UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: PERCURSOS DE APRENDIZAGEM DE ALUNOS DO 6.ºANO DE ESCOLARIDADE

Ana Isabel Silvestre

Tese orientada pelo Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte, especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em Educação (Didática da Matemática)

2012

Resumo

O estudo analisa o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano de escolaridade, no quadro da realização de uma unidade de ensino de natureza exploratória. O quadro teórico aborda cinco tópicos essenciais: (i) raciocínio proporcional e seu desenvolvimento; (ii) tipos de problemas; (iii) estratégias e dificuldades dos alunos; (iv) investigação realizada em Portugal; e (v) ensino para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional. É também apresentada uma discussão teórica sobre unidades de ensino e a descrição da unidade construída para servir de base a este estudo. O estudo segue um paradigma metodológico de *design research*, tendo por base uma experiência de ensino que pretende conhecer a influência de uma unidade de ensino especialmente concebida na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos. A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas do 6.º ano e são descritos e analisados os percursos de aprendizagem de quatro alunos, dois de cada uma das turmas – Carolina, Célia, António e Manuel. A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização de tarefas da unidade de ensino, a gravação em vídeo, a recolha de cópias dos registos escritos dos alunos nas tarefas, testes e entrevistas. Dada a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva.

Deste estudo é possível concluir que os alunos melhoram a sua capacidade em distinguir relações de proporcionalidade direta de outras que não o são, embora alguma dificuldade subsista ainda após a unidade de ensino. É possível concluir também que, antes da unidade de ensino, os alunos têm um desempenho diferente na resolução de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta, usando frequentemente estratégias não proporcionais e pré-proporcionais na resolução de problemas de valor omisso e estratégias proporcionais na resolução de alguns problemas de comparação; além disso, fazem uso de várias representações, tais como os elementos pictóricos e a razão. Durante e no final da unidade de ensino os alunos revelam tendência para a usar estratégias proporcionais; além disso usam tabelas em conjunto com linguagem natural escrita. O desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos parece estar relacionado com o poderoso trabalho realizado em torno da exploração da natureza multiplicativa da proporcionalidade direta e o uso de múltiplas representações, os aspetos fulcrais da conjetura de ensino-aprendizagem da unidade de ensino.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, Unidades de ensino, Tarefas de investigação, Resolução de problemas.

Abstract

This study analyzes the development of the proportional reasoning ability of grade 6 students based on an exploratory teaching unit. The theoretical framework addresses five key issues: (i) proportional reasoning and its development, (ii) types of problems, (iii) students' difficulties and strategies, (iv) research conducted in Portugal, and (v) teaching for the development of proportional reasoning ability. It also presented a theoretical discussion about teaching units and describe the unit was built to serve as a basis for this study. The study follows a methodological paradigm of design research, based on a teaching experiment and seeks to know the influence of a teaching unit specially constructed in the development of students' proportional reasoning ability. The teaching unit was developed in two grade 6 classes. The learning pathways of four students, two from each class – Carolina, Celia, Manuel and Antonio – are described and analyzed. Data collection includes observation of students in tasks of the teaching unit, video recording, collecting copies of written records of students in classroom tasks, tests and interviews. Given the nature of the study, data analysis is essentially descriptive.

This study leads to conclude that students improve their ability to distinguish direct proportion relations from other relations, although some difficulties remain after the teaching unit. It is also possible to conclude that, before the teaching unit, students have different performance in solving problems involving direct proportion relationships, often using non proportional and pre-proportional strategies to solve missing value problems and proportional strategies in solving comparison problems; they use several representations, as pictures and ratios. During and at the end of the teaching unit students show a tendency to use proportional strategies; they also use tables complemented by written natural language. The development of students' proportional reasoning seems to be related to the powerful work around the exploration of the multiplicative nature of direct proportional and the use of multiple representations, key aspects of the teaching-learning conjecture of the teaching unit.
KeyWords: Proportional reasoning, Teaching unit, Open-ended task, Problem solving.

Agradecimentos

No fim deste longo percurso quero manifestar o meu agradecimento a todas as pessoas e instituições que tornaram possível e colaboraram na realização deste trabalho.

O meu agradecimento ao Prof. Doutor João Pedro da Ponte pelo apoio na orientação deste trabalho. Os seus ensinamentos, sugestões, críticas pertinentes e, sobretudo, a sua disponibilidade foram essenciais para a sua realização. Também pelo estímulo que sempre me deu para a participação em eventos científicos nacionais e internacionais, que foram importantes momentos de aprendizagem.

Às minhas colegas que não identifico, por questão de anonimato da escola e alunos, pela sua disponibilidade em participar neste estudo durante dois anos letivos consecutivos. Apesar das dificuldades que se viveram na escola pública, num momento em que as suas expectativas profissionais foram profundamente abaladas, as minhas colegas continuaram de forma empenhada a participar neste estudo.

Aos alunos das turmas e em particular, aos quatro alunos cujo percurso de aprendizagem segui de perto, agradeço a sua simpatia e recetividade para participar no estudo. Estendo este agradecimento aos encarregados de educação que acederam à gravação em vídeo das aulas.

Ao Ministério da Educação e Ciência que me concedeu a equiparação a bolseira e sem a qual este estudo, que implicou o acompanhamento do trabalho em sala de aula de duas turmas, não poderia ter sido realizado. Agradeço também ao conselho pedagógico da escola por ter acedido à sua realização.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia agradeço a concessão de uma bolsa para a realização do doutoramento (contrato SFRH/BD/37885/2007).

Aos colegas que em seminários, reuniões de projeto e conversas informais aceitaram falar sobre a investigação, contribuindo para uma reflexão mais profunda de vários aspetos do estudo e da análise dos dados empíricos, o meu agradecimento. Em particular, à Ana H., à Cláudia C. N, à Elvira F., à Hélia J. e à Hélia P. pela amizade e incentivo durante este longo percurso.

Índice

Capítulo 1 - Introdução 1

1.1. Motivações para o estudo 1

1.2. Problema e questões do estudo 5

1.3. Enquadramento e pertinência do estudo 6

1.3.1. A Álgebra nos primeiros anos de escolaridade 6

1.3.2. Recursos didáticos para a aula de Matemática 7

1.4. Organização do estudo 8

Capítulo 2 - Raciocínio Proporcional 11

2.1. O raciocínio proporcional e o seu desenvolvimento 11

2.1.1. Aspetos que envolvem o raciocínio proporcional 12

2.1.2. O desenvolvimento do raciocínio proporcional 14

2.2. Tipos de problemas 18

2.2.1. Problemas de proporcionalidade direta 18

2.2.2. Problemas pseudoproporcionais 26

2.3. Estratégias e dificuldades dos alunos 28

2.4. A investigação realizada em Portugal 35

2.5. Ensino para o desenvolvimento do raciocínio proporcional 38

Capítulo 3 - Unidade de Ensino 43

3.1. Unidades de ensino 43

3.2. Princípios orientadores da unidade de ensino 46

3.2.1. Documentos de orientação curricular 46

3.2.2. A Álgebra nos primeiros anos de escolaridade 48

3.2.3. As tarefas para a aula de Matemática 49

3.2.4. As representações em Matemática 50

3.2.5. As tecnologias de informação e comunicação no ensino da Matemática 52

3.2.6. A minha experiência docente e como investigadora 54

3.3. Planificação da unidade 55

Capítulo 4 - Metodologia de Investigação 59

4.1. Opções metodológicas 59

4.1.1. Design research 59

4.1.2. Experiência de ensino 62

4.1.3. Critérios de qualidade 64

4.1.4. Questões de ética 65

4.2. Estudos anteriores 66

4.2.1. Primeiro ciclo de experimentação 66

4.2.2. Segundo ciclo de experimentação 68

4.3. Contexto do estudo e os intervenientes 72
4.3.1. A escola e as turmas envolvidas no estudo 72
4.3.2. O grupo de trabalho colaborativo.. 73
4.3.3. Os alunos.. 75
4.4. Procedimentos e técnicas de recolha de dados 76
4.4.1 Observação participante 77
4.4.2. Recolha documental 77
4.4.3. Entrevistas.. 78
4.5. Procedimentos de análise dos dados.. 79
Capítulo 5 - Desenvolvimento da Unidade de Ensino 85
5.1. Aspetos gerais.. 85
5.2. Os vários momentos da unidade de ensino.. 86
5.2.1. Teste diagnóstico.. 87
5.2.2. Ficha de trabalho 1 88
5.2.3. Ficha de trabalho 2 96
5.2.4. Ficha de trabalho 3 99
5.2.5. Ficha de trabalho 4 108
5.2.6. Ficha de trabalho 5 109
5.2.7. Teste final.. 112
5.3. Balanço da unidade de ensino 114
Capítulo 6 - Percurso de aprendizagem de Carolina 117
6.1. Apresentação 117
6.2. Capacidade de raciocínio proporcional 118
6.2.1. Início da unidade de ensino.. 118
6.2.2. Durante o desenvolvimento da unidade de ensino 132
6.2.3. Final da unidade de ensino.. 140
6.2.4. Síntese 151
Capítulo 7 - Percurso de aprendizagem de Célia.. 155
7.1. Apresentação 155
7.2. Capacidade de raciocínio proporcional 156
7.2.1. Antes da experiência de ensino 156
7.2.2. Durante a experiência de ensino.. 170
7.2.3. Após a experiência de ensino 178
7.2.4. Síntese 189
Capítulo 8 - Percurso de aprendizagem de António.. 193
8.1. Apresentação 193
8.2. Capacidade de raciocínio proporcional 194
8.2.1. Antes da experiência de ensino 194
8.2.2. Durante a experiência de ensino.. 206

8.2.3. No final da unidade de ensino ... 213
8.2.4. Síntese ... 225

Capítulo 9 - Percurso de aprendizagem de Manuel ... 229
9.1. Apresentação ... 229
9.2. Capacidade de raciocínio proporcional ... 230
9.2.1. Início da unidade de ensino ... 231
9.2.2. Durante o desenvolvimento da unidade de ensino ... 241
9.2.3. No final da unidade de ensino ... 246
9.2.4. Síntese ... 256

Capítulo 10 - Os percursos de aprendizagem dos alunos ... 261
10.1. Problemas pseudoproporcionais ... 261
10.2. Problemas de proporcionalidade direta ... 268
10.2.1. Problemas de valor omisso ... 268
10.2.2. Problemas de comparação ... 275

Capítulo 11 - Conclusões ... 281
11.1. Síntese do estudo ... 281
11.2. Principais conclusões do estudo ... 283
11.2.1. Problemas pseudoproporcionais: Estratégias de resolução ... 283
11.2.2. Problemas proporcionais: Estratégias de resolução ... 285
11.2.3. Unidade de ensino ... 287
11.3. Perspetivas que emergem do estudo e reflexão final ... 288

Referências ... 291

Anexos ... 313
Anexo 1 – Teste diagnóstico ... 313
Anexo 2 – Ficha de trabalho 1 ... 319
Anexo 3 – Ficha de trabalho 2 ... 323
Anexo 4 – Ficha de trabalho 3 ... 327
Anexo 5 – Ficha de trabalho 4 ... 333
Anexo 6 – Ficha de trabalho 5 ... 337
Anexo 7 – Teste final ... 341
Anexo 8 – Teste intermédio ... 347
Anexo 9 – Primeira entrevista ... 351
Anexo 10 – Segunda entrevista ... 355
Anexo 11 – Terceira entrevista ... 359
Anexo 12 – Figuras do Capítulo 5 ... 363

Índice de Figuras

Figura 2.1. - Isomorfismo de medidas para a multiplicação (Vergnaud, 1983, p.129) .. 20

Figura 2.2. - Operador escalar (Vergnaud, 1983, p.130) ... 21

Figura 2.3. - Operador funcional (Vergnaud, 1983, p.130) ... 21

Figura 2.4. - Problemas de divisão do tipo 1 (Vergnaud, 1983, p.131) ... 21

Figura 2.5. - Inversão do operador escalar (Vergnaud, 1983, p.131) ... 22

Figura 2.6. - Problemas de divisão do tipo 2 (Vergnaud, 1983, p.132) ... 22

Figura 2.7. - Inversão do operador funcional (Vergnaud, 1983, p.132) ... 23

Figura 2.8. - Problemas da regra de três (Vergnaud, 1983, p.133) ... 23

Figura 2.9. - Procedimentos de resolução para os problemas da regra de três (Vergnaud, 1983, p. 146) ... 24

Figura 2.10. - Representação gráfica (Post, Behr & Lesh, 1988, p. 11) ... 30

Figura 4.1. – Dimensões e níveis de análise ... 81

Figura 5.1. – Ficha de trabalho 1 (aspeto parcial) ... 89

Figura 5.2. – Resposta do grupo de Carolina ... 91

Figura 5.3. – Resposta do grupo de Tomás ... 92

Figura 5.4. – Aspeto do documento produzido pela professora e utilizado na discussão da tarefa ... 98

Figura 5.5. – Questão 1.1. ... 100

Figura 5.6. – Resposta do grupo de Dário à questão 1.1. ... 100

Figura 5.7. – Resposta do grupo de Joel à questão 1.1. ... 100

Figura 5.8. – Questão 1.3. ... 101

Figura 5.9. – Resposta do grupo de Dário à questão 1.3. ... 101

Figura 5.10. – Resposta do grupo de Joel à questão 1.3. ... 101

Figura 5.11. – Questão 2.1 ... 102

Figura 5.12. – O grupo de Teresa responde à questão 2.1 ... 103

Figura 5.13. – Questão 2.4 ... 103

Figura 5.14. – Registo escrito do grupo com a linha correspondente a 45 euros. ... 104

Figura 5.15. – Questão 5. ... 104

Figura 5.16. – Resposta correta do grupo de Joana à questão 5 ... 105

Figura 5.17. – Resposta incorreta do grupo de Carlos à questão 5 ... 105

Figura 5.18. – Questão 3.1 ... 108

Figura 5.19. – Resposta do grupo de Márcia à questão 1.1. 110
Figura 5.20. – Resposta do grupo do Nuno à questão 1.1. 110
Figura 5.21. – Questão 1.3. 111
Figura 5.22. – Resposta à questão 1.3. 111
Figura 5.23. – Questão 2.2. 111
Figura 5.24. – Resposta do grupo de Rui à questão 2.2. 112
Figura 5.25 – Resposta do grupo de Carolina. 112

Figura 6.1. – Questão 2 do teste diagnóstico 119
Figura 6.2. – Resposta de Carolina questão 2 do teste diagnóstico 119
Figura 6.3. – Questão 5 do teste diagnóstico 119
Figura 6.4. – Questão 9 do teste diagnóstico 120
Figura 6.5. – Resposta de Carolina à questão 9 do teste diagnóstico 120
Figura 6.6. – Questão 7 do teste diagnóstico 121
Figura 6.7. – Resposta de Carolina à questão 7 do teste diagnóstico 121
Figura 6.8. – Questão 1.1. da primeira entrevista 122
Figura 6.9. – Resposta de Carolina à questão 1.1 da primeira entrevista 122
Figura 6.10. – Questão 1.2 da primeira entrevista 123
Figura 6.11. – Resposta de Carolina à questão 1.2 da primeira entrevista (parte 1) 123
Figura 6.12. – Questão 3.1. da primeira entrevista 124
Figura 6.13. – Resposta de Carolina à questão 3.1 da primeira entrevista (parte 1) 125
Figura 6.14. – Resposta de Carolina à questão 3.1 da primeira entrevista (parte 2) 125
Figura 6.15. – Questão 3.2 da primeira entrevista 126
Figura 6.16. – Resposta de Carolina à questão 3.2 da primeira entrevista 126
Figura 6.17. – Questão 10.2 do teste diagnóstico 127
Figura 6.18. – Resposta de Carolina à questão 10.2 do teste diagnóstico 127
Figura 6.19. – Questão 6 do teste diagnóstico 127
Figura 6.20. – Resposta de Carolina à questão 6 do teste diagnóstico 128
Figura 6.21. – Questão 4 do teste diagnóstico 128
Figura 6.22. – Resposta de Carolina à questão 4 do teste diagnóstico 129
Figura 6.23. – Questão 4 da primeira entrevista 129
Figura 6.24. – Resposta de Carolina à questão 4 da primeira entrevista 129
Figura 6.25. – Questão 8 do teste diagnóstico 130
Figura 6.26. – Resposta de Carolina à questão 8 do teste diagnóstico 130
Figura 6.27. – Questão 11 do teste diagnóstico 131

Figura 6.28. – Resposta de Carolina à questão 11 do teste diagnóstico 131
Figura 6.29. – Questão 5.1 da primeira entrevista 132
Figura 6.30. – Resposta de Carolina à questão 11 do teste diagnóstico 132
Figura 6.31. – Questão 5.4. do teste intermédio 134
Figura 6.32. – Resposta de Carolina à questão 5.4 do teste intermédio 134
Figura 6.33. – Questão 5.1 do teste intermédio 134
Figura 6.34. – Resposta de Carolina à questão 5.1 do teste intermédio 135
Figura 6.35. – Questão 2 do teste intermédio 135
Figura 6.36. – Resposta de Carolina questão 2 do teste intermédio 135
Figura 6.37. – Questão 1 do teste intermédio 136
Figura 6.38. – Resposta de Carolina questão 1 do teste intermédio 136
Figura 6.39. – Questão 2.3. da segunda entrevista 137
Figura 6.40. – Resposta de Carolina à questão 2.3 da segunda entrevista 137
Figura 6.41. – Questão 3 do teste intermédio 138
Figura 6.42. – Resposta de Carolina à questão 3 do teste intermédio 138
Figura 6.43. – Questão 4 do teste intermédio 139
Figura 6.44. – Resposta de Carolina à questão 4 do teste intermédio 139
Figura 6.45. – Questão 1.7 do teste final 140
Figura 6.46. – Resposta de Carolina à questão 1.7 do teste final 141
Figura 6.47. – Questão 1.8. do teste final 141
Figura 6.48. – Resposta de Carolina à questão 1.8 do teste final 141
Figura 6.49. – Questão 1.6. do teste final 142
Figura 6.50. – Resposta de Carolina à questão 1.4. do teste final 142
Figura 6.51. – Questão 5.1 do teste final 143
Figura 6.52. – Resposta de Carolina à questão 5.1 do teste final 143
Figura 6.53. – Questão 5.2. do teste final 143
Figura 6.54. – Resposta de Carolina à questão 5.2. do teste final 144
Figura 6.55. – Questão 1.1. da terceira entrevista 144
Figura 6.56. – Resposta de Carolina à questão 1.1 da terceira entrevista 145
Figura 6.57. – Questão 1.2. da terceira entrevista 145
Figura 6.58. – Resposta de Carolina questão 1.2 da terceira entrevista (parte 1)......... 146
Figura 6.59. – Questão 3.2 do teste final 147
Figura 6.60. – Resposta de Carolina à questão 3.2 do teste final 147
Figura 6.61. – Questão 4.1 do teste final 147
Figura 6.62. – Resposta de Carolina questão 4.1 do teste final 148

Figura 6.63. – Questão 6 do teste final 148
Figura 6.64. – Resposta de Carolina à questão 6 do teste final 149
Figura 6.65. – Questão 5 da entrevista 149
Figura 6.66. – Resposta de Carolina à questão 5 da terceira entrevista 150

Figura 7.1. – Questão 2 do teste diagnóstico 157
Figura 7.2. – Resposta de Célia questão 2 do teste diagnóstico 157
Figura 7.3. – Questão 5 do teste diagnóstico 157
Figura 7.4. – Resposta de Célia questão 5 do teste diagnóstico 158
Figura 7.5. – Questão 9 do teste diagnóstico 158
Figura 7.6. – Resposta de Célia à questão 9 do teste diagnóstico 158
Figura 7.7. – Questão 7 do teste diagnóstico 159
Figura 7.8. – Resposta de Célia questão 7 159
Figura 7.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista 159
Figura 7.10. – Resposta de Célia questão 1.1 da primeira entrevista 160
Figura 7.11. – Questão 1.2 da primeira entrevista 160
Figura 7.12. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 1) 161
Figura 7.13. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 2) 161
Figura 7.14. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 3) 162
Figura 7.15. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 4) 163
Figura 7.16. – Questão 3.1. da primeira entrevista 163
Figura 7.17. – Resposta de Célia questão 3.1 da primeira entrevista (parte 1) 163
Figura 7.18. – Resposta de Célia questão 3.1 da primeira entrevista (parte 2) 164
Figura 7.19. – Questão 3.2 da primeira entrevista 164
Figura 7.20. – Resposta de Célia à questão 3.2 da primeira entrevista 164
Figura 7.21. – Questão 10.2 do teste diagnóstico 165
Figura 7.22. – Resposta de Célia questão 10.2 do teste diagnóstico 165
Figura 7.23. – Questão 6 do teste diagnóstico 165
Figura 7.24. – Resposta de Célia questão 6 do teste diagnóstico 166
Figura 7.25. – Questão 4 do teste diagnóstico 166
Figura 7.26. – Resposta de Célia à questão 4 do teste diagnóstico 166
Figura 7.27. – Questão 4 da primeira entrevista 167
Figura 7.28. – Resposta de Célia questão 4 da primeira entrevista 167
Figura 7.29. – Resposta de Célia questão 4 da primeira entrevista 167
Figura 7.30. – Questão 8 do teste diagnóstico 168

Figura 7.31. – Resposta de Célia questão 8 do teste diagnóstico 168
Figura 7.32. – Questão 11 do teste diagnóstico 169
Figura 7.33. – Resposta de Célia à questão 11 do teste diagnóstico 169
Figura 7.34. – Questão 5.1 da primeira entrevista 169
Figura 7.35. – Questão 5.4 do teste intermédio 171
Figura 7.36. – Resposta de Célia à questão 5.4 do teste intermédio 171
Figura 7.37. – Questão 5.1 do teste intermédio 172
Figura 7.38. – Resposta de Célia à questão 5.1 do teste intermédio 172
Figura 7.39. – Questão 2 do teste intermédio 173
Figura 7.40. – Resposta de Célia questão 2 do teste intermédio 173
Figura 7.41. – Questão 1 do teste intermédio 173
Figura 7.42. – Resposta de Célia questão 1 do teste intermédio 173
Figura 7.43. – Questão 2.3. da segunda entrevista 174
Figura 7.44. – Resposta de Célia questão 2.3 da segunda entrevista (parte 1)............. 175
Figura 7.45. – Resposta de Célia questão 2.3. da segunda entrevista 175
Figura 7.46. – Questão 3 do teste intermédio 176
Figura 7.47. – Resposta de Célia questão 3 do teste intermédio 176
Figura 7.48. – Questão 4 do teste intermédio 177
Figura 7.49. – Resposta de Célia questão 4 do teste intermédio 177
Figura 7.50. – Questão 1.7 do teste final 178
Figura 7.51. – Resposta de Célia à questão 1.7 do teste final 179
Figura 7.52. – Questão 1.8. do teste final 179
Figura 7.53. – Resposta de Célia à questão 1.8 do teste final 179
Figura 7.54. – Questão 1.6. do teste final 179
Figura 7.55. – Resposta de Célia à questão 1.4 do teste final 180
Figura 7.56. – Questão 5.1 do teste final 180
Figura 7.57. – Resposta de Célia à questão 5.1 do teste final 180
Figura 7.58. – Questão 5.2 do teste final 181
Figura 7.59. – Resposta de Célia à questão 5.2 do teste final 181
Figura 7.60. – Questão 1.1 da terceira entrevista 181
Figura 7.61. – Resposta de Célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 1)............. 182
Figura 7.62. – Resposta de célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 2).............. 182
Figura 7.63. – Resposta de Célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 3)............. 182
Figura 7.64. – Questão 1.2 da terceira entrevista 183
Figura 7.65. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 1)............. 183

Figura 7.66. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 2) 184
Figura 7.67. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 3) 184
Figura 7.68. – Questão 3.2 do teste final 185
Figura 7.69. – Resposta de Célia questão 3.2 do teste final 185
Figura 7.70. – Questão 4.1 do teste final 186
Figura 7.71. – Resposta de Célia questão 4.1 do teste final 186
Figura 7.72. – Questão 6 do teste final 186
Figura 7.73. – Resposta de Célia questão 6 do teste final 187
Figura 7.74. – Questão 5 da entrevista 187
Figura 7.75. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 1) 188
Figura 7.76. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 2) 188
Figura 7.77. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 3) 188
Figura 7.78. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 4) 188

Figura 8.1. – Questão 2 do teste diagnóstico 195
Figura 8.2. – Resposta de António à questão 2 do teste diagnóstico 195
Figura 8.3. – Questão 5 do teste diagnóstico 195
Figura 8.4. – Resposta de António questão 5 do teste diagnóstico 195
Figura 8.5. – Questão 9 do teste diagnóstico 196
Figura 8.6 – Resposta de António à questão 9 do teste diagnóstico 196
Figura 8.7. – Questão 7 do teste diagnóstico 197
Figura 8.8. – Resposta de António à questão 7 197
Figura 8.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista 197
Figura 8.10. – Questão 1.2 da primeira entrevista 198
Figura 8.11. – Questão 3.1 da primeira entrevista 199
Figura 8.12. – Questão 3.2 da primeira entrevista 199
Figura 8.13. – Questão 10.2 do teste diagnóstico 200
Figura 8.14. – Resposta de António à questão 10.2 do teste diagnóstico 200
Figura 8.15. – Questão 6 do teste diagnóstico 201
Figura 8.16. – Resposta de António à questão 6 do teste diagnóstico 201
Figura 8.17. – Questão 4 do teste diagnóstico 202
Figura 8.18. – Resposta de António à questão 4 do teste diagnóstico 202
Figura 8.19. – Questão 4 da primeira entrevista 202
Figura 8.20. – Resposta de António à questão 4 da primeira entrevista 202
Figura 8.21. – Resposta de António questão 4 da primeira entrevista 203

Figura 8.22. – Questão 8 do teste diagnóstico 203
Figura 8.23. – Resposta de António questão 8 do teste diagnóstico 204
Figura 8.24. – Questão 11 do teste diagnóstico 204
Figura 8.25. – Resposta de António à questão 11 do teste diagnóstico 204
Figura 8.26. – Questão 5.1 da primeira entrevista 205
Figura 8.27. – Questão 5.4. do teste intermédio 207
Figura 8.28. – Resposta de António à questão 5.4. do teste intermédio 207
Figura 8.29. – Questão 5.1 do teste intermédio 207
Figura 8.30. – Resposta de António à questão 5.1 do teste intermédio 207
Figura 8.31. – Questão 2 do teste intermédio 208
Figura 8.32. – Resposta de António à questão 2 do teste intermédio 208
Figura 8.33. – Questão 1 do teste intermédio 208
Figura 8.34. – Resposta de António questão 1 do teste intermédio 209
Figura 8.35. – Questão 2.3 da segunda entrevista 209
Figura 8.36. – Resposta de António à questão 2.1 da segunda entrevista 209
Figura 8.37. – Resposta de António questão 2.3 da segunda entrevista 210
Figura 8.38. – Questão 3 do teste intermédio 211
Figura 8.39. – Resposta de António à questão 3 do teste intermédio 211
Figura 8.40. – Questão 4 do teste intermédio 212
Figura 8.41. – Resposta de António questão 4 do teste intermédio 212
Figura 8.42. – Questão 1.7 do teste final 214
Figura 8.43. – Resposta de António à questão 1.7 do teste final 214
Figura 8.44. – Questão 1.8 do teste final 214
Figura 8.45. – Resposta de António à questão 1.8 do teste final 215
Figura 8.46. – Questão 1.6 do teste final 215
Figura 8.47. – Resposta de António à questão 1.4 do teste final 215
Figura 8.48. – Questão 5.1 do teste final 215
Figura 8.49. – Resposta de António à questão 5.1 do teste final 216
Figura 8.50. – Questão 5.2 do teste final 216
Figura 8.51. – Resposta de António à questão 5.2 do teste final 216
Figura 8.52. – Questão 1.1 da terceira entrevista 218
Figura 8.53. – Questão 1.2 da terceira entrevista 219
Figura 8.54. – Questão 3.2 do teste final 220
Figura 8.55. – Resposta de António à questão 3.2 do teste final 221
Figura 8.56. – Questão 4.1 do teste final 221

Figura 8.57. – Resposta de António à questão 4.1 do teste final 222
Figura 8.58. – Questão 6 do teste final 222
Figura 8.59. – Resposta de António à questão 6 do teste final 222
Figura 8.60. – Questão 5 da entrevista 223

Figura 9.1. – Questão 2 do teste diagnóstico 231
Figura 9.2. – Resposta de Manuel à questão 2 do teste diagnóstico 231
Figura 9.3. – Questão 5 do teste diagnóstico 231
Figura 9.4. – Resposta de Manuel questão 5 do teste diagnóstico 232
Figura 9.5. – Questão 9 do teste diagnóstico 232
Figura 9.6. – Resposta de Manuel à questão 9 do teste diagnóstico 232
Figura 9.7. – Questão 7 do teste diagnóstico 233
Figura 9.8. – Resposta de Manuel à questão 7 233
Figura 9.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista 233
Figura 9.10. – Resposta de Manuel à questão 1.1 da primeira entrevista 234
Figura 9.11. – Questão 1.2 da primeira entrevista 234
Figura 9.12. – Resposta de Manuel à questão 1.2 da primeira entrevista 234
Figura 9.13. – Questão 3.1 da primeira entrevista 235
Figura 9.14. – Questão 3.2 da primeira entrevista 236
Figura 9.15. – Questão 10.2 do teste diagnóstico 236
Figura 9.16. – Resposta de Manuel à questão 10.2 do teste diagnóstico 237
Figura 9.17. – Questão 6 do teste diagnóstico 237
Figura 9.18. – Resposta de Manuel à questão 6 do teste diagnóstico 237
Figura 9.19. – Questão 4 do teste diagnóstico 238
Figura 9.20. – Resposta de Manuel à questão 4 do teste diagnóstico 238
Figura 9.21. – Questão 4 da primeira entrevista 238
Figura 9.22. – Questão 8 do teste diagnóstico 239
Figura 9.23. – Resposta de Manuel questão 8 do teste diagnóstico 240
Figura 9.24. – Questão 11 do teste diagnóstico 240
Figura 9.25. – Resposta de Manuel à questão 11 do teste diagnóstico 240
Figura 9.26. – Questão 5.1 da primeira entrevista 241
Figura 9.27. – Questão 5.4. do teste intermédio 242
Figura 9.28. – Resposta de Manuel à questão 5.4. do teste intermédio 242
Figura 9.29. – Questão 5.1 do teste intermédio 243
Figura 9.30. – Resposta de Manuel à questão 5.1 do teste intermédio 243

