

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades

Cláudia Sofia Carrilho Morgado Raposo

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

(2013)

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades

Cláudia Sofia Carrilho Morgado Raposo

Dissertação

Mestrado em Matemática para Professores

Orientador: Prof^a Doutora Ana Rute Domingos

(2013)

AGRADECIMENTOS

Esta secção é dedicada a todos aqueles que, de uma maneira ou de outra me acompanharam, com sabedoria, com carinho ou simplesmente com companhia, estando presentes nas curvas do meu caminho e não só... e contribuindo para a concretização deste projeto.

Ao longo da vida sempre tive presente que sozinha posso chegar mais rápido mas acompanhada chego mais longe. Por isso aqui ficam alguns simples e sinceros agradecimentos que não podem ser esquecidos.

À professora de Português, *Dr^a Ana Maria Costa*, pela disponibilidade demonstrada para a revisão ortográfica da dissertação e pelo profissionalismo com que o fez.

À aluna *Sara Ramalhe* por ter abdicado de um tempo significativo das suas férias para trabalhar em parceria comigo, na resolução de todas as atividades elaboradas nesta dissertação.

Ao Museu Municipal do Crato pelo empréstimo das rodas dentadas para a realização de uma das atividades propostas.

A todos os professores da componente curricular do Mestrado em Matemática para Professores que, com uma simplicidade brilhante, nos prepararam cientificamente para este projeto desenvolvendo em nós, não só uma maior motivação para chegar mais além como também uma melhor preparação para o exercício da nossa profissão no dia a dia.

À minha orientadora, prof^a dr^a Ana Rute Domingos, pelo excelente profissionalismo e grande disponibilidade que sempre demonstrou, pelo grande rigor e exigência com que frequentemente me acompanhou e pelas sugestões, sempre oportunas, que me foi transmitindo ao longo deste percurso.

Aos amigos e à família, em especial à minha mãe, ao meu marido e às minhas filhas, pelo incondicional carinho e apoio que me deram para que pudesse chegar ao fim e pela compreensão do tempo que abdicaram de estar comigo.

E finalmente ao meu pai, ou seja, à pessoa que mais me acompanhou em todo o meu percurso escolar, apoiando-me ativamente no mesmo e incentivando-me sempre a ir mais longe, sendo a única a concordar com a realização deste Mestrado. À única pessoa que igualmente me acompanhou em todas as minhas viagens semanais até à faculdade, brilhando para mim do céu e escrevendo entre linhas *“A vida é uma estrada cheia de curvas imprevistas e de derrapagens*

inevitáveis. Por isso não tenhas medo e conduz sempre na curva que te parecer mais famosa, pois irás conseguir contorná-la”.

RESUMO

As equações diferenciais assumem-se como uma ferramenta indispensável ao nível do cálculo integral, tendo aplicações práticas em várias áreas. Permitem definir, entre muitos outros exemplos, curvas que devido a propriedades específicas que apresentam, se tornaram famosas.

O objetivo deste trabalho é estudar algumas dessas curvas obtendo as equações diferenciais que as caracterizam, as propriedades que as tornaram famosas, bem como algumas das suas aplicações e, com base nos resultados obtidos, elaborar um conjunto de atividades de aplicação, de construção e/ou de exploração. A aprendizagem da matemática tem sofrido ao longo dos tempos diferentes tipos de abordagens no que concerne às dificuldades manifestadas por um número significativo de alunos face à disciplina em questão. Assim pretende-se que as atividades elaboradas possam servir como um instrumento atrativo e motivador para a sala de aula. Relativamente às mesmas, usam-se alguns recursos tecnológicos, nomeadamente softwares matemáticos educativos (*Winplot e Geogebra*) como suporte auxiliar ao ensino e à aprendizagem da disciplina de Matemática.

ABSTRACT

The differential equations are assumed as an indispensable tool in terms of integral calculus, with practical applications in various areas. They allow defining, among many other examples, curves due to its specific properties have become popular.

The objective of this work is to study some of these curves obtaining the differential equations that characterize the properties that made them famous, and some of their applications and, based on the results, develop a set of enforcement construction and / or exploitation activities. The learning of mathematics has suffered over the years different types of approaches in relation to the difficulties experienced by a significant number of students facing the subject in question. Thus it is intended that the developed activities can serve as an attractive tool for motivating learning in the classroom. Regarding these, some technological features are used, namely mathematical educational software (*Winplot and Geogebra*) as auxiliary support to the teaching and learning of Mathematics.

PALAVRAS CHAVE: Catenária, Tractriz, Ciclóide, Epiciclóide e Hipociclóide

KEYWORDS: Catenary, Tractrix, Cycloid, Epicycloid and Hypocycloid

Índice Geral

1. Funções hiperbólicas	4
1.1. Seno hiperbólico	4
1.2. Cosseno hiperbólico.....	7
1.3. Tangente hiperbólica.....	11
1.4. Secante hiperbólica	14
1.5. Propriedades das funções hiperbólicas.....	18
Atividade de Aplicação nº 1 – Exercícios	19
2.1. Catenária	26
Introdução	26
Estudo da curva	29
Propriedades da curva.....	32
Atividade de Aplicação n.º 2.....	45
Atividade de Aplicação nº 3.....	55
Atividade de Aplicação nº 4.....	61
2.2. Tractriz.....	68
Introdução	68
Estudo da curva	69
Propriedades da Curva	76
Atividade de Aplicação nº 5.....	83
Relatório de Aplicação do Exercício 2 da Atividade	90
CAPÍTULO III.....	95
3.1. Ciclóide	95
Introdução	95
Estudo da curva.....	97
Propriedades da curva.....	99
Atividade de Construção e Aplicação nº 6	114
Relatório da atividade sobre a construção de uma ciclóide (1ª parte).....	122
Atividade de Aplicação nº 7 - Construção recorrendo ao programa GeoGebra	125

Atividade de Aplicação nº 8 - Construção recorrendo ao programa <i>Winplot</i>	132
3.2. Hipociclóides.....	142
Introdução	142
Estudo da curva.....	142
3.2.1. Hipociclóide degenerada	145
3.2.2. Deltóides ou Tricúspides	147
3.2.3. Astróide	154
Atividade de Aplicação nº 9.....	169
Atividade de Aplicação nº 10.....	175
3.3. Epiciclóides	184
Introdução	184
Estudo da curva.....	185
3.3.1. Cardióide.....	188
3.3.2. Nefróide ou Epiciclóide de Huygens.....	196
Atividade de Aplicação nº 11: Construção de Epiciclóides recorrendo ao programa <i>Winplot</i>	205
Atividade de Aplicação nº 12: Hipotrocóides e Epitrocóides – Espirógrafo.....	215
Relatório da Atividade sobre a Construção de uma Epiciclóide (2ª parte)	222
Relatório das Aplicação das Atividades	224
Considerações Finais	227
Anexo A: Generalidades sobre Curvas	228
Anexo B: Cálculo das Variações	238
Anexo C: Quadro Resumo.....	240
Anexo D: Matemáticos Referenciados	242
Referências Bibliográficas.....	245

Índice de Figuras

Figura 1 - Representação gráfica das funções $a(x) = \frac{1}{2}e^x, b(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ e $f(x) = \sinh x$	6
Figura 2 - Representação gráfica das funções $c(x) = x, f(x) = \sinh x$ e $y_1(x) = \sinh^{-1}x$	7
Figura 3 - Representação gráfica da função $g(x) = \cosh x$	9
Figura 4 - Representação gráfica das funções $c(x) = x, g(x) = \cosh x$ em R_0^+ e $y_2(x) = \cosh^{-1}x$ para $x \geq 1$ 10	10
Figura 5 - Representação gráfica da função $h(x) = \tanh x$	13
Figura 6 - Representação gráfica das funções $c(x) = x, h(x) = \tanh x$ e $y_3(x) = \tanh^{-1}x$ para $-1 < x < 1$	14
Figura 7 - Representação gráfica da função $j(x) = \operatorname{sech} x$	17
Figura 8 - Representação gráfica da função $l(x) = \operatorname{sech}^{-1}x$ para $0 < x \leq 1$	18
Figura 9 – Catenária.....	27
Figura 10 - Arco de uma catenária - Ponte 25 de Abril – Lisboa	27
Figura 11 - Arco de catenária invertida - Casa Milá Gaudi – Barcelona	27
Figura 12 - Arco de uma catenária – Dulles International - USA.....	28
Figura 13 - Arco de uma catenária invertida – Arco do Portal – Missouri	28
Figura 14 – Cabo flexível suspenso nos extremos A e B.....	29
Figura 15 – Esquema das forças que atuam num cabo flexível suspenso nos extremos A e B	30
Figura 16 – Esquema das forças que atuam no cabo	30
Figura 17 – Gráficos de funções da forma $y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}$	32
Figura 18 – Região delimitada por uma catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equação $x = 0$ e $x = 1$	33
Figura 19 – Translações horizontais da função $\cosh x$	34
Figura 20 - Translações verticais da função $\cosh x$	34
Figura 21 – Composição de translações verticais e horizontais da função $\cosh x$	35
Figura 22 – Catenária com extremos à mesma altura	36
Figura 23 - Catenária com extremos à mesma altura em $[0,1]$	37
Figura 24 – Diferentes catenárias com extremos à mesma altura	37
Figura 25 – Catenária com extremos que não estão à mesma altura.....	38
Figura 26 - Catenária com extremos a diferentes alturas.....	40
Figura 27 – Diferentes catenárias com extremos fixos a diferentes alturas.....	40
Figura 28 – Diferentes catenárias com o extremo esquerdo fixo	41
Figura 29 - Interseção de duas catenárias em dois pontos.....	43
Figura 30 - Interseção de duas catenárias num ponto.....	43
Figura 31 - Interseção vazia de duas catenárias.....	44
Figura 32 – Catenóide.....	44
Figura 33 – Tractriz.....	68

Figura 34 – Veículo articulado	69
Figura 35 – Modo como se obtém uma tractriz.....	69
Figura 36 – Tractriz com cúspide no eixo das abcissas	72
Figura 37 – Curva de perseguição de um cão a um gato	73
Figura 38 – Segmento da tangente delimitado pelo ponto de tangência e pelo eixo das abcissas.....	76
Figura 39 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 1 a 5	79
Figura 40 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 6 a 8	80
Figura 41 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 9 a 10	80
Figura 42 – Construção geométrica da catenária e da tractriz	81
Figura 43 – Pseudoesfera	81
Figura 44 – Pseudoesfera	82
Figura 45 – Ciclóide	95
Figura 46 - Fachada da Cúpula da Kimbell Art Gallery	97
Figura 47 - Planta da Cúpula da sala de exposições de Kimbell Art Gallery.....	97
Figura 48 – Construção de uma cicloide	98
Figura 49 – Arco de uma cicloide originada a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio.....	99
Figura 50 – Região delimitada por um arco de cicloide originado a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio	100
Figura 51 – Construção de uma cicloide	100
Figura 52 – Região compreendida entre a cicloide e a companheira da cicloide.....	102
Figura 53 – Cicloide (a rosa) e respetiva evoluta (a azul).....	105
Figura 54 – Curva tautócrona	105
Figura 55 – Partícula que desliza sobre uma curva de um ponto <i>A</i> para o ponto mais baixo da mesma	106
Figura 56 – Relógio de pêndulo cicloidal construído por <i>Christiann Huygens</i> e extraído da sua obra “ <i>Horologium Oscillatorium</i> ”	108
Figura 57 – Cicloide a partir de duas meias cicloides.....	108
Figura 58 – Caminho mais curto (retilíneo) e caminho mais rápido (braquistócrona) entre dois pontos <i>A</i> e <i>B</i>	109
Figura 59 – Partícula que desliza sobre uma curva	110
Figura 60 - Trocóiide.....	113
Figura 61 – Sequência de construção de uma hipocicloide	142
Figura 62 – Hipocicloide com 5 cúspides	144
Figura 63 – Hipocicloide com 7 cúspides	144
Figura 64 - Construção de uma hipocicloide com 8 cúspides (1º, 2º e 3ª volta)	144
Figura 65 – Construção de uma hipocicloide com 8 cúspides (4ª e 5ª volta)	145

Figura 66 – Hipociclóide para $\frac{b}{a} = 2$	145
Figura 67 – Hipociclóide degenerada	146
Figura 68 – Pistão no funcionamento de uma máquina a vapor	146
Figura 69 - Deltóide	147
Figura 70 - Músculo deltóide.....	148
Figura 71 – Construção do deltóide – Passos 1 a 3	149
Figura 72 – Construção do deltóide – Passo 4	149
Figura 73 – Construção de deltóide – Passos 5 e 6	150
Figura 74 – Construção geométrica do deltóide	150
Figura 75 – Deltóide inscrito num triângulo.....	152
Figura 76 – Região delimitada por um deltóide	153
Figura 77 – Deltóide e a sua evoluta	154
Figura 78 – Astróide	154
Figura 79 – Construção do astróide – Passos 1 a 3	155
Figura 80 – Construção do astróide – Passo 4	156
Figura 81 – Construção do astróide – Passos 5 e 6	156
Figura 82 – Construção geométrica do astróide	157
Figura 83 – Construção do astróide	157
Figura 84 – Astróide inscrito num quadrado.....	159
Figura 85 – Astróide e a sua evoluta	161
Figura 86 – Elipse e a sua evoluta (astróide).....	161
Figura 87 - Espirógrafo	166
Figura 88 – Rodas de plástico do Espirógrafo	166
Figura 89 – Anel quadrado do Espirógrafo.....	167
Figura 90 – Construção de hipociclóides através do Espirógrafo	167
Figura 91 – Sequência de figuras obtidas através do Espirógrafo	167
Figura 92 – Sequência de hipociclóides obtidas através do Espirógrafo	168
Figura 93 – Construção de uma epiciclóide	186
Figura 94 – Epiciclóide com 5 cúspides	187
Figura 95 – Epiciclóide com 10 cúspides	188
Figura 96 – Epiciclóide.....	188
Figura 97 – Cardióide.....	189
Figura 98 – Microfone Cardióide.....	189
Figura 99 – Eixo de simetria de uma cardióide com cúspide no eixo das abcissas.....	190
Figura 100 – Eixo de simetria de uma cardióide com cúspide no eixo das ordenadas.....	191

Figura 101 – Cardióide com cúspide no eixo das abcissas e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo	191
Figura 102 – Cardióide com cúspide no eixo das abcissas e o eixo maior pertence à parte positiva do mesmo	191
Figura 103 – Cardióide com cúspide no eixo das ordenadas e o eixo maior pertence à parte positiva do mesmo	192
Figura 104 – Cardióide com cúspide no eixo das ordenadas e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo	192
Figura 105 – Várias cardióides com diferentes valores de a	193
Figura 106 - Construção da cardióide – Passos 1 a 3	194
Figura 107 - Construção geométrica da cardióide	194
Figura 108 - Cardióide a sua evoluta	196
Figura 109 – Nefróide	197
Figura 110 - Construção da nefróide – Passos 3 e 4	198
Figura 111 - Construção geométrica da nefróide	199
Figura 112 – Nefróide e a sua evoluta	201
Figura 113 – Construção de epitrocóides através do Espirógrafo	203
Figura 114 – Sequência de figuras obtidas através do Espirógrafo	203
Figura 115 – Sequência de epitrocóides obtidas através do Espirógrafo	204
Figura 116 - Representação geométrica de uma circunferência	228
Figura 117 - Representação geométrica de uma elipse	229
Figura 118 - Traço da parametrização $\gamma_1(t)$	229
Figura 119 - Traço da parametrização $\gamma_2(t)$	230
Figura 120 - Sistema em coordenadas polares	230
Figura 121 – Vetor tangente e vetor normal à curva	232
Figura 122 – Arco entre dois pontos A e B	233
Figura 123 – Arco de uma curva polar $r = y(\theta)$, desde $\theta = a$ a $\theta = b$	234
Figura 124 - Região limitada pelo gráfico da função y , pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$	235
Figura 125 - Região limitada pelo gráfico da função $ y $, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$	235
Figura 126 – Área da região limitada por uma curva polar $r = y(\theta)$, desde $\theta = a$ a $\theta = b$	236
Figura 127 – Círculo osculante	236

INTRODUÇÃO

As curvas são objetos matemáticos que desde há muito suscitaram o interesse de célebres e ilustres adeptos do conhecimento. Com várias e úteis aplicações práticas, algumas curvas assumem-se como especiais, razão pela qual se tornaram famosas.

A seleção das curvas abordadas nesta dissertação prende-se, por um lado, com o gosto pessoal da autora, atendendo à forma, mais ou menos visível, com que estas curvas aparecem no dia a dia, e por outro à forma como se adequam a serem trabalhadas em atividades destinadas aos alunos do secundário.

Este trabalho engloba um estudo teórico das curvas escolhidas, que não tem a pretensão de ser exaustivo, abordando alguma da vasta diversidade das propriedades destas curvas e que atravessa várias áreas da matemática e também da física, e uma coleção de atividades destinadas aos alunos dos ensinos básico e secundário, que poderão ser aplicadas em programas de complemento educativo, como clubes de matemática, por exemplo, ou como aplicação ou exploração de alguns dos conteúdos dos programas de matemática vigentes.

O presente trabalho está estruturado em três capítulos. No primeiro capítulo é apresentado o estudo de algumas das chamadas funções hiperbólicas muito utilizadas em engenharia, física e matemática e cujas propriedades são necessárias nos capítulos seguintes. O estudo das funções referenciadas engloba domínios, contradomínios, zeros, paridade, sinal, monotonia e extremos, concavidade e pontos de inflexão, injetividade e inversa, entre outras propriedades, culminando com a representação gráfica. Nos segundo e terceiro capítulos realiza-se o estudo de curvas famosas, nomeadamente, a catenária, a tractriz, a cicloide, a epicloide e a hipocicloide.

No segundo capítulo é apresentado o estudo efetuado sobre a catenária e a tractriz.

No que concerne à catenária, é ainda realizada uma análise pormenorizada da relação existente entre o mínimo da curva e a altura das extremidades da mesma, que não encontramos na literatura consultada.

No terceiro capítulo são estudadas mais três curvas: as cicloides, as hipocicloides e as epicloides - curvas essas que são obtidas pela trajetória de um ponto fixo numa circunferência, quando esta rola, sem deslizar, sobre uma reta que lhe é tangente, ou sobre uma outra circunferência fixa, no seu interior ou no seu exterior, respetivamente.

Para cada uma das curvas estudadas é feita uma pequena introdução histórica seguida de um estudo detalhado das mesmas, através de proposições e teoremas que englobam a dedução da equação diferencial que a modela e as suas principais propriedades, das quais destacamos o comprimento do arco, a área da região limitada pela curva e o raio de curvatura. Em cada capítulo indicamos também uma parametrização da *evoluta* de cada curva, embora não apresentemos a sua dedução.

Em cada curva é ainda apresentada uma construção geométrica da mesma com base em construções sugeridas no livro “*A Book of Curves*” de *E. Locwood* [13]. Apenas efetuámos o estudo da explicação de um dos métodos de construção.

No final do estudo relativo a cada curva são apresentadas as atividades destinadas aos alunos, tendo em conta os itens analisados. Cada uma das atividades é inicialmente apresentada por uma ficha de caracterização onde são referenciados os objetivos, os pré requisitos necessários, os conteúdos presentes, bem como os destinatários, a duração de cada atividade e, nalguns casos, outras observações adicionais. De referir que em algumas atividades existem exercícios comuns de modo a que cada uma possa ser individual e independentemente aplicada. Sempre que tal acontece, é indicado como observação que o exercício comum não deve ser realizado. O tempo para a realização e correção de cada atividade começou por ser, num primeiro momento estimado, tendo sido posteriormente alterado tendo em conta que todas as atividades foram realizadas, na íntegra, por uma aluna finalista do 12.º ano. Com a aplicação das mesmas e cronometrando o tempo de realização destas foram feitas adaptações no que concerne à linguagem utilizada em enunciados de modo a torná-los mais claros e percetíveis. O grau de dificuldade de alguns exercícios foi escolhido com vista ao alargamento de conhecimentos científicos, funcionando por si só como uma preparação para o ensino superior. Duas das atividades foram adaptadas em sala de aula sendo os respetivos resultados apresentados sob a forma de relatório, no qual se enumeram, contextos de aplicação, materiais utilizados, datas e locais de realização, resultados obtidos com identificação dos pontos fortes e fracos e, por fim, o feedback dos alunos às mesmas. Algumas das atividades propostas usam softwares matemáticos educativos, nomeadamente o *Winplot* e o *Geogebra*, tendo os mesmos sido selecionados por serem os mais usualmente utilizados em contexto de sala de aula. Sendo ambos interativos, são uma ótima ferramenta para estimular os alunos. O uso destes recursos tecnológicos permite a ilustração gráfica e a investigação de propriedades, desenvolvendo o espírito crítico, estimulando a observação e promovendo a compreensão e associação de ideias em detrimento de meras e

ocasionais memorizações. Tornam-se por isso uma mais valia para uma melhor aprendizagem. São apresentadas todas as soluções dos exercícios propostos, sendo que a resolução só é apresentada para aqueles que ainda não foram referenciados no enquadramento teórico.

Destaca-se ainda a aplicação de alguns dos exercícios apresentados a alunos do décimo ano de duas escolas, nomeadamente da Escola Professor Mendes dos Remédios de Nisa (10º ano) e da Escola Profissional Agostinho Roseta (10º ano), com modalidades de ensino diferentes. Neste contexto, os exercícios escolhidos para aplicação relacionaram-se com a construção de cicloides e epicloides tendo em conta a aquisição de material que permite essa mesma construção, ou seja, rodas dentadas cedidas pelo Museu Municipal do Crato que outrora foram utilizadas em engrenagens de máquinas e que, direta ou indiretamente, muita vida deram a essa localidade.

No final desta dissertação é apresentado, um quadro resumo onde são sintetizados as principais propriedades e resultados obtidos ao longo da mesma.

Por último resta referir, que optámos pela inclusão dos conceitos básicos relativos a curvas parametrizadas, e que fazem parte dos currículos, dos cursos de matemática, em anexo. Também em anexo, encontram-se alguns resultados do cálculo das variações, a que recorreremos para alguns dos estudos feitos.

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

Ao longo deste trabalho, vamos usar funções que apresentamos neste primeiro capítulo. Por uma questão de completude, incluímos algumas propriedades das funções em causa, de que não faremos uso.

1. Funções hiperbólicas

1.1. Seno hiperbólico

O **seno hiperbólico** é a função de domínio R definida da seguinte forma:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1)$$

Sendo $f(x) = \sinh x$, facilmente concluímos que f é uma função contínua em todo o seu domínio (R) por se tratar da diferença e do quociente entre funções contínuas, nomeadamente a função exponencial e a função constante.

Proposição 1. O $\sinh x$ é uma função ímpar.

Demonstração. Vejamos que $-f(x) = f(-x), \forall x \in R$.

$$\text{Ora } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x).$$

Logo o $\sinh x$ é uma função ímpar. ■

Proposição 2. O $\sinh x$ é uma função injetiva.

Demonstração. Começemos por provar que f é uma função estritamente crescente. Temos que:

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (2)$$

A função derivada nunca se anula sendo positiva em todo o seu domínio. Trata-se de uma função contínua e estritamente crescente, logo injetiva. ■

Observação. Na demonstração da proposição anterior provámos que $\sinh x$ é uma função estritamente crescente.

Proposição 3. A função $f(x) = \sinh x$ só se anula em $x = 0$.

Demonstração. Temos $f(0) = 0$ e como f é uma função injetiva (c.f. proposição 2), então a mesma só se anula em $x = 0$. ■

Proposição 4. O $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$.

Demonstração. Quando $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ e $e^{-x} \rightarrow 0$, logo temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{+\infty - 0}{2} = +\infty. \blacksquare$$

Proposição 5. O $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$.

Demonstração. Visto que f é uma função ímpar e tendo em conta a proposição 4, sai de imediato que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = -\infty$. ■

Proposição 6. A concavidade do gráfico da função f é virada para baixo em $x \in R^-$ e virada para cima em $x \in R^+$.

Demonstração. Temos $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Assim $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A função f'' é negativa em $x < 0$, pois $e^x < e^{-x}$ no intervalo considerado, e positiva para $x > 0$. Esquemáticamente temos:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\cap	$p.i.$	\cup

O gráfico da função f tem a concavidade virada para baixo no intervalo $]-\infty, 0]$ e virada para cima para $[0, +\infty[$, apresentando um ponto de inflexão em $x = 0$. ■

Para obtermos a representação gráfica da função f , podemos recorrer ao método da adição de ordenadas, considerando separadamente os gráficos das funções $a(x) = \frac{1}{2}e^x$ e $b(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

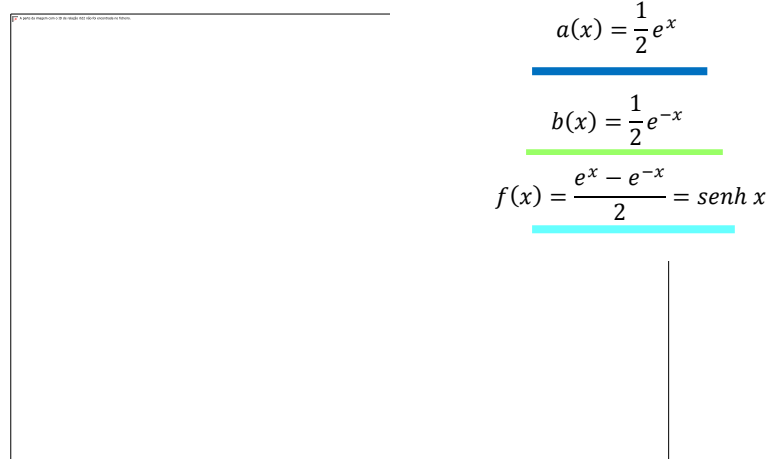


Figura 1 - Representação gráfica das funções $a(x) = \frac{1}{2}e^x$, $b(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ e $f(x) = \sinh x$

Seja f uma função contínua e estritamente crescente em todo o seu domínio, e tendo em conta as proposições 4 e 5, concluímos pelo Teorema de Bolzano que o contradomínio de f é \mathbb{R} .

Função inversa do seno hiperbólico

Proposição 7. A função inversa do seno hiperbólico é dada por $\sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Temos que:

$$x = \sinh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow e^y - \frac{1}{e^y} - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Notemos que e^y é uma função positiva em todo o seu domínio e $\sqrt{x^2 + 1} > x$, logo:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \forall x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

A função inversa do seno hiperbólico também pode ser representada por **arcsenh** x .

A representação gráfica desta função obtém-se fazendo a simetria do gráfico da função seno hiperbólico relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares e encontra-se a verde na figura seguinte.

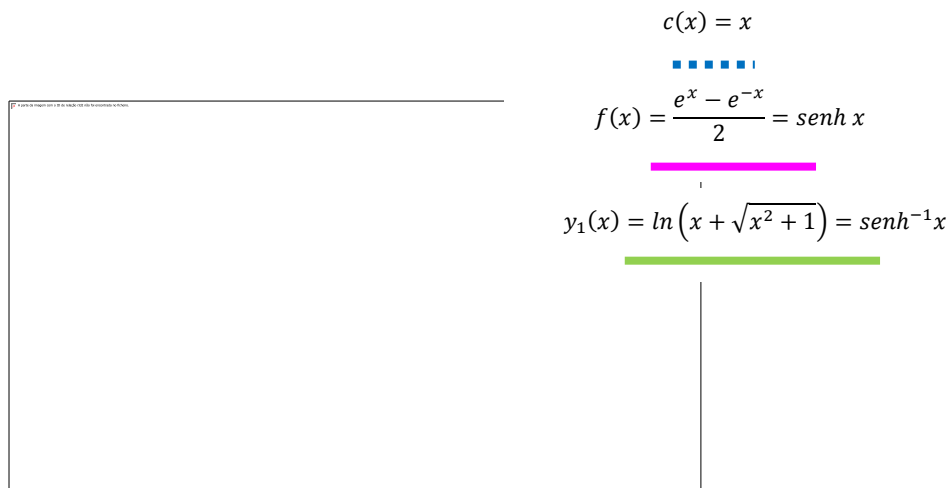


Figura 2 - Representação gráfica das funções $c(x) = x$, $f(x) = \sinh x$ e $y_1(x) = \sinh^{-1} x$

Proposição 8. A derivada da inversa do seno hiperbólico é dada por $(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in R$.

Demonstração. Derivando a inversa da função seno hiperbólico, temos:

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in R. \blacksquare$$

1.2. Cosseno hiperbólico

O **cosseno hiperbólico** é a função de domínio R definida da seguinte forma:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3}$$

Sendo $g(x) = \cosh x$, facilmente concluímos que g é uma função contínua em todo o seu domínio (R) por se tratar da soma e do quociente entre funções contínuas, nomeadamente a função exponencial e a função constante.

Proposição 9. O $\cosh x$ é uma função par.

Demonstração. Vejamos que $g(x) = g(-x), \forall x \in R$.

$$\text{Ora } g(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x).$$

Logo o $\cosh x$ é uma função par. ■

Proposição 10. O $\cosh x$ é uma função não injetiva.

Demonstração. Pela proposição 9, sabemos que g é uma função par, pelo que objetos simétricos têm a mesma imagem, não sendo a mesma injetiva. ■



Proposição 11. O $\cosh x$ é uma função limitada inferiormente, sendo o mínimo atingido na origem, tendo-se $\cosh 0 = 1$.

Demonstração. Começemos por encontrar a expressão da função derivada de g , ou seja,

$$g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (4)$$

Então $(\cosh x)' = \sinh x$ e por isso $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Como o \sinh é uma função estritamente crescente em todo o seu domínio e só se anula em $x = 0$, então g' é negativa em $x < 0$ e positiva para $x > 0$. Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		m	

O $\cosh x$ tem um mínimo na origem, tendo-se que $\cosh 0 = 1$. ■

Proposição 12. A função $g(x) = \cosh x$ nunca se anula.

Demonstração. A equação $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$ é uma equação impossível, logo concluímos que g nunca se anula. ■

Proposição 13. O $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$.

Demonstração. Temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{+\infty + 0}{2} = +\infty$. ■

Notemos que o mínimo da função $\cosh x$ é 1 e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$.

Tendo em conta que se trata de uma função contínua em todo o seu domínio, pelo Teorema de Bolzano, concluímos que o contradomínio de g é $[1, +\infty[$.

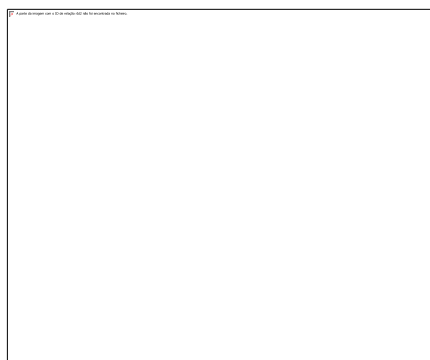
Proposição 14. O $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$.

Demonstração. Visto que g é uma função par e tendo em conta a proposição 13, sai de imediato que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$. ■

Proposição 15. A concavidade do gráfico da função g é sempre virada para cima.

Demonstração. Temos $g''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. A função g'' é positiva em $x \in \mathbb{R}$, sendo a concavidade do gráfico de g sempre virada para cima. ■

A representação gráfica da função $g(x) = \cosh x$ encontra-se a azul na figura que se segue.



$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Figura 3 - Representação gráfica da função $g(x) = \cosh x$

Notemos que $e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x + \sinh x$.

Temos também que:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Função inversa do cosseno hiperbólico

Como a função $\cosh x$ não é injetiva (c.f. proposição 10), vamos considerar, nesta secção, a restrição da mesma relativa ao intervalo $[0, +\infty[$.

Proposição 16. A função **inversa do cosseno hiperbólico** restringido ao intervalo $[0, +\infty[$ é dada por $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $\forall x \geq 1$.

Demonstração. Temos que:

$$x = \cosh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Leftrightarrow 2x = e^y + e^{-y} \Leftrightarrow e^y + \frac{1}{e^y} - 2x = 0 \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \vee e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Vejamus que $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Temos de ter $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$ e como estamos a restringir o estudo da inversa do cosseno hiperbólico ao intervalo $[0, +\infty[$, então $x = \cosh y \geq 1$.

No caso $x = 1, e^y = 1$.

Para $x > 1, e^y > 1$.

Como $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$, pois para $x > 1$, temos então $(x - 1)(x + 1) > (x - 1)(x - 1) \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 > (x - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} > x - 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$, então:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Leftrightarrow \cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \blacksquare$$

Observação. Por um raciocínio análogo, a inversa do cosseno hiperbólico restringido ao intervalo $]-\infty, 0]$ é dada por $\cosh^{-1}x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.

A função inversa do cosseno hiperbólico também pode ser representada por **arccosh** x .

A representação gráfica desta função encontra-se a verde na figura que se segue.

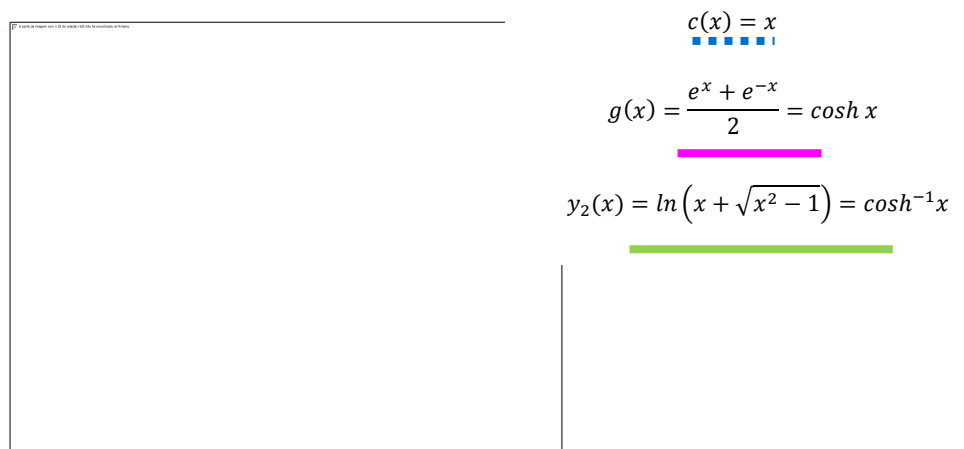


Figura 4 - Representação gráfica das funções $c(x) = x, g(x) = \cosh x$ em R_0^+ e $y_2(x) = \cosh^{-1}x$ para $x \geq 1$

1.3. Tangente hiperbólica

A **tangente hiperbólica** é a função de domínio R definida da seguinte forma:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (5)$$

Sendo $h(x) = \operatorname{tgh} x$, facilmente concluímos que h é uma função contínua em todo o seu domínio (R) por se tratar do quociente entre funções contínuas, nomeadamente do $\operatorname{senh} x$ e $\operatorname{cosh} x$, em que o denominador nunca se anula.

Proposição 17. A $\operatorname{tgh} x$ é uma função ímpar.

Demonstração. Vejamos que $h(-x) = -h(x), \forall x \in R$.

Tendo em conta que o $\operatorname{senh} x$ é uma função ímpar e o $\operatorname{cosh} x$ é par sai que:

$$h(-x) = \frac{\operatorname{senh}(-x)}{\operatorname{cosh}(-x)} = \frac{-\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x} = -\operatorname{tgh} x = -h(x).$$

Logo a $\operatorname{tgh} x$ é uma função ímpar. ■

Proposição 18. A derivada da função tangente hiperbólica é dada por:

$$h'(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 x}.$$

Demonstração. Temos que:

$$h'(x) = \frac{(\operatorname{senh} x)' \times \operatorname{cosh} x - \operatorname{senh} x \times (\operatorname{cosh} x)'}{\operatorname{cosh}^2 x} = \frac{\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{cosh}^2 x}.$$

Tendo em conta que $\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

Então $h'(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 x}$. ■

Corolário 18.1. A $\operatorname{tgh} x$ é uma função estritamente crescente em todo o seu domínio.

Demonstração. Pela proposição 18, temos que $h'(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 x}$.

Sendo h' uma função positiva em todo o seu domínio, concluímos que h é estritamente crescente. ■

Proposição 19. A $tgh x$ é uma função injetiva.

Demonstração. Pelo corolário 18.1, h é uma função estritamente crescente em todo o seu domínio, sendo, por isso, injetiva. ■

Proposição 20. A função $h(x) = tgh x$ só se anula em $x = 0$.

Demonstração. Temos $tgh 0 = 0$ e como h é uma função injetiva (c.f. proposição 19), a mesma só se anula em $x = 0$. ■

Proposição 21. O $\lim_{x \rightarrow +\infty} tgh x = 1$.

Demonstração. Quando $x \rightarrow +\infty$, $e^{2x} \rightarrow +\infty$ logo temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} tgh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1. \blacksquare$$

Notemos que de acordo com a proposição 21, podemos concluir que $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função tangente hiperbólica para $x \rightarrow +\infty$. Como pela proposição 17, a função é ímpar, então $y = -1$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função tangente hiperbólica, para $x \rightarrow -\infty$.

Proposição 22. A concavidade do gráfico da função h é virada para cima em $x \in R^-$ e virada para baixo em $x \in R^+$.

Demonstração. Temos $h''(x) = \frac{-2 \cosh x \sinh x}{\cosh^4 x} = \frac{-2 \sinh x}{\cosh^3 x}$ Assim $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

A função h'' é positiva em $x < 0$, pois o $\sinh x$ é negativo e o $\cosh x$ é positivo no intervalo considerado, e negativa em $x > 0$. Esquemáticamente temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	\cup	<i>p.i.</i>	\cap

O gráfico da função h tem a concavidade virada para cima no intervalo $]-\infty, 0]$ e virada para baixo para $[0, +\infty[$, apresentando um ponto de inflexão em $x = 0$. ■

A representação gráfica da função h encontra-se a azul na figura que se segue.

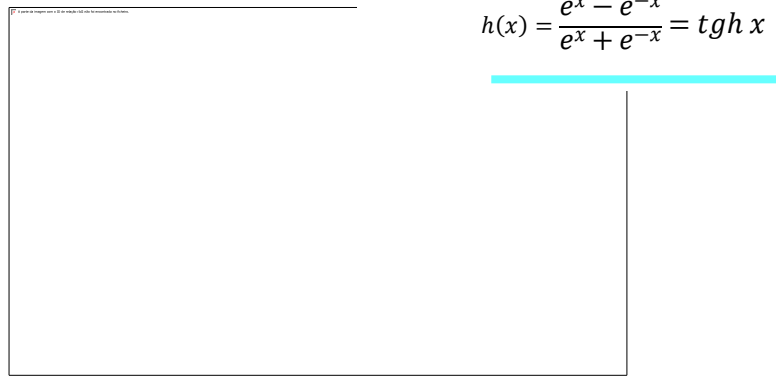


Figura 5 - Representação gráfica da função $h(x) = tgh x$

Tendo em conta que a função h é contínua e considerando o corolário 18.1. e a proposição 21, pelo Teorema de Bolzano, concluímos que o contradomínio de h é $] - 1, 1[$.

Para terminar o estudo da função tangente hiperbólica, temos ainda:

$$1 - tgh^2 x = \frac{1}{cosh^2 x}, \forall x \in R \text{ pois } 1 - tgh^2 x = 1 - \frac{senh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x}.$$

Função inversa da tangente hiperbólica

Proposição 23. A função inversa da tangente hiperbólica é dada por:

$$\tanh^{-1} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \forall x \in]-1, 1[.$$

Demonstração. Temos que $x = tgh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$.

Multiplicando ambos os membros por e^y , obtemos:

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow e^{2y}(1-x) = (1+x) \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \pm \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Notemos que e^y é uma função positiva em todo o seu domínio e, além disso, como $\frac{1+x}{1-x} > 0$, se

$$-1 < x < 1, \text{ então } e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Leftrightarrow y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \blacksquare$$

A função inversa da tangente hiperbólica também pode ser representada por ***arctgh x***.

A representação gráfica desta função encontra-se a verde na figura que se segue.

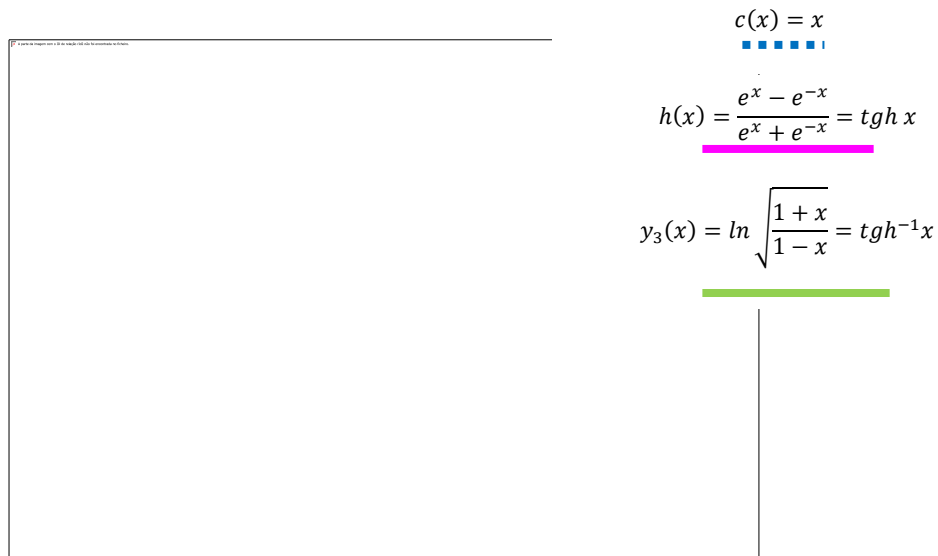


Figura 6 - Representação gráfica das funções $c(x) = x$, $h(x) = tgh x$ e $y_3(x) = tgh^{-1}x$ para $-1 < x < 1$

1.4. Secante hiperbólica

A **secante hiperbólica** é a função de domínio R definida da seguinte forma:

$$sech x = \frac{1}{cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \quad (6)$$

Sendo $j(x) = sech x$, facilmente concluímos que j é uma função contínua em todo o seu domínio (R) por se tratar do quociente entre funções contínuas, nomeadamente a função constante e a soma de funções exponenciais.

Proposição 24. A $sech x$ é uma função par.

Demonstração. Vejamos que $j(x) = j(-x)$, $\forall x \in R$.

Tendo em conta que o cosseno hiperbólico é uma função par (c.f. proposição 9), então

$$j(-x) = \frac{1}{cosh(-x)} = \frac{1}{cosh x} = j(x).$$

Logo a $sech x$ é uma função par. ■

Proposição 25. A $sech x$ é uma função não injetiva.

Demonstração. Pela proposição 24, sabemos que j é uma função par, pelo que objetos simétricos têm a mesma imagem, não sendo a mesma injetiva. ■

Proposição 26. A função $j(x) = \operatorname{sech} x$ nunca se anula.

Demonstração. A equação $\operatorname{sech} x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cosh x} = 0$ é uma equação impossível, logo concluímos que j nunca se anula. ■

Proposição 27. A função $j(x) = \operatorname{sech} x$ é sempre positiva.

Demonstração. Tendo em conta a proposição 26 e o facto da função secante hiperbólica ser o quociente entre duas funções positivas em R , ressalta de imediato que a secante hiperbólica é também positiva em R . ■

Proposição 28. A $\operatorname{sech} x$ é uma função limitada superiormente, sendo o máximo atingindo na origem, tendo-se $\operatorname{sech} 0 = 1$.



Demonstração. Começemos por encontrar a expressão da função derivada de j , ou seja:

$$j'(x) = -\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} = -\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \times \frac{1}{\cosh x} = -\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{sech} x. \quad (7)$$

Assim, e tendo em conta as proposições 20 e 26, temos:

$$j'(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{sech} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tgh} x = 0 \vee \operatorname{sech} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tgh} x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Como a função $\operatorname{sech} x$ é uma função sempre positiva e a $\operatorname{tgh} x$ é negativa em $x < 0$ e positiva em $x > 0$, então j' tem sinal contrário ao da $\operatorname{tgh} x$. Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$j'(x)$	$+$	0	$-$
$j(x)$		M	

A $\operatorname{sech} x$ tem um máximo na origem, considerando-se $\operatorname{sech} 0 = 1$. ■

Proposição 29. O $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech} x = 0$.

Demonstração. Tendo em conta a proposição 13, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{+\infty} = 0. \blacksquare$$

Notemos que o máximo da função $\operatorname{sech} x$ é 1 e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech} x = 0$.

Tendo em conta se trata de uma função contínua em todo o seu domínio, pelo Teorema de Bolzano, concluímos que o contradomínio de j é $]0,1]$.

Proposição 30. O $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sech} x = 0$.

Demonstração. Visto que j é uma função par e tendo em conta a proposição 29, ressalta de imediato que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sech} x = 0$. ■

Notemos que de acordo com as proposições 29 e 30, podemos concluir que o eixo das abcissas é uma assíntota horizontal do gráfico da função secante hiperbólica.

Proposição 31. A concavidade do gráfico da função j é virada para baixo em $x \in [-\ln(\sqrt{2} + 1), \ln(\sqrt{2} + 1)]$ e virada para cima em $x \in]-\infty, -\ln(\sqrt{2} + 1)[$ e em $x \in [\ln(\sqrt{2} + 1), +\infty[$.

Demonstração. Tendo em conta a proposição 18 e a expressão para a derivada da função j obtida na demonstração da proposição 28, temos:

$$\begin{aligned} j''(x) &= (-\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{sech} x)' = -\frac{1}{\cosh^2 x} \operatorname{sech} x - \operatorname{tgh} x (-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x) \\ &= \operatorname{sech} x \left(\operatorname{tgh}^2 x - \frac{1}{\cosh^2 x} \right) = \operatorname{sech} x \left(\frac{\cosh^2 x - 2}{\cosh^2 x} \right) = \operatorname{sech}^3 x (\cosh^2 x - 2). \end{aligned}$$

Sendo o cosseno hiperbólico uma função sempre positiva e usando a proposição 26 obtemos $j''(x) = 0 \Leftrightarrow \cosh x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm \cosh^{-1} \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm \ln(\sqrt{2} + 1)$.

A função j'' é negativa em $] -\ln(\sqrt{2} + 1), \ln(\sqrt{2} + 1)[$ e positiva em $] -\infty, -\ln(\sqrt{2} + 1)[$ e em $]\ln(\sqrt{2} + 1), +\infty[$. Esquemáticamente temos:

x	$-\infty$	$-\ln(\sqrt{2} + 1)$		$\ln(\sqrt{2} + 1)$	$+\infty$
$j''(x)$	+	0	-	0	+
$j(x)$	∪	<i>p.i.</i>	∩	<i>p.i.</i>	∪

O gráfico da função j tem a concavidade virada para cima no intervalo $]-\infty, -\ln(\sqrt{2} + 1)[$ e em $]\ln(\sqrt{2} + 1), +\infty[$ e virada para baixo em $]-\ln(\sqrt{2} + 1), \ln(\sqrt{2} + 1)[$, tendo dois pontos de inflexão em $x = -\ln(\sqrt{2} + 1)$ e em $x = \ln(\sqrt{2} + 1)$. ■

A representação gráfica da função j encontra-se a azul na figura que se segue.

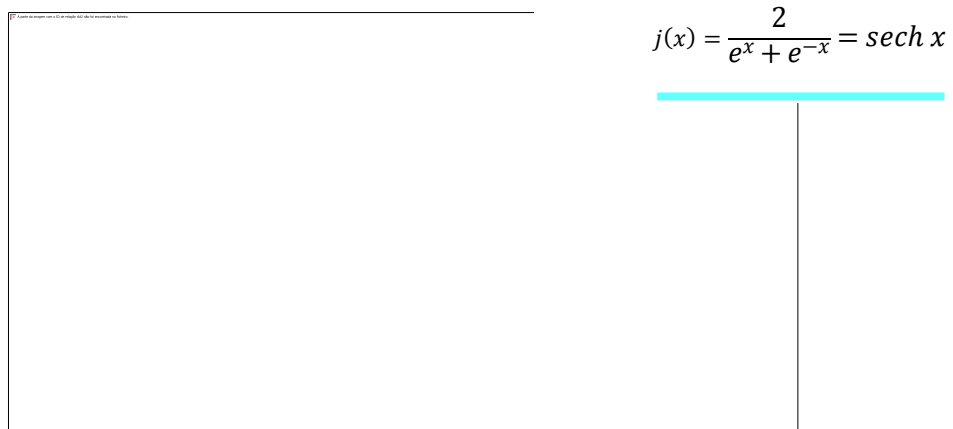


Figura 7 - Representação gráfica da função $j(x) = \text{sech } x$

Função inversa da secante hiperbólica

Como a função $\text{sech } x$ não é injetiva (c.f. proposição 25), vamos considerar, nesta secção, a restrição da mesma relativa ao intervalo $[0, +\infty[$.

Proposição 32. A função **inversa da secante hiperbólica** restringida ao intervalo $[0, +\infty[$ é dada por:

$$\text{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \forall x \in]0,1].$$

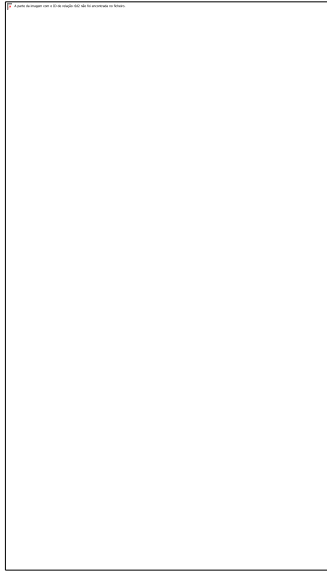
Demonstração. Temos que:

$$x = \text{sech } y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{sech } y} \Leftrightarrow \cosh y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right). \blacksquare$$

Observação. Por um raciocínio análogo, a inversa da secante hiperbólica restringida ao intervalo $]-\infty, 0]$ é dada por $\text{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

A função inversa da secante hiperbólica também pode ser representada por **arcsech** x .

Recorrendo ao software *Graph 4.4.2.*, a representação gráfica desta função é:



$$l(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1}x$$

Figura 8 - Representação gráfica da função $l(x) = \operatorname{sech}^{-1}x$ para $0 < x \leq 1$

1.5. Propriedades das funções hiperbólicas

A título de curiosidade, enumeramos algumas propriedades das funções hiperbólicas.

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $(\sinh x + \cosh x)^n = \sinh(nx) + \cosh(nx), \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$
- $\cosh x + \sinh x = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\sinh(-x) = -\sinh x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\cosh(-x) = \cosh x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{tgh}^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Atividade de Aplicação nº 1 – Exercícios

A. Designação: Funções hiperbólicas.

B. Objetivos:

- Aplicação da função exponencial.

C. Pré-requisitos:

- Estudo de uma função: domínio, contradomínio, zeros, injetividade, intervalos de monotonia e existência de extremos, paridade, assíntotas, inversa;

- Representação gráfica de uma função e da inversa de uma função;

- Comparação de funções: interseção de gráficos de funções;

- Propriedades da função exponencial;

- Teorema de Bolzano.

D. Conteúdos:

- Função exponencial;

- Funções hiperbólicas.

E. Destinatários: Alunos do 12.º.

F. Duração da atividade: 120 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Observações:

- A atividade pode ser desenvolvida como complemento curricular;
- A atividade é composta por uma lista de exercícios que envolvem a função exponencial.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considera a função $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 1.1. Mostra, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $] -1, 1[$. Sabendo que é único, calcula-o.
 - 1.2. Encontra a expressão da derivada da função f .
 - 1.3. Mostra que a função f é estritamente crescente no seu domínio.
 - 1.4. Indica o valor lógico da seguinte afirmação “a função f é par”.
 - 1.5. Estuda a função f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.
 - 1.6. Calcula o valor de x para o qual o gráfico da função tem um ponto de inflexão.
 - 1.7. Representa graficamente a função f .

A função f tem o nome de **seno hiperbólico** e representa-se por $f(x) = \mathit{senh} x$.

2. Considera a função $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 2.1. Estuda a função g quanto à existência de extremos.
 - 2.2. Representa graficamente as funções $a(x) = \frac{1}{2}e^x$ e $b(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. Representa graficamente a função $g(x) = a(x) + b(x)$.
 - 2.3. Mostra que $g'(x) = \mathit{senh} x$.
 - 2.4. A função g é injetiva? Justifica a tua resposta.
 - 2.5. Considera a função g definida em $[0, +\infty[$. Encontra a expressão que define a inversa da função de g no intervalo considerado.
 - 2.6. Encontra, caso exista(m), o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos das funções f e g .
 - 2.7. Determina o contradomínio de g .
 - 2.8. Mostra que o gráfico da função g não admite pontos de inflexão.

A função g tem o nome de **coseno hiperbólico** e representa-se por $g(x) = \mathit{cosh} x$.

3. Prova, usando as propriedades da função exponencial, que

$$\mathit{cosh}^2 x - \mathit{senh}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Seja $h(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

- 4.1. Procura uma expressão analítica para a função h , com base em exponenciais.
- 4.2. Indica o domínio da função h .
- 4.3. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estuda a função h quanto ao seu sinal.
- 4.4. Mostra que o gráfico da função h admite duas assíntotas horizontais.
- 4.5. Mostra que $h'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$.
- 4.6. Estuda a função h quanto à monotonia.
- 4.7. Verifica se o gráfico da função h admite pontos de inflexão.
- 4.8. Qual é o contradomínio da função h ? Justifica.
- 4.9. Representa graficamente a função h .
- 4.10. Considera a função h restringida ao intervalo $[0, +\infty[$. Mostra que a inversa da função h definida nesse intervalo é dada por:

$$h^{-1}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \forall x \in]-1, 1[.$$

- 4.11. Calcula $(h^{-1})'(x)$ para $x \in]-1, 1[$.

A função h tem o nome de **tangente hiperbólica** e representa-se por $h(x) = \mathbf{tgh} x$.

5. Seja $j(x) = \frac{1}{\cosh x}$.

- 5.1. Indica o domínio da função j .
- 5.2. Mostra que o eixo das abcissas é uma assíntota horizontal do gráfico da função j .
- 5.3. Considera a restrição da função j ao intervalo $]-\infty, 0]$. Caracteriza a sua inversa.
- 5.4. Indica o contradomínio da função j .
- 5.5. Representa graficamente a função j .

A função j tem o nome de **secante hiperbólica** e representa-se por $j(x) = \mathbf{sech} x$.

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE DE APLICAÇÃO Nº

1

1.1. A função f é contínua em R , pois trata-se da diferença e do quociente entre funções contínuas. Em particular, é contínua em $[-1,1]$.

Temos que $f(-1) = \frac{e^{-1}-e^1}{2} < 0$ e $f(1) = \frac{e^1-e^{-1}}{2} > 0$, pois $e > e^{-1}$.

Assim $f(-1) \times f(1) < 0$, e portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano,

$$\exists c \in]-1,1[: f(c) = 0.$$

Temos $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

1.2. $f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

1.3. A função derivada nunca se anula sendo positiva em todo o seu domínio. Assim, trata-se de uma função contínua, sendo estritamente crescente.

1.4. Como $-f(x) = f(-x)$, $\forall x \in R$, f é uma função ímpar, é falsa a afirmação dada.

1.5. Relativamente a assíntotas verticais, podemos afirmar que não existem pois f é uma função contínua de domínio R .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$, não existem assíntotas horizontais.

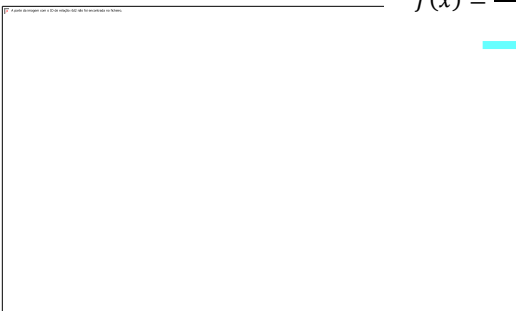
O gráfico da função f não possui assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

1.6. $x = 0$.

1.7. Usando os resultados obtidos nas alíneas anteriores, vamos construir num referencial Oxy , o gráfico da função assinalando:

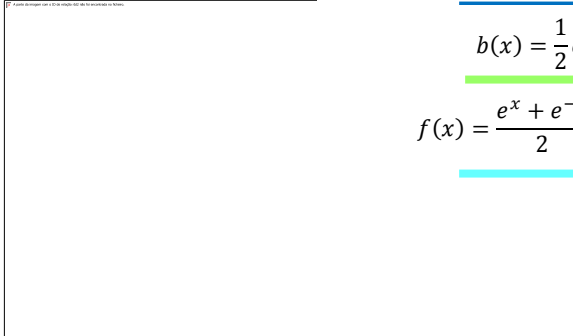
- Zero da função
- Extremo
- Ponto de inflexão
- Assíntotas

Tendo em conta o sentido das concavidades, a monotonia e a paridade da função terminamos o gráfico obtendo:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$


2.1. A função g tem um mínimo na origem, considerando-se $g(0) = 1$.

2.2.



$$a(x) = \frac{1}{2}e^x$$

$$b(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

2.4. A função g não é injetiva pois é par.

2.5. $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \forall x \geq 1$.

2.6. Os gráficos das funções f e g interseam-se quando:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow -e^{-x} = 0.$$

Logo os gráficos das funções f e g nunca se interseam.

2.7. O contradomínio da função g é $[1, +\infty[$.

4.1. $\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

4.2. $D_h = \mathbb{R}$.

4.3. Temos $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Tendo em conta os exercícios 1.1. e 1.3., temos que o seno hiperbólico é uma função negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$.

Tendo em conta o exercício 2.7., o cosseno hiperbólico é sempre uma função positiva.

Assim, para $x < 0$ a função h é negativa e para $x > 0$ é positiva.

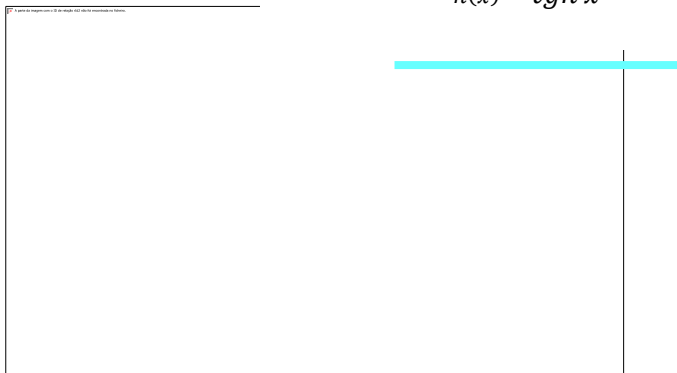
4.4. O gráfico da função h admite duas assíntotas horizontais, nomeadamente $y = 1$ e $y = -1$.

4.6. A função h é estritamente crescente em todo o seu domínio.

4.7. O gráfico da função h admite um ponto de inflexão para $x = 0$.

4.8. O contradomínio da função h é $]-1,1[$.

4.9.



$$\mathbf{4.11.} \quad (h^{-1})'(x) = \left(\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)' = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)'}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Calculemos:

$$\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)' = \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[\frac{2}{(1-x)^2} \right] = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Assim temos:

$$(h^{-1})'(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

5.1. $D_j = R.$

5.3. $j^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$

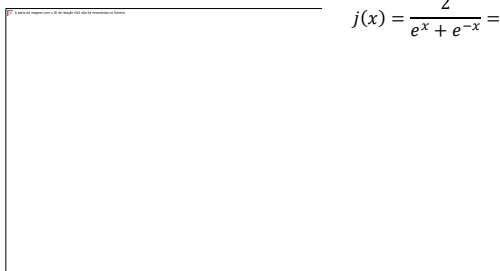
$$D_{j^{-1}} = \{x \in R: x \neq 0 \wedge 1 - x^2 \geq 0 \wedge \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} > 0\} = R \setminus \{0\} \cap [-1,1] \cap]0,1] =]0,1].$$

$$j^{-1}:]0,1] \rightarrow R$$

$$x \rightarrow j^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

5.4. O contradomínio da função j é $]0,1]$.

5.5.

$$j(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{sech} x$$


CAPÍTULO II

As **equações diferenciais** são um poderoso instrumento na engenharia, na física e na matemática, tendo aplicações em muitas outras áreas de conhecimento.

