonas sombreadas.



Utilizando o Geogebra dá exemplos de polígonos que se podem obter por sobreposição e de polígonos que não se podem obter. Mostra como podem ser obtidos.

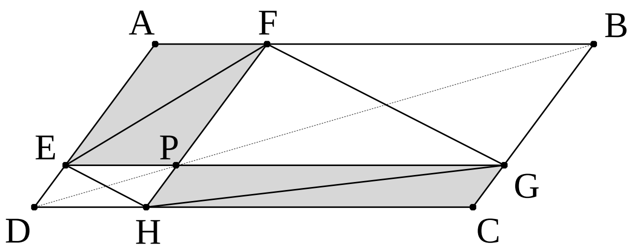
2. Na figura estão representados uma recta e dois quadrados parcialmente sobrepostos. Determina as medidas dos ângulos ‘a’ e ‘b’. Apresenta os teus cálculos e as respectivas justificações.



3. Constroi as seis figuras no Geogebra e completa a tabela com ‘sim’ (que significa *sempre*) ou ‘não’ (que significa *nem sem- pre*).

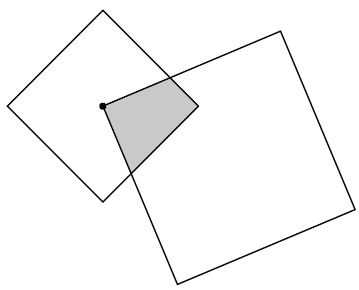
	Papagaio	**Trapézio isósceles**	**Paralelogramo**	**Losango**	**Retângulo**	**Quadrado**
Lados opostos paralelos						
Lados opostos congruentes						
Ângulos opos- tos congruentes						
Diagonais bis- sectam-se mutuamente						
Diagonais per- pendiculares						
Diagonais con- gruentes						
Um eixo de simetria						
Dois eixos de simetria						

4. Constrói um paralelogramo ABCD e uma das suas diagonais, por exemplo BD. Escolhe um ponto P nessa diagonal. Por esse ponto traça uma paralela a cada um dos lados do paralelogramo (ver figura). O que conjecturas quanto à área dos quadriláteros sombreados? Demonstra a tua conjectura.



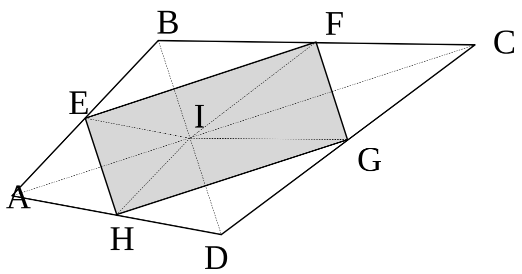
5. Dois pontos A e B estão situados no mesmo lado de uma recta r. Descobre um ponto X na recta r, de tal modo que a soma AX+XB seja mínima. Leva em conta que, na Geometria Euclidiana, a distância mínima entre dois pontos é dada pelo comprimento do segmento de recta que os une.

6. Dois quadrados sobrepõem-se como mostra a figura.



Um dos vértices do quadrado maior coincide com o centro do quadrado menor. Qual é a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor? Demonstra-a.

7. Vamos investigar a relação entre a área de um quadrilátero e a área do quadrilátero que se obtém a partir deste unindo os pontos médios dos seus lados. Um aluno começou por desenhar um papagaio (quadrilátero ABCD da figura) e conjecturou que a área do quadrilátero EFGH é igual a metade da área do papagaio ABCD. Ao analisar a figura, afirmou: “Mas é evidente! É fácil ver que as áreas são iguais. Basta dobrar os cantos!”



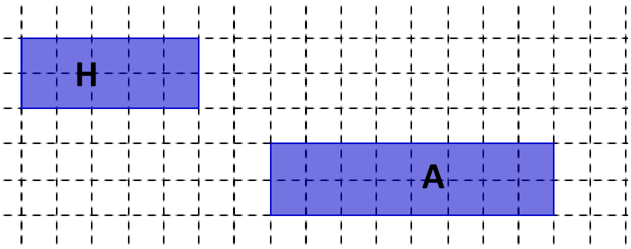
ANEXO 11

Tarefa S1 - Noção de semelhança

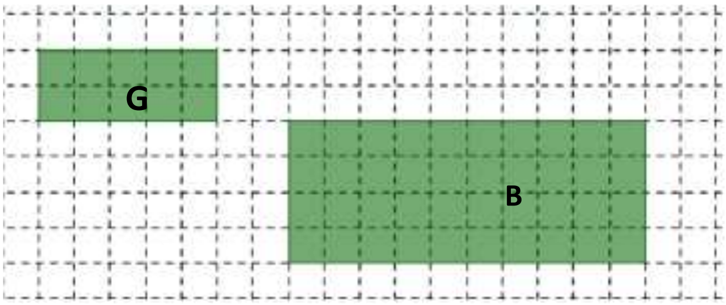
Em Matemática, dizemos que duas figuras são semelhantes quando uma é uma redução ou ampliação da outra. Por exemplo estas duas figuras são semelhantes:

Mas as figuras seguintes são parecidas e não são semelhantes.

Estes dois polígonos também são parecidos e não são semelhantes,



mas os rectângulos da figura seguinte são semelhantes.

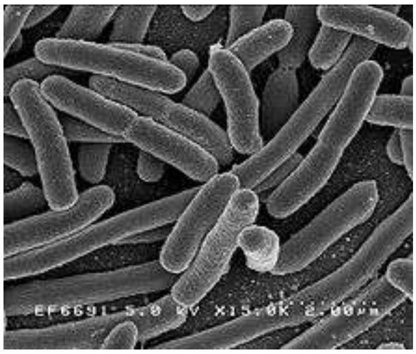


G é uma **redução** do rectângulo **B** e
B é uma **ampliação** do rectângulo **G**.

Porque não são semelhantes os rectângulos H e A?

Em várias situações do dia a dia recorremos a **ampliações** e a **reduções**:

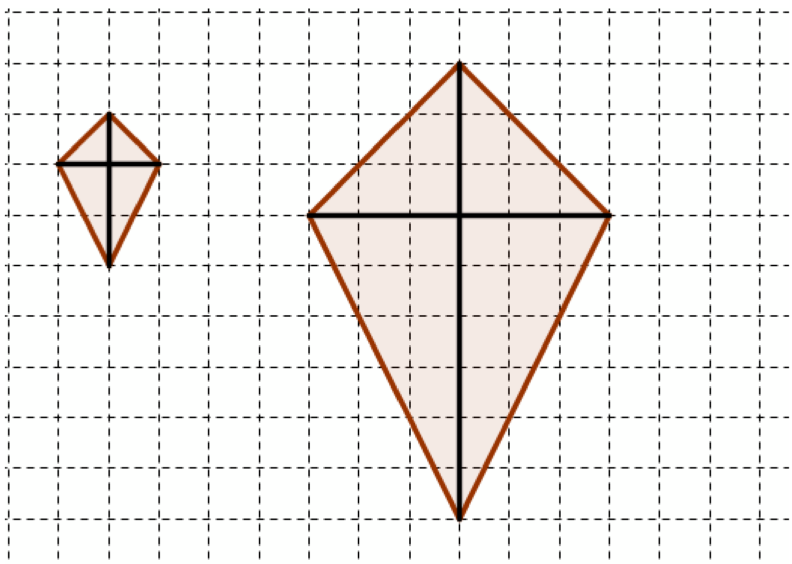
- utilizamos o microscópio para **ampliar**;



- apresentamos uma maqueta de um edifício como uma **redução**.