Figura 9.31. – Questão 2 do teste intermédio 243
Figura 9.32. – Resposta de Manuel à questão 2 do teste intermédio 243
Figura 9.33. – Questão 1 do teste intermédio 244
Figura 9.34. – Resposta de Manuel questão 1 do teste intermédio 244
Figura 9.35. – Questão 2.3 da segunda entrevista 244
Figura 9.36. – Questão 3 do teste intermédio 245
Figura 9.37. – Resposta de Manuel à questão 3 do teste intermédio 245
Figura 9.38. – Questão 4 do teste intermédio 245
Figura 9.39. – Resposta de Manuel questão 4 do teste intermédio 246
Figura 9.40. – Questão 1.7 do teste final 247
Figura 9.41. – Resposta de Manuel à questão 1.7 do teste final 247
Figura 9.42. – Questão 1.8 do teste final 247
Figura 9.43. – Resposta de Manuel à questão 1.8 do teste final 248
Figura 9.44. – Questão 1.6 do teste final 248
Figura 9.45. – Resposta de Manuel à questão 1.4 do teste final 248
Figura 9.46. – Questão 5.1 do teste final 249
Figura 9.47. – Resposta de manuel à questão 5.1 do teste final 249
Figura 9.48. – Questão 5.2 do teste final 249
Figura 9.49. – Resposta de Manuel à questão 5.2 do teste final 250
Figura 9.50. – Questão 1.1 da terceira entrevista 250
Figura 9.51. – Resposta de Manuel à questão 1.1 da terceira entrevista 250
Figura 9.52. – Questão 1.2 da terceira entrevista 251
Figura 9.53. – Resposta de Manuel à questão 1.2 da terceira entrevista 251
Figura 9.54. – Questão 3.2 do teste final 253
Figura 9.55. – Resposta de Manuel à questão 3.2 do teste final 253
Figura 9.56. – Questão 4.1 do teste final 254
Figura 9.57. – Resposta de Manuel à questão 4.1 do teste final 254
Figura 9.58. – Questão 6 do teste final 254
Figura 9.59. – Resposta de Manuel à questão 6 do teste final 255
Figura 9.60. – Questão 5 da entrevista 255
Figura 9.61. – Resposta de Manuel à questão 5 da terceira entrevista 256

Índice de Quadros

Quadro 3.1. – Planeamento da unidade de ensino (9 blocos) 58

Quadro 4.1. – Procedimento geral de recolha de dados 76

Quadro 4.2. – Recolha dos dados: técnicas, formas de registo e fontes 77

Quadro 4.3. – Resolução de problemas de proporcionalidade direta: estratégias 81

Quadro 4.4. – Distinção da proporcionalidade direta de outra que o não é: estratégias 82

Quadro 4.5. – Categorias de análise para as representações usada pelos alunos (adaptado de Lesh, Post e Behr (1987) e Tripathi (2008)) 83

Quadro 5.1. – Calendário do desenvolvimento da unidade de ensino 86

Quadro 5.2. – Resultados do teste diagnóstico da turma A 87

Quadro 5.3. – Resultados do teste diagnóstico da turma B 87

Quadro 5.4. – Resultados do teste final da turma A 113

Quadro 5.5. – Resultados do teste final da turma B 113

Quadro 10.1. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais no início da unidade de ensino (no teste diagnóstico) 262

Quadro 10.2. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais durante a unidade de ensino (teste intermédio) 265

Quadro 10.3. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais no fim da unidade de ensino (teste final) 266

Quadro 10.4. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso no início da unidade de ensino 269

Quadro 10.5. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso durante a da unidade de ensino (teste intermédio e segunda entrevista) 272

Quadro 10.6. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso no fim da unidade de ensino 274

Quadro 10.7. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação no início da unidade de ensino 276

Quadro 10.8 – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação durante a da unidade de ensino 277

Quadro 10.9. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação no fim da unidade de ensino 279

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as motivações para a realização do presente estudo centrado no raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano de escolaridade, formulo os objetivos e as questões que o norteiam, indico o respetivo contexto e pertinência e, por fim, apresento a organização geral do estudo.

1.1. Motivações para o estudo

A realização deste estudo tem essencialmente duas motivações. A primeira diz respeito à importância do raciocínio proporcional, um aspeto do raciocínio matemático (Cramer & Post, 1993; Singh, 2000) essencial no desenvolvimento matemático dos alunos (Misailidou & Williams, 2004), pois a noção de proporcionalidade direta está presente em diferentes temas tais como, Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, Análise de Dados e Probabilidade (NCTM, 2007; Shield & Dole, 2002). A literatura de investigação neste tópico menciona a forte influência do raciocínio proporcional no desempenho futuro dos alunos em Matemática (Cetin & Ertekin, 2011; Fuson & Abrahamson, 2005; Hasemann, 1981; Lamon, 2007; Lesh, Post & Behr, 1988; Person, Berenson & Greenspon, 2004, Saxe, Gearhart & Seltzer, 1999; Sophian, Garyantes & Chang, 1997) e na compreensão de noções de outras áreas do saber como composição química, concentração, densidade, velocidade, modelos demográficos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Akatugba & Wallace, 1999; Harel, Behr, Post & Lesh, 1992; Karplus, Pulos & Stage, 1983; Moore, Dixon & Haines, 1991; Sophian & Wood, 1997). A literatura também destaca a sua importância na resolução de problemas do quotidiano (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Lesh, Post & Behr, 1988; Modestou & Gagatsis, 2010; Spinillo, 1997; Spinillo & Bryant, 1999; Sriraman & Lesh, 2006) como, por exemplo, na redução e aumento da quantidade dos ingredientes de uma receita culinária e no cálculo de descontos, aplicados ao preço de objetos e serviços. O NCTM (1989) indica que o raciocínio proporcional é tão importante que é meritório todo o tempo e esforço despendido para garantir a seu desenvolvimento.

A dificuldade dos alunos na resolução de problemas que envolvem este raciocínio está também largamente documentada na literatura (Ahl, Moore & Dixon, 1992; Bowers, Nickerson & Kenehan, 2002; Fujimura, 2001; Hiebert & Behr, 1988; Langrall & Swafford, 2000; Misailidou & Williams, 2003, 2004; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005; Wearne & Kouba, 2000). Além disso, Lesh, Post e Behr (1988) chamam à atenção que nem todas as pessoas que resolvem problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta, usam raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional é caracterizado por um lento processo de desenvolvimento (Cramer & Post, 1993; Streefland, 1985), influenciado por fatores associados à complexidade deste tipo de raciocínio e à vivência pessoal e escolar do aluno. Ao longo dos últimos trinta anos de investigação neste campo de trabalho, esta complexidade tem sido salientada por autores como Streefland (1985), English e Halford (1995), Post, Cramer, Harel, Kieren e Lesh (1998) e Shield e Dole (2002). Tal complexidade resulta quer de um amplo conjunto de conhecimentos prévios necessários para compreender a noção de proporcionalidade direta, quer do facto de cada domínio do conhecimento usar este processo básico de raciocínio, adaptando-o subtilmente aos diversos contextos de forma a responder às suas necessidades específicas. Segundo, Lesh, Post e Behr (1988), o raciocínio proporcional envolve sentido de covariação, múltiplas comparações e aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação e, além disso, está relacionado com a inferência e predição e envolve pensamento qualitativo e quantitativo.

É importante tomar em atenção a vivência pessoal do aluno pois, antes de iniciarem a escolaridade, as crianças são já capazes de realizar julgamentos proporcionais que resultam da sua experiência física e linguística (Resnick & Singer, 1993). Esta capacidade primitiva deve ser tida em conta no ensino formal da proporcionalidade direta, porque o conhecimento intuitivo é necessário na construção de conhecimento significativo para os alunos (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto & Miller, 1998). Tal capacidade pode também ajudar a esclarecer a origem de conceções falsas como as que levam os alunos a sobrevalorizar as relações proporcionais (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2001).

Também a experiência escolar do aluno não deve ser esquecida já que, de acordo com Lamon (2005), o desenvolvimento do raciocínio proporcional é sustentado pela sofisticação do raciocínio multiplicativo e pela capacidade de comparar duas quantidades em termos relativos, em vez de em termos absolutos como no raciocínio aditivo. Um conhecimento frágil das noções de multiplicação, divisão, frações e decimais influencia negativamente a compreensão das noções de razão e proporção (Lo & Watanabe, 1997; Pittalis, Christou, & Papageorgiou, 2003) e o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Ainda no que respeita à experiência escolar, é de salientar que responder corretamente a alguns problemas que envolvam uma relação de proporcionalidade direta não garante que o aluno faça uso de raciocínio proporcional, pois, em algumas situações, esses problemas podem ser resolvidos usando conhecimento mecânico sobre frações equivalentes ou algoritmos como a "regra de três" (Lamon, 2007).

Estudos recentes mostram a influência do ensino no desenvolvimento do raciocínio proporcional nos alunos (Lamon, 1995; Misailidou & Williams, 2004; Pittalis, Christou & Papageorgiou, 2003; Steinthorsdottir, 2005). Estes estudos indicam, de uma forma mais ou menos explícita, que o desenvolvimento do raciocínio proporcional envolve algo mais que a utilização de procedimentos de cálculo e deve centrar-se na compreensão da relação de proporcionalidade direta. Para Hiebert e Lefreve (1986), só deste modo os alunos são capazes de saber o que fazer e porquê quando se envolvem na resolução de problemas que envolvem a noção de proporcionalidade direta.

A segunda motivação para este estudo está relacionada com a minha experiência docente no 2.º ciclo do ensino básico, que tem sido assinalada essencialmente por duas preocupações. A primeira diz respeito ao reconhecimento, pelos meus alunos, de que a Matemática faz parte da sua vida pelo que a devem usar com compreensão. A segunda está associada à minha pretensão em proporcionar aos meus alunos experiências com significado, que contribuam para a sua aprendizagem. Esta última preocupação tem norteado a minha formação contínua, que embora de curta duração, me permitiu refletir sobre a necessidade de continuar a investir na minha formação profissional, para ultrapassar algumas lacunas que não me permitiam ter mais autonomia, nem compreender as dificuldades dos alunos. E foi neste contexto que, em 2003, decidi fazer a minha inscrição no mestrado em Didática da Matemática, no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Estive na iminência de abandonar este curso no primeiro trimestre da parte curricular, por pensar que o seu cariz eminentemente teórico não ia ao encontro do que eu pretendia. Hoje reconheço que todos os ensinamentos do ano curricular foram o suporte para o estudo Investigações e Novas Tecnologias no Ensino da Proporcionalidade Direta: Uma Experiência no 2.º Ciclo (Silvestre, 2006), uma investigação sobre a minha prática, que constituiu a experiência mais enriquecedora que vivi em termos de desenvolvimento profissional.

Neste estudo construí e realizei em sala de aula uma unidade de ensino que visa o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano. Esta unidade teve por base três ideias fundamentais: (i) ênfase em tarefas investigativas/exploratórias e problemas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003); (ii) situações contextualizadas; e (iii) o uso de tecnologia, recorrendo à folha de cálculo (Ponte, 1995). Seguiu uma estratégia de ensino que se pode designar de exploratória (Ponte 2005), que consiste em levar os alunos, através da exploração de tarefas abertas, a estabelecer as suas próprias estratégias de resolução de problemas que envolvem a noção de proporcionalidade direta. Esta estratégia constitui uma alternativa à aprendizagem baseada na memorização de procedimentos que, como dizem Lesh, Post e Behr (1988), leva à resolução de problemas de proporcionalidade sem raciocinar proporcionalmente. Os resultados deste estudo mostram uma melhoria no desempenho dos alunos em vários aspetos que envolvem o raciocínio proporcional. Isto é, mostram maior capacidade em distinguir as relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são, recorrendo ao seu conhecimento sobre regularidades multiplicativas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta. A generalização feita pelos alunos sobre as relações dentro e entre variáveis constitui o suporte para o uso de estratégias de natureza escalar e funcional. Os alunos ainda mostraram ser capazes de utilizar flexivelmente várias representações. A unidade de ensino parece ter contribuído significativamente para este desempenho muito positivo dos alunos. Muito em especial destaco a importância do tipo de tarefas e a sua contextualização, a valorização da intuição dos alunos, a organização do trabalho em grupo e a discussão de resultados em grupo alargado na aula.

Assim, o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos, no quadro do ensino formal da proporcionalidade direta, é a ideia que une as motivações para este estudo. Fazendo uso de uma unidade de ensino semelhante àquela que construi e desenvolvi no estudo acima referido, a sua lecionação é agora realizada por duas professoras.

1.2. Problema e questões do estudo

Segundo Lesh, Post e Behr (1988), o desenvolvimento deste raciocínio constitui um dos principais objetivos do ensino da Matemática elementar. O propósito de ensino deve passar pela mobilização das estratégias intuitivas dos alunos, que tipicamente são aditivas (Hart, 1981) e orientá-los para a construção de estruturas multiplicativas (Clark & Kamii, 1996).

Da minha experiência como professora, os alunos do 6.º ano manifestam dificuldades na realização de tarefas matemáticas. De um modo geral, penso que essas dificuldades resultam de uma experiência matemática frágil, associada na grande maioria dos casos a um insucesso precoce. A primeira dificuldade é transversal e diz à capacidade de resolução de problemas, motivada por: (i) falta de domínio da língua materna; (ii) desconhecimento das situações contextuais dos fenómenos (físicos e outros); e (iii) não estabelecimento de relações com a sua experiência pessoal. A segunda dificuldade está associada a um conhecimento pobre sobre estruturas multiplicativas. A terceira grande dificuldade refere-se à sua tendência para a realização de procedimentos matemáticos sem os compreender, isto é, os alunos estão mais preocupados no produto final do que com o significado desse produto.

Deste modo, será importante proporcionar aos alunos do 6.º ano de escolaridade, como parte daquilo a que podemos chamar a iniciação ao pensamento algébrico, experiências de aprendizagem que visem o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para isso, o trabalho na aula deve envolver os alunos em tarefas que lhes permitam partir das suas conceções e experiências para a construção do saber matemático, usando um conjunto de ferramentas que sustentem a construção de conhecimentos significativos.

Este estudo tem como foco o raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano, no quadro do ensino do tópico de proporcionalidade direta, do tema Álgebra do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007). O seu objetivo principal é compreender como se desenvolve o raciocínio proporcional, no quadro de uma unidade de ensino marcada por tarefas de cunho investigativo/exploratório e problemas, pela utilização da folha de cálculo e pelo trabalho em pequeno grupo na sala de aula. Para compreender o desenvolvimento do raciocínio proporcional são analisadas as estratégias de resolução de problemas usadas pelos alunos, em particular, os seus procedimentos de cálculo e representações. Para atingir este objetivo procuro responder às seguintes questões:

- Que estratégias usam os alunos para resolver problemas de valor omisso e de comparação? Que procedimentos de cálculo e representações mostram essas estratégias?
- Que estratégias usam os alunos para resolver problemas que envolvem a decisão se existe ou não uma relação de proporcionalidade direta? Que procedimentos de cálculo e representações mostram essas estratégias?

Para desenvolver este estudo foi formado um grupo de trabalho colaborativo, constituído por mim, enquanto investigadora, e mais duas professoras que lecionam o 6.º ano do ensino básico e que se interessam pela aprendizagem com significado dos seus alunos. As professoras procuram também melhorar as suas práticas, em particular, conhecendo as potencialidades das tarefas que fazem parte da unidade de ensino, com o objetivo de desenvolver o raciocínio proporcional dos seus alunos.

1.3. Enquadramento e pertinência do estudo

1.3.1. A Álgebra nos primeiros anos de escolaridade

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) apresenta algumas novidades em relação ao programa anterior, sendo a mais visível a que diz respeito à importância das capacidades transversais. Outra novidade é a introdução do tema Álgebra no 2.º ciclo, onde se encontra naturalmente o tópico da proporcionalidade direta. De notar que algumas das ideias deste documento já estavam consideradas no programa anterior (ME, 1991) e também no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME, 2001), mas sem a evidência que lhes é dada no programa atual.

A Álgebra nos primeiros anos de escolaridade é uma ideia ainda recente, patente em documentos internacionais e nacionais. Segundo, Perry e Dokett (2002), o raciocínio algébrico é uma ideia matemática poderosa a que as crianças devem ter acesso. Não se trata de ensinar Álgebra “elementar” no sentido da manipulação simbólica, pelo contrário, pode dizer-se que a Álgebra nos primeiros anos de escolaridade pretende desenvolver nos alunos uma forma de pensar (Vance, 1989) que se pode desenvolver através do trabalho que envolva, nomeadamente: (i) regularidades e relações; (ii) variáveis; (iii) representações de situações e regularidades em tabelas, gráficos, regras verbais e equações e explorar as inter-relações entre estas representações; e (iv) análise de relações funcionais para explicar como a variação de uma grandeza muda a outra grandeza

(NCTM, 1989). Por seu lado, Greenes e Findell (1998), consideram que o pensamento algébrico envolve capacidade de representação, raciocínio proporcional, noção de equilíbrio, significado de variável, padrões e funções, e raciocínio indutivo e dedutivo. Deste modo, é pertinente refletir sobre a introdução das ideias algébricas no desenvolvimento do raciocínio proporcional, mas também na construção de uma unidade de ensino para o tópico proporcionalidade direta.

1.3.2. Recursos didáticos para a aula de Matemática

A evolução curricular tem vindo a transformar o cenário da sala de aula de Matemática. O aluno é cada vez mais visto como agente da sua própria aprendizagem e o professor encarado como um facilitador deste processo. Deste modo, cabe ao professor organizar um currículo para a turma e para cada aluno, o que requer da sua parte uma reflexão permanente sobre a sua prática.

As actividades rotineiras de aquisição de conhecimentos e técnicas de cálculo não garantem o desenvolvimento da competência matemática, pelo que outras atividades devem ser propostas, como a resolução de problemas e as actividades de exploração e investigação. Segundo Ponte e Matos (1992), as atividades de investigação matemática, tais como, de resto, as atividades de resolução de problemas, implicam pensamento complexo e exigem envolvimento e criatividade por parte dos alunos. No entanto, ao contrário dos problemas que especificam claramente o que é dado e o que é pedido, as atividades de exploração e investigação têm enunciados e objetivos mais abertos e menos estruturados. Deste modo, nestas atividades, têm de ser os alunos a definir os objetivos, bem como a conjeturar e a testar as suas próprias conjeturas.

Não existe na educação matemática uma definição unânime para estas tarefas, tal como não existe para muitos outros conceitos. No presente trabalho, tal como em muitos outros estudos realizados em Portugal, assume-se na esteira de Ernest (1991) que a abordagem de investigação acrescenta a formulação de problemas à resolução de problemas. A partir de uma proposta inicial do professor, os alunos são chamados a definir os seus objetivos, colocar as suas conjeturas e explorar caminhos possíveis para validar as suas conjeturas. Estas tarefas podem constituir um ponto de partida para desenvolver um conceito, levando os alunos, em especial os mais jovens, a trabalhar de forma intuitiva, estabelecendo conexões entre a sua experiência e essa tarefa.

A contínua transformação social e tecnológica tem levado os currículos a darem indicações para o uso de tecnologias, nomeadamente o computador. No entanto, não basta que os currículos recomendem a utilização do computar na sala de aula. São necessárias várias ações concertadas para que o uso deste instrumento seja real e se cumpram os objetivos pretendidos.

Diversos autores têm-se referido às potencialidades do computador no ensino e aprendizagem da Matemática. Entre as perspectivas mais marcantes, salientam-se as de Papert (1991), que aponta a importância da actividade investigativa no desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos, num sentido idêntico ao dos mais recentes documentos de orientação curricular. Para este autor, mais do que para efectuar cálculos demorados e repetitivos, o computador permite explorar conceitos ou situações, descobrir relações ou semelhanças, modelar fenómenos, testar conjeturas, e assim inventar e reinventar a Matemática.

A folha de cálculo constitui um exemplo e uma ferramenta computacional de uso genérico, tal como o processador de texto e as bases de dados (Duarte & Alves, 2001). Visualmente apresenta-se como uma matriz de linhas/colunas, permitindo a inserção de valores numéricos, fórmulas e texto, que podem ser sujeitos a tratamento e manipulações, através de um agregado de opções. Ponte e Canavarro (1997) e Moreira (1989) referem que a folha de cálculo obteve grande divulgação em contextos educacionais, sendo notadas as suas potencialidades para tratar e organizar uma ampla quantidade de dados numéricos, apresentando a informação nas formas numérica, algébrica e gráfica, e permitindo passar facilmente de uma forma para outra. Deste modo, a folha de cálculo permite a modelação e a simulação de situações, sustentando a realização de actividades de natureza investigativa/exploratória e a resolução de problemas (Duarte & Alves, 2001; Ponte & Canavarro, 1997). Os alunos, em situações exploratórias, rapidamente podem verificar as suas conjeturas pois "ao funcionar como um instrumento de simulação, a folha de cálculo proporciona o desenvolvimento da criatividade, da capacidade de identificar, da sensibilidade do peso relativo de cada um desses fatores em diferentes cenários" (Moreira, 1989, p. 46).

1.4. Organização do estudo

Este estudo está organizado em duas partes. A primeira, da qual fazem parte os capítulos 1 a 4, apresenta a investigação empírica e aborda os aspetos centrais relativos ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. O capítulo 1, a introdução, indica as motivações para o estudo, o problema e respetivas questões e ainda o seu enquadramento e pertinência. O capítulo 2 apresenta o quadro de referência teórico utilizado. Por sua vez, o capítulo 3 apresenta a unidade de ensino e descreve os seus pressupostos e o capítulo 4 apresenta a metodologia de investigação.

A segunda parte inclui os capítulos 5 a 11, que constituem a vertente empírica do estudo. O capítulo 5 relata o desenvolvimento da unidade de ensino, em sala de aula, nas duas turmas envolvidas. Os capítulos 6, 7, 8 e 9 apresentam o percurso de aprendizagem de quatro alunos, dois de cada turma participante. Na sequência, o capítulo 10 apresenta uma análise cruzada dos percursos dos quatro alunos. Finalmente, as conclusões do estudo são apresentadas no capítulo 11.

Capítulo 2

Raciocínio Proporcional

Neste capítulo apresento a fundamentação teórica, definida a partir da revisão da literatura, sobre os vários aspetos que envolvem a capacidade de raciocínio proporcional. Na primeira parte descrevo os aspetos gerais que envolvem esta capacidade matemática e o seu desenvolvimento. Na segunda parte refiro os aspetos que caracterizam os problemas usados neste estudo e as estratégias e dificuldades dos alunos na sua resolução. Na terceira parte descrevo a investigação realizada em Portugal. E, finalmente, na quarta parte concluo com as orientações para ensino que procuram melhorar o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

2.1. O raciocínio proporcional e o seu desenvolvimento

Após Inhelder e Piaget terem teorizado que o raciocínio proporcional é o marco distintivo do estádio formal de desenvolvimento da inteligência humana, este tornou-se o centro de intenso estudo (Tourniaire & Pulos, 1985), realizado sobretudo por investigadores da Educação Matemática e da Psicologia. Desde então, vários contributos têm dado a conhecer como é que os alunos raciocinam num conjunto variado de tarefas, assim como é que os fatores desenvolvimento e/ou ensino influenciam o raciocínio proporcional (Karplus, Pulos & Stage, 1983; Lamon, 1993; Lo & Watanabe, 1997; Noelting, 1980; Post, Behr & Lesh, 1988). Ao longo das últimas décadas, sob o signo da proporcionalidade, vários estudos foram desenvolvidos com diferentes especificidades, que em certa medida, contribuíram para o conhecimento dos aspetos do raciocínio proporcional. São exemplo desses estudos, os que caracterizam os de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta e indicam as componentes que influência a sua complexidade para os alunos.

2.1.1. Aspetos que envolvem o raciocínio proporcional

O "raciocínio proporcional é difícil de definir numa ou duas frases" (Van de Walle, Karp, Bay-Williams, 2010, p. 350), mas na literatura existem distintas caracterizações dos aspetos que ele envolve, reveladores da evolução da investigação que tem vindo a ser realizada nesta área. Por exemplo, Lesh, Post e Behr (1988), no âmbito do Rational Number Project, consideram o raciocínio proporcional uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de covariação e possibilita múltiplas comparações, requerendo a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação, relacionados com inferência e predição e envolvendo pensamento qualitativo e quantitativo. Deste modo, segundo os investigadores, envolve relações holísticas entre duas expressões racionais, abrangendo a apropriação e síntese mentais dos vários termos destas expressões, a aptidão para inferir sobre a sua igualdade ou desigualdade e a habilidade de produzir com sucesso as componentes omissas, independentemente dos aspetos numéricos do problema. Complementando esta perspetiva, Post, Cramer, Harel, Kieren e Lesh (1988) referem que um indivíduo capaz de raciocinar proporcionalmente revela uma flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens aos problemas sem ser afetado pelos seus dados numéricos e contexto.

Vergnaud (1983) descreve o raciocínio proporcional como o trabalho no campo da multiplicação com dois espaços de medida e Behr, Harel, Post e Lesh (1992) indicam que as condições do raciocínio proporcional são a compreensão e a capacidade de utilização das estruturas multiplicativas. No mesmo sentido, Singer, Kohn e Resnick (1997) mencionam dois requisitos fundamentais para a existência de um verdadeiro raciocínio proporcional, a relação multiplicativa e a habilidade para pensar fluentemente dentro e entre espaços de medida.

Numa perspetiva piagetiana, Spinillo (1997) refere-se que o raciocínio proporcional diz respeito à capacidade de estabelecer relações de primeira e segunda ordem, indicando que estas estão presentes na resolução de problemas que envolvem uma proporção. As relações de primeira ordem são: (i) relações parte:parte (razão); e (ii) relações parte:todo (fração). As relações de segunda ordem envolvem comparações entre duas relações de primeira ordem. A autora salienta a importância das relações de segunda ordem como a cerne do raciocínio proporcional.

Pelo seu lado, Lamon (1995) refere que o raciocínio proporcional está associado à capacidade de analisar relações entre grandezas, o que implica compreensão da relação constante entre estas e a noção de que ambas variam em conjunto. Segundo a autora, essa compreensão pressupõe a capacidade de perceber que, na equivalência entre razões, há algo que muda na mesma proporção (quantidades absolutas) e que, ao mesmo tempo, há algo que se mantém constante. Na sua perspetiva, uma compreensão frágil da natureza multiplicativa de situações proporcionais pode estar na origem de muitas das dificuldades dos alunos. Considera que uma deficiente compreensão da natureza multiplicativa das situações proporcionais pode estar na origem de muitas das dificuldades a utilização do raciocínio proporcional implica muito mais do que o uso da expressão $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ na resolução de problemas.

Cramer et al. (1993) indicam que um individuo revela capacidade de raciocínio proporcional deve compreender a relação matemática presentem nas situações que envolvem proporcionalidade direta, o que envolve os seguintes quatro aspetos: (i) a natureza multiplicativa; (ii) a representação gráfica, isto é, a reta que passa na origem; (iii) a equivalência das razões; e (iv) a representação pela equação y = *m*x, em que *m* é o declive, a razão unitária e constante de proporcionalidade.

Para Lamon (2005) o raciocínio proporcional é a condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. Esta autora indica que o conceito de raciocínio proporcional vai muito além de mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar de forma consciente as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais. O raciocínio proporcional implica a compreensão de uma relação que é constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas grandezas variam em conjunto. Lamon (2007) considera que o raciocínio proporcional se traduz na justificação de afirmações sobre relações estruturais entre quatro quantidades num contexto que envolva, simultaneamente, covariância de quantidades e invariância de razões ou produtos, isto é, a capacidade de distinguir relações multiplicativas entre duas quantidades bem como alargar esta relação a outros pares de quantidades.

Mais recentemente, Silvestre e Ponte (2009, 2010, 2011, 2012), sistematizando ideias de diversos autores, sugerem que o raciocínio proporcional envolve três aspetos: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm (Cramer et al., 1993; Fernández, 2001; Lamon, 1995); (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Cramer et al.,1993; Lamon, 2005, 2007; Vergnaud, 1983); e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenómenos descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (Carpenter et al., 1999; Conner, Harel & Behr 1988, Cramer et al., 1993, Cramer & Post, 1993; Heller, Ahlgren, Post, Behr & Lesh, 1989; Karplus et al., 1983; Lamon, 1993, 2005, 2007; Post, Behr & Lesh, 1988; Steinthorsdottir, 2003). Ao indicar estes diferentes aspetos que envolvem o raciocínio proporcional, estes autores pretendem contribuir para uma configuração de indicadores que orientem o ensino-aprendizagem na escola, de modo a desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos.