Tendo em conta que as **curvas** podem ser modeladas por equações diferenciais, iremos, neste capítulo, identificar e resolver a equação diferencial que conduz a cada tipo de curva estudada, fazendo o enquadramento histórico em que foi descoberta e evidenciar aspetos que usualmente não são explorados no ensino secundário. Será ainda elaborado um conjunto de atividades destinadas a alunos deste nível de ensino.

2.1. Catenária

Introdução

A catenária é a curva que um cabo fixo pelos seus dois extremos assume quando está apenas sujeito à força da gravidade (o seu próprio peso). Qualquer força aplicada a um ponto da catenária divide-se igualmente por toda a sua extensão, proporcionando-lhe uma maior resistência e sustentação de peso.

Galileu Galilei interessou-se pelo estudo desta curva e apresentou uma expressão para a definir, identificando-a como uma parábola. Em 1647, *Christiann Huygens* mostrou o seu desacordo com o exposto por Galileu, alegando não tratar-se de uma parábola, embora não conseguisse encontrar a tão desejada equação. Em 1669, a ideia proposta por Galileu é novamente rejeitada, desta vez por *Joachim Jungius*, embora o mesmo também não acrescentasse nada de novo ao até então descoberto. Maio de 1690 foi a data em que o problema foi (re)lançado à comunidade científica, desta vez por *Joahnn Bernoulli*, irmão de *Jakob Bernoulli*, no *Acta Editorium*¹.

Em 1691, os irmãos *Bernoulli* em simultâneo com *Gottfried Leibniz* e *Christiann Huygens* resolveram finalmente o problema, apresentando uma expressão analítica para a curva, tendo a mesma sido encontrada por diferentes processos e com recurso a conhecimentos matemáticos e físicos. Esta curva ficou conhecida por catenária (do latim *catena* que significa cadeia ou corrente) e representa a forma que um objeto flexível (preso pelas suas extremidades) descreve, ao ser submetido à força da gravidade.

¹ Revista científica alemã publicada exclusivamente em latim, entre 1682 e 1731 (num total de 50 volumes) que pretendia anunciar e resumir publicações notáveis da época, em várias áreas científicas, como medicina, matemática, direito, geografia e teologia.

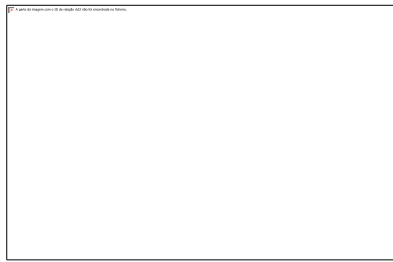


Figura 9 – Catenária

Esta curva ficou conhecida, principalmente, ao nível da construção arquitetónica, aparecendo quer sob a forma de catenária quer sob a forma de catenária invertida. A título de exemplo referimos:

- Pontes Pênsil – Datadas do século XIX, existem pontes suspensas por cabos, com a forma de catenárias, em vários locais do mundo, tendo sido a ponte Menai e Cowny as primeiras a surgir com este aspeto. Em Portugal destaca-se a Ponte 25 de Abril.



Figura 10 - Arco de uma catenária - Ponte 25 de Abril – Lisboa

- Casa Milá Gaudi – Situada em Barcelona, foi construída entre 1905 e 1907, sob a responsabilidade do arquiteto Antoni Gaudi, caracterizando-se pela sua estrutura irregular e pouco comum sem linhas retas.

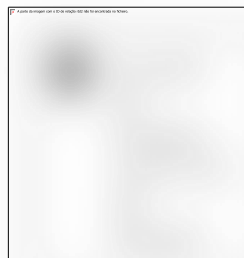


Figura 11 - Arco de catenária invertida - Casa Milá Gaudi – Barcelona

-

- Dulles International Airport – Situado em USA, foi construído em 1963, entre os condados de Fairfax e Loudoun, com um total de 45 Km². O nome que adquiriu foi uma homenagem ao antigo secretário de Estado, *John Foster Dulles*.

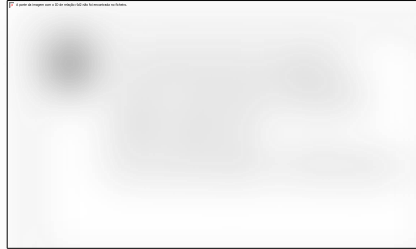


Figura 12 - Arco de uma catenária – Dulles International - USA

- Arco do Portal – Missouri – Trata-se de um arco com a forma de catenária invertida a 192 m acima do nível da água do mar (Rio Mississippi), construído em homenagem ao presidente *Thomas Jefferson*, em 1965.



Figura 13 - Arco de uma catenária invertida – Arco do Portal – Missouri

- Cúpula de muitas mesquitas que resultam da revolução da curva catenária invertida.
- Túneis de metropolitano e de ferroviários com a forma de um cilindro catenário.
- Iglus sob a forma de catenóide (sólido de revolução gerado pela catenária).
- Construções com curvas bidirecionadas onde os arcos da catenária, ao cruzarem-se, conferem maior estabilidade à construção, como acontecem em muitas estações ferroviárias.

Estudo da curva

Consideremos um cabo flexível, ou seja, a tensão que é exercida sobre o mesmo tem a direção da tangente, suspenso nos extremos A e B e sujeito apenas à ação do próprio peso, \vec{P} .

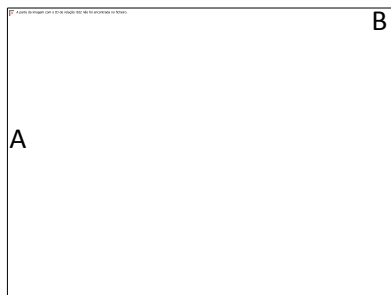


Figura 14 – Cabo flexível suspenso nos extremos A e B

Consideremos um referencial ortogonal do plano xOy de modo que a concavidade do cabo fique virada para cima e o mínimo seja na origem, O . Suponhamos que a curva admite uma parametrização da forma $(x, y(x))$. Sem perda de generalidade, vamos restringir o nosso estudo ao primeiro quadrante.

O cabo está sujeito a três forças, nomeadamente:

- À tensão, $\vec{T}(x)$, que atua tangencialmente num ponto arbitrário $P(x, y(x))$ do mesmo, formando um ângulo α com o eixo das abcissas. Assim $\vec{T}(x) = (T\cos\alpha, T\sin\alpha)$, onde T é o módulo da força.
- Ao seu peso, $\vec{P}(x) = (0, P^*)$, com $P^* < 0$, com direção vertical e no sentido de cima para baixo; sendo G a constante gravitacional e $s(x)$ o comprimento do arco definido pela origem e pelo ponto $P(x, y(x))$, temos $\vec{P}(x) = (0, -Gs(x))$. (8)
- À tensão exercida no ponto O do cabo, $\vec{T}(0) = (T_0, 0)$, com $T_0 < 0$, com direção horizontal e no sentido da direita para a esquerda.

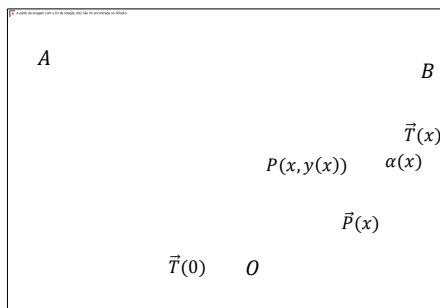


Figura 15 – Esquema das forças que atuam num cabo flexível suspenso nos extremos A e B

Assumindo que cada ponto do cabo tem a mesma massa, notemos que, quando o cabo está em repouso (suspenso e sem ruturas), há equilíbrio ² entre as forças que sobre o mesmo atuam, logo:

$$\vec{T}(x) + \vec{T}(0) + \vec{P}(x) = \vec{0}. \quad (9)$$

Proposição 33. Consideremos que a catenária admite uma parametrização da forma $(x, y(x))$ e $y(0) = 0$, então existe $k \in R^+$ tal que $\frac{dy}{dx} = \sinh(kx)$.

Demonstração. Devido ao equilíbrio do cabo, ao decompor as forças nas suas componentes verticais e horizontais, obtemos de (9):

$$\begin{aligned} \vec{T}(x) + \vec{T}(0) + \vec{P}(x) = \vec{0} &\Leftrightarrow (T \cos \alpha, T \sin \alpha) + (T_0, 0) + (0, -Gs(x)) = \\ (0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} T \cos \alpha + T_0 = 0 \\ T \sin \alpha - Gs(x) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

As forças que atuam no cabo, $\vec{T}(x)$, $\vec{T}(0)$ e $\vec{P}(x)$, podem ser esquematizadas através de um triângulo retângulo, como se ilustra na figura seguinte:

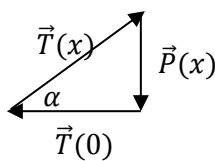


Figura 16 – Esquema das forças que atuam no cabo

Como o cabo é flexível, então $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$. (11)

De (8) e (11) obtemos $\frac{\|P(x)\|}{\|\vec{T}(0)\|} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{Gs(x)}{\|\vec{T}(0)\|} = \frac{dy}{dx}$, sendo G e $\|\vec{T}(0)\|$ constantes.

Sendo $k = \frac{G}{\|\vec{T}(0)\|} \in R^+$, podemos então escrever $\frac{dy}{dx} = ks(x)$. (12)

² O sistema está em equilíbrio quando a resultante das forças que sobre ele atuam é nula.

Atendendo a que $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} (t) dt$, então $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Assim, derivando ambos os membros de (12), obtemos $\frac{d^2y}{dx^2} = k \frac{ds}{dx}$.

Desta forma, obtém-se que $\frac{d^2y}{dx^2} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. (13)

Obtemos assim uma equação diferencial não linear de 2ª ordem.

Consideremos a mudança de variável $\frac{dy}{dx} = p$.

Então por (13) temos $\frac{d^2y}{dx^2} = k \sqrt{1 + p^2}$.

Logo $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = k \sqrt{1 + p^2}$.

Obtemos, equivalentemente, uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis, que

pode ser reescrita da seguinte maneira $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k dx \Leftrightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = kx + c$.

Tendo em conta a derivada da inversa do seno hiperbólico, (cf proposições 7 e 8), obtém-se que:

$\sinh^{-1} p = kx + c \Leftrightarrow p = \sinh(kx + c)$. (14)

Considerando a condição inicial $p(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$, obtém-se que $c = 0$.

Assim, y satisfaz $\frac{dy}{dx} = \sinh(kx)$. ■ (15)

Corolário 33.1. Consideremos que a catenária admite uma parametrização da forma $(x, y(x))$ e

$y(0) = 0$. Então $\exists k \in \mathbb{R}^+ : y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela proposição 33 temos $\frac{dy}{dx} = \sinh(kx) \Leftrightarrow y(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} + c_1$.

Por hipótese $y(0) = 0$, logo $c_1 = -\frac{1}{k}$. Assim $y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}, \forall x \in D_y$. ■

A expressão geral que define a catenária envolve um parâmetro k . Vejamos alguns exemplos de gráficos deste tipo de funções, concretizando o valor de k que, como vimos, está relacionado com as propriedades físicas do cabo e que influencia o valor da tensão $\vec{T}(0)$.

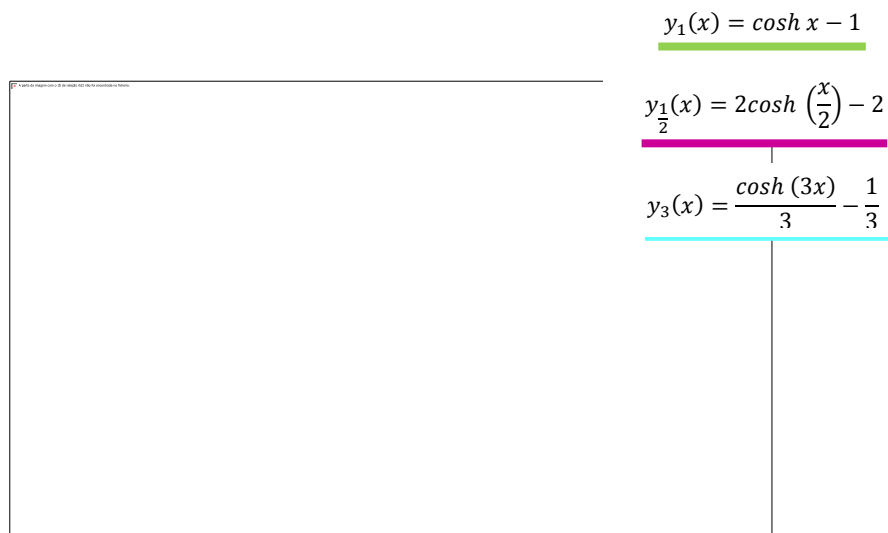


Figura 17 – Gráficos de funções da forma $y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}$

Observemos que à medida que k aumenta, a abertura da concavidade diminui.

Propriedades da curva

Consideremos a catenária com a parametrização $(x, y(x)) = \left(x, \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}\right)$, com $k = \frac{G}{\|\vec{r}(0)\|}$, $x \in [a, b]$.

Proposição 34. O comprimento do arco da catenária cuja origem é um ponto da reta $x = a$ e a extremidade um ponto que pertence à reta $x = b$ é dado por $S = \frac{(\sinh(kb) - \sinh(ka))}{k}$.

Demonstração. Temos de (15) que $\frac{dy}{dx} = \sinh(kx)$, logo:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2(kx)} \, dx = \int_a^b \sqrt{\cosh^2(kx)} \, dx = \int_a^b \cosh(kx) \, dx = \frac{1}{k} [\sinh(kx)]_a^b$$

$$= \frac{(\sinh(kb) - \sinh(ka))}{k}. \blacksquare$$

Exemplo. Consideremos a catenária de equação $y_1(x) = \cosh x - 1$. O comprimento do arco da catenária cujos extremos são respetivamente os pontos $A(2, \cosh 2 - 1)$ e $B(4, \cosh 4 - 1)$ é $S = \sinh 4 - \sinh 2$.

Proposição 35. A área delimitada pela catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas da equação

$$x = 0 \text{ e } x = a \text{ é dada por } A = \frac{\sinh(ka)}{k^2} - \frac{a}{k}.$$

Demonstração. Temos que $y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}$. A área delimitada pela catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equação $x = 0$ e $x = a$ é dada por:

$$A = \int_0^a \left(\frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k} \right) dx = \frac{1}{k^2} [\sinh(kx)]_0^a - \left[\frac{x}{k} \right]_0^a = \frac{\sinh(ka)}{k^2} - \frac{a}{k}. \blacksquare$$

Exemplo. Consideremos a catenária de equação $y_2(x) = \frac{\cosh(2x)}{2} - \frac{1}{2}$.

A área delimitada por esta catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equação $x = 0$ e

$$x = 1 \text{ é } A = \frac{\sinh(2 \times 1)}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sinh 2 - 2}{4}.$$

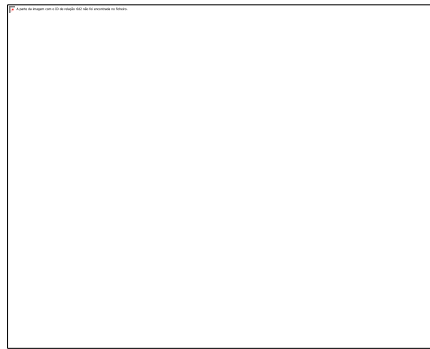


Figura 18 – Região delimitada por uma catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equação $x = 0$ e $x = 1$

Proposição 36. O raio de curvatura da catenária é $R_c(x) = \frac{\cosh^2(kx)}{k}$.

Demonstração. O raio de curvatura de uma curva é dada por $R_c(x) = \left| \frac{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}{y''(x)} \right|$.

Temos $y(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}$, logo $y'(x) = \sinh(kx)$ e $y''(x) = k \cosh(kx)$.

$$\text{Assim } R_c(x) = \left| \frac{[1+\sinh^2(kx)]^{\frac{3}{2}}}{k \cosh(kx)} \right| = \left| \frac{(\cosh^2(kx))^{\frac{3}{2}}}{k \cosh(kx)} \right| = \frac{\cosh^2(kx)}{k}. \blacksquare$$

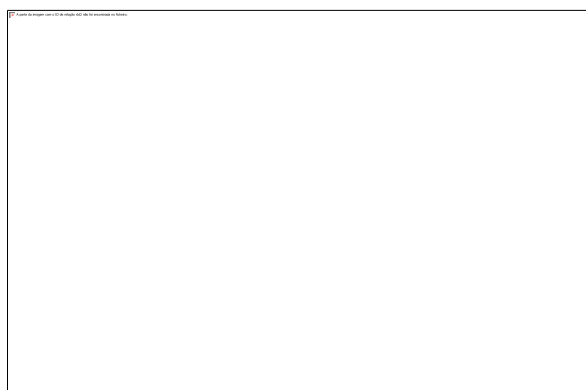
Exemplo. Consideremos a catenária de equação $y_3(x) = \frac{\cosh(3x)}{3} - \frac{1}{3}$. O seu raio de curvatura é $R_c(x) = \frac{\cosh^2(3x)}{3}$.

Notemos que, se no nosso estudo, o mínimo do cabo não for a origem, a expressão obtida para definir a catenária é dada por $h_k(x) = \frac{\cosh(kx+d_k)}{k} + c_k$, com d_k e $c_k \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}^+$ pois de acordo com (14) e usando a notação d_k , no lugar de c , obtemos :

$$p = \sinh(kx + d_k) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh(kx + d_k) \Leftrightarrow h_k(x) = \frac{\cosh(kx+d_k)}{k} + c_k. \quad (16)$$

Os parâmetros k , d_k e c_k calculam-se a partir das condições iniciais do problema.

Observemos que o gráfico da catenária, cuja expressão geral obtivemos em (16), obtém-se a partir do gráfico da função $\frac{\cosh(kx)}{k}$ segundo uma translação horizontal de $x - d_k$ e uma translação vertical de $y + c_k$. O parâmetro k , como já referimos anteriormente, influencia a abertura da concavidade da catenária. Vejamos alguns exemplos.

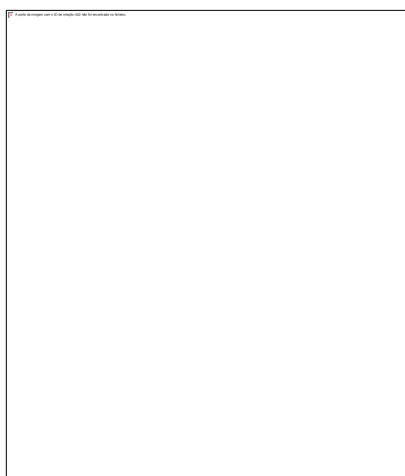


$$l_1(x) = \cosh x$$

$$l_2(x) = \cosh(x - 1)$$

$$l_3(x) = \cosh(x - 2)$$

Figura 19 – Translações horizontais da função $\cosh x$

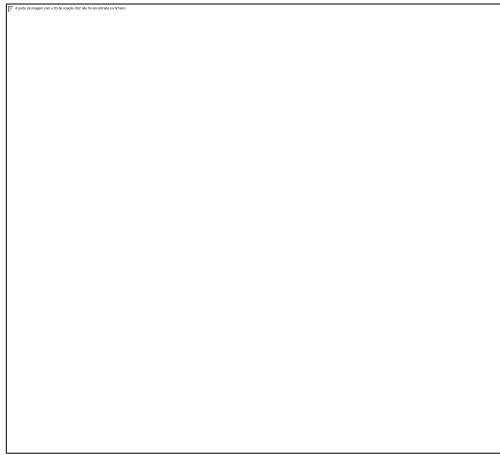


$$m_1(x) = \cosh x$$

$$m_2(x) = \cosh x + 1$$

$$m_3(x) = \cosh x + 2$$

Figura 20 - Translações verticais da função $\cosh x$



$$o_1(x) = \cosh x$$

$$o_2(x) = \cosh(x - 1) + 1$$

$$o_3(x) = \cosh(x - 2) + 2$$

Figura 21 – Composição de translações verticais e horizontais da função $\cosh x$

Nas propriedades seguintes, iremos utilizar a expressão obtida em (16).



Proposição 37. Consideremos uma catenária que admite uma parametrização da forma $(x, y(x))$

sendo $h_k(x) = \frac{\cosh(kx + d_k)}{k} + c_k$. Então, o mínimo da catenária é $\frac{1}{k} + c_k$.

Demonstração. Temos $h'_k(x) = \sinh(kx + d_k)$. Assim $h'_k(x) = 0 \Leftrightarrow kx + d_k = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d_k}{k}$.

Como o \sinh é uma função estritamente crescente em todo o seu domínio, então h'_k é negativa em $x < -\frac{d_k}{k}$ e positiva para $x > -\frac{d_k}{k}$.

Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	$-\frac{d_k}{k}$	$+\infty$
$h'_k(x)$	-	0	+
$h_k(x)$		m	

Deste modo, h_k tem um mínimo em $x = -\frac{d_k}{k}$, tendo-se $h_k\left(-\frac{d_k}{k}\right) = \frac{\cosh\left(k\left(-\frac{d_k}{k}\right) + d_k\right)}{k} + c_k = \frac{1}{k} +$

c_k . ■

Consideremos agora a catenária de equação $h_k(x) = \frac{\cosh(kx+d_k)}{k} + c_k$, definida no intervalo $[x_0, x_1]$. Vejamos como se relacionam os parâmetros c_k e d_k com os extremos da catenária $(x_0, h_k(x_0))$ e $(x_1, h_k(x_1))$, ou seja, com a altura em que se considera as extremidades do cabo.

Temos dois casos possíveis:

1.º caso: Os extremos da catenária estão à mesma altura, ou seja, $h_k(x_0) = h_k(x_1)$.

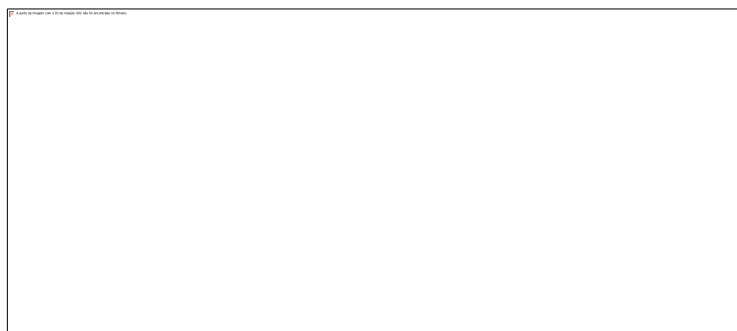


Figura 22 – Catenária com extremos à mesma altura

Sem perda de generalidade, suponhamos que $h_k(x_0) = h_k(x_1) = 0$. Assim temos:

$$\text{Como } h_k(x_0) = 0, \text{ então } \frac{\cosh(kx_0+d_k)}{k} + c_k = 0 \Leftrightarrow c_k = -\frac{\cosh(kx_0+d_k)}{k}. \quad (17)$$

$$\text{Assim, sendo } h_k(x_0) = h_k(x_1), \text{ sai } \frac{\cosh(kx_0+d_k)}{k} + c_k = \frac{\cosh(kx_1+d_k)}{k} + c_k$$

$$\Leftrightarrow \cosh(kx_0 + d_k) = \cosh(kx_1 + d_k) \Leftrightarrow kx_0 + d_k = kx_1 + d_k \vee kx_0 + d_k = -kx_1 - d_k.$$

Tendo em conta que o cosseno hiperbólico é uma função par (c.f. proposição 9), então:

$$k(x_0 - x_1) = 0 \vee d_k = -\frac{k(x_1+x_0)}{2}.$$

$$\text{Como } k \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x_0 \neq x_1 \text{ então } d_k = -\frac{k(x_1+x_0)}{2}. \quad (18)$$

Substituindo (18) em (17), obtemos:

$$c_k = -\frac{\cosh\left(kx_0 - \frac{k(x_1+x_0)}{2}\right)}{k} = -\frac{\cosh\left(\frac{k(x_0-x_1)}{2}\right)}{k}. \quad (19)$$

Neste caso, a expressão geral da catenária é dada por:

$$h_k(x) = \frac{\cosh\left(kx - \frac{k(x_1 + x_0)}{2}\right)}{k} - \frac{\cosh\left(\frac{k(x_0 - x_1)}{2}\right)}{k}$$

Tendo em conta (19) e a proposição 37, o mínimo de uma catenária, definida no intervalo $[x_0, x_1]$, com extremos à mesma altura é dado por:

$$\frac{1 - \cosh\left(\frac{k(x_0 - x_1)}{2}\right)}{k},$$

e é atingido em $x = -\frac{dk}{k} = -\frac{-k(x_1 + x_0)}{2} = \frac{x_1 + x_0}{2}$ que é o ponto médio do intervalo.

Exemplo. Consideremos uma catenária com extremos à mesma altura, nos pontos de abscissa $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. A expressão geral da catenária é $h_1(x) = \cosh\left(x - \frac{1}{2}\right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$ e o mínimo é $1 - \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1276$.



Figura 23 - Catenária com extremos à mesma altura em $[0,1]$

O aumento do valor do parâmetro k conduz à diminuição da ordenada do mínimo da catenária, como podemos observar na figura seguinte. Dada a extensibilidade da expressão algébrica das funções envolvidas, na legenda da figura seguinte apenas irá aparecer o valor atribuído ao parâmetro k .



Figura 24 – Diferentes catenárias com extremos à mesma altura

2.º caso: Os extremos da catenária não estão à mesma altura, ou seja, $h_k(x_0) \neq h_k(x_1)$.



Figura 25 – Catenária com extremos que não estão à mesma altura

Sem perda de generalidade, suponhamos que $(x_0, h_k(x_0)) = (0, 0)$, ou seja, $x = 0$, $x_0 < x_1$ e $h_k(x_0) < h_k(x_1)$.

$$\text{Como } h_k(x_0) = 0, \text{ então } \frac{\cosh(0+d_k)}{k} + c_k = 0 \Leftrightarrow c_k = -\frac{\cosh(d_k)}{k}. \quad (20)$$

Além disso, temos:

$$\frac{\cosh(kx_1 + d_k)}{k} + c_k = h_k(x_1) \Leftrightarrow \frac{\cosh(kx_1 + d_k)}{k} - \frac{\cosh(d_k)}{k} = h_k(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cosh(kx_1 + d_k) - \cosh(d_k)}{k} = h_k(x_1) \Leftrightarrow \frac{e^{kx_1+d_k} + e^{-kx_1-d_k} - (e^{d_k} + e^{-d_k})}{2k} = h_k(x_1)$$

$$\Leftrightarrow e^{d_k}(e^{kx_1} - 1) + e^{-d_k}(e^{-kx_1} - 1) - 2kh_k(x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2d_k}(e^{kx_1} - 1) - 2kh_k(x_1)e^{d_k} + (e^{-kx_1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{d_k} = \frac{2kh_k(x_1) \pm \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)}$$

$$\Leftrightarrow d_k = \ln\left(\frac{2kh_k(x_1) \pm \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)}\right).$$

Como:

$$\frac{2kh_k(x_1) - \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} < 0$$

obtém-se que:

$$d_k = \ln \left(\frac{2kh_k(x_1) + \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} \right).$$

Deste modo, por (20), temos:

$$c_k = - \frac{\cosh \left(\ln \left(\frac{2kh_k(x_1) + \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} \right) \right)}{k}$$

Neste caso, a expressão geral da catenária é dada por:

$$h_k(x) = \frac{\cosh \left(kx + \ln \left(\frac{2kh_k(x_1) + \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} \right) \right)}{k} - \frac{\cosh \left(\ln \left(\frac{2kh_k(x_1) + \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} \right) \right)}{k}$$

tendo em conta (20) e a proposição 37, o mínimo de uma catenária com extremos a alturas diferentes é:

$$\frac{1 - \cosh \left(\ln \left(\frac{2kh_k(x_1) + \sqrt{(-2kh_k(x_1))^2 - 4(e^{kx_1} - 1)(e^{-kx_1} - 1)}}{2(e^{kx_1} - 1)} \right) \right)}{k}.$$

Exemplo. Consideremos a catenária com extremos a diferentes alturas, nos pontos de abcissa $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, $k = 5$, $h_5(x_0) = 0$ e $h_5(x_1) = 2$.

A expressão geral da catenária é:

$$h_5(x) = \frac{\cosh\left(5x + \ln\left(\frac{20 + \sqrt{400 - 4(e^5 - 1)(e^{-5} - 1)}}{2(e^5 - 1)}\right)\right)}{5} - \frac{\cosh\left(\ln\left(\frac{20 + \sqrt{400 - 4(e^5 - 1)(e^{-5} - 1)}}{2(e^5 - 1)}\right)\right)}{5} \text{ e o m\u00ednimo \u00e9}$$

$$\frac{1 - \cosh\left(\ln\left(\frac{20 + \sqrt{400 - 4(e^5 - 1)(e^{-5} - 1)}}{2(e^5 - 1)}\right)\right)}{5}.$$

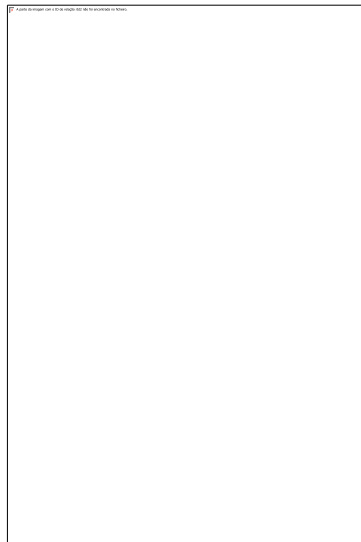


Figura 26 - Caten\u00e1ria com extremos a diferentes alturas

Mantendo fixos os extremos da caten\u00e1ria, em x_0 e em x_1 mas a diferentes alturas, o aumento do valor do par\u00e2metro k conduz ao aumento da abcissa do m\u00ednimo da caten\u00e1ria, como ilustra a figura seguinte.

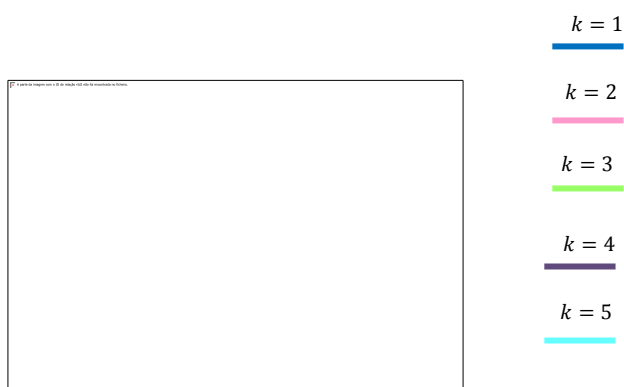


Figura 27 – Diferentes caten\u00e1rias com extremos fixos a diferentes alturas

Observando os gr\u00e1ficos obtidos pelo software *Graph 4.4.2*, podemos observar que, mantendo fixo o extremo esquerdo da caten\u00e1ria, x_0 , e o valor do par\u00e2metro k , o aumento da ordenada em x_1

conduz a uma maior abertura da concavidade da curva e, conseqüentemente, à diminuição da abscissa do mínimo da mesma, como ilustra a figura seguinte.

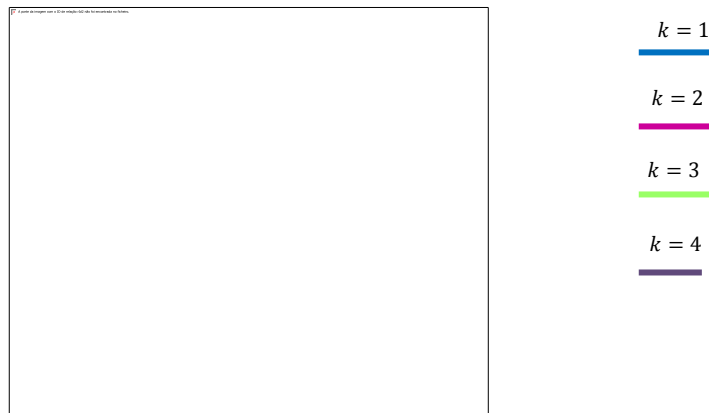


Figura 28 – Diferentes catenárias com o extremo esquerdo fixo

Vejamos outras propriedades ao compararmos duas catenárias distintas mas definidas num mesmo intervalo.

Consideremos duas catenárias distintas que admitem parametrizações da forma $(x, h_{k_1}(x))$ e $(x, h_{k_2}(x))$, respetivamente, com k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}^+$. Por abuso de linguagem, iremos utilizar a notação $h_{k_i}(x)$ para $i \in \{1, 2\}$.

Proposição 38. Sejam $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ duas catenárias distintas, ambas definidas em $[a, b]$, com $a < b$ e tais que $h_{k_1}(a) = h_{k_2}(a)$ e $h_{k_1}(b) = h_{k_2}(b)$. Então $\exists \varepsilon \in]a, b[: h'_{k_1}(\varepsilon) = h'_{k_2}(\varepsilon)$.

Demonstração. Consideremos duas catenárias distintas, $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ nas condições referidas.

Sendo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = h_{k_1}(x) - h_{k_2}(x)$, ambas as funções, h_{k_1} e h_{k_2} são de classe C^1 , logo f também de classe C^1 .

(21)

Como $h_{k_1}(a) = h_{k_2}(a)$, então $f(a) = h_{k_1}(a) - h_{k_2}(a) = 0$ e, analogamente, $f(b) = 0$.

Assim, sendo f de classe C^1 e tal que $f(a) = f(b)$, pelo Teorema de Rolle, $\exists \varepsilon \in]a, b[: f'(\varepsilon) = 0$

$\Leftrightarrow h'_{k_1}(\varepsilon) - h'_{k_2}(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow h'_{k_1}(\varepsilon) = h'_{k_2}(\varepsilon)$ ■

Corolário 38.1. Nas condições da proposição anterior, existe um único $\varepsilon \in]a, b[$ tal que

$$h'_{k_1}(\varepsilon) = h'_{k_2}(\varepsilon), \text{ dado por } \varepsilon = \frac{d_{k_2} - d_{k_1}}{k_1 - k_2}.$$

Demonstração. O $\sinh x$ é uma função injetiva (c.f. proposição 2), logo:

$$k_1\varepsilon + d_{k_1} = k_2\varepsilon + d_{k_2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{d_{k_2} - d_{k_1}}{k_1 - k_2}.$$

Deste modo, $\exists \varepsilon \in]a, b[: y'_{k_1}(\varepsilon) = y'_{k_2}(\varepsilon)$, sendo $\varepsilon = \frac{d_{k_2} - d_{k_1}}{k_1 - k_2}$.

Estando provada a existência de ε , falta garantir a unicidade do mesmo.

Suponhamos que existem ε e $\varepsilon^* \in]a, b[$, tais que $h'_{k_1}(\varepsilon) = h'_{k_2}(\varepsilon)$ e $h'_{k_1}(\varepsilon^*) = h'_{k_2}(\varepsilon^*)$.

$$\text{Assim } \sinh(k_1\varepsilon + d_{k_1}) = \sinh(k_2\varepsilon + d_{k_2}) \text{ e } \sinh(k_1\varepsilon^* + d_{k_1}) = \sinh(k_2\varepsilon^* + d_{k_2}). \quad (22)$$

Novamente pelo facto do $\sinh x$ ser uma função injetiva (c.f. proposição 2), por (22), obtemos:

$$k_1\varepsilon + d_{k_1} = k_2\varepsilon + d_{k_2} \text{ e } k_1\varepsilon^* + d_{k_1} = k_2\varepsilon^* + d_{k_2}.$$

Logo, $d_{k_2} = (k_1 - k_2)\varepsilon + d_{k_1}$ e portanto $k_1\varepsilon^* + d_{k_1} = k_2\varepsilon^* + (k_1 - k_2)\varepsilon + d_{k_1}$

$$\Leftrightarrow (k_1 - k_2)\varepsilon^* - (k_1 - k_2)\varepsilon = 0 \Leftrightarrow (k_1 - k_2)(\varepsilon - \varepsilon^*) = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \vee \varepsilon = \varepsilon^*.$$

Como $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ são duas catenárias distintas, $k_1 \neq k_2$ logo $\varepsilon = \varepsilon^*$. ■

Vamos agora considerar duas catenárias, definidas no mesmo intervalo, cujos extremos podem não coincidir.

Proposição 39. Sejam $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ duas catenárias distintas, ambas definidas em $[\alpha, \beta]$, com $\alpha < \beta$, então os gráficos de $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ não se interseam em mais do que dois pontos.

Demonstração. Consideremos duas catenárias distintas, $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ tais que:

$$h_{k_1}(x) = \frac{\cosh(k_1x + d_{k_1})}{k_1} + c_{k_1} \text{ e } h_{k_2}(x) = \frac{\cosh(k_2x + d_{k_2})}{k_2} + c_{k_2}, \text{ com } k_1 \neq k_2.$$

Suponhamos, por absurdo, que $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$ têm três pontos comuns cujas abcissas são a, b e d e, sem perda de generalidade, consideramos $a < b < d$. Então

$$h_{k_1}(a) = h_{k_2}(a), h_{k_1}(b) = h_{k_2}(b) \text{ e } h_{k_1}(d) = h_{k_2}(d).$$

Como $h_{k_1}(a) = h_{k_2}(a)$ e $h_{k_1}(b) = h_{k_2}(b)$, então pela proposição 38, existe um único $\varepsilon \in]a, b[$: $h'_{k_1}(\varepsilon) = h'_{k_2}(\varepsilon)$.

Analogamente, como $h_{k_1}(b) = h_{k_2}(b)$ e $h_{k_1}(d) = h_{k_2}(d)$, então existe um único $\varepsilon^* \in]b, d[$: $h'_{k_1}(\varepsilon^*) = h'_{k_2}(\varepsilon^*)$.

Assim, existem ε e ε^* no intervalo $]a, d[$, com $\varepsilon \neq \varepsilon^*$ tais que $h'_{k_1}(x) = h'_{k_2}(x)$. Assim e de acordo com o corolário 38.1, $\varepsilon = \varepsilon^*$, o que é absurdo. ■

Assim, duas catenárias distintas ou nunca se intersectam ou intersectam-se num ponto ou intersectam-se em dois pontos. As figuras seguintes exemplificam cada uma das possíveis situações.

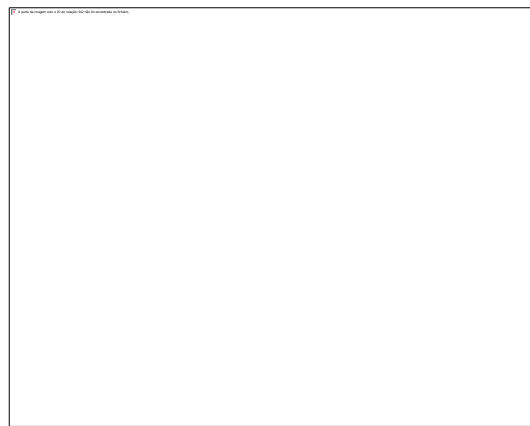


Figura 29 - Interseção de duas catenárias em dois pontos

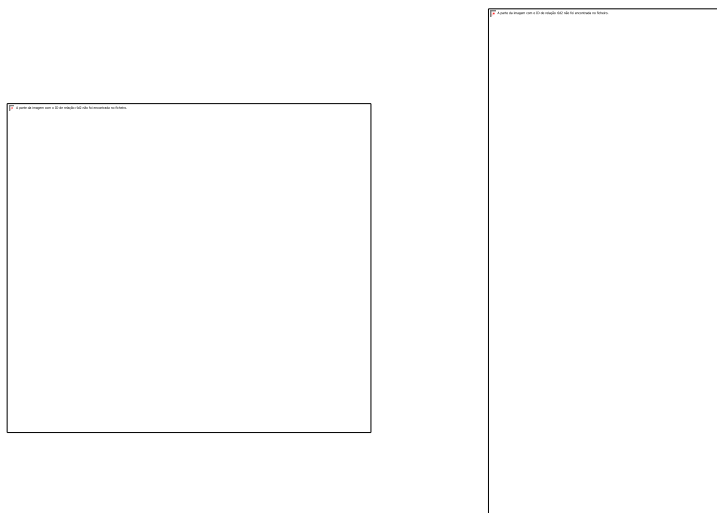


Figura 30 - Interseção de duas catenárias num ponto

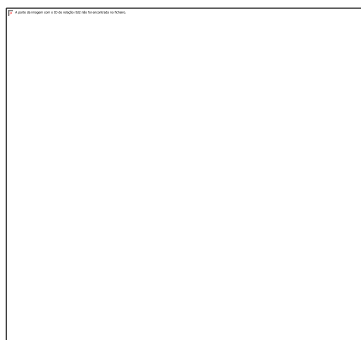


Figura 31 - Interseção vazia de duas catenárias

Como consequência da proposição 39, duas catenárias distintas, $h_{k_1}(x)$ e $h_{k_2}(x)$, ambas definidas em $]a, b[$, com $a < b$ e com os extremos em a e em b em comum, nunca se interseitam nesse mesmo intervalo, o que significa que o gráfico de uma está sempre abaixo do gráfico da outra.

Esta propriedade é ilustrada na figura 27.

Terminamos este capítulo com o sólido obtido pela rotação de uma catenária em torno do eixo das abcissas, ou seja, um catenóide.

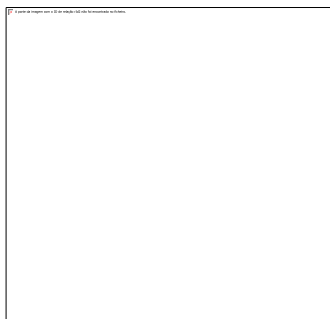


Figura 32 – Catenóide

Atividade de Aplicação n.º 2

A. Designação: Brincando com a catenária.

B. Objetivos:

- Análise de gráficos;
- Estudo do comportamento de uma função;
- Esboço de gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.

C. Pré-requisitos:

- Estudo de uma função: domínio, contradomínio, intervalos de monotonia e existência de extremos, continuidade e injetividade;
- Representação gráfica de uma função;
- Expressão geral de uma função quadrática;
- Vértice de uma função quadrática;
- Função exponencial.

D. Conteúdos:

- Função cosseno hiperbólico;
- Transformações da forma $y = f(x + a) + b$, com $a, b \in R$.

E. Destinatários: Alunos do 12.º.

F. Duração da atividade: 120 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Considera a função $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ definida por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Esta função é conhecida por **coseno hiperbólico**, pode também representar-se por $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e foi muito utilizada nos séculos XVI e XVII.

A função f tem a seguinte representação gráfica:

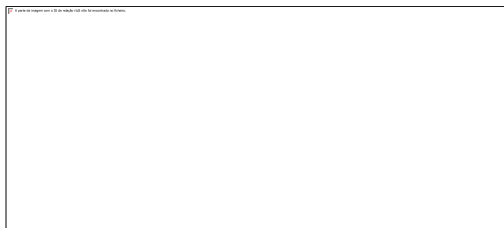


Figura 1 - Representação gráfica da função $f(x) = \cosh x$

1. Considera a função $g(x) = \frac{\cosh(kx)}{k}$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

1.1. Escreve uma expressão analítica para g , com base em exponenciais.

1.2. Recorrendo às potencialidades da tua calculadora gráfica, atribui diferentes valores a k e esboça os gráficos das funções obtidas.

1.3. Que influência tem a variação do parâmetro k na representação gráfica da função g ?

1.4. Indica as coordenadas do vértice da catenária que representa graficamente a função g e explica de que maneira a variação do parâmetro k pode influenciar as coordenadas deste mesmo vértice.

2. Considera a função $h(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k}$, com $k \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$.

2.1. Escreve uma expressão analítica para h , com base em exponenciais.

2.2. Recorrendo às potencialidades da tua calculadora gráfica, fixa o valor de k e atribui diferentes valores a a , esboçando os gráficos das funções obtidas.

2.3. Que influência tem a variação do parâmetro a , no gráfico da função h ?

2.4. Indica as coordenadas do vértice da catenária que representa graficamente a função h e explica de que maneira a variação do parâmetro a pode influenciar as coordenadas deste mesmo vértice.

3. Considera a função $j(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k} + b$, com $k \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

3.1. Escreve uma expressão analítica para j , com base em exponenciais.

3.2. Recorrendo às potencialidades da tua calculadora gráfica, fixa o valor de k e de a e atribui diferentes valores a b , esboçando os gráficos das funções obtidas.

3.3. Que influência tem a variação do parâmetro b no gráfico da função j ?

3.4. Indica as coordenadas do vértice da catenária que representa graficamente a função j e explica de que maneira a variação do parâmetro b pode influenciar as coordenadas deste mesmo vértice.

A função $j(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k} + b$, com $k \in \mathbb{R}^+$ define uma curva chamada **catenária**.

4. Considera a função $l(x) = \cosh(x-2) + 1$. Repara que a função l é um caso particular da função j , estudada no exercício anterior, com $k = 1$, $a = 2$ e $b = 1$.

4.1. Escreve uma expressão analítica para l com base em exponenciais.

4.2. Representa graficamente a função l e indica o domínio e o contradomínio da mesma.

4.3. A função l tem apenas um extremo. Calcula analiticamente o ponto onde o extremo de l é atingido.

4.4. Explica como se pode obter o gráfico da função l a partir do gráfico da função $s(x) = \cosh x$.

5. Seja m a função quadrática definida por $m(x) = (x - 2)^2 + 2$.

5.1. Estuda a função m quanto à sua monotonia e indica o seu extremo, também conhecido por vértice da parábola obtida.

5.2. Sem recorrer à calculadora gráfica, indica o contradomínio de m .

6. Considera as funções l e m , dos exercícios **4** e **5**, respetivamente.

6.1. Numa pequena composição, compara os resultados obtidos para estas duas funções.

6.2. Representa, no mesmo referencial, as funções l e m e calcula os pontos de interseção das mesmas, apresentando as coordenadas dos mesmos com duas casas decimais.

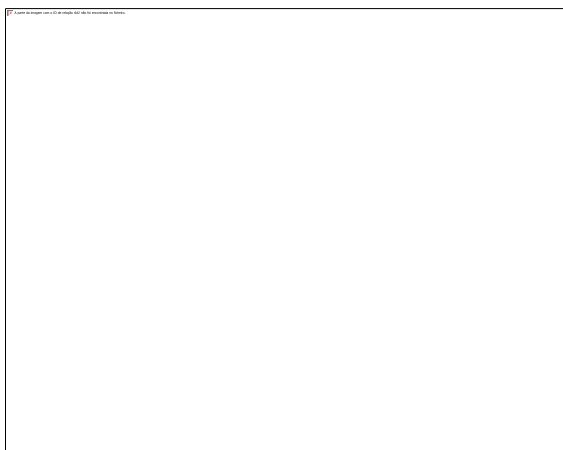
SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 2

1.1. $g(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$.

1.2. Consideremos, por exemplo:

- $k = 2$ então $g_1(x) = \frac{\cosh(2x)}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.
- $k = 3$ então $g_2(x) = \frac{\cosh(3x)}{3} = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$.
- $k = 4$ então $g_3(x) = \frac{\cosh(4x)}{4} = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{8}$.
- $k = 5$ então $g_4(x) = \frac{\cosh(5x)}{5} = \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{10}$.

Graficamente, temos:



$$g_1(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$$

$$g_2(x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$$

$$g_3(x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{8}$$

$$g_4(x) = \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{10}$$



1.3. À medida que k aumenta, a abertura da concavidade da curva diminui e o vértice da mesma tem uma ordenada cada vez menor.

1.4. Temos $g'(x) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k}$. Assim, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k} = 0 \Leftrightarrow e^{kx} = e^{-kx}$.

Como a função exponencial é injetiva e por hipótese $k \in \mathbb{R}^+$, então $kx = -kx \Leftrightarrow x = 0$.

A função g' é negativa em $x < 0$, pois $e^{kx} < e^{-kx}$ no intervalo considerado, e positiva para $x > 0$.

Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		m	

A função g tem um mínimo para $x = 0$, obtendo-se $g(0) = \frac{\cosh 0}{k} = \frac{1}{k}$.

O vértice da catenária que representa graficamente a função g é $(0, \frac{1}{k})$.

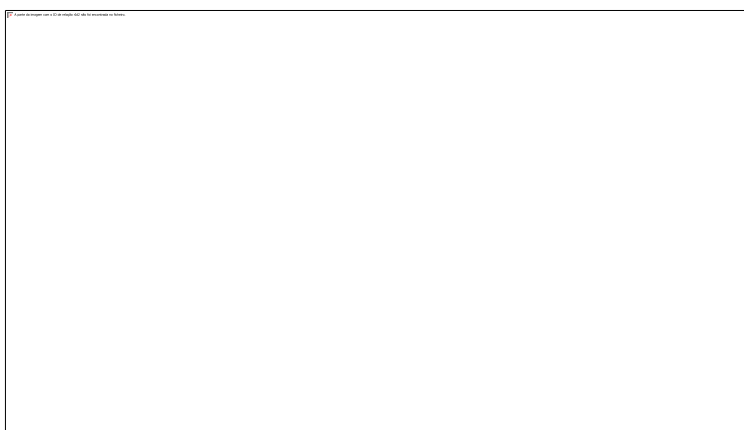
À medida que o valor de k aumenta, a ordenada do vértice da catenária diminui.

2.1. $h(x) = \frac{e^{kx-a} + e^{-kx+a}}{2k}$.

2.2. Consideremos, por exemplo, $k = 1$ e:

- $a = -1$ então $h_1(x) = \cosh(x + 1) = \frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{2}$.
- $a = 0$ então $h_2(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- $a = 1$ então $h_3(x) = \cosh(x - 1) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2}$.
- $a = 2$ então $h_4(x) = \cosh(x - 2) = \frac{e^{x-2} + e^{-x+2}}{2}$.

Graficamente, temos:



$$h_1(x) = \frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{2}$$

$$h_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$h_3(x) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2}$$

$$h_4(x) = \frac{e^{x-2} + e^{-x+2}}{2}$$



2.3. O gráfico da função $h(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k}$ obtém-se a partir do gráfico da função $g(x) = \frac{\cosh(kx)}{k}$, efetuando um deslocamento na horizontal, ou seja, uma translação associada ao vetor $(a, 0)$.

2.4. Temos $h'(x) = \frac{e^{kx-a} - e^{-kx-a}}{2k}$. Assim $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{kx-a} - e^{-kx-a}}{2k} = 0 \Leftrightarrow e^{kx-a} = e^{-kx+a}$.

Como a função exponencial é injetiva, então $kx - a = -kx + a \Leftrightarrow x = \frac{a}{k}$.

A função h' é negativa em $x < \frac{a}{k}$, pois $e^{kx-a} < e^{-kx+a}$ no intervalo considerado, e positiva para $x > \frac{a}{k}$.

Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	$\frac{a}{k}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		m	

A função h tem um mínimo para $x = \frac{a}{k}$, obtendo-se $h\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cosh 0}{k} = \frac{1}{k}$.

O vértice da catenária que representa graficamente a função h é $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{k}\right)$.

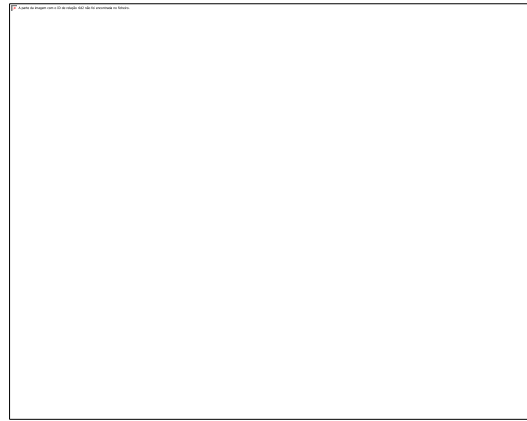
A abscissa do vértice da catenária aumenta com a .

3.1. $j(x) = \frac{e^{kx-a} + e^{-kx+a}}{2k} + b$.

3.2. Consideremos, por exemplo, $k = 1, a = 1$ e:

- $b = -1$ então $j_1(x) = \cosh(x-1) - 1 = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} - 1$.
- $b = 0$ então $j_2(x) = \cosh(x-1) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2}$.
- $b = 1$ então $j_3(x) = \cosh(x-1) + 1 = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} + 1$.
- $b = 2$ então $j_4(x) = \cosh(x-1) + 2 = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} + 2$.

Graficamente, temos:



$$j_1(x) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} - 1$$

$$j_2(x) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2}$$

$$j_3(x) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} + 1$$



$$j(x) = \frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{2} + 2$$

3.3. O gráfico da função $j(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k} + b$ obtém-se a partir do gráfico da função $h(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k}$, efetuando um deslocamento na vertical, ou seja, uma translação associada ao vetor $(0, b)$. O gráfico da função $j(x) = \frac{\cosh(kx-a)}{k} + b$ pode ainda obter-se a partir do gráfico da função $g(x) = \frac{\cosh(kx)}{k}$, efetuando uma translação associada ao vetor (a, b) .

3.4. Temos $j(x) = \frac{e^{kx-a} - e^{-kx-a}}{2k}$. Assim $j'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{k}$.

A função j' é negativa em $x < \frac{a}{k}$, pois $e^{kx-a} < e^{-kx+a}$ no intervalo considerado, e positiva para $x > \frac{a}{k}$.

Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	$\frac{a}{k}$	$+\infty$
$j'(x)$	-	0	+
$j(x)$		m	

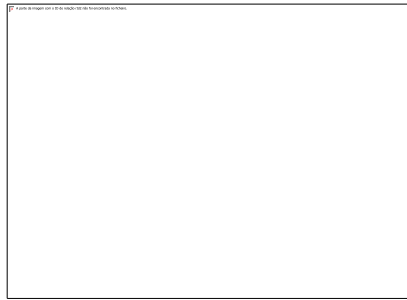
A função j tem um mínimo em $x = \frac{a}{k}$, obtendo-se $j\left(\frac{a}{k}\right) = \frac{\cosh 0}{k} + b = \frac{1}{k} + b$.

O vértice da catenária que representa graficamente a função j é $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{k} + b\right)$.

A ordenada do vértice da catenária aumenta com b .

4.1. $l(x) = \frac{e^{x-2} + e^{-x+2}}{2} + 1.$

4.2. Gráficamente, temos:



O domínio da função l é R .

A função l é contínua em R e o mínimo da função é atingido em $x = 2$, logo o contradomínio de l é $[2, +\infty[$.

4.3. Temos $l'(x) = \frac{e^{x-2} - e^{-x+2}}{2}$. Assim $l'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{x-2} - e^{-x+2}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-x+2}.$

Como a função exponencial é injetiva, então $x - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2$.

A função l' é negativa em $x < 2$, pois $e^{x-2} < e^{-x+2}$ no intervalo considerado, e positiva para $x > 2$.

Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$l'(x)$	$-$	0	$+$
$l(x)$	\searrow	m	\nearrow



A função l tem um mínimo para $x = 2$, tendo-se $l(2) = \cosh(0) + 1 = 1 + 1 = 2$.

O extremo de j é atingido em $x = 2$.

4.4. O gráfico da função $l(x) = \cosh(x - 2) + 1$ obtém-se a partir do gráfico da função $s(x) = \cosh x$, efetuando uma translação associada ao vetor $(2,1)$.

5.1. Temos que $m'(x) = 2(x - 2)$. Assim $m'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

A função m' é uma função afim cujo gráfico é uma reta com declive positivo, logo é estritamente crescente e por isso é negativa em $x < 2$ e positiva para $x > 2$. Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$m'(x)$	$-$	0	$+$
$m(x)$		m	

A função m é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e estritamente crescente em $[2, +\infty[$. A função m tem um mínimo para $x = 2$, tendo-se $m(2) = 0 + 2 = 2$.

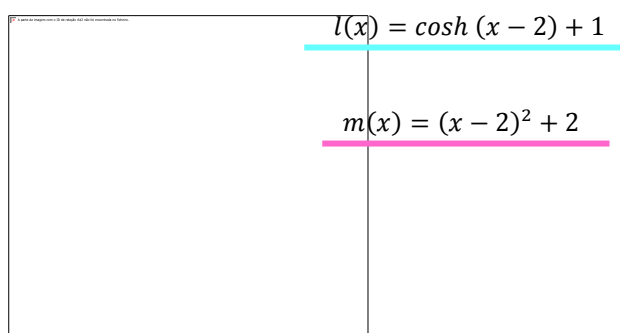
O extremo de m é atingido em $x = 2$, sendo este o valor da abcissa do vértice da parábola que a representa.

5.2. O gráfico da função m é uma parábola com a concavidade virada para cima e cujo o mínimo é 2, logo o contradomínio de m é $[2, +\infty[$.

6.1. Ambos os gráficos representam curvas com a mesma monotonia e extremo.

As funções são decrescentes em $]-\infty, 2]$ e crescentes em $[2, +\infty[$. Os dois gráficos têm o vértice em $x = 2$ e, em ambos, a concavidade da curva é virada para cima. No entanto, as curvas são diferentes porque, por exemplo, $l(3) = \cosh 1 + 1 = \frac{e+e^{-1}}{2} + 1$ e $m(3) = 1 + 2 = 3$.

6.2. Graficamente, temos:



As duas funções interseitam-se nos pontos $(-0,98; 10,90)$, $(4,98; 10,90)$ e $(2,2)$.

Atividade de Aplicação nº 3

A. Designação: Catenárias na Ponte 25 de Abril.

B. Objetivos:

- Aplicar a função exponencial de base e na modelagem de situações reais;
- Resolver problemas em contexto real, usando funções exponenciais;
- Aplicar as transformações dos gráficos de funções a funções exponenciais.

C. Pré-requisitos:

- Estudo de uma função: domínio, contradomínio, intervalos de monotonia e existência de extremos, continuidade e injetividade;
- Representação gráfica de uma função;
- Função exponencial.

D. Conteúdos:

- Função cosseno hiperbólico;
- Transformações da forma $y = f(kx + a) + b$, com $a, b \in R$.

E. Destinatários: Alunos do 12.º.

F. Duração da actividade: 60 minutos para resolução e 30 minutos para correção.

G. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Nos séculos *XVI* e *XVII*, a função $a(x) = \cosh x$ assumiu uma grande importância no estudo de uma curva chamada catenária.

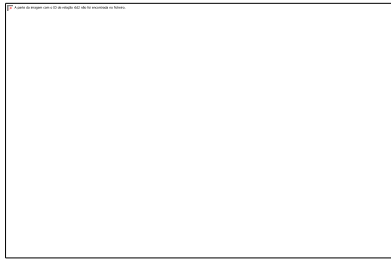


Figura 1 - Catenária

Esta função pode ser escrita com base em exponenciais, tendo-se:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A ponte 25 de Abril, localizada em Lisboa, está suspensa por cabos com a forma de catenárias, como podemos observar na figura seguinte.

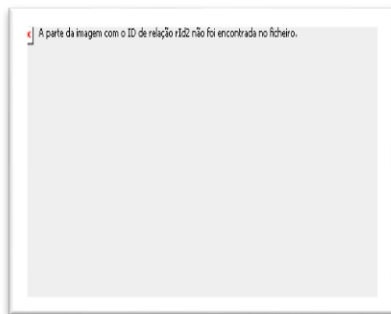


Figura 2 – Ponte 25 de Abril (Lisboa)

Designemos por **cabos mestres** os cabos de maior altura que suportam as catenárias (tendo todos a mesma altura) e simplesmente por **cabos** todos os restantes.

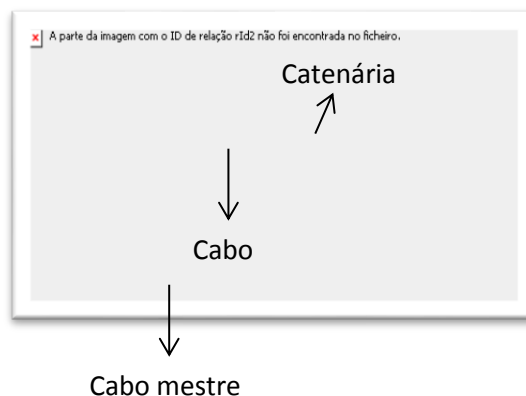


Figura 3 – Esquema da Ponte 25 de Abril (Lisboa)

Considera a catenária existente entre dois cabos mestres consecutivos a x metros de distância entre si e supõe que o cabo-mestre da esquerda está na origem de um referencial Oxy . Admite ainda que a base que une os dois cabos-mestres coincide com o eixo das abcissas.

A Ana propõe $f(x) = 8 \cos h(x - 2)$ como a função cujo gráfico é uma catenária.

Tendo em conta a função f sugerida pela Ana, resolve as seguintes questões, apresentando todos os resultados finais com duas casas decimais.