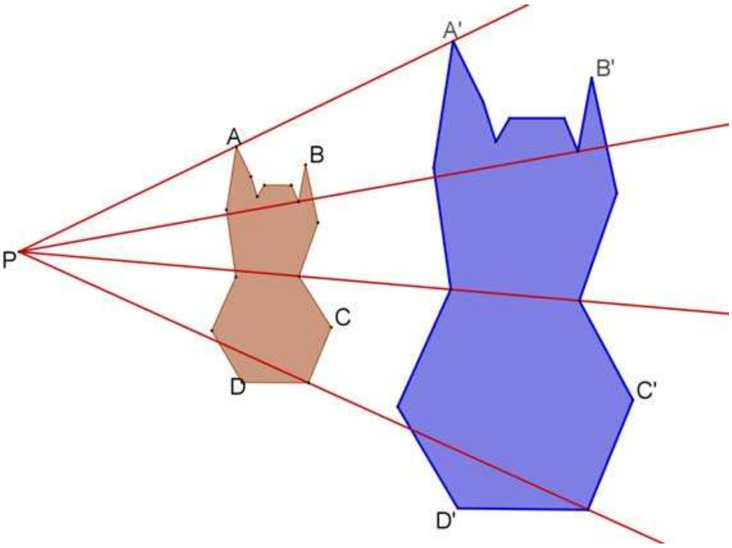
<u>**Construção de figuras semelhantes**</u>: **ampliação** de uma figura por **dois processos**:

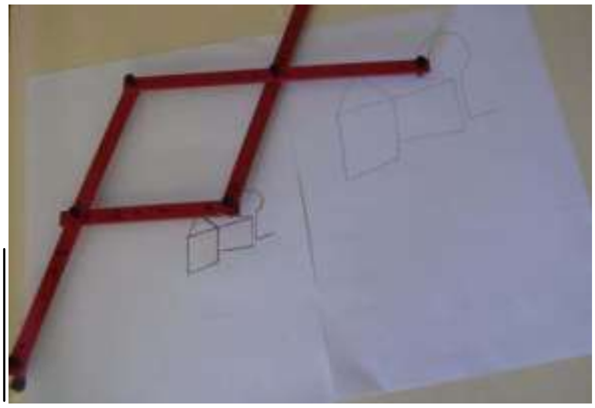
- utilizando o quadriculado.



- utilizando um ponto auxiliar.

Este processo corresponde a uma transformação geométrica chamada **homotetia**.





O pantógrafo é um instrumento que permite obter figuras semelhantes utilizando uma homotetia.

Informação:

- Duas **figuras** são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida do comprimento dos segmentos que unem quaisquer dois pontos de uma é proporcional à medida do comprimento dos segmentos correspondentes na outra. Assim, duas **figuras** são **semelhantes** se uma é ampliação ou redução da outra ou se são congruentes.
- Numa **ampliação** todos os comprimentos são multiplicados por um número maior do que 1 e numa **redução** todos os comprimentos são multiplicados por um número positivo menor do que 1.
- Para relacionar as dimensões de figuras semelhantes define-se a **razão de semelhança, r,** que é o quociente entre as medidas dos comprimentos de qualquer segmento da figura transformada e as medidas dos comprimentos do segmento correspondente da figura inicial.

  Se **r >1** a figura semelhante é uma **ampliação**.

  Se **r <1** a figura semelhante é uma **redução.**

  Se **r = 1** as figuras são **congruentes** ou geometricamente iguais.
- O factor de escala entre duas figuras semelhantes é igual ao valor da razão de semelhança.

1. Medir as alturas

Material: fita métrica, régua graduada e calculadora

Sabendo que a altura da torre do computador mede 50 cm, a altura da árvore mais pequena é 3m e com os conhecimentos que tens sobre proporcionalidade directa determina a partir de cada uma das fotografias:

- a altura do armário da sala;

-a altura das restantes árvores e do bloco

ANEXO 12

TarefaS2 – Construção de um Pantógrafo

1. Começa por construir dois selectores com um intervalo de 0 a 10.

2. Constrói dois pontos A e B.

3. Com a ferramenta “circunferência centro raio” selecciona um dos pontos e atribui o valor de “a” ao raio.

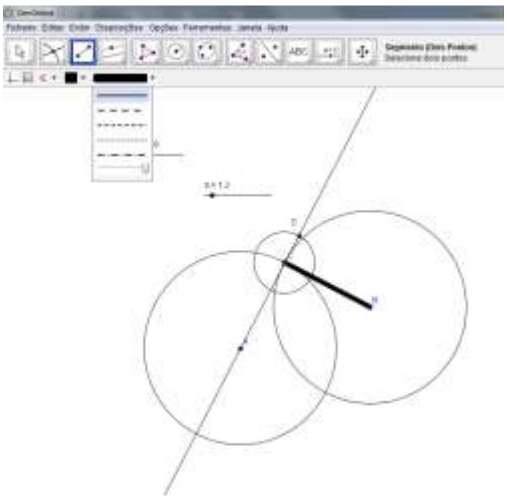
4. Faz o mesmo procedimento para o outro ponto.

5. Constrói um ponto C numa das intersecções.

6. Com a ferramenta “circunferência centro raio” selecciona o ponto C como centro e atribui o valor de “b” ao raio.

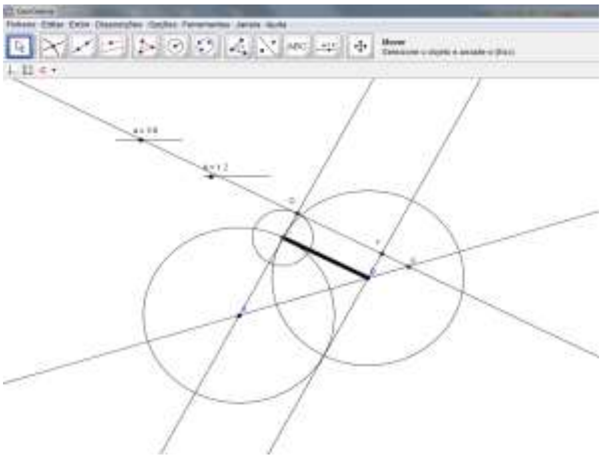
7. Constrói o recta AC e marca o ponto D na intersecção dessa recta com a circunferência cujo centro é C.

8. Traça o segmento de reta CB engrossando-o

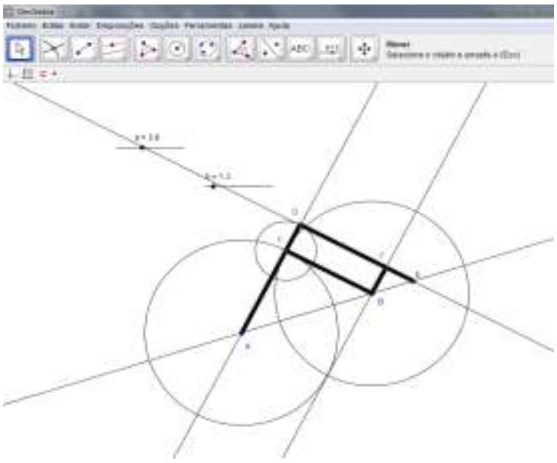


9. Traça uma reta paralela a esse segmento a passar por D, e outra a passar pelos pontos A e B. Designando por E a sua interseção.

10. Intersecta essa reta com uma paralela à reta AD passando por B, designando o ponto por F.



11. Engrossa os segmentos de recta AD, DE e FB, como mostra a figura



12. Esconde tudo o resto ficando apenas o Pantógrafo e os seletores:

13. Grava a tua construção.

14. Para fazeres os desenhos basta selecionar o ponto B e E com o botão do lado direito do rato e activar o traço.

15. Experimenta as várias posições dos seletores. Grava e envia alguns exemplos de figuras semelhantes que tenhas desenhado.

ANEXO 13

Tarefa S3 – Ampliações e reduções

Vamos utilizar dois métodos diferentes para obter ampliações e reduções:o **método da quadrícula** e o **método da homotetia**.

1. Construção de ampliações e reduções a partir de redes (grelhas quadriculadas) – Método da quadrícula

Considera a figura 1.

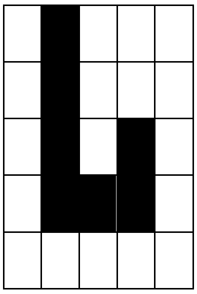


Figura 1

1.1. Utilizando o quadriculado do Geogebra, constrói uma ampliação da Figura 1 de razão 2.

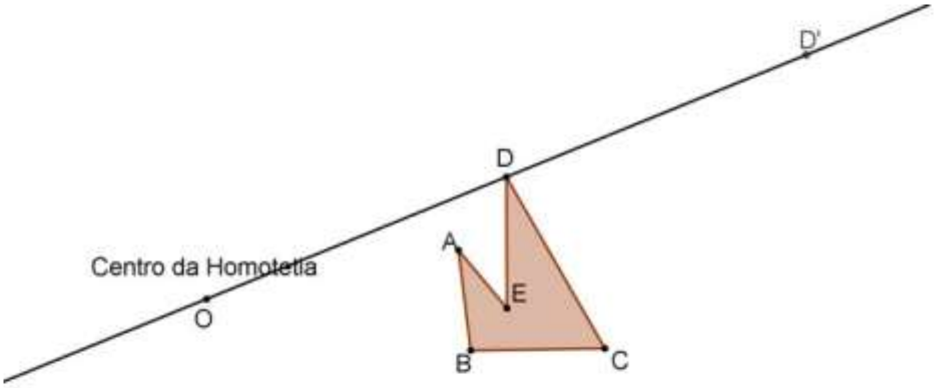
1.2. Sendo a unidade de comprimento e a unidade de área, respectivamente, o lado e a quadrícula, qual o perímetro e a área da Figura 1? E da Figura 2 (figura ampliada)?