2.1.2. O desenvolvimento do raciocínio proporcional

Na literatura são descritas basicamente duas perspetivas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional – uma indica-o como sendo tardio e outra defende que se desenvolve desde os primeiros anos da infância. De acordo com Piaget e Inhelder (1975), que consideram o raciocínio proporcional como o indicador do estádio formal das operações, as crianças até cerca dos 11 anos de idade são incapazes de raciocinar proporcionalmente. Esta ideia é corroborada por alguns estudos posteriores (Fujimura, 2001). Um exemplo desses estudos, foi desenvolvido por Noelting (1980a, 1980b), no qual apresentou um problema que envolve a concentração de sumo de laranja (por exemplo, 3 copos de concentrado de sumo de laranja e 1 copo de água versus 1 copo de sumo de laranja e 3 copos de água) a alunos com idades compreendidas entre os 6 e 16 anos, tendo verificado que os alunos com menos de 12 anos de escolaridade erram na escolha do sumo tem maior concentração de laranja. Outro estudo, desenvolvido por Falk e Wilkening (1998), indica que os alunos, com idade inferior a 13 anos, são incapazes de fazer predições probabilísticas usando proporções num problema que apresenta um conjunto bolas brancas e pretas depositadas num recipiente. Só os alunos com 13 anos utilizaram raciocínio proporcional na resolução deste problema. Os erros detetados pelos autores referem a dificuldade na identificação indiferenciada dos subconjuntos das bolas, por parte dos alunos de 6 e 7 anos, e a tomada de decisões com base na diferença entre número de bolas dos subconjuntos, pelos alunos com 9 e 10 anos.

Piaget e Inhelder (1975) reconhecem a possibilidade de as crianças resolverem problemas de proporcionalidade direta corretamente mas justificam esse sucesso como o resultado do uso de estratégias idiossincráticas e de estratégias intuitivas informais. Essas estratégias não refletem a compreensão da relação de proporcionalidade direta, ao contrário daquelas que são usadas pelos alunos, com cerca de 11 anos.

A outra perspetiva defende que as crianças, de forma intuitiva, resolvem certos problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta, sem que esta noção lhes tenha sido ensinada (Schliemann & Carraher, 2006; Spinillo, 1997). Assim, Schliemann e Carraher (1997) acreditam que a criança desenvolve uma compreensão de razão e proporção fora da escola, mas reconhecem que o raciocínio proporcional envolve conhecimentos que podem ser desenvolvidos no âmbito escolar.

Para Resnick e Singer (1993), as crianças constroem o raciocínio proporcional e o conceito de razão de modo intuitivo, com base na sua experiência diária. As autoras afirmam que "as primeiras habilidades para raciocinar não numericamente sobre relações entre quantidades físicas fornecem à criança esquemas relacionais que esta pode vir a aplicar para quantificar numericamente os materiais e, mais tarde, os números co mo objetos matemáticos" (p. 109). Estes raciocínios mantêm-se mesmo quando as crianças sabem contar corretamente em situações de comparação, acréscimo, decréscimo e relações parte:todo. Numa fase posterior, estes esquemas já quantificados suportam o raciocínio sobre relações numéricas em vez de simples relações entre quantidades materiais. As autoras referem dois tipos de relação entre quantidades físicas sobre as quais as crianças parecem ser capazes de raciocinar corretamente: (i) a relação de ajustamento – razão externa "protoquantitativa", ou seja não quantificada (externa porque envolve dois espaços de medida) – corresponde à ideia de que as "coisas caminham paralelamente porque os seus tamanhos são apropriados um para o outro"; e (ii) a relação de covariância – proporção interna qualitativa (interna porque envolve um só espaço de medida). Colocam também a hipótese da compreensão destas relações ser a base do raciocínio protoquantitativo sobre as relações numéricas (razões). A análise dos processos de estabelecimento de relações entre duas séries numéricas de material quantificado, leva-as a identificar o raciocínio que designam "protorazão", que faculta muitas vezes a resolução correta de problemas envolvendo razões sem que o objeto mental "relação numérica" tenha sido construído. Contudo, quando as crianças começam a quantificar as situações, tendem a abandonar os seus esquemas protoquantitativos e utilizam estratégias aditivas.

Na perspetiva de Resnick e Singer (1993), esta situação, repetidamente verificada pela investigação, pode resultar do lento desenvolvimento das relações multiplicativas protoquantitativas comparativamente às relações aditivas protoquantitativas. No entanto, esta situação pode também ter origem um desfasamento temporal, isto é, quando os alunos começam a quantificar os seus esquemas protoquantitativos (ajustamento e covariância) "sabem muito mais sobre as propriedades de composição aditiva dos números do que sobre as suas propriedades de composição multiplicativa (fatorização)" (p. 124). As investigadoras destacam que, desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças devem ter experiências de aprendizagem que lhes permitam o uso de estratégias de protorazão e outras experiências que lhes facilitem o conhecimento das estruturas multiplicativas.

Um estudo desenvolvido por Singer-Freeman e Goswami (2001) indica que as crianças de 3 anos de idade escolhem corretamente as proporções de piza e rebuçados que tinham sido comidos. No mesmo sentido, aponta o estudo de Sophian e Wood (1997), que revela que as crianças de 7 anos, resolveram corretamente problemas sobre proporções, que envolvem a relação de parte:todo. Por seu lado, Lamon (1993) investigou as funções cognitivas e metacognitivas dos alunos com 10 e 11 anos de idade, do 6.º ano, quando resolvem problemas sobre razões e proporções antes do seu ensino formal. Segundo a investigadora, os alunos revelam ter um conjunto alargado de conhecimento prévios que lhes permitem resolver problemas complexos. Este resultado também se aplica à resolução de problemas sobre razões e proporções, na medida que várias das crianças entrevistadas, segundo diz, "mostraram ter um reportório de estratégias poderosas ao seu dispor" (p. 150). A autora indica também a existência de uma componente metacognitiva mesmo antes dos temas razão e proporção serem abordados em contexto escolar pois, como refere, "as crianças revelaram uma marcada habilidade para monitorizar e julgar a fiabilidade do seu pensamento" (p. 143).

Alguns estudos procuram conhecer a diferença entre as duas perspetivas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional, indicadas anteriormente. Em particular, investigaram algumas características dos problemas colocados às crianças e/ou alunos nos diferentes estudos que sustenta o desenvolvimento precoce do raciocínio proporcional ou, pelo contrário, o seu desenvolvimento tardio. Uma das características dos problemas diz respeito à natureza das grandezas utilizadas nos problemas colocados aos alunos. A maioria dos estudos que indica o desenvolvimento tardio do raciocínio proporcional, apresentam problemas que envolvem grandezas discretas, nos quais os alunos revelaram dificuldades e, pelo contrário, os estudos que indicam o desenvolvimento precoce apresentam problemas que envolvem grandezas contínuas (Boyer, Levine & Huttenlocher, 2008; Mix, Huttenlocher & Levine, 2002; Spinillo & Bryant, 1999). Estes estudos vão ao encontro do que dizem Sriraman e English (2004), sobre as críticas dirigidas aos resultados de Piaget e seu seguidores, isto é, a utilização de problemas físicos complexos para conhecer o raciocínio proporcional subestima a influência da estrutura contextual dos problemas. Por exemplo, os problemas cujo contexto envolve uma mistura acrescentam mais dificuldade, para os alunos, comparativamente as problemas com outros contextos (Tourniaire & Pulos, 1985).

As duas perspetivas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional consideram o desempenho das crianças e/ou alunos na resolução de problemas específicos que envolvem uma relação de proporcionalidade direta. Deste modo, o desenvolvimento do raciocínio proporcional depende do que é considerado como evidência sobre a sua existência.

Tendo em consideração os inúmeros fenómenos do quotidiano que envolvem relações de proporcionalidade direta, é razoável supor que é através da experiência pessoal que a criança vai desenvolvendo sentido de covariação e de invariância, aquilo a que Resnik e Singer (1993) designam por “esquemas protoquantitativos”. Estes esquemas permitem fazer julgamentos proporcionais qualitativos sobre situações do quotidiano que conhecem. Quando as crianças começam a quantificar as situações, adaptam o seu conhecimento intuitivo sobre covariação e invariância. No entanto, o facto de os alunos responderem intuitivamente a alguns problemas e utilizarem estratégias aditivas na resolução de problemas de proporcionalidade não significa que raciocinem proporcionalmente. A compreensão natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade é a cerne deste aspeto do raciocínio (Behr et al., 1992; Carpenter et al., 1999; Confrey, 1995; Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1980, 1983; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b; Pulos et al., 1981; Resnick & Singer, 1993; Singh, 2000; Vergnaud, 1983). Tendo em consideração que o início do ensino formal da noção de multiplicação e divisão, ocorrer no 2.º ou 3.º ano de escolaridade, é de prever que três anos após (cerca de 10-11 de idade) o aluno detenha conhecimento sobre estruturas multiplicativas. É este conhecimento, fortemente condicionado pela experiência escolar, que permite aos alunos de 10-11 anos usar estratégias proporcionais (multiplicativas) na resolução de problemas de proporcionalidade direta. Resumindo, neste estudo assumo que o desenvolvimento do raciocínio proporcional inicia-se na infância, está dependente da experiência pessoal e escolar do aluno, sendo esta última associada ao conhecimento das estruturas multiplicativas, que os alunos devem ter aos 10-11 anos e dependente da complexidade dos problemas colocados - contexto, dados e estrutura numérica, as grandezas e as representações. Por isto, o desenvolvimento do raciocínio proporcional é lento e fortemente condicionado.

2.2. Tipos de problemas

Na literatura estão disponíveis várias classificações dos problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta, contribuindo para evidenciar os vários aspetos que interferem na complexidade dos problemas. Também estão documentados, os problemas pseudoproporcionais e é indicada a sua importância no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

2.2.1. Problemas de proporcionalidade direta

O isomorfismo de medidas na teoria dos campos conceptuais. De acordo com Post, Cramer, Harel, Kieren e Lesh (1998), a relação de proporcionalidade direta faz parte da rede de conceitos multiplicativos relacionados entre si, que Vergnaud (1983, 1988) designou por estruturas multiplicativas, tendo por base uma visão dinâmica sobre o conhecimento matemático que envolve o raciocínio, a compreensão de relações entre os dados e a resolução de problemas.

Na sua teoria dos campos conceptuais, Vergnaud (1983, 1988, 1997) advoga que para estudar e compreender a formação dos conceitos matemáticos na mente das crianças através das suas experiências escolares e não escolares, temos de considerar um conceito C como um terno de três conjuntos – $C = (S,I,R)$ – onde: (i) S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; (ii) I é o conjunto dos invariantes operacionais que podem ser usados pelos sujeitos para dar significado a essas situações (objetos, propriedades e relações); e (iii) R é o conjunto de representações simbólicas, linguísticas, gráficas e gestuais que podem ser usadas para representar invariantes, situações e procedimentos. O autor defende que um conceito não se refere meramente a um tipo de situação e que uma situação não pode ser analisada com apenas um conceito mas requer a consideração de um campo conceptual. Deste modo, na teoria dos campos conceptuais, os conceitos matemáticos não podem ser considerados de um modo isolado e a interação dos conceitos de um dado campo constitui uma importante condição facilitadora da aprendizagem. Na teoria dos campos conceptuais os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação são invariantes operacionais, os primeiros permitem compreender e selecionar a informação relevante e os segundos permitem o tratamento dessa informação. Os teoremas-em-ação podem ser vistos como as relações matemáticas que são tidas em consideração pelo aluno quando escolhe uma operação ou uma sequência de operações, na maioria das vezes não são verbalmente expressos.

Vergnaud (1983) define o campo conceptual como "um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de diferentes tipos, mas intimamente relacionados" (p. 127). Os dois principais campos conceptuais da aritmética elementar são os das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas embora Vergnaud (1983) indique a existência de outros: (i) deslocamentos e transformações espaciais; (ii) classificações de objetos e aspetos discretos; (iii) movimentos e relações entre tempo, velocidade, distância, aceleração e força; (iv) relações de parentesco; (v) medições de quantidades espaciais e físicas continuam. O campo conceptual das estruturas aditivas diz respeito ao conjunto das situações que implicam várias adições ou subtrações e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como tarefas matemáticas. Inclui, entre outros, conceitos como os de cardinal, medida, acréscimo e decréscimo, comparação quantitativa, composição binária de medidas, de número natural. Pelo seu lado, o campo conceptual das estruturas multiplicativas é o conjunto de situações que implicam uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações. Inclui, entre outros, os conceitos de múltiplo, divisor, número racional, fração, razão, proporção simples e proporção múltipla, função linear e não-linear.

Segundo Vergnaud (1983, 1988, 1997), existem três classes de estruturas multiplicativas: (i) isomorfismo de medidas; (ii) produto de medidas; e (iii) proporção múltipla. O isomorfismo de medidas consiste numa proporção direta simples (Vergnaud, 1983), e por isso, é a classe das estruturas multiplicativas que descrevo com detalhe a partir do parágrafo seguinte. O produto de medidas diz respeito a composição cartesiana de duas grandezas, para encontrar uma terceira, envolvendo problemas relativos a área, volume, superfície, produto cartesiano e outros conceitos físicos. Por seu lado, a proporção múltipla numa proporção múltipla (semelhante, do ponto de vista aritmético, ao produto de medidas), uma grandeza (M_3) é proporcional a duas grandezas diferentes (M_1 e M_2), sendo que o tempo é uma das grandezas frequentemente envolvida nesta estrutura pois intervém em muitos fenómenos como fator de proporcionalidade direta.

No isomorfismo de medida ou proporção direta simples, duas grandezas, por exemplo, pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, estão relacionadas descrevendo um grande número de situações do quotidiano ou técnicas. Vergnaud (1983), indica que esta classe das estruturas multiplicativas, encerra quatro subclasses de situações.

(i) Problemas de multiplicação como isomorfismo de medidas (ver a Figura 2.1.).

M_1	M_2
1	a
b	x

Figura 2.1 - Isomorfismo de medidas para a multiplicação (Vergnaud, 1983, p.129)

No problema "O João quer comprar 4 cadernos que estão marcados a 1,75 € cada um. Quanto terá de pagar?", em que M_1 corresponde ao número de cadernos, M_2 ao preço, a = 1,75 e b = 4, Vergnaud (1983) considera a existência de dois processos com carácter multiplicativo para a sua resolução. No primeiro processo, os alunos entendem, no produto $a \times b$, a e b como números e não como grandezas. Assim, para chegarem ao produto, multiplicam 1,75 × 4 ou 4 × 1,75. Esta composição está correta, segundo o autor, se a e b forem entendidos como números, mas não têm o mesmo significado se forem entendidos como grandezas. No segundo processo de resolução, os alunos no produto $a \times b$, entendem a e b como grandezas, o que o autor indica ser o processo mais frequentemente usado pelos alunos mais novos, correspondendo por sua vez a dois procedimentos diferentes: (i) operador escalar; e (ii) operador funcional. Os alunos que usam o operador escalar, aplicam $\times b$ (ver a Figura 2.2) dentro do mesmo espaço de medidas (a x b = x). O operador escalar (b) por se tratar de uma razão entre valores da mesma grandeza não o possui dimensão.

$$\times b \quad \begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a \\ b & x \end{array} \quad \times b$$

Figura 2.2. - Operador escalar (Vergnaud, 1983, p.130)

Os alunos que usam ao operador funcional quando aplicam ×a (ver a Figura 2.3.) entre diferentes espaços de medida ($b \times a = x$). O coeficiente da função linear (a) entre M_1 e M_2 tem dimensão que é o quociente duas dimensões anteriores.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ 1 & \xrightarrow{\times a} & a \\ b & \xrightarrow{\times a} & x \end{array}$$

Figura 2.3. - Operador funcional (Vergnaud, 1983, p.130)

Para resolver este tipo de problemas, Vergnaud (1983) considera o procedimento aditivo $a + a + a + \ldots$ (b vezes) salientado que, não se trata de um procedimento multiplicativo. Refere também que o procedimento $b + b + b + \ldots$ (a vezes) é pouco utilizado.

(ii) <u>Problemas de divisão do tipo 1 como isomorfismo de medidas</u>. De acordo com Vergnaud (1983), são problemas cujo objetivo é determinar o valor unitário *f (1)*, isto é, são problemas da divisão como partilha equitativa (ver Figura 2.4.)

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & x = f(1) \\ a & b = f(a) \end{array}$$

Figura 2.4. - Problemas de divisão do tipo 1 (Vergnaud, 1983, p.131)

Como exemplo, o autor apresenta o problema, "O Carlos quer partilhar igualmente os seus berlindes com a Joana e o Bruno. Tem 12 berlindes, com quantos berlindes ficará cada um*?*". Acrescenta que, se M_1 corresponde ao número de crianças, M_2 ao número de berlindes, $b = 3$, $c = 12$, o problema pode ser resolvido através da inversão do operador escalar, deste modo o valor de x é igual a $c \div b$ (ver a Figura 2.5.).

$$\begin{array}{cc|cc} & M_1 & M_2 & \\ & 1 & x & \\ \div b & & & \div b \\ & b & c & \end{array}$$

Figura 2.5. - Inversão do operador escalar (Vergnaud, 1983, p.131)

O autor refere que os alunos na resolução deste tipo de problemas usam o pelo procedimento do fator em falta, isto é, por tentativa e erro tentam encontrar o fator cujo produto por b é c. Isto acontece porque por um lado, os alunos têm dificuldade na compreensão da inversão do operador escalar. Um outro procedimento indicado pelo autor é a distribuição um a um, sem caracter multiplicativo.

(iii) <u>Problemas de divisão do tipo 2 como isomorfismo de medidas</u>. Segundo Vergnaud (1983), o objetivo deste tipo de problemas é determinar x conhecendo $f(x)$ e $f(1)$, isto é, objetivo dos problemas de divisão como medida (ver Figura 2.6.).

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ 1 & a = f(1) \\ x & b = f(x) \end{array}$$

Figura 2.6. - Problemas de divisão do tipo 2 (Vergnaud, 1983, p.132)

Como exemplo, o autor apresenta o problema "O Miguel tem 15 euros para gastar na compra de carros miniaturas para a sua coleção. Cada carro custa 3 euros quantos carros pode comprar?". Considera que, se M_1 corresponde ao número de carros, M_2 o preço em euros, $a = 3$, $c = 15$, o problema pode ser resolvido através da inversão do operador funcional, deste modo o valor de x é igual a $c \div a$ (ver a Figura 2.7.).

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ 1 & \xleftarrow{\div a} & a \\ x & \xleftarrow{\div a} & c \end{array}$$

Figura 2.7. - Inversão do operador funcional (Vergnaud, 1983, p.132)

O autor indica que este procedimento apresenta dificuldade para os alunos porque implica a inversão do operador funcional e o raciocínio em termos de quocientes inversos das grandezas ($M_2 \div M_2 = M_1$). Por isso, os alunos preferem determinar quantas vezes *a* cabe em *c* ou procedimentos aditivos, em que se adiciona *a* sucessivamente até se chagar a *c*, seguindo-se a contagem do número de vezes que adicionam *a*.

(iv) Problemas da regra de três. Vergnaud (1983) considera estes problemas como isomorfismo de medidas (ver Figura 2.8.).

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ a & b \\ c & x \end{array}$$

Figura 2.8. - Problemas da regra de três (Vergnaud, 1983, p.133)

Como exemplo, o autor apresenta o problema “O meu carro consome 6,5 litros de gasóleo aos 100 km. Quanto gasóleo irei gastar numa viagem de férias de 6580 km?”. Considera que, se M_1 corresponde à distância, M_2 à quantidade de gasóleo, $a = 100$, $b = 6{,}5$ e $c = 6580$, a resolução do problema pode envolver ou não o recurso às propriedades do coeficiente de proporcionalidade. De facto, segundo Vergnaud (1983) o problema pode ser facilmente resolvido através da razão ou fator escalar (ver a Figura 2.9.) ou da razão ou fator funcional. E refere que são poucos os alunos que usam regra de três como procedimento para a resolução do problema, pois considera não ser natural multiplicar *b* por *c* e dividir por *a*, pois os alunos pensam em *b*, *c* e *a* como grandezas, não fazendo sentido multiplicar *b* litros de gasóleo por *c* quilómetros.

$$\begin{array}{cccc|ccc} & & & M_1 & M_2 & & \\ & \div a & & 1 & f(1) & \div a & \\ \times c & & & a & b & & \times c \\ & & & c & x & & \end{array}$$

Figura 2.9. - Procedimentos de resolução para os problemas da regra de três (Vergnaud, 1983, p. 146)

Vergnaud (1983) considera ainda que os problemas apresentados para a multiplicação e divisão (ver as figuras 2.1., 2.4. e 2.6.), são casos simples de problemas da regra de três dado que neles se encontram quatro termos, sendo um deles igual a 1.

Finalmente, é de referir que Vergnaud (1983) indica que deve ser tomado em consideração que a complexidade de um problema varia bastante quanto às mudanças numéricas (números grandes, razões escalares pequenas e grandes, coeficientes constantes pequenos ou grandes, decimais, frações próprias) e às mudanças de domínio (preços, produção, consumo, velocidade, geometria, densidade).

Outras categorizações dos problemas. Lesh et al. (1988) identificaram sete tipos de problemas sobre proporções, tendo por base a estrutura:

(i) problemas de valor omisso, no quais três valores são conhecidos (incluindo um par completo) e o objetivo é encontrar a parte omissa da segunda razão (que lhe é equivalente);

(ii) problemas de comparação, nos quais são dados os quatro valores e o objetivo é avaliar qual das situações é verdadeira: $a/b < c/d$ ou $a/b = c/d$ ou $a/b > c/d$;

(iii) problemas de transformação, que podem ser de dois tipos: (a) alteração de raciocínio, no qual partindo de uma equivalência $a/b = c/d$, é alterado certa quantidade de um ou dois dos quatro valores (a, b, c ou d) e o objetivo é decidir qual a relação das relações "menor que", "maior que ", "igual a" ou "equivalente a" é agora verdadeira; e (b) transformações para obter uma igualdade; isto é, dada uma desigualdade um valor x deve ser determinado, de modo a obter uma igualdade (por exemplo, $(a+x)/b = c/d$;

(iv) problemas de valor médio, nos quais são dados dois valores e o objetivo é encontrar um terceiro, por exemplo: (a) média geométrica e na (b) média harmónica;

(v) proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações (por exemplo, se razão entre rapazes e raparigas na turma é de 15 para 12, qual é a fração de rapazes na turma?);
(vi) proporções que envolvem unidades de medida;
(vii) problemas de conversão entre representações.

Na classificação apresentada por Lesh et al. (1988) não é claro o que, para os autores, significa “semelhança estrutural”. No entanto, tendo em consideração a descrição dos problemas, parece que se referem ao contexto. Segundo Lesh et al. (1988), apenas os dois primeiros tipos de problemas são comuns nos manuais escolares e os restantes são pouco frequentes nos manuais e na investigação embora, na sua perspetival, estejam associados a fenómenos usuais no quotidiano e aos processos apresentados pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade.

Por seu lado, Cramer et al. (1993) identificaram três tipos de problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta: (i) valor omisso; (ii) comparação numérica; e (iii) qualitativo. Os problemas de valor omisso apresentam três dos quatro valores da proporção e é solicitado ao aluno que determine o valor omisso (por exemplo, “3 dólares americanos valem 2 libras. Quantas libras valem 21 dólares?” (Cramer et al., 1993, p. 157). De acordo com Lamon (1989), os problemas de comparação numérica apresentam os quatro valores numéricos da proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ e é pedido ao aluno que indique se uma das razões é maior que, menor que ou igual à outra. A autora, indica que os problemas qualitativos não disponibilizam dados numéricos mas exigem a comparação das variáveis (por exemplo, “A Mary corre mais voltas que o Greg. A Maria gasta menos tempo que o Greg. Quem é mais veloz?” (Cramer et al. 1993, p. 166).

Outra categorização apresentada por Lamon (1993a), indica que, de acordo com a sua estrutura contextual os problemas de proporcionalidade direta são de quatro tipos: (i) parte:parte:todo; (ii) conjuntos associados; (iii) grandezas bem conhecidas; e (iv) ampliação ou redução. Nos problemas parte:parte:todo, um subconjunto é comparado com o seu complementar ou com o seu todo (por exemplo: Numa turma os grupos de trabalho são constituídos por 5 alunos e cada grupo tem 3 raparigas. Se a turma tem 25 alunos, quantas raparigas e quantos rapazes existem na turma?). Nos problemas de conjuntos associados duas grandezas são associadas através do contexto dos problemas (por exemplo: O Jim, a Ellen e o Steve compraram 3 balões e pagaram 2 euros pelos três balões. Eles decidiram regressar à loja e comprar balões para os seus amigos. Quanto é que pagaram por 24 balões?). Os problemas de grandezas bem conhecidas expressam relações ou taxas com que o aluno está familiarizado, o que na opinião da autora, pode facilitar o raciocínio proporcional ou mascarar a compreensão da relação de proporcionalidade direta (por exemplo: O Dr. Dias fez uma viagem de 156 milhas no seu automóvel e gastou 6 galões de gasolina. Com este consumo, pode viajar 561 milhas com 21 galões de gasolina?). Finalmente, os problemas de ampliação ou redução expressam uma relação entre grandezas contínuas (por exemplo, altura, comprimento, largura) e representam uma dificuldade acrescida para os alunos (por exemplo, uma imagem com 6 cm por 8 cm foi ampliada e a largura passou de 8 cm para 12 cm. Qual é a altura da imagem?).

Neste estudo, os tipos de problemas de proporcionalidade direta usados são os mais frequentes, isto é, os de valor omisso e de comparação (Karplus et al., 1983a, 1983b; Lamon, 1999; Vergnaud, 1988). Considero que os problemas de comparação podem ser numéricos ou não e podem envolver um julgamento qualitativo de acordo com o respetivo contexto.

2.2.2. Problemas pseudoproporcionais

Um dos aspetos do raciocínio proporcional diz respeito à capacidade de distinguir uma relação de proporcionalidade direta daquelas que os não são (Christou & Philippou, 2002; Modestou, Elia, & Gagatsis, 2008; Karplus, Pulos & Stage, 1983). Para isso, é fundamental que, por um lado, os alunos compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e, por outro lado, sejam confrontados com problemas que contrariem a "ilusão da linearidade" (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; Van Dooren, 2005; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2004, 2005).

Os problemas pseudoproporcionais não envolvem uma relação de proporcionalidade direta mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência (Modestou & Gagatsis, 2006; Modestou & Gagatsis, 2007; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004), estes problemas apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou situações em que não existe uma relação aditiva nem de proporcionalidade direta ou de proporcionalidade inversa.

Um aspeto dos problemas pseudoproporcionais indicado como responsável por gerar erradamente a tendência para considerar a existência de uma relação de proporcionalidade direta, é a sua sintaxe. De facto, como referem Verschaffel, Greer e De Corte (2000), se um problema 4proporcional corresponde à estrutura sintática dos problemas comuns da proporcionalidade, a tendência para evocar a proporcionalidade direta é forte. Eis alguns exemplos de problemas pseudoproporcionais:

(i) "Um pianista precisa de 5 minutos para executar uma peça musical. Quanto tempo precisam três pianistas para executar o mesmo tema com a mesma orquestra?" (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Neste problema é apresentada uma situação em que não existe uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, de facto, o número de pianistas não está relacionado com o tempo da peça musical.

(ii) "Uma empresa costuma enviar 9 trabalhadores para instalar um sistema de segurança escritório e eles demoram 30 minutos a fazer a instalação em cada sala. Hoje, a empresa só enviou 3 trabalhadores para fazer uma instalação. Quanto tempo demora a fazer a instalação numa sala?" (adaptado de Lamon, 1999). Este problema apresenta uma relação e proporcionalidade inversa, isto é, quando número de trabalhadores diminui o tempo de execução do trabalho aumenta.

(iii) "Victor e Ana correm numa pista circular. Eles correm à mesma velocidade mas a Ana começou a corrida mais tarde. Quando a Ana fez 5 voltas, o Victor fez 15 voltas. Quando a Ana tiver corrido 30 voltas, quantas voltas terá corrido o Victor? (Van Dooren et al. 2005). Este problema envolve uma relação aditiva, no entanto, é indicado como pseudoproporcional pois os alunos tendem a considerar a existência de uma relação proporcional entre o número de voltas do Victor e da Ana, nos dois momentos da corrida.

Segundo Brousseau (1997), considerar a existência de uma relação de proporcionalidade direta, quando tal não existe, é um erro reproduzível e persistente porque ele não ocorre devido à ignorância, incerteza ou acaso mas sim devido à aplicação de um conhecimento adequado em outra situação. No mesmo sentido, De Bock et al. (2002) indicam que as proporções parecem estar profundamente enraizadas no conhecimento intuitivo dos alunos pelo que são usadas de forma espontânea e inquestionável e, em certa medida, inacessível à introspeção ou reflexão.

2.3. Estratégias e dificuldades dos alunos

Neste estudo considero que a estratégia de resolução de uma tarefa matemática, usada pelos alunos, envolve um procedimento e uma representação através da qual esse procedimento é revelado. Esta secção indicada estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta, indicadas na literatura, que descrevem essencialmente procedimentos. Deste modo, uma secção dedicada exclusivamente às representações encontra-se no capítulo 3, sobre a unidade de ensino.