Observação: Sempre que em cálculos intermédios procedas a arredondamentos, conserva três casas decimais.

1. Escreve uma expressão analítica para a função f , com base em exponenciais.

2. Determina a altura do cabo mestre.

3. Determina a altura do menor cabo que suporta a catenária.

4. Resolve analiticamente a equação $e^x + 9e^{-x} = 10$.

5. Resolve analiticamente a equação $2e^{x-2} + 2e^{-x+2} = 5$.

Observação: Poderá ser-te útil reparar que $e^{-x+2} = e^{-(x-2)}$.

6. Sem recorrereres à calculadora gráfica, determina a distância x entre dois cabos mestres consecutivos.

7. Observa os resultados obtidos para as distâncias pedidas nas alíneas anteriores. Parece-te que o modelo proposto pela Ana é adequado ao contexto do problema? Fundamenta a tua resposta. Se o modelo não te parecer adequado, sugere uma nova função, justificando o motivo da tua escolha.

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 3



1. $f(x) = 4(e^{x-2} + e^{-x+2})$.

2. Se localizarmos a base do cabo mestre na origem de um referencial do plano, a altura do mesmo é igual a $f(0) = 4(e^{-2} + e^2) \approx 30,10 \text{ m}$.

3. Pretendemos determinar o mínimo da função. Temos $f'(x) = 4(e^{x-2} - e^{-x+2})$.

Assim, e tendo em conta a injetividade da função exponencial, obtém-se que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-x+2} \Leftrightarrow x - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2$.

A função f' é negativa para $x < 2$, pois nestas condições $e^{-x+2} > e^{x-2}$, e positiva para $x > 2$. Esquematicamente, temos:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		m	

A função f tem um mínimo para $x = 2$, tendo-se $f(2) = 4(e^0 + e^0) = 8 \text{ m}$.

Assim, o menor cabo que suporta a catenária tem 8 m de altura.

4. $e^x + 9e^{-x} = 10 \Leftrightarrow e^x - 10 + \frac{9}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 10e^x + 9 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 9 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 9 \vee x = 0$.

Deste modo $S = \{0, \ln 9\}$.

5. $2e^{x-2} + 2e^{-x+2} = 5 \Leftrightarrow 2e^{x-2} - 5 + \frac{2}{e^{x-2}} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2(x-2)} - 5e^{x-2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow e^{x-2} = 2 \vee e^{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln 2 + 2 \vee x = \ln \frac{1}{2} + 2$.

Deste modo $S = \left\{ \ln \frac{1}{2} + 2, \ln 2 + 2 \right\}$.

6. Vamos determinar os valores de x que verificam $f(x) = f(0)$.

$$\text{Temos } f(x) = f(0) \Leftrightarrow 4(e^{x-2} + e^{-x+2}) = 4(e^{-2} + e^2) \Leftrightarrow e^{x-2} + e^{-x+2} = e^{-2} + e^2$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} + \frac{1}{e^{x-2}} - e^{-2} - e^2 = 0 \Leftrightarrow e^{2(x-2)} - (e^{-2} + e^2)e^{x-2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{e^{-2} + e^2 \pm \sqrt{(e^{-2} + e^2)^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow x - 2 = -2 \vee x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Os dois cabos mestres distam 4 m entre si.

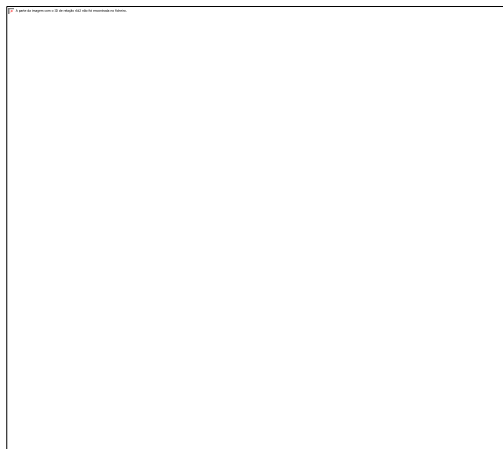
7. Não é adequado porque, segundo este modelo, a distância entre dois cabos mestres é pequena.

Pretendemos encontrar uma função cuja abertura da curva que graficamente a representa seja maior de modo a que a distância entre dois cabos mestres aumente.

Fazendo variar os vários parâmetros no modelo proposto pela Ana, verificamos que temos de alterar o coeficiente de x . Chamemos-lhe k . Assim, por exemplo:

- Se $k = 0,5$ então $y_1(x) = 4(e^{0,5x-2} + e^{-0,5x+2})$.

Deste modo, temos $y_1(x) = y_1(0) \Leftrightarrow x = 8$ m, ou seja, os cabos mestres distam 8 m entre si.

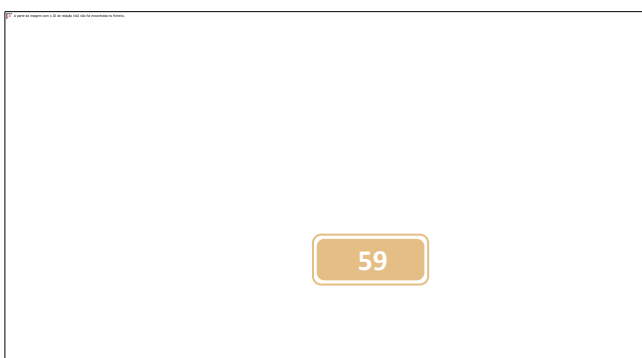


$$y_1(x) = 4(e^{0,5x-2} + e^{-0,5x+2})$$

$$y_1(0) = e^{-2} + e^2$$

- Se $k = 0,3$ então $y_2(x) = 4(e^{0,3x-2} + e^{-0,3x+2})$.

Deste modo, temos $y_2(x) = y_2(0) \Leftrightarrow x \approx 13,33$ m, ou seja, os cabos mestres distam 13,33 m entre si.



$$y_2(x) = 4(e^{0,3x-2} + e^{-0,3x+2})$$

$$y_2(0) = e^{-2} + e^2$$

- Se $k = 0,1$ então $y_3(x) = 4(e^{0,1x-2} + e^{-0,1x+2})$.

Deste modo, temos $y_3(x) = y_3(0) \Leftrightarrow x = 40 \text{ m}$, ou seja, os cabos mestres distam 40 m entre si.



$$y_3(x) = 4(e^{0,1x-2} + e^{-0,1x+2})$$

$$y_3(0) = e^{-2} + e^2$$

Assim, podemos, por exemplo, sugerir y_3 como um bom modelo no contexto do problema.

Atividade de Aplicação nº 4

A. Designação: Catenárias: Resolução de Problemas.

B. Objetivos:

- Aplicar a função exponencial de base e na modelagem de situações reais;
- Resolver problemas em contexto real, usando funções exponenciais;
- Resolver equações exponenciais do segundo grau;
- Aplicar as transformações dos gráficos de funções a funções exponenciais.

C. Pré-requisitos:

- Estudo de uma função: domínio, contradomínio, intervalos de monotonia e existência de extremos;
- Representação gráfica de uma função;
- Resolução analítica de equações do segundo grau;
- Função exponencial.

D. Conteúdos:

- Função cosseno hiperbólico;
- Transformações da forma $y = f(kx + a) + b$, com $a, b \in R$.

E. Destinatários: Alunos do 12.º.

F. Duração da actividade: 90 minutos para resolução e 30 minutos para correção.

G. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Nos séculos *XVI* e *XVII* a função $a(x) = \cosh x$, conhecida por **coseno hiperbólico**, assumiu grande importância no estudo de uma curva chamada catenária, cuja forma se assemelha a uma parábola.

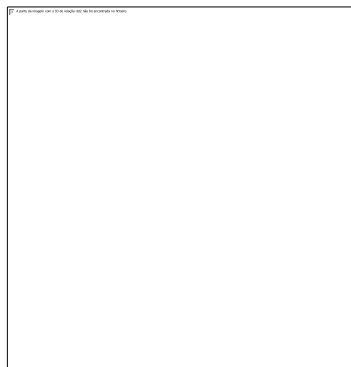


Figura 1

Esta função pode ser escrita com a partir de funções exponenciais, tendo-se:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Resolva as seguintes questões, apresentando os resultados finais com duas casas decimais.

Observação: Sempre que em cálculos intermédios procedas a arredondamentos, conserva três casas decimais.

1. Um fio encontra-se suspenso entre dois postes que estão a 10 m de distância entre si, como podemos observar na figura seguinte.

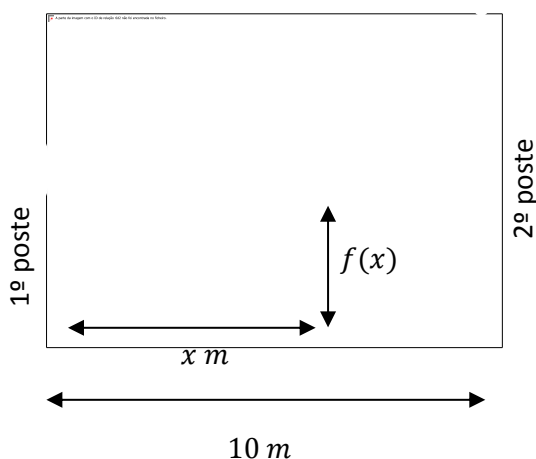


Figura 2

Considera que a função f representa a distância ao solo, em metros, do ponto da curva situado a x metros à direita, do primeiro poste, sendo dada por:

$$f(x) = \cosh(x - 4) + 2.$$

Admite que a base do primeiro poste se encontra em $x = 0$.

Resolve analiticamente as seguintes questões, recorrendo à calculadora apenas para eventuais cálculos numéricos.

- 1.1. Escreve uma expressão analítica para a função f , com base em exponenciais.
- 1.2. Calcula a altura do primeiro poste.
- 1.3. Calcula a distância ao solo de um ponto do fio que esteja a 7 m do segundo poste.
- 1.4. De um ponto P do fio sabe-se que está a 11 m de altura do solo. Calcula a distância do mesmo ao primeiro poste, sabendo que esta é superior a 3.

Sugestão: Poderá ser útil considerar $e^{-x+4} = (e^{x-4})^{-1}$.

- 1.5. Indica as coordenadas do ponto do fio que está à distância mínima do solo.
- 1.6. A que distância, na horizontal, do segundo poste, se encontra o ponto do fio que está à distância mínima do solo?
- 1.7. Com base nos resultados obtidos no exercício 1.5, escreve uma expressão que defina uma função g , nas mesmas condições da função f , mas na qual o ponto do fio à distância mínima do solo seja o ponto de coordenadas (2,4).
- 1.8. Representa graficamente a função f , tendo em conta o contexto do problema.

2. Observa a seguinte figura na qual estão representados:

- Parte do gráfico de uma função f , de domínio R , da forma $f(x) = a \cosh(bx - c) + d$.
- Um triângulo retângulo $[OPQ]$, sendo O a origem, P um ponto do gráfico de f e Q um ponto pertencente ao eixo das abcissas, com a mesma abcissa do ponto P .

O ponto P desloca-se no primeiro quadrante ao longo do gráfico da função f , da esquerda para a direita. À medida que o ponto P se desloca nesse sentido, o ponto Q acompanha o movimento, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, permanecendo sempre retângulo, o triângulo $[OPQ]$.

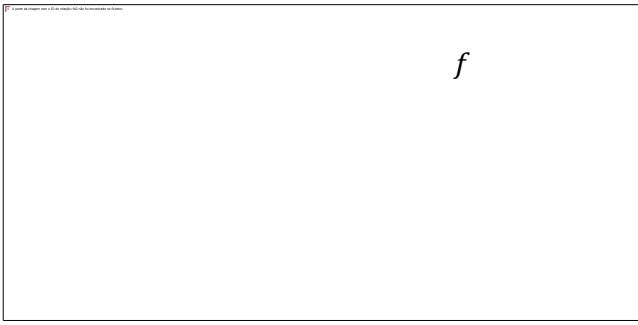


Figura 3

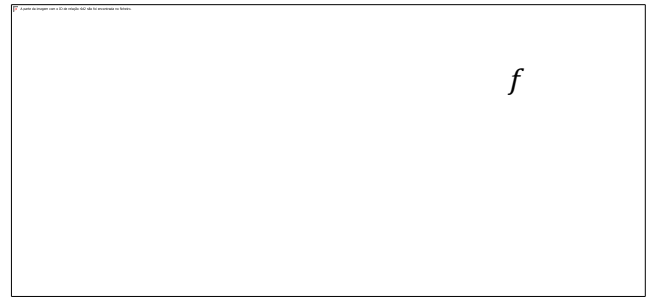


Figura 4

Seja A a função de domínio R^+ que a cada valor da abcissa x do ponto P faz corresponder a área do triângulo $[OPQ]$.

2.1. Sabendo que a área do triângulo $[OPQ]$ é definida por $A(x) = -\frac{xe^{x-3}}{4} - \frac{xe^{-x+3}}{4} + 15x$, determina a expressão analítica de f , indicando os valores de a, b, c e d .

2.2. Determina analiticamente, o(s) valor(es) de x para os quais a altura do triângulo $[OPQ]$ é 10. Apresenta o resultado final arredondado às centésimas.

2.3. Recorrendo às potencialidades da tua calculadora gráfica, determina o(s) valor(es) de x para os quais a área do triângulo $[OPQ]$ é 10.

2.4. Qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir?

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 4

1.1. $f(x) = \frac{e^{x-4} + e^{-x+4}}{2} + 2.$

1.2. $f(0) = \frac{e^{-4} + e^4}{2} + 2 \approx 29,31 \text{ m}.$

1.3. Notemos que um ponto do fio que está a 7 m do segundo poste, encontra-se a 3 m do primeiro, pois $10 - 7 = 3$. Assim, $f(3) = \frac{e^{-1} + e^1}{2} + 2 \approx 3,54 \text{ m}.$

1.4. $f(x) = 11 \Leftrightarrow \frac{e^{x-4} + e^{-x+4}}{2} + 2 = 11 \Leftrightarrow e^{x-4} + e^{-x+4} - 18 = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} + (e^{x-4})^{-1} - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{x-4})^2 - 18e^{x-4} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4}}{2}.$

Assim, temos:

$x - 4 = \ln\left(\frac{18 + \sqrt{320}}{2}\right) \vee x - 4 = \ln\left(\frac{18 - \sqrt{320}}{2}\right) \Leftrightarrow x \approx 6,89 \vee x \approx 1,11.$



Como a distância do ponto P ao primeiro poste é superior a 3, então encontra-se a 6,89 m do mesmo.

1.5. Procuramos o mínimo da função. Temos que $f'(x) = \frac{e^{x-4} - e^{-x+4}}{2}$. Assim e tendo em conta a injetividade da função exponencial, temos:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = e^{-x+4} \Leftrightarrow x - 4 = -x + 4 \Leftrightarrow x = 4.$

A função f' é negativa em $x < 4$, pois nestas condições $e^{x-4} < e^{-x+4}$, e positiva para $x > 4$.

Esquemáticamente, temos:

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		M	

A função f tem um mínimo para $x = 4$, tendo-se $f(4) = \frac{e^0 + e^0}{2} + 2 = 3.$

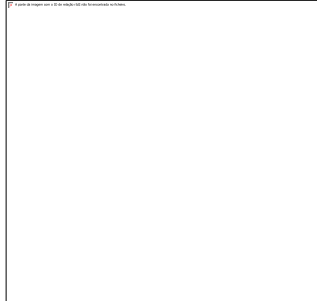
Assim, o ponto $(4,3)$ é o ponto do fio que se encontra a menor distância do solo.

1.6. Já vimos na alínea anterior que o ponto do fio que se encontra a uma distância mínima do solo é $(4,3)$, o que significa que está a 4 m do primeiro poste e por isso a 6 m do segundo.

1.7. Para obtermos o gráfico da função g a partir do gráfico da função f , é necessário efetuar uma translação segundo o vetor $\vec{u} = (-2,1)$. Assim uma expressão para a função g é dada por:

$$g(x) = \cosh(x - 4 + 2) + 2 + 1 = \cosh(x - 2) + 3 = \frac{e^{x-2} + e^{-x+2}}{2} + 3.$$

1.8.



2.1. Temos:

$$A_{\Delta} = -\frac{xe^{x-3}}{4} - \frac{xe^{-x+3}}{4} + 15x \Leftrightarrow \frac{x \times h}{2} = -\frac{xe^{x-3}}{4} - \frac{xe^{-x+3}}{4} + 15x \Leftrightarrow h = -\frac{e^{x-3}}{2} - \frac{e^{-x+3}}{2} + 30$$

Seja $f(x) = h$, temos:

$$f(x) = -\frac{e^{x-3}}{2} - \frac{e^{-x+3}}{2} + 30 = -\left(\frac{e^{x-3} + e^{-(x-3)}}{2}\right) + 30 = -\cosh(x - 3) + 30.$$

Deste modo $a = -1, b = 1, c = 3$ e $d = 30$.

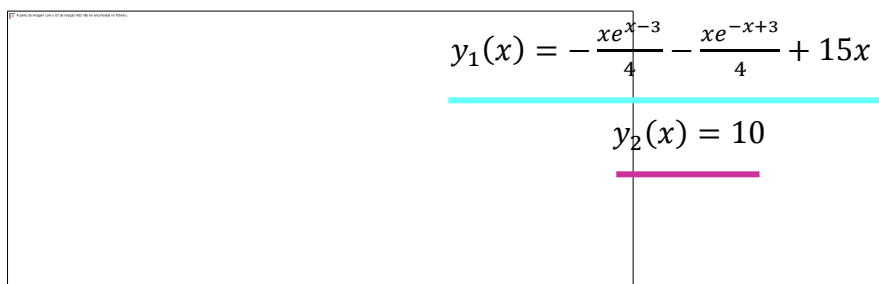
2.2. Temos $f(x) = 10 \Leftrightarrow -\frac{e^{x-3}}{2} - \frac{e^{-x+3}}{2} + 30 = 10 \Leftrightarrow -e^{x-3} - \frac{1}{e^{x-3}} + 40 = 0$

$$\Leftrightarrow -e^{2(x-3)} + 40e^{x-3} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-3} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 \approx \ln(0,025) \vee x - 3 \approx \ln(39,975) \Leftrightarrow x \approx -0,69 \vee x \approx 6,69.$$

A altura do triângulo é 10 para $x \approx 6,69$.

2.3. Consideremos $y_1(x) = -\frac{xe^{x-3}}{4} - \frac{xe^{-x+3}}{4} + 15x$ e $y_2(x) = 10$. Vamos obter as representações gráficas das duas funções e determinar o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos das mesmas.



A área do triângulo é 10 quando x toma o valor aproximado de 0,79 ou de 6,99.

2.4. Procuramos o máximo da função. Temos:



$$A'(x) = \frac{-e^{x-3} - xe^{x-3} - e^{-x+3} + xe^{-x+3}}{4} + 15.$$

Assim, recorrendo à calculadora gráfica, temos:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 5,266.$$

Observando o gráfico da função A' obtemos que esta é positiva para $x < 5,266$ e negativa para $x > 5,266$.

Esquemáticamente, temos:

x	0	5,266	$+\infty$
$A'(x)$	+	0	-
$A(x)$		M	

A função A tem um máximo para $x = 5,266$, tendo-se:

$$A(5,266) = -\frac{5,266e^{2,226}}{4} - \frac{5,27e^{-2,226}}{4} + 15 \times 5,226 \approx 66,16.$$

O valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir é, aproximadamente, 66,16.

2.2. Tractriz

Introdução

A **tractriz** é a curva que uma partícula descreve num plano horizontal, ao ser arrastada por uma outra partícula que se move em linha reta, sendo a distância entre as duas sempre constante.

O estudo desta curva surgiu, pela primeira vez, em 1670, quando o médico francês, *Claude Perrault*, questionou *Leibniz* sobre a curva que o seu relógio de bolso, preso por uma corrente, descrevia quando “o bolso” se deslocava em linha reta. Apesar do interesse pelo problema, não conseguiram obter a resposta para o mesmo.

O estudo sobre esta curva foi aprofundado por *Isaac Newton*, seis anos mais tarde, que demonstrou ser constante o comprimento dos segmentos da tangente à curva delimitados pelos pontos de tangência e pelo eixo das abcissas, razão pela qual também se denomina a tractriz por curva equitangencial. Em 1692, *Christien Huygens* dedicou-se também ao estudo desta curva, tendo-a designado por tractriz (do latim *trahere* que significa puxar ou arrastar) e que, para além de encontrar de imediato uma expressão analítica que a caracteriza, ainda a generalizou.

Esta curva também é conhecida por “curva do cão” porque, intuitivamente, se pode estabelecer a analogia de um senhor que passeia, em linha reta, o seu cão preso pela trela, mantendo esta sempre esticada. A curva descrita pelo movimento do cão ao ser arrastado pelo dono é uma tractriz.



Figura 33 – Tractriz

Esta curva aparece, por exemplo, nas trajetórias de veículos articulados. Para estudar o deslocamento destes veículos, é necessário conhecer como se relaciona o percurso do centro do eixo dianteiro do mesmo com a respetiva posição, bem como saber que trajetória descreve o pneu dianteiro externo (pneu oposto ao volante).

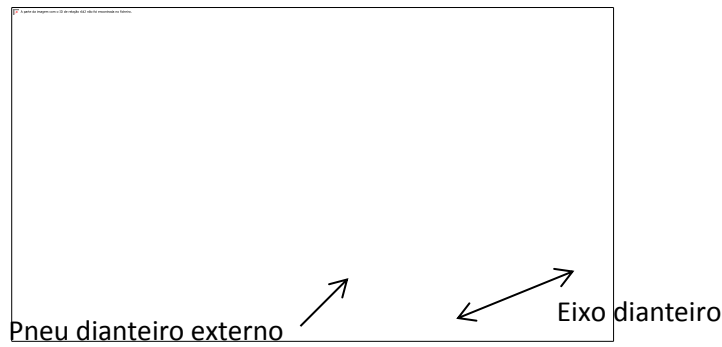


Figura 34 – Veículo articulado

Existem vários métodos para determinar estas relações, ou seja, para a curva obtida neste tipo de deslocamentos, mas alguns deles são bastante dispendiosos, como é o caso da observação de veículos reais e a utilização de modelos em escalas reduzidas. Dada a grande semelhança que existe entre a curva obtida e a tractriz, em muitos países, opta-se pelo estudo da tractriz, daí a sua importância ao nível rodoviário.

Estudo da curva

Suponhamos que uma partícula localizada num ponto $P(x_0, y_0)$ é arrastada num plano horizontal Oxy , por meio de uma corda fixa $[PA]$, com comprimento a , sendo $A(x_a, 0)$ um ponto que se desloca no semieixo positivo das abcissas. A curva descrita pela partícula arrastada é uma tractriz, como ilustra a figura seguinte.

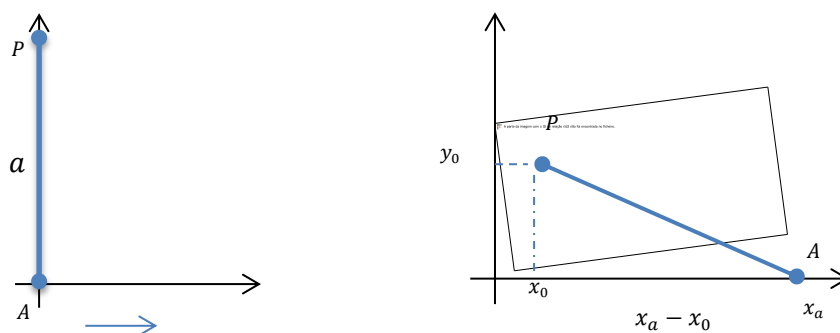


Figura 35 – Modo como se obtém uma tractriz

A corda $[PA]$ é arrastada de modo a que seja tangente à curva no ponto $P(x_0, y_0)$. Suponhamos que a é o comprimento da corda $[PA]$.

Proposição 40. Consideremos que a curva admite uma parametrização da forma $(x, f(x))$ e que $y_0 = f(x_0)$. O declive de PA é dado por $f'(x_0) = -\frac{y_0}{\sqrt{a^2 - y_0^2}}$.

Demonstração. A equação reduzida de PA é dada por $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Atendendo a que $x - x_0 = \frac{y - y_0}{f'(x_0)}$, então, em particular no ponto $(x_a, 0)$, temos $x_a - x_0 = \frac{-y_0}{f'(x_0)}$.

Temos que $\overline{PA}^2 = y_0^2 + (x_a - x_0)^2 \Leftrightarrow a^2 = y_0^2 + \frac{y_0^2}{[f'(x_0)]^2} \Leftrightarrow a^2 = y_0^2 \left(1 + \frac{1}{[f'(x_0)]^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{y_0^2} - 1 = \frac{1}{[f'(x_0)]^2} \Leftrightarrow \frac{a^2 - y_0^2}{y_0^2} = \frac{1}{[f'(x_0)]^2} \Leftrightarrow [f'(x_0)]^2 = \frac{y_0^2}{a^2 - y_0^2} \Leftrightarrow f'(x_0) = \pm \frac{y_0}{\sqrt{a^2 - y_0^2}}$$

$$\text{Assim, } f'(x_0) = -\frac{y_0}{\sqrt{a^2 - y_0^2}}. \blacksquare \quad (23)$$

$$\text{Seja } y = f(x). \text{ Temos } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy. \quad (24)$$

$$\text{Primitivando ambos os membros de (24), obtemos } x + k_1 = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy, k_1 \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

$$\text{Vamos considerar a mudança de variável } y = a \operatorname{sen} u, \text{ logo } \frac{dy}{du} = a \operatorname{cos} u. \quad (26)$$

$$\text{Assim, } dy = a \operatorname{cos} u \, du. \quad (27)$$

De acordo com a fórmula fundamental da trigonometria e sendo $a > 0$, temos:

$$\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{cos}^2 u = 1 \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 u = 1 - \frac{y^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 u = \frac{a^2 - y^2}{a^2} \Leftrightarrow \operatorname{cos} u = \pm \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2}}$$

Como estamos a considerar que o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo positivo das abcissas, restringimos o nosso estudo ao primeiro quadrante, onde a função y é decrescente, logo, a respetiva derivada vai ser negativa. Assim:

$$\operatorname{cos} u = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - y^2} = -a \operatorname{cos} u. \quad (28)$$

Usando (26), (27) e (28) em (25) e primitivando por substituição, obtém-se:

$$-\int -\frac{a \operatorname{cos} u}{a \operatorname{sen} u} \cdot a \operatorname{cos} u \, du = \int \frac{a \operatorname{cos}^2 u}{\operatorname{sen} u} \, du = \int \frac{a}{\operatorname{sen} u} (1 - \operatorname{sen}^2 u) \, du$$

$$= a \int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du - a \int \operatorname{sen} u du. \quad (29)$$

Vamos calcular $\int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du$, considerando a mudança de variável:

$$\cos u = v \Leftrightarrow u = \arccos v, \text{ logo } \frac{du}{dv} = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Recorrendo uma vez mais à fórmula fundamental da trigonometria, obtemos $\operatorname{sen} u = \sqrt{1-v^2}$.

$$\text{Logo, } \int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) dv = -\int \frac{1}{1-v^2} dv = \int \frac{1}{v^2-1} dv. \quad (30)$$

Por sua vez, podemos calcular (30) utilizando as regras da primitivação de funções racionais.

$$\text{Assim, } \int \frac{1}{v^2-1} dv = \int \left(\frac{1}{v-1} \times \frac{1}{v+1} \right) dv = \int \left(\frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} \right) dv.$$

$$\begin{aligned} \text{Podemos escrever } \int \frac{1}{v^2-1} dv &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{v-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{v+1} \right) dv = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) dv = \\ &= \frac{1}{2} (\ln |v-1| - \ln |v+1|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right|. \end{aligned}$$

Tendo em conta a substituição efetuada $\cos u = v$, obtém-se:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} \right| + k_2, \text{ com } k_2 \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

Retomando (25) e tendo em conta (29) e (31), obtemos:

$$x + k_1 = -\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} dy = a \int \frac{1}{\operatorname{sen} u} du - a \int \operatorname{sen} u du = \frac{a}{2} \ln \left| \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} \right| + k_2 + a \cos u + k_3.$$

Considerando $k = k_2 + k_3 - k_1$, então:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \left(\ln \left| \frac{\frac{-\sqrt{a^2-y^2}}{a} - 1}{\frac{-\sqrt{a^2-y^2}}{a} + 1} \right| \right) - a \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a} + k = \frac{a}{2} \left(\ln \left| \frac{-a - \sqrt{a^2-y^2}}{a - \sqrt{a^2-y^2}} \right| \right) - \sqrt{a^2-y^2} + k \\ &= \frac{a}{2} \left(\ln \left| \frac{-1(\sqrt{a^2-y^2} + a)}{a - \sqrt{a^2-y^2}} \right| \right) - \sqrt{a^2-y^2} + k = \frac{a}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{a^2-y^2} + a}{-\sqrt{a^2-y^2} + a} \right| \right) - \sqrt{a^2-y^2} + k \\ &= \frac{a}{2} \left(\ln \left| \frac{(a + \sqrt{a^2-y^2})(a + \sqrt{a^2-y^2})}{a^2 - a^2 + y^2} \right| \right) - \sqrt{a^2-y^2} + k \end{aligned}$$

$$= \frac{a \ln \left(\frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y} \right)}{2} - \sqrt{a^2 - y^2} + k = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Assim:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Como para $x = 0$, temos $y(0) = a$, então $k = 0$. Logo, $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$. (32)

Notemos que para a expressão definida em (32) ter significado, então $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|y| < a$.

O ponto $A(x_a, 0)$ também se pode mover no semieixo negativo das abcissas. Neste caso, em (28) temos $\sqrt{a^2 - y^2} = a \cos u$ porque a função y é crescente, logo a sua derivada será positiva e, de modo análogo, obtemos:

$$x = -a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Ambos os ramos pertencem à tractriz e o ponto de interseção dos mesmos é a cúspide³ da curva. Notemos ainda que o estudo apresentado se mantém válido no caso em que o ponto $P(x, y)$ é arrastado a partir da origem quando o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo positivo das ordenadas. Neste caso, a cúspide localiza-se no eixo das abcissas, sendo y a variável independente. Por um raciocínio análogo obtemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, tendo-se $y = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$.

Quando o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo negativo das ordenadas, obtemos:

$$y = -a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Figura 36 – Tractriz com cúspide no eixo das abcissas

³ Vértice onde dois arcos de uma curva são tangentes entre si.

Resumimos de seguida os quatro casos possíveis.

1.º caso: Quando a cúspide se localiza no eixo das ordenadas e o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo positivo das abcissas, então $x = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

2.º caso: Quando a cúspide se localiza no eixo das ordenadas e o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo negativo das abcissas, então $x = -a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$.

3.º caso: Quando a cúspide se localiza no eixo das abcissas e o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo positivo das ordenadas, então $y = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$.

4.º caso: Quando a cúspide se localiza no eixo das abcissas e o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo negativo das ordenadas, então $y = -a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \sqrt{a^2 - x^2}$.

Exemplo. ([28], páginas 55 e 56)

Um gato encontra-se localizado na origem quando um cão, localizado em $A(a, 0)$, o visualiza, partindo na sua direção. O gato apercebe-se da perseguição e, instantaneamente, foge na vertical, no sentido de baixo para cima (semieixo positivo do y), com uma velocidade constante, v . O cão persegue o gato sempre na direção em que o mesmo se encontra e também com uma velocidade constante, w .

Ao fim de t segundos, o gato encontra-se localizado no ponto $G(0, vt)$ e o cão no ponto $C(x, y(x))$.

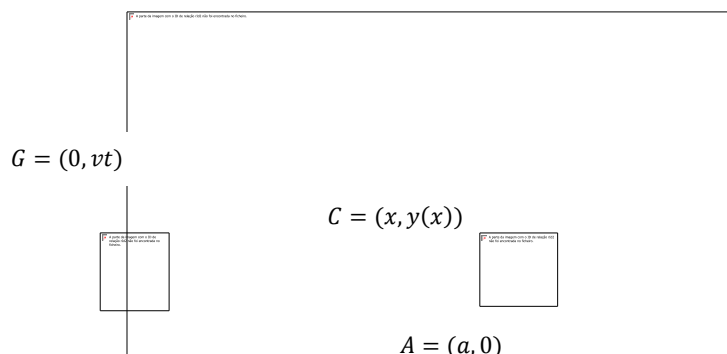


Figura 37 – Curva de perseguição de um cão a um gato

Vamos procurar a curva descrita pela trajetória do cão.

$$\text{Considerando } GC \text{ tangente à trajetória do cão, então, } y'(x) = \frac{y(x)-vt}{x} \Leftrightarrow xy'(x) - y(x) = -vt. \quad (33)$$

$$\text{Derivando ambos os membros de (33) em ordem a } x, \text{ obtemos } xy''(x) = -v \frac{dt}{dx}. \quad (34)$$

$$\text{Sendo } w = \frac{ds}{dt} \text{ então } \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{w} \sqrt{1 + (y'(x))^2}. \quad (35)$$

$$\text{De (34) e (35) obtemos } xy''(x) = k \sqrt{1 + (y'(x))^2}, \text{ sendo } k = \frac{v}{w}.$$

Consideremos $p = y'(x)$. Assim obtemos uma equação de variáveis separáveis pois:

$$k \sqrt{1 + p^2} = p'x \Leftrightarrow \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{k}{x}. \quad (36)$$

$$\text{Primitivando ambos os membros de (36), obtemos } \int \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} dx = k \int \frac{1}{x} dx.$$

Tendo em conta a derivada da inversa do seno hiperbólico, (cf proposições 7 e 8), obtém-se que:

$$\sinh^{-1}p = k \ln x + c_1 \Leftrightarrow p = \sinh(k \ln x + c_1), \text{ com } k, c_1 \in R.$$

Considerando que quando $x = a, y'(a) = p(a) = 0$, logo $c_1 = -k \ln a$. Deste modo:

$$p = \sinh(k \ln x - k \ln a) \Leftrightarrow p = \sinh\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)^k\right).$$

$$\text{Como } p = y'(x), \text{ então } y'(x) = \frac{e^{\ln\left(\frac{x}{a}\right)^k} - e^{-\ln\left(\frac{x}{a}\right)^k}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a}\right)^k - \left(\frac{a}{x}\right)^k \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^k} x^k - a^k x^{-k} \right]. \quad (37)$$

Integrando ambos os membros de (37) e considerando que para $x = a, y(a) = 0$, então:

$$\text{Para } k \neq 1, \text{ obtemos } y(x) = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{k+1} + \frac{1}{k-1} \left(\frac{a}{x}\right)^{k-1} \right] - \frac{ak}{k^2-1}.$$

$$\text{Para } k = 1, \text{ obtemos } y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2a} - a \ln x \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - a \ln a \right).$$

Se $v \geq w$, então $k \geq 1$ pelo que o cão nunca conseguirá alcançar o gato.

Se $v < w$, então $k < 1$ pelo que o gato será apanhado pelo cão.

A tractriz pode ser definida, parametricamente, através de funções trigonométricas ou de funções hiperbólicas.

Consideremos a tractriz cuja cúspide está localizada no eixo das ordenadas.

Proposição 41. A tractriz pode ser definida, parametricamente, através de funções trigonométricas por:

$$\begin{aligned}x(t) &= \pm a \left[\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \cos t \right] \\y(t) &= a \operatorname{sen} t \quad , t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Demonstração. Como $y \in [0, a]$ podemos escrever $y(t) = a \operatorname{sen} t$. Substituindo esta expressão em (32), obtemos:

$$\begin{aligned}x &= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}}{a \operatorname{sen} t} - \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t} = a \ln \frac{a(1 + \cos t)}{a \operatorname{sen} t} - a \cos t \\&= a \left(\ln \frac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} - \cos t \right).\end{aligned} \tag{38}$$

Recorrendo às fórmulas da duplicação dos ângulos, temos:

$$\operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \text{ e } \cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}.$$

Substituindo estas expressões (38) obtém-se:

$$\begin{aligned}x &= a \left(\ln \frac{1 + \cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} + \cos t \right) = a \left(\ln \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} - \cos t \right) \\&= a \left[\ln \left(\operatorname{cotg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) - \cos t \right] = -a \left[\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \cos t \right].\end{aligned}$$

Observemos que para $x < 0$, obtemos uma expressão simétrica à dada. Assim temos $x(t) = \pm a \left[\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \cos t \right]$. ■

Proposição 42. A tractriz pode ser definida, parametricamente, através de funções hiperbólicas por:

$$\begin{aligned}x(t) &= \pm a (t - \operatorname{tgh} t) \\y(t) &= \frac{a}{\operatorname{cosh} t}, t \in [0, +\infty[.\end{aligned}$$

Demonstração. Como $y \in [0, a]$, podemos escrever $y(t) = a \operatorname{sech} t, t \in [0, +\infty[$. (39)

Assim, $y(t) = a \operatorname{sech} t = \frac{a}{\cosh t}$. (40)

Usando (40) em (32) e tendo em conta que $1 - \operatorname{tgh}^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t} = \operatorname{sech}^2 t$ obtemos:

$$\begin{aligned} x &= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sech} t)^2}}{a \operatorname{sech} t} - \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sech} t)^2} = a \ln \frac{a + a \operatorname{tgh} t}{a \operatorname{sech} t} - a \operatorname{tgh} t \\ &= a \ln \frac{a(\cosh t + \sinh t)}{a} - a \operatorname{tgh} t = a \ln \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) - a \operatorname{tgh} t \\ &= a(t - \operatorname{tgh} t). \end{aligned}$$

Quando o ponto $A(x_a, 0)$ se desloca no semieixo negativo das abcissas, então

$$x(t) = -a(t - \operatorname{tgh} t).$$

Deste modo, $x(t) = \pm a(t - \operatorname{tgh} t)$. ■

Propriedades da Curva

Para estudar algumas propriedades da tractriz, consideremos que a cúspide se localiza no eixo das ordenadas e que o deslocamento do ponto $A(x_a, 0)$ é feito no semieixo positivo das abcissas. O estudo é análogo quando a mesma se localiza no eixo das abcissas.

Nesta secção, vamos recorrer a uma das propriedades mais importantes da tractriz, isto é, o comprimento dos segmentos da tangente delimitados pelos pontos de tangência e pelo eixo das abcissas é sempre constante. Designemos por a o valor desse comprimento.

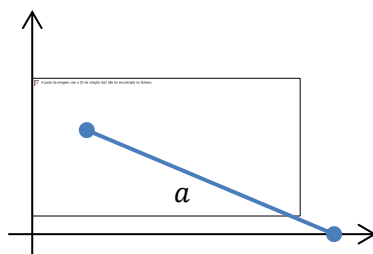


Figura 38 – Segmento da tangente delimitado pelo ponto de tangência e pelo eixo das abcissas

Consideremos ainda que a tractriz admite uma parametrização da forma $(x(y), y)$.

Proposição 43. O comprimento do arco da tractriz cuja origem é o ponto (x_1, y_1) e a extremidade o ponto (x_2, y_2) é dado por $S = a \ln \frac{y_2}{y_1}$.

Demonstração. Temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ (cf. Proposição 40), logo $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. Então:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right)^2} dy = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{a^2}{y^2}} dy = a[\ln y]_{y_1}^{y_2} = a \ln \frac{y_2}{y_1}. \blacksquare$$

Exemplo. Consideremos a tractriz cujo comprimento do segmento da tangente delimitado pelo ponto de tangência e pelo eixo das abscissas é 4 unidades de medida, sendo $A(x_a, 1)$ e $B(x_b, 2)$ pontos da tractriz. O comprimento do arco da tractriz compreendido entre os pontos $A(4 \ln(4 - \sqrt{15}) + \sqrt{15}, 1)$ e $B(4 \ln\left(\frac{4 - \sqrt{12}}{2}\right) + \sqrt{12}, 2)$ é dado por $S = 4 \ln 2$. Notemos que para calcular o comprimento do arco, apenas é necessário conhecer as ordenadas dos extremos.

Proposição 44. A área da região compreendida entre a tractriz, $y = 0$ e as retas de equação $x = x_1$ e $x = x_2$, com $x_1, x_2 \in R_0^+$ e $x_1 < x_2$ é:

$$A = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\text{sen}(2x_2) - \text{sen}(2x_1)}{2} + x_2 - x_1 \right).$$

Demonstração. Notemos que $A = \int_{x_2}^{x_1} y(t)x'(t)dt$.

Tendo em conta a parametrização encontrada na proposição 41, temos que $x(t) = -a \left[\ln\left(\text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \cos t \right]$, logo:

$$x'(t) = -a \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\text{tg}\left(\frac{t}{2}\right)}} + \text{sen } t \right) = \frac{-a}{2 \text{sen } \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} + \text{asent} = \frac{-a}{\text{sen } t} + a \text{sen } t.$$

Como $y(t) = a \text{sen } t$, então $A = \int_{x_1}^{x_2} a \text{sen } t \left(\frac{a}{\text{sen } t} - a \text{sen } t \right) dt = a^2 \int_{x_1}^{x_2} (1 - \text{sen}^2 t) dt$

$$= a^2 \int_{x_1}^{x_2} (1 - \text{sen}^2 t) dt = a^2 \int_{x_1}^{x_2} \cos^2 t dt = a^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\left[\frac{\text{sen}(2t)}{2} \right]_{x_1}^{x_2} + [t]_{x_1}^{x_2} \right)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\text{sen}(2x_2) - \text{sen}(2x_1)}{2} + x_2 - x_1 \right). \blacksquare$$

Exemplo. Para calcularmos a área limitada pela tractriz e pelos dois eixos coordenados, consideramos, de acordo com a proposição anterior, $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{\pi}{2}$, logo:

$$A = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(2 \times 0)}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Proposição 45. O raio de curvatura da tractriz é $R_c(y) = \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{y}$.

Demonstração. Como a tractriz admite uma parametrização da forma $(x(y), y)$, então

$$R_c(y) = \left| \frac{[1 + (x'(y))^2]^{\frac{3}{2}}}{x''(y)} \right|.$$

Já vimos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ (c.f. proposição 40), logo $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$ e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{(-\sqrt{a^2-y^2})' y + \sqrt{a^2-y^2}}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}} y^2 + \sqrt{a^2-y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}} + \sqrt{a^2-y^2} \\ &= \frac{a^2}{y^2 \sqrt{a^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Deste modo, o raio de curvatura da tractriz vai ser:

$$R_c(y) = \left| \frac{\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{a^2}{y^2 \sqrt{a^2-y^2}}} \right| = \frac{\frac{a^3}{y^3}}{\frac{a^2}{y^2 \sqrt{a^2-y^2}}} = \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{y}. \blacksquare$$

Proposição 46. O eixo das abcissas é uma assíntota da curva.

Demonstração. Temos $y \in]0, a]$. Assim:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} x(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2} \right) = -\infty.$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota da curva. \blacksquare

Proposição 47. A evoluta de uma tractriz é uma catenária.

Tendo em conta que a evoluta de uma tractriz é uma catenária, vamos proceder à construção geométrica simultânea da catenária e da tractriz que é dada em [13] (página 119).

1.º Numa folha de papel A_4 , traçar uma reta horizontal r de um extremo ao outro da mesma.

2.º Na reta r , marcar pontos com 1 cm de distância entre si, da esquerda para a direita, até atingir o meio da folha.

3.º Numerar os pontos marcados, da esquerda para a direita, com números inteiros a começar no zero (0,1,2, ...)

4.º Para cada ponto identificado com um número ímpar (1,3,5,7 ...), traçar uma reta que passe pelo ponto e que seja perpendicular à reta r . Identificar estas retas verticais por $s_1, s_3, s_5, s_7 \dots$

5.º Com centro nos pontos identificados com número par (0,2,4,6,...), desenhar quartos de circunferências, com origem nos mesmos e raio igual a 9 cm, no sentido da direita para a esquerda.

Os quartos de circunferência devem ficar desenhados na parte superior da reta r e devem interseccionar as retas $s_1, s_3, s_5, s_7, \dots$

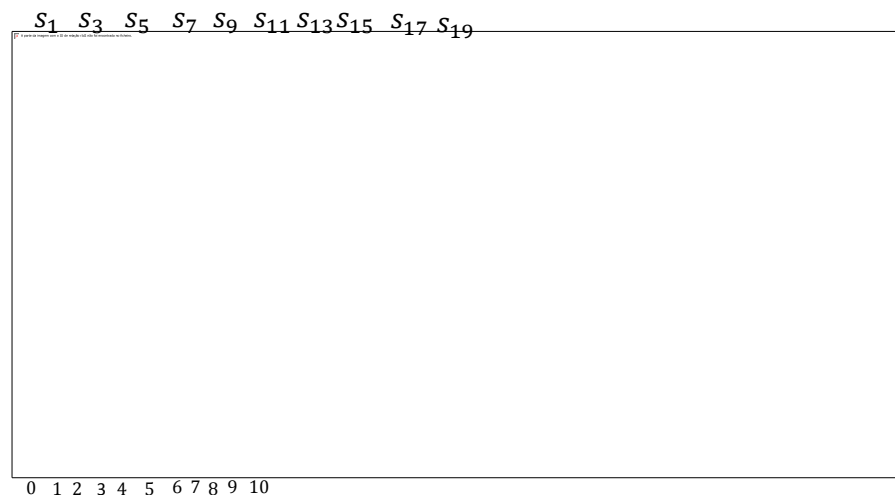


Figura 39 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 1 a 5

6.º Na reta vertical s_1 , assinalar um ponto P_1 (tão longe quanto possível da linha da base) e traçar a tangente à circunferência de centro em 0 que contém o ponto P_1 . Identificar o ponto de tangência como T_0 .

7.º Traçar a tangente à circunferência de centro em 2, que contém o ponto P_1 e identificar o ponto de tangência por T_2 .

8.º Com centro em P_1 , desenhar o arco T_0T_2 e designar por P_3 o ponto de interseção de $[P_1T_2]$ com s_3 .



Figura 40 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 6 a 8

9.º Traçar a tangente à circunferência de centro em 4, que contém o ponto P_3 e identificar o ponto de tangência por T_4 .

10.º Com centro em P_3 , desenhar o arco T_2T_4 e designar por P_5 o ponto de interseção de $[P_3T_4]$ com s_5 e assim sucessivamente.

Obtemos a seguinte figura:



Figura 41 – Construção de catenária e da tractriz – Passos 9 a 10

11.º Fazer uma simetria para a outra metade da folha.

A curva obtida por união dos pontos $P_i, \forall i \in \{1,3, \dots, 2n - 1\}$ é uma aproximação da catenária.

A curva obtida por união dos arcos $T_i, \forall i \in \{0,2, \dots, 2n\}$ é uma aproximação da tractriz.

No final, obtemos a seguinte figura:

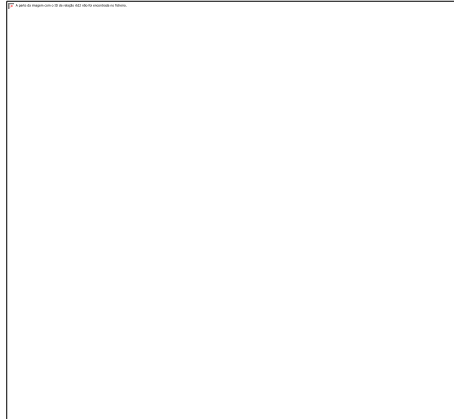


Figura 42 – Construção geométrica da catenária e da tractriz

A tractriz e a catenária interseitam-se no vértice da catenária que é também a cúspide da tractriz.

Para terminar este capítulo, acrescentamos que a rotação de uma tractriz em torno da sua assíntota, também conhecida por eixo, origina a chamada pseudoesfera⁴.

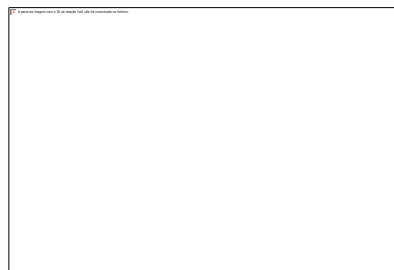


Figura 43 – Pseudoesfera

Neste contexto, a tractriz também é aplicada no *pivot de Schiele*.

Exemplo. ([8], páginas 37 e 38)

A tractriz foi considerada por *Schiele* como a forma ideal para um eixo de rotação de modo a manter a respetiva produção garantindo uma distribuição uniforme do gasto.

⁴ Modelo utilizado na geometria não euclidiana com curvatura negativa constante.

Suponhamos que uma ponta de eixo vertical vai girar sobre rolamentos. Consideremos:

- V a reação vertical dos rolamentos. Referenciamos que nos pontos da superfície de contato, V é constante.
- N a reação dos rolamentos relativamente ao eixo, em cada ponto da superfície lateral.
- W o peso do eixo.
- A a projeção horizontal da ponta do eixo, na superfície lateral.

Observemos a figura seguinte.

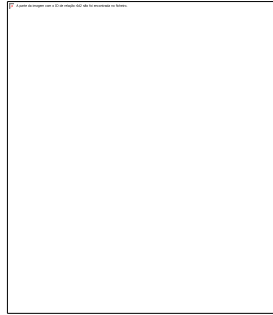


Figura 44 – Pseudoesfera

A ponta tem um eixo vertical. Vamos procurar a equação da curva da secção longitudinal.

Como o desgaste da ponta do eixo deve ser uniforme, então, o mesmo é constante com y .

Temos ainda que, quando há uma rotação completa do eixo, há proporcionalidade entre o desgaste e o trabalho da força de atrito, μN . Assim $2\pi y \mu N = k, k \in R$.

Por outro lado, a projeção vertical de N deve ser sempre constante, pelo que $V = \frac{W}{A}$.

Como $\frac{N}{V} = \frac{\overline{PQ}}{y}$ então $\overline{PQ} = \frac{yN}{v} = \frac{\frac{kN}{2\pi\mu N}}{\frac{W}{A}} = \frac{kA}{2\pi\mu W} = k_1, k_1 \in R$.

Assim, a curva que a ponta do eixo descreve longitudinalmente é uma tractriz, tendo, por isso, a ponta do eixo, a forma de uma pseudoesfera.

Atividade de Aplicação nº 5

A. Designação: Catenária vs Tractrix.

B. Objetivos:

- Aplicação da função exponencial.

C. Pré-requisitos:

- Razões trigonométricas de um ângulo;

- Estudo de uma função: zeros, intervalos de monotonia e existência de extremos, sentido das concavidades de uma função, paridade, assíntotas;

- Propriedades da função exponencial;

- Representação gráfica de uma função;

- Comprimento de arco.

D. Conteúdos:

- Função exponencial;

- Razões trigonométricas de um ângulo α ;

- Razões hiperbólicas de um ângulo α ;

E. Destinatários: Alunos do 12.º.

F. Duração da atividade: 120 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular;
- O exercício 1 é adaptado de [13].

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Esta atividade destina-se ao estudo de duas curvas descobertas no século *XVII* e que estão relacionadas entre si, nomeadamente, a catenária e a tractriz.

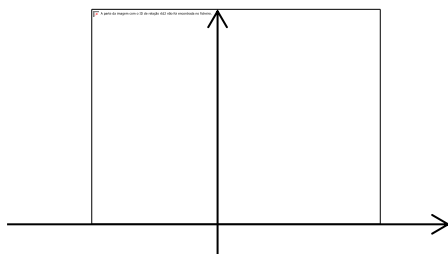


Figura 1 – Catenária

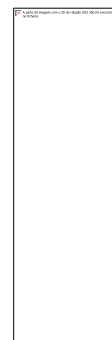


Figura 2 - Tractriz

A atividade divide-se em duas partes. A primeira parte é formada por um conjunto de itens que permite a construção simultânea das duas curvas. A segunda parte é formada por um conjunto de exercícios sobre as duas curvas de modo a estudar algumas das suas propriedades.

Parte 1

1. Faz uma construção geométrica simultânea da catenária e da tractriz, seguindo as instruções que se seguem.

1.º Numa folha de papel A_4 , traça uma linha reta horizontal r , de um extremo ao outro da mesma.

2.º Na reta r , marca os pontos com 1 cm de distância entre si, da esquerda para a direita, até atingires o meio da folha.

3.º Numera os pontos marcados, da esquerda para a direita, com números inteiros a começar no zero.

4.º Para cada ponto identificado com um número ímpar (1,3,5,7 ...), traça uma linha reta vertical que passe pelo ponto e que seja perpendicular à reta r . Identifica estas retas verticais por $s_1, s_3, s_5, s_7 \dots$.

5.º Com centro nos pontos identificados com número par (0,2,4,6,...), desenha quartos de círculos, com origem nos mesmos, raio igual a 9 cm e no sentido da direita para a esquerda. Os quartos de círculo devem ficar desenhados na parte superior da reta r e devem interseccionar as retas $s_1, s_3, s_5, s_7, \dots$

6.º Na reta vertical s_1 , assinala um ponto P_1 (tão longe quanto possível da linha da base) e traça a tangente à primeira circunferência desenhada que contém o ponto P_1 . Identifica o ponto de tangência como T_0 .

7.º Traça a tangente à segunda circunferência desenhada, a que contém o ponto P_1 , e identifica o ponto de tangência por T_2 .

8.º Com centro em P_1 , desenha o arco T_0T_2 e designa por P_3 o ponto de interseção de $[P_1T_2]$ com s_3 .

9.º Traça a tangente à terceira circunferência desenhada, a que contém o ponto P_3 , e identifica o ponto de tangência por T_4 .

10.º Com centro em P_3 , desenha o arco T_2T_4 e designa por P_5 o ponto de interseção de $[P_3T_4]$ com s_5 e assim sucessivamente.

11.º Traça o simétrico da curva obtida relativamente à reta vertical que passa no último ponto assinalado em 1.

Observa a figura que obtiveste e compara-a com a figura seguinte, na qual, a curva obtida por união dos pontos P_1, P_3, P_5, \dots é uma aproximação da catenária e a curva obtida por união dos arcos T_0, T_2, T_4, \dots é uma aproximação da tractriz.



Figura 3 – Construção geométrica simultânea da catenária e da tractriz

Parte 2

A **catenária** é a curva que um cabo fixo pelos seus dois extremos assume quando está apenas sujeito à força da gravidade (o seu próprio peso), como está ilustrado na figura 1.

2. A função $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ é conhecida por **cosseno hiperbólico** e aparece numa das equações que define a catenária, nomeadamente:

$$c(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e com } k \in \mathbb{R}^+.$$

2.1. Escreve uma expressão analítica para a função c , com base em exponenciais.

2.2. Estuda a paridade da função c .

2.3. Determina analiticamente os valores de $x \in D_c$ que anulam a função c .

Observação. Começa por encontrar uma equação do segundo grau que traduza a situação apresentada.

2.4. Comenta a seguinte afirmação “Independentemente do valor de k , a função c tem sempre um extremo.” Apresenta todos os cálculos que utilizares para fundamentares a tua opinião.

2.5. Mostra que a função c não admite pontos de inflexão.

3. A função $g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ é conhecida por **seno hiperbólico** e aparece numa das expressões que permite determinar o comprimento do arco da catenária $c(x)$, definida no **exercício 2**, cujos extremos são os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_1 < x_2$, nomeadamente:

$$S = \frac{\sinh(kx_2) - \sinh(kx_1)}{k}, \text{ com } k \in \mathbb{R}^+.$$

3.1. Escreve uma expressão analítica para S , com base em exponenciais.

3.2. Considera $k = 1$. Calcula o comprimento do arco de uma catenária cuja origem é um ponto com abcissa 1 e a extremidade, um ponto da forma $(2, y_2)$. Apresenta o resultado arredondado a duas casas decimais.

A **tractriz** é a curva que uma partícula descreve num plano horizontal, ao ser arrastada por uma outra partícula que se move em linha reta, sendo a distância entre as duas sempre constante, como está ilustrado na figura 2.

4. Quando a partícula que se move em linha reta o faz no semieixo positivo das ordenadas, então uma das equações que define a tractriz é:

$$y = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+.$$

4.1. Calcula o domínio de y .

4.2. Mostra que o eixo das ordenadas é uma assíntota do gráfico da função y .

4.3. O comprimento do arco de uma tractriz, localizada no primeiro quadrante, cuja origem é o ponto (x_1, y_1) e a extremidade o ponto (x_2, y_2) , é dado por $S = a \left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{x_2}{a} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{x_1}{a} \right)$, sendo a uma constante positiva.

Considera $a = 2$. Calcula o valor exato do comprimento do arco da tractriz que contém os pontos $A(2, y_1)$ e $B(4, y_2)$.

4.4. A área compreendida entre uma tractriz localizada no primeiro quadrante, o eixo das abcissas e as retas de equação $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada pela fórmula:

$$A = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x_2) - \operatorname{sen}(2x_1)}{2} + x_2 - x_1 \right), \text{ com } a \in \mathbb{R}^+.$$

Calcula, em função de a , a expressão da área compreendida entre a tractriz e os eixos coordenados (1.º quadrante).

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 5

Parte 2

$$2.1. f(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} - \frac{1}{k}.$$

2.2. A função c é par.

$$2.3. c(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow e^{kx} + e^{-kx} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{2(kx)} - 2e^{kx} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{kx} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow kx = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$



2.4. Começemos por escrever a expressão da derivada da função c .

$$c'(x) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} (ke^{kx} - ke^{-kx}) \right] = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}.$$

A derivada da função c anula-se quando $\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{kx} = e^{-kx} \Leftrightarrow x = 0$.

A função c' é negativa para $x < 0$, pois nestas condições, $e^{kx} < e^{-kx}$, e é positiva para

$x > 0$. Esquemáticamente, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$c'(x)$	$-$	0	$+$
$c(x)$		m	

A função c tem um mínimo para $x = 0$, tendo $c(0) = 0$.

Assim, independentemente do valor de k , a função c tem sempre um extremo, sendo verdadeira a afirmação dada, e esse extremo é sempre um mínimo.

2.5. Começemos por escrever a expressão da segunda derivada da função c .

$$c''(x) = \frac{ke^{kx} + ke^{-kx}}{2}.$$

A derivada da função c' nunca se anula, pois é impossível a equação:

$$\frac{ke^{kx} + ke^{-kx}}{2} = 0.$$

Assim, a função c não admite pontos de inflexão.

$$3.1. S = \frac{e^{kx_2} - e^{-kx_2} - e^{kx_1} + e^{-kx_1}}{2k}.$$

$$3.2. S = \frac{e^2 - e^{-2} - e^1 + e^{-1}}{2} \approx 2,45.$$

$$4.1. D_y = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} > 0 \wedge x \neq 0 \wedge a^2 - x^2 \geq 0 \right\} =]0, a].$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2} \right) = a \ln \frac{2a}{0^+} - a = +\infty.$$

Assim, $x = 0$ (eixo das ordenadas) é uma assíntota vertical do gráfico da função y .

$$4.3. S = 2(\operatorname{sen}^{-1} 2 - \operatorname{sen}^{-1} 1).$$

$$4.4. A = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Relatório de Aplicação do Exercício 2 da Atividade

A atividade foi realizada por 25 alunos do 10º ano do curso técnico de turismo da Escola Profissional Agostinho Roseta – Pólo do Crato e 14 alunos do 10.º ano do curso científico-natural do Agrupamento de Escolas de Nisa.

Data da realização da atividade: 11 de Dezembro de 2012, em ambas as escolas, numa aula com a duração de 2h.

Contexto em que a atividade foi proposta:

- Escola Profissional Agostinho Roseta – No âmbito do módulo de Geometria;
- Agrupamento de Escolas de Nisa - No âmbito do capítulo de Geometria no Plano e no Espaço I.

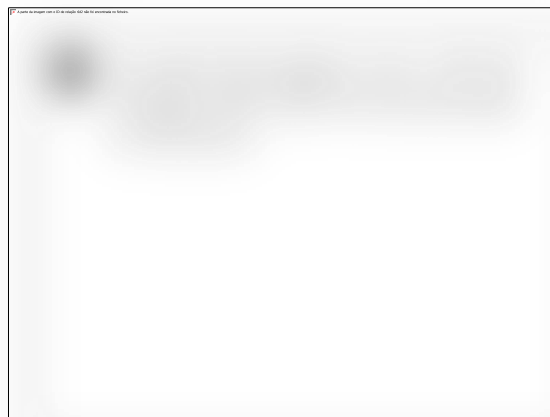
Em ambas as turmas, os alunos foram convidados a explorar as construções geométricas através do exercício 2 da presente atividade.