1.3. Desenha, no Geogebra, um quadrilátero à tua escolha.
Constrói uma ampliação, do quadrilátero, de razão 0,5.

2. **Construção de ampliações e reduções por homotetia**

2.1. Constrói a figura seguinte no Geogebra.

Pretende-se construir uma ampliação do pentágono ABCDE de razão 2, em que o ponto O é o centro da homotetia e, por exemplo, D é transformado em D' sendo OD'=2xOD.



Repete o mesmo processo de construção para os outros vértices. Une os pontos encontrados de modo a obteres o pentágono ampliado.

2.2. Calcula o perímetro das duas figuras e relaciona-os.

2.3. Identifica pares de segmentos paralelos.

3. Constrói a redução de um triângulo de razão 1/2 , usando uma homotetia de centro O.

4. Desenha no Geogebra um quadrilátero qualquer. Escolhe um ponto para centro da homotetia e obtém:

4.1. Uma redução do quadrilátero de razão 0,7.

4.2. Uma ampliação do quadrilátero de razão 2,3.

ANEXO 14

Tarefa S4 – Triângulos e quadriláteros semelhantes

1.

1.1. Constrói um triângulo ABC.

1.2. Constrói outro triângulo DEF, com os lados paralelos aos do triângulo ABC.

1.3. Mede as amplitudes dos ângulos internos desses triângulos e os comprimentos dos seus lados.

Que relações podes estabelecer entre os elementos destes triângulos que te permitam afirmar que são semelhantes?

1.4. Qual a razão de semelhança?

1.5. Arrasta um dos vértices do triângulo ABC e verifica se as relações que estabeleceste na alínea 1.3. se mantêm.

1.6. Constrói dois quadriláteros de lados paralelos.

1.7. Esses quadriláteros serão semelhantes?

Explica as medições que efectuaste e as relações que encontraste que justificam que esses quadriláteros são ou não semelhantes.

2. Considera as seguintes fracções:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=1,5$$

2.1. Constrói um triângulo em que as suas dimensões sejam 3 numeradores destas fracções.

2.2. Constrói outro triângulo em que as suas dimensões sejam os 3 denominadores correspondentes aos numeradores que escolheste na alínea anterior.

2.3. Estes dois triângulos são semelhantes? Justifica a tua resposta.

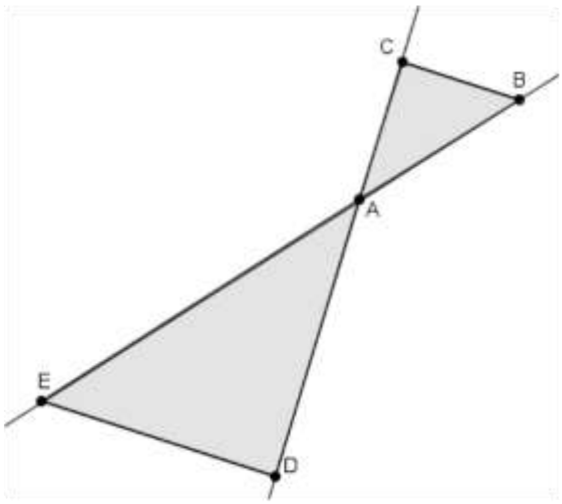
2.4. Constrói agora dois paralelogramos: um em que as suas dimensões são 2 numeradores destas fracções e outro em que as suas dimensões são os 2 denominadores correspondentes.

2.5. Estes dois quadriláteros são semelhantes? Justifica a tua resposta.

3.

3.1. Constrói uma figura como a que está ao lado, sabendo que AE tem o dobro do comprimento de AB e AD tem o dobro do comprimento de AC.

3.2. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes? Justifica a tua resposta.



4. Imagina que tens dois amigos e queres que cada um construa um triângulo, mas com uma condição: que esses dois triângulos sejam semelhantes.

4.1. Quais as indicações mínimas que tens que dar a cada um para teres a certeza que os triângulos que vão construir são semelhantes?

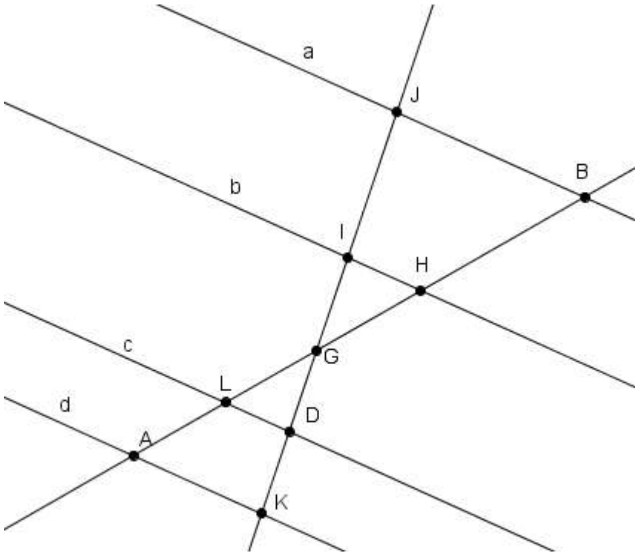
4.2. Será que tens mais do que uma possibilidade para essas indicações?

5. Thales de Mileto, que viveu entre 630 e 546 a.C., foi um matemático muito importante na Grécia clássica. Sabia coisas fantásticas tanto de Astronomia, como de Geometria, tendo contribuído para a compreensão de relações de proporcionalidade em Geometria.

Há muitas propriedades que ainda hoje são usadas no estudo da Geometria e que estão intimamente ligadas às suas descobertas, nomeadamente a seguinte:

> **Se duas paralelas intersectam duas secantes, os triângulos obtidos têm lados correspondentes proporcionais**

5.1. Constrói uma figura como a seguinte, sabendo que as rectas a, b, c e d são paralelas.



5.2. Identifica 3 pares de triângulos semelhantes e indica as suas razões de semelhança.

5.3. Completa as seguintes igualdades, tendo em conta a semelhança de triângulos e justificando a tua resposta:

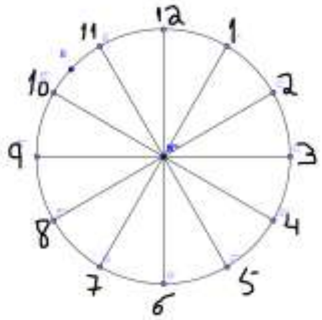
$\frac{\overline{GL}}{\overline{GD}} = \ldots\frac{\square}{\ldots}$ $\frac{\ldots}{\overline{LD}} = \frac{\overline{AG}}{\ldots}$ $\frac{\overline{BJ}}{\overline{BG}} = \frac{\ldots}{\ldots}$

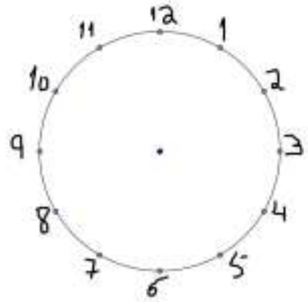
ANEXO 15

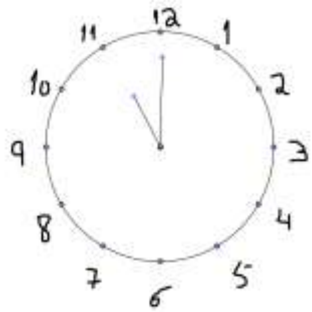
Tarefa I1 – O Relógio

Rotações

No *Geogebra* construam a sequência seguinte.







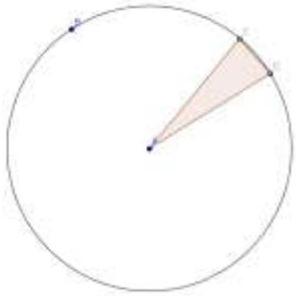
1. Rodem o ponteiro das horas 60º e o dos minutos -30º que horas obtêm?
2. Para obterem 3 horas e 45 minutos qual a amplitude de rotação de cada um dos ponteiros? Há mais possibilidades de resposta? Se sim quantas são?
3. Conseguem pôr os ponteiros a rodar? Como?
4. Elaborem o relatório da tarefa, tendo por base o guião disponibilizado.

ANEXO 16

Tarefa I2 – Os Moinhos

Rotações e reflexões

1. Construam a figura seguinte

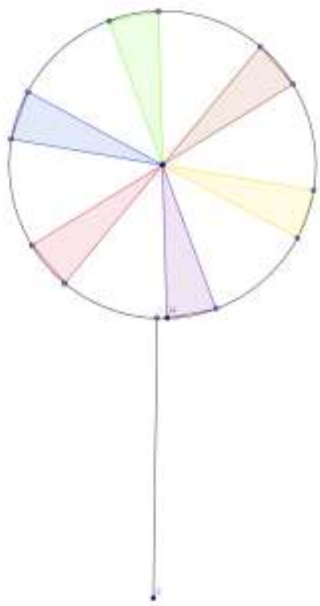


2. Construam a imagem do triângulo numa rotação de centro no centro da circunferência e amplitude 60º.
Repete o passo anterior até perfazer a volta inteira.