Há um consenso entre os investigadores (Behr et al., 1992; Inhelder, & Piaget, 1958; Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1983; Kieren, 1993; Noelting, 1980a, 1980b; Resnick & Singer, 1993; Thompson, 1994) de que o desenvolvimento do raciocínio proporcional passa do pensamento qualitativo para as estratégias de composição e destas para as estratégias que envolvem raciocínio multiplicativo. Estas estratégias são indicadas como representativas dos níveis de sofisticação do raciocínio proporcional:

(i) Na fase do pensamento qualitativo, as estratégias são informais e qualitativas, com recurso a expressões, tais como, "maior que", "menor que", "mais que", "menos que" para comparar as grandezas (por exemplo, o papá urso como mais que o bebé urso) (Behr et al., 1992; Kieren, 1993; Resnick & Singer, 1993).

(ii) Na fase em que usam a estratégia de composição os alunos usam o seu conhecimento sobre a adição e subtração para resolver os problemas de proporcionalidade, depois de identificarem a regularidade numérica dentro da razão, que utilizam para de forma aditiva determinarem o valor omisso (Steinthorsdottir, 2006).

(iii) Na fase de maior sofisticação, os alunos usam estratégias multiplicativas para resolver problemas de proporcionalidade direta (Steinthorsdottir, 2006).

É de referir que a estratégia de composição é por vezes identificada como composição/decomposição (Christou & Philippou, 2002; Hart, 1984), envolvendo raciocínio aditivo e multiplicativo.

Entre os vários estudos conduzidos pelo Rational Number Project, estão identificadas várias de estratégias para resolver problemas de proporcionalidade direta que, de certo modo, corresponde aquelas que Vergnaud (1983) apresenta como possível na sua descrição dos problemas de isomorfismo das medidas. De notar que todas as estratégias seguintes são de natureza multiplicativa.

(i) Estratégia da razão unitária. É indicada como a estratégia mais intuitiva, usada pelas crianças desde o terceiro ano e que corresponde ao cálculo da razão unitária (problemas de divisão). Se necessário, são posteriormente calculados os múltiplos da razão unitária (problemas sobre multiplicação) (Post et al., 1988; Cramer et al., 1993).

(ii) Estratégia do fator de mudança ("fator escalar", segundo Hart, 1983). É uma estratégia frequentemente equacionada em "tantas vezes como", presente no reportório de estratégias das crianças e alunos mas a sua utilização está condicionada pelos aspetos numéricos dos problemas mas presente no reportório de estratégias das crianças e alunos (Post et al., 1988; Cramer et al., 1993).

(iii) Estratégia da comparação das razões. Está associada à resolução de problemas de comparação, envolve duas divisões e posterior comparar das razões unitárias;

(iv) Estratégia do algoritmo do produto cruzado, também Estratégia do algoritmo do produto cruzado, também conhecida como "regra de três simples", que embora eficiente é um processo mecânico desprovido de significado no contexto de um problema;

(v) Estratégia da interpretação gráfica. De facto, gráficos podem ser usados para identificar razões equivalentes ou para identificar a parte omissa em problemas de proporcionalidade direta (Post, et al., 1988). No problema, apresentado pelos autores, "A Sally comprou 5 disquetes por $4,50, quanto custa uma dúzia?". A representação gráfica da situação é obtida através introdução dos par ordenado da razão conhecida e do par ordenado (0,0) corresponde à situação "não existe compra de disquetes não há custo", a extensão da reta por este dois pontos (ver a figura 2.10). A equação da reta é $y = 90x$, isto é o custo é 90 vezes o número de disquetes. 90 é simultaneamente o preço de cada disquete (razão unitária) e o declive da reta.

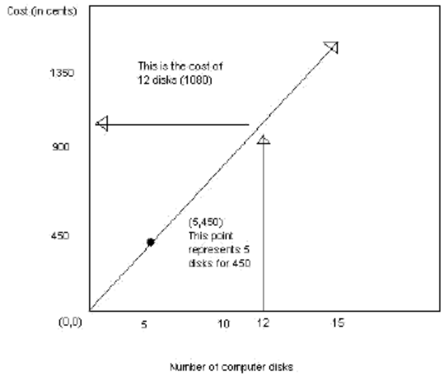


Figura 2.10. - Representação gráfica (Post, Behr & Lesh, 1988, p. 11)

Lamon (1999) refere que a estratégia do produto cruzado não envolve raciocínio proporcional embora o procedimento seja exclusivamente multiplicativo e que existem estratégias alternativas que revelam compreensão mais sofisticadas das relações entre variáveis.

Num estudo em que conjeturam sobre o modo como as crianças raciocinam e constroem esquemas multiplicativos sobre a noção de proporcionalidade direta, Koellner-Clark e Lesh (2003) referem que as cinco fases do desenvolvimento proporcional que identificaram, são semelhantes às que se podem identificar quando um aluno resolve um problema:

(i) A fase de interpretação do problema que corresponde ao primeiro contacto do aluno com o problema a sua atenção fixa-se frequentemente apenas numa parte dos dados relevantes ou e a sua estratégia é formada a partir de conceitos intuitivos. Segundo estes autores, Thompson (1994), documentou esta fase inicial na sua investigação sobre o raciocínio quantitativo dos alunos através do conceito de velocidade. Thompson identificou a primeira fase de interiorização da teoria de desenvolvimento do raciocínio proporcional de Piaget, uma vez que o aluno deu sentido ao problema através de ideias preconcebidas e incorretas.

(ii) Na fase das relações qualitativas, os alunos estabelecem relações desta natureza entre os dados do problema e revelam não ser capazes de resolver problemas quando é necessário o raciocínio quantitativo. De facto, como já referido anteriormente, segundo Resnick e Singer (1993), as crianças podem raciocinar sobre situações em que estejam envolvidos os conceitos de razão e proporção sem usar números.

(iii) A fase da relação "proporcional" aditiva, que corresponde segundo os autores à quantificação das ideias da fase anterior. As crianças são capazes de aplicar regras sobre relações, tais como comparação, aumento, decréscimo, esquemas de parte:todo em modelos sobre raciocínio proporcional. Note-se, no entanto, que esta designação desta fase é polémica pois, como sublinham diversos autores, não se trata de um verdadeiro raciocínio proporcional.

(iv) A fase do modelo de reconhecimento e replicação indica que as crianças são capazes de construir uma estratégia - organizam a informação de modo a encontrarem um modelo, como uma tabela, um gráfico ou um esquema - que lhes permita escrever a solução do problema. Por outro lado, Kaput e West (1994) definiram duas subfases que podem ser subentendidas na descrição geral. Uma delas é a "construção coordenada de uma estratégia" que corresponde às características já enunciadas para a quarta fase. A outra subfase é descrita como "construção abreviada de uma estratégia" na qual as crianças fazem uso da multiplicação e da divisão para completar o modelo da estratégia, associando-se esta subfase a um aumento do uso de processos que usam a multiplicação em vez de processos aditivos. Os estudos desenvolvidos por Hart (1988), Kaput e West (1994), Karplus et al. (1983), Lamon (1994) e Resnick e Singer (1993), sobre o raciocínio proporcional e números racionais, documentam bem esta fase.

(v) Finalmente, na fase da compreensão da relação proporcional os alunos compreendem a noção de razão e são capazes de relacionar duas ou mais grandezas. Nesta fase, os alunos revelam compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta.

Por seu lado, Lamon (1993) classifica as estratégias multiplicativas "dentro" e "entre" variáveis, distinguindo assim o raciocínio escalar (transformações "dentro" das variáveis) do raciocínio funcional (estabelece relações "entre" variáveis). Na sua opinião, a distinção destes dois tipos de relações pelos alunos é importante e envolve diferentes processos cognitivos.

Neste estudo considero que um dos aspetos do raciocínio proporcional é a compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, deste modo as estratégias que os alunos usam na resolução de problemas, são indicadoras da com-pressão, ou não, essa relação. Segundo Lamon (1997), são indicadores dessa compreensão da relação multiplicativa a compreensão dos números racionais, da divisão como medida, da divisão por partilha equitativa, das grandezas e da sua mudança e pensar em termos relativos. Deste modo, na construção do quadro de análise dos procedimentos de resolução de problemas de proporcionalidade direta (ver capítulo 4), apenas os procedimentos de natureza multiplicativa são indicadores de raciocínio proporcional. No entanto, sabendo que ao longo da sua experiência pessoal e escolar, os alunos desenvolvem sentido de covariação e invariância das variáveis, considero que os alunos são capazes de resolver problemas de proporcionalidade direta, sem usarem raciocínio proporcional, usando estratégias: (i) pré-proporcionais, que são aquelas cujos procedimentos revelam a utilização em simultâneo de relações aditivas e relações multiplicativas (por exemplo, metade, dobro e triplo), como as estratégias de composição/decomposição; e (ii) não proporcionais, que são estratégias em que os alunos utilizam procedimentos de contagem unitária e aditivos.

As dificuldades dos alunos na resolução de problemas de proporcionalidade direta, referidas na literatura, têm várias configurações. Algumas dificuldades são genéricas e podem ser identificadas na resolução de problemas em geral enquanto outras coincidem com os fatores que tornam mais complexos os problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta.

De entre as dificuldades de cunho genérico foram identificados dois tipos de erros frequentes na resolução de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta: (i) utilização parcial dos dados disponíveis; e (ii) cálculo da diferença entre os valores numéricos da razão ou da proporção para determinar o valor omisso (Inhelder & Piaget, 1958; Tournaire & Pulos, 1985). De facto, um erro frequente é a omissão de dados necessário à resolução de problemas e outro é a utilização de ralações aditivas na resolução de problemas que envolvem relações aditivas. Esta dificuldade não é exclusiva do isomorfismo de medidas mas verifica-se noutras classes de problemas (Vergnaud, 1983), como no produto de medidas.

O conjunto dos estudos em que se investiga as dificuldades dos alunos específicas dos problemas de proporcionalidade direta fez emergir o conhecimento sobre a rede de fatores, alguns indissociáveis e que refletem a complexidade que estes problemas podem ter. Na sua maioria, estes estudos apresentam um ou dois fatores que influenciam o desenvolvimento de estratégias dos alunos, pelo que apenas quando tomados em conjunto conseguimos compreender a ampla complexidade que estes problemas podem tomar. Assim, os fatores que complexificam os problemas que envolvem os problemas de proporcionalidade direta mais frequentes na literatura são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações.

O contexto dos problemas diz respeito à descrição do fenómeno descrito no problema, é indicado na literatura como “estrutura contextual”. De facto, os fenómenos descritos nos problemas podem ser muito variados, sendo que alguns são muito complexos como os que envolvem fenómenos físicos como balanças de braços (Karplus et al., 1983a). Também os problemas cujos contextos envolvem mistura apresentam dificuldade para os alunos (Gold, 1978; Noelting, 1980, Karplus et al., 1983a). Lamon (1993), utilizando a sua classificação dos problemas, verificou que os alunos utilizam estratégias mais ou menos sofisticadas em função do contexto dos problemas e verificou, tal como Karplus et al., (1983a), que as estratégias usadas pelos mesmos alunos variam de acordo com a dificuldade que o fenómeno descrito nos problemas representa para eles.

Os números utilizados nos problemas são um outro fator que influencia a complexidade dos problemas e consequentemente as dificuldades dos alunos. Por exemplo, Hart (1981) verifica que os alunos lidam melhor com número entre 1 e 30 do que números menores que a unidade e maiores que 30. Por seu lado, Bell, Fischbein e Greer (1984) indicam que trabalhar com números inteiros é mais fácil para os alunos do que números não inteiros e Noelting (1980a, 1980b) Tourniaire & Pulos, (1985) referem que as razões unitárias facilitam a resolução comparativamente a outros números racionais. Steinthonsdottir (2006, 2010) refere que a estrutura numérica influencia mais o desempenho dos alunos que a estrutura contextual e que influencia significativamente a complexidade dos problemas. Neste estudo, o autor utilizou quatro tipos de problemas contextuais (Lamon, 1993) adaptando-os de modo a tipificar as seguintes situações: (i) a relação numérica dentro da razão, a relação entre razões e a resposta envolvem números inteiros (I,I,I); (ii) a relação numérica dentro da razão é inteira, a relação entre razões é não inteira e a resposta envolve um número inteiro (I,N,I) ou a relação numérica dentro da razão é não inteira, a relação entre razões e a resposta envolvem números inteiros (N,I,I); (iii) a relação dentro da razão e entre a razão é não inteira e a resposta é um número inteiro (NNI); e (iv) a relação dentro da razão, entre razões e a resposta envolvem números não inteiros (N,N,N). O autor concluiu que as estratégias mais sofisticadas são utilizadas em problemas que os alunos claramente compreendem ou sabem explicar, sendo que os problemas mais simples são os (I,I,I) e os mais difíceis os

(N,N,N). Os alunos utilizam frequentemente estratégias multiplicativas para resolver problemas (N,I,I) e (I,N,I). Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock e Verschaffel (2010) concluíram que os desempenho dos alunos, do ensino secundário, está dependente da estrutura numérica dos problemas, sendo que as razões inteiras influenciam positivamente o desempenho dos alunos ao contrário das razões não inteiras. Nos problemas de proporcionalidade direta em que as razões são não inteiras, os alunos tendem a usar estratégias aditivas.

As grandezas são outro fator referido na literatura, com impacto na complexidade dos problemas, sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema. Horowitz (1981) refere que as grandezas discretas são facilitadoras da resolução de problemas de proporcionalidade direta comparativamente às grandezas contínuas, pois os alunos são capazes de visualizar com mais facilmente as quantidades envolvidas. Pelo contrário, Boyer, Levine e Huttenlocher (2008), num estudo desenvolvido com alunos entre os 6 e os 9 anos de idade, concluíram que na resolução de problemas de comparação, os alunos revelam mais dificuldades nos que apresentam grandezas discretas do que contínuas. Segundo os autores, esta dificuldade resulta da propensão dos alunos em estabelecer relações aditivas em grandezas discretas em vez de estabelecer relações proporcionais. Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock e Verschaffel (2010), com base num estudo desenvolvido com alunos da escola secundária, verificaram que a natureza das grandezas (discretas e contínuas) não tem influência no desempenho dos alunos em problemas de valor omisso. Estes autores sugerem que a idade e a experiência escolar tornam o desempenho dos alunos independente da natureza das grandezas (discretas e contínuas).

As grandezas podem ter também uma natureza extensiva ou intensiva. Schwartz (1979, 1981) indica que as grandezas extensivas referem-se apenas uma única entidade (por exemplo, 6 livros) enquanto as grandezas intensivas envolvem um referencial que é a razão entre duas entidades (por exemplo, 12 garrafas por caixa). As grandezas intensivas envolvem relações inerentemente proporcionais, por exemplo, a velocidade é diretamente proporcional à distância e inversamente proporcional ao tempo e podem ser conceptualizadas como uma razão (Lamon, 2007; Thompson, 1994). Howe, Nunes e Bryant (2010) referem que todas as grandezas intensivas podem ser representadas como razão, enquanto um subconjunto pode ser representado como fração, decimal e percentagem. Por isso, indicam que as grandezas intensivas representam um importante cenário de aprendizagem dos números racionais, nomeadamente sobre as representações de quantidades e razões. Na sequência de uma experiência de ensino que envolveu a utilização de grandezas intensivas, em sete escolas primárias da Escócia, concluem que os alunos tenderam a utilizar resolver com sucesso os problemas utilizando estratégias multiplicativas. Os resultados do pós-teste revelaram um desempenho superior dos alunos que trabalharam com grandezas intensivas, face aos alunos que trabalharam a relação parte:todo e o os que pertenceram aos grupos de controlo.

As representações são igualmente referenciadas como um dos fatores que influenciam o desempenho dos alunos. Vergnaud (1979, 1980) defende a importância das representações simbólicas na resolução de problemas. Kieren e Southwell (1979) indicam que a utilização de materiais manipuláveis permite que os alunos mais pequenos sejam capazes de resolver alguns problemas. Num estudo, em que a balança de braços foi usada, Juraschek e Grady (1981), verificaram que perto de 20% dos sujeitos descobriram o princípio do equilíbrio dos braços da balança só depois de utilizaram o material. Vários estudos têm documentado, a importância da representação em tabela na resolução de problemas que envolvem o campo conceptual da multiplicação, facilitando a transição entre estratégias intuitivas e as mais sofisticadas (Dole, 2008; Lamon, 1999; Lanius & Williams, 2003; Sharp & Adams, 2003; Sellke, Berh & Voelker, 1991).

2.4. A investigação realizada em Portugal

Em Portugal, a investigação sobre o raciocínio proporcional e o ensino-aprendizagem da proporcionalidade direta, é recente e diminuta. Na sua maioria, os estudos realizados respeitam a dissertações de mestrado que envolvem uma experiência de sala de aula e assumem um carácter pontual, isto é, a experiência de ensino é desenvolvida uma única vez num determinado momento do ano letivo e sob determinadas condições. Por exemplo, Silvestre (2006) procura conhecer como se desenvolve a aprendizagem da noção de proporcionalidade direta no quadro de uma unidade de ensino com ênfase em tarefas de investigação/exploração, resolução de problemas contextualizados e uso da folha de cálculo. Entre outras questões, visa perceber se os alunos reconhecem a existência ou não de proporcionalidade direta numa dada situação e identificar as estratégias de resolução de problemas e representações dos alunos. A unidade de ensino foi lecionada numa turma do 6.º ano e envolve 7 tarefas inspiradas no livro Uma Aventura no Palácio da Pena. Entre os 21 alunos da turma (11 a 13 anos), três foram escolhidos para estudos de caso. Este estudo mostra que os alunos distinguem situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que tal relação não existe. Os alunos mobilizam o conhecimento adquirido na unidade de ensino, isto é, procuram regularidades dentro e entre grandezas (ou seja, estratégias de natureza escalar e funcional) para verificar a existência de proporcionalidade. A realização das tarefas de investigação/exploração parece ter contribuído para o desenvolvimento desta sua capacidade de analisar estas regularidades. A eficiência e rapidez na identificação de regularidades parece depender do conhecimento dos alunos sobre números e relações multiplicativas. Além disso, os alunos utilizam eficientemente tabelas e usam-nas para representar os dados e interpretar problemas.

Noutro estudo, Costa (2007) procura conhecer quais os tipos de estratégias os alunos utilizam, em que situações têm tendência para utilizar estratégias mais formais e como identificam situações em que existe ou não proporcionalidade direta. O estudo foi desenvolvido numa turma do 6.º ano com 28 alunos. Para a recolha de dados foi utilizado um teste inicial, reflexões das aulas, um teste final e entrevistas realizadas a 6 alunos. Os resultados mostram que, mesmo antes do ensino formal do tema os alunos são capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias de forma a resolver tarefas envolvendo raciocínio proporcional. As estratégias apresentadas nos vários momentos foram bastante diversificadas – com destaque para a composição e as estratégias multiplicativas com procedimentos escalares ou funcionais. À medida que as aulas foram avançando, num clima de troca de ideias e partilha de experiências, os alunos foram adotando estratégias mais formais como o produto cruzado. De um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que não existe.

Por seu lado, Rocha (2007) desenvolveu um estudo com alunos do 6.ºano com o objetivo de analisar o modo como se desenvolve raciocínio proporcional e as dificuldades que os alunos manifestam em conceitos ligados à proporcionalidade direta. Neste estudo foi desenvolvida uma proposta pedagógica em que se privilegiou a resolução de problemas e se procurou confrontar os alunos com uma diversidade de situações envolvendo o raciocínio proporcional. A análise realizada indica que os alunos usam raciocínio aditivo no início do estudo e o raciocínio multiplicativo à medida que os alunos reconhecem similaridades estruturais em problemas de proporcionalidade direta. As dificuldades encontradas dizem respeito ao estabelecimento de relações de primeira ordem e à utilização de representações numéricas.

Sousa (2010) analisa o raciocínio proporcional dos alunos de um curso de formação profissional, na resolução de tarefas contextualizadas envolvendo os de conceitos proporcionalidade direta e inversa. A realização da proposta pedagógica decorreu ao longo de várias aulas das disciplinas de Matemática Aplicada e Manutenção e Reparação de Estruturas de Madeira, Metálicas e Alvenaria. Os alunos revelam preferência por tabelas para representar os dados, tendo em vista não só organizá-los mas também interpretar os problemas. Os resultados mostram também que, antes do ensino formal, os alunos são capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias de forma a resolver tarefas envolvendo raciocínio proporcional e que, de um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que não existe.

O estudo de Marques (2006) compara o tópico da proporcionalidade direta em manuais escolares de diversos países (Portugal, Espanha, Brasil e Estados Unidos da América). A análise incide sobre a natureza da abordagem e na exigência cognitiva, estrutura e contexto das tarefas. Os resultados mostram que os livros didáticos tendem a apresentar as tarefas em um nível intermediário de exigência cognitiva e com uma estrutura fechada. Os contextos não-matemáticos predominam em três dos quatro livros didáticos analisados. No entanto, há diferenças marcantes no modo como os livros abordam os aspetos conceptuais e processuais de proporção. A forma didática de tratar o assunto também varia, indo de um estilo de questionamento/resolução de problemas, a um modo explicativo/prático.

O estudo de Cabrita (1998), desenvolvido no âmbito de uma dissertação de doutoramento em duas turmas do 7.º ano de escolaridade, embora tendo foco na resolução de problemas apoiada num documento hipermédia envolveu também a noção de proporcionalidade direta. A autora refere que o grupo experimental tem um desempenho consideravelmente melhor, a longo prazo (dois meses e um ano depois), na resolução de problemas de proporcionalidade direta. Para além disso, salienta a criação de uma imagem mais positiva da Matemática pelos alunos, o que considera um aspeto fundamental para a aprendizagem da disciplina constituindo também um meio para desenvolver a autonomia, a cooperação e a reflexão dos próprios alunos.

Um outro estudo, realizado por Monteiro, Serrazina e Barros (2002), revela as estratégias dos alunos do 4.º ano na resolução de problema que envolvem a relação de proporcionalidade direta. Os alunos evidenciaram compreender a noção na resolução de problemas e não recorreram a técnicas (que não tinham sido ensinadas). As autoras constataram ainda que os alunos usaram estratégias cada vez mais sofisticadas e mostraram interesse em encontrar situações mais complicadas, sugerindo que o significado matemático das situações reais do projeto servia de motivação para avançar. Um outro estudo desenvolvido por Monteiro (2003) com futuros professores, constatou que as dificuldades com que estes se defrontaram na resolução de problemas de proporcionalidade direta podem estar relacionadas com a experiência que tiveram no ensino básico e secundário que dá ênfase ao algoritmo e não à oportunidade de usar o algoritmo em situações apropriadas. Neste estudo, segundo a autora, os futuros professores "reaprenderam" conceitos matemáticos estudados anteriormente, tiveram oportunidade de estabelecer conexões e de dar sentido a noções abstratas e ainda desenvolveram o seu saber pedagógico para ensinar proporcionalidade direta.

Os estudos realizados permitiram conhecer aspetos do raciocínio proporcional de alunos de vários níveis de ensino, isto é, no ensino básico (Cabrita, 1998; Costa, 2007; Monteiro, Serrazina & Barros, 2002; Rocha, 2007; Silvestre, 2006), no ensino profissional (Sousa, 2010) e no ensino superior (Monteiro, 2003). O estudo de Marques (2006) contribuiu para o conhecimento sobre a estrutura e contexto das tarefas presentes nos manuais escolares.

Com o presente estudo pretendo aprofundar o conhecimento sobre raciocínio proporcional, dos alunos do 6.º ano de escolaridade, quando o tópico da proporcionalidade direta é ensino de modo formal. A unidade de ensino, de cunho exploratório, considera o conhecimento sobre vários aspetos que envolvem raciocínio proporcional, o ensino-aprendizagem da proporcionalidade direta e as orientações do *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007). Este estudo tem a particularidade de envolver um grupo de trabalho colaborativo constituído por mim e por duas professoras, que desenvolveram a unidade de ensino nas suas aulas.

2.5. Ensino para o desenvolvimento do raciocínio proporcional

O desenvolvimento do raciocínio proporcional tem vindo a ser notado como um aspeto central mas problemático no ensino da Matemática (Norton, 2005). De facto, alguns aspetos relacionados com o ensino são indicados como condicionantes do desenvolvimento desta capacidade matemática. Por exemplo, Lamon (1995) verificou que raciocínio proporcional tem sido tipicamente ensinado como mais "um capítulo do manual de Matemática, no qual os símbolos são introduzidos antes de um trabalho suficientemente aprofundado que permita a sua compreensão pelos alunos" (p. 167). A autora parece referir-se à ausência de um trabalho para compreensão da relação de proporcionalidade direta, em particular, da sua natureza a sua natureza multiplicativa, antes da introdução das representações de razão (na forma de fração) e de proporção. No mesmo sentido, Yetkiner e Capraro (2009) indicam que a aprendizagem de procedimentos (algoritmo da multiplicação cruzada e divisão, também conhecida por regra de três) deve ser adiada até os alunos compreenderem os conceitos de proporção e de razão. Outras investigações indicam que os alunos usam estratégias de cálculo (como o algoritmo do produto cruzado) sem compreender o que é a relação de proporcionalidade direta (Cramer, Post e Currier, 1993; Post, Cramer, Harel, Kieran & Lesh, 1998; Spinillo, 2003).

Note-se que em Portugal e em outros países, o ensino da proporcionalidade direta privilegia o procedimento da regra de três e a representação da equação $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (a incógnita x pode ocupar qualquer uma das quatro posições na equação) (Lesh et al. 1988; Monteiro, Serrazina & Barros, 2002; Robinson, 1981).

Para Stanley, McGowan e Hull (2003), a abordagem tradicional de ensino da proporcionalidade direta está ultrapassada e deve ser substituída por outra, pois o raciocínio proporcional implica muito mais do que o uso da expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e do produto cruzado ou regra de três. Os autores criticam esta abordagem pelo seu formalismo no uso de representações e de regras cujo significado os alunos não compreendem. Por seu lado, Greer (1997) diz ser necessário ultrapassar o treino de procedimentos e a verbalização de regras sem qualquer significado. E Smith III (2002), afirma que o ensino deve centrar-se nas ideias e limitar a rápida passagem para o cálculo.

Quando se procuram soluções para ultrapassar as dificuldades dos alunos não se deve ter a ideia de que existe uma só forma de ensinar, pelo que Koellner-Clark e Lesh (2003) alertam para o facto que nenhum documento produzido pela investigação poder ser considerado como suficientemente abrangente para constituir um guia de ensino da proporcionalidade direta. Por conseguinte, os vários contributos, mais ou menos relacionados, devem ser considerados na sua globalidade. Entre os vários contributos documentados na literatura salientam-se as ideias em torno da mobilização do conhecimento informal de modo a que as dar significado à aprendizagem formal, a escolha criteriosa de problemas relevantes e o uso de múltiplas representações. Assim, o NCTM (2007) recomenda genericamente que deve ser dada oportunidade aos alunos para desenvolver o seu raciocínio proporcional na variedade de contextos pois a relação de proporcionalidade direta está presente em vários tópicos dos cincos grandes temas do programa.

A proposta de Baroody e Coslick (1998) indica três fases que devem ser consideradas no ensino das proporções: (i) conceptual, (ii) conectiva, e (iii) simbólica. A fase conceptual caracteriza-se pelo encorajamento no uso de estratégias informais numa grande variedade de problemas. Nesta fase deve ser fomentado o raciocínio qualitativo, a utilização de problemas variados e contextualizados na realidade e encorajamento os alunos a desenvolver estratégias próprias. A fase conectiva é definida como o desenvolvimento do simbolismo proporcional apoiado no simbolismo com o que os alunos já conhecem. Nesta fase os autores aconselham que a noção de proporção seja desenvolvida através de problemas, recorrendo a desenhos de figuras e esquemas que ajudem a resolver problemas, desenvolvendo deste modo uma compreensão explícita sobre proporções enfatizando as características matemáticas das situações que envolvem relações de proporcionalidade direta. Finalmente, na fase simbólica, os alunos devem ser encorajados a discutir as representações e a verificar se as suas respostas sobre as proporções estão corretas. Por seu lado, Cramer e Post (1993) destacam a importância da mobilização das estratégias intuitivas dos alunos de modo a suportar as estratégias multiplicativas durante o ensino formal da proporcionalidade direta.

Ben-Chaim et al. (1998) e Langrall e Swafford (2000), tendo por base o conhecimento sobre o tipo de problemas frequentemente usados durante o ensino da proporcionalidade direta, alertam para a escolha criteriosa dos problemas a colocar aos alunos. Moseley (2005) refere que as estratégias e os conceitos dos alunos não vêm no manual mas são construídos a partir de problemas significativos. Yetkiner e Capraro (2009) discutem a importância da resolução problemas de proporcionalidade direta, que descrevem fenómenos do mundo real pois estes permitem aos alunos a criação de imagens mentais ponderosas. Finalmente, Korth (2010) enfatiza que quando os alunos usam a capacidade de raciocínio proporcional na sua vida real, a matemática torna-se memorável e reconhecem-lhe aplicabilidade.

Vários autores têm vindo a investigar a importância das representações múltiplas no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Por exemplo, Kenney, Lindquist e Heffernan (2002) e Khoury (2002), exaltam a importância dos professores se focarem nas explicações que os alunos sobre o modo como chegam às suas respostas, quer sejam estas através de imagens, símbolos, tabelas entre outros. No seu estudo, Kenney et al. (2002) indicam que o sucesso na resolução de problemas de proporcionalidade direta, em crianças do 4.º ano, parece estar dependente do uso de imagens e tabelas. Por seu lado, Moseley (2005), Adjiage e Pluvinage (2007) e Yetkiner e Capraro (2009) argumentam sobre a importância das múltiplas representações na resolução de problemas de proporcionalidade direta e consequentemente no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Moseley (2005) reporta que quanto mais cedo os alunos tiverem experiência como múltiplas representações maior é o seu conhecimento sobre a representações e sobre quando as usar. No entanto, esta orientação poderá não ser fácil de seguir pois, num estudo desenvolvido na formação inicial de professores, Ball (1990) verificou que quase todos futuros professores usam o algoritmo do produto cruzado e apenas alguns usam representações apropriadas.