Material utilizado:

- Papel A_4 ;
- Compasso, regra e esquadro;
- Lápis e borracha.

Resultados obtidos:

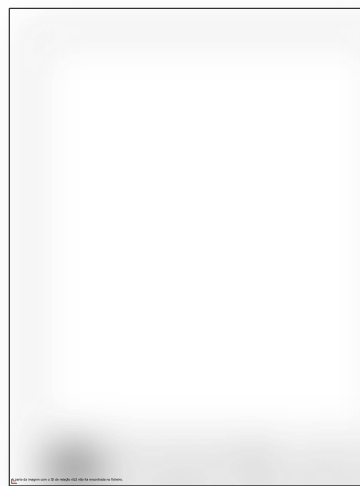
Exercício 2.1. Os alunos começaram individualmente a seguir as orientações dadas no exercício.



Os primeiros quatro passos do exercício não levantaram dúvidas e os alunos, na sua totalidade, conseguiram construir o pretendido.

No quinto passo, isto é, “Com centro nos pontos identificados com número par (0,2,4,6,...), desenha quartos de círculos, com origem nos mesmos, raio igual a 9 cm e no sentido da direita para a esquerda. Os quartos de círculo devem ficar desenhados na parte superior da reta r e devem interseccionar as retas $s_1, s_3, s_5, s_7, \dots$ ” começaram a surgir as primeiras dúvidas, das quais se enunciam:

- Quartos de círculos desenhados no sentido oposto ao pretendido, ou seja, da esquerda para a direita.
- Quartos de círculos desenhados na parte inferior da reta r , em vez de ser na parte superior, tal como pedido.

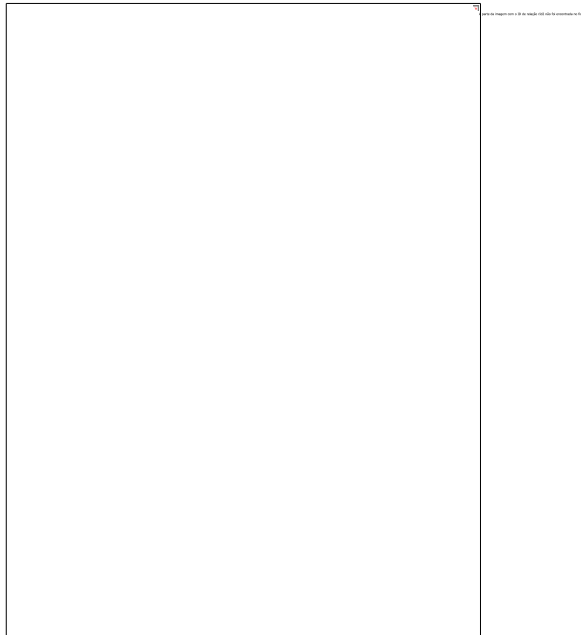


No sexto passo, isto é, em “na reta vertical s_1 , assinala um ponto P_1 (tão longe quanto possível da linha da base) e traça a tangente à primeira circunferência desenhada que contém o ponto P_1 . Identifica o ponto de tangência como T_0 ”, os alunos que até ao momento tinham a construção bem sucedida, mostraram, na totalidade, dúvidas no que concerne à localização do ponto P_1 .

Todos trocaram ideias entre si e marcaram o respetivo ponto.

No sétimo passo, isto é, em “traça a tangente à segunda circunferência desenhada, que contém o ponto P_1 e identifica o ponto de tangência por T_2 ”, os alunos revelaram dificuldades ao nível da construção da tangente.

Revelaram na sua maioria dificuldades em desenhar a tangente, visto não saberem o ponto exato de tangência.



No oitavo passo, isto é, em “Com centro em P_1 , desenha o arco T_0T_2 e designa por P_3 , o ponto de interseção de $[P_1T_2]$ com s_3 ”, os poucos alunos que ainda tinham uma construção bem sucedida, não apresentaram dificuldades.

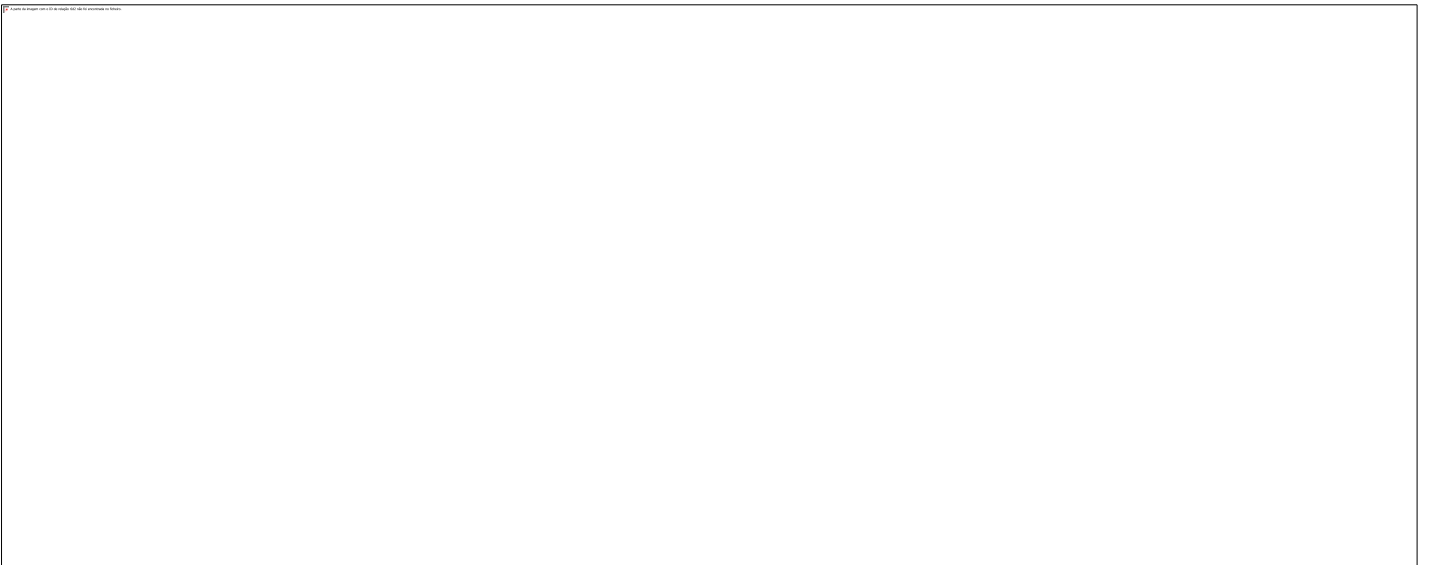
Nos últimos passos, as dúvidas foram análogas às já referenciadas.

No final, apenas dois alunos conseguiram obter uma construção como a pretendida, embora os mesmos tenham tido ajuda dos colegas que, entretanto, não conseguiram mesmo depois de uma troca constante de ideias.

Exercício 2.2. Numa primeira fase, os alunos começaram por assinalar, nas orientações que lhes foram dadas, os passos que lhes suscitaram mais dúvidas, de modo a clarificar o que para eles não tinha sido óbvio. Limitaram-se a alterar esses passos, completando-os.

Numa segunda fase, apenas lhes foi dada a construção final e, sem qualquer tipo de orientação escrita, os alunos tiveram que redigir de início todos os passos. A maior parte deles não conseguiu seguir a sequência lógica por observação da figura e até mesmo os dois alunos que tinham tido algum sucesso no exercício 2.1 não conseguiram redigir correta e claramente esses mesmos passos.

Apresenta-se de seguida um exemplo do texto de um aluno que conseguiu fazer a construção corretamente mas não o texto na sua totalidade.



Balanco da atividade: Para além de ter sido uma aula diferente do que decorre usualmente, os alunos encararam com entusiasmo o desafio que lhes foi proposto. No final, compreenderam a importância de se interpretar corretamente os enunciados que são propostos, pois uma leitura menos cuidada pode levar a resultados que, para além de imprevistos, não estão corretos. Aquilo que pensaram ser uma atividade com um grau de dificuldade reduzido, transformou-se num desafio para muitos deles.

O balanço foi positivo pois, para além de informações novas que foram transmitidas aos alunos no que se refere a estas duas curvas, realizaram-se construções com compasso, régua e esquadro, pouco usuais no ensino secundário e apelou-se a uma concentração que, muitas vezes, os alunos não têm em momentos cruciais.

CAPÍTULO III

Neste capítulo apresentamos o estudo de curvas obtidas pela trajetória de pontos fixos em circunferências que rolam, sem deslizar, sobre uma reta ou sobre uma outra circunferência. Faremos ainda referência às curvas obtidas quando o ponto fixo se encontra no interior ou exterior da circunferência que rola.

3.1. Ciclóide

A cicloide é uma curva com propriedades geométricas particulares que intrigou a comunidade científica de matemáticos na altura em que foi descoberta, suscitando várias disputas entre os seus elementos. A descoberta da cicloide permitiu dar resposta a outros dois problemas da física, nomeadamente, o da curva *braquistócrona* e o da curva *tautócrona*, razão pela qual o estudo desta secção engloba as três curvas referidas.

Introdução

A **cicloide** é a curva traçada por uma partícula qualquer, fixa numa circunferência que rola sem deslizar, num plano horizontal. Esta curva ficou conhecida por “*Helena de geometria*” uma vez que, tal como a “*Helena de Tróia*” foi cobiçada e disputada por vários homens, também a cicloide gerou várias disputas na comunidade matemática. *Joahnn Bernoulli* chegou mesmo a chamá-la “curva fatídica do século *XVII*”, em *Acta Eruditorum*.

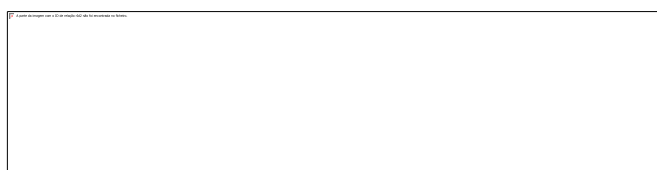


Figura 45 – Cicloide

Esta curva foi descoberta em 1501, por *Charles Bouvelles*, quando o mesmo tentava quadrar o círculo, no entanto, quem, em 1599, a designou por cicloide foi *Galileu Galilei*. Também *Blaise Pascal* teve interesse pela cicloide.

Em 1628, *Marin Mersenne* apresentou esta curva a alguns matemáticos do século *XVII*, do qual se destaca *Gilles de Roberval* que, em 1634, recorrendo a estudos recentes publicados por *Cavalieri* (Princípio dos indivisíveis de Cavalieri), resolveu o problema da sua quadratura.

Em 1638, *Descartes*, *Roberval* e *Fermat*, procuraram construir a tangente a um arco de cicloide, tendo cada um deles obtido resultados diferentes. *Mersenne* enviou estes mesmos resultados a *Galileu* que, sentindo-se velho e cansado, os entregou, em 1642 aos seus alunos *Vincenzo Viviani* e *Evangelista Torricelli*.

Em 1644, *Torricelli* publicou "*Opera Geometrica*", obra dedicada ao estudo da cicloide, na qual divulgava os resultados por ele obtidos. A publicação desta obra originou uma disputa entre o seu autor e *Roberval* que o acusou de plágio, disputa esta que se prolongou até à morte de *Torricelli*, em 1647.

Em 1654, numa noite em que *Pascal* teve uma dor de dentes, resolveu dedicar-se à resolução de problemas relacionados com a cicloide, que lhe haviam sido propostos por *Mersenne*. Dado o alívio da dor e a sua crença religiosa, *Pascal* interpretou a mesma como sendo um sinal divino para que continuasse a estudar esta curva. Conseguiu resolver todos os problemas que lhe foram propostos. Em vez de publicar os seus resultados, resolveu organizar uma competição, que decorreu em 1658, atribuindo prémios aos que o conseguissem fazer. Apenas dois participantes, *Antoine de LaLouvere* e *John Wallis*, entregaram soluções, não obtendo prémios mas, paralelamente aos participantes, *Christian Huygens*, *Christopher Wren* e *Pierre de Fermat*, apresentaram diretamente a *Pascal*, as suas descobertas. No final da competição, apenas houve um vencedor, nomeadamente *Amos Detonville* (pseudónimo utilizado por *Pascal*). Em 1673, *Christien Huygens*, familiarizado com a curva, provou que a mesma solucionava um outro problema, igualmente famoso, o problema da **tautócrona**. Os irmãos *Bernoulli*, embora usando métodos diferentes, descobriram que a cicloide também solucionava a curva **braquistócrona**. Para demonstrar a conjectura que apresentou, *Johann Bernoulli* recorreu aos seus conhecimentos de física tendo, numa fase inicial, obtido uma solução correta, mas que apresentava uma dedução

errada. Nesta resolução apareceram resultados anteriormente provados por *Pierre Fermat* no que concerne ao estudo da refração da luz. O irmão *Jakob* abordou o problema, recorrendo ao cálculo das variações (também desenvolvido por ele), procurando uma solução que maximizasse ou minimizasse um funcional.

Ao nível da arquitetura, também existem algumas construções onde é visível a cicloide. A título de exemplo, referimos a Cúpula da Kimbell Art Gallery.

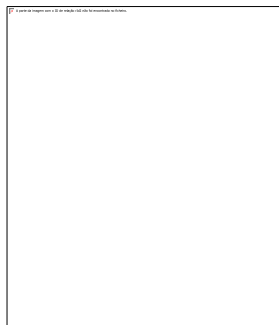


Figura 46 - Fachada da Cúpula da Kimbell Art Gallery

O uso da cicloide nesta cúpula foi sugerido pelo engenheiro *A. Komendant* que procurava iluminar, de forma indireta, as obras existentes numa sala de exposições sem danificar as mesmas. Deste modo, defendeu que a melhor opção seria uma cúpula com a forma de cicloide e com uma abertura e uma prateleira de luz (ver figura 47), de modo a otimizar essa mesma luz incidente.

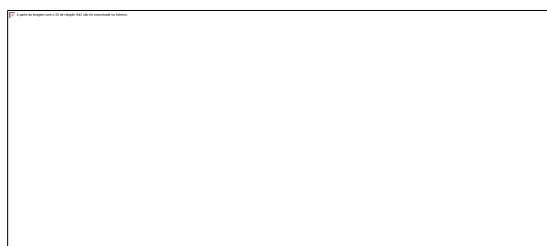


Figura 47 - Planta da Cúpula da sala de exposições de Kimbell Art Gallery

Estudo da curva

Consideremos, no plano Oxy , uma circunferência de centro $C(a,b)$, com $a,b > 0$ e raio R , tangente ao eixo do x sobre o qual vai rolar sem deslizar.

Vamos descrever o movimento de um ponto da mesma, que inicialmente se encontra na origem do referencial. Quando a circunferência roda um pouco, da esquerda para a direita, passa para a posição $P'(x, y)$. (ver figura 48)

Seja $P(c, 0)$ um ponto da mesma, o qual se encontra sobre o eixo das abscissas e considere-se θ o ângulo formado por CP e CP' .

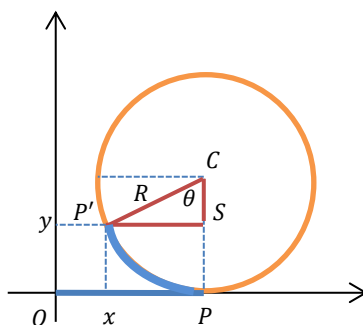


Figura 48 – Construção de uma cicloide

À curva descrita pelo ponto chamamos **cicloide**. Quando θ varia entre 0 e 2π , ou seja, entre duas passagens consecutivas do ponto no eixo das abscissas, é descrito um **arco de cicloide**.

Designando por θ o ângulo ao centro PCP' , notemos que o comprimento do segmento de reta $[OP]$ é igual ao comprimento do arco PP' , ou seja, $R\theta$, visto que a circunferência roda sem deslizar.

Consideremos ainda o ponto S pertencente a $[CP]$ e com a mesma ordenada de $P'(x, y)$.

Proposição 48. As equações paramétricas que definem a cicloide são:

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \text{sen } \theta) \\ y(\theta) = R(1 - \text{cos } \theta), \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (41)$$

Demonstração. Nas condições descritas anteriormente, consideremos o ponto $P'(x, y)$. Então $x = x(\theta) = |\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{P'S}| = R\theta - R\text{sen } \theta \Leftrightarrow x(\theta) = R(\theta - \text{sen } \theta)$.

Por sua vez $y = y(\theta) = |\overrightarrow{SP}| = |\overrightarrow{CP}| - |\overrightarrow{CS}| = R - R\text{cos } \theta \Leftrightarrow y(\theta) = R(1 - \text{cos } \theta)$. ■

Propriedades da curva

Proposição 49. O comprimento S de um arco de ciclóide é $S = 8R$.

Demonstração. Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário da circunferência que gera a ciclóide. Tendo em conta (41) temos $\frac{dx}{d\theta} = R(1 - \cos \theta)$ e $\frac{dy}{d\theta} = R \operatorname{sen} \theta$. (42)

Pela definição de comprimento do arco de uma curva parametrizada e por (42), temos que:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{[R(1 - \cos \theta)]^2 + (R \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(2 - 2\cos \theta)} d\theta = \sqrt{2} R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (43)$$

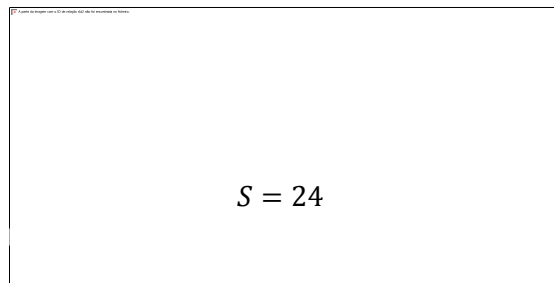
$$\text{Recordemos que } \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \quad (44)$$

Usando (44) em (43), obtemos:

$$S = 2R \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 4R \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4R(-\cos \pi + \cos 0) = 4R \times 2 = 8R. \blacksquare$$

Notemos que o comprimento do arco de uma ciclóide, $8R$, é maior que o comprimento da circunferência que a gera, nomeadamente, $2\pi R$.

Exemplo. O comprimento do arco de uma ciclóide originada a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio, que roda sem deslizar é $S = 24$.



$$S = 24$$

Figura 49 – Arco de uma ciclóide originada a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio

Proposição 50. A área da região delimitada pela reta $y = 0$ e por um arco de uma ciclóide é o triplo da área da região delimitada pela circunferência que a gera, ou seja, $A = 3\pi R^2$.

Demonstração. Já vimos que $y(\theta) = R(1 - \cos \theta)$ e $\frac{dx}{d\theta} = R - R\cos \theta$.

$$\begin{aligned} \text{Assim sendo } A &= \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} [R(1 - \cos \theta)] \cdot (R - R\cos \theta)d\theta = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = R^2 \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right). \end{aligned} \quad (45)$$

$$\text{Recordemos que } \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi. \quad (46)$$

Usando (46) em (45), obtemos $A = R^2[\theta]_0^{2\pi} - 2R^2[\sin \theta]_0^{2\pi} + \pi R^2 = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. ■

Exemplo. A área da região abaixo de um arco de cicloide originado a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio, que roda sem deslizar é $A = 27\pi$.

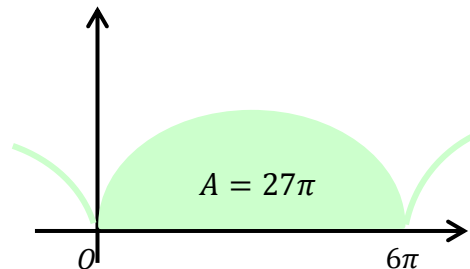


Figura 50 – Região delimitada por um arco de cicloide originado a partir de uma circunferência com 3 unidades de medida de raio

Esta propriedade foi inicialmente conjecturada por *Galileu* que comparou a massa de uma cicloide com a massa do círculo que a gera. Cortou em madeira moldes da cicloide e do círculo que a gera e pesou esses mesmos moldes com uma balança. Apesar de concluir que a razão entre eles era aproximadamente de três unidades de medida, não demonstrou esse mesmo resultado. Foram *Roberval* em França e *Toricelli* em Itália que anos mais tarde apresentaram a demonstração correta. Vejamos a demonstração apresentada por *Roberval* que utilizou como ponto de partida a seguinte figura.



Figura 51 – Construção de uma cicloide

Assim considerou:

1. Uma semicircunferência de diâmetro vertical $[AF]$ desenhada no lado esquerdo do mesmo que roda sem deslizar sobre um segmento de reta $[AD]$, com $[AD] \perp [AF]$, assumindo várias posições, nomeadamente semicircunferências de diâmetros verticais $[NM]$, $[QP]$ e $[DC]$. Os pontos O e E representam a posição que o ponto G passou a ocupar nas semicircunferências de diâmetros verticais $[NM]$ e $[DC]$, respetivamente. Os pontos B e S representam a posição que o ponto L passou a ocupar nas semicircunferências de diâmetros verticais $[QP]$ e $[DC]$, respetivamente.
2. Os pontos U e R em $[AF]$ equidistantes do ponto médio deste, estando o ponto R na posição mais baixa. Os pontos H e I são os pontos que representam a posição que os pontos U e R passaram a ocupar respetivamente, na semicircunferência de diâmetro vertical $[DC]$. O ponto T representa a posição que o ponto U passou a ocupar na semicircunferência de diâmetro vertical $[QP]$ e V a posição que o ponto R passou a ocupar na semicircunferência de diâmetro vertical $[NM]$.
3. A curva $AOBC$ que é uma semiciclóide.
4. A curva $AVTC$ conhecida por “companheira da ciclóide”.

Constatou que $|\overrightarrow{OV}| = |\overrightarrow{BT}| = k, k > 0$.

Para obter o resultado pretendido, *Roberval* recorreu ao método dos indivisíveis de Cavalieri⁵.

Assim, por construção $|\overrightarrow{LU}| = |\overrightarrow{BT}|$ e $|\overrightarrow{GR}| = |\overrightarrow{OV}|$, o que significa que os segmentos de reta horizontais compreendidos entre a ciclóide e a “companheira da ciclóide” são iguais aos segmentos horizontais do semicírculo de diâmetro vertical $[AF]$. Deste modo, a área compreendida entre a ciclóide e a “companheira da ciclóide” é igual à área da semicircunferência de diâmetro $[AF]$, ou seja, $\frac{\pi R^2}{2}$.

⁵ Duas figuras planas compreendidas entre retas paralelas, de tal forma que tenham a mesma secção vertical em cada um dos segmentos, têm a mesma área.

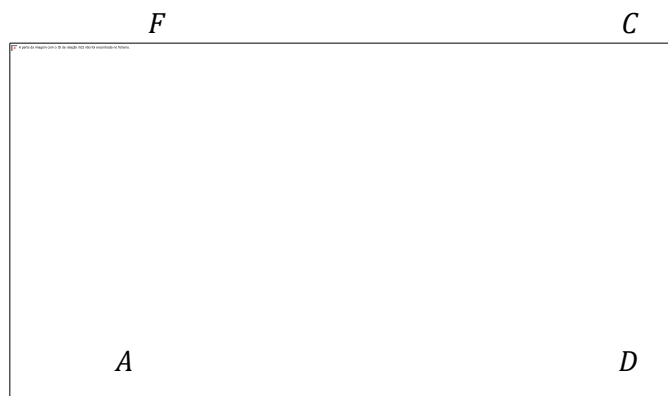


Figura 52 – Região compreendida entre a cicloide e a companheira da cicloide

Novamente por construção $|\overline{RV}| = |\overline{TH}|$ e $|\overline{UT}| = |\overline{VI}|$, o que significa que os segmentos de reta horizontais de cada uma das partes em que a curva $[AVTC]$ divide o retângulo são iguais. Assim, a curva $AVTC$ divide o retângulo $[ADCF]$ de forma simétrica e em partes iguais. Sendo o comprimento de $[AD]$ igual ao perímetro da semicircunferência que desliza, então $|\overline{AD}| = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$. Portanto, a área do retângulo $[ADCF]$ é $2\pi R^2$ e, conseqüentemente, a área compreendida entre a “companheira da cicloide” e $[AD]$ é πR^2 .

Finalmente, deste modo obteve-se:

$$A_{\text{semicicloide}} = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3\pi R^2}{2}. \text{ Logo } A_{\text{cicloide}} = 2 \times \frac{3\pi R^2}{2} = 3\pi R^2.$$

Esta demonstração não foi bem aceita, na altura, pela comunidade matemática, pois baseava-se num método pouco rigoroso, tendo mesmo gerado algumas controvérsias.

Proposição 51. O raio de curvatura de uma cicloide é $R_c(\theta) = 4R \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$.

Demonstração. Notemos que o raio de curvatura de uma curva parametrizada é:

$$R_c(\theta) = \left| \frac{\left[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} \right|.$$

Tendo em conta as equações que definem parametricamente a cicloide, obtidas em (41), e as expressões das derivadas, encontradas em (42), temos que $\frac{dx}{d\theta} = R - R \cos \theta$, $\frac{d^2x}{d\theta^2} = R \text{sen} \theta$,

$$\frac{dy}{d\theta} = R \operatorname{sen} \theta \quad e \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = R \cos \theta.$$

Assim:

$$R_c(\theta) = \left| \frac{((R - R \cos \theta)^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{(R - R \cos \theta) R \cos \theta - R \operatorname{sen} \theta R \operatorname{sen} \theta} \right| = \left| \frac{(R^2 - 2R^2 \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta + R^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{R^2 \cos \theta - R^2 \cos^2 \theta - R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \right|$$

$$= \left| \frac{(2R^2 - 2R^2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{R^2 \cos \theta - R^2} \right| = \left| -\frac{2^{\frac{3}{2}} R^3 (1 - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{R^2 (1 - \cos \theta)} \right| = 2^{\frac{3}{2}} R (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} R \sqrt{1 - \cos \theta}. \quad (47)$$

$$\text{Temos } \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (48)$$

Usando (48) em (47), obtemos $R_c(\theta) = 2\sqrt{2} R \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) = 4R \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)$. ■

Exemplo. Para uma cicloide definida parametricamente por:

$$x(\theta) = 6\theta - 6 \operatorname{sen} \theta$$

$$y(\theta) = 6 - 6 \cos \theta$$

O raio de curvatura em $\theta = \frac{\pi}{2}$ é $R_c \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4 \times 6 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 24 \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$.

Proposição 52. A equação da reta normal à cicloide num ponto $(x(\theta), y(\theta))$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, é dada por:

$$x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta - x - R\theta \cos \theta + R\theta = 0.$$

Demonstração. Seja $(x(\theta), y(\theta))$, com $\theta \in]0, 2\pi[$, um ponto arbitrário da cicloide. Designemos por t a reta tangente à cicloide no ponto $(x(\theta), y(\theta))$ e s a reta normal nesse mesmo ponto.

$$\text{Temos } m_t = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \quad e \quad m_n = -\frac{x'(\theta)}{y'(\theta)}.$$

Assim, e tendo em conta (42), obtemos que a equação da reta normal à curva vai ser:

$$\frac{y - (R - R \cos \theta)}{x - (R\theta - R \operatorname{sen} \theta)} = \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\Leftrightarrow y \operatorname{sen} \theta - R \operatorname{sen} \theta + R \cos \theta \operatorname{sen} \theta = x \cos \theta - R\theta \cos \theta + R \operatorname{sen} \theta \cos \theta - x + R\theta - R \operatorname{sen} \theta$$

$$\Leftrightarrow x \cos \theta - y \sin \theta - x - R \theta \cos \theta + R \theta = 0. \blacksquare$$

Proposição 53. A evoluta de uma cicloide é uma cicloide idêntica, obtida através da translação segundo o vetor $(R\pi, -2R)$.

Demonstração. Tendo em conta o resultado obtido na proposição 52, iremos utilizar o facto de que a evoluta de uma curva é uma curva que é tangente a todas as retas normais à curva, em cada um dos seus pontos.

Vamos procurar as equações paramétricas da evoluta da cicloide.

A equação da reta normal à cicloide num ponto arbitrário $(x(\theta), y(\theta))$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ é:

$$x \cos \theta - y \sin \theta - x - R \theta \cos \theta + R \theta = 0. \quad (49)$$

Vamos determinar a curva que é tangente à reta normal à cicloide no ponto $(x(\theta), y(\theta))$ com $\theta \in [0, 2\pi]$. Para tal, derivamos a equação da reta, (49), em ordem a θ e obtemos:

$$-x \sin \theta - y \cos \theta - R(\cos \theta - \theta \sin \theta) + R = 0. \quad (50)$$

Para obter x em função de θ , multiplicamos (49) por $\cos \theta$ e (50) por $\sin \theta$ e subtraímos os respetivos resultados, obtendo assim:

$$x(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - x \cos \theta - R \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos \theta) + R \sin \theta \cos \theta - R \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow x - x \cos \theta - R \theta + R \theta \cos \theta + R \sin \theta \cos \theta - R \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1 - \cos \theta) - R \theta (1 - \cos \theta) - R \sin \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos \theta)(x - R \theta - R \sin \theta) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos \theta = 0 \vee x - R \theta - R \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow x = R \theta + R \sin \theta.$$

Analogamente, para obter y em função de θ , multiplicamos (49) por $\sin \theta$ e (50) por $\cos \theta$ e adicionamos os respetivos resultados, obtendo assim:

$$-y(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - (R \theta + R \sin \theta) \sin \theta + R \theta \sin \theta - R \cos^2 \theta + R \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow -y - R \theta \sin \theta - R \sin^2 \theta + R \theta \sin \theta - R \cos^2 \theta + R \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow -y - R + R \cos \theta = 0 \Leftrightarrow y = -R + R \cos \theta.$$

A curva tangente à reta normal à cicloide num ponto $P(x(\theta), y(\theta))$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ tem as seguintes equações paramétricas $x(\theta) = R\theta + R\sin \theta$ e $y(\theta) = -R + R\cos \theta$.

Estas equações representam uma cicloide transladada da original segundo o vetor $(R\pi, -2R)$, pois

$$x = X + R\pi \Leftrightarrow X = x - R\pi \Leftrightarrow X = R\theta + R\sin \theta - R\pi = R(\theta - \pi) + R\sin \theta = \tag{51}$$

$$R(\theta - \pi) - R\sin(\theta - \pi).$$

$$\text{Analogamente, } y = Y - 2R \Leftrightarrow Y = y + 2R \Leftrightarrow Y = -R + R\cos \theta + 2R = R + R\cos \theta =$$

$$R - R\cos(\theta - \pi). \tag{52}$$

Notemos que (51) e (52) são as equações paramétricas de uma cicloide, considerando $\theta' = \theta - \pi$.

Logo, a evoluta de uma cicloide é uma cicloide. ■

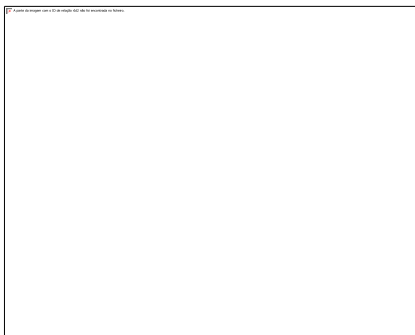


Figura 53 – Cicloide (a rosa) e respetiva evoluta (a azul)

Definição 54. Uma curva é **tautócrona** quando, ao longo da mesma, o tempo que uma partícula sujeita à ação da gravidade leva a atingir o ponto mais baixo da mesma não depende do seu ponto de partida.

O tempo que uma partícula, na curva, apenas sujeita à ação da gravidade demora a atingir o ponto mais baixo da curva, C , é independente da localização do ponto A na curva, onde é deixado cair.

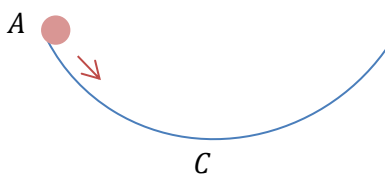


Figura 54 – Curva tautócrona

O problema da tautócrona (do grego *tautos* que significa mesmo e *chronos* que significa tempo) surgiu em 1673 quando *Christiann Huygens* se dedicava à construção de um relógio de pêndulo. Também *Joseph Lagrange* e *Leonard Euler* procuraram encontrar uma solução analítica para esta curva, mas quem primeiro a resolveu foram *Gottfried Leibniz* e *Jakob Bernoulli*.

Proposição 55. A cicloide é uma curva tautócrona.

Demonstração. Consideremos uma cicloide invertida, de modo a que sobre a mesma possa deslizar uma partícula de massa m , inicialmente em repouso, que parte de um ponto $A(x(\theta_A), y(\theta_A))$ para o ponto mais baixo da curva com $\theta_A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, como ilustra a figura seguinte.

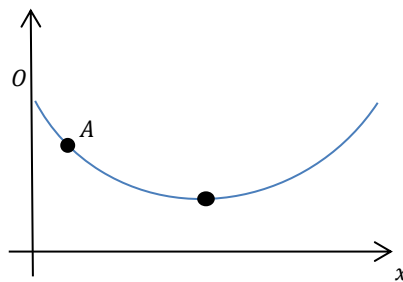


Figura 55 – Partícula que desliza sobre uma curva de um ponto A para o ponto mais baixo da mesma

Vamos calcular o tempo que a partícula demora a efetuar esse deslocamento.

Recorrendo ao princípio da conservação de energia, sabemos que, ao longo da trajetória, a energia mecânica da partícula é constante, tendo-se:

$$E_{mecânica} = E_{potencial} + E_{cinética}.$$

Como no ponto A a energia potencial é nula, então:

$E_{mecânica} = E_{cinética} \Leftrightarrow mgy(x) = \frac{1}{2}mv^2$, sendo v a velocidade da partícula num ponto genérico $P(x(\theta), y(\theta))$ da curva de parâmetro θ , com $\theta \in [\theta_A, \pi]$ e $h = y(\theta) - y(\theta_A)$. Deste modo:

$$v^2(t) = \frac{2mgh}{m} = 2gh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(y(\theta) - y(\theta_A))} = \sqrt{2g(R - R\cos\theta - R + R\cos\theta_A)} = \sqrt{2gR(\cos\theta_A - \cos\theta)}. \quad (53)$$

Atendendo a que $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \cos\theta$, então de (53), obtemos:

$$v = \sqrt{2gR \left(2\cos^2 \frac{\theta_A}{2} - 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right)} = \sqrt{4gR \left(\cos^2 \frac{\theta_A}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)} = 2\sqrt{gR \left(\cos^2 \frac{\theta_A}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)} \quad (54)$$

Por outro lado, sendo s a função comprimento do arco percorrido pela partícula do ponto A para o ponto mais baixo da curva, então $v(t) = \frac{ds}{dt}(t)$.

Vamos procurar agora a expressão que define ds .

$$\text{Já vimos por (43) e (44) que } s(t) = 2R \int_0^L \text{sen} \frac{\theta}{2} d\theta, \text{ logo } \frac{ds}{d\theta} = 2R \text{sen} \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow ds = 2R \text{sen} \frac{\theta}{2} d\theta. \quad (56)$$

$$\text{Como } v(t) = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{ds}{v(t)}, \text{ então de (53) e (56) temos } dt = \frac{2R \text{sen} \frac{\theta}{2} d\theta}{2\sqrt{gR(\cos^2 \frac{\theta_A}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})}}. \quad (57)$$

$$\text{Integrando ambos os membros de (57) sai } t = \int_{\theta_A}^{\pi} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_A}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_A}^{\pi} \frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_A}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_A}{2}}}} d\theta$$

$$= 2\sqrt{\frac{R}{g}} \left[-\text{arcsen} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_A}{2}} \right]_{\theta_A}^{\pi} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (58)$$

Podemos então concluir que o tempo que a partícula demora a deslocar-se do ponto $A(x(\theta_A), y(\theta_A))$ para o ponto mínimo da curva, com θ_A e $\theta_B \in [0, \frac{\pi}{2}]$, é constante, não dependendo do seu ponto de partida. Assim, a cicloide é tautócrona. ■

Vejamos um exemplo onde o estudo desta propriedade foi utilizado.

Exemplo. *Christiann Huygens* dedicou-se ao estudo dos relógios de pêndulo, nos quais, a variação da amplitude das oscilações conduz a medições incorretas do tempo. Ao demonstrar que a cicloide é tautócrona, chegou à conclusão que, se no extremo inferior de um pêndulo se fixar um corpo que descreva uma trajetória cicloidal, o período de oscilação não se altera, ou seja, não depende da amplitude.

De seguida, procurou então descobrir que tipo de obstáculo deveria colocar na parte lateral do pêndulo de modo que o corpo a fixar no extremo inferior deste descrevesse a trajetória cicloidal.

Por mera intuição, *Christiann Huygens* começou por pensar em obstáculos igualmente cicloidais, tendo obtido corretamente o resultado pretendido, isto é, quando os obstáculos laterais de um pêndulo têm a forma de cicloides, o corpo fixo no extremo inferior do mesmo pêndulo descreve uma trajetória cicloidal e, conseqüentemente, a variação da amplitude não altera o período de oscilação.

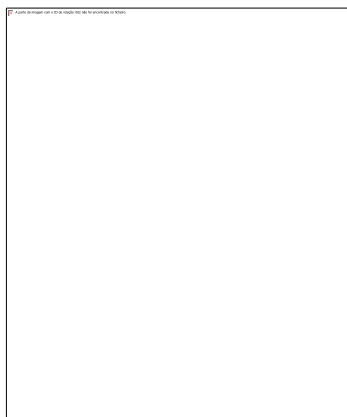


Figura 56 – Relógio de pêndulo cicloidal construído por *Christiann Huygens* e extraído da sua obra “*Horologium Oscillatorium*”

Obteve este resultado com base numa outra propriedade da cicloide: a partir de duas meias cicloides, é possível traçar uma cicloide inteira.

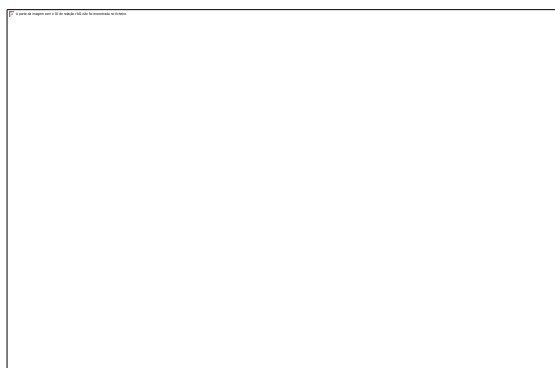


Figura 57 – Cicloide a partir de duas meias cicloides

Durante algum tempo, este pêndulo superou o pêndulo mecânico, mas devido a problemas de atrito, esta mesma superioridade deixou de existir.

Definição 56. Uma curva é **braquistócrona** se o caminho que une dois pontos da mesma é o mais rápido, mesmo não sendo o mais curto.

Assim, se deixarmos cair uma partícula de um ponto *A* numa curva braquistócrona, esta chega a um ponto *B* da mesma mais rapidamente do que seguindo qualquer outro caminho, mesmo que este seja retilíneo (caminho mais curto no plano, entre duas partículas).

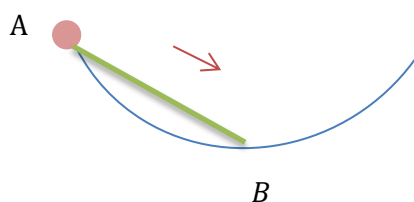


Figura 58 – Caminho mais curto (retilíneo) e caminho mais rápido (braquistócrona) entre dois pontos **A** e **B**

O problema da braquistócrona (do grego *brakhisto* que significa mais curto e *chronos* que significa tempo) surgiu na comunidade científica, quando *Galileu Galilei* começou por acreditar que o trajeto mais rápido entre dois pontos **A** e **B** seria o formado por um arco de circunferência, apesar do mais curto ser o retilíneo. Em 1696, *Joahnn Bernoulli* lançou o problema em *Acta Editorium*, dando uma margem de seis meses para que a solução do mesmo fosse encontrada, publicando “*Que aquele que consiga solucionar este problema conquiste o prémio que prometemos. Este prémio não é ouro nem prata (...) mas antes as honras, os elogios e os aplausos, (...) exaltaremos, publica e privadamente, por palavra e por carta, a perspicácia do nosso grande Apollo.*” Se no prazo estabelecido não surgisse nenhuma proposta, ele próprio publicaria a sua.

Gottfried Leibniz também se dedicou ao estudo desta curva, enviando por carta o mesmo problema aos maiores matemáticos da época, tendo a solução sido encontrada, simultaneamente, por si próprio, por *Isaac Newton*, *Guillaume L’Hôpital* e pelos irmãos *Bernoulli* (*Jacques* e *Joahnn*). Todos eles resolveram o problema. Os resultados por eles alcançados foram publicados no mesmo volume de *Acta Editorium*, em maio de 1697.

Vamos então procurar as equações que definem a braquistócrona.

Consideremos que uma partícula de massa m , inicialmente em repouso e sujeita à ação da gravidade, vai deslizar sobre uma curva qualquer desde um ponto $A(0,0)$ a um ponto $B(a,b)$, $b > 0$ da mesma. Pretendemos encontrar o caminho que minimiza o tempo desse deslocamento.

Para a força da gravidade ficar orientada no sentido positivo, o eixo do y deve ser traçado no sentido contrário ao usual, como ilustra a figura seguinte.

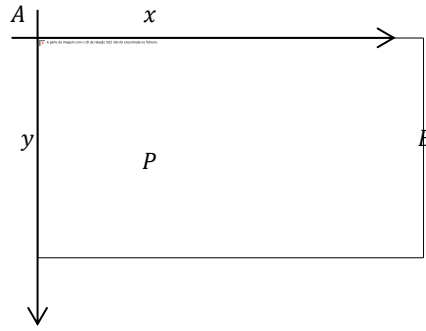


Figura 59 – Partícula que desliza sobre uma curva

Utilizando, uma vez mais, o princípio da conservação da energia mecânica, ou seja, que esta é constante ao longo de toda a trajetória, e tendo em conta que a energia mecânica no ponto $A(0,0)$ é dada por mgh , com $h = y(\theta) - y(\theta_A)$ e no ponto $P(x, y(x))$ da trajetória por $\frac{1}{2}mv^2 + mg(h - y(x))$, então:

$$E_{\text{mecânica no ponto } A} = E_{\text{mecânica no ponto } P} \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - y(x)) \Leftrightarrow v^2 = 2gy(x).$$

Por outro lado, sendo s o comprimento do arco, $\frac{ds}{dt} = v \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy(x)}$, a função $s(t)$ é invertível, pois é estritamente crescente, pelo que $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}$.

$$\text{Logo } \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \times \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \times \sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = f(x, y, y'). \quad (59)$$

O tempo total que a partícula vai levar para se deslocar do ponto $A(0,0)$ para o ponto $B(a, b)$ é dado pelo integral da expressão obtida em (59), ou seja, $t(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$, com as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(a) = b$. Notemos que $y(0) = 0$ e, por conseguinte, o integral obtido para $t(y)$ é impróprio.

Pretendemos então encontrar, de todas as soluções, a função $y(x)$ que minimiza t . A função f é de classe C^2 , isto é, as derivadas parciais de primeira e segunda ordens são contínuas.

Considerando a **equação de Euler-Lagrange** (c.f. Anexo B) $\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy'} \right) = 0$.

Assim, temos:

$$\left[\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy(x)} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \frac{g[1 + [y'(x)]^2]}{[2gy(x)]^2} + \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy(x)} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \frac{y'}{2gy(x)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{[2gy(x)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{dx} \left[\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}} \right] = 0.$$

Tendo em conta que a função integranda, f , não depende explicitamente de x , então $\frac{df}{dx} = 0$ e, neste caso, a equação de Euler-Lagrange é equivalente a considerar a equação $f - y' \frac{df}{dy'} = \text{constante}$, conhecida por **Hamiltoniana** (c.f. Anexo B). Então:

$$\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{2gy(x)}} - \frac{[y'(x)]^2}{\sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}} = k, k \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Deste modo, } \frac{1+[y'(x)]^2 - [y'(x)]^2}{\sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}} = \frac{k \times \sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}}{\sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}} \Leftrightarrow 1 = k \times \sqrt{2gy(x)(1+[y'(x)]^2)}.$$

$$\text{Simplificand,o temos } y[1+[y'(x)]^2] = k_1, k_1 \in \mathbb{R}^+. \text{ Temos } k_1 = \frac{1}{2gk^2}. \quad (61)$$

Consideremos a mudança de variável $y'(x) = tg t$, para $t \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Assim, e tendo em conta (61), temos:

$$k_1 = y[1+tg^2t] \Leftrightarrow y = \frac{k_1}{\left[1+\frac{\text{sen}^2 t}{\text{cos}^2 t}\right]} \Leftrightarrow y = k_1 \text{cos}^2 t. \quad (62)$$

$$\text{Usando em (62) a expressão } \text{cos } 2t = 2 \text{cos}^2 t - 1, \text{ obtemos } y(t) = \frac{k_1}{2} (\text{cos } 2t + 1). \quad (63)$$

$$\text{Deste modo, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = -k_1 \text{sen } 2t \frac{dt}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{k_1 \text{sen } 2t \times t'(x)}.$$

Por outro lado, sabendo que $y(x)$ é uma função invertível, por ser estritamente decrescente, então $\frac{dy}{dx} = tg t \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \text{cotg } t. \quad (64)$

$$\text{Usando (64) em (63), obtemos } t'(x) = -\frac{1}{k_1 \text{sen } 2t \times \text{cotg } t}.$$

A função $t(x)$ é também invertível, por ser estritamente monótona, pelo que:

$$x'(t) = -k_1 \text{sen } 2t \times \text{cotg } t = -2k_1 \text{sen } t \text{cos } t \times \frac{\text{cos } t}{\text{sen } t} = -2k_1 \text{cos}^2 t. \quad (65)$$

Usando a expressão $\text{cos}^2 t = \frac{\text{cos } 2t + 1}{2}$ e integrando ambos os membros de (65), obtemos:

$$x(t) = \int (-2k_1 \text{cos}^2 t) dt = -2k_1 \int \left(\frac{\text{cos } 2t + 1}{2} \right) dt = -k_1 \left(t + \frac{\text{sen } 2t}{2} \right) + k_2, \text{ com } k_1 \in \mathbb{R}^+ \text{ e } k_2 \in \mathbb{R}. \quad (66)$$

A solução obtida em (66) minimiza t , logo, satisfaz a equação de Hamilton e, conseqüentemente, de Euler-Lagrange, sendo dada por $x(t) = -k_1 \left(t + \frac{\text{sen } 2t}{2} \right) + k_2$ e $y(t) = \frac{k_1}{2} (\cos 2t + 1)$. (67)

Como $t = 0$ quando $x = 0$ e $y = 0$, então $k_2 = 0$.

Sendo $r = \frac{k_1}{2}$, com $r \in R^+$, as equações obtidas em (67) são da forma:

$$x(t) = -r(2t + \text{sen } 2t) \text{ e } y(t) = r(1 + \cos 2t), r \in R^+ \text{ e } t \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[. \quad (68)$$

Se considerarmos a mudança de variável $\alpha = 2t - \pi$, com $\alpha \in]0, \pi[$, de (68) obtém-se:

$$x(\alpha) = k_2 - r(\alpha + \pi + \text{sen } (\alpha + \pi)) = k_2 - r\pi - r(\alpha - \text{sen } \alpha).$$

$$y(\alpha) = r(1 + \cos (\alpha + \pi)) = r(1 - \cos \alpha) \quad , \alpha \in]0, \pi[.$$

Sempre que α se aproxima de 0, temos que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} y(\alpha) = 0$, então a curva passa na origem.

Temos ainda que $x(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (k_2 - r\pi - r(\alpha - \text{sen } \alpha)) = k_2 - r\pi = 0 \Leftrightarrow k_2 = r\pi$.

Logo, reescrevendo (68), temos:

$$x(\alpha) = -r(\alpha - \text{sen } \alpha).$$

$$y(\alpha) = r(1 - \cos \alpha) \quad , \alpha \in]0, \pi[.$$

As equações obtidas definem uma cicloide.

A título de curiosidade referenciamos ainda que a cicloide é um caso particular de uma outra curva chamada **trocóide**. Consideremos uma semireta com origem no centro da circunferência geradora e $P(x, y)$ um ponto da mesma. A **trocóide** é a curva descrita pela trajetória do ponto $P(x, y)$ quando a circunferência roda, sem deslizar, num plano horizontal.

Se o ponto $P(x, y)$ se localiza no exterior da circunferência geradora, a trocóide obtida é uma **cicloide longa**.

Se o ponto $P(x, y)$ se localiza na circunferência geradora, a trocóide obtida é uma **cicloide**.

Se o ponto $P(x, y)$ se localiza no interior da circunferência geradora, a trocóide obtida é uma **cicloide curta**.

Designando por r o raio da circunferência geradora e por R a distância do ponto $P(x, y)$ ao centro da mesma, as equações da trocóide são:

$$x(t) = rt - R \sin t$$

$$y(t) = r - R \cos t \quad , t \in \mathbb{R}.$$

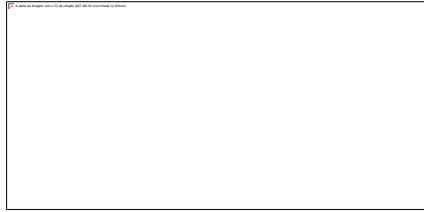


Figura 60 - Troc3oide

Atividade de Construção e Aplicação nº 6

A. Designação: À procura de propriedades da cicloide (tautocronia e braquistocronia) e de relações existentes com a circunferência que a gera.

B. Objetivos:

- Conhecimento das propriedades da cicloide (tautocronia e braquistocronia);
- Aplicação de conhecimentos.

C. Pré-requisitos:

- Diâmetro de uma circunferência;
- Área de uma circunferência;
- Eixo de simetria;
- Razões trigonométricas;
- Fórmula fundamental da trigonometria;
- Derivadas de funções trigonométricas.

D. Conteúdos:

- Cicloide, Braquistócrona e Tautócrona;

E. Destinatários: Alunos do secundário.

F. Duração da atividade: 90 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Materiais necessários: Cartolina, régua, compasso, marcador preto, tesoura, suporte de madeira.

H. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular;
- Os exercícios 1,2 e 3 são adaptados do livro “Aventuras Matemáticas”, de M. Guzmán, [11].

Descrição da atividade

1ª Parte: Construções com a cicloide

A **cicloide** é a curva gerada por uma circunferência que rola sem deslizar, num plano horizontal, tendo a seguinte forma:



Figura 1 – Cicloide

Chamamos **arco de cicloide** à curva obtida entre duas posições consecutivas no eixo das abcissas.

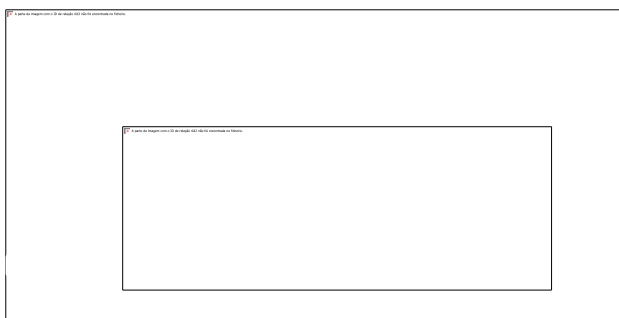


Figura 2 – Arco de uma Cicloide

Ao segmento de reta que une os extremos do arco de uma cicloide chamamos **diâmetro**.

1. A cicloide é uma curva que verifica a propriedade de tautocronia, isto é:

Se invertermos uma cicloide e na mesma, a diferentes alturas, deixarmos cair dois berlines, estes chegam ao ponto mais baixo da curva ao mesmo tempo.

Começa por construir uma cicloide.

- Desenha uma circunferência numa cartolina e corta-a.
- Traça um segmento de reta horizontal numa cartolina. Sobre o mesmo, coloca uma régua, de modo a ficar fixa, e na borda da circunferência faz um pequeno corte por onde o bico do lápis possa passar. Faz rodar a tua circunferência sem deslizar, da

esquerda para a direita, como ilustra a figura 1. Vais obter uma curva igual à da figura 3.

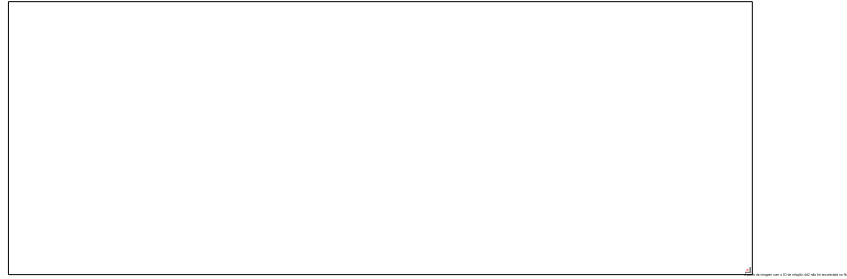


Figura 3

- Recorta a cicloide que obtiveste e inverte-a.
- A tracejado, desenha um eixo de simetria vertical na figura 3 e, na parte inferior da cicloide invertida, desenha uma ranhura por onde um berlinde consiga passar, como podes observar na figura 4.

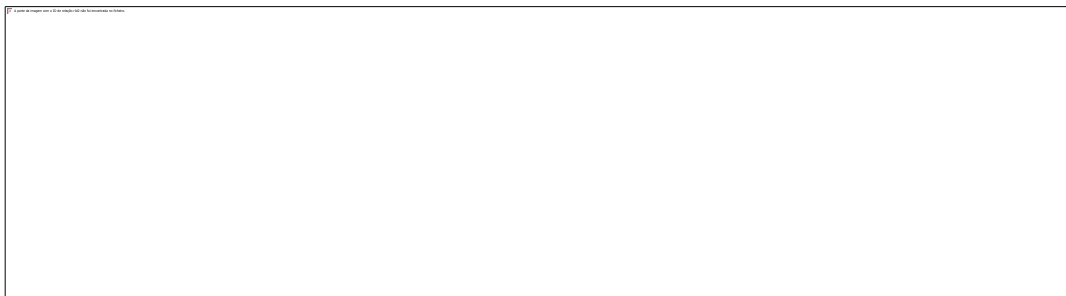


Figura 4

- Dobra o cartão pelo eixo de simetria traçado em 3.
- Dobra para dentro uma pequena borda de cartolina, de modo a que o berlinde possa deslizar sobre a mesma, ao longo da cicloide, sem cair, como ilustra a figura 5.

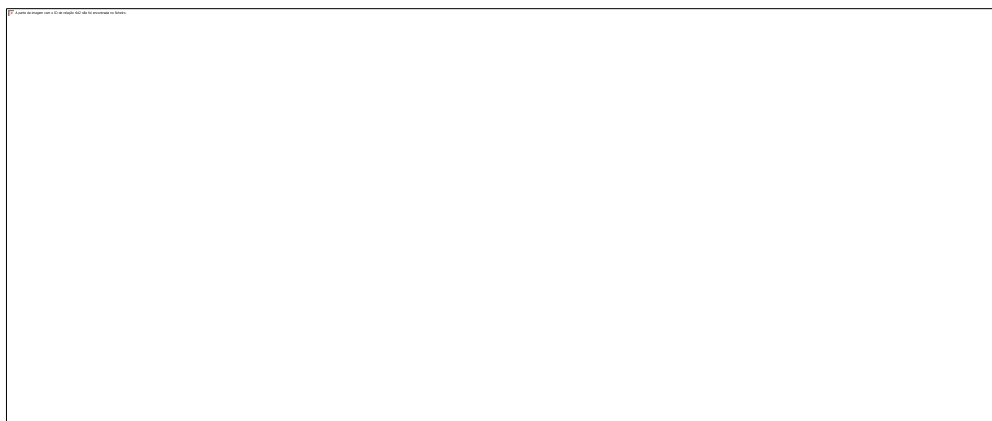


Figura 5

- Deixa cair 2 berlines iguais, um em cada metade da cicloide, mas a alturas distintas e regista os resultados que observaste.

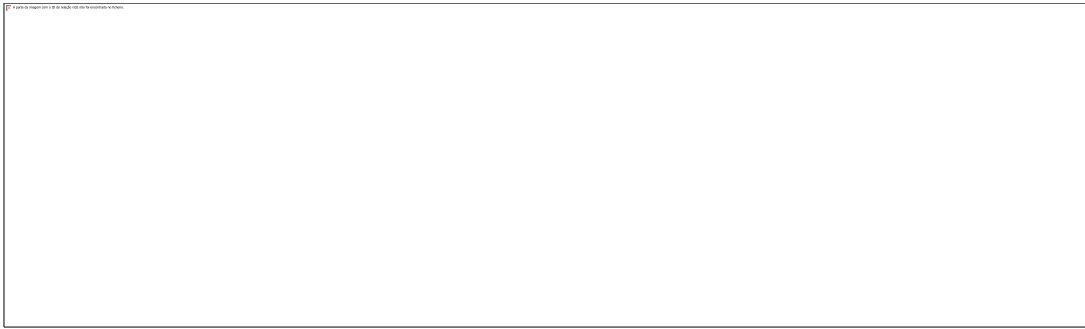


Figura 6

Se a tua construção foi bem feita, os berlines, apesar de lançados a diferentes alturas, atingem o ponto mínimo ao mesmo tempo e assim verificaste a propriedade de tautocronia da cicloide.

2. A cicloide é uma curva que verifica a propriedade de braquistocronia, isto é:

O caminho entre dois pontos da curva é o mais rápido possível, mesmo não sendo o mais curto.

- Num suporte de madeira como o da figura 7, fixa 2 trilhos de cartolina:
 - Um retilíneo com bordas, para que no mesmo possa deslizar um berline;
 - Um em forma de cicloide, dobrando as bordas para o mesmo fim.

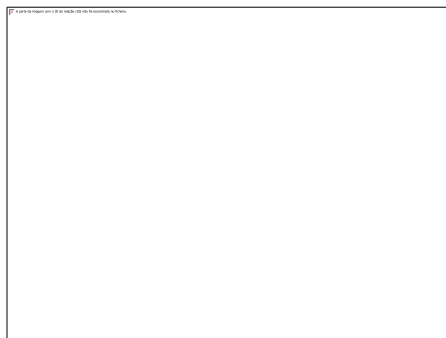


Figura 7

- Coloca em cada um dos trilhos dois berlines que sejam iguais e deixa-os deslizar.

Verifica o que acontece aos berlines e regista os resultados que obtiveste.

Se a tua construção foi bem feita, o berlinde que chegou primeiro foi o que seguiu pela trajetória da ciclóide.

3. A partir de 2 meias ciclóides é possível traçar um arco de ciclóide.

- Coloca uma folha de papel A_4 na horizontal e, na parte superior da mesma, junto à borda, traça um segmento de reta horizontal que una os extremos da folha. Marca nesse segmento de reta o respetivo ponto médio, designando-o por A .
- Partindo de A , desenha duas semiciclóides, uma no sentido da esquerda para a direita e outra no sentido da direita para a esquerda. Identifica o ponto de interseção da borda esquerda da folha com a semiciclóide por B e o que se obtém pela interseção da borda direita da folha com a outra semiciclóide por C , como ilustra a figura seguinte.



Figura 8

- Ajusta um fio ao arco AC, ficando um dos seus extremos no ponto A.
- No ponto C, prende no fio, o teu lápis, para que o mesmo possa traçar a curva que este vai descrever.
- Com o fio fixo numa extremidade em A e o lápis fixo na extremidade em C, arrasta-o para longe de C e verifica a curva que o mesmo descreveu.

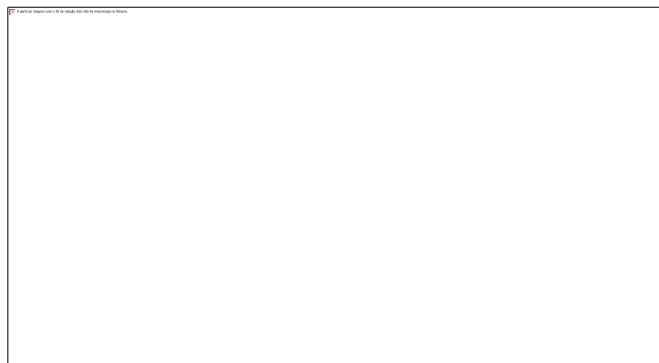


Figura 9

Se a tua construção foi bem feita, obtiveste um arco de ciclóide e assim verificaste que a partir de duas meias ciclóides, podemos obter um arco de ciclóide.