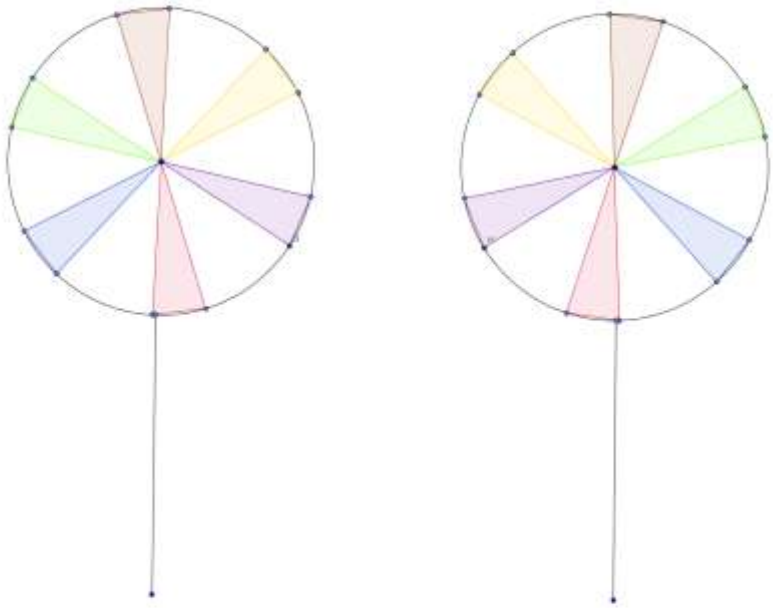
3. Pintem cada triângulo da sua cor.

4. Construam um segmento conforme indica a figura:

5.



6. Determinem a imagem do teu moinho de vento por meio de uma simetria axial. Para isso, construam uma reta vertical ao lado da vossa figura, que depois da simetria podem esconder.



7. Selecionem os dois vértices do triângulo original que pertencem à circunferência, animem-nos e tens dois moinhos de vento a girar.

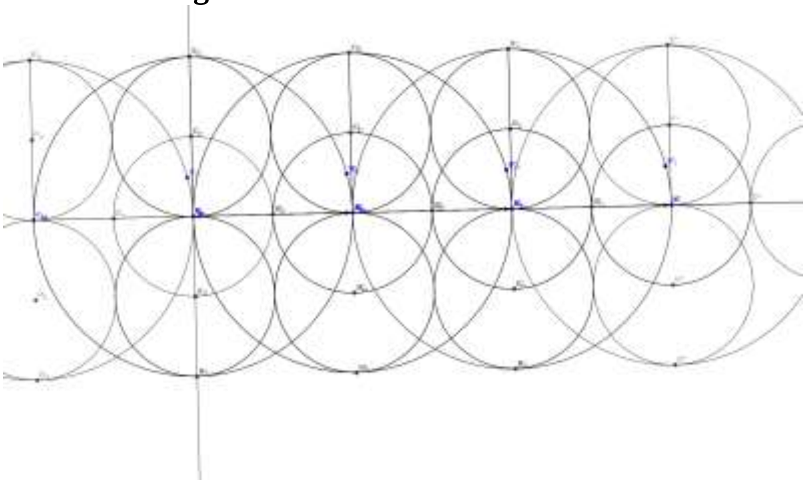
8. Elaborem o relatório da tarefa, tendo por base o guião disponibilizado.

ANEXO 17

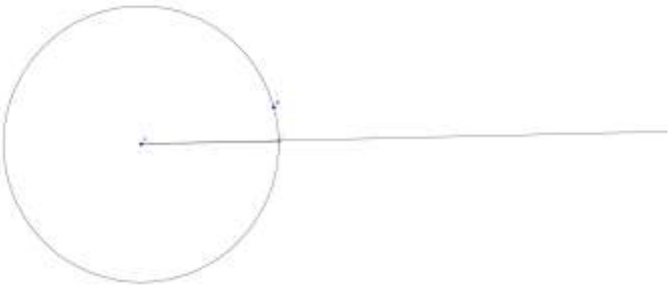
Tarefa I3 – A Corrente

Translações

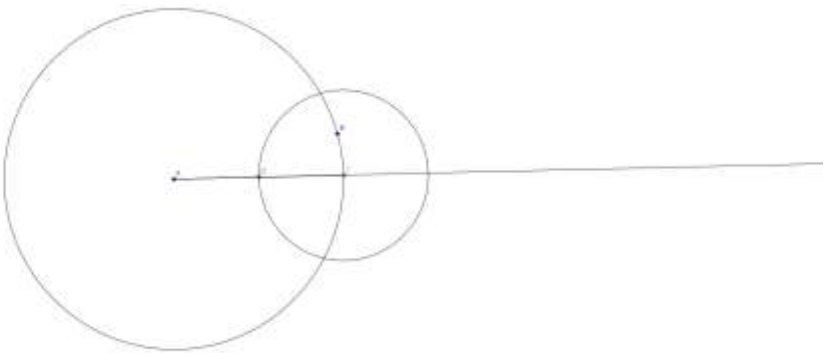
Vamos construir o friso seguinte:



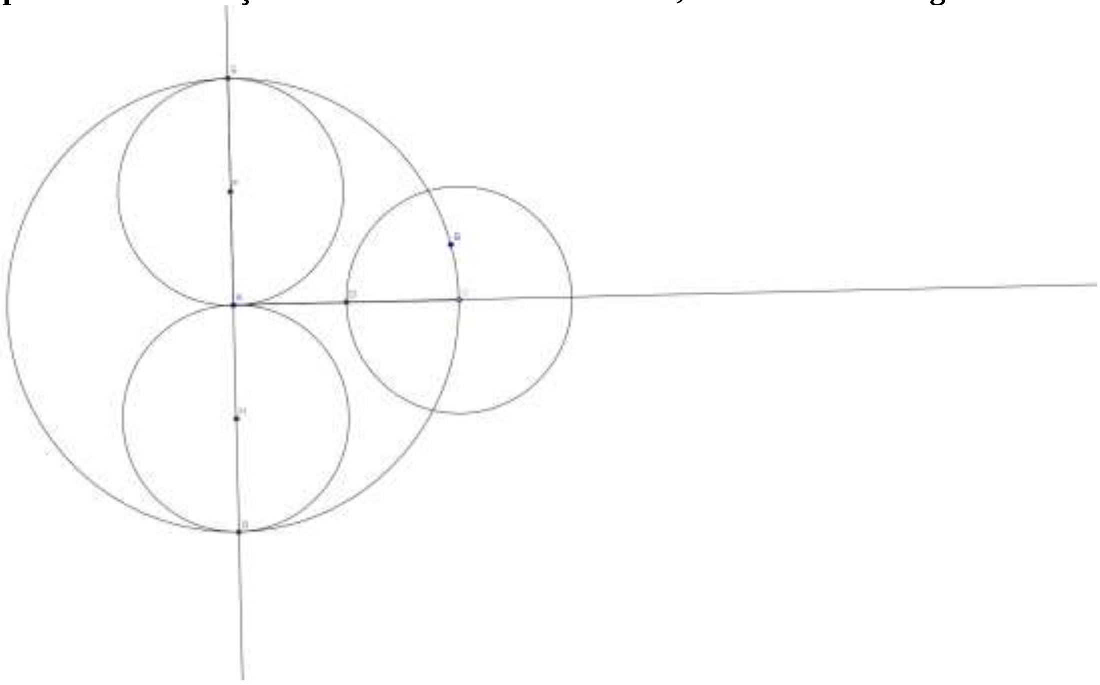
1. **Comecem por construir aquela que vai ser uma das circunferências maiores.**
2. **Utilizando uma semirreta a passar pelo centro da circunferência desenhem a figura**