A abordagem exploratória da proporcionalidade direta, baseada na exploração de regularidades, indicada por Silvestre (2006) e Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010), pode dar continuidade ao trabalho iniciado nos primeiros anos de escolaridade. Deste modo são mobilizando alguns tópicos matemáticos em que esta relação está presente, explorando a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, ampliando as experiências dos alunos nos diferentes tipos de problemas e diferentes representações. Assim, o trabalho com regularidades e relações representa uma orientação para desenvolver os diferentes aspetos do raciocínio proporcional, em particular o sentido de covariação e de invariância, ao mesmo tempo que contribui para o desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos.

Não menos importante que as orientações referidas anteriormente, para desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos, é o conhecimento aprofundamento dos professores sobre os aspetos que envolvem esta capacidade e como a desenvolver, sobre os tipos de problemas de proporcionalidade direta e sobre as estratégias e dificuldade dos alunos (Lamon, 1999; Spinillo, 1997). Em particular, precisam de compreender as diferenças entre as estratégias aditivas e multiplicativas e que significam em termos de desenvolvimento do raciocínio proporcional (Sowder et al. 1998).

No presente estudo, com base na indicação de Ben-Chaim et al. (1998), que refere que os alunos devem ser encorajados a desenvolver o seu próprio conhecimento conceptual e dos procedimentos quando resolvem problemas, a construção da unidade da unidade de ensino e seu desenvolvimento, procura desenvolver nos alunos a compreensão de que a relação de proporcionalidade direta tem uma natureza multiplicativa. Deste modo, os alunos podem melhorar a sua capacidade de distinguir esta relação de outras que não o são e desenvolver as estratégias multiplicativas com compreensão, mobilizando o seu conhecimento intuitivo que envolve os procedimentos aditivos e multiplicativos (dobro, triplo e metade). Um desenvolvimento, sem criar um fosso entre as estratégias intuitivas e as estratégias multiplicativas, criando uma continuidade entre o que os alunos já sabem e que é esperado que aprendam. Se os alunos tiverem a oportunidade de comparar as estratégias de resolução de problemas, as suas próprias e a duas seus colegas, no âmbito da discussão das tarefas, podem ajudar à reflexão sobre a sofisticação das estratégias. É pois necessário tempo para que os alunos desenvolvem o seu raciocínio multiplicativo antes de se introduzir formalmente algoritmos (Van De Walle, 2007). Tal como defendem Ben-Chaim et al. (1998) os alunos devem ser encorajados a desenvolver o seu raciocínio proporcional estabelecendo conexões com a sua vida. Os alunos devem ter a oportunidade de desenvolver o raciocínio.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Neste capítulo apresento a unidade de ensino, sobre a noção de proporcionalidade direta, que serve de base a este estudo e que procura desenvolver os aspetos que envolvem a capacidade de raciocínio proporcional nos alunos do 6.º ano de escolaridade. Na primeira parte apresento uma discussão sobre unidades de ensino. Na segunda parte descrevo os princípios orientadores da unidade de ensino que construí. E finalmente, na terceira parte apresento a planificação da unidade de ensino da proporcionalidade direta.

3.1. Unidades de ensino

Ensinar matemática é uma tarefa cada vez mais complexa que exige ao professor o conhecimento aprofundado do currículo e a capacidade de se adaptar à constante mudança que caracteriza a sociedade do conhecimento. Isto acontece pois, por um lado, o professor é, em última instância, o gestor do currículo e, por outro lado, a qualidade das aprendizagens dos alunos, em sala de aula, depende do currículo (Moyer, Cai, Laughlin & Wang, 2009). O desenvolvimento e aperfeiçoamento de unidades de ensino é uma forma de gerar artefactos úteis ao professor para introduzir novas formas de trabalho na sua prática letiva (Wittmann, 1984, 1998). Ao mesmo tempo, estas unidades permitem testar teorias sobre o modo como os alunos aprendem em condições diferentes das que usualmente lhes são proporcionadas (Sandoval, 2004).

Niss (1999) sustenta que, enquanto disciplina científica, a Didática da Matemática tem duas dimensões: (i) uma descritiva/interpretativa, relacionada com a identificação, caracterização e compreensão dos fenómenos e processos relacionados com o ensino-aprendizagem, em todos os níveis de ensino; e (ii) outra normativa, relacionada com a construção do currículo, abordagens de ensino, sequências de instrução, ambientes de aprendizagem e materiais para o ensino-aprendizagem. No âmbito desta segunda dimensão, tem-se vindo a investigar o pensamento matemático dos alunos tendo por base a conceção (*design*) de objetos didáticos para o ensino da Matemática.

Wittmann (1984, 1998) diz que a Educação Matemática tem como cerne a construção de artefactos e a investigação dos seus efeitos em diferentes ecologias educativas. Estes artefactos incluem unidades de ensino, conjuntos coerentes de unidades de ensino e o próprio currículo. Jones, Langrall, Thornton e Nisbet (2002) apontam o paralelo entre a abordagem de Wittmann (1984, 1998), o modelo de investigação desenvolvido pela Educação Matemática Realista, apresentado por Gravemeijer (1998), e as experiências de ensino desenvolvidas nos Estados Unidos da América e descritas por Cobb (1999) e Steffe e Thompson (2000). Existe também um paralelo entre estas investigações e as numerosas experiências de ensino que se têm vindo a desenvolver em Portugal (Branco, 2008; Pinto, 2011; Silvestre, 2006). Estes estudos procuram construir sequências de ensino articuladas com o conhecimento informal e as representações matemáticas dos alunos, que, através de um processo de reiteração e modificação, possam ser aperfeiçoadas, levando-os a desenvolver um conhecimento progressivamente mais formal. Importa referir que uma unidade de ensino não é um mero conjunto de tarefas nem uma listagem de tópicos e subtópicos do programa. Na verdade, uma unidade de ensino tem por base uma teoria sobre o modo como os alunos aprendem, ou seja, uma conjetura de ensino-aprendizagem, sendo constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente e apelando ao uso de diversos recursos didáticos. Esta conjetura de ensino-aprendizagem, na perspetiva de Sandoval (2004), tem uma natureza eminentemente teórica, sendo baseada no currículo e no conhecimento matemático a ensinar. Além disso, é refinada ao longo do tempo, através de investigação empírica. A construção de uma unidade de ensino procura estabelecer um caminho de aprendizagem, orientado por esta conjetura. Este é um trabalho complexo que obriga a mobilizar conhecimento sobre o tópico e sobre as orientações curriculares, bem como a tomar decisões relativas ao que os alunos têm de aprender e como os ensinar. A este respeito, Lobato, Ellis, Charles e Zbiek, (2010) indicam que:

> Para planificar uma boa experiência de aprendizagem, é preciso compreender os diferentes modelos e representações (...), um conhecimento sobre os materiais curriculares e o modo de construir lições. Para escolher

> e desenvolver as tarefas de aprendizagem é preciso saber o que enfatizar e justificar porque é que essas ideias são matematicamente importantes. (p. vii)

Embora subestimada com frequência, a planificação é uma ação de particular importância do ensino da Matemática pois é neste momento que se tomam decisões que marcam as oportunidades de aprendizagem dos alunos (Stein & Smith, 2010a; Stigler & Hiebert, 1999). A importância da planificação na melhoria das aprendizagens dos alunos tem vindo a ser reconhecida (Jones & Smith, 1997; Sekiguchi, 2006) o que, por um lado, alerta para as fragilidades das práticas de planificação linear, que envolvem somente a seleção de tópicos do programa e escolha de tarefas (Gellerd, 2004) e, por outro lado, dá sugestões para aperfeiçoar as práticas de planificação, que passam pela indicação do modo como se vai ensinar e aprender (Sandoval, 2004), escolha criteriosa de materiais didáticos, previsão do envolvimento dos alunos no desenvolvimento das tarefas e orquestração do desenvolvimento da aula (Gellerd, 2004; Hiebert, Morris & Glass, 2003; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008; Swan, 2005, 2006).

Gellerd (2004) defende que os materiais curriculares ou didáticos têm um papel muito importante no envolvimento dos alunos na atividade matemática, considerando-os como artefactos mediadores entre os objetivos de ensino e as aprendizagens dos alunos. Os recursos didáticos são essencialmente de dois tipos, não estruturados e estruturados. Os recursos didáticos não estruturados são os objetos de uso diário e os estruturados são os manuais, os materiais manipuláveis, as tecnologias (TIC) e as tarefas matemáticas construídas com certos objetivos específicos (por exemplo, uma unidade de ensino). Deve notar-se, como refere Ball (1992), que os materiais didáticos só por si não promovem aprendizagem significativa nos alunos, pelo contrário, o seu potencial depende do conhecimento prévio destes e está associado ao modo como os materiais didáticos são usados, em particular na sala de aula (Moyer, 2001; Stein & Smith, 2010b). Boaler e Staples (2008) e Gellerd (2004), defendem que os educadores matemáticos devem construir e desenvolver materiais didáticos que posteriormente os professores possam adaptar e ser usados nas suas turmas, constituindo uma via de aproximar e investigação e a prática.

3.2. Princípios orientadores da unidade de ensino

Neste trabalho, construí uma unidade de ensino, que procura desenvolver a capacidade de raciocínio proporcional nos alunos, um dos principais objetivos do ensino da Matemática elementar (Lesh, Post & Behr, 1988). O quadro teórico sobre a noção de proporcionalidade direta e o raciocínio proporcional, que suporta a unidade de ensino é apresentado no capítulo 2. Neste subcapítulo apresento ainda outras orientações seguidas na construção desta unidade de ensino.

3.2.1. Documentos de orientação curricular

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) apresenta algumas novidades comparativamente ao programa anterior, sendo a mais visível a que diz respeito à importância das capacidades transversais. Outra novidade é a introdução do tema Álgebra no 2.º ciclo, onde se encontra naturalmente o tópico da proporcionalidade direta. Este programa integra conhecimento recente sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, procurando fazer a articulação dos três ciclos do ensino básico.

A unidade de ensino assume as finalidades e objetivos gerais do PMEB (ME, 2007) e, em particular, os objetivos gerais de aprendizagem da Álgebra para o 2.º ciclo, que indicam que os alunos devem: (i) ser capazes de explorar, investigar regularidades; (ii) compreender a noção de proporcionalidade direta e usar raciocínio proporcional; e (iii) ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas. A proporcionalidade direta é uma das noções a ser trabalhada no tópico "Relações e regularidade" (ME, 2007), pelo que a aprendizagem da noção de proporcionalidade direta deve ser apoiada pelo trabalho com relações e regularidades. Os objetivos específicos indicam que os alunos devem: (i) compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade; (ii) utilizar as proporções para modelar situações e fazer previsões; e (iii) resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta. As notas anexas aos objetivos específicos indicam que os alunos também devem: (i) distinguir situações em que não existe proporcionalidade de situações em que existe, solicitando, neste caso, a constante de proporcionalidade; (ii) usar situações que envolvam percentagens e escalas e a análise de tabelas e gráficos; e (iii) verificar a propriedade fundamental das proporções. A aprendizagem da noção de proporcionalidade direta apoiada pelo trabalho com relações e regularidades é uma perspetiva inovadora e vem alterar o ensino da proporcionalidade direta que tem sido apoiada, pela representação da razão na forma de fração e na utilização de regra de três seguidas pela generalidade dos manuais escolares.

O ensino da proporcionalidade direta, tal como é sugerido na articulação entre ciclos pelo PMEB (2007), deve dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos iniciado no 1.º ciclo, uma vez que os alunos já iniciaram o estudo das estruturas multiplicativas e dos números racionais, que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade direta. No 2.º ciclo, este assunto é aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção. De salientar que os alunos já trabalharam, no 1.º ciclo com situações que envolvem uma relações de proporcionalidade direta, embora esta noção só seja trabalhada formalmente no 2.º ciclo.

A unidade de ensino inspira-se, também, nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) que referem que a proporcionalidade direta é um tema integrador na disciplina de Matemática para os anos de escolaridade que correspondem em Portugal, do 6.º ao 8.º ano. Assim, é tido em consideração que a sua aprendizagem se se desenvolve através do trabalho com as noções de razão e proporção, percentagem, semelhança, equações lineares, declive, frequência relativa e probabilidades. Além disso, o tema proporcionalidade direta estabelece ligações entre a Matemática e outros domínios da ciência e da arte. Por seu lado, o raciocínio proporcional é tido como a capacidade em reconhecer quantidades que são proporcionalmente relacionadas e usar números, tabelas, gráficos e equações para pensar sobre as quantidades e suas relações. É também sugerido que os alunos aprendam a utilizar flexivelmente diferentes estratégias (como razão unitária, fator escalar e fator funcional) e diferentes representações (como diagramas, descrições verbais e números) para dar sentido à relação multiplicativa. Indo ao encontro de propostas de vários educadores matemáticos (McGregor & Stacey, 1999, Schwartz & Whitin, 2000) que sugerem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, o NCTM (2007) advoga que todos os alunos devem aprender Álgebra. Assim, procura sensibilizar os educadores matemáticos e gestores do currículo para o desenvolvimento de uma ação coerente para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, em particular, no ensino da proporcionalidade direta, em diferentes níveis, de modo a assegurar a contínua aprendizagem dos alunos.

3.2.2. A Álgebra nos primeiros anos de escolaridade

O raciocínio algébrico é uma ideia matemática poderosa a que as crianças devem ter acesso (Perry & Dokett, 2002). Não se trata de ensinar Álgebra "elementar" no sentido da manipulação simbólica, mas sim desenvolver nos alunos uma forma de pensar (Vance, 1989).

O ensino da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade é uma orientação ainda recente, que procura proporcionar desde cedo aos alunos uma experiência escolar que os prepare para a aprendizagem formal da Álgebra (NCTM, 2007). Esta ideia tem a sua origem nos Estados Unidos da América (Kaput, 1999) onde a Álgebra formal é ensinada tardiamente mas tem vindo a ser disseminada noutros países como a Rússia, Singapura e Coreia do Sul onde a Álgebra formal é ensinada mais cedo (Cai et al., 2005). Assim, os educadores matemáticos, os responsáveis pelo desenvolvimento do currículo e os *policy makers* têm vindo a debruçar-se sobre o que deverá ser a experiência algébrica dos alunos nos primeiros anos de escolaridade (Cai & Knuth, 2005; Carpenter et al., 2003; Kaput, 1999; NCTM, 2007). De acordo com Cai e Moyer (2008), os contributos dos estudos internacionais focam-se na transição entre a Aritmética e a Álgebra ou na generalização das representações concretas e das estratégias. Os estudos com foco na transição entre a Aritmética e a Álgebra procuram operacionalizar as conexões entre estes domínios. Por exemplo, Kieran (2004) refere que o trabalho com os alunos deve centrar-se: (i) nas relações, e não apenas no cálculo e respostas numéricas; (ii) nas operações e operações inversas; (iii) na representação e resolução de problemas; (iv) no trabalho com números e letras; e (v) no significado do sinal de igual. Outro foco dos estudos está na generalização das representações e das estratégias, havendo alguns documentando que as representações visuais e os materiais manipuláveis facilitam (Burril, 1997, Clements, 1999) mas não garantem a compreensão conceptual pelos alunos (Baroody, 1989; Clements, 1999; Cobb, Yachel & Wood, 1992) pois não os levam a fazer generalizações automaticamente (Cai & Moyer, 2008). Assim, os professores devem encorajar os alunos a generalizar as suas estratégias e ajudá-los a transitar das representações visuais e concretas para as simbólicas, contrariando o uso permanente de estratégias aritméticas na resolução de problemas (Cai & Lester, 2005; Cai & Moyer, 2008; Norton & Irvin, 2007).

Para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos é necessário que as tarefas os envolvam no trabalho, nomeadamente com: (i) regularidades e relações; (ii) variáveis; (iii) representações de situações e regularidades em tabelas, gráficos, regras verbais e equações e explorar as inter-relações entre estas representações; e (iv) análise das relações funcionais para explicar como a variação de uma grandeza muda a outra grandeza (NCTM, 1989). Por seu lado, Greenes e Findell (1999), consideram que o pensamento algébrico envolve capacidade de representação, raciocínio proporcional, significado de variável, padrões e funções, e raciocínio indutivo e dedutivo.

3.2.3. As tarefas para a aula de Matemática

Na literatura encontramos várias formas para classificar as tarefas matemáticas. Por exemplo, Ponte (2005) classifica as tarefas em função do grau de desafio matemático e de estrutura. O desafio matemático está relacionado com a perceção da dificuldade de uma questão colocada ao aluno, na sala de aula ou em momentos de avaliação, e a estrutura com a natureza e precisão do enunciado. Para o autor, as tarefas rotineiras orientadas para a aquisição de conhecimentos e técnicas de cálculo não garantem o desenvolvimento das capacidades matemáticas, pelo que devem ser propostas outras tarefas como a resolução de problemas e as explorações e investigações. Segundo Ponte e Matos (1992), as investigações matemáticas, tal como a resolução de problemas, implicam pensamento complexo e exigem envolvimento e criatividade por parte dos alunos. No entanto, ao contrário dos problemas usuais, que especificam claramente o que é dado e o que é pedido, as explorações e investigações têm enunciados e objetivos com alguma indefinição e pouco estruturados. Deste modo, nestas tarefas, têm de ser os alunos a definir os objetivos, bem como a conjeturar e a testar as suas próprias conjeturas.

Deve notar-se que na comunidade matemática não existe uma definição consensual para os diferentes tipos de tarefas, tal como não existe para muitos outros conceitos. No presente trabalho, como para Ernest (1991), assume-se que uma abordagem de investigação e exploração acrescenta a formulação do problema à resolução de problemas. A partir de uma proposta inicial do professor, são os alunos que definem os seus objetivos, formulam as suas conjeturas e exploram caminhos possíveis para as validar. Estas tarefas podem constituir um ponto de partida para desenvolver novos conceitos, levando os alunos a trabalhar de forma intuitiva, estabelecendo conexões entre essa tarefa e a sua experiência.

A unidade de ensino é constituída por uma investigação e uma exploração (tarefas abertas), e problemas na linha do recomendado por vários investigadores (Cobb, Wood, & Yackel, 1991; Evan & Lappin, 1994; Schoenfeld, 1994; Stanic & Kilpatrick, 1989) e documentos curriculares (NCTM, 1980) sobre o potencial que representa ensinar Matemática através da resolução de problemas. Esta abordagem não tem o apenas propósito de resolver problemas específicos mas procura encorajar os alunos a reorganizar os seus esquemas como resultado desta atividade (Cobb et al., 1991).

3.2.4. As representações em Matemática

O papel das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico já foi referido anteriormente, no entanto, por se tratar de um aspeto que envolve as questões deste estudo e constitui um nível de análise, o assunto é retomado nesta secção. Na verdade, as representações no ensino-aprendizagem da Matemática têm vindo a ser evidenciadas por vários investigadores (Cobb et al., 1992; DiSessa et al., 1991; Goldin, 2002; Greeno & Hall, 1997; Vergnaud, 1998) e nos documentos e orientação curricular (NCTM, 2007; PMEB, 2007), que refletem a evolução da investigação.

Tal como acontece com outros conceitos, nem sempre a noção de representação é consensual entre investigadores. As representações referem-se a objetos e a ações (Goldin, 2002; Greeno & Hall, 1997; NCTM, 2007; Pape & Tchoshanov, 2001). Deste modo, as representações, enquanto objetos, podem ser: (i) internas, enquanto abstrações de ideias matemáticas ou esquemas cognitivos desenvolvidos pelos alunos através da sua experiência; (ii) externas, constituindo manifestações de conceitos matemáticos, tais como numerais, equações, tabelas, gráficos, que permitem falar e compreender os conceitos matemáticos. Representações são também as ações de expor, externamente, representações internas (Pape & Tchoshanov, 2001). As representações internas, dada a sua natureza, não podem ser mostradas mas é possível inferir sobre elas recorrendo às representações externas do aluno (Goldin, 2002). Neste estudo, tendo em consideração o seu objetivo, só a noção de representação externa é alvo de análise. Assumo que as representações externas constituem uma ferramenta para raciocinar, ajudar a compreender e representar ideias matemáticas (Greeno & Hall, 1997) e comunicar (Lesh, Post & Behr, 1987). Assim, quando o termo representação é usado refere-se à sua dimensão externa.

Existem na literatura diferentes tipos de categorização das representações externas. Por exemplo Bishop e Goffree (1986), categorizam as representações externas em: (i) símbolos matemáticos; (ii) linguagem verbal; (iii) figuras; e (iv) objetos. Segundo estes dois investigadores, cada uma destas categorias envolve um código próprio que precisa ser aprendido de modo a que as ideias matemáticas sejam compreendidas. Por seu lado, Lesh, Post e Behr (1987), categorizam as representação externas em: (i) contextuais; (ii) modelos manipuláveis; (iii) pictóricas; (iv) linguagem oral; e (v) escrita simbólica. As representações contextuais dizem respeito ao conhecimento organizado em torno de fenómenos do mundo real que servem para interpretar e resolver outro tipo de problemas. Os modelos manipuláveis ou representações concretas envolvem a utilização de barras Cuisenaire, barra de frações entre outros. As representações pictóricas envolvem imagens ou diagramas estáticos que representam modelos, por exemplo, os modelos manipuláveis podem ser internalizados como “imagens”. A linguagem oral diz respeito à utilização da linguagem comum para expressar uma ideia matemática, podendo esta envolver a terminologia especializada de um determinado domínio. Finalmente, a escrita simbólica, refere-se à escrita de expressões como, por exemplo $x+3=7$, assim como a frases na linguagem natural. Clements (2004) renova o interesse neste modelo, descrevendo diversas categorias com grande pormenor com base em dois episódios de aulas. Tendo em consideração o aumento das representações disponíveis no ensino-aprendizagem da Matemática, em grande parte devido à utilização dos recursos digitais, a variedade de representações que envolvem elementos pictóricos aumentou. Por isso, Tripathi (2008) sugere que as representações pictóricas sejam denominadas por visuais e que incluam tabelas, gráficos, imagens dinâmicas para além dos elementos indicados por Lesh, Post e Behr (1987).

O NCTM (1989) é um dos documentos que mais influenciou o uso de múltiplas representações no ensino-aprendizagem da Matemática, indicando que os alunos devem: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) desenvolver um reportório de representações matemáticas para usar flexivelmente e apropriadamente; e (iii) usar representações para modelar e interpretar. Por representações múltiplas entende-se o conjunto de representações externas sobre ideias e conceitos que fornecem a mesma informação em mais do que uma forma. O NCTM (2007) reforça a importância das representações múltiplas indicando que os alunos devem compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas pelo que devem desenvolver a capacidade de usar flexivelmente diferentes representações, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema. Por seu lado, Goldin e Shteingold (2001), defendem que a compreensão das relações existentes entre as representações de um mesmo conceito e a identificação das suas semelhanças e diferenças contribui para uma melhor compreensão desse mesmo conceito por parte dos alunos. Finalmente, é de referir que no PMEB (2007) as representações matemáticas são apresentadas como um objetivo geral de ensino.

3.2.5. As tecnologias de informação e comunicação no ensino da Matemática

As tecnologias representam um dos mais fortes impulsionadores no desenvolvimento da Matemática e do seu ensino. Segundo Goldenberg (2000), no ensino da Matemática as tecnologias vieram: (i) indicar a importância de certas ideias; (ii) tornar alguns problemas e temas mais acessíveis aos alunos; e (iii) mostrar outras maneiras para representar e processar informação matemática, sustentando outras abordagens de ensino. O uso de tecnologias na sala de aula de Matemática tem vindo a torna-se uma realidade inquestionável como resultado da globalização tecnológica. Os programas de Matemática e outros documentos de orientação curricular (NCTM, 2007) recomendam a sua utilização na sala de aula, em particular, o computador e as calculadoras. No entanto, tal como refere Goldenberg (2000), o foco não está mera utilização da tecnologia mas antes no modo como ela é usada, algo que, segundo o autor, pode ser óbvio para os professores mas nem sempre é na praça pública, sendo que as boas práticas estão dependentes do julgamento pessoal e da comunidade. De facto, o uso de tecnologia na aula de Matemática, como, por exemplo, a calculadora, não pretende substituir a capacidade de cálculo mental dos alunos nem a proficiência em cálculo com papel e lápis mas sim permitir que os alunos realizem outro de tipo de atividade matemática (Pomerantz, 1997). Assim, a utilização de tecnologias na aula de Matemática deve assumir uma ação concertada de modo a cumprir o seu papel.

Vários autores indicam as potencialidades do computador no ensino-aprendizagem da Matemática. Um deles, Papert (1991), indica a importância do computador na atividade matemática de cunho investigativo e exploratório, pois, para além de efetuar cálculos demorados e repetitivos, permite explorar conceitos ou situações, descobrir relações ou semelhanças, modelar fenómenos e testar conjeturas. Estas potencialidades estão, por exemplo, associadas à folha de cálculo (Duarte & Alves, 2001; Ponte & Canavarro, 1997). Visualmente, a folha de cálculo apresenta-se como uma matriz de linhas/colunas e permite a inserção de valores numéricos, fórmulas e texto, que podem ser sujeitos a tratamento e manipulações, através de um agregado de opções. Este recurso digital tem grande divulgação em contextos educacionais, dadas as suas potencialidades na organização e tratamento de uma ampla quantidade de dados numéricos, apresentando a informação nas formas numérica, algébrica e gráfica, e permitindo passar facilmente de uma forma para outra (Canavarro, 1997; Moreira, 1989).

Segundo Friedlander (1998), a folha de cálculo é um recurso que permite o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos pois permite investigação de padrões, escrita de expressões algébricas, generalização de conceitos e justificação de conjeturas. Por seu lado, Lewis (2001) indica que o uso da folha de cálculo fomenta: (i) o desenvolvimento de capacidades de nível superior pois o uso de fórmulas (generalização) permite verificar de imediato o que se altera quando uma das variáveis da fórmula é alterada; e (ii) o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas em particular aqueles que envolvem questões do tipo "E se…". O NCTM (2007) reforça estas ideias e sugere que os alunos entre os 3.º e 5.º anos de escolaridade devem familiarizar-se como a utilização da folha de cálculo e programas de geometria dinâmica.

As calculadoras são outro tipo de recurso didático digital e estão atualmente disponíveis em vários tamanhos e preços, em função da sua capacidade e funções disponíveis. De acordo Pomerantz (1997), as calculadoras têm grande valor pedagógico nos diferentes níveis de ensino. O autor refere serem infundadas as crenças sobre os malefícios do uso das calculadoras na sala de aula e que, pelo contrário, o seu uso tem potencialidades em todos os níveis de ensino. Refere ainda que esta introduz equidade na aprendizagem de determinados conteúdos, possibilitando uma experiência semelhante aos alunos com facilidade de aprendizagem e aos que relevam dificuldade no cálculo de algoritmos, ganhando todos ao desenvolver o sentido de número, o raciocínio matemático e a noção do valor da Matemática.

Para Campbell e Stewart (1993) e Dunham (1995) os alunos mostram um melhor desempenho na resolução de problemas quando usam a calculadora porque se concentram no processo de resolução e não nas rotinas computacionais dos algoritmos. Deste modo, concluem que a calculadora promove entusiasmo e confiança nos alunos tornando-os mais persistentes na resolução de problemas. Por seu lado, Suydam (1985) afirma que, quando a calculadora é usada no processo de ensino-aprendizagem, a capacidade de resolução de problemas melhora pois os alunos desenvolvem mais do que uma estratégia ou procedimento.

3.2.6. A minha experiência docente e como investigadora

A minha experiência docente e como investigadora influenciaram de forma vincada a unidade de ensino. A minha prática docente sempre foi guiada para a necessidade de os alunos reconhecerem a importância da Matemática no seu quotidiano e para o desenvolvimento de uma experiência em sala de aula promotora de aprendizagem significativa. No entanto, isso nem sempre é fácil de conseguir porque o ensino-aprendizagem mesmo a um nível micro, como a minha sala de aula, reflete um cenário complexo e difícil de explicar. Os meus objetivos e preocupações enquanto docente têm vindo a mudar ao longo do tempo e à medida que uns vão sendo ultrapassados e resolvidos outros vão surgindo. Em particular, recordo-me do esforço e empenho que dediquei à construção de uma planificação anual e médio prazo mais refinada que aquelas que eram usadas nas escolas onde lecionei pois senti a necessidade de ter orientações mais específicas sobre o desenvolvimento dos diferentes temas, para os dois anos do 2.º ciclo. Foi um trabalho que demorou alguns anos e ao qual se seguiu a construção de pequenas sequências de tarefas que envolviam a construção e adaptação de tarefas de modo a que os alunos atingissem os objetivos previstos. Durante este processo apercebi-me da necessidade de aprofundar o meu conhecimento sobre alguns temas e paralelamente fui conhecendo com maior detalhe as dificuldades, já referenciadas na literatura, com que os alunos se debatem na sua aprendizagem. Foi então que comecei a dar mais atenção à diversificação das tarefas que colocava aos alunos e à sua reformulação sempre que por algum motivo não foram desenvolvidas as aprendizagens previstas. Este trabalho tornou-me capaz de ensinar de um modo mais flexível procurando dar respostas às diferentes turmas, para além dos desafios que resultam da própria individualidade de cada aluno. Também fui constatando que o aspeto afetivo e/ou lúdico de uma tarefa pode influenciar a atitude dos alunos na sua realização. Neste sentido, tenho adaptado e construído pequenas histórias para contextualizar as tarefas.