4. O comprimento da ciclóide é igual ao quádruplo do comprimento do seu diâmetro, ou seja, do segmento de reta que une os seus extremos.

- Recorta, num cartão, uma ciclóide e regista o seu diâmetro. (Cada aluno deve escolher a medida que achar conveniente).
- Coloca um fio na borda do cartão e mede-o.

Calcula a razão entre o comprimento da ciclóide e o comprimento do seu diâmetro.

Compara os resultados que obtiveste com os dos teus colegas.

Se fizeste bem as medições, verificaste que qualquer que seja o comprimento da ciclóide, este vai ser sempre o quádruplo do seu diâmetro.

2.ª Parte: Ciclóide e a circunferência que a origina: que relações existem entre estas duas curvas?

Já comprovámos no **exercício 4** que existe uma relação entre a ciclóide e a circunferência que a gera. Muitas outras relações podem ser encontradas. Vejamos algumas.

5. A área abaixo da ciclóide é igual ao triplo da área do círculo de raio R que a gera.

- 5.1.** Calcula o valor exato da área de um círculo com 7 cm de raio.
- 5.2.** Sabendo que a área abaixo de um arco de ciclóide é igual ao triplo da área do círculo de raio R que a gera, calcula o valor exato da área da tua ciclóide.

6. Circunferência e ciclóide – algumas propriedades.

Considera no plano Oxy :

- Uma circunferência de centro $C(a, b)$, com $a, b > 0$ e raio R , no primeiro quadrante que seja tangente ao eixo das abcissas.
- Um ponto P da mesma, que se encontra sobre o eixo das abcissas.

A circunferência vai rolar sem deslizar, ao longo do eixo das abcissas, da esquerda para a direita como ilustra a figura seguinte.

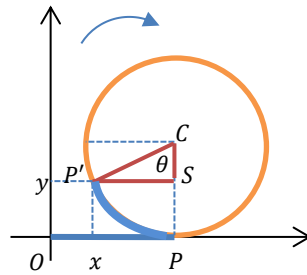


Figura 10 – Circunferência

Observa que:

- Quando o centro da circunferência está no eixo das ordenadas, o ponto P coincide com a origem do referencial.
- Quando a circunferência roda um pouco, da esquerda para a direita, o ponto P passa para $P'(x, y)$.

Seja θ o ângulo ao centro PCP' , tal que $\theta \in [0, 2\pi]$.

- 6.1. Escreve, em função de θ , uma expressão para $\overline{P'S}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.
- 6.2. Calcula o comprimento do arco PP' .
- 6.3. Qual é o valor de \overline{OP} ?
- 6.4. Sendo $P'(x, y)$ um ponto da circunferência como o indicado na figura, mostra que a sua abscissa x pode ser escrita, em função de θ , por:

$$x = R(\theta - \text{sen } \theta), \text{ para } \theta \in [0, 2\pi].$$

- 6.5. Tendo em conta a alínea anterior, calcula a expressão da derivada de x , em função de θ , e indica os valores de θ , caso existam, para os quais esta se anula.
- 6.6. Sendo $P'(x, y)$ um ponto da circunferência como o indicado na figura, mostra que a sua ordenada y pode ser escrita, em função de θ , por:

$$y = R(1 - \text{cos } \theta), \text{ para } \theta \in [0, 2\pi].$$

- 6.7. Mostra que $\frac{[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2]^{\frac{3}{2}}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} = -2\sqrt{2}R\sqrt{1 - \text{cos } \theta}$.

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 6

5.1. $A_{\text{circunferência}} = \pi \times 7^2 = 49\pi \text{ cm}^2$.

5.2. $A_{\text{ciclóide}} = 3 \times 49\pi = 147\pi \text{ cm}^2$.

6.1. Como a circunferência tem raio R , temos $\text{sen } \theta = \frac{\overline{P'S}}{R} \Leftrightarrow \overline{P'S} = R \text{sen } \theta$.

6.2. O comprimento do arco da circunferência PP' é dado por $R\theta$.

6.3. O segmento de reta $[OP]$ tem o mesmo comprimento que o arco da circunferência PP' , visto que a circunferência rolou sem deslizar, logo $\overline{OP} = R\theta$.

6.5. Temos $x' = R - R \cos \theta$. A função derivada anula-se quando:

$$R - R \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = 2\pi.$$

Relatório da atividade sobre a construção de uma cicloide (1ª parte)

Não foi aplicado nenhum dos exercícios presentes na atividade anteriormente mencionada, mas apenas pedido aos alunos a construção, em grupo, de cicloides (1ª parte do relatório) e de hipocicloides e epicicloides (2ª parte do relatório), através de rodas dentadas, gentilmente cedidas pelo Museu Municipal do Crato, que outrora serviram de base à Metalúrgica do Crato – principal empregadora da época.

A atividade foi realizada por 25 alunos do 10º ano do curso técnico de turismo da Escola Profissional Agostinho Roseta – Pólo do Crato.

Data da realização da atividade: 28 de Novembro de 2012

Contexto em que a atividade foi proposta:

- Escola Profissional Agostinho Roseta – No âmbito do módulo de Geometria

Ainda em contexto de sala de aula, os alunos foram informados do modo como deveriam construir a cicloide, ou seja, traçar a curva obtida por uma circunferência fixa que rola, sem deslizar, ao longo de um plano horizontal. De seguida, foram encaminhados para o local de realização da atividade com os materiais supra indicados.

Uma vez terminada a construção da cicloide, foi-lhes explicado, em traços gerais, sem demonstrações formais, algumas das propriedades desta curva.

Balanco da atividade:

A atividade permitiu aos alunos praticarem construções geométricas adquirindo, ao longo dessa mesma construção, um conjunto de conhecimentos sobre a história e as principais propriedades da curva em questão. Foi feita uma breve referência às propriedades de braquistocronia e tautocronia que suscitaram o interesse dos alunos, evidenciando-se motivação para uma pesquisa mais aprofundada sobre o assunto, dada a natureza da designação dessas mesmas propriedades. Por uma questão de tempo, não foi possível permitir, em contexto de sala de aula, a pesquisa solicitada. No entanto, todos os alunos foram convidados a tomarem, individualmente, a iniciativa de procurarem para partilharem os resultados obtidos, numa fase final.

Outras propriedades foram ainda exemplificadas no local, como por exemplo, a comparação entre o comprimento do arco de uma cicloide com o da circunferência que a origina. Assim, com uma linha, contornou-se a cicloide obtida de modo a comparar o comprimento dessa linha com o da que contornou a circunferência (roda dentada) geradora.

A cooperação entre o grupo de alunos e o espírito de ajuda permitiu que o objetivo inicialmente proposto para esta atividade, nomeadamente a construção de uma cicloide a partir de uma placa acrílica branca e de rodas dentadas de diferentes tamanhos, fosse alcançado através da adaptação de materiais e com condições inesperadas.

Atividade de Aplicação nº 7 - Construção recorrendo ao programa GeoGebra

A. Designação: Ciclóide através do GeoGebra.

B. Objetivos:

- Construir a cicloide;
- Desenvolver competências ao nível do programa GeoGebra.

C. Pré-requisitos:

- Segmentos de reta e retas;
- Posições relativas de duas retas;
- Rotação de centro num ponto A e ângulo de rotação θ ;
- Circunferência;
- Cicloide.

D. Conteúdos:

Construções geométricas.

E. Destinatários: Alunos do 9º ano e do secundário.

F. Duração da atividade: 60 minutos para a resolução.

G. Materiais necessários: Programa GeoGebra e computador.

H. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular;
- Esta atividade pode ser aplicada a todas as curvas estudadas nesta dissertação, bastando substituir os respetivos passos de construção;
- Os passos orientadores da construção da cicloide são adaptados do livro “A Book of Curves”, de E. Lockwood, [13].

Descrição da atividade

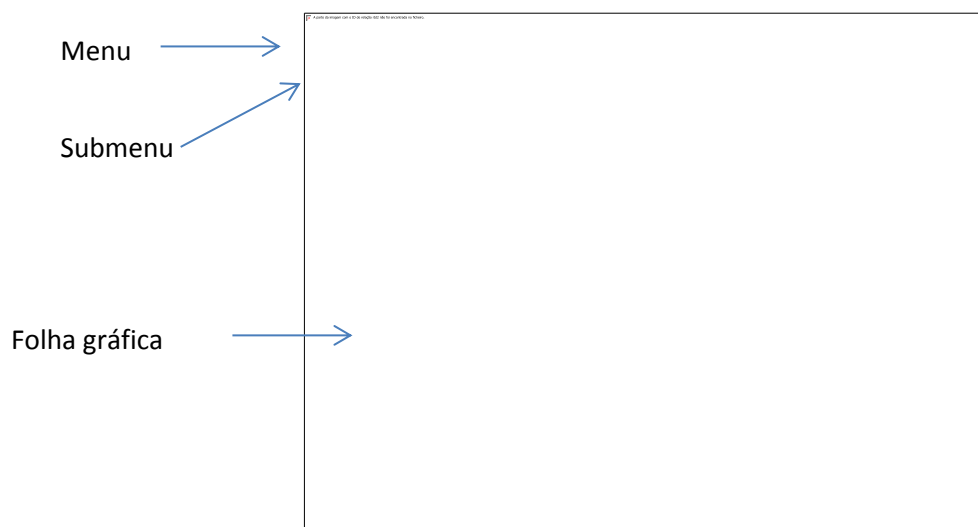
O **GeoGebra** é um software desenvolvido por Markus Hohenwarter e que permite construções geométricas, introduções de funções e de cálculos algébricos, permitindo a alteração dinâmica de objetos envolvidos nestas construções.

A **ciclóide** é uma curva muito popular na comunidade matemática, tendo sido descoberta por Charles Bouvelles, apesar do respetivo nome se dever a Galileu Galilei. Esta curva é utilizada na física, na mecânica e na matemática e tem propriedades interessantes.

O que te propomos é a construção de uma ciclóide através do GeoGebra, seguindo as orientações seguintes.

Deves, ao longo da tua construção, registar os aspetos em que tiveres mais dificuldades para, no final, elaborares um pequeno relatório onde os mesmos sejam evidenciados.

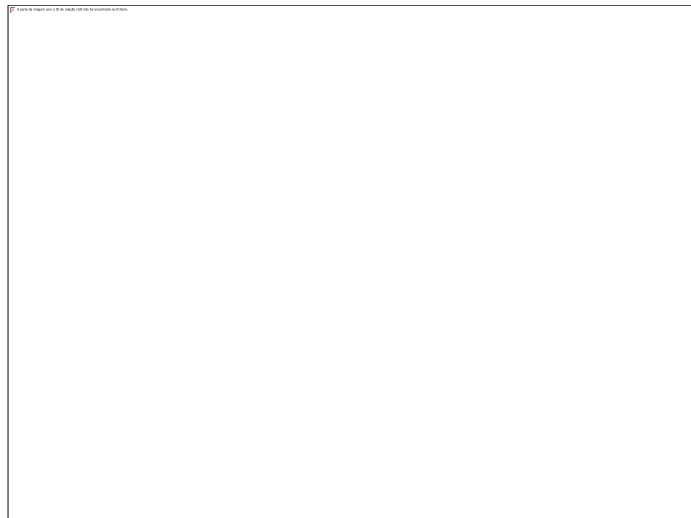
Apresentamos a legenda da terminologia que irá ser utilizada.



Os submenus serão numerados da esquerda para a direita.

1.º Abre a aplicação **GeoGebra**.

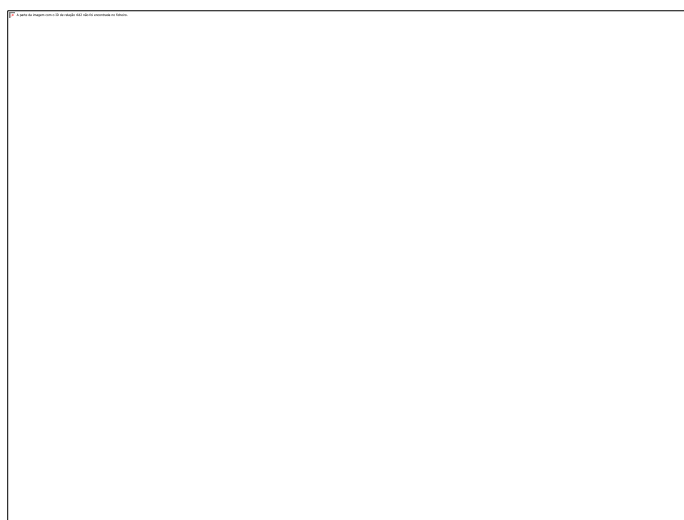
2.º Na tua folha gráfica, insere os pontos $A(2,4)$ e $B(5,4)$, recorrendo ao submenu **2** e selecionando no mesmo a opção **“Novo Ponto”**.



Clica próximo da folha gráfica onde se localizam esses pontos e, com o rato, podes deslocá-los até os mesmos terem as coordenadas pretendidas. Podes ainda clicar por cima do ponto que aparece no menu lateral esquerdo, digitando manualmente essas mesmas coordenadas.

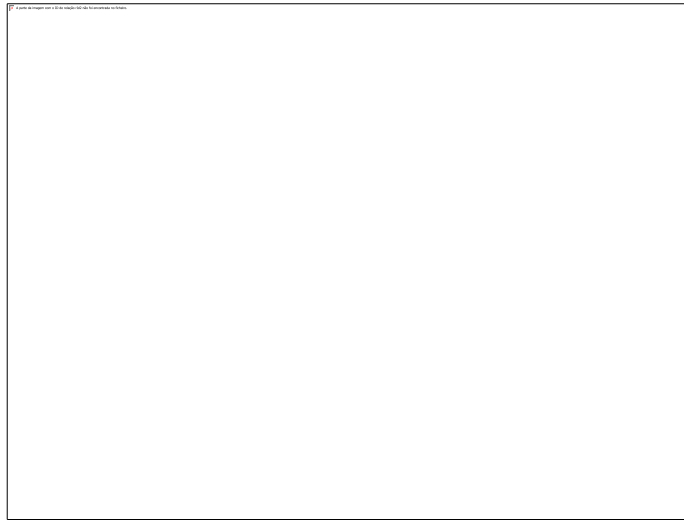
3.º Traça uma reta horizontal que contenha os dois pontos assinalados no passo anterior, recorrendo ao submenu **3** e selecionando no mesmo a opção **“Reta (Dois pontos)”** e, de seguida, clicando em cima dos pontos pretendidos. Designa por s a reta obtida. Para tal, clica por cima da reta que aparece no menu lateral esquerdo e, com o botão do lado esquerdo do rato, seleciona **“Renomear”**.

4.º Traça uma reta paralela à reta s que esteja a uma distância de 2,5 unidades desta, localizando-se por cima da mesma. Para tal, marca o ponto $C(2; 6,5)$. Recorre ao submenu **4** e seleciona no mesmo a opção **“Reta Paralela”**, clicando, de seguida, em cima do ponto C e da reta s .

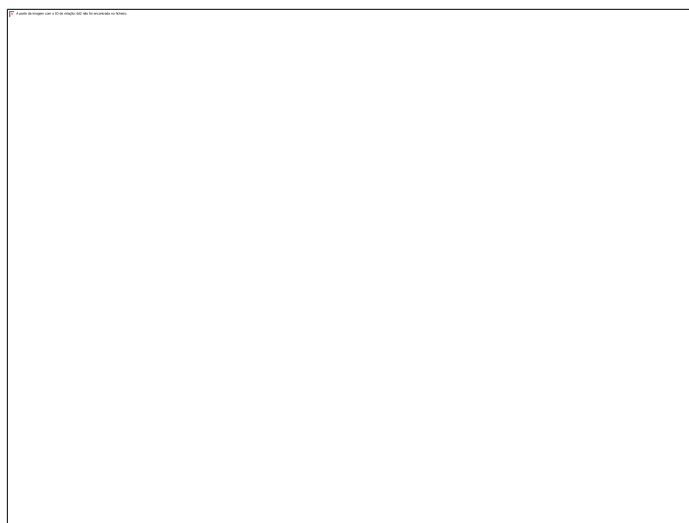


Designa por r a reta obtida.

5.º Na reta s marca, a partir do ponto A , 18 pontos, da esquerda para a direita, a uma distância de 0,9 unidades entre si. Repete o procedimento para a reta r , iniciando no ponto C . Para ser mais fácil a marcação desses pontos, recorre ao menu “Opções”, selecionando “Arredondamento” e, de seguida, “1 Número Decimal”.



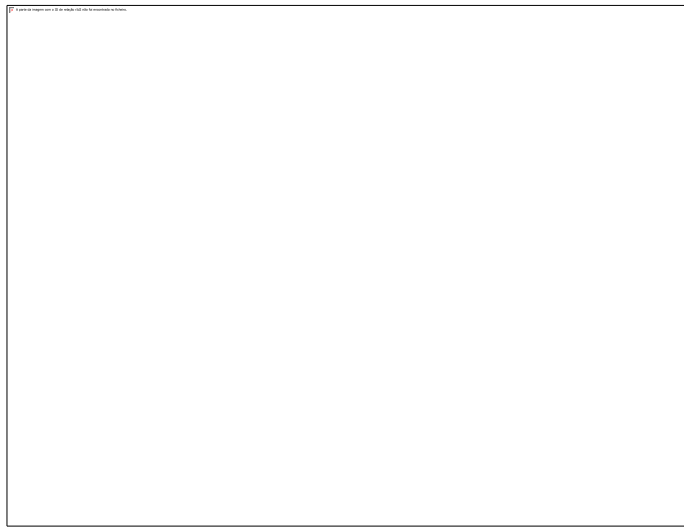
6.º Retira o rótulo em todos os pontos obtidos. Para tal, clica por cima do ponto que aparece no menu lateral esquerdo e, com o botão do lado esquerdo do rato, seleciona “Mostrar Rótulo”.



7.º Traça todos os segmentos de retas verticais que unem os pontos com igual abcissa. Para tal, recorre ao submenu **3**, selecionando a opção “Segmento de Reta (Dois Pontos)” e, de seguida, clica nos dois pontos considerados.

8.º Retira o rótulo em todos os segmentos de reta obtidos.

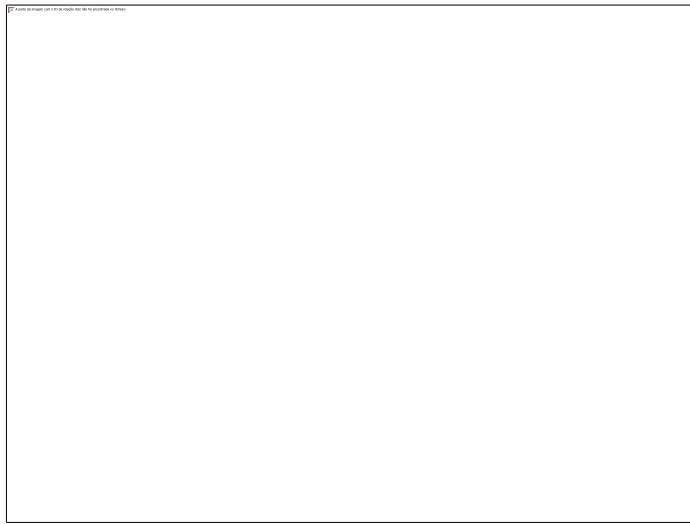
9.º Com centro em cada um dos pontos obtidos na reta r , constrói circunferências com 2,5 cm de raio. Para tal, recorre ao submenu **6**, seleccionando a opção “**Circunferência (Centro, Ponto)**” e, de seguida, clica por cima do ponto da reta r que será o centro e depois no ponto da reta s por onde a circunferência deve passar.



Para poderes visualizar a tua construção, podes precisar de minimizar a área visível. Para tal, recorre ao submenu **12**, seleccionando a opção “**Reduzir**”.



10.º Traça um ângulo cujo vértice é o primeiro ponto da reta r , o seu lado origem é o segmento de reta vertical que o contém e cuja extremidade pertence à reta s , e com amplitude 0° (sentido dos ponteiros do relógio). Para tal, recorre ao submenu **8**, seleccionando a opção “**Ângulo com uma dada amplitude**” e, de seguida, clica primeiramente sobre o ponto, depois sobre lado origem e indica o valor do ângulo, no sentido horário, de 0° .



Tendo em conta o lado extremidade do ângulo desenhado, traça o raio (segmento de reta), contido no mesmo, em que um dos extremos é o primeiro ponto da reta r .

11.º Repete o procedimento para o segundo ponto da reta r e considera o ângulo com o lado origem de 20° , também no sentido horário.

12.º Repete o procedimento para o terceiro ponto da reta r e considera o ângulo com o lado origem de 40° , também no sentido horário e assim sucessivamente, até ao último ponto onde o ângulo com o lado origem é de 360° .

13.º Retira os rótulos de todos os objetos que construístes.

14.º Assinala a verde, e com uma maior espessura, os segmentos de reta obtidos. Para tal, clica sobre cada um com o botão do lado esquerdo do rato e seleciona a opção **“Propriedades dos Objetos”** onde aparece **“Cor”** e **“Estilo”**.



15.º Constrói arcos circulares entre três pontos consecutivos, começando no primeiro ponto da esquerda. Para tal, recorre ao submenu **6**, selecionando a opção **“Arco Circular (Três Pontos)”** e clica, de seguida, nos três pontos pretendidos. Coloca a azul, e com maior espessura, todos os arcos que obtiveres.

16.º Retira os eixos coordenados. Para tal, clica por cima de cada um com o botão do lado esquerdo do rato e seleciona a opção **“Eixos”**.

No final, obténs a seguinte figura:



Atividade de Aplicação nº 8 - Construção recorrendo ao programa *Winplot*

A. Designação: Rampas de skate.

B. Objetivos:

- Concluir que o caminho mais curto entre dois pontos nem sempre é o mais rápido;
- Desenvolver competências ao nível do programa *Winplot*.

C. Pré-requisitos:

- Função afim: Equação reduzida de uma reta;
- Função quadrática: Equação geral de uma parábola;
- Equação de uma circunferência;
- Equações da cicloide;
- Transformação de funções da forma $y = kf(x)$, com $k \in R$.

D. Conteúdos:

Retas, circunferências, parábolas e cicloides.

E. Destinatários: Alunos do secundário.

F. Duração da atividade: 60 minutos para a resolução.

G. Materiais necessários: Programa *Winplot* e computador.

H. Observações:

- A atividade pode ser aplicada como complemento curricular;
- A atividade foi adaptada do artigo “Modelagem Matemática de Pistas de *Skate*”, publicado na FAMAT- Revista Científica Eletrónica da Faculdade de Matemática em sala de Aula, [16];
- Esta atividade pode ser aplicada após a **Atividade de Aplicação nº 6**. Caso não o seja, o exercício 6 da mesma deve iniciar a **Atividade de Construção Recorrendo ao *Winplot***.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

O **skate** é um desporto radical que foi descoberto em 1690, na Califórnia, e tem como objetivo o equilíbrio numa prancha com quatro rodas e dois eixos (*trucks*) ao longo de uma rampa, enquanto se realizam manobras de diversão.

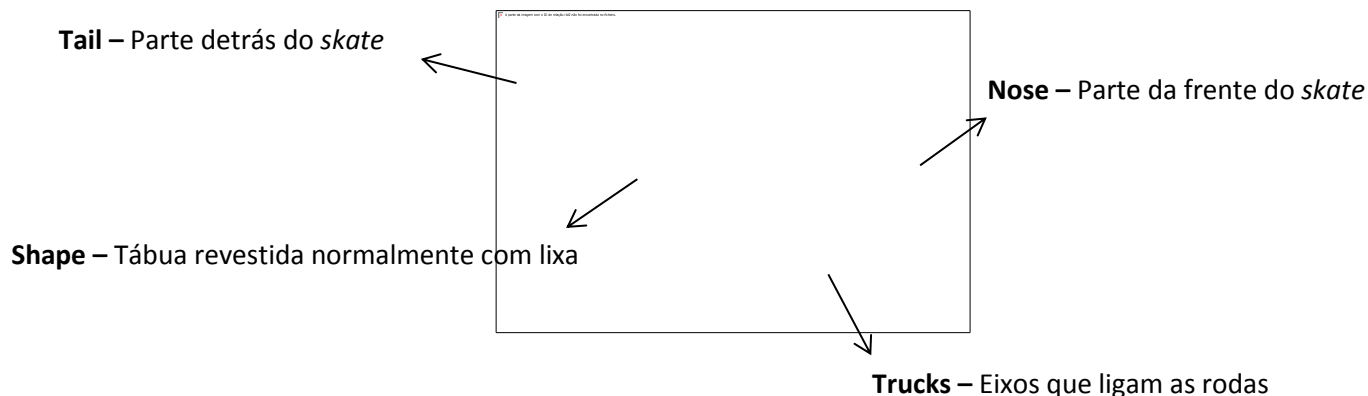


Figura 1 – Skate

O praticante de *skate* é conhecido por **skater**.

Nas competições amadoras e profissionais deste tipo de desporto, a seleção dos vencedores baseia-se no grau de dificuldade das manobras dos skaters, bem como na respetiva criatividade. Pretende-se, então, que o skater percorra a rampa no menor tempo possível para que lhe possa sobrar mais tempo para as manobras que pretende fazer, de modo a convencer o respetivo júri.

A rampa deste desporto tem uma forma semelhante à ilustrada na figura seguinte.



Figura 2 - Rampa de skate

O João é um *skater* com 16 anos de idade e muito curioso. Ele pensou que o percurso completo na rampa, da esquerda para a direita, podia ser dividido em três fases, nomeadamente:

1ª fase: Descida através de uma curva.

2ª fase: Deslize em linha reta, da esquerda para a direita.

3ª fase: Subida através de uma curva igual à da descida.

Tendo em conta a sua curiosidade, o João perguntou ao professor de Matemática que curva deveria ser aquela associada à subida e à descida de modo a que o *skater* a pudesse percorrer no menor tempo possível. O professor respondeu-lhe:

“Em vez de te dizer diretamente a resposta, dou-te algumas pistas e tu decerto lá chegarás!

A curva pode ser:

- Uma parábola com vértice em $(\pi, 0)$ e que passa no ponto $(0,2)$.
- Uma reta que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$.
- Uma circunferência de raio r , que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$, cuja abcissa do centro é π e a ordenada é positiva.
- Uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1.

Com estas orientações, desenrasca-te!”

Para o João conseguir obter a resposta que pretende, precisa da tua ajuda. Deste modo, responde às questões seguintes agrupadas em duas partes. Numa **primeira parte**, procuram-se as equações das curvas envolvidas apenas na descida, pois na subida são iguais. Numa **segunda parte**, recorre-se a um programa matemático, **Winplot**, que permite visualizar as curvas obtidas, bem como a velocidade com que um objeto percorre as mesmas.

1ª Parte

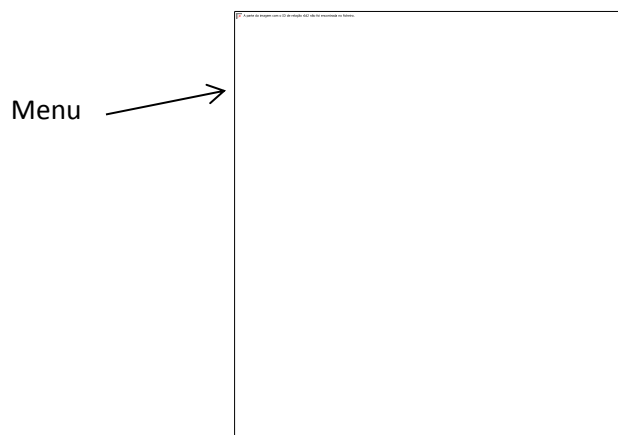
1. Escreve a equação da **função quadrática** cujo gráfico é uma parábola com vértice em $(\pi, 0)$ e que passa no ponto $(0,2)$.
2. Escreve a equação da **função afim** cujo gráfico é uma reta que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$.
3. Escreve a equação da **circunferência** de raio r que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$, cuja abcissa do centro é π e a ordenada é positiva. Resolve a equação obtida em ordem a y .
4. Escreve as equações da **cicloide** gerada por uma circunferência de raio 1.

5. Considera uma cicloide C_1 gerada por uma circunferência de raio r . Chama-se **cicloide invertida** de C_1 , à cicloide obtida a partir da original, após uma reflexão relativa ao eixo das abcissas. Escreve as equações da cicloide gerada por uma circunferência de raio 3 e, de seguida, as da **cicloide invertida**.

2ª Parte

O **Winplot** é um software desenvolvido por *Richard Parris*, professor da *Philips Exeter Academy* que permite construções geométricas, como curvas e superfícies, gráficos de funções e animação dos mesmos e cálculos algébricos, quer a duas, quer a três dimensões.

Apresentamos a legenda da terminologia que irá ser utilizada.



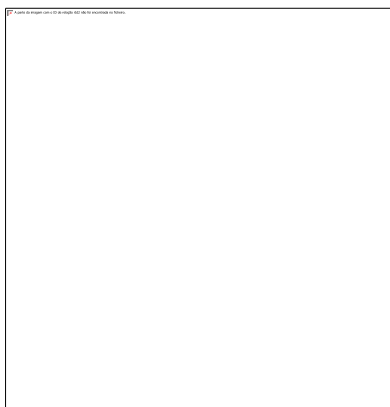
Notações a utilizar:

- Sempre que quiseres introduzir uma exponencial, usa o símbolo “^”.
- Sempre que quiseres introduzir o valor de π , escreve “pi”.
- Sempre que quiseres introduzir a função seno, escreve “sin”.
- Sempre que quiseres introduzir a raiz quadrada de um número ou de uma função, escreve “sqr”.
- O parâmetro a utilizar deve ser representado por t .

6. Recorrendo ao programa **Winplot**, representa graficamente a função quadrática cujo gráfico é uma parábola com vértice em $(\pi, 0)$ e que passa no ponto $(0,2)$.

No menu “**Equação**”, seleciona a opção “**Explícita**” e introduz a equação que obtiveste em **1**.

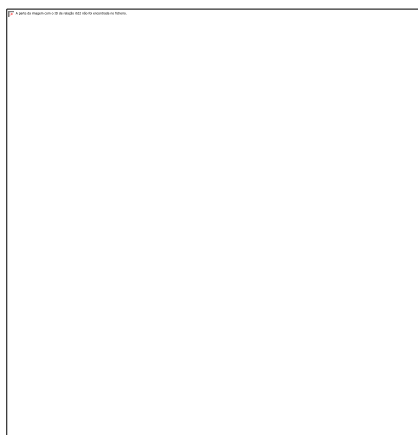
6.1. Obtém o gráfico relativo ao intervalo $[0, \pi]$. Para tal, na opção **“Inventário”**, escolhe a tua função, seleciona **“travar intervalo”** e indica os valores mínimos e máximos de x que te são pedidos na janela editada da função.



7. Representa, no mesmo gráfico, a função afim cujo gráfico é uma reta que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$.

No menu **“Equação”**, seleciona a opção **“Reta”** e introduz a equação que obtiveste em **2**.

7.1. Obtém o gráfico relativo ao intervalo $[0, \pi]$.

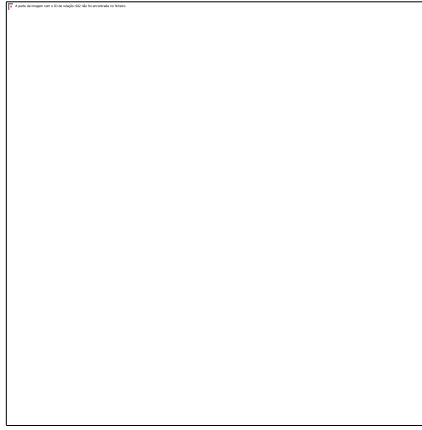


8. Representa, no mesmo gráfico, a circunferência de raio r que passa nos pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$, cuja abscissa do centro é π e a ordenada é positiva.

No menu **“Equação”**, seleciona a opção **“Explícita”** e introduz a equação que obtiveste em **3**.

Observação:

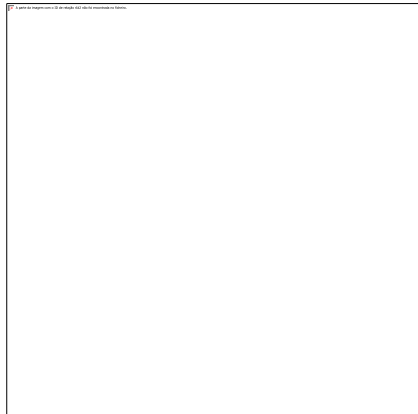
- Se pretendes obter o arco superior da circunferência, considera o y positivo e, caso pretendas o arco inferior, o valor de y deverá ser negativo.



9. Representa, no mesmo gráfico, a cicloide gerada por uma circunferência de raio 1.

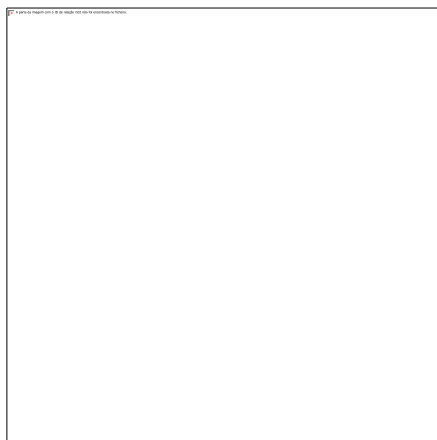
No menu “Equação”, seleciona a opção “Paramétrica” e introduz as equações que obtiveste em 4.

9.1. Obtém o gráfico relativo ao intervalo $[0, \pi]$.



9.2. Escreve as equações da cicloide invertida cujo extremo inicial é o ponto $(0,2)$.

9.3. Substitui a cicloide construída em 8.1 pela obtida em 8.2.



10. Ajusta a tua janela de visualização. No menu “Ver”, seleciona a opção “Enquadrar janela”.

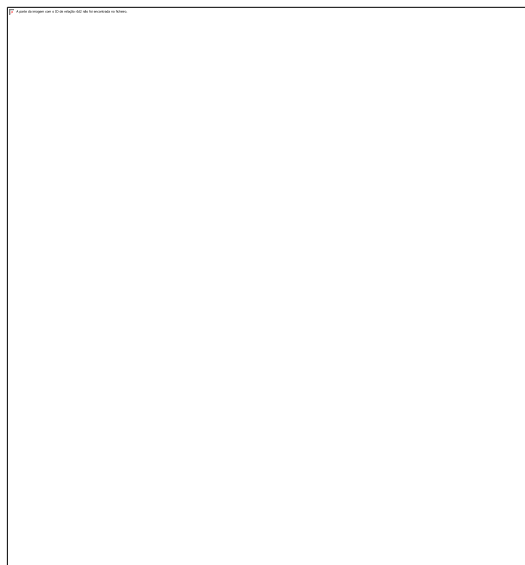
11. Calcula o comprimento de cada um dos arcos das curvas representadas.

No menu “Um”, seleciona a opção “Medidas” e, nesta, “Comprimento do arco”. Seleciona a curva pretendida, indica os extremos do arco da curva considerada e clica no botão “comprimento”.

Que conclusões obtiveste?

12. Em cada uma das curvas, coloca um ponto genérico e anima-os, em simultâneo, de modo a observares em qual das curvas esse ponto chega primeiro a $(\pi, 0)$.

No menu “Equação”, seleciona a opção “Ponto” e, nesta, “ (x, y) ”. No x , coloca a letra a e escreve y em função de a para cada uma das curvas, ou seja, os pontos devem ser da forma $(a, f(a))$



No ponto referente à cicloide, em vez de a , introduz a equação que define x , substituindo a abcissa por a .

13. Anima, simultaneamente, os quatro pontos.

No menu “Animação”, seleciona “Parâmetros A-W...” e, para cada um dos parâmetros A, B, C e D, faz a animação em $[0, \pi]$. Para tal, introduz 0 e clica em “def L” (extremo esquerdo) e depois introduz “pi” e clica em “def R”(extremo direito). Seleciona “auto cicl” (mostra a trajetória do início ao fim) e verás os pontos a percorrerem cada uma das curvas até ao final das mesmas.

Que conclusões obtiveste?

14. Que forma deve então ter a curva da descida de uma rampa de skate?

SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DA ATIVIDADE Nº 8

1ª Parte

1. A expressão geral de uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola, é $y = a(x - h)^2 + k$, sendo (h, k) o vértice da parábola. Como o vértice da parábola é $(\pi, 0)$ e passa no ponto $(0, 2)$, então temos $2 = a(0 - \pi)^2 + 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\pi^2}$. Deste modo, a equação pedida é $y = \frac{2}{\pi^2}(x - \pi)^2$.

2. A expressão geral de uma função afim, cujo gráfico é uma reta, é $y = mx + b$, sendo m o declive da reta e b a ordenada na origem. Como a reta passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(\pi, 0)$, então temos $2 = \frac{-2}{\pi} \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 2$.

Deste modo, a equação pedida é $y = \frac{-2}{\pi}x + 2$.

3. A expressão geral de uma circunferência é $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, sendo (x_c, y_c) o centro da circunferência e r o respetivo raio.

Como a circunferência tem raio r , passa nos pontos $(0, 2)$ e $(\pi, 0)$ e a abcissa do centro é π , então temos:

$$\begin{cases} (0 - \pi)^2 + (2 - y_c)^2 = r^2 \\ (\pi - \pi)^2 + (0 - y_c)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^2 + (2 - r)^2 = r^2 \\ y_c = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^2 - r^2 + 4 - 4r + r^2 = 0 \\ y_c = r \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{\pi^2 + 4}{4} \\ y_c = \frac{\pi^2 + 4}{4} \end{cases}$$

Deste modo, a equação pedida é $(x - \pi)^2 + \left(y - \frac{\pi^2 + 4}{4}\right)^2 = \left(\frac{\pi^2 + 4}{4}\right)^2$.

Resolvendo em ordem a y , obtemos:

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{\pi^2 + 4}{4}\right)^2 - (x - \pi)^2} + \frac{\pi^2 + 4}{4}.$$

Como a ordenada é positiva, seleciona-se a expressão com sinal positivo.

4. As equações de uma cicloide de raio r são dadas por:

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y(\theta) = R(1 - \operatorname{cos} \theta), \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Para uma cicloide de raio 1, as equações pedidas são:

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \operatorname{sen} \theta \\ y(\theta) = 1 - \operatorname{cos} \theta, \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

5. Para uma cicloide de raio 3, as equações pedidas são:

$$\begin{cases} x(\theta) = 3(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y(\theta) = 3(1 - \operatorname{cos} \theta), \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Para ficar invertida, temos de efetuar uma reflexão relativamente ao eixo das abcissas, pelo que, em vez de $y(\theta)$, passamos a ter $-y(\theta)$. Deste modo, as equações paramétricas da cicloide invertida são:

$$\begin{cases} x(\theta) = 3(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y(\theta) = -3(1 - \operatorname{cos} \theta), \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

2ª Parte

9.2. Para ficar invertida, temos de efetuar uma reflexão relativamente ao eixo das abcissas, pelo que, em vez de $y(\theta)$, passamos a ter $-y(\theta)$. Na sequência, é necessário fazermos uma translação associada ao vetor $(0, 2)$. Assim:

$$\begin{cases} x^*(\theta) = \theta - \operatorname{sen} \theta \\ y^*(\theta) = -1 + \operatorname{cos} \theta + 2, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

11. O comprimento do arco da parábola definido entre as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ é, aproximadamente, 3,853333.

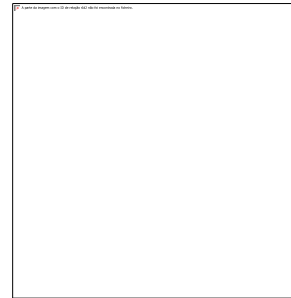
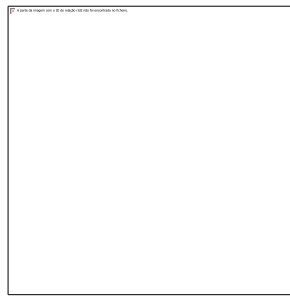
O comprimento do arco da cicloide invertida, definido entre as retas de equação $x = 0$ e $x = \pi$ é 4.

O comprimento do segmento de reta de extremos $(0, 2)$ e $(\pi, 0)$ é, aproximadamente, 3,724192. (por aplicação do teorema de Pitágoras)

O comprimento do arco da circunferência é 3,93142.

Concluimos que o caminho mais curto entre os pontos $(0,2)$ e $(\pi, 0)$ é o retilíneo e a cicloide invertida é a curva com arco de maior comprimento.

13. O primeiro ponto a chegar ao final da respetiva curva é o que percorre a cicloide.



14. Apesar da curva maior ser a cicloide invertida, é a que demora menos tempo a ser percorrida. Deste modo, a forma ideal da descida da rampa deve ser a de uma cicloide invertida.

3.2. Hipociclóides

Introdução

A **hipociclóide** é a curva obtida pela trajetória que um ponto de uma circunferência, quando esta roda, sem deslizar, no interior de uma outra circunferência fixa, à qual é tangente. A circunferência fixa também é conhecida por **circunferência diretora** ou diretriz. Notemos que se uma circunferência está dentro de outra, a que roda, tanto pode ser a de fora como a de dentro.

O nome desta curva deriva do grego *hypo* que significa *sob*.

Estudo da curva

Consideremos duas circunferências C_1 e C_2 tais que C_1 tem centro no ponto O (origem) e raio b e C_2 tem centro no ponto C , e raio a , com $a < b$. A circunferência C_2 é tangente à circunferência C_1 e roda sem deslizar no interior desta. Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário de C_2 e $Q(x, 0)$, com $x > 0$, um ponto pertencente ao eixo das abcissas, sendo inicialmente o ponto de tangência das duas circunferências. Sem perda de generalidade, consideremos que quando a circunferência C_2 começa a rodar, tangente a C_1 , o ponto $P(x, y)$ coincide com o ponto $Q(x, 0)$. Quando circunferência C_2 roda, sem deslizar no interior da circunferência C_1 , ϕ graus, no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) iniciando o seu movimento no primeiro quadrante, o ponto $P(x, y)$ descreve um arco $Q'P$, sendo Q' a posição que o ponto $Q(x, 0)$ passou a ocupar. Simultaneamente é traçado o arco QQ' com centro na origem e que descreveu um ângulo de θ graus, no sentido positivo, como podemos observar na figura seguinte.

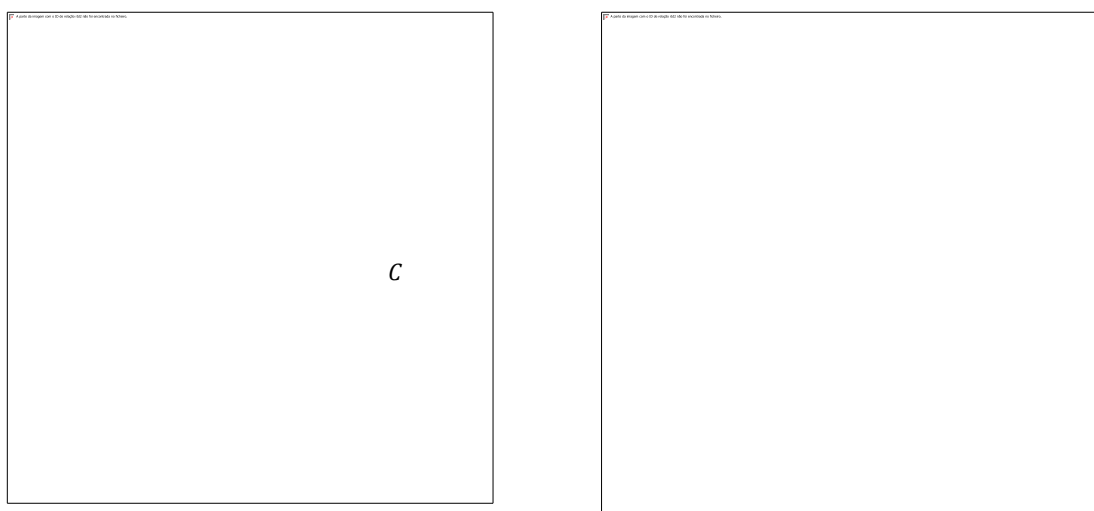


Figura 61 – Sequência de construção de uma hipociclóide

Proposição 57. A hipociclóide é definida parametricamente por:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= (b - a)\cos \theta + a\cos \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]. \\y(\theta) &= (b - a)\sen \theta - a\sen \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right], \quad \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{69}$$

Demonstração. As coordenadas de $P(x, y)$ relativamente a C são dadas por:

$$\begin{aligned}x(\phi) &= a\cos \phi. \\y(\phi) &= -a\sen \phi.\end{aligned}\tag{70}$$

Por sua vez, as coordenadas de C relativamente a O são:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= (b - a)\cos \theta. \\y(\theta) &= (b - a)\sen \theta.\end{aligned}\tag{71}$$

Tendo em conta (70) e (71), obtemos as coordenadas de $P(x, y)$ relativamente a O , nomeadamente:

$$\begin{aligned}x(\theta, \phi) &= (b - a)\cos \theta + a\cos \phi. \\y(\theta, \phi) &= (b - a)\sen \theta - a\sen \phi.\end{aligned}\tag{72}$$

Notemos que, ao se movimentar, os arcos da circunferência que roda são iguais aos arcos com as quais entram em contato, da circunferência fixa, nomeadamente, os arcos QQ' e $Q'P$, de comprimentos $b\theta$ e $a(\theta + \phi)$ respetivamente. Assim:

$$b\theta = a(\theta + \phi) \Leftrightarrow \frac{b\theta}{a} - \theta = \phi \Leftrightarrow \phi = \theta \left(\frac{b - a}{a} \right).\tag{73}$$

Usando (73) em (72) obtemos:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= (b - a)\cos \theta + a\cos \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]. \\y(\theta) &= (b - a)\sen \theta - a\sen \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]. \blacksquare\end{aligned}$$

As hipociclóides têm mais do que uma cúspide. O número de cúspides deste tipo de curvas depende da razão entre b e a , raios da circunferência fixa e da que roda sem deslizar, respetivamente.

Quando $\frac{b}{a}$ é um número racional da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, a curva tem m cúspides quando a circunferência roda n vezes em torno da circunferência fixa e fica totalmente traçada após n voltas.

Por exemplo, se $\frac{b}{a} = 5$, a curva tem cinco cúspides quando a circunferência roda uma vez em torno da circunferência fixa e no final de uma volta completa, a hipociclóide fica totalmente traçada.

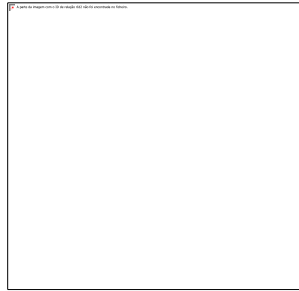


Figura 62 – Hipociclóide com 5 cúspides

Se considerarmos $\frac{b}{a} = 7$, a curva tem sete cúspides quando a circunferência roda uma vez em torno da circunferência fixa e no final de uma volta completa, a hipociclóide fica totalmente traçada.

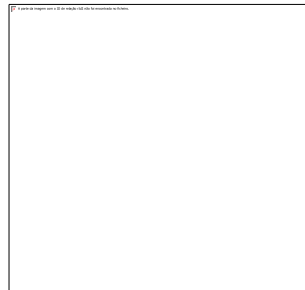


Figura 63 – Hipociclóide com 7 cúspides

Se considerarmos $\frac{b}{a} = \frac{8}{5}$, a curva tem oito cúspides quando a circunferência roda cinco vezes em torno da circunferência fixa e só no final de cinco voltas completas é que a hipociclóide fica totalmente traçada.

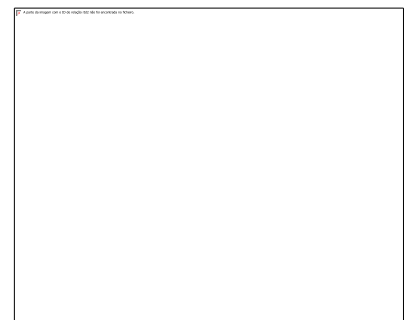
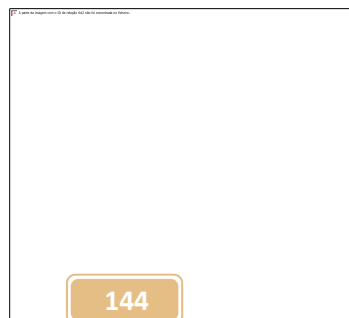
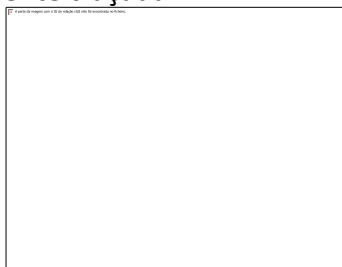


Figura 64 - Construção de uma hipociclóide com 8 cúspides (1ª, 2ª e 3ª volta)

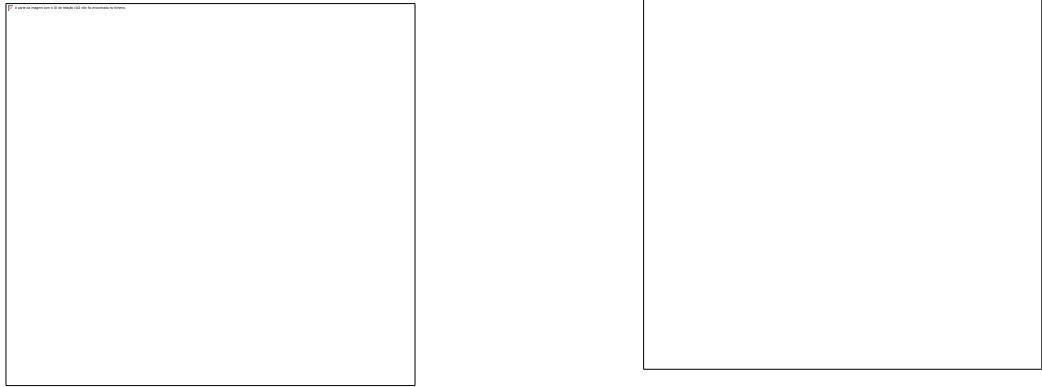


Figura 65 – Construção de uma hipociclóide com 8 cúspides (4ª e 5ª volta)

Quando $\frac{b}{a}$ é um número irracional, a curva obtida não “fecha”, sendo impossível voltar ao ponto inicial.

Por exemplo, se considerarmos $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, nenhum ponto da curva volta ao ponto de partida da mesma.

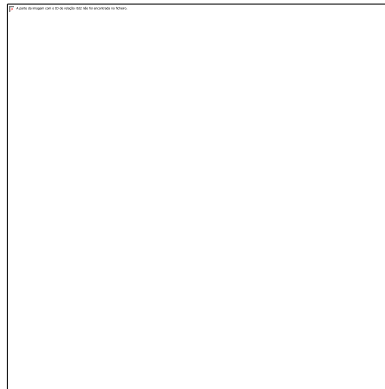


Figura 66 – Hipociclóide para $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$

Vejamos agora alguns exemplos em que $\frac{b}{a}$ é um número racional. Particularizando os valores de b e a , obtemos diferentes tipos de hipociclóides. Vejamos algumas propriedades destas curvas.

3.2.1. Hipociclóide degenerada

A **hipociclóide degenerada** é obtida quando $\frac{b}{a} = 2$ ou seja $b = 2a$. É definida parametricamente por:

$$x(\theta) = 2a \cos \theta.$$

$$y(\theta) = 0.$$

Designemos por P_1 o ponto gerador da hipociclóide com $b = 2a$. O ponto P_1 desloca-se sempre no eixo das abcissas, segundo o diâmetro da circunferência fixa, da direita para a esquerda e vice-versa, sendo retilíneo.

Na figura seguinte podemos observar a hipociclóide degenerada com $a = 1$, para a qual $b = 2$.

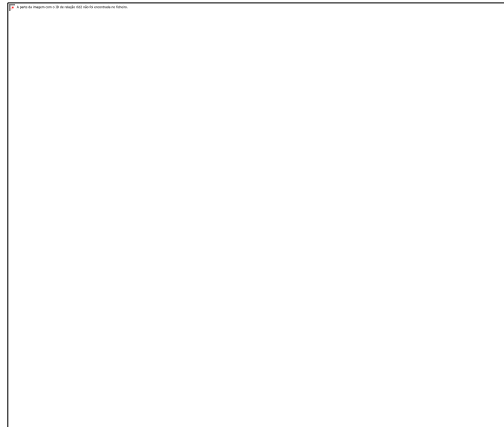


Figura 67 – Hipociclóide degenerada

A hipociclóide degenerada é o segmento de reta de extremos $(-b, 0)$ e $(0, b)$.

A conversão do movimento retilíneo para o circular e vice-versa tornou-se muito importante no século *XIX*, no que concerne à conceção das máquinas a vapor, nas quais, o movimento retilíneo do pistão foi convertido para uma rotação das respetivas rodas, tendo a hipociclóide sido uma das soluções apresentadas.

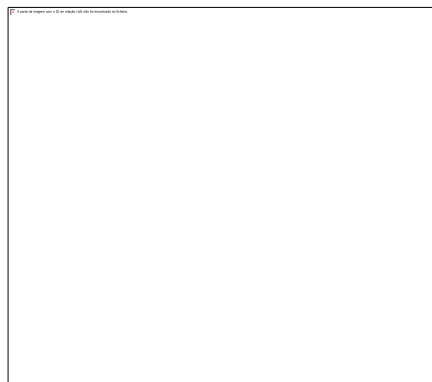


Figura 68 – Pistão no funcionamento de uma máquina a vapor

3.2.2. Deltóides ou Tricúspides

O **deltóide** é obtido quando $\frac{b}{a} = 3$ ou seja $b = 3a$. Tem 3 cúspides e é definido parametricamente por:

$$\begin{aligned}x(\theta) &= 2a\cos\theta + a\cos(2\theta) = a[2\cos\theta + \cos(2\theta)]. \\y(\theta) &= 2a\sin\theta - a\sin(2\theta) = a[2\sin\theta - \sin(2\theta)] \quad , \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{74}$$

Notemos que o deltóide tem as suas cúspides em $\theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Além disso, para $\theta = 0$ temos $x = 3a$ e para $\theta = \pi$ temos $x = -a$.

A figura seguinte ilustra um deltóide com $a = 1$.

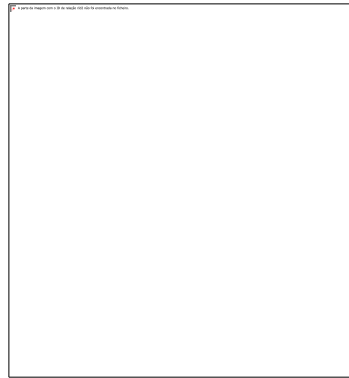


Figura 69 - Deltóide

O interesse pelo deltóide ou tricúspide surgiu pela primeira vez em 1745 quando *Euler* estudava as chamadas curvas cáusticas ⁶ num problema ótico. Mais tarde, em 1857, também *Jakob Steiner* mostrou interesse pela deltóide (do grego *delta*), tendo esta ficado igualmente conhecida por hipociclóide de Steiner. Por ter três cúspides é também referenciada muitas vezes como hipociclóide tricuspóide.

A título de curiosidade podemos ainda referir a existência de um músculo com o mesmo nome desta curva. Trata-se de um músculo cuja forma se assemelha à letra delta maiúsculo do alfabeto grego, razão que justifica a designação que lhe foi atribuída e que se estende entre a clavícula e o

⁶ Curva obtida da interseção dos raios de luz refletidos ou refratados a partir de uma superfície curva.

úmero. A sua principal funcionalidade relaciona-se com a elevação lateral do braço, podendo a mesma atingir os 90° .

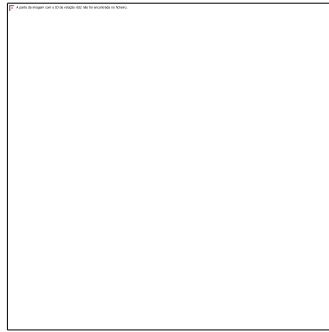


Figura 70 - Músculo deltóide

Proposição 58. A equação do deltóide em coordenadas polares é dada por:

$$r = a\sqrt{5 + 4 \cos(3\theta)}, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi].$$

Demonstração. Em coordenadas polares temos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Usando as equações obtidas em

$$(74) \text{ obtemos } r = \sqrt{(2a \cos \theta + a \cos(2\theta))^2 + (2a \sin \theta - a \sin(2\theta))^2}$$

$$= \sqrt{a^2[4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) + 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \sin(2\theta) + \sin^2(2\theta)]}$$

$$= \sqrt{a^2(4 + 1 + 4 \cos(3\theta))} = a\sqrt{5 + 4 \cos(3\theta)}.$$

Assim $r = a\sqrt{5 + 4 \cos(3\theta)}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$. ■

Vamos fazer a construção geométrica do deltóide que é apresentada no livro “A Book of Curves” de E. Lockwood, [13], página 73.

1.º Colocar uma folha de papel A_4 na horizontal a aproximadamente a meio da mesma, traçar um segmento de reta $[P'P]$ também horizontal que una os extremos da folha, sendo P' o extremo esquerdo e P o extremo direito.

2.º Designar o ponto médio do segmento de reta $[P'P]$ por O e com centro neste, traçar uma circunferência com 5 cm de raio.

3.º Designar por D' e D , os pontos de interseção da circunferência obtida com o segmento de reta $[P'P]$, sendo D' o ponto de interseção situado à esquerda do centro.

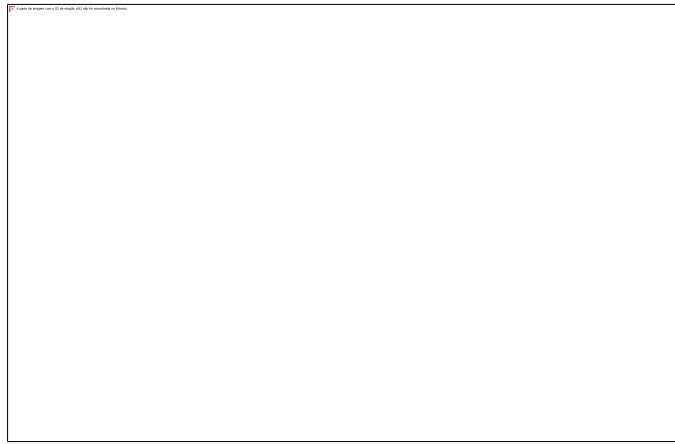


Figura 71 – Construção do deltóide – Passos 1 a 3

4.º Com um transferidor, centrado no ponto O , marcar sobre a circunferência ângulos com 5° de amplitude entre si, começando no ponto D , no sentido positivo (contrário aos ponteiros do relógio) até alcançar o ponto D' . Repetir o procedimento, começando no ponto D' até alcançar o ponto D , sempre no sentido positivo.

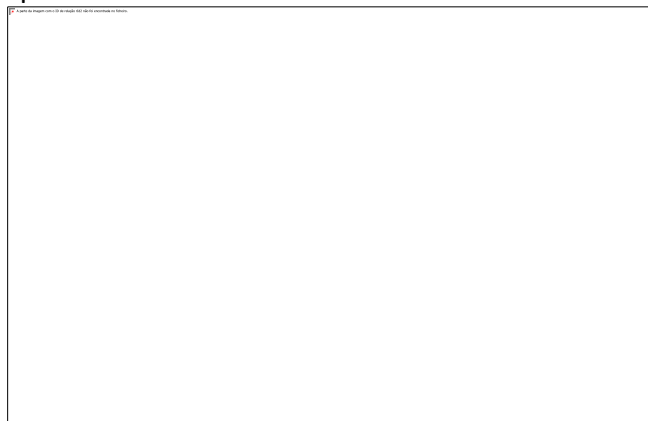


Figura 72 – Construção do deltóide – Passo 4

5.º Numerar os pontos consecutivos, a começar no ponto D , no sentido positivo e com 5° de amplitude entre si, por P_i , com $i \in \{0, 72\}$. O ponto P_0 coincide com o ponto P_{72} .

6.º Numerar os pontos consecutivos, a começar no ponto D' , no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) e com 10° de amplitude entre si, por P'_i , com $i \in \{0, 72\}$. Ao se completar a numeração de uma volta completa o ponto P'_{36} coincide com o ponto P'_0 pelo que se deve continuar sequencialmente com mais uma volta completa até ao ponto P'_{72} , que irá também coincidir com o ponto P'_0 .