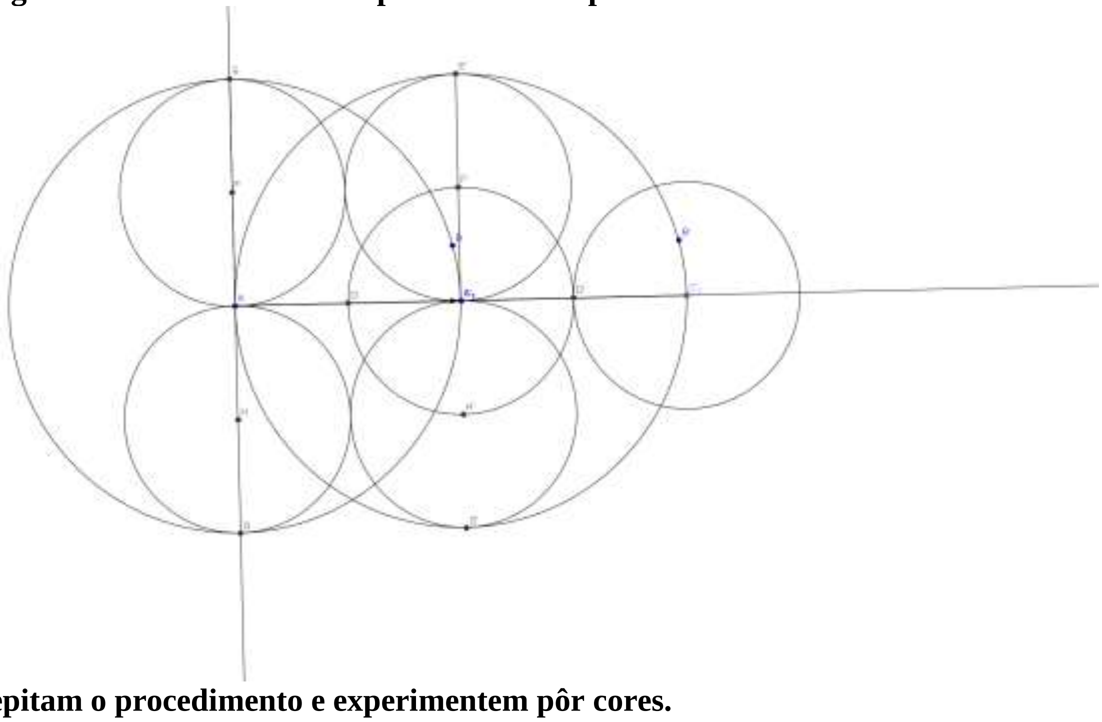
3. **Marquem o ponto médio do raio da circunferência.**
4. **Desenhem uma das circunferências pequenas, com o centro no ponto situado na interseção com a circunferência e a passar pelo seu centro, como mostra a figura.**



5. **Para determinarem o centro das circunferências que faltam (em cima e em baixo) tracem uma perpendicular ao raio que passe pelo centro da circunferência grande. Os centros serão os pontos médios entre o centro e os pontos de interseção colocados na circunferência, como mostra a figura.**



6. **Para repetir o padrão seleciona a ferramenta translação selecionando toda a figura e como extremidades para o vetor os pontos A e C.**



7. **Repitam o procedimento e experimentem pôr cores.**

8. **Elaborem o relatório da tarefa, tendo por base o guião disponibilizado.**

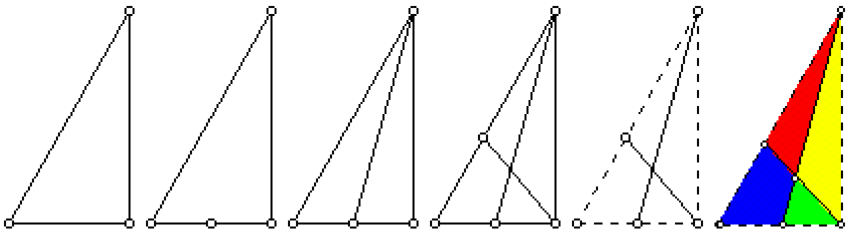
ANEXO 18

Tarefa I4 – O Caleidoscópio

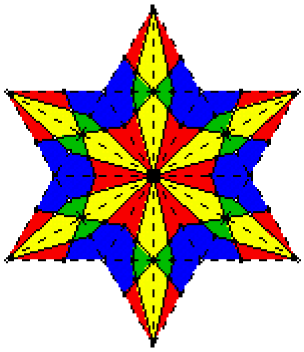
Rotações e Reflexões

1. Comecem por construir um triângulo de ângulos 30°, 60° e 90°.

Em dois lados do triângulo constrói um ponto e une-o ao vértice oposto ao lado a que pertence. Podes colorir as partes interiores e colocar os lados do triângulo a tracejado como mostra a sequência de figuras. (Memorizem a localização dos dois pontos que marcaram, vão precisar deles no final. Estes pontos não podem estar fixos como pontos médios).



2. Façam uma reflexão com um dos lados do triângulo como eixo de simetria, selecionem toda a figura e reflitam-na. Repitam o procedimento de forma a obterem uma figura semelhante à seguinte.



3.Para ver o caleidoscópio em movimento selecionem sucessivamente cada um dos dois pontos que memorizaram no início e animem-nos.

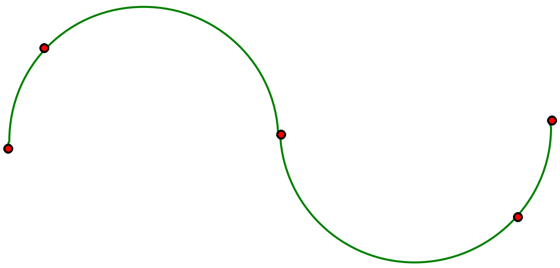
ANEXO 19

Tarefa I5 – Os Fantasmas

Pavimentações

Para a realização desta tarefa vai ser necessária a construção de uma ferramenta que poderá ser utilizada sempre que necessitarmos.

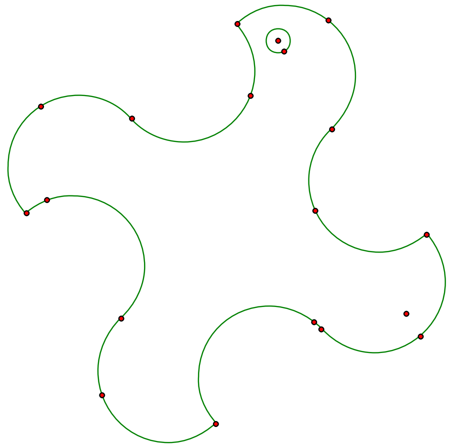
1. Construção da ferramenta
   a) Construam um segmento de reta [AB].
   b) Construam o seu ponto médio C.
   c) Construam duas semicircunferências e escondam o resto de maneira a ficar:



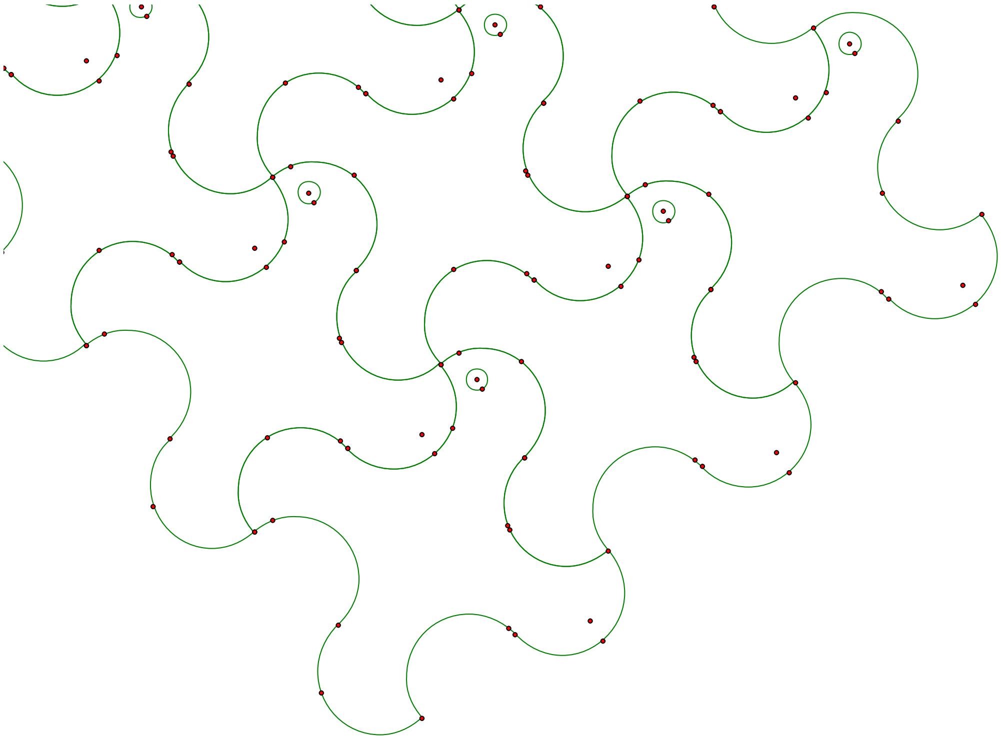
   d) Na barra de ferramentas, cliquem em criar nova ferramenta com toda a figura selecionada e concluam o procedimento.