Da minha experiência como docente, tenho constatado que um grande número de alunos do 5.º e 6.º anos manifestam dificuldades na realização de tarefas matemáticas. De um modo geral, penso que essas dificuldades resultam de uma experiência matemática frágil. Assim, por um lado, tenho tido alunos que vivenciaram um insucesso precoce e repetido, não tendo sido possível recuperá-los a todos. Por outro lado, tenho tido alunos que revelam dificuldades quando lhes é pedido algo mais que a realização de algoritmos. Por vezes são estes os mais difíceis de recuperar porque isso envolve uma alteração da sua conceção sobre a Matemática e a sua aprendizagem bem como do seu encarregado de educação e outros que fazem o seu acompanhamento escolar. Outra dificuldade dos alunos reside na capacidade de resolução de problemas, motivada por: (i) falta de domínio da língua materna; (ii) desconhecimento das situações contextuais que descrevem fenómenos (físicos e outros); (iii) não estabelecimento de relações com a sua experiência pessoal. A segunda dificuldade está associada a um conhecimento pobre sobre estruturas multiplicativas.

A minha experiência como investigadora orientou também a construção desta unidade de ensino, em particular o conhecimento que advém da investigação que desenvolvi na minha tese de mestrado e que apresento no capítulo seguinte como primeiro ciclo de experimentação da experiência de ensino. O conhecimento que adquiri durante a participação de alguns projetos de investigação também foi importante para o aprofundamento do meu conhecimento sobre algumas temáticas, como por exemplo, a Álgebra nos primeiros anos de escolaridade.

3.3. Planificação da unidade

A unidade de ensino que apresento nesta secção tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano, como parte daquilo a que podemos chamar a iniciação ao pensamento algébrico. Para isso, o trabalho na aula deve envolver os alunos num conjunto de tarefas que lhes permitam partir das suas conceções e experiências para a construção do saber matemático, usando um conjunto de ferramentas que sustentem a construção de conhecimentos significativos.

O PMEB (ME, 2007) assume que o raciocínio proporcional se desenvolve desde o 1.º ciclo do ensino básico. Esta abordagem centra o foco na compreensão, pelos alunos, da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, mobilizando as suas estratégias intuitivas, procurando torná-las mais sofisticadas e eficientes. Embora sejam trabalhadas as noções de razão e proporção, estas não constituem necessariamente o ponto de partida para o ensino formal da proporcionalidade direta no 6.º ano, podendo usar-se outras vias como as que valorizam a correspondência entre variáveis (explorando a sua covariação). Na linha do que o programa indica, considero que o raciocínio proporcional dos alunos envolve muito mais que eficiência na aplicação de regras para resolver problemas. Para além das orientações específicas destes documentos curriculares para o ensino da proporcionalidade direta, a unidade de ensino teve em consideração a revisão da literatura sobre este tema, apresentada anteriormente, e ainda as perspetivas sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade.

A unidade de ensino tem um cunho exploratório, procurando envolver os alunos em tarefas não rotineiras, em cuja resolução mobilizem os seus conhecimentos intuitivos. A conjetura de ensino-aprendizagem que lhe está subjacente assume que os alunos do 6.º ano desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta (de valor omisso e de comparação) e problemas pseudoproporcionais; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fração; razão como divisão).

A unidade de ensino é constituída por 5 fichas de trabalho e por dois testes (ver tabela 3.1.). Esta unidade envolve três tipos de tarefas matemáticas: investigações, explorações e problemas. A ficha de trabalho inicial apresenta aos alunos uma investigação, a segunda ficha uma exploração e as restantes três fichas são constituídas por problemas A tabela 1 apresenta o planeamento da unidade de ensino com a indicação das fichas de trabalho, da natureza das tarefas de cada ficha, do modo de trabalho e do número de blocos (de 90 minutos) previstos para cada tarefa. A tabela indica ainda os objetivos específicos de cada tarefa(s) e o material necessário para a sua realização. As tarefas das duas primeiras fichas estão contextualizadas na fábula O Coelho e a Tartaruga. As restantes tarefas colocam os personagens em contextos diversos.

A ficha 1 apresenta Coelho e a Tartaruga no cenário de uma corrida. O esquema apresenta uma pista onde estão marcados os postos de passagem indicando a distância a que os personagens se situam desde a partida e o seu tempo de passagem, sendo evidente que, tal como na fábula, a tartaruga é a primeira a passar a linha da meta. Pede-se aos alunos que investiguem o que terá acontecido durante a corrida e espera-se que investiguem as relações numéricas entre e dentro das variáveis e identifiquem regularidades numéricas da relação de proporcionalidade direta, nos dados referentes à corrida da tartaruga. Para além disso, espera-se que os alunos representem os dados em tabelas na folha de cálculo (recurso proposto na ficha de trabalho), sendo sugerido durante o trabalho que os alunos representem os dados num gráfico.

A ficha 2 envolve os alunos numa exploração, procurando que mobilizem a relação multiplicativa de proporcionalidade direta trabalhada na ficha anterior. Assim, devem escolher uma constante de proporcionalidade e apresentar o tempo gasto por um dos personagens, para realizar a corrida. A ficha 3 contém vários problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta. Espera-se que os alunos mobilizem a relação multiplicativa entre e dentro variáveis para resolver os problemas e ainda que utilizem flexivelmente as representações em tabela, razão na forma de fração e razão na forma decimal. A ficha 4 lida com a noção de percentagem e a ficha 5 com a noção de escala. Espera-se que os alunos mobilizem a relação multiplicativa entre e dentro variáveis para resolver os problemas propostos.

Com o teste diagnóstico pretende-se conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, em particular os vários aspetos considerados neste estudo, e decidir se sobre a sua exequibilidade. O teste final pretende dar a conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos após o desenvolvimento da unidade de ensino.

Quadro 3.1. – Planeamento da unidade de ensino (9 blocos)

Fichas de Trabalho e Testes	Descrição	Modo de trabalho	Tempo (bloco 90 minutos)
Teste diagnóstico	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre os aspetos que envolvem o raciocínio proporcional.	Individual	1
Ficha 1 O coelho e a tartaruga	- **Natureza da tarefa:** Investigação - **Objetivos da tarefa:** • Distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outra que não o é, investigando as relações numéricas que envolvem duas situações que apresentam o mesmo contexto. • Reconhecer a relação de covariação e invariância que envolve a relação de proporcionalidade direta, evidenciando a natureza multiplicativa. • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Representar a informação em tabelas e gráficos. - **Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	2,5
Ficha 2 O segredo da tartaruga	- **Natureza da tarefa:** Exploração - **Objetivos da tarefa:** • Distinguir as relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são. • Experimentar vários valores invariantes (constante de proporcionalida-de) e verificar que a relação de covariação se mantêm. • Explicar o significado da constante de proporcionalidade. • Compreender que o invariante (constante de proporcionalidade) pode ser representado de forma decimal ou na forma de razão (representação como fração ou com dois pontos). - **Material:** Computador (folha de cálculo do Excel)	Em grupo	1,5
Ficha 3 No país das tartarugas	- **Natureza das tarefas:** Problemas - **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso e de comparação). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 4 Maratona dos coelhos e mais problemas	- **Natureza das tarefas:** Problemas - **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de percentagem). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Ficha 5 Pista interdita a coelhos e outras histórias	- **Natureza das tarefas:** Problemas **Objetivos das tarefas:** • Utilizar a relação multiplicativa de covariação e invariância para resolver problemas (valor omisso que envolvem a noção de escala). • Utilizar diferentes representações: tabelas; proporção e razão na forma de fração; razão utilizando dois pontos e decimal. • Ler a razão e a proporção. • Continuar a desenvolver a capacidade de resolução de problemas. - **Material:** Calculadora	Em grupo	1
Teste final	- Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos durante a unidade de ensino, relacionadas com os aspetos que envolvem raciocínio proporcional.	Individual	1

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

Neste capítulo descrevo os aspetos metodológicos deste estudo. Na primeira parte fundamento as principais opções metodológicas, tendo em consideração as características e o desígnio do estudo. Na segunda parte descrevo os estudos anteriores e as suas implicações. Na terceira parte apresento o contexto do estudo e os intervenientes. E, finalmente, nas quarta e quinta partes, refiro os procedimentos de recolha e análise de dados deste estudo.

4.1. Opções metodológicas

Numa investigação, a tomada de uma opção metodológica é indissociável da natureza do objeto de estudo, em particular, do objetivo e das questões a que o estudo pretende dar resposta (Bell, 2002). Assim, tendo em consideração que se pretende conhecer como se devolve o raciocínio proporcional no quadro do desenvolvimento de uma unidade de ensino, na sala de aula, este estudo segue um paradigma metodológico de *design research*, constituindo uma experiência de ensino.

4.1.1. Design research

O paradigma metodológico de *design research* (Bereiter, 2002; DBRC, 2003; Molina, Castro & Castro, 2007; Sandoval & Bell, 2004; Wang & Hannafin, 2004; Wang & Hannafin, 2005; Woodruff & Nirula, 2005), tem vindo a ser usado na investigação em Educação, com notório incremento na última década (DBRC, 2003; Collins, Joseph & Bielaczyc, 2004; Confrey, 2006; Kelly, 2003; Sawyer, 2006). De acordo com Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), um paradigma é algo que serve de exemplo geral ou de modelo, constituindo assim um parâmetro de referência para a ciência pelo que representa uma estrutura ideal e digna de ser seguida.

O *design research* não é exclusivo da Educação, sendo usado em várias áreas do saber tais como a Engenharia, a Arquitectura (Lesh & Kelly, 2000) e em áreas associadas à Inteligência Artificial (Gero, 2000). Este paradigma metodológico está associado à classificação das ciências de Simon (1969) em: (i) ciências analíticas ou naturais, que procuram explicar os fenómenos naturais (como a Biologia); e (ii) ciências de *design* ou do artificial, que pretendem conhecer o comportamento de um artefacto, sob determinadas condições. Collins et al. (2004) e Confrey (2006) consideram a Educação uma ciência de *design* e não uma ciência analítica, pois, segundo eles, pretende-se conhecer o modo como diferentes *designs* de ensino influenciam a aprendizagem, a motivação e outras variáveis do processo de ensino-aprendizagem.

As primeiras referências ao *design research* em Educação estão associadas aos trabalhos de Brown (1992) e Collins (1992) que, com a designação de *design experiments*, desenvolveram uma abordagem metodológica para estudar as questões relacionadas com intervenções educacionais (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Na literatura, os estudos que investigam a influência de *designs* educacionais, apoiados em conhecimento proveniente da investigação, apresentam designações como *design research*, *design-based on research*, *design experiments* e *design studies*.

Segundo Kelly (2003) e Confrey (2006), o *design research* em Educação tem as suas raízes nas teorias construtivistas dos anos 80, na evolução dos fundamentos do método clínico de Piaget e nas experiências de investigação pedagógica levadas a cabo na União Soviética. Steffe e Thompson (2000) referem que a importância do *design research* reside na possibilidade de transpor o fosso entre a prática de investigação e a prática de ensino, permitindo investigar o modo como se influencia o conhecimento dos alunos. No que respeita à investigação em Educação Matemática, segundo os mesmos autores, o *design research* surge como uma alternativa capaz de dar resposta à necessidade de conhecer aspetos que envolvem o ensino e a aprendizagem.

Os estudos de *design research*, de acordo com diSessa e Cobb (2004) procuram conhecer e melhorar os processos educativos. Por seu lado, Collins et al. (2004) defendem que o *design research*, procura resolver questões que envolvem: (i) a necessidade de compreender questões teóricas relacionadas com a aprendizagem em contexto; (ii) a necessidade de desenvolver abordagens para investigar a aprendizagem, não no laboratório mas no mundo real; (iii) a necessidade de ir além de processos simplistas de medir a aprendizagem; e (iv) a necessidade de obter resultados de investigação a partir de avaliação formativa. Por seu lado, Confrey (2006) e Sawyer (2006) apontam o carácter essencialmente qualitativo deste tipo de investigação e indicam que o objetivo é analisar a aprendizagem no seu contexto, construindo e estudando de modo sistemático formas particulares de aprendizagem, estratégias e ferramentas educativas de forma sensível à natureza sistémica da aprendizagem, ensino e avaliação.

Wood e Berry (2003), dois educadores matemáticos, caracterizam os estudos de *design research* através de cinco aspetos: (i) um artefacto, objeto físico ou teórico é criado, sendo que: (ia) para o educador professor/investigador a construção e experimentação do artefacto representa, em si, um modelo de desenvolvimento profissional; e (ib) para o professor, o artefacto e o seu estudo é algo específico para os seus alunos e pode constituir, entre outros aspetos, uma ferramenta de avaliação, uma estratégia, uma orientação para o desenvolvimento de uma aula; (ii) o artefacto é testado, implementado, sujeito de reflexão e revisitado através de ciclos de iterações, constituindo deste modo um modelo dinâmico e progressivamente emergente; (iii) o artefacto é suportado por modelos e teorias para a conceção e revisão dos artefactos; (iv) a conceção de uma investigação desta natureza está profundamente configurada no ambiente contextual do quotidiano dos professores de matemática, os resultados devem ser divulgados e o artefacto pode ser utilizado em contextos semelhantes (disseminar os resultados e promover a utilização do artefacto noutros contextos; e (v) o investigador é mais que um observador participante, pois intervém ao estabelecer um relacionamento de colaboração com o professor reflexivo.

Como todas as metodologias, o *design research* apresenta pontos fortes e fragilidades. Entre as várias referências aos pontos fortes desta metodologia, aquela que reúne mais consenso é a que diz respeito à transposição do fosso entre a prática de investigação e a prática de ensino (Collins et at., 2004; DBRC, 2003; Shavelson et at., 2003; Steffe e Thompson, 2000). Por seu lado, o grupo DBRC (2003) destaca como pontos fortes: (i) a exploração de novos ambientes de aprendizagem; (ii) o desenvolvimento em contexto de teorias sobre o ensino e a aprendizagem; (iii) o aprofundar do conhecimento sobre *design research*; e (iv) o desenvolvimento da capacidade de inovação.

Também existem referências na literatura a pontos fracos do *design research.* Assim, Collins et al. (2004) indicam limitações associadas à complexidade do mundo real, em particular, à complexidade de ambientes escolares como a sala de aula, de cujo estudo resulta grande quantidade de dados, qualitativos e quantitativos. Dede (2004) também refere que um dos pontos fracos reside na grande quantidade de dados usualmente recolhidos e no esforço empregue na sua redução, sendo só cerca de 5% dos dados usado para obter resultados. Ainda tendo em conta a complexidade dos ambientes naturais, este autor apresenta como limitação o facto de muitas variáveis não serem controladas.

Tendo em consideração a variedade de contextos em que os estudos são desenvolvidos e ainda o tipo de participantes envolvidos nesses estudos, existem diversos tipos de *design research* (Cobb, Stephan, MacClain & Gravemeijer, 2001; Collins et al., 2004). No ponto seguinte apresento com detalhe um tipo de *design research*, a experiência de ensino, a opção metodológica tomada para desenvolver este estudo.

4.1.2. Experiência de ensino

É uma forma de *design research* associada à investigação de vários aspetos que envolvem o ensino e a aprendizagem da Matemática e de outras ciências (Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Thompson, 2000). Para Steffe (1983) e Steffe e Thompson (2000), uma experiência de ensino envolve uma sequência de episódios de ensino, na qual estão envolvidos um professor-investigador, um ou mais alunos e um investigador-observador. Por seu lado, Kelly e Lesh (2000) referem que o tempo de duração, o ambiente e o foco de interesse das experiências de ensino imprime grande variação neste tipo de investigação. A duração vai de umas horas até a um ano letivo, o ambiente a observar pode ser o laboratório para entrevistas, a sala de aula ou até ambientes mais vastos. Para estes autores, o foco da investigação pode ser mais amplo, indo além do desenvolvimento dos alunos e centrar-se no desenvolvimento dos professores, de ideias ou actividades de ensino. As experiências de ensino, de acordo com Confrey e Lachance (1999), permitem desenvolver uma forte conexão conceptual entre a investigação educacional e a prática de ensino e de avaliação em Matemática. De acordo com Steffe e Thompson (2000), esta metodologia tem as suas raízes na Educação Matemática e caracteriza-se globalmente por procedimentos, pelos quais o investigador constrói estratégias para conhecer a Matemática dos alunos.

Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) identificam cinco características transversais às várias modalidades de experiências de ensino desenvolvidas ao longo dos últimos anos A primeira característica diz-nos que a finalidade de uma experiência de ensino é desenvolver uma classe de teorias sobre o processo de aprendizagem e sobre os significados que são construídos para dar suporte à aprendizagem, quer seja a aprendizagem individual dos alunos, de uma turma, de um grupo de professores ou de uma escola ou grupo de escolas se vistas como uma organização.

Apontam como segunda característica a sua natureza marcadamente interventiva, que investiga as possibilidades de avanço educacional fazendo emergir novas formas de aprendizagem com o objetivo de as estudar. O *design* da experiência de ensino tem em conta a investigação anterior sobre o domínio do estudo e o investigador tem algum controlo sobre o processo de aprendizagem quando comparado com uma investigação exclusivamente naturalista. Além disso, ao tentar sustentar uma forma específica de aprendizagem, o investigador tem maior possibilidade de encontrar fatores relevantes que contribuem para a fazer emergir e conhecer as inter-relações entre esses fatores.

A terceira característica resulta das duas primeiras e diz-nos que a experiência de ensino cria condições para desenvolver teorias e colocá-las em escrutínio. Por exemplo, durante uma experiência de ensino na sala de aula, pode ser testada uma conjetura inicial sobre a interação entre as características das tarefas, considerando a forma como são desenvolvidas e a qualidade das respostas. Se esta conjetura é refutada, outras conjeturas podem ser construídas e testadas.

A interatividade deste processo de investigação é a quarta característica, pois todo ele se desenvolve em ciclos de criação e revisão. Isto obriga a dar uma atenção sistemática às evidências da aprendizagem e a focar-se nos ciclos de intervenção e revisão para desenvolver a pesquisa.

Finalmente, a quinta característica reflete as raízes pragmáticas da experiência de ensino. Deste modo, as teorias desenvolvidas durante a experiência não dizem apenas respeito aos processos específicos do domínio da aprendizagem mas envolvem também a organização do processo de instrução.

Neste estudo, pretendo conhecer como se desenvolve a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos no quadro de uma unidade de ensino, de cunho exploratório, sobre a proporcionalidade direta. A unidade de ensino foi inicialmente construída por mim enquanto investigadora, sendo as tarefas ajustadas pelo grupo de trabalho colaborativo constituído por mim e pelas duas professoras que as realizaram nas suas turmas. No desenvolvimento da unidade de ensino, nunca tomei o papel de professora titular, liderando o processo de ensino na turma, mas, nos momentos dedicados ao trabalho dos alunos e desde que solicitada por estes, apoiei os grupos no sentido de os ajudar a desbloquear situações de conflito ou dificuldade. Os alunos reconheciam-me como professora, pois conheciam-me por fazer parte do grupo de docentes da escola. A experiência de ensino foi desenvolvida na sala de aula, durante a lecionação do tópico da proporcionalidade direta. Foram escolhidos quatro alunos para se conhecer de perto o seu percurso de aprendizagem.

O início da experiência de ensino (Cobb et al., 2003; MacClain, Cobb & Gravemeijer, 2000; Steffe & Thompson, 2000) é marcado pela formulação de uma conjetura de aprendizagem, da qual fazem parte as metas de aprendizagem do estudo, a planificação das atividades de ensino e a conjetura do processo de aprendizagem no qual o investigador prevê o raciocínio dos alunos. A conjetura de ensino-aprendizagem deste estudo é apresentada com detalhe no capítulo dedicado à unidade de ensino.

A planificação da unidade de ensino teve em consideração a investigação que envolve o raciocínio proporcional, bem como as orientações curriculares dos documentos oficiais portugueses (ME-DEB, 2001; ME, 2007) e de outros documentos curriculares (NCTM, 2000). A unidade de ensino tem alguma flexibilidade porque está dependente de fenómenos emergentes numa investigação realizada no contexto escolar. Assim, tem em conta o facto das duas professoras terem diferentes experiências, crenças e valores profissionais. Tem também em conta que as duas turmas, do 6.º ano, embora da mesma escola, apresentam diferentes experiências escolares e por isso prevê a possibilidade de modificar alguns aspetos das tarefas. O trabalho do grupo colaborativo decorreu durante todo o ano letivo, de forma a encontrar um entendimento comum sobre o desenvolvimento da unidade de ensino.

4.1.3. Critérios de qualidade

Atendo à recente utilização do *design research* em Educação, a discussão em torno das questões que envolvem os seus critérios de qualidade permanece em aberto. Cobb et al. (2001) e Confrey (2006) indicam quatro critérios de qualidade que devem ser observados nestes estudos: (i) replicação; (ii) generalização; (iii) fiabilidade, e (iv) utilidade. O critério de replicação diz respeito à definição das condições ou variáveis necessárias para que o estudo possa repetir-se, isto é, a descrição do trabalho deve informar outros investigadores e/ou professores das condições necessárias que sustentam o desenvolvimento do estudo. O critério de generalização está relacionado com o critério de replicação e não com a universalidade. Assim, está relacionado com a possibilidade de investigadores e/ou professores usarem a teoria, padrões representativos, os materiais e outros aspetos que envolvem o estudo em outros contextos. O critério de generalização pode ser evocado com a informação que os professores passam a dispor para guiar a sua prática. Por seu lado, o critério de fiabilidade diz respeito à justificação das afirmações e da razoabilidade das inferências produzidas. Por último, o critério da utilidade destaca a importância das implicações dos resultados do estudo para o ensino, dando deste modo contributos relevantes para a prática do professor e para a qualidade das aprendizagens dos alunos.

4.1.4. Questões de ética

O desenvolvimento de um estudo encerra sempre questões de ética que importam salientar pois indicam aspetos de conduta correta por parte do investigador que não devem ser negligenciados. Bogdan e Biklen (1994) referem dois princípios éticos que devem nortear a ação do investigador e que se aplicam a uma experiência de ensino como a do presente estudo. O primeiro princípio é o dever de informação e consentimento dos participantes sobre os objetivos da investigação e as actividades previstas, bem como as tarefas e eventuais riscos dos participantes e o segundo é o dever de proteção dos participantes, principalmente os mais vulneráveis, contra riscos psicológicos ou sociais. Estes autores também aconselham o investigador a desenvolver uma relação de confiança com os intervenientes do estudo.

Durante a preparação e desenvolvimento deste estudo tive em consideração os princípios de ética referidos. Assim, no ano letivo que antecedeu o desenvolvimento deste estudo: (i) convidei as professoras para participar, informando-as sobre o seu objetivo e atividades previstas; (ii) solicitei as autorizações necessárias, nomeadamente à presidente do conselho executivo e ao conselho pedagógico da escola. Nesse pedido, que foi deferido, assumi o compromisso de informar e solicitar as devidas autorizações aos encarregados de educação dos alunos das turmas envolvidas porque estes são menores de idade e a manter o sigilo sobre a identidade da escola, professores e alunos.

No início do ano letivo de 2008/09, na primeira reunião entre os diretores de turma e os encarregados de educação, foi dado a conhecer o estudo, nomeadamente os seu estes foram informados do estudo e dos seus objetivos e os procedimentos realizados no ano anterior tendo em vista a sua autorização. Também lhes foi dado a conhecer aspetos do trabalho dos alunos que pretendia conhecer, tendo para isso utilizado exemplos de diálogos e estratégias de resolução de problemas recolhidos na minha tese de mestrado. Foi ainda comunicado que alguns alunos seriam selecionados como caso, para que se pudesse analisar com mais detalhe o seu trabalho, sendo sujeitos a entrevistas, sem que essa situação tivesse qualquer implicação na avaliação final realizada pelo professor. Também foi garantido que este trabalho não tinha implicações sobre o horário letivo dos alunos. E, finalmente, foi assegurado o anonimato da identidade da escola, professores e alunos não obstante as aulas e as entrevistas serem gravadas em vídeo. Nenhum encarregado de educação se opôs à realização do estudo. Depois desta reunião com os encarregados de educação, as professoras informaram os alunos sobre o estudo e foram dados esclarecimentos gerais sobre o seu desenvolvimento de forma a responder à sua curiosidade natural.

Durante o primeiro período de aulas, antes do desenvolvimento da unidade de ensino, a investigadora esteve presente em 6 aulas (90 minutos) de modo a que os alunos se familiarizassem com a sua presença e também para que os instrumentos de captação de imagem e som não fossem mais tarde objeto de distração por parte dos alunos.

Em relação à proteção dos alunos escolhidos para analisar o desenvolvimento do seu raciocínio proporcional, foi combinado com as professoras que caso se verificasse algum sintoma de “mau estar” face ao envolvimento no estudo, estes alunos seriam substituídos. Esta situação que não se registou e, pelo contrário, vários alunos abordaram as professoras querendo saber como poderiam participar nas entrevistas. Sempre que os alunos foram entrevistados, informei-os que apenas pretendia conhecer o modo como resolviam os problemas e que o seu desempenho não tinha influência na classificação final, isto é, não era um teste. Também foram questionados se queriam responder à entrevista e se sentiam confortáveis para o fazer.

No sentido de proporcionar igualdade de oportunidade a todos os alunos, procurando evitar que os não entrevistados fossem prejudicados face aos alunos entrevistados, os problemas da 1.ª e 2.ª entrevistas foram propostos pelas professoras nas aulas e Estudo Acompanhado ou como trabalho para casa.

4.2. Estudos anteriores

4.2.1. Primeiro ciclo de experimentação

Em 2006, realizei um estudo no âmbito do mestrado em Educação, na especialidade de Didática da Matemática e que envolveu o desenvolvimento de uma unidade de ensino da proporcionalidade direta. Este estudo é o primeiro ciclo de experimentação da unidade de ensino, mantendo a sua conjetura de ensino-aprendizagem salvo ligeiros mas necessários refinamentos, e com tarefas diferentes.

Objetivo. Este estudo analisou o modo como se desenvolve a aprendizagem da proporcionalidade direta nos alunos do 6.º ano no quadro de uma unidade de ensino que dá ênfase a atividades de investigação e resolução de problemas em situações contextualizadas e recorre ao uso da folha de cálculo. O seu objetivo foi saber se os alunos (a) distinguem situações de proporcionalidade direta de situações onde tal relação não existe, (b) quais os sistemas de representação que utilizam e (c) que tipo de estratégias usam na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta.

Metodologia. O estudo seguiu uma metodologia de investigação qualitativa baseada em estudos de caso. A proposta pedagógica tem por base um conjunto de tarefas inspiradas no livro *Uma Aventura no Palácio da Pena* e foi desenvolvida em 10 aulas de 90 minutos no 2.º período do ano letivo de 2004/05. A recolha de dados envolveu a realização de um diário de aula, a obtenção de cópias dos produtos escritos pelos alunos, bem como entrevistas efetuadas individualmente a três alunos, que constituíram a principal fonte de dados. O estudo foi desenvolvido numa turma do 2.º ciclo que lecionei durante dois anos, constituindo uma investigação sobre a minha própria prática profissional.

Resultados. Os resultados mostraram que, de um modo geral, os alunos distinguem situações em que existe uma relação proporcional daquelas em que tal relação não existe, e mostram-se capazes de mobilizar o conhecimento adquirido ao longo da realização da proposta pedagógica. A identificação de regularidades dentro e entre grandezas foi a estratégia usada para verificar a existência de proporcionalidade direta. Este procedimento está vinculado às tarefas de natureza investigativa/exploratória apoiadas pelo uso da folha de cálculo. Os alunos revelaram preferência por tabelas para representar os dados, tendo em vista organizá-los e também interpretar os problemas. Na resolução de problemas, dado o reconhecimento de regularidades entre e dentro das grandezas, os alunos desenvolveram estratégias multiplicativas, associadas tanto a estratégias escalares (equivalência entre razões ou fator escalar) como funcionais (razão unitária).

4.2.2. Segundo ciclo de experimentação

O estudo piloto, realizado no ano letivo de 2007/2008, foi um "ensaio" para o presente estudo tendo ajudado a transpor a conceptualização teórica da unidade de ensino para a prática de sala de aula. Este estudo piloto é considerado o segundo ciclo da experiência de ensino e o presente estudo o terceiro ciclo de experimentação. O estudo piloto pode ainda ser visto como uma forma de ultrapassar a inexistência de uma equipa de investigadores que geralmente acompanha as experiências de ensino.

Objetivos. O estudo piloto tem dois objetivos, sendo o primeiro relacionado com as tarefas da unidade de ensino e o segundo com aspetos do seu desenvolvimento na sala de aula. Assim, o primeiro objetivo é avaliar as tarefas propostas aos alunos nas fichas de trabalho, isto é: (i) perceber se o número de tarefas propostas em cada ficha está adequado ao tempo previsto para a sua realização; (ii) perceber se as tarefas de investigação e de exploração (fichas de trabalho 1 e 2), que marcam a unidade de ensino são adequadas e claras para os alunos do 6.º ano; (iii) perceber se os problemas propostos aos alunos seguem o propósito de os levar a utilizar estratégias multiplicativas, trabalhando gradualmente com números inteiros e com números decimais; e (iv) perceber se existe flexibilidade dos materiais face a alguma variável não prevista.