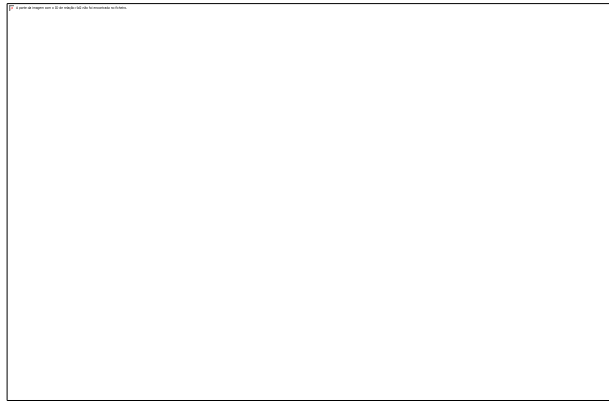


Figura 73 – Construção de deltóide – Passos 5 e 6

A figura obtida por união dos pares de pontos P_i a P'_i para cada $i \in \{0, 72\}$, ou seja, unir P_0 a P'_0 , P_1 a P'_1 e assim sucessivamente, é uma aproximação do deltóide.



Figura 74 – Construção geométrica do deltóide

Vejamos algumas das propriedades desta curva.

Proposição 59. O comprimento do arco do deltóide é $S = 16a$.

Demonstração. Tendo em conta as equações definidas em (74), e que o deltóide tem três cúspides em $\theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$, vamos calcular o comprimento do arco da curva de $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e multiplicamo-lo por três.

$$\text{Temos } x'(\theta) = -2a \operatorname{sen} \theta - 2a \operatorname{sen}(2\theta) \text{ e } y'(\theta) = 2a \operatorname{cos} \theta - 2a \operatorname{cos}(2\theta). \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{(-2a \operatorname{sen} \theta - 2a \operatorname{sen}(2\theta))^2 + (2a \operatorname{cos} \theta - 2a \operatorname{cos}(2\theta))^2} d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{[4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 8a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta) + 4a^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + 4a^2 \operatorname{cos}^2 \theta - 8a^2 \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos}(2\theta) + 4a^2 \operatorname{cos}^2(2\theta)]} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{4a^2 + 4a^2 - 8a^2 [\operatorname{cos} \theta \operatorname{cos}(2\theta) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)]} d\theta = \sqrt{8}a \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 - \operatorname{cos}(3\theta)} d\theta \\
&= \sqrt{8}a \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\theta\right)} d\theta = \sqrt{8}\sqrt{2}a \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right) d\theta = 4a \frac{2}{3} \left[-\operatorname{cos}\left(\frac{3}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{8}{3}a(-\operatorname{cos} \pi + \operatorname{cos} 0) = \frac{16a}{3}.
\end{aligned}$$

Assim $S = 3 \times S_1 = 16a$. ■

Exemplo. Consideremos o deltóide obtido quando a circunferência de equação

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1 \text{ roda, sem deslizar no interior da circunferência de equação } x^2 + y^2 = 9.$$

Neste caso $a = 1$ e $b = 3$ logo $S = 16 \times 1 = 16$.

Proposição 60. A área da região delimitada por um deltóide é $A = 2\pi \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Demonstração. Como o deltóide é simétrico em relação ao eixo das abcissas, vamos calcular a área do mesmo acima do eixo do x , com $\theta \in [0, \pi]$ e multiplicamo-la por dois.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{\pi}^0 (2a \operatorname{sen} \theta - a \operatorname{sen}(2\theta)) (-2a \operatorname{sen} \theta - 2a \operatorname{sen}(2\theta)) d\theta \\
&= - \int_0^{\pi} 2a^2 (-2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2\theta)) (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2\theta)) d\theta \\
&= -2a^2 \int_0^{\pi} (-2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta) + \operatorname{sen}^2(2\theta)) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4a^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta \, d\theta + 2a^2 \int_0^{\pi} \text{sen} \theta \text{sen}(2\theta) \, d\theta - 2a^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2(2\theta) \, d\theta. \\
&= 4a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\cos(2\theta)}{2} - \frac{1}{2}\right) \, d\theta + 4a^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta \cos \theta \, d\theta - 2a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\cos(4\theta)}{2} - \frac{1}{2}\right) \, d\theta \\
&= 4a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi} - 4a^2 \left[\frac{\text{sen}^3 \theta}{3}\right]_0^{\pi} - 2a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(4\theta)}{8}\right]_0^{\pi} \\
&= 4a^2 \frac{\pi}{2} - 2a^2 \frac{\pi}{2} = \pi a^2.
\end{aligned}$$

Assim $A = 2 \times A_1 = 2\pi a^2$. ■

Exemplo. Consideremos um deltóide obtido a partir de uma circunferência que roda em torno de uma circunferência fixa com 18 cm de raio. Neste caso $b = 18$ e $a = 6$, logo $A = 2\pi \times 36 = 72\pi \text{ cm}^2$.

Notemos que as cúspides do deltóide são vértices de um triângulo equilátero circunscrito ao mesmo.

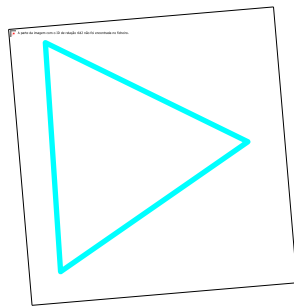


Figura 75 – Deltóide inscrito num triângulo

Calculemos a área do triângulo equilátero circunscrito ao mesmo. Para calcular a medida do lado do triângulo vamos determinar os valores de $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e de $y\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Temos:

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2a \text{sen} \frac{2\pi}{3} - a \text{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

$$y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2a \text{sen} \frac{4\pi}{3} - a \text{sen} \frac{8\pi}{3} = -\frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Assim a medida do lado do triângulo equilátero é $3a\sqrt{3}$.

Usando o teorema de Pitágoras obtemos o valor da altura do mesmo, isto é, se designarmos por x a altura do triângulo equilátero circunscrito ao deltóide, então:

$$x^2 = (3a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{108a^2 - 27a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9a}{2}.$$

A área do triângulo é dada por $A = \frac{3a\sqrt{3} \times 9a}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{4}$.

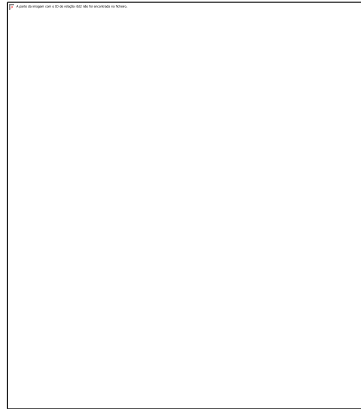


Figura 76 – Região delimitada por um deltóide

Proposição 61. O raio de curvatura de um deltóide é $R_c(\theta) = \left| 8a \operatorname{sen} \left(\frac{3}{2}\theta \right) \right|$.

Demonstração. Tendo em conta as equações paramétricas do deltóide, obtidas em (74) e as expressões das derivadas encontradas em (75), obtemos:

$$x''(\theta) = -2a \cos \theta - 4a \cos(2\theta) \text{ e } y''(\theta) = -2a \operatorname{sen} \theta + 4a \operatorname{sen}(2\theta).$$

Assim:

$$\begin{aligned} R_c(\theta) &= \left| \frac{[4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 8a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta) + 4a^2 \operatorname{sen}^2(2\theta) + 4a^2 \cos^2 \theta - 8a^2 \cos \theta \cos(2\theta) + 4a^2 \cos^2(2\theta)]^{\frac{3}{2}}}{4a^2 - 8a^2 + 8a^2(\cos \theta \cos(2\theta) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)) - 4a^2(\cos \theta \cos(2\theta) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta))} \right| \\ &= \left| \frac{[4a^2 + 4a^2 - 8a^2[\cos \theta \cos(2\theta) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)]]^{\frac{3}{2}}}{-4a^2 + 4a^2[\cos \theta \cos(2\theta) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)]} \right| = \left| \frac{[8a^2(1 - \cos(3\theta))]^{\frac{3}{2}}}{-4a^2[1 - \cos(3\theta)]} \right| \\ &= \left| -\frac{16\sqrt{2}}{4} a \sqrt{1 - \cos(3\theta)} \right| = \left| -\frac{16\sqrt{2}}{4} a \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\theta\right)} \right| = \left| 8a \operatorname{sen} \left(\frac{3}{2}\theta \right) \right|. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 62. A evoluta de um deltóide é um deltóide.

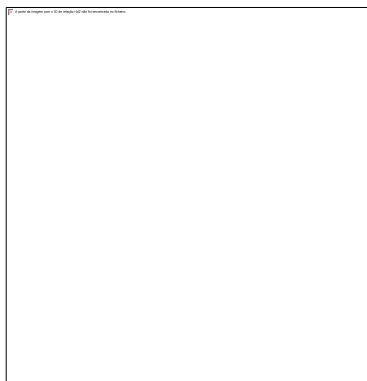


Figura 77 – Deltóide e a sua evoluta

3.2.3. Astróide

O astróide é obtido quando $\frac{b}{a} = 4$ ou seja $b = 4a$. Tem 4 cúspides e é definido parametricamente por:

$$x(\theta) = 3a \cos \theta + a \cos(3\theta) = a[3 \cos \theta + \cos(3\theta)].$$

$$y(\theta) = 3a \sin \theta - a \sin(3\theta) = a[3 \sin \theta - \sin(3\theta)] \quad , \theta \in [0, 2\pi] \quad (76)$$

Se utilizarmos as igualdades $\cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4}$ e $\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4}$, obtemos de (76)

$$x(\theta) = 4a \cos^3 \theta = b \cos^3 \theta \text{ e } y(\theta) = 4a \sin^3 \theta = b \sin^3 \theta. \quad (77)$$

O astróide tem as suas cúspides em $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Além disso, para $\theta = 0$ temos $x = 4a$ e para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos $x = 4a$.

A figura seguinte ilustra o astróide com $a = 1$.

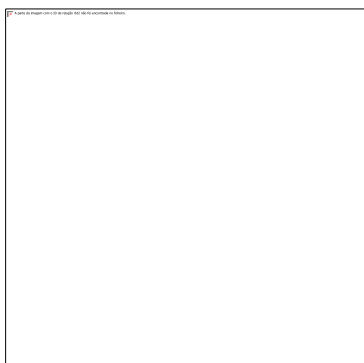


Figura 78 – Astróide

Esta curva foi descoberta em 1674 por *Olaus Roemer* quando o mesmo procurava qual a melhor forma que os dentes de engrenagens deveriam ter. Aos longos dos anos suscitou o interesse de muitos, dos quais se enumeram *Johann Bernoulli* em 1691, *Gottfried Leibniz* em 1715 e *Jean Le Rond D'Alembert* em 1748. Uma das propriedades mais importantes do astróide, teorema da dupla geração, foi descoberta por *Daniel Bernoulli*, em 1725.

Foram atribuídos vários nomes à curva como cubociclóide, paraciclo e curva tetracúspide, tendo o nome de astróide (do grego *astér* que significa estrela) aparecido pela primeira vez, em 1838, ao ser publicado num livro de *Littrow*.

Vamos fazer a construção geométrica do astróide, muito semelhante à do deltóide, que é apresentada no livro “A Book of Curves” de E. Lockwood, [13], página 53.

1.º Colocar uma folha de papel A_4 na horizontal a aproximadamente a meio da mesma, traçar um segmento de reta $[P'P]$ também horizontal que una os extremos da folha, sendo P' o extremo esquerdo e P o extremo direito.

2.º Designar o ponto médio do segmento de reta $[P'P]$ por O e com centro neste, traçar uma circunferência com 5 *cm* de raio.

3.º Designar por D' e D , os pontos de interseção da circunferência obtida com o segmento de reta $[P'P]$, sendo D' o ponto de interseção situado à esquerda do centro.

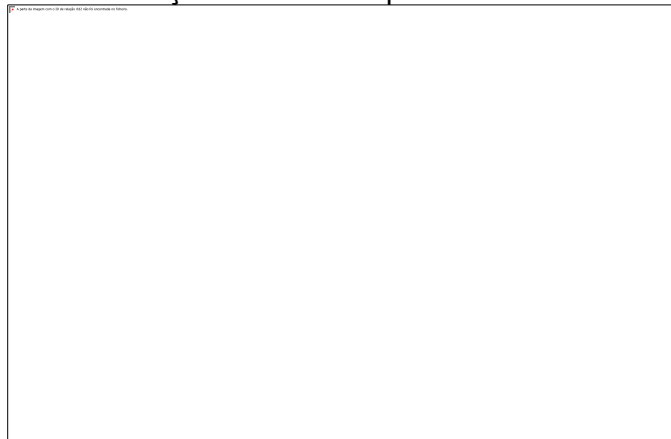


Figura 79 – Construção do astróide – Passos 1 a 3

4.º Com um transferidor, centrado no ponto O , marcar sobre a circunferência ângulos com 5° de amplitude entre si, começando no ponto D , no sentido positivo (contrário aos ponteiros do

relógio) até alcançar o ponto D' . Repetir o procedimento, começando no ponto D' até alcançar o ponto D , sempre no sentido positivo.



Figura 80 – Construção do astróide – Passo 4

5.º Numerar os pontos consecutivos, a começar no ponto D , no sentido positivo e com 5° de amplitude entre si, por P_i , com $i \in \{0, 72\}$. O ponto P_0 coincide com o ponto P_{72} .

6.º Numerar os pontos consecutivos, a começar no ponto D' , no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) e com 15° de amplitude entre si, por P'_i , com $i \in \{0, 24\}$. Ao se completar a numeração de uma volta completa o ponto obtido é P'_{24} que coincide com o ponto P'_0 . Deve continuar-se a numerar nesta sequência tendo-se $P'_{25} = P'_1$, $P'_{26} = P'_2$ e assim sucessivamente até ao P'_{48} que irá coincidir com o ponto P'_0 . Devem numerar-se os pontos numa última volta até ao ponto P'_{72} .

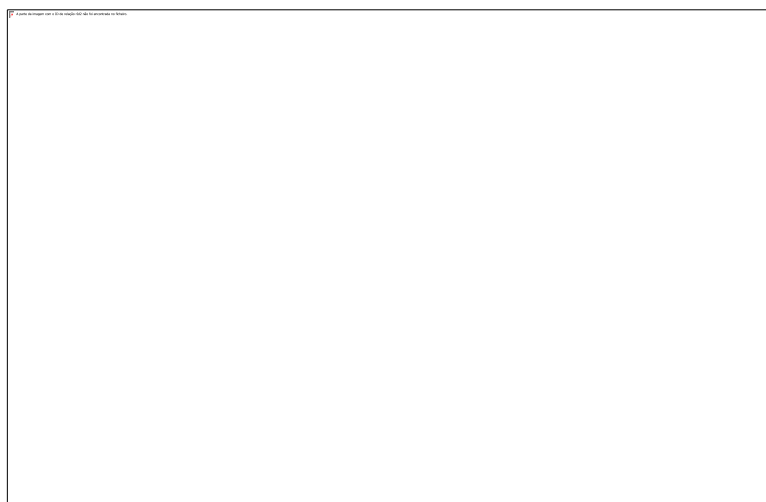


Figura 81 – Construção do astróide – Passos 5 e 6

A figura obtida por união dos pares de pontos P_i a P'_i para cada $i \in \{0, 72\}$, ou seja, unir P_0 a P'_0 , P_1 a P'_1 e assim sucessivamente, é uma aproximação do astróide.

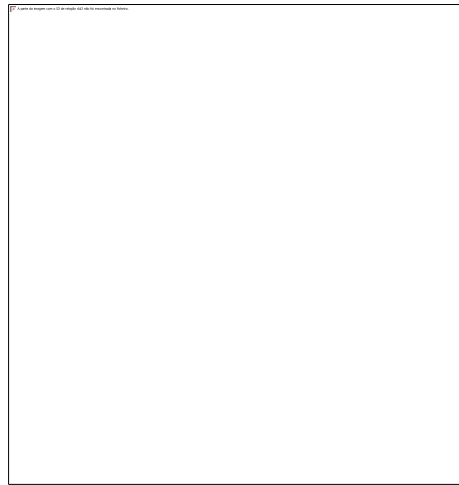


Figura 82 – Construção geométrica do astróide

Com vista a justificar o método utilizado para a construção do astróide, observemos a seguinte figura na qual está representada uma circunferência de raio $2a$ e centro em O e dois triângulos $[FOE]$ e $[OEQ]$, em que E e F são pontos da circunferência. Designemos por α o ângulo DOE e por 3α o ângulo $D'OF$.

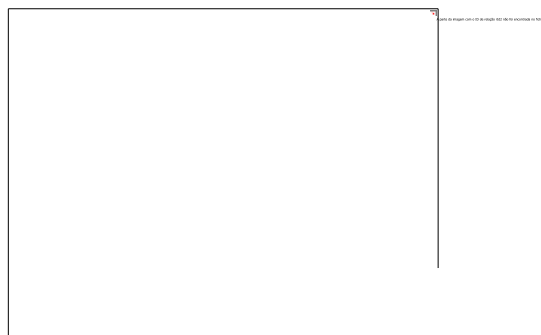


Figura 83 – Construção do astróide

O triângulo $[FOE]$ é isósceles e a amplitude do ângulo FOE é igual a $180^\circ - 4\alpha$, pelo que o ângulo OEF tem amplitude 2α . Deste modo, a amplitude do ângulo OEQ é $180^\circ - 2\alpha$ e a do

ângulo EQO, α . Concluímos assim que o triângulo $[OEQ]$ é isósceles, tendo-se $\overline{EQ} = \overline{EO} = \overline{ER}$. Deste modo \overline{RQ} é constante, sendo igual a $4a$.

Vejamos algumas das propriedades desta curva.

Proposição 63. Dado $b \in R^+$, a equação do astróide em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16a^2}.$$

Demonstração. Tendo em conta a parametrização do astróide, obtida em (77), temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} &= x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left[(bcos^3\theta)^{\frac{1}{3}} \right]^2 + \left[(bsen^3\theta)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = b^{\frac{2}{3}} cos^2\theta + b^{\frac{2}{3}} sen^2\theta = b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2} \\ &= \sqrt[3]{16a^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 64. O perímetro do astróide é $P = 6b = 24a$.

Demonstração. Vamos calcular o perímetro da curva no primeiro quadrante, pois a curva é simétrica em relação aos dois eixos coordenados. Assim, para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e tendo em conta (77), temos:

$$x'(\theta) = -3bcos^2\theta sen\theta \text{ e } y'(\theta) = 3bsen^2\theta cos\theta.$$

Então:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9b^2[(cos^2\theta sen\theta)^2 + (sen^2\theta cos\theta)^2]} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9b^2(cos^4\theta sen^2\theta + sen^4\theta cos^2\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9b^2(cos^2\theta sen^2\theta)(cos^2\theta + sen^2\theta)} d\theta = 3b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2\theta sen^2\theta} d\theta = 3b \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sen\theta d\theta \\ &= 3b \left[\frac{sen^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3b \times \frac{1}{2} = \frac{12a}{2} = 6a. \end{aligned}$$

Assim o perímetro total da curva é $S = 4 \times S_1 = 4 \times 6a = 24a$. ■

Notemos que, apesar do envolvimento de círculos para a construção quer do astróide, quer do deltóide, os seus comprimentos não dependem do valor de π .

Exemplo. Consideremos um astróide de equações

$$x(\theta) = 6\cos \theta + 2\cos(3\theta)$$

$$y(\theta) = 6\sin \theta - 2\sin(3\theta) \quad , \theta \in [0, 2\pi].$$

O perímetro deste astróide é $P = 24 \times 2 = 48$ pois $a = 2$.

As cúspides do astróide são vértices de um quadrado circunscrito ao mesmo.

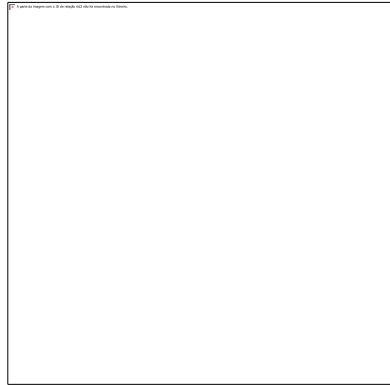


Figura 84 – Astróide inscrito num quadrado

Procuremos uma expressão para o perímetro do quadrado circunscrito a um astróide. Já vimos que para $\theta = 0$ temos $x = 4a$ e para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos $y = 4a$. Assim e designando por l , o lado do quadrado, obtemos $l^2 = 16a^2 + 16a^2 \Leftrightarrow l = 4\sqrt{2}a$. Desta forma, o perímetro procurado é dado por $P = 16\sqrt{2}a$.

A título de exemplo, consideremos um astróide com $a = 1$. O perímetro do quadrado circunscrito ao astróide é, aproximadamente, 22,627.

Pela proposição 64, o perímetro da curva é $P = 24$.

Proposição 65. A área da região delimitada por um astróide é $A = \frac{3}{8}\pi b^2 = 6\pi a^2$.

Demonstração: Tendo em conta (77), temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{2\pi}^0 b\sin^3\theta \times (-3b)\cos^2\theta\sin\theta \, d\theta = 3b^2 \int_0^{2\pi} \sin^4\theta\cos^2\theta \, d\theta \\ &= 3b^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = \frac{3b^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta))(1 + \cos(2\theta)) \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3b^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta) - 2\cos(2\theta) - 2\cos^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) + \cos^3(2\theta)) d\theta \\
&= \frac{3b^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta) - \cos^2(2\theta) + \cos^3(2\theta)) d\theta = \frac{3b^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos(2\theta) - \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} + \cos^3(2\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{3b^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta) - \frac{\cos(4\theta)}{2} + \cos^3(2\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{3b^2}{8} \left(\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin(4\theta)}{8}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2(2\theta)) \cos(2\theta) d\theta \right) \\
&= \frac{3b^2}{8} \left(\pi + \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) - \sin^2(2\theta) \cos(2\theta)] d\theta \right) = \frac{3b^2}{8} \left(\pi + \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin^3(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \right) = \frac{3b^2\pi}{8} \\
&= \frac{3 \times 16a^2\pi}{8} = 6\pi a^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

Notemos que a área do astróide é seis vezes maior que a do círculo gerador.

Exemplo. Consideremos um astróide de equações

$$x(\theta) = 6\cos \theta + 2\cos(3\theta)$$

$$y(\theta) = 6\sin \theta - 2\sin(3\theta) \quad , \theta \in [0, 2\pi].$$

A área da região delimitada pelo astróide é $A = 6\pi 2^2 = 24\pi$, pois $a = 2$.

Proposição 66. O raio de curvatura de um astróide é $R_c(\theta) = |6a \sin(2\theta)|$.

Demonstração. Consideremos as equações paramétricas do astróide, obtidas em (76) e as expressões das respectivas derivadas, nomeadamente:

$$x'(\theta) = -3a \sin \theta - 3a \sin(3\theta) \quad e \quad y'(\theta) = 3a \cos \theta - 3a \cos(3\theta).$$

$$x''(\theta) = -3a \cos \theta - 9a \cos(3\theta) \quad e \quad y''(\theta) = -3a \sin \theta + 9a \sin(3\theta).$$

Assim:

$R_c(\theta)$

$$= \left| \frac{[9a^2 \sin^2 \theta + 18a^2 \sin \theta \cos(3\theta) + 9a^2 \cos^2(3\theta) + 9a^2 \cos^2 \theta - 18a^2 \cos \theta \cos(3\theta) + 9a^2 \cos^2(3\theta)]^{\frac{3}{2}}}{9a^2 - 27a^2 + 27a^2(\cos \theta \cos(3\theta) - \sin \theta \sin(3\theta)) - 9a^2(\cos \theta \cos(3\theta) - \sin \theta \sin(3\theta))} \right|$$

$$= \left| \frac{[9a^2 + 9a^2 - 18a^2[\cos \theta \cos(3\theta) - \sin \theta \sin(3\theta)]]^{\frac{3}{2}}}{-18a^2 + 18a^2[\cos \theta \cos(3\theta) - \sin \theta \sin(3\theta)]} \right| = \left| \frac{[18a^2(1 - \cos(4\theta))]^{\frac{3}{2}}}{-18a^2[1 - \cos(4\theta)]} \right|$$

$$= \left| -\sqrt{18}a\sqrt{1 - \cos(4\theta)} \right| = \left| -\sqrt{18}a\sqrt{1 - \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)} \right| = |6a \sin(2\theta)|. \blacksquare$$

Proposição 67. A evoluta de um astróide é um astróide.

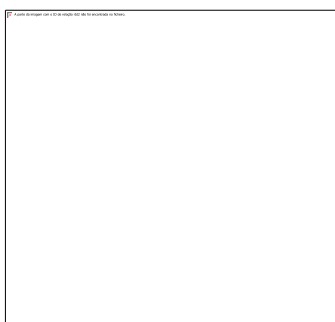


Figura 85 – Astróide e a sua evoluta

A título de curiosidade acrescenta-se que a evoluta de uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b , da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(R-a)^2} = 1$ é um astróide.

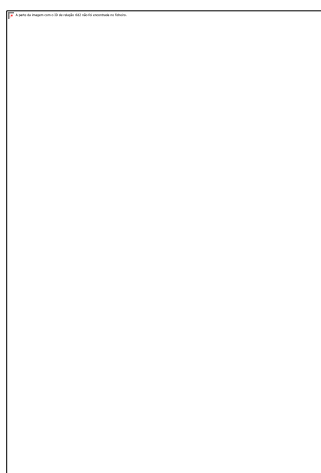


Figura 86 – Elipse e a sua evoluta (astróide)

Teorema 68. (Teorema da dupla geração). Sempre que uma circunferência de raio a roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa, de raio b , dá origem a uma hipociclóide igual à que se obtém quando uma circunferência de raio $b - a$ roda, sem deslizar, no interior da mesma circunferência fixa.

Demonstração. Consideremos duas circunferências C_1 e C_2 tais que C_1 tem centro no ponto O (origem) e raio b e C_2 tem centro no ponto C e raio a com $a < b$. A circunferência C_2 roda, sem deslizar, no interior de C_1 . Já vimos que, sendo $P(x, y)$ um ponto arbitrário de C_2 , quando C_2 roda ϕ graus, no sentido negativo (ponteiros do relógio), é traçado um arco de centro C e um igual de centro na origem que descreveu um ângulo de θ graus. Em (72), obtivemos as coordenadas de P relativamente a O , nomeadamente:

$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= (b - a)\cos \theta + a\cos \phi = (b - a)\cos \theta + a\cos \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]. \\ y(\theta, \phi) &= (b - a)\sen \theta - a\sen \phi = (b - a)\sen \theta - a\sen \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (78)$$

Consideremos agora uma circunferência C_3 centrada em C^* de raio $r' = b - a$. A circunferência C_3 roda no interior de C_1 . Seja $Q(x^*, y^*)$ as coordenadas de um ponto de C_3 . As coordenadas de C^* relativamente a O são:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= [b - (b - a)]\cos \theta = a\cos \theta. \\ y(\theta) &= [b - (b - a)]\sen \theta = a\sen \theta. \end{aligned} \quad (79)$$

As coordenadas de Q relativamente a C^* , nomeadamente:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= (b - a)\cos \phi \\ y(\phi) &= -(b - a)\sen \phi. \end{aligned} \quad (80)$$

Notemos que, ao se movimentar, os arcos da circunferência que roda são iguais aos arcos com as quais entram em contato, da circunferência fixa. Assim:

$$b\theta = (b - a)(\theta + \phi) \Leftrightarrow (b - a)\phi = a\theta \Leftrightarrow \phi = \frac{a}{b - a}\theta. \quad (81)$$

Deste modo e tendo em conta (79) e (80) e considerando a igualdade obtida em (81), obtemos as coordenadas de Q^* relativamente a O , nomeadamente:

$$x(\theta) = a\cos \theta + (b - a)\cos \left(\frac{a}{b - a}\theta \right).$$

$$y(\theta) = a \operatorname{sen} \theta - (b - a) \operatorname{sen} \left(\frac{a}{b - a} \theta \right).$$

Se considerarmos $\theta^* = \frac{a}{b - a} \theta$ então temos:

$$x(\theta^*) = a \cos \left(\frac{b - a}{a} \theta^* \right) + (b - a) \cos \theta^*.$$

$$y(\theta^*) = a \operatorname{sen} \left(\frac{b - a}{a} \theta^* \right) - (b - a) \operatorname{sen} \theta^*. \quad (82)$$

Relativamente à segunda equação obtida em (82), a mesma é simétrica face ao resultado procurado. No entanto, se tivermos em conta a paridade das funções trigonométricas, temos:

$$x(-\theta^*) = a \cos \left(-\frac{b - a}{a} \theta^* \right) + (b - a) \cos (-\theta^*).$$

$$y(-\theta^*) = a \operatorname{sen} \left(-\frac{b - a}{a} \theta^* \right) - (b - a) \operatorname{sen} (-\theta^*). \quad (83)$$

Consideremos $\gamma = -\theta^*$. Assim em (83), trocando a ordem dos termos em ambas as equações, obtemos:

$$x(\gamma) = (b - a) \cos (\gamma) + a \cos \left(\frac{b - a}{a} \gamma \right).$$

$$y(\gamma) = (b - a) \operatorname{sen} (\gamma) - a \operatorname{sen} \left(\frac{b - a}{a} \gamma \right). \quad (84)$$

As equações obtidas em (84) são equivalentes às obtidas em (78), pelo que as duas hipociclóides são iguais. Deste modo, sempre que uma circunferência de raio a roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa, de raio b , dá origem a uma hipociclóide igual à que se obtém quando uma circunferência de raio $b - a$ roda, sem deslizar, no interior da mesma circunferência fixa. ■

A título de exemplo, temos como consequência deste teorema que a hipociclóide obtida por uma circunferência de raio a , que roda no interior de uma circunferência fixa de raio $4a$ é igual à que se obtém quando uma circunferência de raio $3a$ roda no interior dessa mesma circunferência fixa.

Esta propriedade da dupla geração foi inicialmente descoberta por Phillippe *La Hire* suscitando mais tarde o interesse de *Bernoulli*, em 1725 e de *Euler*, em 1781.

Depois de estudarmos alguns exemplos de hipociclóides, vamos generalizar algumas das suas propriedades, tendo em conta o número n de cúspides que apresenta.

Proposição 69. A hipociclóide com n cúspides é definida parametricamente por:

$$x(\theta) = a(n-1)\cos \theta + a\cos [(n-1)\theta].$$

$$y(\theta) = a(n-1)\sen \theta - a\sen [(n-1)\theta], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Demonstração. Consideremos uma hipociclóide obtida a partir de uma circunferência de raio a que roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa de raio b , sendo $a < b$ e $\frac{b}{a} = n, n \in \mathbb{Q}$.

Deste modo, $b = an$ e substituindo b nas equações obtidas na proposição 57, obtemos:

$$x(\theta) = a(n-1)\cos \theta + a\cos [(n-1)\theta].$$

$$y(\theta) = a(n-1)\sen \theta - a\sen [(n-1)\theta], \quad \theta \in [0, 2\pi]. \blacksquare$$

Proposição 70. O comprimento de uma hipociclóide com n cúspides é dado por:

$$S_n = 8a(n-1), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Demonstração. Tendo em conta as equações obtidas na proposição 69, temos:

$$x'(\theta) = -a(n-1)\sen \theta - a(n-1)\sen [(n-1)\theta].$$

$$y'(\theta) = a(n-1)\cos \theta - a(n-1)\cos [(n-1)\theta].$$

A hipociclóide tem n cúspides, pelo que vamos calcular o comprimento do arco entre as primeiras duas cúspides, nomeadamente 0 e $\frac{2\pi}{n}$ e multiplicamos o resultado obtido por n .

$$s_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{[-a(n-1)\sen \theta - a(n-1)\sen [(n-1)\theta]]^2 + [a(n-1)\cos \theta - a(n-1)\cos [(n-1)\theta]]^2} d\theta.$$

Resolvendo os casos notáveis e reduzindo os termos semelhantes obtemos:

$$S_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{2a^2(n-1)^2 - 2a^2(n-1)^2[\cos \theta \cos [(n-1)\theta] - \sen \theta \sen [(n-1)\theta]]} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{2a^2(n-1)^2[1 - \cos(n\theta)]} = \sqrt{2}a(n-1) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{[1 - \cos^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) + \sen^2\left(\frac{n}{2}\theta\right)]} d\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}a(n-1)}{n} \left[-\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{4a(n-1)}{n} [-\cos\pi + \cos 0] = \frac{8a(n-1)}{n}.$$

Deste modo $S = n \times S_1 = 8a(n-1)$. ■

Proposição 71. A área da região delimitada por uma hipociclóide com n cúspides é dado por:

$$A_n = (n-1)(n-2)\pi a^2, \forall n \in N \text{ e } n > 3.$$

Demonstração. Tendo em conta as equações obtidas na proposição 69, temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{2\pi}^0 [a(n-1)\text{sen } \theta - a\text{sen} [(n-1)\theta]] [-a(n-1)\text{sen } \theta - a(n-1)\text{sen} [(n-1)\theta]] d\theta \\ &= a^2(n-1)^2 \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen} [(n-1)\theta] d\theta - \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen} [(n-1)\theta] d\theta - \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 [(n-1)\theta] d\theta \right] \\ &= a^2(n-1)^2 \left[\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen} [(n-1)\theta] d\theta - \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen} [(n-1)\theta] d\theta - \frac{1}{n-1} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen} [(n-1)2\theta]}{4(n-1)} \right]_0^{2\pi} \right] \\ &= a^2(n-1)^2 \left[\pi - \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(\theta(2-n)) - \cos(n\theta)}{2} \right] d\theta - \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(\theta(2-n)) - \cos(n\theta)}{2} \right] d\theta - \frac{1}{n-1} \pi \right] \\ &= a^2(n-1)^2 \left[\pi - \frac{1}{2-n} \left[\frac{\text{sen}(\theta(2-n))}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \left[\frac{\text{sen}(n\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{2-n} \left[\frac{\text{sen}(\theta(2-n))}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \left[\frac{\text{sen}(n\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \right] - \frac{1}{n-1} \pi \right] \\ &= a^2(n-1)^2 \left(\pi - \frac{1}{n-1} \pi \right) = (n-1)(n-2)\pi a^2. \blacksquare \end{aligned}$$

A título de curiosidade acrescentamos também que a hipociclóide é um caso particular de uma outra curva chamada **hipotrocóide**. Consideremos uma semireta com origem no centro da circunferência geradora e $P(x, y)$ um ponto da mesma. A hipotrocóide é a curva descrita pela trajetória do ponto $P(x, y)$ quando a circunferência roda, sem deslizar no interior da circunferência fixa.

Designando por R o raio da circunferência fixa, r o raio da circunferência que roda sem deslizar e d , a distância do ponto $P(x, y)$ ao centro da circunferência que roda, as equações da hipotrocóide são:

$$x(t) = (R - r)\cos t + d \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R - r)\sin t - d \sin\left(\frac{R-r}{r}t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Quando $d = r$, a hipotrocóide é uma hipociclóide.

A **hipotrocóide** pode ser obtida a partir de um espirógrafo.

O *espirógrafo* é um jogo infantil que apareceu em 1970, suscitando o interesse de muitos e que tem várias rodas de plástico de diferentes tamanhos com bordas dentadas e três anéis também com bordas dentadas, quer no seu interior, quer no exterior, como mostra a figura.



Figura 87 - Espirógrafo

As rodas de plástico contêm orifícios nos quais se coloca a ponta de um lápis de modo a desenhar uma trajetória da mesma ao longo do anel.



Figura 88 – Rodas de plástico do Espirógrafo

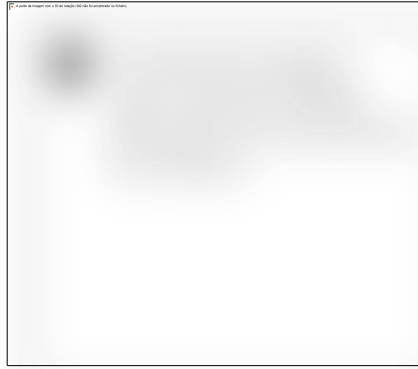


Figura 89 – Anel quadrado do Espirógrafo

Com o espirógrafo, as hipotrocóides são as curvas obtidas a partir de uma roda de plástico que se move no interior do anel, sempre tangente ao mesmo.

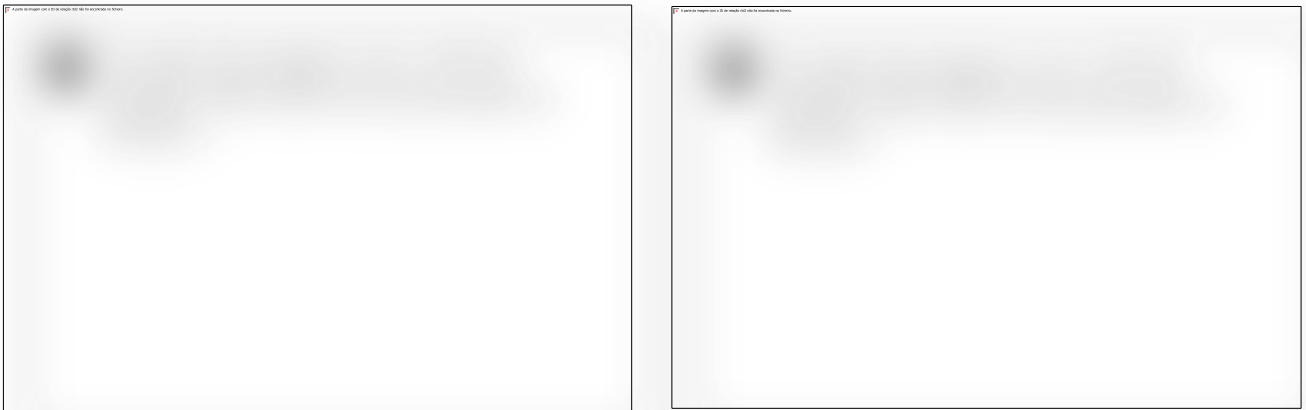


Figura 90 – Construção de hipotrocóides através do Espirógrafo

Este jogo permite obter curvas como as da figura seguinte, dependendo quer do raio quer da roda, quer do anel utilizado, bem como do orifício onde se coloca a ponta do lápis.

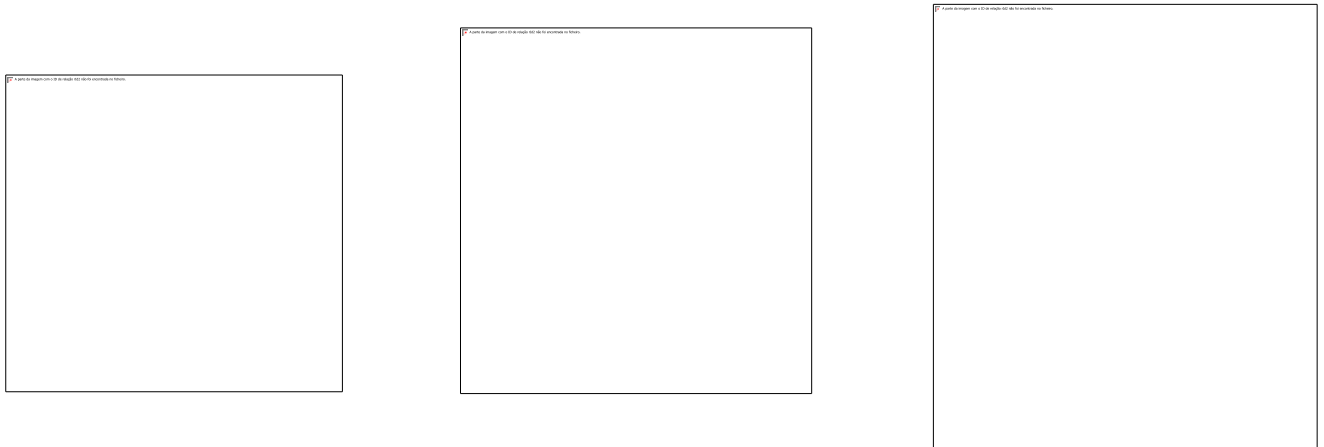


Figura 91 – Sequência de figuras obtidas através do Espirógrafo

A sequência de hipotrocóides construídas no espirógrafo ilustradas na figura 91 foi obtida usando o mesmo anel e rodas dentadas com raios cada vez maiores. A figura mais à esquerda foi obtida com a roda dentada de menor raio e a mais à direita com a de maior raio.

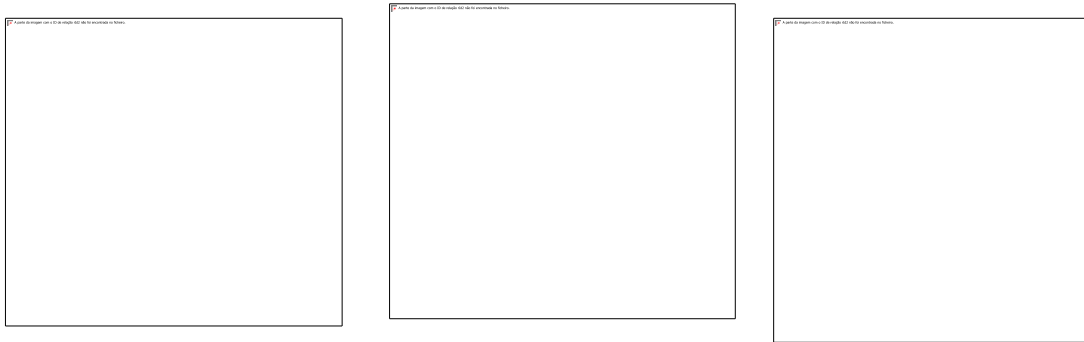


Figura 92 – Sequência de hipotrocóides obtidas através do Espirógrafo

A sequência de hipotrocóides construídas no espirógrafo ilustradas na figura 92 foi obtida usando o mesmo anel e a mesma roda dentada mas com a ponta do lápis em diferentes orifícios. Da esquerda para a direita, obtiveram-se as figuras colocando a ponta do lápis em orifícios que se afastam de dentro para fora.

Atividade de Aplicação nº 9

A. Designação: À volta com a hipociclóide.

B. Objetivos:

- Introdução do sistema de coordenadas polares;
- Introdução às equações paramétricas de uma curva;
- Aplicação de conhecimentos.

C. Pré-requisitos:

- Área de uma circunferência;
- Fórmulas da duplicação de um ângulo;
- Equações trigonométricas;
- Derivadas de funções trigonométricas.

D. Conteúdos:

- Hipociclóides e algumas propriedades;
- Coordenadas polares;
- Equações paramétricas;
- Cálculo de áreas e de comprimentos de curvas.

E. Destinatários: Alunos do secundário.

F. Duração da atividade: 90 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Considera uma circunferência fixa de raio b . Se no interior desta rodar, sem deslizar, uma circunferência de raio a , é descrita uma curva, no plano, a que se chama **hipociclóide**. Consoante os valores de a e b , as hipociclóides obtidas têm nomes específicos.

1. Um ponto $P(x, y) \in R^2$ fica definido num sistema de **coordenadas polares** quando se conhece a sua distância, r , ao centro do sistema de coordenadas, O , bem como o ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$, que o vetor \overrightarrow{OP} faz com o eixo Ox .

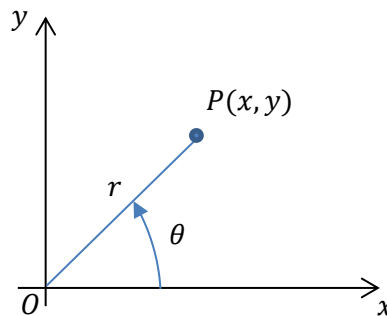


Figura 2 - Sistema em coordenadas polares

Considera $P(x, y)$ um ponto genérico de uma circunferência de raio r , centrada na origem.

1.1. Encontra uma expressão, em função de θ , para a abcissa do ponto P .

1.2. Encontra uma expressão, em função de θ , para a ordenada do ponto P .

As equações obtidas em 1.1. e 1.2. são conhecidas por **equações paramétricas** da circunferência, visto que dependem de um parâmetro θ .

1.3. Mostra que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.4. Escreve as equações paramétricas de uma circunferência centrada na origem e com 4 *cm* de raio.

2. As equações paramétricas da hipociclóide obtida quando uma circunferência de raio a roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa de raio b , são:

$$x(\theta) = (b - a)\cos \theta + a\cos \left[\theta \left(\frac{b-a}{a} \right) \right].$$

$$, \theta \in [0, 2\pi].$$

$$y(\theta) = (b - a)\text{sen } \theta - a\text{sen} \left[\theta \left(\frac{b - a}{a} \right) \right]$$

Assim a hipociclóide é o conjunto dos pontos $(x(\theta), y(\theta))$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.1. Representa no plano o ponto da hipociclóide $(x(0), y(0))$.

2.2. Calcula $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$.

2.3. Considera que o raio da circunferência fixa é igual ao triplo do raio da circunferência que roda. Neste caso a hipociclóide obtida é conhecida por **deltóide**.

2.3.1. Usando as fórmulas da duplicação de um ângulo, para o seno e para o cosseno, mostra que as equações paramétricas do deltóide são:

$$x(\theta) = 2a \cos \theta + a(1 - 2 \cos^2 \theta) \text{ e } y(\theta) = 2a \text{sen } \theta (1 - \cos \theta).$$

2.3.2. Calcula os pontos de interseção do deltóide com o eixo das abcissas.

2.4. Considera que o raio da circunferência que roda é igual à quarta parte do raio da circunferência fixa. Neste caso a hipociclóide obtida é conhecida por **astróide**.

2.4.1. Mostra que $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Sugestão. Poderá ser-te útil reparar que $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$.

2.4.2. Mostra que $\text{sen}(3\theta) = 3 \text{sen } \theta - 4 \text{sen}^3 \theta$.

2.4.3. Tendo em conta as igualdades obtidas nas alíneas anteriores, mostra que as equações paramétricas do astróide são:

$$x(\theta) = b \cos^3 \theta \text{ e } y(\theta) = 4a \text{sen}^3(\theta).$$

2.4.4. Representa no plano os pontos do astróide quando $\theta = 0$ e quando $\theta = \pi$.

2.5. Escreve as equações paramétricas descritas por um ponto P que pertence à circunferência de equação $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ quando esta roda, sem deslizar, sobre a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.

2.6. Escreve, em função de a , as equações paramétricas da hipociclóide obtida quando o raio da circunferência fixa é n vezes maior do que o raio da circunferência que roda.

3. Considera uma hipociclóide obtida quando o raio da circunferência fixa é n vezes maior do que o raio da circunferência que roda, como mostra a figura 3.

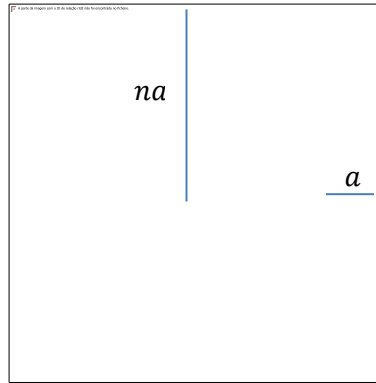


Figura 3

3.1. Escreve, em função de a , uma expressão que defina a área da região sombreada a azul.

3.2. Determina, em centímetros, o valor do raio da circunferência fixa se o raio da circunferência que roda, sem deslizar, no interior da mesma, for 2 cm e a área da região sombreada a azul for 140π .

SUGESTÕES E SOLUÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE N.º 9

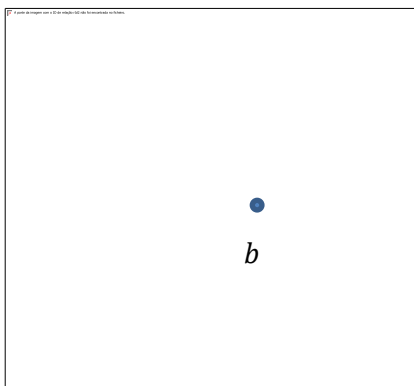
1.1. $\cos \theta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \theta$.

1.2. $\sin \theta = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \theta$.

1.3. $\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r$.

1.4. $x = 4 \cos \theta$ e $y = 4 \sin \theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.1. $x(0) = b$ e $y(0) = 0$. Queremos então representar o ponto $(b, 0)$.



2.2. $x'(\theta) = -(b-a)\sin\theta - a\left(\frac{b-a}{a}\right)\sin\left[\left(\frac{b-a}{a}\right)\theta\right] = -(b-a)\sin\theta - (b-a)\sin\left[\left(\frac{b-a}{a}\right)\theta\right]$.

$$y'(\theta) = (b-a)\cos\theta - (b-a)\cos\left[\left(\frac{b-a}{a}\right)\theta\right].$$

2.3.2. Para $\theta = 0$ temos $x(0) = 2a \cos 0 + a \cos 0 = 3a$ e $y(0) = 2a \sin 0 - a \sin 0 = 0$, seja, o ponto de coordenadas $A(3a, 0)$.

Para $\theta = \pi$ temos $x(\pi) = 2a \cos \pi + a \cos (2\pi) = -a$ e $y(\pi) = 2a \sin \pi - a \sin (2\pi) = 0$, seja, o ponto de coordenadas $B(-a, 0)$.

2.4.1.

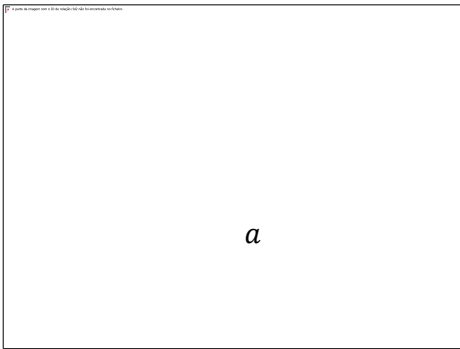
$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = \cos^3\theta - 3(\cos\theta - \cos^3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{aligned}$$

2.4.2. $\sin(3\theta) = \sin(2\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(2\theta) = 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

2.4.4. Para $\theta = 0$ temos $x(0) = 3a \cos 0 + a \cos 0 = 4a$ e $y(0) = 3a \sin 0 - a \sin 0 = 0$, seja, o ponto de coordenadas $A(4a, 0)$.

Para $\theta = \pi$ temos $x(\pi) = 3a \cos \pi + a \cos(3\pi) = -4a$ e $y(\pi) = 3a \sin \pi - a \sin(3\pi) = 0$, seja, o ponto de coordenadas $B(-4a, 0)$.



2.5. Neste caso $a = 1$ e $b = 5$. Assim $x(\theta) = 4 \cos \theta + \cos(4\theta)$ e $y(\theta) = 4 \sin \theta - \sin(4\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.6. Neste caso $a = a$ e $b = na$. Assim $x(\theta) = a(n-1) \cos \theta + a \cos[(n-1)\theta]$ e $y(\theta) = a(n-1) \sin \theta - a \sin[(n-1)\theta]$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

3.1. $A_{\text{sombreada}} = A_{\text{azul}} - A_{\text{branca}} = \pi(na)^2 - \pi a^2 = \pi a^2(n^2 - 1), \forall a \in \mathbb{R}^+$.

3.2. $140\pi = \pi 2^2(n^2 - 1) \Leftrightarrow n^2 - 1 = 35 \Leftrightarrow n = 6$. Assim $\frac{b}{a} = 6 \Leftrightarrow b = 6a$. Como $a = 2$, então $b = 12 \text{ cm}$.

Atividade de Aplicação nº 10

A. Designação: Desenhando hipociclóides.

B. Objetivos:

- Introdução do sistema de coordenadas polares;
- Introdução às equações paramétricas de uma curva;
- Desenvolver competências ao nível do programa Winplot;
- Cálculo de ângulos e de pontos de interseção com os eixos coordenados;
- Aplicação de conhecimentos.

C. Pré-requisitos:

- Área de uma circunferência;
- Perímetro de uma circunferência;

D. Conteúdos:

- Hipociclóides e algumas propriedades;
- Coordenadas polares;
- Equações paramétricas;
- Cálculo de áreas e de comprimentos de curvas;

E. Destinatários: Alunos do secundário.

F. Duração da atividade: 120 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Observações: Se a atividade nº 9 for resolvida antes da atividade nº 10, o **exercício 2 da parte 1** da atividade 10 não deve ser resolvido.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Grande parte das curvas do plano que conheces representam gráficos de funções reais de variável real, onde a variável independente é o x e a variável dependente é o y que se obtém em função de x .

A título de exemplo referem-se:

- As **funções afins** cujos gráficos são retas e as expressões que as definem são da forma:

$$y = ax + b, \forall a, b \in R.$$

- As **funções quadráticas** cujos gráficos são parábolas e as expressões que as definem são forma:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b \text{ e } c \in R \text{ ou } y = a(x - h)^2 + k, \text{ com } h, k \in R.$$

Existem curvas no plano que não representam gráficos de funções reais de variável real, como por exemplo, a circunferência, a elipse, etc. Algumas dessas curvas podem ser representadas por duas equações, uma relativa à variável x e outra relativa à variável y , ambas dependentes de um determinado parâmetro real θ . Por este motivo são conhecidas por **equações paramétricas**.

A título de exemplo referem-se:

- As equações paramétricas de circunferências de raio r , centradas em $(0, 0)$ são:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r \cos \theta \\ y(\theta) &= r \sin \theta, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Se considerarmos uma circunferência centrada na origem, é possível escrever as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ que pertença à mesma, em função do ângulo que \overrightarrow{OP} faz com o semieixo positivo do x .

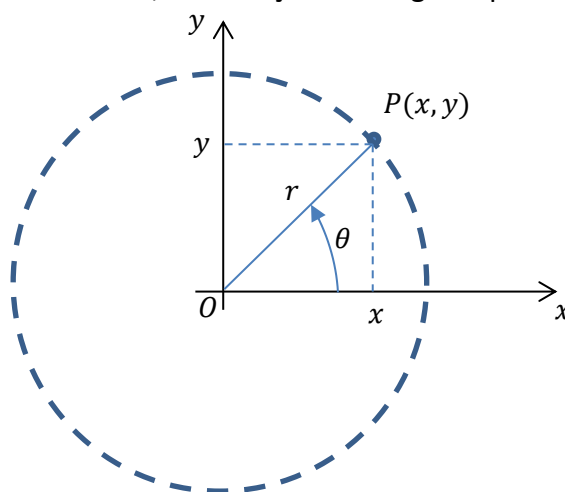


Figura 1 – Circunferência de raio r centrada na origem

Parte 1

1. Escreve as equações paramétricas de uma circunferência C_2 de raio r , centrada no ponto (a, b) .

2. Considera uma circunferência fixa de raio b . Se no interior desta rodar, sem deslizar, uma circunferência de raio a , é descrita uma curva a que se chama **hipociclóide**. Consoante os valores de a e b , as hipociclóides obtidas têm nomes específicos.

As equações paramétricas da hipociclóide obtida quando uma circunferência de raio a roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa de raio b , são:

$$x(\theta) = (b - a)\cos \theta + a\cos \left[\theta \left(\frac{b-a}{a} \right) \right].$$

$$y(\theta) = (b - a)\sin \theta - a\sin \left[\theta \left(\frac{b-a}{a} \right) \right] \quad , \theta \in [0, 2\pi].$$

2.1. Considera que o raio da circunferência fixa é igual ao triplo do raio da circunferência que roda. Neste caso a hipociclóide obtida é conhecida por **deltóide**.

2.1.1. Escreve as equações paramétricas de um deltóide.

2.1.2. Escreve as equações paramétricas do deltóide obtido quando o raio da circunferência que roda, sem deslizar, é 2 cm .

2.2. Considera que o raio da circunferência que roda é igual à quarta parte do raio da circunferência fixa. Neste caso a hipociclóide obtida é conhecida por **astróide**.

2.2.1. Escreve as equações paramétricas de um astróide.

2.2.2. Escreve as equações paramétricas do astróide obtido quando o raio da circunferência que roda, sem deslizar, é 2 cm .

Parte 2

O **Winplot** é um software desenvolvido por *Richard Parris*, professor da *Philips Exeter Academy* e que permite construções geométricas, como curvas e superfícies, gráficos de funções e animação dos mesmos e cálculos algébricos, quer a duas, quer a três dimensões.

Apresentamos a legenda da terminologia que irá ser utilizada.

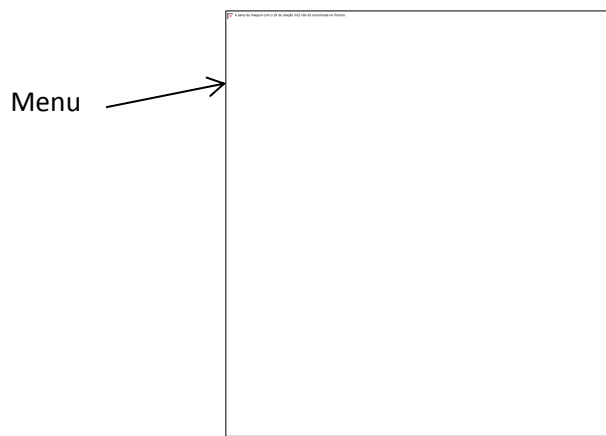


Figura 2 - Folha gráfica do programa Winplot

Notações a utilizar:

- Sempre que quiseres introduzir o valor de π , escreve “pi”.
- Sempre que quiseres introduzir a função seno, escreve “sin”.
- O parâmetro a utilizar deve ser representado por t e sempre indicado entre parênteses.

Na resolução das questões seguintes considera o cm como unidade de medida e apresenta os resultados finais arredondados às centésimas.

Observação: Em cálculos intermédios conserva, no mínimo, três casas decimais.

3. Recorrendo ao programa Winplot, abre uma nova folha gráfica.

3.1. Representa graficamente o deltóide cujas equações paramétricas obtiveste no **exercício 2.1.1.** considerando o caso particular em que $a = 1$.

3.2. Como poderás observar no gráfico obtido, o deltóide tem 3 vértices também conhecidos por cúspides. Indica o valor de θ em cada uma das cúspides.

3.3. Calcula analiticamente as coordenadas das cúspides do deltóide.

Sugestão. Atribui valores a θ .

3.4. Calcula, recorrendo ao programa Winplot, o comprimento do arco, ou seja, o perímetro entre as primeiras duas cúspides do deltóide.

- Sugestão:** Relaciona os limites inferiores e superiores pedidos com os valores de θ em cada uma das cúspides envolvidas.
- 3.5.** Calcula o comprimento total do deltóide.
- 3.6.** Calcula, recorrendo ao programa Winplot, a área interna do deltóide.
- 3.7.** Considera um triângulo em que os vértices coincidem com as cúspides do deltóide cujas coordenadas obtiveste no **exercício 3.3**. Calcula analiticamente a área desse triângulo.
- 3.8.** Representa graficamente o deltóide obtido a partir de uma rotação de $\frac{\pi}{6}$ do deltóide original, ou seja, do representado no **exercício 3.1**. Para tal recorre ao menu “Um” e seleciona a opção “Girar”.
- 3.9.** Indica o valor de θ para as cúspides do deltóide obtido no **exercício 3.8**.
- 4.** Recorrendo ao programa Winplot, abre uma nova folha gráfica.
- 4.1.** Representa graficamente o astróide cujas equações paramétricas obtiveste no **exercício 2.2.1**, considerando o caso particular em que $a = 1$.
- 4.2.** Como poderás observar no gráfico obtido, o astróide tem 4 cúspides. Indica o valor de θ em cada uma das cúspides.
- 4.3.** Calcula analiticamente, as coordenadas das cúspides do astróide.
- 4.4.** Calcula, recorrendo ao programa Winplot, o comprimento do arco, ou seja, o perímetro entre as primeiras duas cúspides do astróide.
- 4.5.** Calcula o comprimento total do astróide, ou seja o seu perímetro.
- 4.6.** Calcula, recorrendo ao programa Winplot, a área interna do astróide.
- 4.7.** Considera um quadrado em que os vértices coincidem com as cúspides do astróide cujas coordenadas obtiveste no **exercício 4.3**. Calcula analiticamente a área desse quadrado.
- 4.8.** Mostra, recorrendo ao programa Winplot que a bissetriz dos quadrantes pares é um eixo de simetria do astróide obtido no **exercício 4.1**.

5. Considera a hipociclóide obtida quando uma circunferência de raio 2 roda sem deslizar no interior de uma circunferência fixa, de raio 10.