2. Depois de apagarem a figura, Construam um quadrado.

3. Tendo por base o quadrado, utilizem a nova ferramenta para fazer



4. Utilizem translações de modo a pavimentar o plano:



5. Experimentem agora fazer o mesmo com outras figuras sem ser o quadrado.

6. Com base no guião elaborem um relatório onde incluam uma descrição pormenorizada do que fizeram no ponto 5.

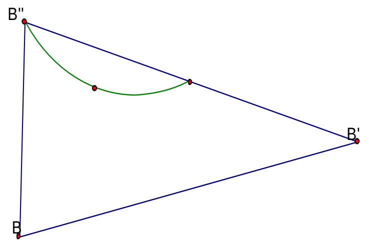
ANEXO 20

Tarefa I6 – Os Peixes

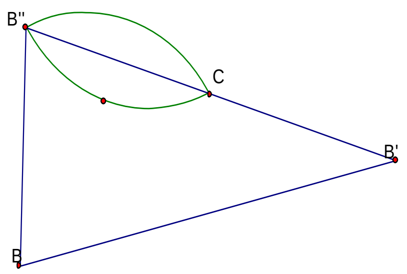
Pavimentações e isometrias.

1.
Construam uma circunferência.
Construam o raio da circunferência.
Rodem o raio 150º duas vezes com centro no centro da circunferência. Unindo os três pontos de interseção obtêm um triângulo.
Indiquem no relatório a classificação do triângulo obtido quanto as ângulos e quanto aos lados. Expliquem o porquê das medidas dos ângulos internos obtidos.

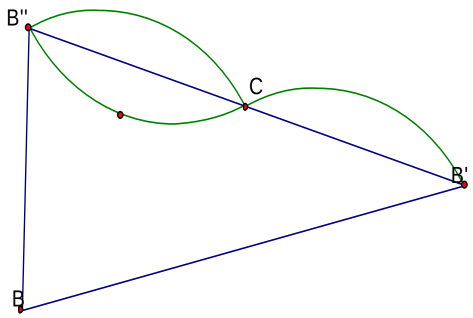
2. Vão dar-lhe a forma de peixe
Coloquem o ponto médio de [B’’B’].
Coloquem um ponto para formar um arco entre B’’ e o ponto médio.



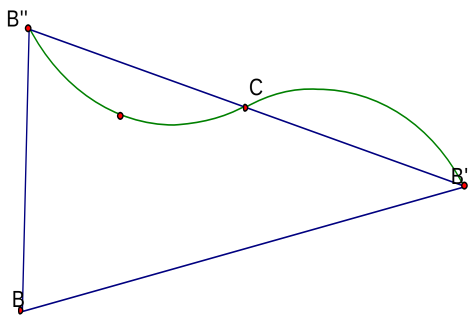
Façam uma reflexão



Façam uma translação

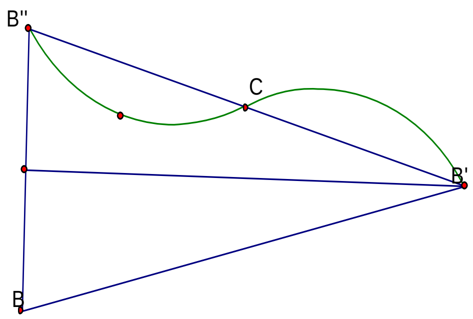


Escondam a “curva” de cima:

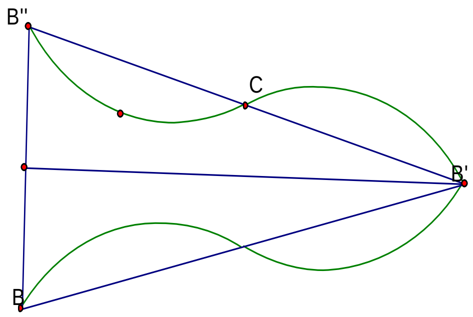


Marquem o ponto médio de [B’’B].

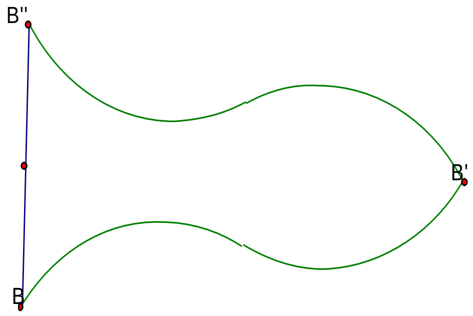
Unam esse ponto médio com B’.



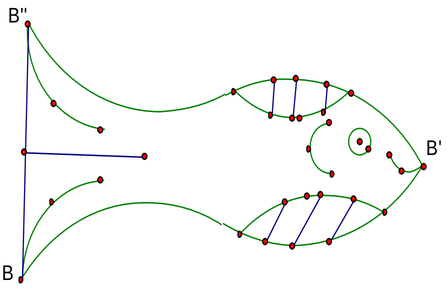
Selecionem as curvas e reflitam-nas.

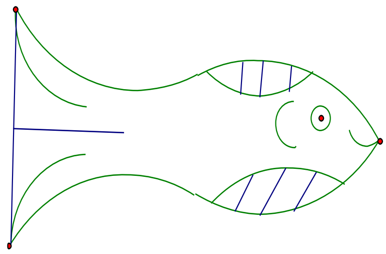


Escondam o que não é necessário



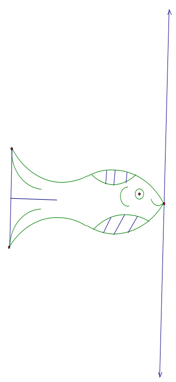
Ornamentem o peixe a vosso gosto, como por exemplo:



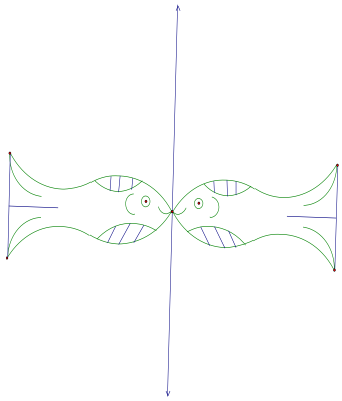


3.Seguidamente irão "pavimentá-lo"

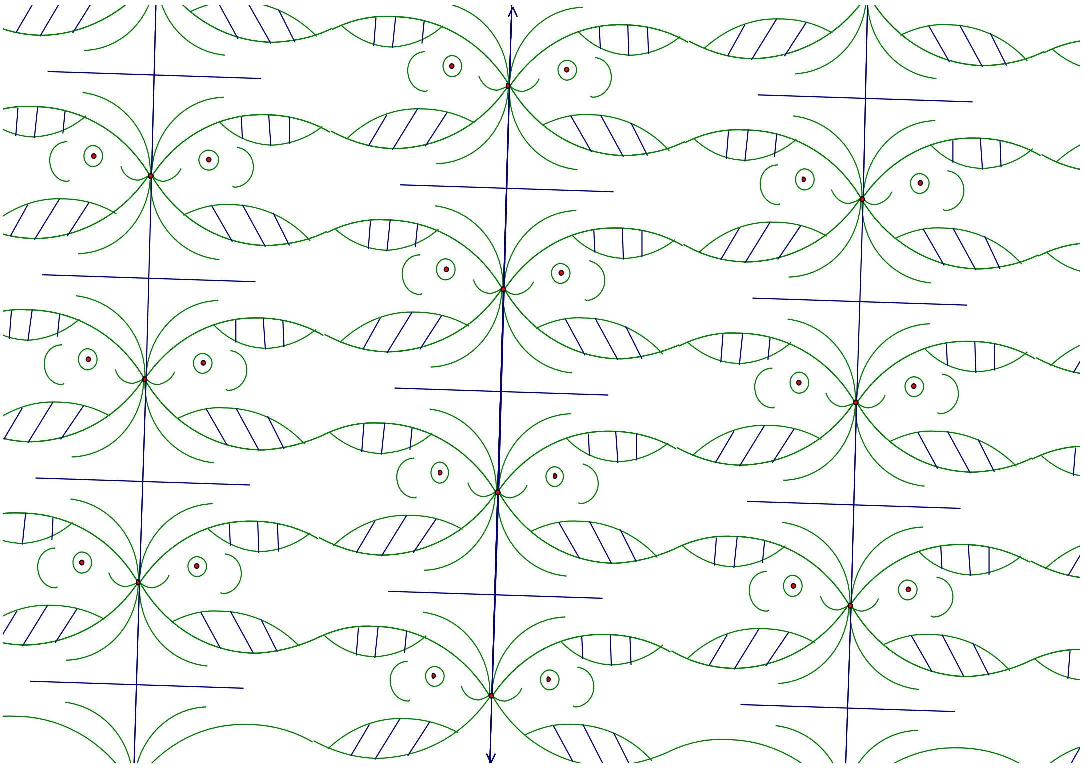
Tracem uma paralela ao segmento da base da cauda que passe pela ponta da boca.