O segundo objetivo é avaliar as condições necessárias ao desenvolvimento da unidade de ensino tal como tinha sido pensada, nomeadamente: (i) o conhecimento que as professoras têm que ter sobre os vários aspetos do raciocínio proporcional, sobre o tipo de problemas e as estratégias dos alunos; (ii) o conhecimento que as professoras têm que ter sobre a natureza da unidade de ensino: tipo de tarefas; fases de desenvolvimento da aula; o papel do professor durante as fases de desenvolvimento da aula; e (iii) conhecer de que modo os alunos gerem o trabalho de grupo, utilizam a folha de cálculo e realizam relatórios.

Metodologia. Foram realizadas três reuniões com as professoras antes da experiência de ensino (estudo piloto), que duraram cerca de noventa minutos cada. De salientar a dificuldade em agendar estas reuniões pois nesse ano letivo houve um aumento significativo de reuniões na escola, comparativamente aos anos anteriores. Note-se que embora essas reuniões tenham sido de departamento e de grupo disciplinar não foi possível utilizar esses espaços para trabalhar assuntos de natureza pedagógica. Assim, procurei que as reuniões coincidissem com um calendário sugerido pelas professoras.

Na primeira reunião apresentei com detalhe o estudo, em particular, a minha motivação para o desenvolver, o que envolvia o estudo piloto e o estudo a desenvolver no ano letivo seguinte para além do meu papel enquanto investigadora. Fiz questão de reforçar a ideia de que o objeto do estudo envolvia os alunos e não o trabalho desenvolvido pelas professoras, tendo em conta o ambiente, na minha opinião, de grande ambiguidade e preocupação em torno da avaliação do desempenho docente e suas consequências. Na segunda reunião apresentei algumas ideias do quadro teórico nomeadamente os vários aspetos que envolvem a capacidade de raciocínio proporcional e a unidade de ensino de forma detalhada. Finalmente, na terceira reunião apresentei outras ideias do quadro teórico – tipo de problemas de proporcionalidade, aspetos que influenciam o grau de dificuldade dos problemas. Foram ainda discutidos alguns aspetos sobre a gestão da sala de aula, em particular, o trabalho em grupo.

As restantes três reuniões com as professoras decorreram durante a experiência de ensino do estudo piloto, depois do teste inicial, depois da segunda tarefa e depois da realização da quarta tarefa. Assim, na quarta reunião foram analisadas algumas estratégias usadas pelos alunos para resolver os problemas de proporcionalidade e ainda os erros comuns e foram analisadas e discutidas as duas primeiras tarefas da unidade de ensino e a sua relação. Foram também descritas as suas possíveis estratégias e dificuldades, em particular no que respeita ao uso da folha de cálculo. Na quinta reunião, discutimos aspetos das fichas de trabalho 1 e 2 e a sua influência na resolução dos problemas das fichas de trabalho 3 e 4, colocando tónica na importância das estratégias multiplicativas e na comunicação do significado dos números (por exemplo, a constante de proporcionalidade direta). Na sexta reunião, analisamos algumas dificuldades registadas ao nível da gestão do trabalho em grupo dos alunos, do uso da folha de cálculo e da elaboração de relatórios das tarefas de investigação e de exploração. Também discutimos a importância da utilização flexível de representações pelos alunos, em particular, a utilização da tabela nos diferentes problemas. Discutimos ainda a importância dos alunos saberem escolher a estratégia multiplicativa que envolve cálculos imediatos ou mais simples e analisamos, de forma breve, as tarefas 5 e 6.

Durante as aulas foi possível trocar opiniões com as professoras, nomeadamente quando os alunos estavam a trabalhar de forma autónoma. No final de cada aula fizemos um balanço sobre o desenvolvimento do trabalho, procurando perceber se o desempenho da turma nas diferentes tarefas ia ao encontro dos objetivos de aprendizagem.

Não foi possível reunir posteriormente com as professoras porque todas as tardes de quarta-feira, estiveram ocupadas com reuniões variadas. Deste modo, o teste final dos alunos foi elaborado através de um processo que envolveu troca de mensagens de correio eletrónico. Só mais tarde, após o término do ano letivo, foi realizada uma reunião de balanço do estudo piloto.

Durante as reuniões registei notas de campo sobre as opiniões das professoras e sobre as questões que me colocaram. Essas notas de campo foram posteriormente completadas com as minhas reflexões sobre as reuniões de trabalho. Acompanhei o desenvolvimento de todas as aulas da experiência de ensino do estudo piloto, tendo registado informações de factos observados sobre a atividade dos alunos. Quer os registos sobre o trabalho com as professoras quer o trabalho desenvolvido em sala de aula são essencialmente descritivos, tendo sido possível registar alguns diálogos, na sala de aula, entre os alunos e entre os alunos e as respetivas professoras.

Resultados. Tendo em consideração o primeiro objetivo do estudo piloto, a unidade de ensino apresenta potencial para desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos, tal como sugeria a conjetura de ensino-aprendizagem. De um modo geral, os alunos revelaram grande recetividade às tarefas, o que parece estar associado, em certa medida, ao facto do contexto dos problemas se inspirar numa fábula que conhecem. No entanto, ao longo da experiência de ensino (estudo piloto) foi evidente que o número de tarefas propostas nas fichas de trabalho era excessivo, exceto nas fichas 1, 2 e 6. Esta conclusão, toma em consideração não só o tempo disponível para a lecionação da proporcionalidade direta (planificação anual da escola) mas também ao ritmo lento de trabalho da globalidade dos alunos. Algumas das tarefas das fichas 3 e 4 só foram resolvidas nas aulas de Estudo Acompanhado. Também constatei que a tarefa proposta na ficha de trabalho 5, que consiste numa atividade prática, é difícil de realizar numa sala de aula que é pequena quando os alunos precisam de se levantar para a desenvolver. O entusiasmo dos alunos foi evidente mas também se registaram conflitos de gestão do espaço e materiais, sendo este um trabalho difícil para um só professor na sala de aula. Deste modo, decidi retirar a tarefa da unidade de ensino.

Verifiquei que as duas primeiras tarefas das fichas de trabalho 1 e 2 podem ser realizadas sem utilização da folha de cálculo. Com utilização da folha de cálculo organização dos dados é induzida, o que facilita a exploração de relações. Sem a folha de cálculo, é provável que os alunos dispersem os dados, pelo que as professoras teriam de lhes dar uma indicação para construírem tabelas para organizar os dados e assim explorarem com facilidade a relação multiplicativa.

No que respeita ao segundo objetivo, tornou-se notório que a abordagem exploratória da proporcionalidade direta constitui uma novidade para as professoras. Penso que as reuniões foram de extrema importância para clarificar os vários aspectos que envolvem a capacidade de raciocínio proporcional mas também o tipo de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta e, em particular, a natureza das estratégias de resolução dos alunos. A aprendizagem realizada neste estudo piloto proporcionou confiança às professoras para realizar a experiência de ensino no ano letivo seguinte. No entanto, constatei que teria de levar a cabo uma discussão em torno de alguns aspetos a melhorar no que diz respeito à comunicação na sala de aula e ao papel do professor nas diferentes fases da aula. Nos aspetos que envolvem a comunicação, é de refletir sobre a importância de compreender o modo como os alunos pensam, dando-lhes espaço para apresentarem o seu trabalho, bem como levar os alunos a pensar sobre o seu trabalho e a comunica-lo de forma clara. Este processo comunicacional permite que os alunos conheçam de forma detalhada várias estratégias usadas pelos colegas. No que respeita ao papel do professor nas diferentes fases da aula, em particular, naquelas que envolvem uma tarefa de investigação ou exploração também deve ser alvo de discussão, procurando esclarecer que estas tarefas envolvem um grau de incerteza mas também um maior número de estratégias com as quais o professor tem de saber lidar. Verificou-se uma tendência das professoras para a validação ou não do trabalho dos alunos na fase de trabalho autónomo dos alunos, provavelmente associada à inexperiência na condução das tarefas abertas, sobre a qual seria desejável refletir. Na próxima experiência de ensino pretende-se que a fase de trabalho autónomo seja regulada por um questionamento, por parte do professor, que guiará assim o trabalho dos alunos.

Alguns alunos, nas duas turmas, mostraram dificuldades em gerir o trabalho de grupo o que mostra que não estão familiarizados com esta modalidade de trabalho, quer em Matemática, quer nas restantes disciplinas. De facto, esta modalidade de trabalho na aula exige uma "aprendizagem" e não basta que na sala os alunos estejam dispostos em grupo. Durante esta "aprendizagem" têm que ser dadas indicações claras sobre o que é esperado que os elementos de um grupo façam, deste modo os alunos são levados a assumir compromissos, como por exemplo, a realização atempada das tarefas ou a melhor forma de elaborar um relatório que mostra os diferentes momentos do trabalho e o que aprenderam. Esta modalidade de trabalho na aula deve ser algo habitual para os alunos envolvidos na próxima experiência de ensino.

Também se verifiquei que a maioria dos alunos tem dificuldade em redigir um relatório sobre as tarefas de investigação e exploração, o que se deve ao facto de nunca terem feito algum, segundo as professoras.

A utilização da folha de cálculo foi menos problemática pois os alunos revelam grande apreço pela utilização do computador e estão disponíveis para explorar os programas. Esta situação pode ser explicada pelo facto de a maioria dos alunos envolvidos no estudo piloto ter computador pessoal.

Concluí que no ano letivo seguinte teria de acompanhar as turmas, tendo em consideração que são outros alunos, de modo a que estes tenham uma experiência escolar que não dificulte a experiência de ensino. Note-se que esta experiência escolar é prevista nos documentos de orientação curricular. Seria pois necessário trabalhar com as professoras do grupo colaborativo, de forma a serem propostas aos alunos tarefas de investigação e/ou exploração com a elaboração do respetivo relatório em outros temas do programa. Deveria também assegurar a realização de uma ou duas tarefas que envolvam a folha de cálculo, assegurando assim que os alunos tenham um conhecimento mínimo sobre esta ferramenta digital. E por fim, seria pertinente voltar a discutir com as professoras a melhor forma de ajudar os alunos a trabalhar em grupo.

4.3. Contexto do estudo e os intervenientes

4.3.1. A escola e as turmas envolvidas no estudo

O estudo foi desenvolvido numa escola básica do 2.º e 3.º ciclos de escolaridade, com cerca de 35 anos de existência, da periferia da cidade de Lisboa. Frequentam a escola aproximadamente 700 alunos, distribuídos por 20 turmas do 2.º ciclo e 9 turmas do 3.º ciclo, provenientes da freguesia onde a escola está instalada e de duas freguesias limítrofes. O nível socioeconómico das famílias dos alunos é bastante heterogéneo, bem como as habilitações académicas dos encarregados de educação.

O corpo docente é constituído por 87 professores, na sua maioria licenciados e distribuídos por 4 departamento curriculares. Um número de reduzido de docentes tem habilitação ao nível do bacharelato e um outro pequeno grupo tem habilitação ao nível do mestrado. A escola funciona em regime de dois turnos, exceto à quarta feita em que o período da tarde está destinado à realização de reuniões.

As turmas envolvidas neste estudo são do 6.º ano. A turma A é composta por 25 alunos e a turma B por 26 alunos, com idades entre os 11 e os 14 anos (a maioria tem 11 anos). A escolha das turmas ficou a dever-se ao facto de serem turmas das professoras do grupo colaborativo e cuja distribuição horária da disciplina de Matemática permitia à investigadora assistir às aulas. Os alunos das duas turmas apresentam um desempenho escolar global e em Matemática heterogéneo, sendo que a análise das classificações finais do 5.º ano (ano letivo anterior) e do 1.º período revelam um melhor desempenho escolar e em Matemática na turma B.

4.3.2. O grupo de trabalho colaborativo

Segundo Ponte (2008), a colaboração é um modo de trabalho particularmente indicado para lidar com problemas complexos e exigentes, que enquadra atores com conhecimentos e competências diversas num esforço comum. Uma tarefa que é muito difícil de fazer de forma isolada pode muitas vezes ser realizada com sucesso em trabalho de colaboração.

Segundo Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier e Couture (2001), o conceito de colaboração em investigação educacional começou a tomar forma a partir da ideia de fazer investigação *com* os professores e não *sobre* os professores. Estes deixam de ser um objeto de investigação ou meros executantes das prescrições do investigador e passam a ser vistos como parceiros de investigação que participam com o investigador na reflexão sobre o desenvolvimento das suas práticas. Ainda, segundo os autores, a colaboração entre professores e investigadores valoriza, entre outras coisas, o trabalho sobre a epistemologia do conhecimento profissional e reconhece o conhecimento que advém da prática do professor. Na sua perspetiva a participação de professores e investigadores num grupo colaborativo não tem a mesma finalidade – os professores procuram melhorar as suas práticas e as aprendizagens dos seus alunos enquanto os investigadores procuram construir conhecimento.

Boavida e Ponte (2002) defendem que "a utilização do termo colaboração é adequada nos casos em que os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objetivos que a todos beneficiem" (p. 45). Um exemplo de um projeto de investigação colaborativa é apresentado no estudo de Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998), com foco no trabalho do professor numa aula de investigação matemática. Neste caso, os professores e os investigadores enquanto grupo estiveram envolvidos na definição dos objetivos do estudo, no desenvolvimento de instrumentos e métodos de análise, na planificação e na calendarização das atividades a realizar, na seleção e análise preliminar dos episódios e, por fim, na discussão dos resultados e conclusões do estudo. Um outro estudo, de Boavida (2005), pretende compreender as potencialidades e os problemas da realização de um projeto de investigação colaborativa centrado na reflexão sobre as práticas das duas professoras. O grupo colaborativo foi constituído por duas professoras e a investigadora, contudo, o estudo "*no seu todo*, não é uma investigação colaborativa, embora tenha havido no percurso que permitiu levá-lo a cabo (...) uma parte muito significativa e insubstituível que o foi: o projeto que desenvolvemos" (Boavida, 2005, p. 204, itálico no original). O grupo de trabalho colaborativo constituído nesta investigação tem por base três ideias fundamentais, nomeadamente no que diz respeito à definição do objeto da investigação, à escolha dos instrumentos e processos para a recolha e análise dos dados e aos meios de divulgação dos resultados. A primeira ideia diz que o envolvimento de um indivíduo num projeto colaborativo encerra diferentes tipos de razões: um interesse comum numa inovação curricular, para lidar com uma turma difícil, para explorar um tópico novo ou avançar na compreensão de uma certa problemática, para ter a oportunidade de trabalhar com alguém com quem há relações pessoais previamente estabelecidas, ou até como estratégia para alterar as relações de poder na instituição (Boavida, 2001). A segunda ideia indica que o grupo de investigação colaborativa não supõe que todos os elementos do grupo desenvolvam os passos de uma investigação formal, nomeadamente no caso de um grupo do qual fazem parte professores e investigadores (Desgagné et al., 2001). Os primeiros entram num projeto de investigação por "questões práticas" e não por questões de investigação, no sentido formal. Este modelo identifica-se na intersecção da investigação sobre a prática e a investigação formal, que reúne professores e investigadores em torno de uma atividade reflexiva que vai assumindo diferentes formas, dependendo dos projetos. E, por último, a terceira ideia prevê a possibilidade do investigador interferir com as práticas usuais dos professores durante um trabalho em que se envolvem num diálogo democrático, como co-investigadores e co-sujeitos (Reason, 1988).

O grupo colaborativo envolvido nesta investigação é constituído por duas professoras do 2.º ciclo do ensino básico pertencentes ao quadro da escola e por mim, na qualidade investigadora, sendo que eu já tinha lecionado nesse estabelecimento de ensino. O grupo foi formado por minha iniciativa para realizar esta investigação. Conhecia uma das professoras desde o ano 2005, quando participámos do projecto *Professional Development of Teachers Researchers* (PDTR). A segunda professora só conheci no ano seguinte, em 2006, na escola. Desde então tivemos natural oportunidade para discutir alguns tópicos matemáticos e condições de gestão curricular, partilha de materiais, embora sempre de forma ocasional e informal uma vez que na escola não existe a prática de trabalho colaborativo dos professores para preparar as aulas.

É de notar que este estudo não é na sua globalidade uma investigação colaborativa. Contudo, uma parte significativa do seu desenvolvimento é assegurada pelo grupo de colaboração. As professoras disponibilizaram-se para trabalhar num grupo, vão lecionar a unidade de ensino sobre a proporcionalidade direta por mim construída com os objetivos já referidos anteriormente, alterando substancialmente o modo como lecionavam este tema.

4.3.3. Os alunos

Para conhecer de com detalhe como se desenvolve o seu raciocínio proporcional, ao longo do seu percurso de aprendizagem numa experiência de ensino, optei por acompanhar de perto quatro alunos, dois de cada uma das turmas envolvidas. Segundo Kelly e Lesh (2000), o desenvolvimento dos alunos é um dos focos das experiências de ensino. Para selecionar este alunos foram utilizados os três critérios: (i) a capacidade de comunicação, em particular a oral; (ii) o desempenho na disciplina de Matemática; e (iii) o desempenho no teste diagnóstico. Para a tomada de decisão que envolve os dois primeiros critérios em muito contribuíram as informações das professoras. Assim, foram escolhidos alunos que revelam facilidade em explicar oralmente como pensam. De acordo com as suas professoras, dois desses alunos, um de cada turma, revelam até facilidade em apresentar de forma clara as suas próprias dúvidas na sala de aula e eu esperava que esse comportamento se mantivesse nas entrevistas. Foi então constituído um grupo de potenciais alunos a seguir, com 8 alunos na turma A e 10 alunos na turma B.

No que confere ao segundo critério, para além da consulta das pautas das turmas – final do 5.º ano e 1.º período do 6.º ano - a opinião das professoras foi também fundamental. Pretendia escolher em cada turma, um aluno com um desempenho satisfatório e outro que revelasse dificuldade na aprendizagem em Matemática. Finalmente, o último critério permitiu conhecer os vários aspetos do raciocínio proporcional dos alunos através pré-teste. Considerando estes últimos dois critérios, o número de potenciais alunos a escolher, reduziu-se para 4 alunos na turma A (1 aluno com bom desempenho satisfatório e 2 alunos que revelam dificuldades ou não respondem) e também 4 na turma B (2 alunos com desempenho satisfatório e 2 que revelam dificuldades ou não respondem).

Com a ajuda das professoras foram então escolhidos os alunos, Carolina (turma A) e António (turma B), respetivamente com um desempenho satisfatório e os alunos, Célia (turma A) e Manuel (turma B) que revelam algumas dificuldades. É de referir que o desempenho destes pares de alunos não é semelhante e procurou-se encontrar alguma diversidade de trajetos. A escolha destes alunos não foi feita nas reuniões do grupo colaborativo, de modo a preservar a identidade dos alunos e evitar a criação ainda que não intencional, de um "modelo" de aluno que sirva ao estudo.

4.4. Procedimentos e técnicas de recolha de dados

Como já referi anteriormente, as experiências de ensino enquanto formas de *design research*, requerem uma exaustiva recolha de dados para se poder descrever com detalhe o que envolve o foco da investigação. Neste estudo, o foco é o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos, no quadro de uma experiência de ensino. O quadro seguinte procura mostrar o procedimento geral que envolve a recolha de dados, tendo como referência a unidade de ensino e os alunos.

Quadro 4.1. Procedimento geral de recolha de dados

Dados: todos os alunos	Unidade de ensino		Dados: 4 Alunos
Observação participante Recolha documental	Teste inicial Tarefa 1	←	1.ª Entrevista
	Tarefa 2 Tarefa 3		
	Teste intermédio* Tarefa 4	←	2.ª Entrevista
	Tarefa 5 Teste final	←	3.ª Entrevista

*Não faz parte da unidade de ensino e a sua realização deve-se a uma norma interna da escola.

De modo a construir uma resposta apropriada, foram utilizadas diversas técnicas de recolha de dados que se complementam (Bogdan & Biklen, 1994) e permitem uma abordagem a partir de diversas perspetivas. O quadro 4.2. apresenta as técnicas utilizadas, as respetivas e formas de registo e fonte.

Quadro 4.2. Recolha dos dados: técnicas, formas de registo e fontes

Técnicas	Formas de registo	Fonte
Observação participante	Diário de bordo Gravação vídeo e/ou áudio	Alunos
Recolha documental	Relatórios referentes às tarefas de investigação e exploração Registo das resoluções dos problemas Testes de avaliação	Alunos
Entrevista	Gravação vídeo	Alunos

4.4.1 Observação participante

A observação participante é uma forma específica de observação na qual o observador assume um papel no contexto do estudo e pode até participar nos eventos a estudar (Yin, 2003). As fontes de dados são os alunos (aulas). O registo do trabalho desenvolvido é realizado através de um diário de bordo e também de gravação vídeo e áudio e respetivas transcrições. O diário de bordo permite um registo sistemático de observações feitas pelo investigador, sendo fundamental num estudo qualitativo realizado no terreno. Dele fazem parte: (i) Observações informais de como decorreram as aulas; (ii) Identificação de diálogos que se passaram entre os alunos ou entre o professor e os alunos; e (iii) A forma como os alunos reagiram às tarefas.

4.4.2. Recolha documental

A unidade de ensino é constituída por um conjunto de tarefas de diferente natureza. É sempre suposto que os alunos produzam registos do seu trabalho, em grupo, no caso das tarefas de investigação e exploração é um relatório e no caso dos problemas, um registo da sua resolução. Assim, ao longo do desenvolvimento da unidade de ensino foram obtidas cópias de todos os registos escritos produzidos pelos alunos durante as aulas – relatório, registo da resolução de problemas.

Também foram obtidas cópias de um outro tipo de documentos, os testes, sendo que estes são realizados individualmente pelos alunos. Os alunos realizaram 3 testes, sendo que o teste inicial e o teste final fazem parte da unidade de ensino e realizam-se no início e no final da unidade. O teste intermédio foi realizado para cumprir uma norma interna da escola que obriga à realização de pelo menos dois testes por período letivo. A lecionação do tópico da proporcionalidade direta estava prevista no plano anual da escola, para o 2.º período mas decorrendo de um ligeiro atraso na lecionação dos tópicos sobre frações e operações com frações, foi lecionado na turma A, no 2.º e 3.º períodos e na turma B, no 3.º período. De salientar que o atraso da lecionação do tópico registado na turma B se deveu à participação dos alunos em várias atividade curriculares e extra-curriculares que coincidiram com aulas de Matemática. A realização do teste intermédio não seria obrigatório na turma B mas a sua realização permitiu obter dados, temporalmente menos espaçados e à semelhança do que aconteceu na turma A. Tendo em consideração a realização do teste intermédio, decidi realizar logo depois uma entrevista aos alunos cujo percurso estava a ser objeto de análise. De referir que o teste intermédio foi realizado nas duas turmas na aula de Estudo Acompanhado, tendo sido adaptado de um estudo desenvolvido por Costa (2008).

Os testes foram alvo de uma análise quantitativa, embora não seja possível estabelecer uma relação entre eles no que respeita à dificuldade das questões, pois os alunos estão envolvidos num processo de aprendizagem. Por seguinte, as respostas dos quatro alunos escolhidos foram alvo de uma análise quantitativa e qualitativa que se apresenta parcialmente nos capítulos 6, 7, 8 e 9. Os testes e os respetivos quadros estruturais estão disponíveis em: (i) teste inicial (anexos 3.6. e 3.7); (ii) teste intermédio (anexos 4.1. e 4.2.); e teste final (anexos 3.8. e 3.9.)

4.4.3. Entrevistas

A entrevista constitui uma das principais técnicas de recolhas de dados nos estudos de caso (Yin, 2003). Como referem Bogdan e Biklen (1994), em investigação qualitativa a entrevista pode "constituir a estratégia dominante para a recolha de dados [ou como nesta investigação, ser utilizada] em conjunto com (…) outras técnicas" (p. 134) como o diário de bordo e os documentos produzidos pelos alunos. As entrevistas a realizar serão semiestruturadas, sendo utilizada uma ficha de trabalho (guião de entrevista) centrada no tema proporcionalidade direta, tendo em vista conhecer o significado das respostas dadas pelos alunos. Durante as entrevistas foi usado um gravador vídeo e/ou áudio, sendo posteriormente feita a sua transcrição. As entrevistas foram realizadas em três momentos diferentes e apenas aos alunos estudados, isto é, depois da realização do teste inicial, sensivelmente a meio da realização da unidade de ensino e pelos motivos indicados anteriormente e após teste final. As entrevistas foram realizadas durante as aulas do Estudo Acompanhado na biblioteca da escola. Nas entrevistas aos alunos foram também colocadas algumas questões com o objetivo de conhecer com mais detalhe algumas respostas dos alunos nos testes. Os guiões das entrevistas e os respetivos quadros estruturais estão disponíveis em: (i) 1.ª entrevista (anexos 4.3. e 4.4.); (ii) 2.ª entrevista (anexos 4.5. e 4.6); e (iii) 3.ª entrevista (anexos 4.7. e 4.8.).

4.5. Procedimentos de análise dos dados

Antes de iniciar o tratamento dos dados atribuí nomes fictícios aos alunos selecionados, de modo a preservar o seu anonimato. Também atribuí nomes fictícios às professoras, mas estes foram as próprias que os escolheram, apesar de estarem envolvidas no grupo colaborativo. Desta forma procurei manter o anonimato da escola.

O processo de análise de dados é uma "busca e organização dos materiais (…) que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão" (Bogdan & Biklen, 1991, p. 205). Segundo os mesmos autores, este processo de análise consubstancia-se nas fases de organização dos dados, divisão dos dados em unidades manipuláveis, procura de padrões e descoberta de aspetos importantes. Neste estudo, a base de análise que permite conhecer os percursos dos alunos ao longo da experiência de ensino, são os registos vídeo das aulas, os registos do diário de bordo da investigadora, os documentos escritos dos alunos produzidos durante as aulas, os testes e as entrevistas aos alunos.

O processo de análise de dados foi concretizado em dois momentos. No primeiro, concomitante com a recolha de dados, foi realizada uma análise preliminar de modo a permitir uma organização e interpretação de todos os elementos à medida que iam sendo recolhidos. Neste processo, dos dados provenientes das turmas, destaquei aqueles que correspondem aos grupos de que fazem parte os quatro alunos escolhidos, incluindo os registos produzidos em grupo (relatórios e registos da resolução de problemas), os diálogos dos grupos durante o trabalho autónomo e durante a discussão da tarefa na aula. Neste processo inicial de análise, destaquei ainda os dados relevantes provenientes do trabalho individual dos quatro alunos escolhidos, provenientes dos testes e das entrevistas. Esta análise também permitiu identificar algumas respostas dos alunos a questões dos testes que deveriam ser alvo de esclarecimento nas entrevistas procurando assim uma melhor compreensão das estratégias usadas. Deste modo, a primeira análise permitiu estruturar a apresentação dos vários aspetos do raciocínio proporcional dos quatro alunos, procurando salientar nas suas respostas as alterações que ocorreram durante os seus percursos de aprendizagem durante unidade de ensino. De referir que esta análise teve por base as dimensões e respetivas categorias de análise definidas relativas ao raciocínio proporcional e que estas categorias foram alvo de refinamento durante o desenvolvimento deste estudo, em resultado do contributo da apresentação e discussão de segmentos do estudo, em seminários de investigação nacionais e internacionais.

O segundo momento de análise foi realizado depois da conclusão da unidade de ensino e teve como objetivo responder ao problema e às questões da investigação, pelo que foi realizada uma análise aprofundada, tendo em consideração os aspetos teóricos discutidos nos capítulos 2 e 3, procurando compreender a natureza das estratégias usadas pelos alunos, tendo como referencial os aspetos envolvidos na capacidade de raciocínio proporcional. Assim, o raciocínio proporcional dos alunos foi analisado tendo em conta os três aspetos: (i) distinguir relações de proporcionalidade direta daquelas que não o são; (ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta; e (iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afetado pelos dados numéricos, contexto e representação (Silvestre & Ponte, 2009). As questões do estudo decorrem dos aspetos que envolvem o raciocínio proporcional e estão relacionadas com as dimensões de análise: (i) resolução de problema que envolvem uma relação de proporcionalidade direta (valor omisso e comparação); e (ii) resolução de problemas que envolvem a distinção de relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são.

As dimensões da análise, níveis e respetivas categorias, como já referi anteriormente, foram definidas antes da primeira fase da análise de dados e posteriormente alvo de refinamento. A definição das categorias de cada uma das duas dimensões de análise foi feita com base no quadro teórico sobre o raciocínio proporcional (ver o capítulos 2) e sobre unidades de ensino (ver capítulo 3) e contempla as estratégias de resolução dos alunos, observáveis a dois níveis: (i) procedimentos de cálculo; e (ii) representações. Estes dois níveis estão relacionados mas para operacionalizar a análise optei por separá-los. A figura 4.1 mostra as dimensões e os respetivos níveis a que a análise se processa.

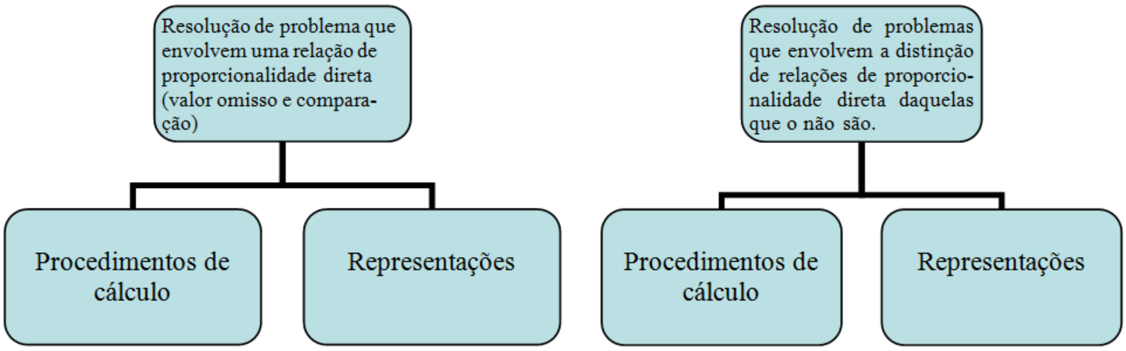


Figura 4.1. – Dimensões e níveis de análise

Os procedimentos de cálculo usados na resolução de problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta caracterizam as categorias de análise e permitem descrever a natureza das estratégias usadas pelos alunos. O quadro 4.3 apresenta essas categorias de análise.