5.1. Escreve as equações paramétricas para esta hipociclóide.

5.2. Recorrendo ao programa Winplot desenha graficamente a hipociclóide.

5.3. Considera a hipociclóide que obténs a partir de um círculo, com raio 8, que roda, sem deslizar no interior do mesmo círculo fixo considerado no exercício 5.1., ou seja com raio 10. Escreve as equações paramétricas desta hipociclóide.

5.4. Representa graficamente a hipociclóide cujas equações obtiveste no **exercício 5.3**, no intervalo $[0, 2\pi]$. Prolonga o intervalo considerado até teres a hipociclóide totalmente completa. Que conclusões podes obter?

No **exercício 6.4**. estudaste um exemplo de uma propriedade muito importante das hipociclóides, conhecida como **propriedade da dupla geração**, que nos diz que sempre que uma circunferência de raio a roda no interior de uma circunferência fixa, de raio b , dá origem a uma hipociclóide igual à que se obtém quando uma circunferência de raio $b - a$ roda no interior da mesma circunferência fixa.

SUGESTÕES E SOLUÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE Nº 10

Parte 1

1. $x(\theta) = a + r \cos \theta$ e $y(\theta) = b + r \sin \theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.1.1. $x(\theta) = 2a \cos \theta + a \cos(2\theta)$ e $y(\theta) = 2a \sin \theta - a \sin(2\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

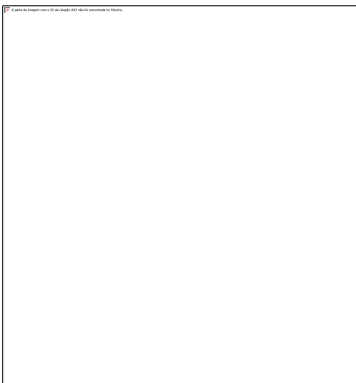
2.1.2. Neste caso $a = 2$ e $b = 6$. Assim $x(\theta) = 4 \cos \theta + 2 \cos(2\theta)$ e $y(\theta) = 4 \sin \theta - 2 \sin(2\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

3.2.1. $x(\theta) = 3a \cos \theta + a \cos(3\theta)$ e $y(\theta) = 3a \sin \theta - a \sin(3\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

3.2.2. Neste caso $a = 2$. Assim $x(\theta) = 6 \cos \theta + 2 \cos(3\theta)$ e $y(\theta) = 6 \sin \theta - 2 \sin(3\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Parte 2

4.1.



4.2. $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

4.3. Para $\theta = 0$ temos $x(0) = 2 \cos 0 + \cos 0 = 3$ e $y(0) = 2 \sin 0 - \sin 0 = 0$, seja, o ponto de coordenadas $A(3, 0)$.

Para $\theta = \frac{2\pi}{3}$ temos $x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{3}{2}$ e $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, seja, o ponto de coordenadas $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para $\theta = \frac{4\pi}{3}$ temos $x\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{3}{2}$ e $y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{8\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, seja, o ponto de coordenadas $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.4. 5,33 cm.

4.5. $P = 3 \times 5,33 \approx 16$ cm.

4.6. $A = 6,28$ cm².

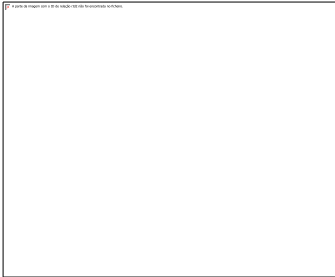
4.7. Os vértices do triângulo são os pontos $A(3,0)$, $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

A altura do triângulo $[ABC]$ é $\frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$.

A base do triângulo $[ABC]$ é $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

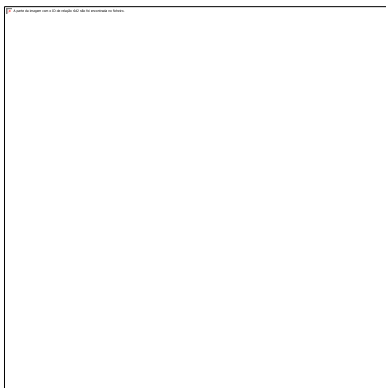
Assim a área do triângulo $[ABC]$ é $A = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{9}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \approx 11,69$ cm².

4.8.



4.9. $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$.

5.1.



5.2. $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

5.3. Para $\theta = 0$ temos $x(0) = 3 \cos 0 + \cos 0 = 4$ e $y(0) = 3 \sin 0 - \sin 0 = 0$, seja, o ponto de coordenadas $A(4,0)$.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ temos $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 4$, seja, o ponto de coordenadas $B(0, 4)$.

Para $\theta = \pi$ temos $x(\pi) = 3 \cos \pi + \cos (3\pi) = -4$ e $y(\pi) = 3 \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} (3\pi) = 0$, seja, o ponto de coordenadas $C(-4, 0)$.

Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$ temos $x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{9\pi}{2} = 0$ e $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{9\pi}{2} = -4$, seja, o ponto de coordenadas $D(0, -4)$.

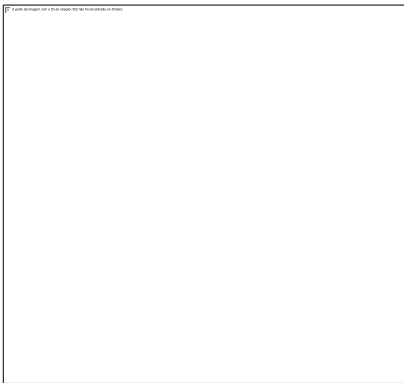
5.4. 6 cm .

5.5. $P = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}$.

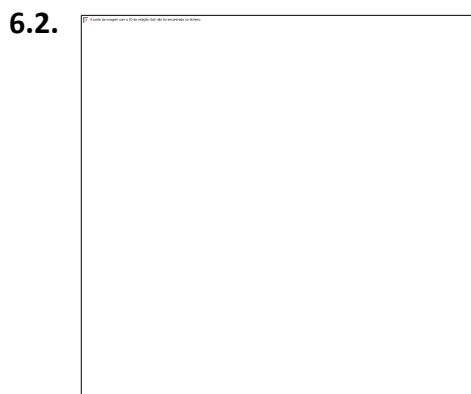
5.6. $A = 18,85 \text{ cm}^2$.

5.7. Usando o teorema de Pitágoras concluímos que o lado do quadrado é $l = \sqrt{32}$. Assim a área do quadrado é $A = 32 \text{ cm}^2$.

5.8. Fazendo a reflexão do astróide relativamente à reta de equação $y = -x$, o astróide obtido fica igual.

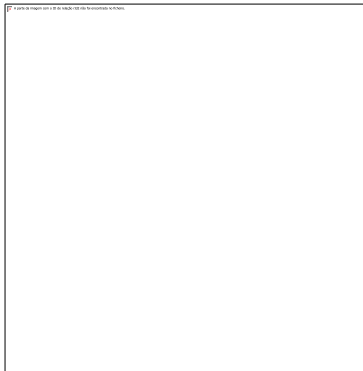


6.1. $x(\theta) = 8 \cos \theta + 2 \cos (4\theta)$ e $y(\theta) = 8 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen} (4\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.



6.3. $x(\theta) = 2\cos \theta + 8\cos \left(\frac{2}{8}\theta\right)$ e $y(\theta) = 2\sin \theta - 8\sin \left(\frac{2}{8}\theta\right)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

6.4. Ao fim de 4 voltas completas a hipociclóide obtida é igual à do exercício 6.1.



3.3. Epiciclóides

Introdução

A **epiciclóide** é a curva obtida pela trajetória que um ponto de uma circunferência, quando esta roda, sem deslizar, no exterior de uma outra circunferência fixa, à qual é tangente. O nome desta curva deriva do grego *epi* que significa *sobre*.

O interesse pelas epiciclóides surgiu na Grécia quando se estudavam os movimentos dos planetas relativamente a estrelas fixas. Estas curvas foram apresentadas pela primeira vez na publicação de *Claudius Ptolomeus*, intitulada “*Al Magesto*”, cuja ideia da mesma atribuiu a *Apollonius*, também conhecido por *Apolónio de Tiana*. Para estudar os movimentos dos planetas, *Claudius Ptolomeus* propôs um modelo geocêntrico segundo o qual, o sol, a lua e os planetas giravam em torno da terra (que estaria fixa), descrevendo órbitas complexas. Em particular deu ênfase ao estudo dos planetas que giravam simultaneamente em dois círculos, um deles sobre o outro, fundamentando a sua teoria em epiciclóides. No entanto verificou algumas incoerências no seu próprio modelo, nomeadamente no movimento do planeta Mercúrio, propondo mais tarde uma nova teoria para o movimento dos planetas com base em 80 epiciclóides.

Ao fim de catorze séculos, *Nicolau Copérnico* sugeriu que os planetas giravam em torno do sol explicando alguns destes movimentos também através de epiciclóides e tornando públicos os seus resultados através do artigo “*De Revolutionibus Orbium Coelestium*”.

Alguns anos mais tarde, *Johannes Kepler* afastou a hipótese das epiciclóides provando que os círculos presentes nas teorias até então desenvolvidas no que concerne ao movimento dos planetas podiam ser substituídos por elipses.

Estas curvas suscitaram ainda o interesse de *Albrech Dürer* em 1525, de *Girard Desargues* em 1640 e de *Christiann Huygens* em 1679. Relativamente a *Girard Desargues*, as epiciclóides foram utilizadas no estudo que o mesmo desenvolvia na altura sobre rodas dentadas em engrenagens.

Em 1772, *Joseph Lagrange* provou que qualquer movimento ao longo da esfera celeste pode ser aproximado por uma epiciclóide.

Estudo da curva

Consideremos duas circunferências C_1 e C_2 tais que C_1 tem centro no ponto O (origem) e raio b e C_2 tem centro no ponto C , e raio a . A circunferência C_2 é tangente à circunferência C_1 e roda sem deslizar no exterior desta.

Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário de C_2 e $Q(x, 0)$, com $x > 0$, um ponto pertencente ao eixo das abcissas, sendo inicialmente o ponto de tangência das duas circunferências. Sem perda de generalidade, consideremos que quando a circunferência C_2 começa a rodar, tangente a C_1 , o ponto $P(x, y)$ coincide com o ponto $Q(x, 0)$.

Quando a circunferência C_2 roda, sem deslizar no exterior da circunferência C_1 , α graus, no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) iniciando o seu movimento no primeiro quadrante, o ponto $P(x, y)$ descreve um arco centrado em C e de ângulo α . Simultaneamente é descrito um arco centrado na origem e de ângulo θ graus, no sentido positivo, como está ilustrado na figura seguinte, tendo ambos o mesmo comprimento.

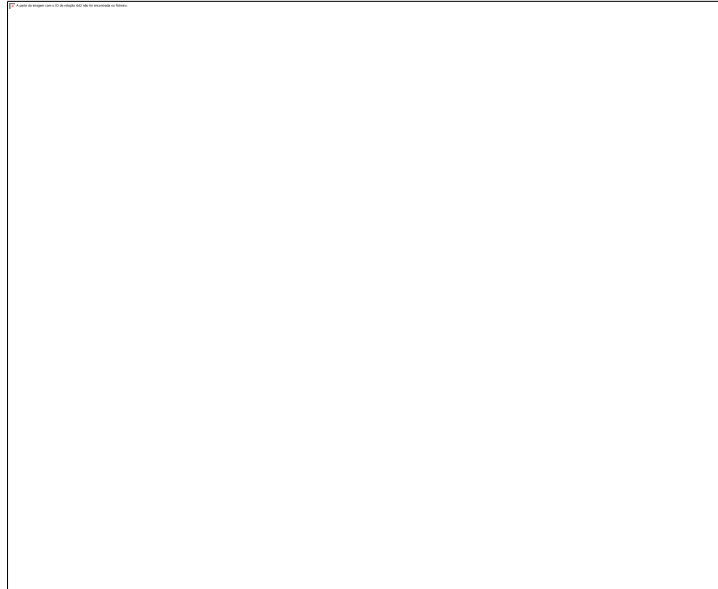


Figura 93 – Construção de uma epiciclóide

Proposição 72. A epiciclóide é definida parametricamente por:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (b + a)\cos \theta - a\cos\left(\frac{b+a}{a}\theta\right). \\ y(\theta) &= (b + a)\sen \theta - a\sen\left(\frac{b+a}{a}\theta\right) \quad , \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (85)$$

Demonstração. As coordenadas de coordenadas do ponto $P(x, y)$ relativamente a C são dadas por:

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= -a\cos(\theta + \alpha). \\ y(\alpha) &= -a\sen(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (86)$$

Por sua vez, as coordenadas de C relativamente a O são:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (b + a)\cos \theta. \\ y(\theta) &= (b + a)\sen \theta. \end{aligned} \quad (87)$$

Tendo em conta (86) e (87), obtemos as coordenadas de $P(x, y)$ relativamente a O , nomeadamente:

$$\begin{aligned} x(\theta, \alpha) &= (b + a)\cos \theta - a\cos(\theta + \alpha). \\ y(\theta, \alpha) &= (b + a)\sen \theta - a\sen(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (88)$$

Notemos novamente que, ao se movimentar, os arcos da circunferência que roda são iguais aos arcos com os quais entram em contato, da circunferência fixa, logo $b\theta = a\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{b\theta}{a}$. (89)

Usando (89) em (88), obtemos:

$$x(\theta) = (b + a)\cos \theta - a\cos\left(\frac{b + a}{a}\theta\right).$$

$$y(\theta) = (b + a)\sin \theta - a\sin\left(\frac{b + a}{a}\theta\right). \blacksquare$$

Notemos que o ponto $P(x, y)$ volta a tocar na circunferência C_1 quando a circunferência C_2 percorre um arco de comprimento $2\pi a$.

Se $\frac{b}{a} = n, n \in \mathbb{N}$, então o ponto $P(x, y)$ toca na circunferência C_1 n vezes, coincidindo na n -ésima vez com a sua posição inicial, uma vez que o comprimento da circunferência C_1 é n vezes o comprimento da circunferência C_2 , isto é $2\pi b = 2\pi(na) = n(2\pi a)$.

As epiciclóides também têm mais do que uma cúspide, estando o número das mesmas dependente da razão entre b e a , raios da circunferência fixa e que roda, respetivamente.

Por exemplo, se $\frac{b}{a} = 5$, a curva tem 5 cúspides e é obtida após 5 voltas completas da circunferência que roda sem deslizar em torno da circunferência fixa ou, dito de outro modo, após o ponto $P(x, y)$ tocar 5 vezes na circunferência fixa.

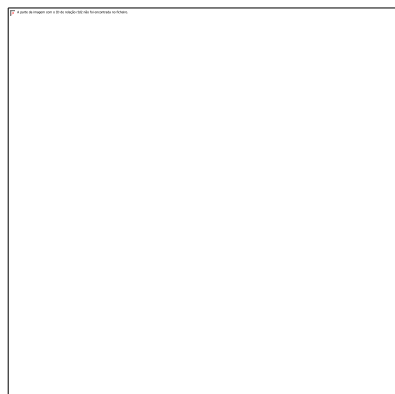


Figura 94 – Epiciclóide com 5 cúspides

Se considerarmos $\frac{b}{a} = 10$, a curva tem 10 cúspides e é obtida após 10 voltas completas da circunferência que roda sem deslizar em torno da circunferência fixa ou, dito de outro modo, após o ponto $P(x, y)$ tocar 10 vezes na circunferência fixa.



Figura 95 – Epiciclóide com 10 cúspides

Na próxima figura está representada uma epiciclóide em que $\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \notin N$.

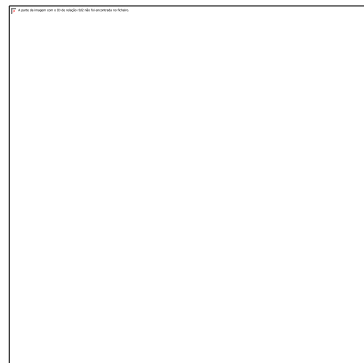


Figura 96 – Epiciclóide

Vejamos agora alguns exemplos em que $\frac{b}{a}$ é um número natural. Particularizando os valores de b e a , obtemos diferentes tipos de epiciclóides. Vejamos algumas propriedades destas curvas.

3.3.1. Cardióide

A **cardióide** é obtida quando $\frac{b}{a} = 1$, ou seja, $b = a$. Tem uma cúspide e é definida parametricamente por:

$$x(\theta) = 2a \cos \theta - a \cos (2\theta) = a[2 \cos \theta - \cos (2\theta)].$$

$$y(\theta) = 2a \sin \theta - a \sin (2\theta) = a[2 \sin \theta - \sin (2\theta)], \theta \in [0, 2\pi]. \quad (90)$$

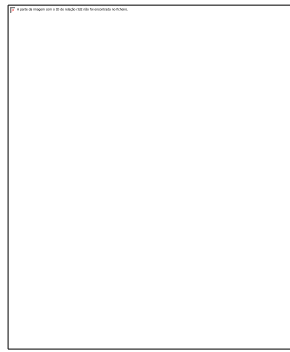


Figura 97 – Cardióide

As equações obtidas em (90) definem a cardióide com cúspide em $(a, 0)$, para $\theta = 0$.

Em 1741, o astrólogo dinamarquês *Christensen Roemer* começou a estudar esta curva ao procurar soluções para um projeto pessoal sobre dentes de engrenagem. O nome de cardióide (do latim *cardis* que significa coração) surgiu pela primeira vez, num artigo de *Castillon* em 1784, publicado em *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

Philippe de La Hire foi o primeiro a calcular o comprimento da cardióide.

As cardióides são utilizadas em microfones conhecidos por microfones cardióides ou unidirecionais. Estes captam o som com mais ou menos intensidade consoante este vem de frente ou da lateral, respetivamente. Conseguem captar de forma mais eficaz o som emitido a uma distância moderada, numa área em forma de coração, em frente à cápsula.

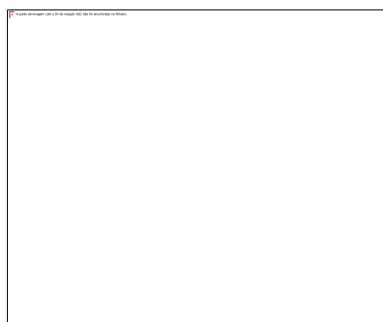
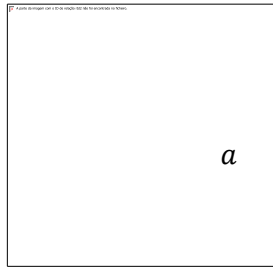


Figura 98 – Microfone Cardióide

Consideremos agora a translação da cardióide definida em (90), associada ao vetor $(a, 0)$.



Deste modo as equações paramétricas obtidas em (90) transformam-se:

$$x(\theta) = 2a \cos \theta - a \cos (2\theta) - a.$$

$$y(\theta) = 2a \sin \theta - a \sin (2\theta), \theta \in [0, 2\pi]. \quad (91)$$

Proposição 73. A equação da cardióide, dada em (91), em coordenadas polares é

$$r = 2a(1 - \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Demonstração. Usando as fórmulas da duplicação de ângulos e simplificando as equações obtidas em (91) obtemos:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2a \cos \theta - a \cos (2\theta) - a = 2a \cos \theta - a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - a = 2a \cos \theta - 2a \cos^2 \theta \\ &= 2a \cos \theta (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

$$y(\theta) = 2a \sin \theta - 2a \sin \theta \cos \theta = 2a \sin \theta (1 - \cos \theta).$$

Assim:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4a^2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{4a^2(1 - \cos \theta)^2} = 2a(1 - \cos \theta). \blacksquare \end{aligned}$$

Chama-se **eixo de simetria de uma cardióide** à reta que contém a cúspide e a divide em duas partes iguais. Se a cúspide se localizar num dos eixos coordenados, o eixo de simetria é vertical ou horizontal.

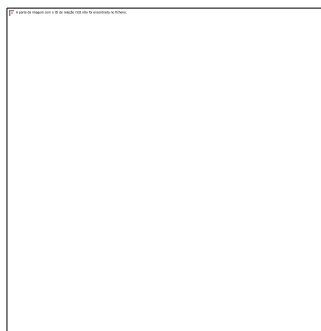


Figura 99 – Eixo de simetria de uma cardióide com cúspide no eixo das abscissas

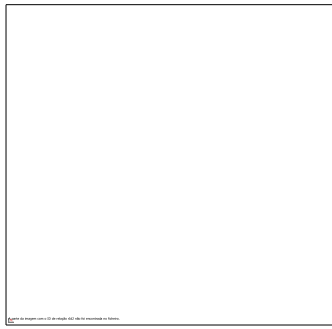


Figura 100 – Eixo de simetria de uma cardióide com cúspide no eixo das ordenadas

O segmento de reta que pertence ao eixo de simetria e une a cúspide com um ponto da cardióide é conhecido por **eixo maior** da cardióide.

A equação que obtivemos na proposição 73 refere-se a uma cardióide cujo eixo de simetria é $y = 0$ e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo (figura 101).



Figura 101 – Cardióide com cúspide no eixo das abcissas e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo

Por um raciocínio análogo obtemos a equação da cardióide em coordenadas polares quando a cúspide se localiza no eixo das abcissas mas o eixo maior pertence à parte positiva do x , considerando a mudança de variável $\theta = \pi - \alpha$. Neste caso temos $r = 2a(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

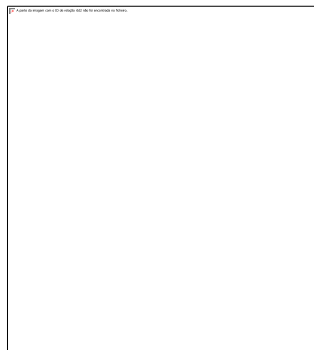


Figura 102 – Cardióide com cúspide no eixo das abcissas e o eixo maior pertence à parte positiva do mesmo

Quando a cúspide se localiza no eixo das ordenadas e o eixo maior na parte positiva obtemos $r = a(1 + \text{sen } \theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

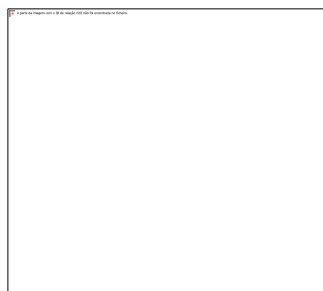


Figura 103 – Cardióide com cúspide no eixo das ordenadas e o eixo maior pertence à parte positiva do mesmo

Finalmente, quando a cúspide se localiza no eixo das ordenadas e o eixo maior na parte negativa deste, a equação da cardióide em coordenadas polares é $r = a(1 - \text{sen } \theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

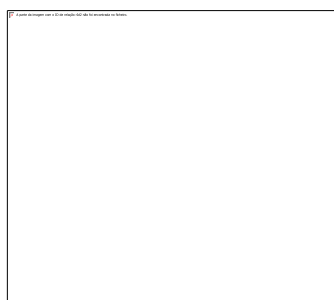


Figura 104 – Cardióide com cúspide no eixo das ordenadas e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo

Ao longo deste estudo iremos considerar a cardióide com cúspide no eixo das abcissas e o eixo maior pertence à parte negativa do mesmo, utilizando a equação obtida na proposição 73.

Relativamente ao valor a , a variação do mesmo conduz ao aumento ou diminuição do eixo maior da cardióide como ilustra, através de um exemplo, a figura seguinte. À medida que o valor de a aumenta, o comprimento do eixo maior da cardióide também aumenta.

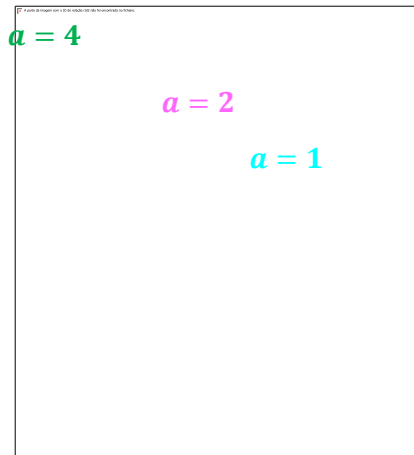


Figura 105 – Várias cardioides com diferentes valores de a

Proposição 74. A equação da cardióide, definida em (91), em coordenadas cartesianas é:

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Demonstração. Tendo em conta a equação da cardióide em coordenadas polares, obtida na proposição 73 temos $r = 2a(1 - \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Por outro lado sabemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Assim substituindo as expressões de r e $\cos \theta$ na equação da cardióide em coordenadas polares,

$$\text{obtemos } \sqrt{x^2 + y^2} = 2a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} - 2ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \blacksquare$$

Vamos fazer a construção geométrica do cardióide adaptando a que é apresentada no livro “A Book of Curves” de E. Lockwood, [13], página 35.

1.º Desenhar uma circunferência (circunferência base) de raio 3 *cm* e marcar na mesma um ponto A .

2.º Escolher um ponto P perto do ponto A , na circunferência e traçar a circunferência de centro em P e raio \overline{PA} .

3.º Repetir o passo 2, fazendo P percorrer vários pontos da circunferência, em toda a volta.

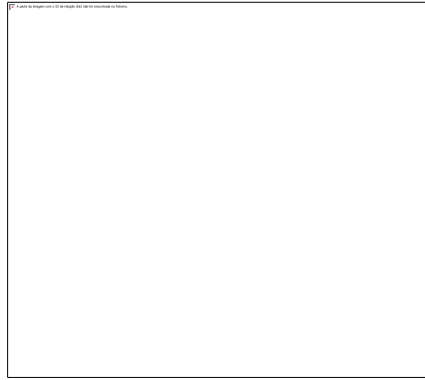


Figura 106 - Construção da cardióide – Passos 1 a 3

4.º A curva em forma de coração onde todas as circunferências desenhadas tocam é a cardióide.

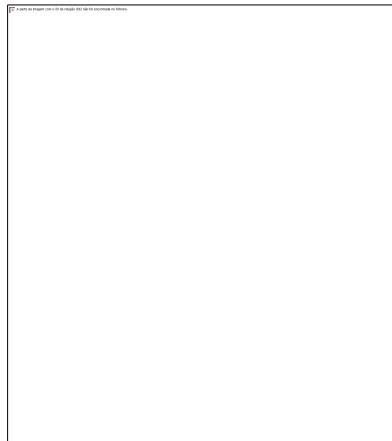


Figura 107 - Construção geométrica da cardióide

Proposição 75. O comprimento do arco da cardióide é $S = 16a$.

Demonstração. De acordo com a proposição 73, temos que $r = 2a(1 - \cos \theta)$.

$$\text{Logo } \frac{dr}{d\theta} = 2a \operatorname{sen} \theta.$$

Considerando a expressão que define o comprimento do arco de uma curva definida em coordenadas polares e restringindo esse comprimento ao primeiro e segundo quadrante, pois, a cardióide é simétrica em relação ao eixo das abcissas, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{[2a(1 - \cos \theta)]^2 + (2a \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2(\operatorname{sen}^2 \theta + 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4a^2(2 - 2\cos \theta)} d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta = 2\sqrt{2}a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \left[-\cos \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.
\end{aligned}$$

Logo o comprimento total do arco da cardióide vai ser $S = 2 \times S_1 = 16a$. ■

Exemplo. O comprimento de um arco da cardióide definida por $r = 1 - \cos \theta$ é $S = 16 \times \frac{1}{2} = 8$, pois $2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Proposição 76. A área da região delimitada pela cardióide dada por (91) é $A = \frac{3\pi}{2} b^2 = 6\pi a^2$.

Demonstração. Sabemos que $r = 2a(1 - \cos \theta)$. Tendo em conta a expressão para a área da região delimitada por uma curva definida em coordenadas polares, temos:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [y(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4a^2(1 - \cos \theta)^2] d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\theta)\right) d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(-2\cos \theta + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\theta)\right) d\theta = \\
&= 2a^2 \left(\left[\frac{3}{2}\theta\right]_0^{2\pi} - 2[\operatorname{sen} \theta]_0^{2\pi} + \left[\frac{\operatorname{sen} (2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} \right) = 2a^2(3\pi) = 6\pi a^2. \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo. A área da região delimitada pela cardióide obtida quando a circunferência de equação $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ roda, sem deslizar, no exterior da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, é $A = 6\pi$, pois $a = 1$.

Proposição 77. O raio de curvatura da cardióide é $R_c(\theta) = \frac{8}{3} a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$.

Demonstração. Consideremos a expressão que define o raio de curvatura de uma curva que

admite uma parametrização em coordenadas polares $R_c(\theta) = \left| \frac{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \right|$.

Seendo $r = 2a(1 - \cos \theta)$, então $r' = 2a \sin \theta$ e $r'' = 2a \cos \theta$. Assim:

$$R_c(\theta) = \left| \frac{(4a^2(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^{\frac{3}{2}}}{4a^2(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta - \cos \theta + \cos^2 \theta)} \right|$$

$$= \left| \frac{[8a^2(1 - \cos \theta)]^{\frac{3}{2}}}{4a^2(3 - 3\cos \theta)} \right| = \left| \frac{2^{\frac{9}{2}}a^3(1 - \cos \theta)^{\frac{3}{2}-1}}{12a^2} \right| = \left| \frac{16\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos \theta}}{12} \right| = \frac{8}{3}a \sin \frac{\theta}{2}. \blacksquare$$

Exemplo. O raio de curvatura da cardióide definida pelas equações:

$$x(\theta) = 4\cos \theta - 2\cos(2\theta).$$

$$y(\theta) = 4\sin \theta - 2\sin(2\theta), \theta \in [0, 2\pi],$$

para $\theta = \pi$ é $R_c(\pi) = \left| \frac{8}{3} \times 2\sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{16}{3}$, pois $a = 2$.

Proposição 78. A evoluta de uma cardióide é uma cardióide.

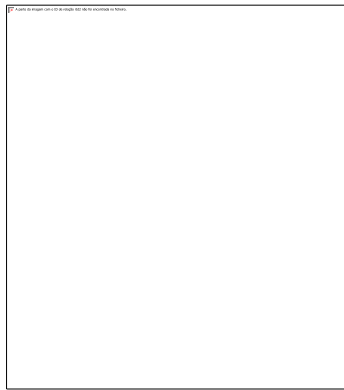


Figura 108 - Cardióide a sua evoluta

3.3.2. Nefróide ou Epiciclóide de Huygens

A nefróide é obtida quando $\frac{b}{a} = 2$ ou seja $b = 2a$ Tem duas cúspides e é definida parametricamente por:

$$x(\theta) = 3a\cos \theta - a\cos(3\theta) = a[3\cos \theta - \cos(3\theta)].$$

$$y(\theta) = 3a\sin \theta - a\sin(3\theta) = a[3\sin \theta - \sin(3\theta)], \theta \in [0, 2\pi]. \quad (92)$$

A nefróide tem as suas cúspides em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Além disso, para $\theta = 0$ temos $x = 2a$ e para $\theta = \pi$ temos $x = -2a$.

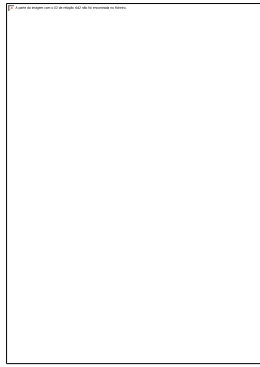


Figura 109 – Nefróide

O nome de nefróide (do latim *nephros* que significa rim) foi utilizado pela primeira vez, em 1878, por *Richard Proctor* para designar uma epiciclóide com duas cúspides apesar de a mesma ter suscitado o interesse de muitos outros matemáticos e físicos, como *Jacques Bernoulli*, *Christiann Huygens* (razão pela qual ficou também conhecida por Epiciclóide de Huygens) e *Tschirnhausen*. Relativamente a *Christiann Huygens*, este apresentou a curva, embora sem a denominar, como solução de um problema de raios paralelos refletidos, a partir de uma circunferência, tendo sido publicados estes mesmos resultados em 1690.

Proposição 79. A equação da nefróide em coordenadas polares é $r = a\sqrt{2[5 - 3\cos(2\theta)]}$,
 $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demonstração. Tendo em conta as equações da nefróide, obtidas em (92) temos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3a\cos\theta - a\cos(3\theta))^2 + (3a\sin\theta - a\sin(3\theta))^2} \\ &= \sqrt{10a^2 - 6a^2\cos(2\theta)} = a\sqrt{2[5 - 3\cos(2\theta)]}. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 80. A equação da nefróide em coordenadas cartesianas é dada por:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2.$$

Demonstração. Começemos por encontrar a expressão simplificada de $(x^2 + y^2 - 4a^2)^3$.

Tendo em conta a proposição 79, $x^2 + y^2 = r^2 = 2a^2[5 - 3\cos(2\theta)]$.

Assim temos:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = [2a^2[5 - 3\cos(2\theta)] - 4a^2]^3 = [6a^2 - 6a^2\cos(2\theta)]^3$$

$$= [6a^2(1 - \cos(2\theta))]^3 = 216a^6[1 - \cos(2\theta)]^3 = 216a^6[2\sin^2\theta]^3 = 1728a^6\sin^6\theta. \quad (93)$$

Vejamos que obtemos a mesma expressão simplificada para $108a^4y^2$.

$$\text{Temos } 108a^4y^2 = 108a^4[3a\sin\theta - a\sin(3\theta)]^2 = 108a^6[3\sin\theta - \sin(3\theta)]^2. \quad (94)$$

Usando a igualdade $\frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4} = \sin^3\theta$ em (94) obtemos:

$$108a^4y^2 = 108a^6(4\sin^3\theta)^2 = 1728a^6\sin^6\theta. \quad (95)$$

Assim, de acordo com (93) e (95) temos que as equações cartesianas da nefróide são

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2. \blacksquare$$

Vamos fazer a construção geométrica da nefróide adaptando a que é apresentada no livro “A Book of Curves” de E. Lockwood, [13], página 63.

- 1.º Desenhar uma circunferência (circunferência base) com centro na origem e raio 3 cm .
- 2.º Escolher um ponto P na circunferência e com centro no mesmo, desenhar uma circunferência que seja tangente ao eixo Oy .
- 3.º Repetir o **passo 2** fazendo P percorrer vários pontos da circunferência, em toda a volta.

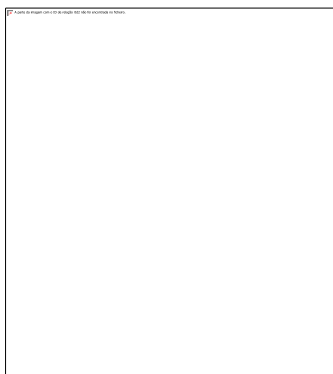


Figura 110 - Construção da nefróide – Passos 1 a 3

O “envelope”⁷ da figura obtida no final da construção é uma nefróide.

⁷É a curva que é tangente a cada uma das curvas, nalgum ponto.

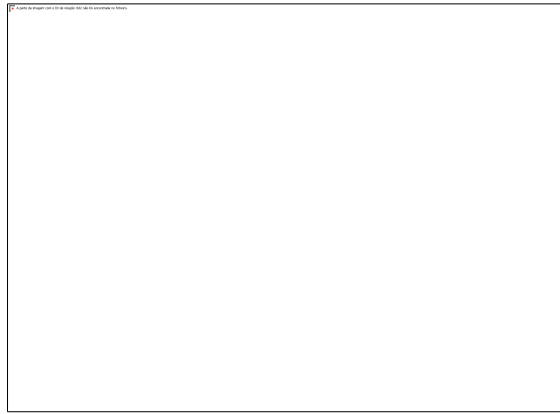


Figura 111 - Construção geométrica da nefróide

Proposição 81. O comprimento do arco da nefróide é $24a$.

Demonstração. Como a nefróide tem uma cúspide em $\theta = \pi$, calculamos o comprimento do arco entre as primeiras duas cúspides e multiplicamos o respectivo resultado por 2.

Tendo em conta a expressão do comprimento do arco de uma curva definida parametricamente, bem como as equações obtidas em (92) temos:

$$x'(\theta) = -3a \operatorname{sen} \theta + 3a \operatorname{sen}(3\theta).$$

$$y'(\theta) = 3a \operatorname{cos} \theta - 3a \operatorname{cos}(3\theta).$$

(96)

$$\text{Assim } S_1 = \int_0^\pi \sqrt{[-3a[\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}(3\theta)]]^2 + [3a[\operatorname{cos} \theta - \operatorname{cos}(3\theta)]]^2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{9a^2[\operatorname{sen}^2 \theta - 2\operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2(3\theta) + \operatorname{cos}^2 \theta - 2\operatorname{cos}(3\theta)\operatorname{cos} \theta + \operatorname{cos}^2(3\theta)]} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{9a^2(2 - 2\operatorname{cos} \theta)} d\theta = 3\sqrt{2} a \int_0^\pi \sqrt{1 - \operatorname{cos} \theta} d\theta = 6a \int_0^\pi \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 12a \left[-\operatorname{cos} \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi$$

$$= 12a.$$

$$\text{Assim } S = 2 \times S_1 = 24a. \blacksquare$$

Exemplo. O comprimento do arco da nefróide definida pela equação $r = 6\sqrt{2[5 - 3\operatorname{cos}(2\theta)]}$,

$\theta \in [0, 2\pi]$ é $S = 24 \times 6 = 144$ pois neste caso $a = 6$.

Proposição 82. A área da região delimitada por uma nefróide é $12\pi a^2$.

Demonstração. Tendo em conta (92) e (96) temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{2\pi}^0 [a[3\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}(3\theta)] \times a[-3\operatorname{sen} \theta + 3\operatorname{asen}(3\theta)]] d\theta \\
 &= \int_{2\pi}^0 [-9a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 12a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(3\theta) - 3a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta)] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [9a^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 12a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(3\theta) + 3a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta)] d\theta \\
 &= 9a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} - 12a^2 \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(3\theta)] d\theta + 3a^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}(6\theta)}{12} \right]_0^{2\pi} \\
 &= 9a^2\pi + 3a^2\pi = 12a^2\pi = 12\pi a^2. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Exemplo. A área da região delimitada pela nefróide obtida quando a circunferência de equação $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ roda, sem deslizar, no exterior da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, é $A = 12\pi \times 1 = 12\pi$, pois $a = 1$.

Proposição 83. O raio de curvatura do nefróide é $3\operatorname{asen} \theta$.

Demonstração. Relembremos que $R_c(\theta) = \left| \frac{[x'^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \right|$.

Tendo em conta as equações obtidas em (92) e (96), temos:

$$x''(\theta) = -3a\cos \theta + 9a\cos(3\theta) \text{ e } y''(\theta) = -3\operatorname{asen} \theta + 9\operatorname{asen}(3\theta). \quad (97)$$

Deste modo:

$$\left| \frac{[[-3\operatorname{asen} \theta + 3\operatorname{asen}(3\theta)]^2 + [3a\cos \theta - 3a\cos(3\theta)]^2]^{\frac{3}{2}}}{[-3\operatorname{asen} \theta + 3\operatorname{asen}(3\theta)] \times [-3\operatorname{asen} \theta + 9\operatorname{asen}(3\theta)] - [3a\cos \theta - 3a\cos(3\theta)] \times [-3a\cos \theta + 9a\cos(3\theta)]} \right|$$

Simplificando os cálculos e reduzindo os termos semelhantes, obtemos:

$$R_c(\theta) = \left| \frac{[18a^2[1 - \cos(2\theta)]]^{\frac{3}{2}}}{36a^2[1 - \cos(2\theta)]} \right| = \left| \frac{18\sqrt{18}}{36} a\sqrt{1 - \cos(2\theta)} \right| = 3\operatorname{asen} \theta. \blacksquare$$

Proposição 84. A evoluta de uma nefróide é uma nefróide.

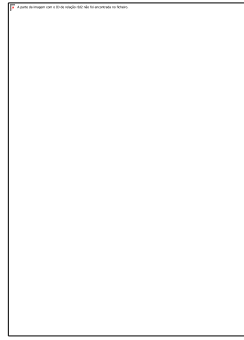


Figura 112 – Nefróide e a sua evoluta

Vamos agora generalizar algumas propriedades das epiciclóides, tendo em conta o número n de cúspides que apresenta.

Proposição 85. A epiciclóide com n cúspides é definida parametricamente por:

$$x(\theta) = a(n + 1)\cos \theta - a\cos [(n + 1)\theta].$$

$$y(\theta) = a(n + 1)\sen \theta - a\sen [(n + 1)\theta], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Demonstração. Consideremos uma epiciclóide obtida a partir de uma circunferência de raio a que roda, sem deslizar, no exterior de uma circunferência fixa de raio b , sendo $a < b$ e $\frac{b}{a} = n, n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, $b = an$ e substituindo b nas equações obtidas na proposição 72, obtemos:

$$x(\theta) = a(n + 1)\cos \theta - a\cos [(n + 1)\theta].$$

$$y(\theta) = a(n + 1)\sen \theta - a\sen [(n + 1)\theta], \quad \theta \in [0, 2\pi]. \blacksquare$$

Proposição 86. O comprimento de uma epiciclóide com n cúspides é dado por:

$$S_n = 8a(n + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tendo em conta as equações obtidas na proposição 85, temos:

$$x'(\theta) = -a(n + 1)\sen \theta + a(n + 1)\sen [(n + 1)\theta].$$

$$y'(\theta) = a(n + 1)\cos \theta - a(n + 1)\cos [(n + 1)\theta].$$

A epiciclóide tem n cúspides, pelo que vamos calcular o comprimento do arco entre as primeiras duas cúspides, nomeadamente 0 e $\frac{2\pi}{n}$ e multiplicamos o resultado obtido por n .

$$s_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{[-a(n+1)\text{sen } \theta + a(n+1)\text{sen } [(n+1)\theta]]^2 + [a(n+1)\text{cos } \theta - a(n+1)\text{cos } [(n+1)\theta]]^2} d\theta.$$

Resolvendo os casos notáveis e reduzindo os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{2a^2(n+1)^2[1 - \text{cos } (n\theta)]} d\theta \\ &= \sqrt{2}a(n+1) \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{[1 - \text{cos}^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) + \text{sen}^2\left(\frac{n}{2}\theta\right)]} = \frac{2\sqrt{2}a(n+1)\sqrt{2}}{n} \left[-\text{cos}\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{n}} \\ &= \frac{4a(n+1)}{n} \times 2 = \frac{8a(n+1)}{n}. \end{aligned}$$

Deste modo $S = n \times S_1 = 8a(n+1)$. ■

Proposição 87. A área da região delimitada por uma epiciclóide com n cúspides é dada por:

$$A_n = a^2(n+1)(n+2)\pi, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tendo em conta as equações obtidas na proposição 85 temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{2\pi}^0 [a(n+1)\text{sen } \theta - a\text{sen } [(n+1)\theta]] [-a(n+1)\text{sen } \theta + a(n+1)\text{sen } [(n+1)\theta]] d\theta \\ &= a^2(n+1)^2 \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen } [(n+1)\theta] d\theta - \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen } [(n+1)\theta] d\theta + \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 [(n+1)\theta] d\theta \right] \\ &= a^2(n+1)^2 \left[\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen } [(n+1)\theta] d\theta - \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \text{sen } [(n+1)\theta] d\theta + \frac{1}{n+1} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}[2(n+1)\theta]}{4(n+1)} \right]_0^{2\pi} \right] \\ &= a^2(n+1)^2 \left(\pi + \frac{1}{n+1} \pi \right) = a^2(n+1)(n+2)\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A epiciclóide é um caso particular da curva chamada **epitrocóide**. Consideremos uma semireta com origem no centro da circunferência geradora e $P(x, y)$ um ponto da mesma. A epitrocóide é a curva descrita pela trajetória do ponto $P(x, y)$ quando a circunferência roda, sem deslizar sobre a circunferência fixa.

Designando por R o raio da circunferência fixa, r o raio da circunferência que roda sem deslizar e d , a distância do ponto $P(x, y)$ ao centro da circunferência que roda, as equações da epitrocóide são:

$$x(t) = (R + r)\cos t - d \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R + r)\sin t - d \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Quando $d = r$, a epitrocóide é uma epicycloide e quando $d = r = R$, a epitrocóide é uma cardióide.

A **epitrocóide** também pode ser obtida com o espirógrafo a partir de uma roda dentada de plástico que se move no exterior de uma outra roda dentada fixa, sem deslizar, ou seja, sempre tangente à mesma.

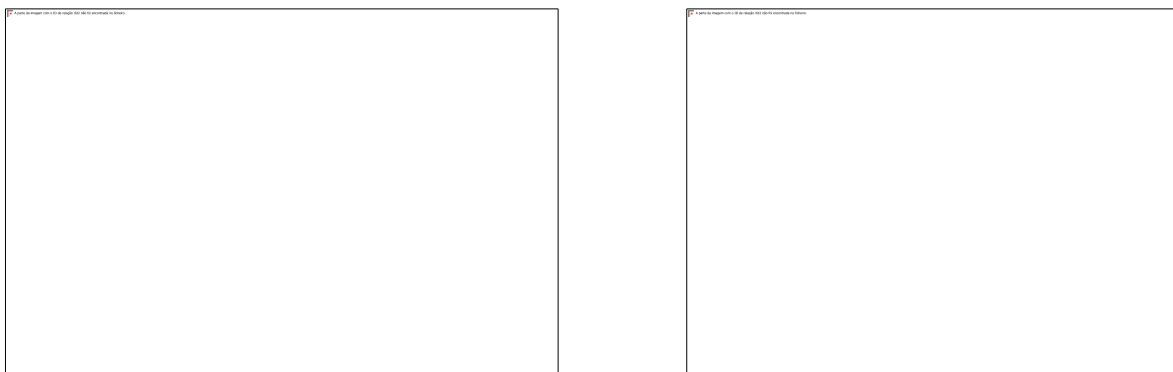


Figura 113 – Construção de epitrocóides através do Espirógrafo

Tal como nas hipotrocóides, a construção de epitrocóides através do espirógrafo depende do raio da roda fixa, do raio da roda que gira e do orifício onde se coloca a ponta do lápis.

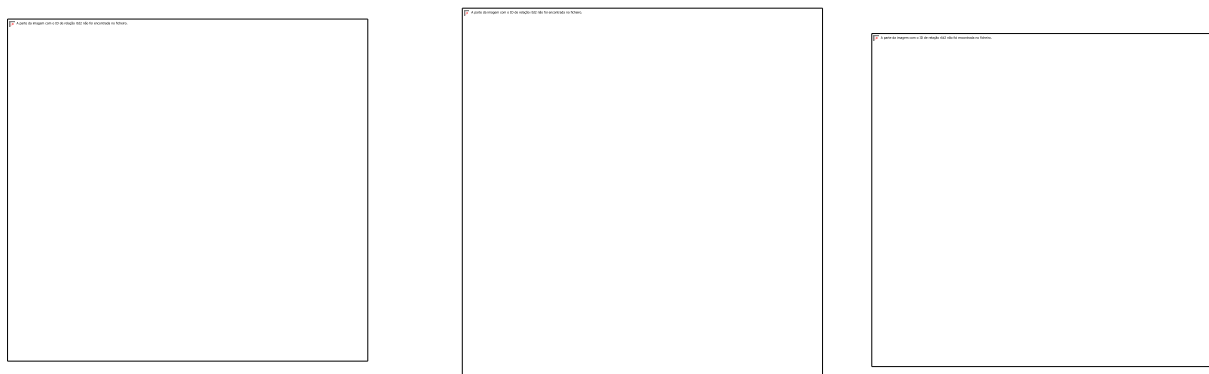


Figura 114 – Sequência de figuras obtidas através do Espirógrafo

A seqüência de epitrocóides construídas no espirógrafo e ilustradas na figura 114 foi obtida usando a mesma roda fixa e aumentando os raios das rodas que giram. A figura mais à esquerda foi obtida com a roda dentada de menor raio e a mais à direita com a de maior raio.

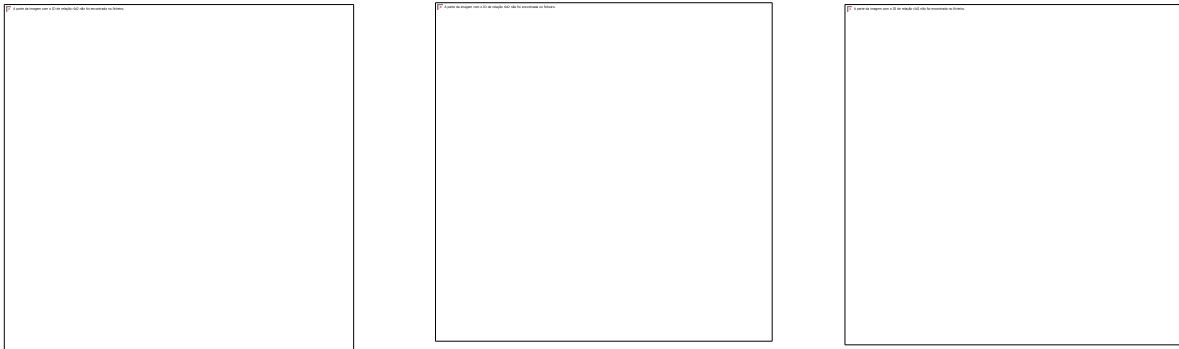


Figura 115 – Seqüência de epitrocóides obtidas através do Espirógrafo

A seqüência de epitrocóides construídas no espirógrafo e ilustradas na figura 115 foi obtida usando a mesma roda fixa e a mesma roda que gira mas com a ponta do lápis colocada em diferentes orifícios. Da esquerda para a direita, obtiveram-se as figuras colocando a ponta do lápis em orifícios que se afastam cada vez mais do centro.

Atividade de Aplicação nº 11: Construção de Epiciclóides recorrendo ao programa Winplot

A. Designação: Brincando com epiciclóides!

B. Objetivos:

- Introdução do sistema de coordenadas polares;
- Introdução às equações paramétricas de uma curva;
- Desenvolver competências ao nível do programa Winplot;
- Aplicação de conhecimentos.

C. Pré-requisitos:

- Área de uma circunferência;
- Perímetro de uma circunferência;
- Equações trigonométricas;
- Transformações simples de funções da forma $y = f(x + a) + b$.

D. Conteúdos:

- Epiciclóides e algumas propriedades;
- Equações paramétricas;
- Cálculo de áreas e comprimento de curvas;
- Cálculo de ângulos e de pontos de interseção com eixos coordenados.

E. Destinatários: Alunos do 11.º e 12.º anos.

F. Duração da atividade: 90 minutos para resolução e 60 minutos para correção.

G. Observações: Se a atividade nº 9 for resolvida antes da atividade nº 11, o **exercício 1** não deve ser resolvido.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

PROGRAMA WINPLOT

O **Winplot** é um software desenvolvido por *Richard Parris*, professor da *Philips Exeter Academy* e que permite construções geométricas, como curvas e superfícies, gráficos de funções e animação dos mesmos e cálculos algébricos, quer a duas, quer a três dimensões.

Apresentamos a legenda da terminologia que irá ser utilizada.

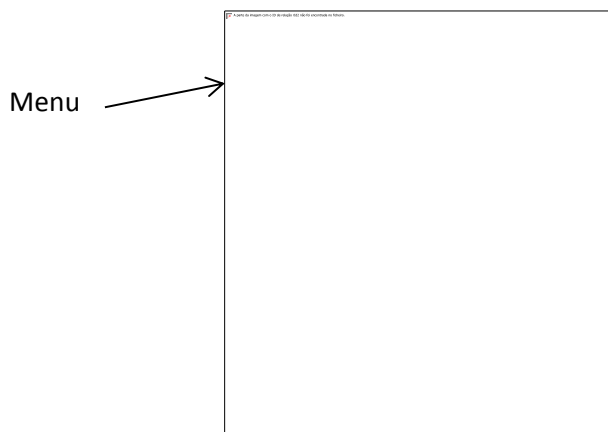


Figura 1 - Folha gráfica do programa Winplot

Notações a utilizar:

- Sempre que quiseres introduzir o valor de π , escreve “pi”.
- Sempre que quiseres introduzir a função seno, escreve “sin”.
- O parâmetro a utilizar deve ser representado por t e sempre indicado entre parênteses.

EPICICLÓIDES

Grande parte das curvas do plano que conheces representam gráficos de funções reais de variável real, onde a variável independente é o x e a variável dependente é o y que se obtém em função de x .

A título de exemplo referem-se:

- As **funções afins** cujos gráficos são retas e as expressões que as definem são da forma:

$$y = ax + b, \forall a, b \in R.$$

- As **funções quadráticas** cujos gráficos são parábolas e as expressões que as definem são forma:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ ou } y = a(x - h)^2 + k, \text{ com } h, k \in \mathbb{R}.$$

Existem curvas no plano que não representam gráficos de funções reais de variável real, como por exemplo, a circunferência, a elipse, etc. Algumas dessas curvas podem ser representadas por duas equações, uma relativa à variável x e outra relativa à variável y , ambas dependentes de um determinado parâmetro real θ . Por este motivo são conhecidas por **equações paramétricas**.

A título de exemplo referem-se:

- As equações paramétricas de circunferências de raio r , centradas em $(0, 0)$ são:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r \cos \theta \\ y(\theta) &= r \operatorname{sen} \theta, \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Se considerarmos uma circunferência centrada na origem, é possível escrever as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ que pertença à mesma, em função do ângulo que \overrightarrow{OP} faz com o semieixo positivo do x .

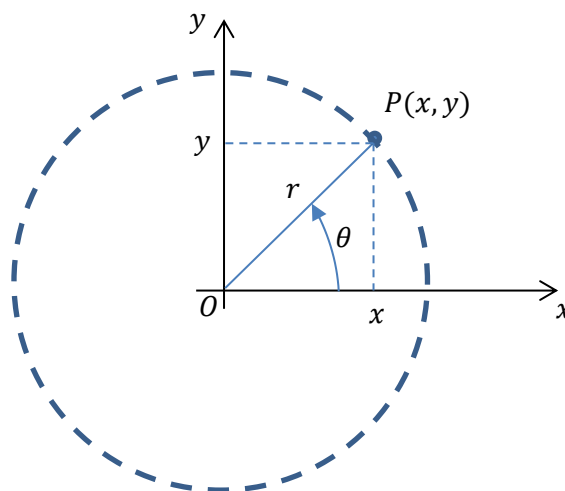


Figura 2 – Circunferência de raio r centrada na origem

Na resolução dos exercícios seguintes, considera o cm como unidade de medida e apresenta todos os resultados arredondados às centésimas.

1. Escreve as equações paramétricas de uma circunferência C_2 de raio r , centrada no ponto (a, b) .

2. Considera uma circunferência fixa de raio b . Se no exterior desta rodar, sem deslizar, uma circunferência de raio a , é descrita uma curva que se chama **epiciclóide**. Consoante os valores de a e b , as epiciclóides obtidas têm nomes específicos.

As equações paramétricas da epiciclóide obtida quando uma circunferência de raio a roda, sem deslizar, no exterior de uma circunferência fixa de raio b , são:

$$x(\theta) = (b + a)\cos \theta - a\cos\left(\frac{b + a}{a}\theta\right).$$

$$y(\theta) = (b + a)\sin \theta - a\sin\left(\frac{b+a}{a}\theta\right) \quad , \theta \in [0, 2\pi].$$

2.1. Considera que o raio da circunferência fixa é igual ao raio da circunferência que roda. Neste caso a epiciclóide obtida é conhecida por **cardióide**.

2.1.1. Resolve a equação $y'(\theta) = 0$, para $\theta \in [0, \pi]$.

2.1.2. Recorrendo ao programa Winplot representa graficamente a cardióide para $a = 1$.

2.1.3. A cardióide tem um vértice também conhecido por **cúspide**. Considerando a representação gráfica da cardióide obtida no **exercício 2.1.2.**, apresenta o valor de θ para o qual existe uma cúspide e indica as coordenadas da cúspide.

2.1.4. Escreve as equações paramétricas da cardióide para $a = 1$, de modo a que a sua cúspide seja o ponto $V(2, -1)$.

2.1.5. Explica como podemos obter, a partir da cardióide considerada no **exercício 2.1.2.**, a cardióide definida pelas equações paramétricas:

$$x(\theta) = e^2 + 2\cos \theta - \cos (2\theta)$$

$$y(\theta) = e^{-2} + 2a\sin \theta - a\sin (2\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

2.1.6. Indica o valor exato das coordenadas da cúspide da cardióide considerada no **exercício 2.1.5.**

2.1.7. Calcula, recorrendo ao programa Winplot, o comprimento da cardióide para $a = 1$, considerando 0 como limite inferior e π como limite superior, adaptando os valores indicados ao resultado pretendido.

2.1.8. Calcula, recorrendo ao programa Winplot, a área da região delimitada pela cardióide para $a = 1$.

2.1.9. Chama-se **eixo de simetria de uma cardióide** à reta que contém a cúspide e a divide em duas partes iguais. Se a cúspide se localizar num dos eixos coordenados, então o eixo de simetria é vertical ou horizontal. O segmento de reta que pertence ao eixo de simetria e une a cúspide com um ponto da cardióide é conhecido por **eixo maior** da cardióide.

Relaciona o valor de a com a cúspide da cardióide e com o comprimento do seu eixo maior, apresentando uma expressão geral para ambas.

2.2. Considera que o raio da circunferência que roda é metade do raio da circunferência fixa. Neste caso a epiciclóide obtida é conhecida por **nefróide**.

2.2.1. A nefróide tem duas cúspides, uma em $\theta = 0$ e outra em $\theta = \pi$. Determina analiticamente as coordenadas das cúspides da nefróide.

2.2.2. Relaciona o valor de a com as cúspides da nefróide e com a distância entre as cúspides, apresentando uma expressão geral para ambas.

2.2.3. Escreve as equações paramétricas de uma nefróide cujo comprimento do eixo maior seja 12.

2.2.4. Escreve as equações paramétricas da nefróide cujas cúspides se localizam nos pontos $(8, 0)$ e $(-8, 0)$.

2.2.5. Escreve as equações paramétricas da nefróide cujas cúspides se localizam nos pontos $(8, 4)$ e $(-8, 4)$.

2.2.6. Recorrendo ao programa Winplot representa graficamente a nefróide para $a = 3$.

2.2.7. A fórmula que permite calcular a área da região delimitada por uma nefróide é $12\pi a^2$. Calcula a área de uma nefróide com $a = 3$.

2.2.8. Calcula, recorrendo ao programa Winplot, a área limitada pela mesma nefróide e compara o resultado com o obtido no **exercício 2.2.7**.

2.3. Considera que o raio da circunferência que roda é igual à n ésima parte do raio da circunferência fixa.

2.3.1. Escreve, em função de α , as equações paramétricas da epiciclóide.

2.3.2. Indica o número de cúspides da epiciclóide bem como os valores de θ onde as mesmas estão localizadas.

Sugestão: Recorre ao programa Winplot e atribui diferentes valores a α relacionando-o com o valor de θ onde se localizam as respetivas cúspides.

SUGESTÕES PARA A RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE N.º 11

1. $x(\theta) = a + r\cos \theta$ e $y(\theta) = b + r\sen \theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

2.1.1. Temos que $y'(\theta) = 2a\cos \theta - 2a\cos(2\theta)$.

Assim $y'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2a\cos \theta - 2a\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2a\cos \theta = 2a\cos(2\theta)$

$\Leftrightarrow \theta = 2\theta + 2k\pi \vee \theta = -2\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\theta = 2k\pi \vee 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -2k\pi \vee \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = 0$, temos $\theta = 0 \in [0, \pi]$.

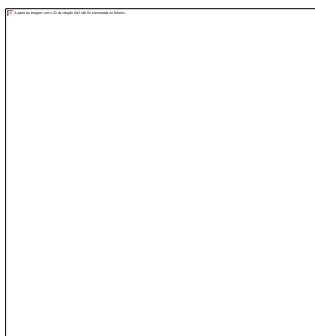
Para $k = 1$, temos $\theta = -2\pi \notin [0, \pi] \vee \theta = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Para $k = 2$, temos $\theta = -4\pi \notin [0, \pi] \vee \theta = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \pi]$.

Para $k = -1$, temos $\theta = 2\pi \notin [0, \pi] \vee \theta = -\frac{2\pi}{3} \notin [0, \pi]$.

As soluções desta equação são $\left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

2.1.2.



2.1.3. $\theta = 0$ e cúspide no ponto $V(1,0)$.

2.1.4. $x(\theta) = 1 + 2\cos \theta - \cos(2\theta)$ e $y(\theta) = -1 + 2\sen \theta - \sen(2\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

2.1.5. Através de uma traslação associada ao vetor $\vec{u} = (e^2 - 1, e^{-2})$.

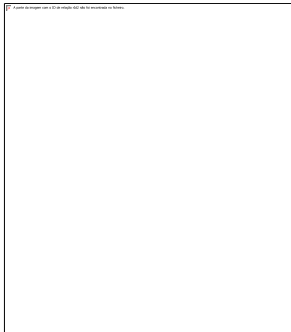
2.1.6. $V(e^2 + 1, e^{-2})$.