Reflitam o peixe



Através de reflexões e translações obtêm a pavimentação



4. Experimentem construir com outras figuras e relata a experiência

5. Elaborem o relatório da tarefa, tendo por base o guião disponibilizado, onde relatem em pormenor o ponto 4.

ANEXO 21

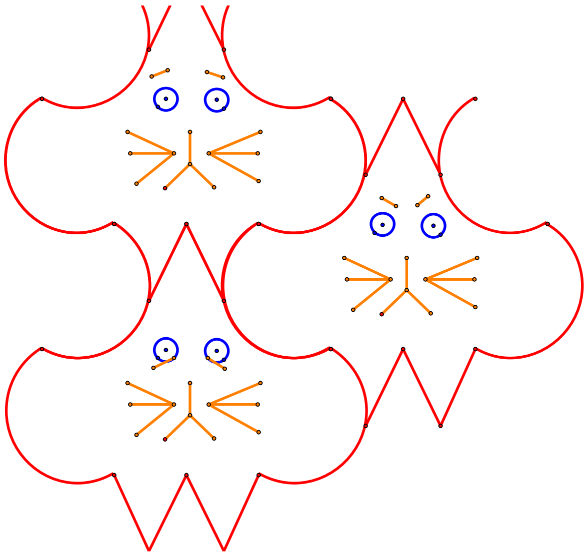
Tarefa I7 – Os Gatos

Translações. Como criar um motivo segundo Esher

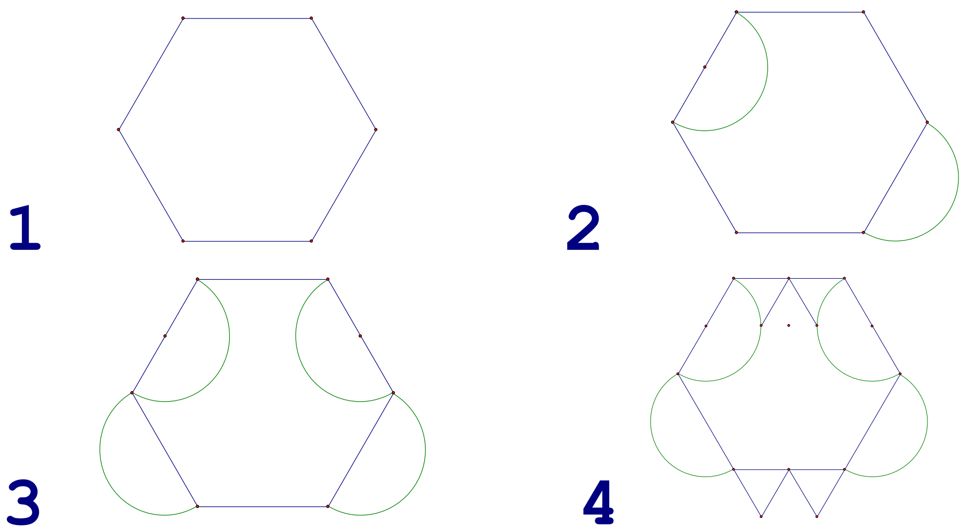
M.C. Esher (1898-1972) foi um pintor holandês que, sem formação matemática, baseou a sua obra em padrões repetidos e desenhos periódicos. Aprende com ele que, a partir de um quadrado ou de outro polígono, se cria um motivo para uma pavimentação.

a) Cria uma pavimentação, por translações sucessivas como a que está em baixo.

b) Cria uma pavimentação com outro motivo.



Sugestão: Utilizar o GeoGebra para:



Faz um relatório desta tarefa seguindo o guião e incluindo sugestões para futuras tarefas.

ANEXO 22

Tarefa TP1 – À Descoberta da Área do Trapézio

1)

a) Construam um trapézio qualquer. Para isso construam:
   i) Duas retas paralelas.
   ii) Completem, como mostra a figura.

b) Seguidamente marquem dois pontos (P e Q) em cada uma das retas da figura, no exterior do trapézio.

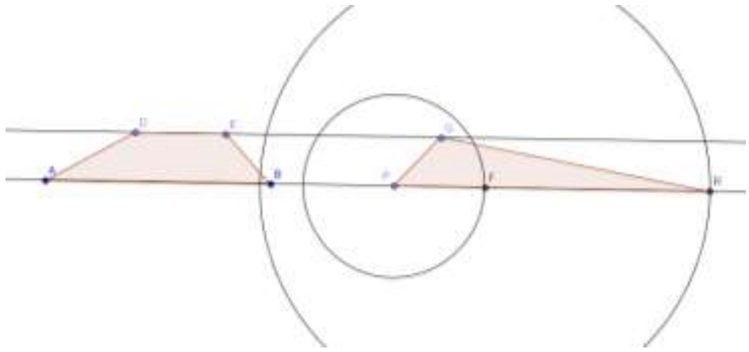
c) Com a ferramenta *compasso* desenhem uma circunferência com centro em P e com raio correspondente à base menor do trapézio.

d) Marquem o ponto de interseção dessa circunferência com a reta.

e) Com a ferramenta *compasso* desenhem uma circunferência com centro nesse ponto e com raio correspondente à base maior do trapézio.

f) Marquem o ponto R correspondente à interseção da última circunferência traçada com a reta.

g) Desenhem o triângulo cujas extremidades são os pontos P, Q e R, como mostra a figura.



h) Escondam as linhas auxiliares deixando apenas o triângulo e o trapézio.

i) Calculem a área de cada um dos polígonos.

j) Verifiquem se a relação encontrada entre as áreas se mantém por arrastamento.

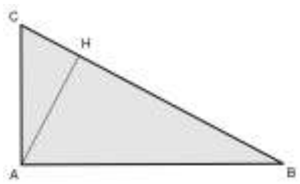
2) Elaborem o relatório da atividade, tendo por base o guião disponibilizado. Neste relatório deve constar uma explicação para o resultado da alínea anterior que leve a uma fórmula para o cálculo da área de qualquer trapézio (Atendam à forma como procedem ao cálculo da área do triângulo).

ANEXO 23

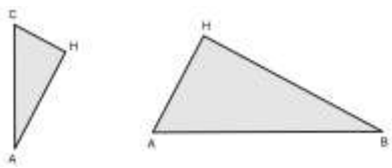
Tarefa TP2 – Explorando as Medianas e a Altura do Triângulo

1) Construam um triângulo qualquer e uma mediana.
   a) Em quantos triângulos é dividido o triângulo, pela mediana?
   b) Qual a relação existente entre as áreas?
   c) Verifica, por arrastamento, se essa relação se verifica para todos os casos.
   d) Que razão vos ocorre para que isso aconteça?

2)
   a) Construam um triângulo retângulo e a sua altura relativamente à hipotenusa (perpendicular), como mostra a figura



   b) Com a ferramenta *polígono* desenhem por cima desse triângulo os outros dois separados pelo segmento de reta AH correspondente à altura. Obtendo assim mais dois triângulos, como indica a figura.



   c) Utilizando rotações e translações tentem sobrepor os três triângulos, de forma que tenham um vértice em comum e as hipotenusas sejam paralelas não coincidentes.

   d) Recorrendo aos casos de semelhança de triângulos justifiquem que os três triângulos são semelhantes.

3) Elaborem o relatório da atividade, onde devem incluir as respostas às questões colocadas, tendo por base o guião disponibilizado.

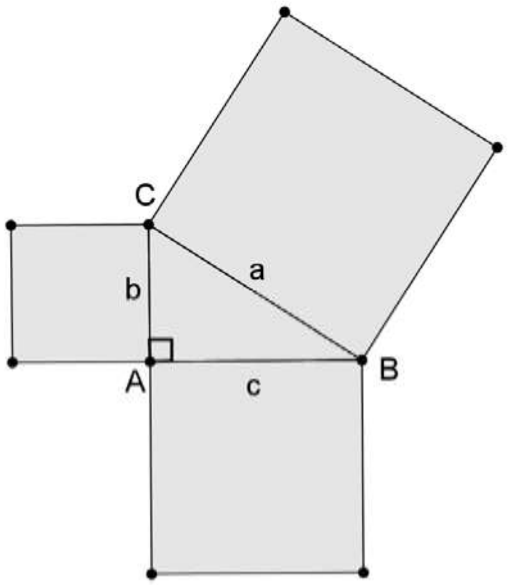
Adaptado de *Professores das turmas piloto do 8º ano 2009/2010*

ANEXO 24

Tarefa TP3 – À Descoberta do Teorema de Pitágoras

1.1. Construam um triângulo retângulo escaleno.

1.2. Sobre cada lado do triângulo construam quadrados, conforme a figura.



1.3. Determinem a área de cada um dos quadrados.

1.4. Estabeleçam uma relação entre as áreas desses quadrados.

1.5. Se arrastarem um dos vértices do triângulo essa relação mantém-se?

1.6. Atribuindo letras às medidas dos comprimentos dos lados do triângulo, escrevam uma expressão algébrica que traduza a relação encontrada.