2.1.7. $S = 2 \times 8 = 16 \text{ cm}$.

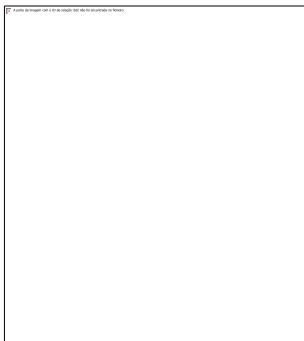
2.1.8. $A = 2 \times 9,42478 \approx 18,85 \text{ cm}^2$.

2.1.9. Representando graficamente a cardióide para diferentes valores de a obtemos:

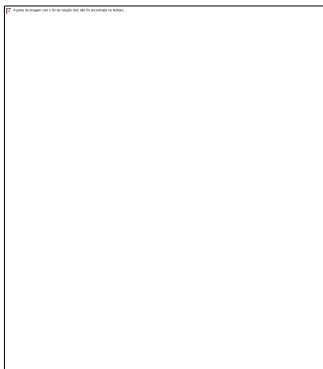
- Para $a = 1$, a cúspide localiza-se no ponto $V(1,0)$, sendo o comprimento do eixo maior 4.



- Para $a = 2$, a cúspide localiza-se no ponto $V(2,0)$, sendo o comprimento do eixo maior 8.



- Para $a = 3$, a cúspide localiza-se no ponto $V(3,0)$, sendo o comprimento do eixo maior 12.



- Para $a = n$, a cúspide localiza-se no ponto $V(n, 0)$, sendo o seu eixo maior $4n$.

2.2.1. Para $\theta = 0$ temos $x(0) = 3a \cos 0 - a \cos 0 = 2a$ e $y(0) = 3a \sin 0 - a \sin 0 = 0$, seja, o ponto de coordenadas $A(2a, 0)$.

Para $\theta = \pi$ temos $x(\pi) = 3a \cos \pi - a \cos (3\pi) = -2a$ e $y(\pi) = 3a \sin \pi - a \sin (3\pi) = 0$, seja, o ponto de coordenadas $B(-2a, 0)$.

2.2.2. Tendo em conta o exercício **3.2.2.** temos que as cúspides localizam-se nos pontos $(2a, 0)$ e $(-2a, 0)$ sendo a distância entre as duas cúspides igual a $4a$ cm.

2.2.3. Neste caso, $4a = 12 \Leftrightarrow a = 3$, logo $x(\theta) = 9\cos \theta - 3\cos(3\theta)$ e

$$y(\theta) = 9\sin \theta - 3\sin(3\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

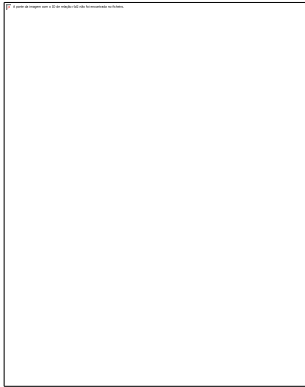
2.2.4. Neste caso, $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, logo $x(\theta) = 12\cos \theta - 4\cos(3\theta)$ e

$$y(\theta) = 12\sin \theta - 4\sin(3\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

2.2.5. Neste caso, $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$, logo $x(\theta) = 12\cos \theta - 4\cos(3\theta)$ e

$$y(\theta) = 4 + 12\sin \theta - 4\sin(3\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

2.2.6.



2.2.7. $A = 108\pi \approx 339,29 \text{ cm}^2$.

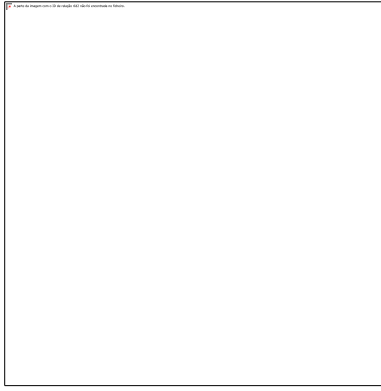
2.2.8. $A = 2 \times 169,646 \approx 339,29 \text{ cm}^2$

2.3.1. $x(\theta) = a(n + 1)\cos \theta - a\cos [(n + 1)\theta]$.

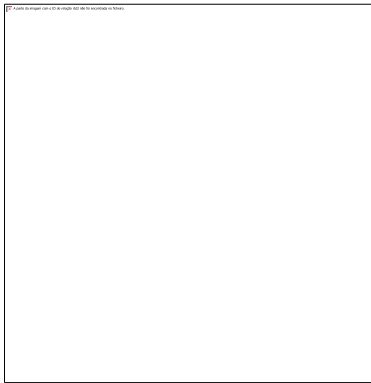
$y(\theta) = a(n + 1)\sin \theta - a\sin [(n + 1)\theta], \theta \in [0, 2\pi]$.

2.3.2. A epiciclóide tem n cúspides.

- Para $a = 1$, a cúspide localiza-se em $\theta = 0$.
- Para $a = 2$, as cúspides localizam-se em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.
- Para $a = 3$, as cúspides localizam-se em $\theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$.



- Para $a = 6$, as cúspides localizam-se em $\theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}, \theta = \frac{6\pi}{6} = \pi,$
 $\theta = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ e $\theta = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$.



- Para $a = n$, as cúspides localizam-se em $\theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{n}, \theta = \frac{4\pi}{n}, \theta = \frac{6\pi}{n}, \dots$

Atividade de Aplicação nº 12: Hipotrocóides e Epitrocóides – Espirógrafo

A. Designação: Brincando com o espirógrafo!

B. Objetivos:

- Construção de curvas com o jogo espirógrafo, promovendo a capacidade de interpretação, a comparação de resultados e a análise dos mesmos.

C. Pré-requisitos:

- Raio de um círculo.

D. Conteúdos:

- Hipotrocóides;

- Epitrocóides.

E. Destinatários: Alunos do básico.

F. Material necessário: Espirógrafo com rodas dentadas e um anel quadrado.



G. Duração da atividade: 90 minutos para resolução e 30 minutos para correção.

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

O *espirógrafo* é um jogo infantil que apareceu em 1970, suscitando o interesse de muitos e que tem várias rodas de plástico de diferentes tamanhos com bordas dentadas e três anéis também com bordas dentadas, quer no seu interior, quer no exterior.

As rodas de plástico contêm orifícios nos quais se coloca a ponta de um lápis de modo a desenhar a trajetória da mesma ao longo do anel.



Figura 1 – Rodas de plástico do Espirógrafo

Usando o espirógrafo podemos obter diferentes tipos de curvas, ilustradas na figura seguinte.



Figura 2 – Curvas obtidas com o Espirógrafo

As **hipotrocóides** são as curvas obtidas a partir de uma roda de plástico que se move, sem deslizar, no interior do anel, por um ponto no interior do círculo interior.

1. Numa folha de papel A_4 fixa o anel quadrado com os três ímanes de suporte, no canto superior da mesma.

1.1. Com a roda dentada de menor raio, traça uma hipotrocóide colocando a ponta do lápis no orifício mais afastado do centro, até a mesma ficar completa, isto é, quando o lápis voltar a tocar no ponto de partida. Irás obter uma figura como a ilustrada.

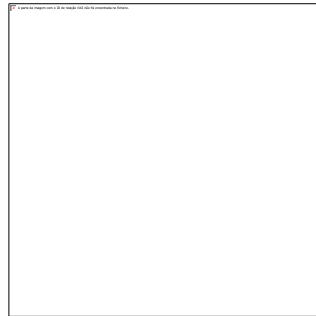


Figura 3 – Hipotrocóide

1.2. Deslocando o anel quadrado ao longo da folha, traça hipotrocóides usando rodas dentadas com raios cada vez maiores e sempre colocando a ponta do lápis no orifício mais próximo do centro. Regista as respetivas conclusões.

2. Numa nova folha de papel A_4 fixa o anel quadrado com os três ímanes de suporte, no canto superior esquerdo da mesma.

2.1. Utilizando a roda dentada de menor raio traça uma hipotrocóide colocando a ponta do lápis no orifício mais próximo do centro.

2.2. Desloca o anel quadrado ao longo da folha para desenhares as próximas curvas. Utilizando a roda dentada de menor raio e colocando a ponta do lápis em orifícios cada vez mais afastados do centro, traça hipotrocóides. Efetua o procedimento pelo menos três vezes. Regista as respetivas conclusões.

2.3. Utilizando a roda dentada de maior raio traça uma hipotrocóide colocando a ponta do lápis no orifício mais próximo do centro.

2.4. Utilizando a roda dentada de maior raio e colocando a ponta do lápis em orifícios cada vez mais afastados do centro, traça hipotrocóides. Regista as respetivas conclusões.

3. Numa nova folha de papel A_4 fixa o anel quadrado. Usando a roda dentada de menor raio, coloca a ponta do lápis no orifício mais próximo do centro, desenha a verde a hipotrocóide. Sem deslizar o anel, usa agora a roda dentada de maior raio e coloca a ponta do lápis também no orifício mais próximo do centro para traçares a azul outra hipotrocóide.

4. Repete o **exercício 3** mas colocando a ponta do lápis em orifícios cada vez mais afastados do centro. Regista as respetivas conclusões.

As **epitrocóides** são as curvas obtidas a partir de uma roda dentada de plástico que se move no exterior de uma outra roda dentada fixa, sem deslizar, ou seja, sempre tangente à mesma, por um ponto no interior do círculo que se move.

5. Numa folha de papel A_4 fixa a roda dentada de maior raio com dois ímanes de suporte, no canto superior da mesma.

5.1. Desloca o anel quadrado ao longo da folha para traçares as próximas curvas. Com a roda dentada de menor raio, traça epitrocóides colocando a ponta do lápis em orifícios cada vez mais afastados do centro. Efetua o procedimento pelo menos três vezes. Regista as respetivas conclusões.

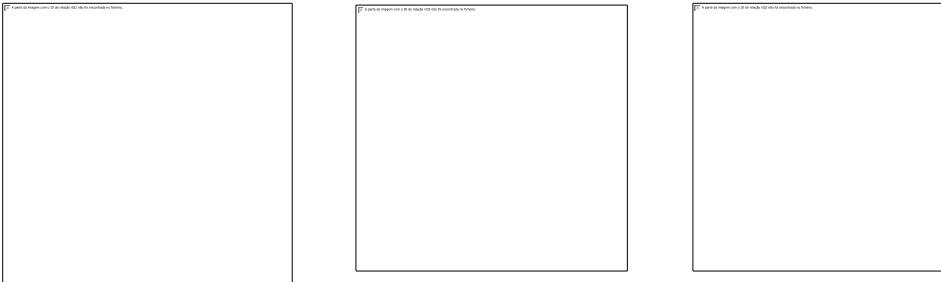
5.2. Usando rodas dentadas com raios cada vez maiores traça epitrocóides e regista as respetivas conclusões.

6. Escolhe duas rodas dentadas quaisquer, deixando fixa a de maior raio e traça a respetiva epitrocóide.

7. Usando as mesmas rodas dentadas do **exercício 6** traça a epitrocóide mas trocando a roda dentada fixa com a roda dentada que roda. Regista as respetivas conclusões, comparando os raios envolvidos.

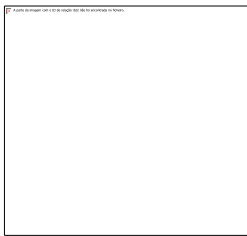
SUGESTÕES DE RESOLUÇÃO E SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS Nº 12

1.2. O círculo interior formado é designado por círculo branco.

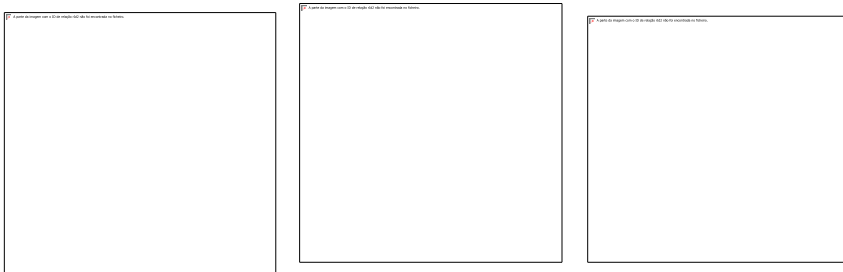


Independentemente do raio da roda dentada utilizada, o raio do círculo branco ao centro diminui.

2.1.

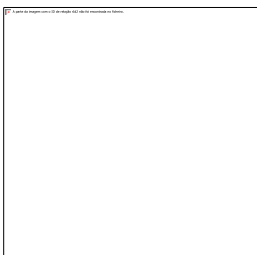


2.2.

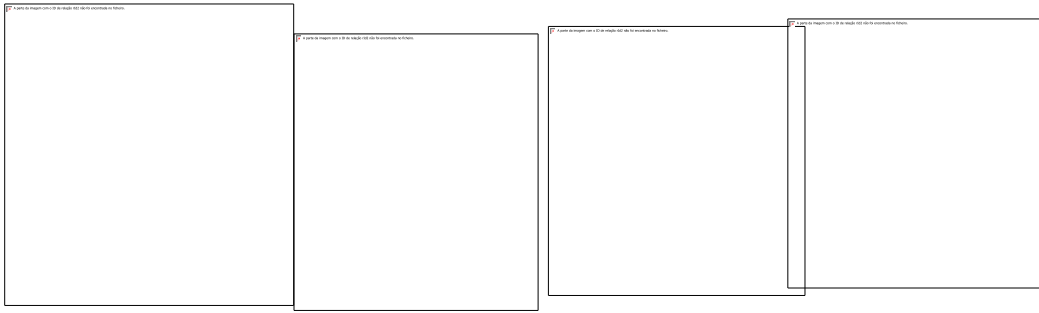


À medida que a ponta do lápis é colocada em orifícios cada vez mais afastados do centro, o raio do círculo branco ao centro diminui.

2.3.

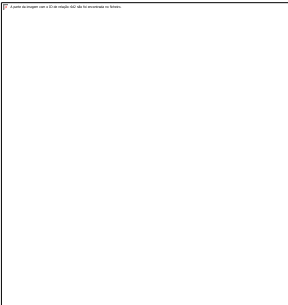


2.4.

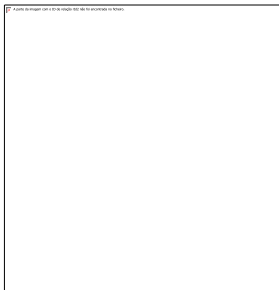


À medida que a ponta do lápis é colocada em orifícios cada vez mais afastados do centro, o raio do círculo branco ao centro aumenta.

3.

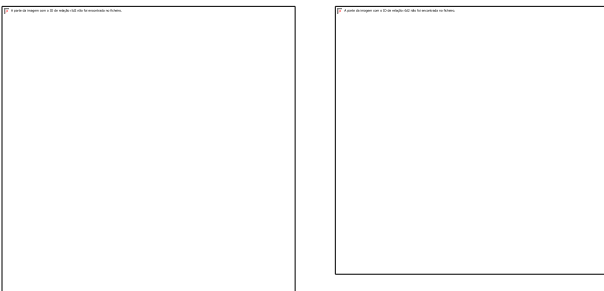


4.



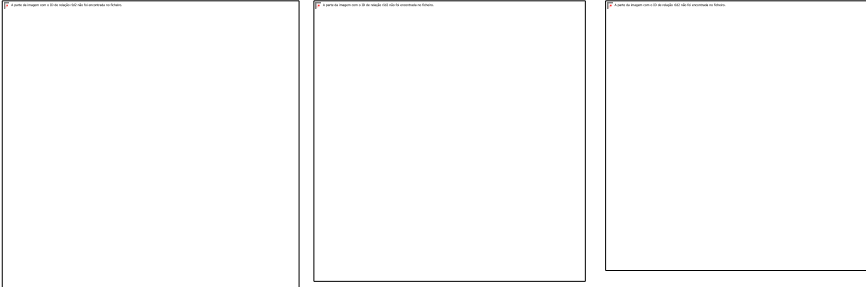
Podemos concluir que o raio do círculo branco ao centro aumenta.

5.1.



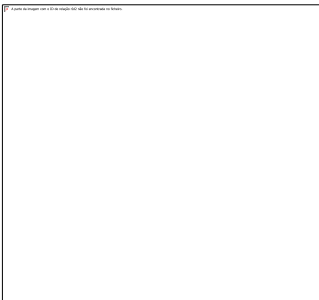
À medida que a ponta do lápis é colocada em orifícios cada vez mais afastados do centro, o raio do círculo branco ao centro aumenta.

5.2.

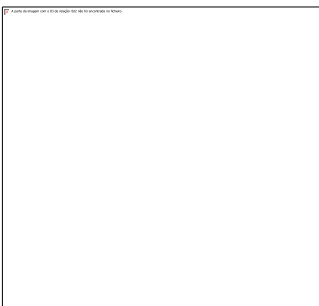


À medida que o raio da roda dentada aumenta, o raio do círculo branco ao centro aumenta.

6.



7.



Quando o raio da roda dentada fixa é maior do que o raio da roda dentada que desliza, o raio do círculo branco ao centro diminui.

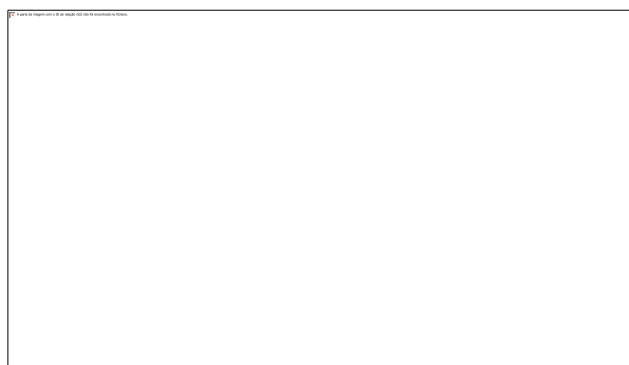
Relatório da Atividade sobre a Construção de uma Epiciclóide (2ª parte)

Como já foi anteriormente referido, não foi aplicado nenhum dos exercícios presentes nas atividades anteriormente mencionadas, mas apenas pedido aos alunos a construção, em grupo, de epiciclóides (2ª parte do relatório), através de rodas dentadas, gentilmente cedidas pelo Museu Municipal do Crato, que outrora serviram de base à Metalúrgica do Crato – principal empregadora da época.

Neste relatório apenas serão indicados os resultados obtidos pois, todos os outros itens são comuns aos apresentados na 1ª parte do mesmo.

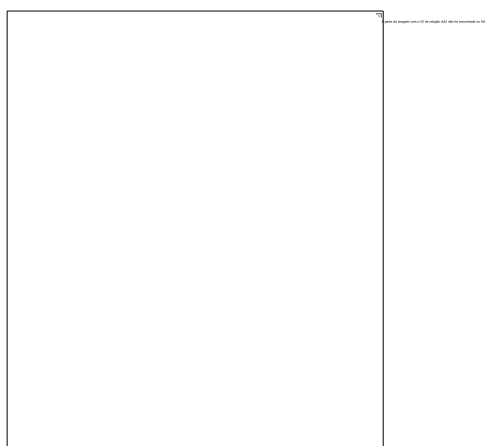
Resultados obtidos:

Os alunos perceberam o modo como deveriam construir a epiciclóide e iniciaram a mesma, fixando uma roda dentada e fazendo deslizar sobre esta, uma outra roda dentada.



Depararam-se com as mesmas dificuldades iniciais referidas no que concerne ao manuseamento do material, das quais se destacam:

- Dificuldade em usar o giz num dos dentes das rodas dentadas, o que levou a uma alteração ao inicialmente previsto.



- Ocasionais deslizamentos das rodas dentadas.

Assim, em vez de se realizar a atividade com giz na estrada de alcatrão, também se recorreu a um pequeno pau num caminho não alcatroado.



Uma vez terminada a construção da epiciclóide, foi-lhes explicado, em traços gerais, sem demonstrações formais, algumas das propriedades destas curvas, dando-se exemplos das mesmas e de situações em contexto real em que as mesmas são utilizadas ou referenciadas.

Relatório das Aplicação das Atividades

O conjunto de todas as atividades elaboradas e presentes nesta dissertação foi resolvido por uma aluna, chamada Sara Ramalhete, finalista do 12.º ano da Escola secundária de São Lourenço, localizada em Portalegre.



A Sara Ramalhete é uma aluna com 17 anos de idade que tem tido um percurso escolar com algum sucesso, não só em matemática como também nas restantes disciplinas. Concluiu o ensino básico na Escola Básica Integrada Professora Ana Maria Ferreira Gordo, no Crato, com uma classificação final de 5 valores e uma menção qualitativa de Muito Bom na respetiva prova final de ciclo. O ensino secundário foi concluído na Escola Secundária de São Lourenço com uma média final de 18 valores na disciplina de matemática, tendo obtido 15 no exame nacional relativo ao mesmo ano de escolaridade.

A escolha desta aluna em particular prende-se com o facto de a mesma ter presente os conhecimentos exigidos como pré requisitos para as atividades sendo deste modo mais fácil analisar e avaliar os resultados finais.

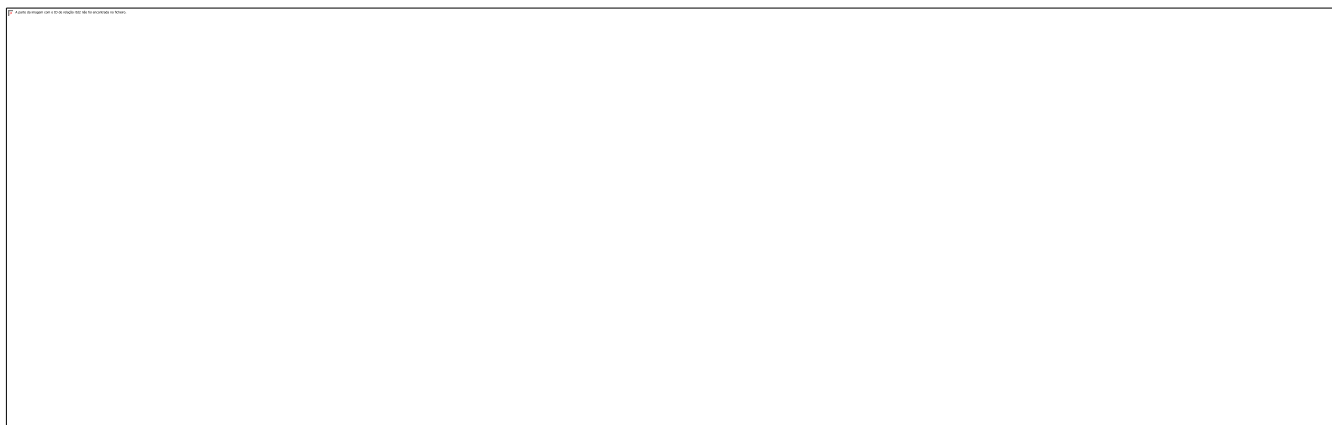
A realização das atividades decorreu numa sala onde apenas a aluna esteve presente de modo a não tirar dúvidas nem ser orientada em nenhum exercício. No final de cada atividade realizada, procedeu-se à realização de uma reunião de modo a corrigir os resultados obtidos e a efetuar um balanço, pergunta a pergunta no que concerne ao grau de dificuldade, à duração da atividade e à

clareza dos enunciados. A aluna enumerou os pontos fortes e fracos da atividade e indicou os exercícios onde teve mais dificuldades.

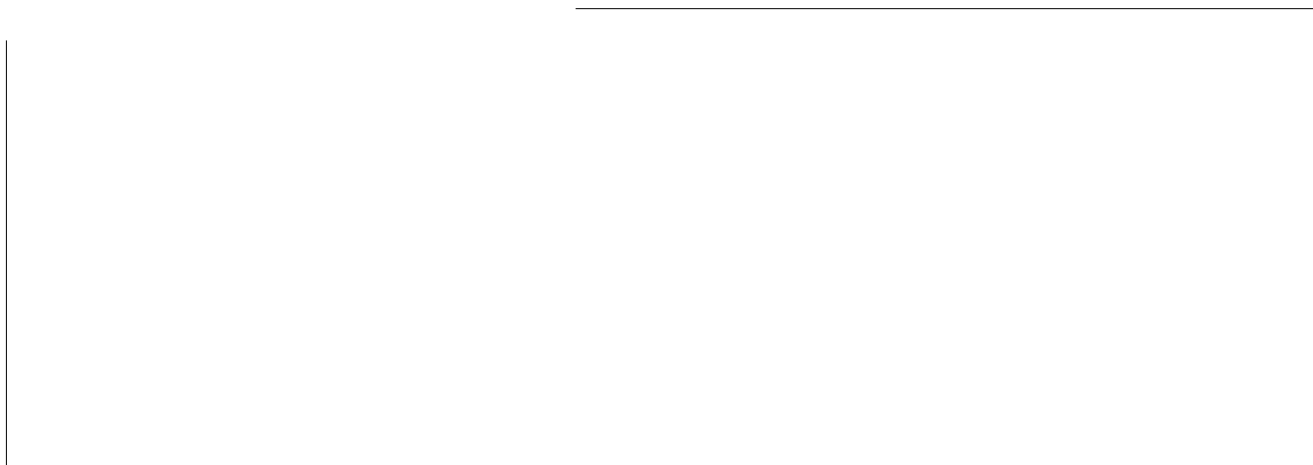
O objetivo da aplicação destas atividades foi a interpretação dos enunciados de modo a que os mesmos fossem mais claros e perceptíveis, não causando dúvidas relativamente ao que era pedido em cada um dele, avaliando o respetivo grau de dificuldade.

O tempo que a aluna demorou em cada atividade foi registado e comparado com o inicialmente previsto para a concretização da mesma que, nalguns casos teve mesmo de ser alterado.

Relativamente aos resultados obtidos, refere-se que a aluna mostrou algumas dificuldades iniciais relativamente às equações paramétricas, tendo no entanto conseguido alcançar os resultados pretendidos e aos exercícios que envolviam limites.



Quanto aos programas matemáticos utilizados, a mesma apenas tinha tido um único contato com o *Geogebra*, numa aula de matemática sobre construções de lugares geométricos. Deste modo, considerou-os uma mais valia referindo que os mesmos deviam ser mais utilizados em contexto de sala de aula, manifestando preferência pelo *Winplot*.



Os pontos fracos evidenciados pela aluna prendem-se com a extensibilidade da realização de todas as atividades.

Considerações Finais

A Matemática é uma importante área do saber com inúmeras aplicações práticas no dia a dia, razão pela qual se torna indispensável suscitar o interesse e a motivação dos alunos para a aprendizagem da mesma. Para tal é necessário diversidade e interação em contexto de sala de aula e recorrer, com alguma frequência, ao dinamismo oferecido por alguns softwares matemáticos, igualmente interativos.

A aplicação das atividades apresentadas, quer à aluna, quer às turmas das duas escolas mencionadas, suscitou não só o interesse dos alunos como também a curiosidade dos mesmos relativamente ao como e ao porquê dos resultados obtidos.

Esta experiência demonstrou que uma das principais características do mundo contemporâneo consiste em que diferentes espaços se integrem e interatuem, corroborando a ideia de que a Era da informação é também a Era da educação, ou seja, a educação e as tecnologias devem caminhar articuladas para que possam responder às necessidades contemporâneas. Todavia, um *software* só será significativo para o ensino, no caso, da Matemática, se o seu desenvolvimento estiver baseado numa teoria de aprendizagem cientificamente comprovada de forma a que permita ao aluno desenvolver a competência de construir o saber sobre um determinado assunto. Quer isto dizer que os conhecimentos adquiridos devem ter utilidade e o aluno deve saber aplicá-los, não como um saber apenas de erudição, mas como um instrumento de aptidão.

De “mãos dadas”, matemática e novas tecnologias enfrentam e contornam, com agilidade, as “curvas” da vida contemporânea.

Anexo A: Generalidades sobre Curvas

Traço de uma curva

Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e x e y funções contínuas reais definidas em I , um **caminho** em \mathbb{R}^2 ou uma **curva parametrizada** é uma aplicação γ contínua de I em \mathbb{R}^2 tal que:

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

sendo t o parâmetro considerado.

À imagem da aplicação γ , isto é, ao conjunto $\{(x(t), y(t)): t \in I\}$ chama-se **traço da curva** e representa-se por $tr(\gamma)$ mas, por abuso de linguagem, sempre que ao mesmo nos quisermos referir, iremos utilizar a designação *curva*.

Uma curva γ é uma **curva simples** se $\forall x_1, x_2 \in \text{int } I, \gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$.

Uma curva γ é uma **curva fechada** se $\gamma: I = [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação tal que $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$.

Exemplo: Consideremos a curva parametrizada

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

O traço desta curva é $tr(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$, uma circunferência de raio 1 centrada na origem.

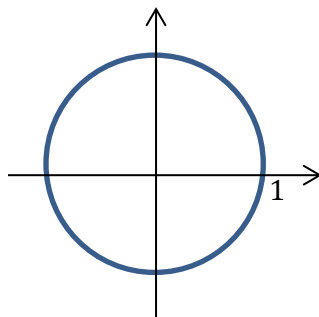


Figura 116 - Representação geométrica de uma circunferência

Trata-se de uma curva simples pois $\forall x_1, x_2 \in \text{int } [0, 2\pi] =]0, 2\pi[, \gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$. É também uma curva fechada visto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$.

Exemplo. Consideremos a curva parametrizada

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

O traço desta curva é $\text{tr}(\gamma) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, uma elipse centrada na origem.

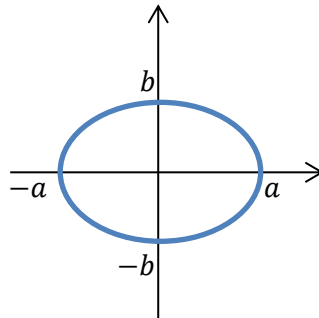


Figura 117 - Representação geométrica de uma elipse

Trata-se de uma curva simples pois $\forall x_1, x_2 \in \text{int } [0, 2\pi] =]0, 2\pi[, \gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$. É também uma curva fechada visto que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

A trajetória de uma partícula pode ser definida por uma curva parametrizada.

Notemos que existem várias parametrizações com o mesmo traço. A título de exemplo, indicamos as parametrizações $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t)$ e $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$, definidas no intervalo $[0, 2\pi]$ que, apesar de diferentes, têm o mesmo traço, que está representado nas figuras seguintes.

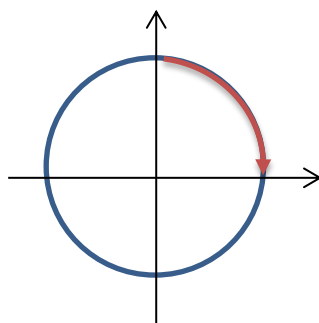


Figura 118- Traço da parametrização $\gamma_1(t)$

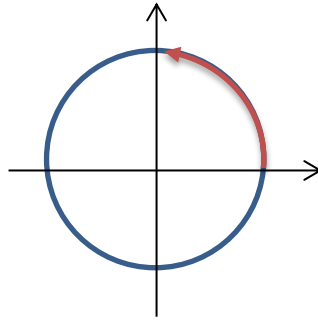


Figura 119 - Traço da parametrização $\gamma_2(t)$

Notemos que os traços são os mesmos mas os sentidos são opostos.

Destacam-se as parametrizações da forma $(x, y(x))$, cujo traço é o gráfico de uma função real de variável real, e as parametrizações em coordenadas polares, por serem as que iremos utilizar.

Recordemos que um ponto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fica definido num sistema de coordenadas polares quando se conhece a sua distância, r , ao centro do sistema de coordenadas, O , bem como o ângulo θ que o vetor \overrightarrow{OP} faz com o eixo Ox .

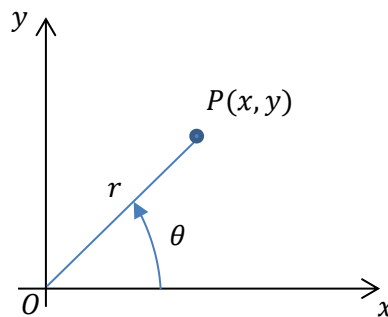


Figura 120 - Sistema em coordenadas polares

Temos:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Dizemos que (r, θ) são as coordenadas polares de P . Designamos r por **raio polar** e θ por **ângulo polar**, sendo que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dada uma curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com γ diferenciável, as **equações polares** de γ são dadas por:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t), \end{cases}$$

sendo $r(t)$ e $\theta(t)$ diferenciáveis, tais que:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t). \end{cases}$$

Vetor tangente e vetor normal a uma curva

Dada uma curva parametrizada γ , em R^2 de classe C^1 , isto é, as componentes são de classe C^1 , define-se o **vetor tangente** de forma igual num ponto $\gamma(t_0)$ por:

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Quando a curva descreve a trajetória de uma partícula, este vetor indica o sentido do movimento da mesma.

Os pontos $\gamma(t_0)$ tais que $\gamma'(t_0) = 0$ chamam-se **pontos singulares** da curva. Se $\gamma'(t_0) \neq 0, \forall t \in I$ e γ for de classe C^1 , a curva diz-se **regular**. Usando coordenadas polares, vejamos um exemplo relativo ao cálculo dos pontos singulares de uma curva.

Exemplo. Consideremos a curva parametrizada γ definida por:

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow R^2$$

$$\theta \rightarrow \gamma(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta).$$

Se considerarmos $\gamma_1(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta$ e $\gamma_2(\theta) = (1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \theta$, então γ_1 e γ_2 são de classe C^1 , logo, γ também é de classe C^1 .

O vetor tangente à curva no ponto $\gamma(\theta_0)$ é:

$$\gamma'(\theta_0) = (-\operatorname{sen} \theta_0 - 2\cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0, \cos \theta_0 - \operatorname{sen}^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0)$$

$$= (\operatorname{sen} \theta_0 (-2\cos \theta_0 - 1), \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0) - \operatorname{sen}^2 \theta_0).$$

Para calcular os pontos singulares de γ , vamos procurar os pontos $\gamma(\theta_0)$ tais que $\gamma'(\theta_0) = 0$.

Temos que:

$$\gamma'(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 (-2\cos \theta_0 - 1) = 0 \\ \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0) - \text{sen}^2 \theta_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 = 0 \vee -2\cos \theta_0 - 1 = 0 \\ \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0) - \text{sen}^2 \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 = 0 \\ \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0) - \text{sen}^2 \theta_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 = 0 \\ \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 = 0 \\ \cos \theta_0 = 0 \vee 1 + \cos \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } \theta_0 = 0 \\ \cos \theta_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta_0 = \pi.$$

Assim $\gamma(\theta_0) = \gamma(\pi) = ((1 + \cos \pi) \cos \pi, (1 + \cos \pi) \text{sen } \pi) = (0,0)$ é o ponto singular de γ , ou dito de outro modo, γ tem uma singularidade em $\theta_0 = \pi$.

A curva apresentada neste exemplo chama-se *cardióide*.

Dada uma curva parametrizada γ , em R^2 , define-se o **vetor normal** à mesma num ponto $\gamma(t_0)$ por:

$$n(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0)).$$

Este vetor é ortogonal ao vetor tangente em cada instante t .

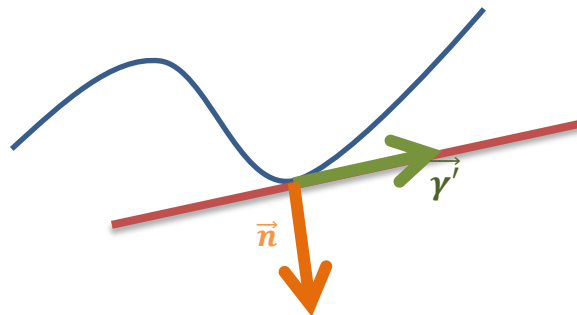


Figura 121 – Vetor tangente e vetor normal à curva

Reta tangente e reta normal a uma curva

A **reta tangente** a uma curva regular γ que passa no ponto $(x(t_0), y(t_0))$ é a reta que passa no ponto e tem a direção do vetor tangente à curva nesse ponto e pode ser definida pelas equações:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y(t) = y(t_0) + ty'(t_0) \end{cases}, t \in R.$$

Notemos que se $x'(t_0) \neq 0$, temos:

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x(t) - x(t_0)) \Leftrightarrow (x(t) - x(t_0))y'(t_0) - (y - y(t_0))x'(t_0) = 0.$$

A **reta normal** a uma curva regular γ que passa no ponto $(x(t_0), y(t_0))$ é a reta que passa no ponto e tem a direção do vetor normal à curva nesse ponto e pode ser definida pelas equações:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) - ty'(t_0) \\ y(t) = y(t_0) + tx'(t_0) \end{cases}, t \in R.$$

Notemos que se $y'(t_0) \neq 0$, temos:

$$y - y(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(x(t) - x(t_0)) \Leftrightarrow (y - y(t_0))y'(t_0) + (x(t) - x(t_0))x'(t_0) = 0.$$

Comprimento de arco

Considerando uma curva parametrizada γ de classe C^1 , $\gamma: [a, b] \rightarrow R^2$, tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Dado $t \in [a, b]$, define-se o **comprimento do traço da curva** por:

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Observamos que L não depende da parametrização considerada, razão pela qual, frequentemente, se refere comprimento de curva em substituição de comprimento do traço da curva.

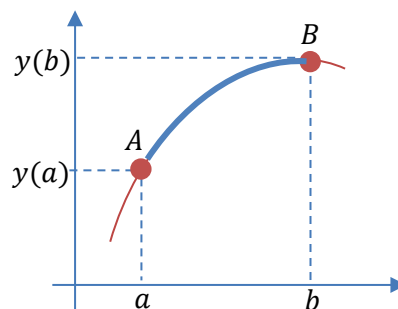


Figura 122 – Arco entre dois pontos A e B

Seja a um instante fixo qualquer, a **função comprimento de arco** é uma aplicação s , definida por:

$$s: [a, b] \rightarrow R$$

$$x \rightarrow s(x) = \int_a^x \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Quando a curva descreve a trajetória de uma partícula, $s(c)$ representa o comprimento da trajetória que a partícula percorre entre os instantes 0 e x . Tem-se $s(b) = L$.

Exemplo. Consideremos a curva parametrizada γ tal que:

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow R^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Então $s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$. Obtivemos, assim, a expressão que permite calcular o perímetro de uma circunferência de raio r .

Notemos que se a parametrização considerada é da forma $(x, y(x))$, com $x \in [a, b]$, então:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2} dt, \forall x \in [a, b].$$

Com uma parametrização em coordenadas polares, isto é, $r = y(\theta)$, com y de classe C^1 , o comprimento total do arco da curva desde $\theta = a$ a $\theta = b$ é dado por:

$$S = \int_a^b \sqrt{[y(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

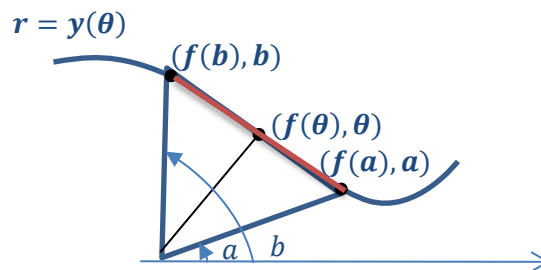


Figura 123 – Arco de uma curva polar $r = y(\theta)$, desde $\theta = a$ a $\theta = b$

Área limitada por uma curva e pelo eixo das abscissas

A **área da região limitada por uma curva** descrita no sentido negativo, pelo eixo das abscissas e pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, é dada por $A = \int_a^b y(t)x'(t)dt$.

Notemos que se a parametrização considerada é da forma $(x, y(x))$, sendo a curva traçada de a para b , com $a < b$, à medida que t aumenta, então a área da região limitada pelo gráfico da função y , pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por $A = \int_a^b |y(x)|dx$.

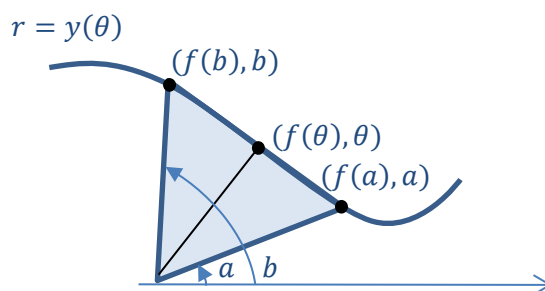


Figura 124 - Região limitada pelo gráfico da função y , pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$



Figura 125 - Região limitada pelo gráfico da função $|y|$, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$

Com uma parametrização em coordenadas polares, isto é, $r = y(\theta)$, com y contínua, a área limitada pela curva, desde $\theta = a$ a $\theta = b$, é dada por $A = \frac{1}{2} \int_a^b [y(\theta)]^2 d\theta$.



Curvatura e evoluta de uma curva

Seja $\theta(t)$ o ângulo formado entre o vetor tangente a uma curva plana num ponto (t, y) com o eixo das abcissas.

Num determinado ponto, a **curvatura de uma curva plana** representa a variação do ângulo $\theta(t)$ tendo em conta o comprimento da curva, ou seja, é uma quantidade escalar que representa o desvio da mesma relativamente à linear. Assim, ao considerarmos por exemplo uma linha reta, a sua curvatura é 0. Circunferências de maior raio têm menor curvatura e vice-versa.

A curvatura de uma curva plana não é sempre constante. Consideremos uma curva C e um ponto P da mesma. Se desenharmos um círculo com o maior raio possível, que designaremos por **círculo osculante**, tangente à curva no ponto P , a curvatura da curva é igual à curvatura de círculo osculante.

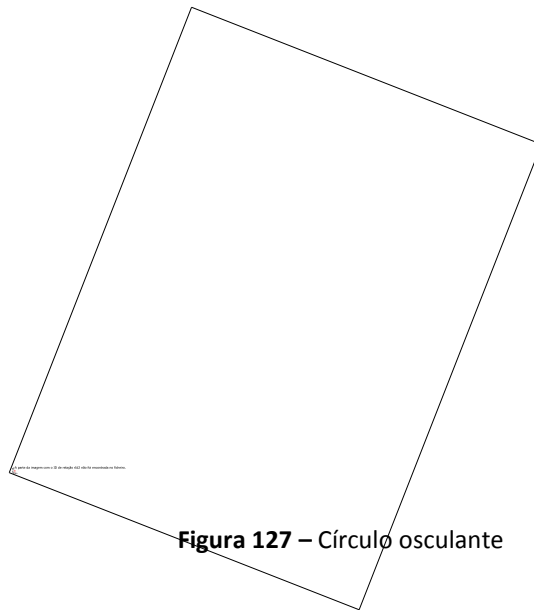


Figura 127 – Círculo osculante

De acordo com as notações anteriormente utilizadas e sendo:

$$n(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

a curvatura $k = k(t)$ de uma curva γ é dada por:

$$k(t) = \frac{\gamma'(t) \cdot n(t)}{s(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

Exemplo. Consideremos a curva parametrizada γ tal que:

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

O traço desta curva é uma circunferência de raio r . Temos $x(t) = r \cos t$ e $y(t) = r \sin t$.

Logo $x'(t) = -r \sin t$, $x''(t) = -r \cos t$, $y'(t) = r \cos t$ e $y''(t) = -r \sin t$.

A curvatura $k = k(t)$ da curva γ é dada por:

$$k(t) = \frac{-r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t}{[r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}.$$

A curvatura desta curva é constante e depende apenas do seu raio.

Notemos que se a parametrização considerada é da forma $(x, y(x))$, então $k(x) = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$.

Com uma parametrização em coordenadas polares, isto é, $r = y(\theta)$, $\forall \theta \in [\alpha, \beta]$ e y contínua,

$$\text{temos } k(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{[r^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

No estudo das curvas que faremos adiante, não iremos procurar o valor da curvatura da curva, mas sim o do **raio de curvatura** da mesma, ou seja, o inverso da curvatura, tendo-se $R_c = \frac{1}{|k(t)|}$.

Se a trajetória de uma partícula é definida por uma curva parametrizada, o sinal da curvatura, $k(t)$, depende do sentido dessa mesma trajetória. Por exemplo, uma partícula que descreva uma trajetória circular de raio r , no sentido positivo (sentido contrário aos ponteiros do relógio), tem curvatura $\frac{1}{r}$. Quando, nas mesmas condições, a partícula se desloca no sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio), a sua curvatura é $-\frac{1}{r}$.

Chama-se **evoluta** de uma curva γ ao lugar geométrico que os centros dos círculos osculantes, geram em cada ponto. Assim a evoluta de uma curva é uma curva que é tangente a todas as retas normais à curva, em cada um dos seus pontos.

Anexo B: Cálculo das Variações

O objetivo do cálculo das variações é minimizar e/ou maximizar funcionais, ou seja, funções definidas num espaço de dimensão infinita e com valores num espaço de dimensão finita:

$$I(y, y') = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx.$$

Sendo $F(y, y', x)$ uma função de classe C^2 .

Uma condição necessária para a existência de extremo é a existência de solução para a chamada equação de Euler-Lagrange, dada por:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{dF}{dy'} = 0.$$

Casos particulares da Equação de Euler-Lagrange

- A função F não depende explicitamente de y , sendo o funcional I da forma:

$$I = \int_a^b F(y'(x), x) dx.$$

Como $\frac{dF}{dy} = 0$, a equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dx} \frac{dF}{dy'} = 0 \Leftrightarrow \frac{dF}{dy'} = k, k \in \mathbb{R}.$$

- A função F não depende explicitamente de x , sendo o funcional I da forma:

$$I = \int_a^b F(y(x), y'(x)) dx.$$

Como $\frac{dF}{dx} = 0$, a equação de Euler-Lagrange é dada por $\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dy'} \right) = 0$, e as soluções da equação de Euler-Lagrange são as mesmas da equação $-y' \frac{df}{dy'} = \text{constante}$, conhecida por

Hamiltoniana.

1. Energia mecânica

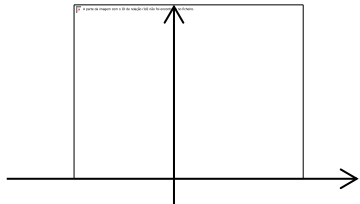
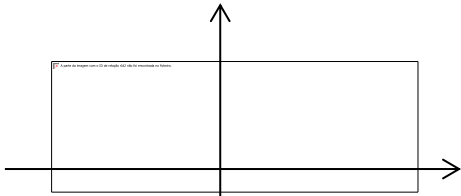
A energia mecânica num ponto $(x(t), y(t))$ é dada por:


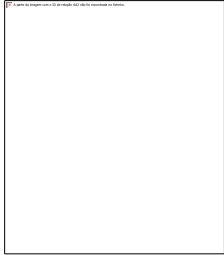
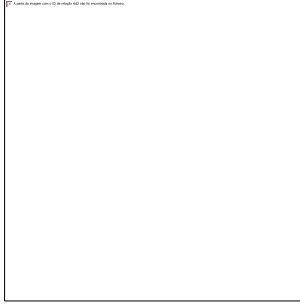
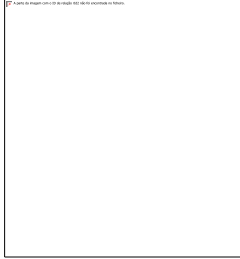
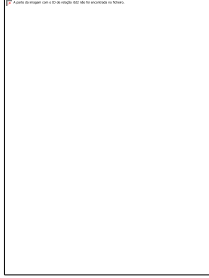
$$\frac{1}{2}mv^2(t) + mg(h - y(t)).$$

2. Lei da conservação da energia

Num sistema isolado, a quantidade total de energia é constante.

Anexo C: Quadro Resumo

Curva	Catenária	Tractriz (cúspide no eixo das ordenadas e o ponto $A(x_a, 0)$ a deslocar-se no semieixo positivo das abcissas)
Representação gráfica		
Equação	Com uma parametrização da forma $(x, y(x))$ e $y(0) = 0, \exists k \in \mathbb{R}^+$: $y_k(x) = \frac{\cosh(kx)}{k} - \frac{1}{k}, \forall x \in \mathbb{R}$	$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ $x = -a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$
Comprimento do arco	O comprimento do arco da catenária cuja origem é um ponto da reta $x = a$ e a extremidade um ponto que pertence à reta $x = b$ é dado por $S = \frac{(\sinh(kb) - \sinh(ka))}{k}$	O comprimento do arco da tractriz cuja origem é o ponto (x_1, y_1) e a extremidade o ponto (x_2, y_2) é dado por $S = a \ln \frac{y_2}{y_1}$
Área da região delimitada pela curva	A área delimitada pela catenária, pelo eixo das abcissas e pelas retas da equação $x = 0$ e $x = a$ é $A = \frac{\sinh(ka)}{k^2} - \frac{a}{k}$	A área compreendida entre a tractriz, $y = 0$ e as retas de equação $x = x_1$ e $x = x_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ e $x_1 < x_2$ é: $A = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin(2x_2) - \sin(2x_1)}{2} + x_2 - x_1 \right)$
Raio de curvatura	$R_c(x) = \frac{\cosh^2(kx)}{k}$	$R_c(y) = \frac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$
Evoluta da curva	Tractriz	Catenária

Curva	Ciclóide (R é o raio da circunferência geradora)	Deltóide (a é o raio da circunferência que roda sem deslizar)	Astróide (a é o raio da circunferência que roda sem deslizar)	Cardióide (a é o raio da circunferência que roda sem deslizar)	Nefróide (a é o raio da circunferência que roda sem deslizar)
Representação gráfica					
Equação	$x(\theta) = R(\theta - \text{sen } \theta)$ $y(\theta) = R(1 - \text{cos } \theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$	$x(\theta) = 2a \text{cos } \theta + a \text{cos}(2\theta)$ $y(\theta) = 2a \text{sen } \theta - a \text{sen}(2\theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$	$x(\theta) = 3a \text{cos } \theta + a \text{cos}(3\theta)$ $y(\theta) = 3a \text{sen } \theta - a \text{sen}(3\theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$	$x(\theta) = 2a \text{cos } \theta - a \text{cos}(2\theta)$ $y(\theta) = 2a \text{sen } \theta - a \text{sen}(2\theta)$ Com $\theta \in [0, 2\pi]$	$x(\theta) = 3a \text{cos } \theta - a \text{cos}(3\theta)$ $y(\theta) = 3a \text{sen } \theta - a \text{sen}(3\theta)$ Com $\theta \in [0, 2\pi]$
Comprimento do arco	$S = 8R$	$S = 16a$	$S = 24a$	$S = 16a$	$S = 24a$
Área da região delimitada pela curva	$A = 3\pi R^2$	$A = 2\pi a^2$	$A = 6\pi a^2$	$A = 6\pi a^2$	$A = 12\pi a^2$
Raio de curvatura	$R_c(\theta) = 4R \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$R_c(\theta) = \left 8a \text{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right $	$ 6a \text{sen}(2\theta) $	$R_c(\theta) = \frac{8}{3}a \text{sen}\frac{\theta}{2}$	$3a \text{sen } \theta$
Evoluta da curva	Ciclóide	Deltóide	Astróide	Cardióide	Nefróide

Anexo D: Matemáticos Referenciados

Nome: Claudius Ptolomeu

90 - 168

Nome: Apollonius de Tiânia

2 ac – 98 dc

Nome: Albrecht Dürer

1471 - 1528

Nome: Nicolau Copérnico

1473 - 1543

Nome: Galileu Galilei

1564 - 1642

Nome: Johannes Kepler

1571 - 1630

Nome: Joachim Jungius

1587 - 1657

Nome: Marin Mersenne

1588 - 1648

Nome: Girard Desargues

1591 - 1661

Nome: René Descartes

1596 - 1650

Nome: Pierre de Fermat

1601 - 1665

Nome: Evangelista Torricelli

1602 - 1675

Nome: Claude Perrault

1613 - 1688

Nome: John Wallis

1616 - 1703

Nome: Christiann Huygens

1616 - 1703

Nome: Vincenzo Viviani

1622 - 1703

Nome: Blaise Pascal

1623 - 1662

Nome: Christopher Wren

1632 - 1723

Nome: Philippe de la Hire

1640 - 1718

Nome: Isaac Newton

1643 - 1727

Nome: Christensen Roemer

1644 - 1710

Nome: Gottfried Leibniz

1646 - 1716

Nome: Jakob Bernoulli

1654 - 1705

Nome: Joahnn Bernoulli

1667 - 1748

Nome: Daniel Bernoulli

1700 - 1782

Nome: Leonard Euler

1707 - 1783

Nome: Jean le Rond D'Alembert

1717 - 1783

Nome: Joseph Lagrange

1736 - 1813

Nome: Jakob Steiner

1796 - 1863

Nome: Richard Procor

1837 - 1888

Nome: Miguel Guzman

1936 - 2004

Referenciam-se ainda os matemáticos cuja imagem não foi possível obter, nomeadamente:

- Charles Bouvelles: 1475 – 1566
- Antoine de Lalouvere: 1600 – 1664
- Gilles de Roberval: 1602 - 1675

Referências Bibliográficas

- [1] Anton, H.; Bivens, I. e Davis, S., “Cálculo – Volume II”, *Artmed Editora SA*, **8**, (2005).
- [2] Bell, E., “The Development of Mathematics”, *McGraw-Hill Book Company*, London, (1945).
- [3] Bliss, G., “Calculus of Variations”, Carus Monograph n.º1, *Mathematical Association of America*, (1925).
- [4] Carmo, M., “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*, (1976).
- [5] Eves, H., “Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics”, *Dover Publications, Inc*, Mineola-New York, (1990).
- [6] Fauvel, J., “History of Mathematics - Histories of Problems”, *Ellipses*, (1997)
- [7] Fauvel, J. e Gray, J., “The History of Mathematics – A Reader”, *The Open University*, (1987)
- [8] Figueiredo, D. e Neves, A., “Equações Diferenciais Aplicadas”, *Coleção Matemática Universitária – Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, (1997).
- [9] Gallier, J., “Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering”, *Springer*, **38**, (2000).
- [10] Gibson, C., “Elementary Geometry of Differentiable Curves”, *Cambridge, University Press*, (2001).
- [11] Guzmán, M., “Aventuras Matemáticas”, *Gradiva* **5**, (2002).
- [12] Lardner, D., “A System of Algebraic Geometry”, *G. and B. Whittaker London*, **1**, (1823).
- [13] Lockwood, E., “A Book of Curves”, *Cambridge University Press*, (1961).
- [14] Maior, E., “e – A História de um Número”, *Trajeto Ciência Gradiva*, (2005).
- [15] Maior, E., “Trigonometric Delights”, *Princeton University Press*, (2002).
- [16] Marques, D.; Oliveira, R. e Jafelice, R., “Modelagem Matemática de Pistas de Skate”, *FAMAT-Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática em sala de Aula*, **10**, 264-268 (2008).

- [17] Oliveira, J.; Carneiro Silva, A.; Pinheiro, N. e Silveira, R. ,”A Informática no processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Tecnologias”, *UTFPR*, (2009).
- [18] Pereira, L., “Uma Abordagem Interativa ao Tratado de Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira”, *Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*, (2007).
- [19] Piskounov, N., “Cálculo Diferencial e Integral”, *Edições Lopes da Silva*, Porto, vol II, (1972).
- [20] Póvoas, M., “Métodos Matemáticos da Física – Uma Introdução”, *Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências*, **17**, (2002).
- [21] Quinet, J., “Cálculo Diferencial e Integral – Geometria Analítica e Plana”, *Editores Globo*, **7**, (2000).
- [22] Ramos, M., “Curso Elementar de Equações Diferenciais”, *Universidade de Lisboa- Faculdade de Ciências*, vol 14, (2002).
- [23] Rios, J. e Silva, M., “Curva de um Cabo Suspenso”, *Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA – Departamento de Matemática* **208**, (2002).
- [24] Sarrico, C., “Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis”, *Esfera do Caos Editores*, Lisboa, (2009).
- [25] Scarborough, J., “Differential Equations and Applications”, *Waverly Press, Inc*, Baktimore, Maryland, (1965).
- [26] Smirnov, V., “A Course of Higher Mathematics”, *Pergamon Student Editions*, **57**, (1964).
- [27] Silva, A; Santos, L e Soares, W., “Utilização do Winplot como Software Educativo para o Ensino da Matemática”, *Revista Diálogos*, **6**, (2012).
- [28] Simmons, G., “Differential Equations With Applications and Historical Notes”, *McGraw-Hill Book Company*, (1972).
- [29] Stillwell, J., “Mathematics and its History – Undergraduate Texts in Mathematics”, *Springer*, (1989).

- [30] Tenenbaum, M., "Ordinary Differential Equations", *Dover Publications, Inc. New York*, (1) e (2), (1963).
- [31] Walter, W., "Graduate Texts in Mathematics Ordinary Differential Equations", *Springer*, (1991).
- [32] Whitman, E. A., "Some Historical Notes on the Cycloid", *The American Mathematical Monthly*, (1943), 50(5), 309-315.
- [33] Yates, R., "Curves and their Properties", *National Council of Teachers of Mathematics*", (1974), 1-3.

PÁGINAS DA INTERNET

- [1] <http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2004/Hiperbolicas.pdf>
- [2] http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_roberto_silva.pdf
- [3] http://ipr.dnit.gov.br/manuais/bitrem_relatorio_final_volume_1.pdf
- [4] <http://paginas.fe.up.pt/~mcoimbra/aulas/Publicacoes/Curvas.pdf>
- [5] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/curvatura/curvatura.pdf
- [6] <http://pt.scribd.com/doc/23335657/Geometria-Imagem>
- [7] <http://www.if.ufrj.br/~sandra/Topicos/palestras/farina.pdf>
- [8] <http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/curvashistoria.pdf>
- [9] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>
- [10] <http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Catenaria.pdf>
- [11] http://lnx.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-Cicloide.pdf
- [12] <http://curvasearquitectura.wordpress.com/cicloide/>
- [13] <http://geometriadinamica.es/Geometria/Conicas-y-otras-curvas/Astroide.html>
- [14] <http://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html>

[15] http://www.professores.uff.br/katia_freusel/aulasga2/ga2-aula3.pdf

[16] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Epicycloid.html>

[17] http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/EpiHypocycloid_dir/epiHypocycloid.html

[18] <http://www.mat.ufpb.br/~sergio/winplot/usandoowinplot.pdf>

[19] <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/WINPLOT2D2003.pdf>

IMAGENS

Figura 9 em http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/02c-curva.htm

Figura 10 em http://dezinteressante.com/?attachment_id=16119

Figura 11 em <http://revista.mobly.com.br/arquitetura/160-anos-de-gaudi/>

Figura 12 em http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dulles_Airport_Terminal.jpg

Figura 13 em <http://pt.dreamstime.com/fotografia-de-stock-st-louis-skyline-do-mo-e-arco-na-noite-image23148792>

Figura 32 em Tenenbaum, M., “Ordinary Differential Equations”, *Dover Publications, Inc. New York*, (1) e (2), (1963), **(490)**

Figura 43 em <http://personales.ya.com/jmreyes/curvas2.html>

Figura 44 em Figueiredo, D. e Neves, A., “Equações Diferenciais Aplicadas”, *Coleção Matemática Universitária – Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, (1997), **(38)**

Figura 45 em Guzmán, M., “Aventuras Matemáticas”, *Gradiva* **5**, (2002), **(161)**

Figura 46 em <http://www.foroerber.com/viewtopic.php?t=10705>

Figura 47 em <http://curvasearquitectura.wordpress.com/galeria-de-arte-kimbell/>

Figura 51 em <http://apm.pt/apm/foco98/activ9.html>

Figura 52 em Piskounov, N., “Cálculo Diferencial e Integral”, *Edições Lopes da Silva*, Porto, vol II, (1972), **(236)**

Figura 56 em <http://myreckonings.com/wordpress/2007/11/19/the-not-so-simple-pendulum/>

Figura 57 em GuzMán, M., “Aventuras Matemáticas”, *Gradiva* **5**, (2002), **(163)**

Figura 60 em <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/trocoides.htm>

Figura 68 em <http://ciencia.hsw.uol.com.br/motor-a-vapor1.htm>

Figura 70 em <http://www.abcfisioterapia.com/fisioterapia-rotura-del-deltoides-posterior.html>

Figura 98 em <http://ivosakihara.wordpress.com/tag/cardioide/>