2. Será que a relação entre as áreas se mantém se em vez de quadrados se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo retângulo? Investiguem com outros polígonos regulares e registem as vossas conclusões.

3. Façam agora o mesmo estudo que fizeram na pergunta 1, mas considerando um triângulo não retângulo. Será que a relação entre as áreas dos quadrados também se verifica?

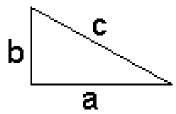
4. Elaborem o relatório da atividade, tendo por base o guião disponibilizado.

Adaptado de *Professores das turmas piloto do 8º ano 2009/2010*

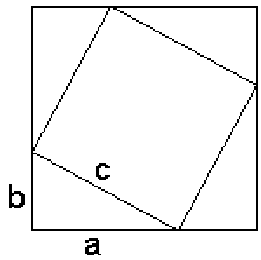
ANEXO 25

Tarefa TP4 – Demonstrando o Teorema de Pitágoras

1.1. Construam um triângulo retângulo escaleno.



1.2. Utilizando rotações e translações construam a figura.



Nota: Não se esqueçam de incluir, no relatório, uma descrição pormenorizada de como procederam

1.3. Calculem a área do quadrado exterior.
Se o comprimento dos catetos for **a** e **b** justifica porque é que a área do quadrado exterior é $(a+b)^2$.

1.4. Meçam o comprimento da hipotenusa e calculem a área do quadrado interior.
Se o comprimento da hipotenusa for **c** qual é a área do quadrado interior?

1.5. Meçam o comprimento dos catetos e calculem a área de cada triângulo.
Se o comprimento dos catetos for **a** e **b,** aplicando a fórmula da área do triângulo, qual o significado de 2ab?

1.6. Atendendo às alíneas anteriores passem para linguagem simbólica: “A área do quadrado exterior é igual à soma das áreas do quadrado interior com os triângulos”.

1.7. Simplifiquem a expressão obtida na alínea anterior.

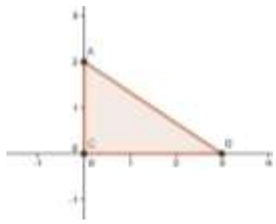
2. Elaborem o relatório da atividade, tendo por base o guião disponibilizado.

ANEXO 26

Tarefa TP5 – Demonstrando o Teorema de Pitágoras II

1.1. No Geogebra introduzam no espaço de entrada “a=2” e “b=3”, seguido das coordenadas “(0,a)” e “(b,0)”.

1.2. Desenhem o triângulo:



1.3. Na parte algébrica seleccionem as marcas de a=2 e b=3 para aparecerem os respectivos selectores, como mostra a figura:

1.4. Seleccionem simultaneamente os dois seletores.

1.5. Em cima da seleção com o botão do lado direito optem pelas propriedades. Dentro desta opção:

1.5.1. Assinalem mostrar rótulo.

1.5.2. No seletor optem por um intervalo de 0 a 10 e um incremento de 1.

1.6. Introduzam o ponto D de coordenadas “(a+b, a+b)”.

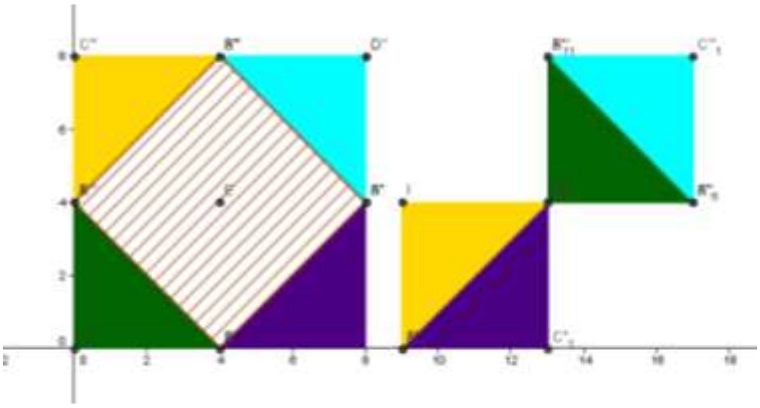
1.7. Marquem o ponto médio de [CD].

1.8. Rodem o triângulo 90º com centro no ponto médio sucessivamente até formar um quadrado no interior.

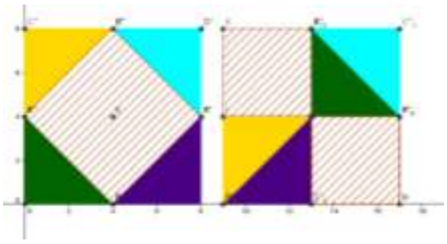
1.9. Coloquem cores diferentes em cada um dos triângulos e no quadrado.

1.10. Introduzam o ponto F de coordenadas “(a+b+1,0)”.

1.11. Através de translações construam a figura seguinte:



1.12. Com a ferramenta “Polígono regular” construam os quadrados restantes, como indica a figura:



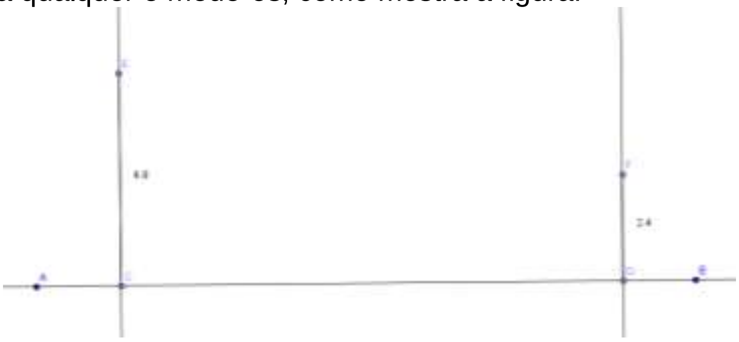
2. Elaborem o relatório da atividade, tendo por base o guião disponibilizado. Neste relatório deve constar uma descrição pormenorizada de como poderiam utilizar a construção realizada para demonstrar o teorema de Pitágoras.

ANEXO 27

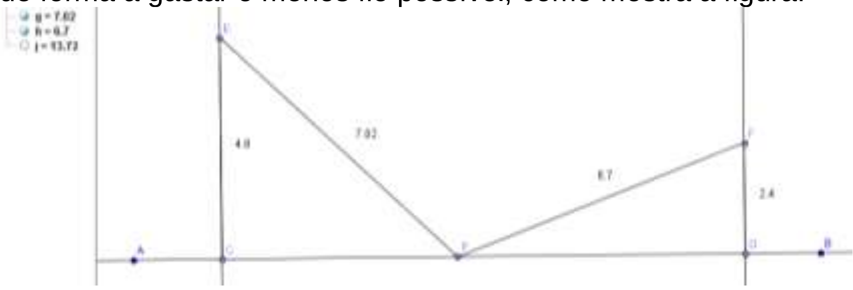
Tarefa TP6 – Os Postes

1.1. No Geogebra traça duas retas perpendiculares a uma outra, como indica a figura.

1.2. Tendo por base as duas retas paralelas constrói dois segmentos de reta de uma medida qualquer e mede-os, como mostra a figura:



1.3. Supondo que os segmentos de reta são dois postes de electricidade e que o fio tem de ligar à terra algures no meio, procura por arrastamento o ponto P (entre C e D) de forma a gastar o menos fio possível, como mostra a figura:



1.4. Depois de posicionarem o ponto P, reflictam o triângulo [ECP] segundo a reta AB.

1.5. Unam o ponto E' ao ponto F através de um segmento de reta.

1.6. Marquem o ponto G como sendo a intersecção desse segmento de reta com a reta AB.

1.7. Comparem a posição do ponto G com o ponto P.

1.8. Alterem os comprimentos dos postes por arrastamento e registem soluções para o problema.

2. Elaborem o relatório da atividade, tendo por base o guião disponibilizado. Neste relatório deve constar uma justificação para os valores obtidos em 1.7 e 1.8.

Adaptado de Trigo (2004)