Quadro 4.3. – Resolução de problemas de proporcionalidade direta: estratégias

	Descrição dos procedimentos dos alunos	Estratégia
Revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis	Revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza o fator escalar ou funcional. Compreende e utiliza as propriedades da multiplicação. • Determina a constante de proporcionalidade e descreve o seu significado. • Escreve a razão e descreve o seu significado.	Proporcional
	Não revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza a composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos e multiplicativos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza a razão unitária e procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Determina a razão unitária mas nem sempre sabe explicar o seu significado.	Pré-proporcionais
	Não revela compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza procedimentos de contagem associados à representação pictórica e/ou contagem unitária.	Não proporcional
Não revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis	• Utiliza parte dos dados do problema. • Utiliza procedimentos de cálculo sem sentido.	nd

(nd, significa não descriminadas)

Os procedimentos usados na resolução de problemas que envolvem uma a distinção de relações de proporcionalidade direta daquelas que o não são, constituem as categorias de análise e permitem identificar a natureza das estratégias corretas e incorretas usadas pelos alunos. Dada a natureza dos problemas colocados aos alunos, as categorias de análise englobam também as estratégias incorretas associadas ao facto de os alunos consideraram existir uma relação de proporcionalidade direta em problemas onde essa relação não existe. O quadro 4.4 apresenta as categorias de análise:

Quadro 4.4. – Distinção da proporcionalidade direta de outra que o não é: estratégias

	Problema	Descrição dos procedimentos dos alunos	Estratégia
Pseudoproporcional	Relação aditiva	Revela compreender a natureza aditiva da relação descrita no problema.	Aditiva
		Não revela compreender o problema descrito e incorretamente considera existir uma relação de proporcionalidade direta (covariação e/ou invariância das variáveis.	(incorretas) Proporcional ou pré-proporcional ou não proporcional
		Não revela compreender o fenómeno descrito no problema.	nd
	Relação proporcionalidade inversa	Revela compreender relação de proporcionalidade inversa descrita no problema (descreve a relação).	Proporcional inversa*
		Não revela compreender o problema descrito e incorretamente considera existir uma da relação de proporcionalidade direta (covariação e/ou invariância das variáveis.	(incorretas) Proporcional ou pré-proporcional ou Não proporcional
		Não revela compreender o fenómeno descrito no problema.	nd
	Sem relação aditiva, proporcionalidade direta ou inversa	Revela compreender a inexistência de relação entre os fenómenos descritos no problema.	Inexistência das relações
		Não revela compreender o problema descrito e incorretamente considera existir uma da relação de proporcionalidade direta (covariação e/ou invariância das variáveis).	(incorretas) Proporcional ou pré-proporcional ou Não proporcional
		Não revela compreender o fenómeno descrito no problema.	nd

(nd, significa não descriminadas)
*Descritiva de uma relação em que as variáveis covariam inversamente pois os alunos ainda não estudaram a noção de proporcionalidade inversa.
** Problemas colocados aos alunos depois de se iniciar o ensino formal da proporcionalidade direta.

O desenvolvimento das categorias de análise sobre os procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas, descritas nos dois quadros anteriores, foi um trabalho complexo pois procurei conjugar o conhecimento proveniente dos ciclos anteriores da experimentação com o conhecimento proveniente de vários estudos (ver capítulo 2). Considero que este conhecimento é relevante para que o raciocínio proporcional seja considerado algo mais que a proficiência na resolução de problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade direta, sendo desejável a sua divulgação junto dos professores. Deste modo procurei que as categorias de análise pudessem constituir também um instrumento de análise útil para os professores, isto é, um contributo para a transposição do conhecimento proveniente da investigação para a prática, com consequências positivas no desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos. Assim, a descrição dos procedimentos dos alunos foi redigida de modo acessível a um conjunto alargado de atores educativos, indo ao encontro dos critérios de qualidade do *design research*.

As representações são outro nível de análise neste estudo, como já referi anteriormente. Este nível de análise decorre de um prossuposto da unidade de ensino (ver Capítulo 3) associado ao uso flexível de diferentes representações. É um pressuposto baseado na literatura que refere a influência positiva da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento da compreensão de noções matemáticas. O quadro 4.5 apresenta as categorias de análise baseadas na classificação das representações apresentada por Lesh, Post e Behr (1987) e Tripathi (2008).

Quadro 4.5. – Categorias de análise para as representações usada pelos alunos (adaptado de Lesh, Post e Behr (1987) e Tripathi (2008))

Representações	Descrição
Contextuais	O conhecimento é organizado em torno de fenómenos do mundo real que servem para interpretar e resolver outro tipo de problemas.
Modelos manipuláveis	Barras Cuisenaire; barra de frações; blocos lógicos; linha numérica.
Visuais	Imagens; diagramas organizados; tabelas; gráficos; imagens dinâmicas.
Linguagem oral	Utilização da linguagem natural com léxico comum e/ou especializado do tema matemático.
Linguagem natural escrita	Envolve escrita de frases na linguagem natural
Linguagem matemática escrita	Envolve escrita em linguagem (ex. x+3=7)

A apresentação dos dados e a sua análise é composta na forma de uma narrativa do percurso aprendizagem de cada um dos alunos. Desta narrativa fazem parte uma apresentação individual dos alunos e a apresentação em sequência cronológica do seu trabalho individual – testes e entrevistas – e do seu contributo para o trabalho coletivo durante o desenvolvimento das cinco fichas de trabalho da unida unidade de ensino.

Finalmente, é realizada uma análise transversal dos percursos de aprendizagem dos alunos, a partir da qual é realizada discussão final sobre o desenvolvimento dos aspetos do seu raciocínio proporcional, tendente às conclusões do estudo.

Capítulo 5

Desenvolvimento da Unidade de Ensino

Neste capítulo descrevo o desenvolvimento da unidade de ensino, expondo o ambiente de aprendizagem e vários aspetos do trabalho em sala de aula em que se enquadram os percursos de aprendizagem dos alunos apresentados nos capítulos seguintes. Assim, na primeira parte, apresento algumas informações gerais sobre o desenvolvimento da unidade de ensino nas duas turmas. Na segunda parte, descrevo a atividade desenvolvida com base nas fichas de trabalho e nos testes que constituem a unidade de ensino. E por fim, na terceira parte, faço um balanço geral da unidade de ensino.

5.1. Aspetos gerais

O desenvolvimento da unidade de ensino seguiu a ordem de tópicos da planificação anual da escola, embora com um atraso face ao previsto e pelos motivos já indicados no capítulo anterior.

No ano letivo 2008/09, a disciplina de Matemática tinha uma carga letiva semanal de dois blocos de aula, cada um de 90 minutos. Na escola onde o estudo foi realizado, as aulas de Estudo Acompanhado, no 6.º ano, são direcionadas para o apoio ao estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o que representa um acréscimo semanal de 45 minutos. A gestão das horas é da responsabilidade dos professores que lecionam essas disciplinas e a área curricular não disciplinar, sendo comum a divisão do bloco para cada disciplina ou o uso quinzenal para Língua Portuguesa e para Matemática. Deste modo, foram usados alguns dos blocos de aulas de Estudo Acompanhado para dar continuidade às tarefas da unidade de ensino começadas na aula de Matemática. Foi também no Estudo Acompanhado que algumas questões do teste diagnóstico e das entrevistas foram discutidas, posteriormente à sua realização e à medida que a unidade de ensino ia sendo desenvolvida. O quadro 5.1 mostra o calendário do desenvolvimento da unidade de ensino nas duas turmas.

Quadro 5.1. – Calendário do desenvolvimento da unidade de ensino

	Turma A	Turma B
Teste diagnóstico	26 Fevereiro	13 Março
Ficha de trabalho 1	2 Março 4 Março 5 Março	16 Março 19 Março 23 Março
Ficha de trabalho 2	9 Março 12 Março	26 Março 27 Março (45 minutos)
Ficha de trabalho 3	16 Março 19 Março	16 Abril 20 Abril
Ficha de trabalho 4	26 Março	24 Abril
Ficha de trabalho 5	16 Abril 20 Abril (45minutos)	27 Abril
Teste final	23 Abril	30 Abril

Como referi no capítulo 4, os alunos realizaram um teste intermédio, que não faz parte da unidade de ensino pelo que não consta desta descrição. Este teste foi realizado e corrigido numa aula de Estudo Acompanhado.

5.2. Os vários momentos da unidade de ensino

A unidade de ensino é constituída por dois testes (diagnóstico e final) e cinco fichas de trabalho, cada uma das quais com uma ou várias tarefas. Os testes foram realizados individualmente pelos alunos e as tarefas das fichas de trabalho foram realizadas na modalidade de trabalho de grupo. A dinâmica de sala de aula envolveu a introdução da(s) tarefa(s) pelas professoras, uma fase de trabalho de grupo autónomo dos alunos e, finalmente, a discussão e síntese em grande grupo.

Na descrição do trabalho das turmas, em particular, no que respeita à realização das fichas de trabalho, procurei evitar repetições pelo que descrevo com pormenor o desenvolvimento das fichas de trabalho 1 e 2, na turma A e descrevo o das fichas de trabalho 3, 4 e 5, na turma B. Esta distribuição é equilibrada em termos de blocos de aulas utilizados. No entanto, situações singulares do trabalho em sala das turmas são devidamente assinaladas.

5.2.1. Teste diagnóstico

O teste diagnóstico (anexo 1) foi realizado numa aula de Estudo Acompanhado, por sugestão das professoras e como tinha sido combinado no grupo colaborativo. Antes da distribuição dos testes aos alunos, as professoras, cada uma na sua turma, reforçaram a importância da redação de respostas completas. Também apelaram aos alunos para responderam ao máximo de questões do teste, justificando este pedido com a necessidade de se saber o seu conhecimento sobre "estes problemas, antes de iniciarmos a matéria nova" (Mariana). Os alunos puderam usar a calculadora na realização de todas as questões do teste. Nas duas turmas não se registaram quaisquer incidentes dignos de referência e apenas é de assinalar o questionamento, por parte de alguns alunos, sobre o contributo do teste diagnóstico para a sua nota final do período, tendo as professoras explicado o objetivo de um teste desta natureza. Os quadros 5.2. e 5.3. apresentam os resultados do teste diagnóstico, respetivamente da turma A e da turma B.

Quadro 5.2. – Resultados do teste diagnóstico da turma A

Tipo de problema	N.º de questões	N.º de respostas corretas (25 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	36	29
Comparação	5	46	37
Pseudoproporcional	3	23	30

Quadro 5.3. – Resultados do teste diagnóstico da turma B

Tipo de problema	N.º de questões	N.º de respostas corretas (26 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	57	44
Comparação	5	79	61
Pseudoproporcional	3	18	23

Os resultados do teste diagnóstico mostram que a maioria dos alunos tem dificuldade em resolver problemas de valor omisso e de comparação, sendo que é no primeiro tipo de problemas que o seu desempenho é mais frágil. Os alunos também revelam dificuldade na resolução de problemas pseudoproporcionais, isto é, fazem julgamentos proporcionais em situações em não está envolvida uma relação de proporcionalidade direta. As resposta corretas dizem respeito, na sua maioria, ao problema que envolve uma relação aditiva. E as respostas incorretas são maioritariamente nos problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade inversa e em problemas em que não existe relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa. De um modo geral, os alunos respondem apresentando cálculos ou desenhos e nem sempre explicam o seu significado no contexto da situação que lhes foi colocada.

5.2.2. Ficha de trabalho 1

Para realizar a tarefa da ficha de trabalho 1 (anexo 2) a turma A utilizou 3 blocos de aulas e a turma B utilizou 2,5 blocos.

Turma A. No início do primeiro bloco, Mariana pediu aos alunos para juntarem as mesas para facilitar o trabalho em grupo, sendo que a constituição dos grupos era aquela que já tinha sido acordada anteriormente em outros trabalhos. De seguida, um elemento de cada grupo seguiu a indicação da professora e dirigiu-se para a porta da arrecadação onde estavam depositados os computadores portáteis e onde foram preenchidas as necessárias requisições. Passaram cerca de 10 minutos até estarem reunidas as condições para se dar início ao trabalho e a professora começou por dizer aos alunos que durante aquela aula e as seguintes iriam trabalhar em grupo e que o trabalho inicial de organização da sala deveria ser feito sempre com a maior brevidade possível. Também disse como iria decorrer o trabalho nessas aulas e pediu aos alunos para fazerem registos detalhados sobre as suas ideias e decisões. Relembrou ainda, que tal como em trabalhos anteriores, não deveriam utilizar o computador sem antes terem lido bem o problema e pensado no que iriam fazer.

Depois, a professora apresentou ficha de trabalho 1, dizendo que continha uma investigação, um tipo de problema importante em Matemática, semelhante a um mistério pelo que deveriam estar muito atentos a todos os dados disponíveis e esforçarem-se em dialogar e chegar e entendimentos, respeitado as opiniões dos colegas de grupo. Ainda, chamou a atenção de alguns alunos que costumam amuar quando as suas opiniões não são aceites. A figura 5.1. apresenta parte da tarefa, em particular o esquema do percurso da corrida e os dados referentes ao coelho e à tartaruga.

Após receberem a ficha, os alunos levam algum tempo a formular conjeturas que reunissem o consenso da maioria dos elementos dos respetivos grupos. Este processo é demorado mas implica os alunos na realização de um trabalho cognitivamente exigente que requer a mobilização do seu conhecimento e que vai além da Matemática, exigindo ainda a organização das ideias para as comunicar com clareza aos outros elementos do grupo. É isso que mostra o diálogo de um grupo da turma A:

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. (...) O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga. (..) Investiga o que terá acontecido durante a corrida.

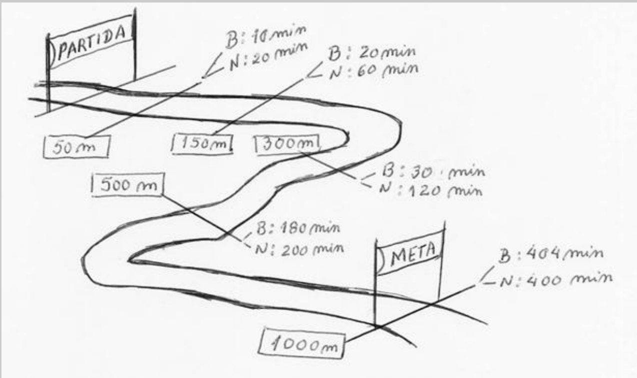


Figura 5.1. – Ficha de trabalho 1 (aspeto parcial)

Joana: É. Quem ganhou foi a tartaruga!

Carolina: Não pergunta isso! Não pergunta quem ganhou! É para saber o que aconteceu na corrida.

(…)

Mauro: Foi depois dos 500 metros que ele dormiu e perdeu tempo para a tartaruga. (Segue-se uma discussão sobre este argumento.)

Rita: Mas se ele dormiu não saiu do lugar! Eu acho que ele se cansou e depois foi a correr mais lento e perdeu.

Carolina: (...) É mesmo isso! Olha aqui, [o coelho] aos 150 metros deveria ter feito 300 [minutos] e fez 200 [minutos]. (Os colegas não percebem e Carolina explica.) Aqui (aponta para os150 metros) é 50 mais 50 e mais 50 então aqui (aponta para o tempo realizado pelo coelho aos 150 metros) deveria ser 300 [minutos], 100 mais 100 e mais 100. Mas é 200 [minutos], foi muito mais rápido.

Depois de discutirem o que era pedido na tarefa, os alunos deste grupo começam por analisar os valores numéricos e a conjeturar sobre o que teria acontecido na corrida, considerando inicialmente que o coelho se cansou mas não dormiu e por isso, perdeu a corrida. Carolina intuiu sobre uma possível relação de proporcionalidade direta, utilizando um procedimento aditivo e partindo do primeiro par numérico, para explicar aos colegas que o coelho tinha realizado uma corrida rápida até meio da pista. É provável que esta aluna tenha intuído sobre a existência da relação de proporcionalidade direta na corrida da tartaruga mas não a comunicou.

No seguimento da aula, alguns alunos nos diferentes grupos identificaram oralmente a relação de covariação da distância e do tempo na corrida da tartaruga Nini antes de utilizarem a folha de cálculo. Os alunos que verbalizaram esta regularidade revelaram usar procedimentos aditivos. Quando passaram a informação do esquema para a folha de cálculo, a maioria dos grupos construiu apenas uma tabela com as distâncias e tempos da tartaruga e do coelho. A professora, ao circular pela sala durante o trabalho em grupo dos alunos, sugeriu a construção de duas tabelas, uma para a tartaruga e uma outra para o coelho de modo a facilitar a leitura e exploração das relações. Nesse momento, dois grupos já tinham tido essa iniciativa e discutiam como poderiam justificar a sua conjetura, isto é, a regularidade na corrida da tartaruga Nini e sua inexistência na do coelho Barnabé. A aula foi dada por terminada cerca de 10 minutos antes do toque porque era necessário gravar todos os trabalhos numa *pen drive* e cumprir os trâmites do regulamento de utilização dos computadores, isto é, verificar se todos os computadores se encontravam em boas condições, concluir o registo de utilização e arrumação.

No início do segundo bloco de aula, a professora pediu aos alunos para fazerem uma pequena síntese sobre o trabalho realizado anteriormente. De seguida foram distribuídos os computadores e os grupos, com maior ou menor facilidade, envolveram-se numa discussão sobre o modo como poderiam explicar as regularidades numéricas que encontraram na corrida da tartaruga utilizando da folha de cálculo. Esta, no entanto, induz os alunos a explorar a relação entre as variáveis. De facto, inicialmente, os alunos procuraram na relação entre variáveis uma justificação para a relação de covariação das variáveis. E talvez porque esta regularidade ter sido identificada e explicada pelos alunos nos grupos, através um procedimento aditivo, a maioria dos seis grupos, começou por explorar a relação entre variáveis, na representação em tabela, também através da adição. Alguns grupos abandonaram, por si, esta a exploração da relação aditiva porque “não é possível adicionar ou tirar minutos a metros” (grupo de Rui) e centraram-se na exploração multiplicativa (multiplicação e divisão entre variáveis) procurando dar significado ao valor numérico. Apenas o grupo de Tomás estabeleceu de imediato a relação entre variáveis dividindo o tempo pela distância, tendo expressado com contentamento que os resultados obtidos justificavam os comportamentos da tartaruga e do coelho identificados anteriormente. Ao quociente, este grupo chamou velocidade e concluiu que a tartaruga se deslocou a sempre à mesma velocidade devido ao quociente invariante (2,5), pelo contrário, o coelho tinha realizado uma corrida alterando a velocidade em cada troço da pista. A maioria dos grupos identificou a velocidade como "ritmo da corrida".

De notar que existem sempre situações imprevistas e, neste bloco de aulas, um grupo teve de refazer todo o trabalho já realizado porque tinha desligado o computador, no bloco de aulas anterior, sem gravar o trabalho. De notar também que o trabalho dos grupos é influenciado pelas interações entre alunos de diferentes grupos e entre professora e um grupo, pelo que no início do trabalho autónomo, os alunos parecem não saber como o começar mas depois desenvolvem o trabalho sem revelarem dificuldades. Foi observável a atenção com que os alunos dos grupos menos autónomos ouviram as perguntas que a professora fez a um grupo vizinho, para além de se inteiraram de algumas discussões provenientes desses grupos.

Os alunos continuaram o trabalho tendo por foco a redação do relatório. As figuras 5.2. e 5.3. apresentam parte dos relatórios de dois grupos entregues no final do bloco de aulas. Três grupos que entretanto concluíram os seus relatórios foram desafiados pela professora a utilizar a folha de cálculo para representar num gráfico cartesiano dos dados da tabela, ao que os alunos responderam com entusiamo.

Nini

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/Metros
50	20	0,4
150	60	0,4
300	120	0,4
500	200	0,4
1000	400	0,4

Barnabé

Metros Percorridos	Minutos Demorados	Min/metros
50	10	0,2
150	20	0,133333
300	30	0,1
500	180	0,36
1000	404	0,404

[Pela observação do esquema.] "O Bamabé até 500 metros esteve á frente. Mas dos 500 metros até á meta a Nini conseguiu vantagem de 4 minutos acabando em 1° lugar."

[A professora oralmente insistiu na investigação sobre o que teria acontecido durante a corrida.] A Rita e a Carolina propuseram uma tabela com os metros percorridos e o tempo demorado do coelho e da tartaruga. Mas o Manuel disse que assim não ficava muito bem e sugeriu que ficava melhor uma tabela para cada animal." (...) " Fizemos a conta entre os números e concluímos que a Nini andou sempre ao mesmo ritmo e o Bamabé não, ou seja, acelerou depois andou mais devagar. "

Figura 5.2. – Resposta do grupo de Carolina

Os relatórios foram apresentados em suporte digital, em formato Word, exceto dois grupos que o fizeram na folha de cálculo. De um modo geral, os relatórios apresentam o modo como o trabalho foi realizado mas verificaram-se omissões das diferentes fases do trabalho, nomeadamente aquelas envolvem situações iniciais e/ou incorretas. O trabalho de alguns grupos é surpreendente, como é o caso do grupo de Tomás, que mostra que os alunos tiveram tempo para realizar o trabalho previsto e por orientação da professora, ter ido mais além, especificamente na representação gráfica tendo concluído sobre a linearidade do aspeto gráfico da relação de proporcionalidade direta.

Barnabé		
Metros	Minutos	Divisões
50	10	5
150	20	7,5
300	30	10
500	180	2,78
1000	404	2,475
Nini		
Metros	Minutos	Divisões
50	20	2,5
150	60	2,5
300	120	2,5
500	200	2,5
1000	400	2,5
2000	800	2,5

"Começámos por fazer uma tabela como nos outros trabalhos [já realizados com recurso à folha de cálculo]. Depois colocámos todos os dados dos metros que percorreram e os minutos demoraram a percorrê-los. Observámos os números com atenção e percebemos que não podemos comparar os minutos do Barnabé com os da Nini." (...) "Fizemos a divisão dos metros com os minutos e vimos que o Barnabé foi alterando a velocidade e a Nini foi sempre na mesma velocidade." (...) "Pensámos que para podermos chegar a um resultado prolongando a pista até ter 2000 metros como o Barnabé foi alterando a sua velocidade não podia continuar a manter o ritmo mas a Nini como tinha estado sempre à mesma velocidade se a pista de prolongasse conseguiria acabar ao mesmo ritmo." (...) Fizemos os gráficos como nos outros trabalhos e a professora ajudou-nos a escolher um e vimos que na Nina os pontos estão em linha."

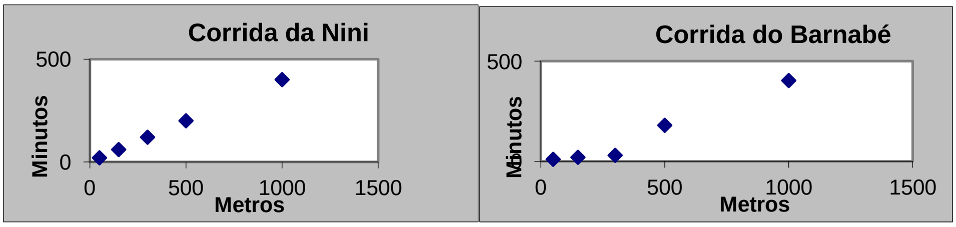


Figura 5.3. – Resposta do grupo de Tomás

Os relatórios dos alunos constituíram a base do trabalho realizado no terceiro bloco de aulas. Deste modo, analisei com a professora, depois do segundo bloco, vários aspetos deste registo escrito dos alunos que considerei merecedor de discussão. No início do terceiro bloco de aulas, a professora pediu a alguns grupos que apresentaram relatórios menos detalhados para se pronunciarem sobre os seus procedimentos, que ela própria reproduziu na folha de cálculo (ver no anexo 12 as figuras A.12.1 e A.12.2). Depois, a discussão continuou com a análise do comportamento dos personagens (coelho e tartaruga) durante a corrida. Foram analisados os significados dos quocientes que resultam respetivamente da divisão da distância pelo tempo e do tempo pela distância. Foi particularmente interessante a forma como os alunos explicaram que, no caso da tartaruga, os valores numéricos da distância e do tempo variam mantendo a mesma velocidade (que a maioria designa por "ritmo") reconhecendo a existência de variação dos pares numéricos das duas variáveis que mantêm velocidade constante (invariante). Esta discussão foi também importante para os alunos compreenderem que, utilizando estratégias diferentes, podem encontrar uma resposta coerente. Entretanto, a professora disse aos alunos que o valor invariante que tinham identificado se designa por “constante de proporcionalidade” e pediu a três alunos que dissessem o que significava para si a palavra constante, obtendo como resposta “sempre igual” (Rui); “regular” (Sofia) e “sempre o mesmo número” (Carolina).

Durante a discussão vários alunos revelaram ter dúvidas sobre o significado da constante de proporcionalidade, trocando o significado do divisor pelo dividendo. Percebendo a dificuldade de alguns alunos, a professora dirigiu-se para o quadro e apresentou outros exemplos (preço de bilhetes dos autocarros; quantidade de ovos numa caixa; pernas de uma mesa) e depois pediu aos alunos para serem eles a apresentar um exemplo e a ler o significado da razão. Depois, houve um momento dedicado a esclarecer dúvidas relativas às variáveis envolvidas e as respetivas unidades de medida que os alunos tenderam a utilizar de forma pouco cuidada.

No que respeita à questão da previsibilidade, que era o foco da segunda questão da tarefa, a discussão foi interessante quando os dois grupos que responderam corretamente apresentaram os seus argumentos:

> **Professora Mariana**: Tenho dois grupos que disseram que só poderiam saber o tempo gasto para percorrer 2000 metros para a Nini. E quatro grupos, que calcularam os tempos gastos pelo Barnabé e a Nini. Afinal, no que ficamos? Não estou a perceber!
>
> **Rui**: Só a Nini corre constante, professora. Só na Nini se pode pensar que ia correr sempre da mesma maneira e no Barnabé não se pode pensar o que é que ele ia fazer.
>
> **Miguel**: Nós ao princípio também pensamos assim [que era possível determinar o tempo gasto pelo Barnabé] mas depois vimos que ele [Barnabé] ia ora muito depressa, ora muito devagar…E isso, muito depressa ou devagar vai influenciar o tempo gasto e por isso… Não dá nem para imaginar como ele ia correr! (…) Só com a Nini que corre sempre da mesma maneira… (Uma colega de grupo diz-lhe que a Nini corre a uma velocidade constante). Ah? É, corre de maneira constante e isso vê-se nos números… Só nela [Nini] se pode saber o tempo ia levar aos 2000 [metros].

A maioria dos grupos fez um julgamento proporcional numa situação em que essa relação não existe, como é o caso da corrida do coelho, utilizando como referência o último par numérico. A professora chamou ainda a atenção para o facto de a questão não pedir para calcular o tempo mas somente para explicar em que circunstância é possível conhecer um determinado valor (tempo gasto a percorrer 2000 metros), pelo que deveriam estar atentos ao que é pedido em cada questão.

Depois, novamente junto ao quadro onde estava projetado o documento, a professora retomou o início da tarefa e disse que ia retomar uma situação que ela sabe ter sido explorada e que não foi referida nos relatórios. Perguntou o que tinham descoberto quando começaram a explorar o esquema da corrida e vários alunos de diferentes grupos colocaram a mão no ar para responder. Carla disse que tinham visto que a tartaruga tinha andado sempre da mesma maneira porque a distância e o tempo "andam da mesma maneira", pois "dos 50 metros para os 150 metros, é 50+50+50 e no tempo, é 20+20+20". A professora questionou os alunos se era possível encontrar outra solução que não obrigue a estar a somar sucessivamente 50+50+50 e alguns alunos disseram logo que sim. Dário respondeu que podia ser 3 vezes 50 metros e 3 vezes 20 minutos. Depois, a professora pediu aos alunos para explorarem outras relações multiplicativas entre os dados da tabela referente à corrida da tartaruga, uma situação algo demorada e que envolveu vários alunos da turma. Foi uma atividade repetitiva, que envolveu a maioria dos alunos e que parece ter sido importante para evidenciar a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Finalmente, disse que o comportamento da tartaruga durante a corrida envolve uma relação de proporcionalidade direta, verificando-se assim que os valores numéricos aumentam ou diminuem na mesma proporção (a primeira relação a ser identificada) e que o seu quociente é constante. No final da aula, a professora distribuiu fotocópias que continham os registos de alguns grupos e que tinham sido alvo o suporte da discussão nessa aula.

Turma B. A tarefa foi introduzida de forma semelhante à turma A embora a professora Maria tenha optado por distribuir os computadores só após os grupos terem lido a tarefa e discutido sobre o que pretendiam fazer. O início do trabalho em grupo foi problemático em alguns grupos tendo melhorado à medida que que algum aluno tomou a liderança do grupo. A professora teve de intervir várias vezes porque alguns grupos não eram capazes de chegar a consensos.

No desenvolvimento da tarefa da ficha de trabalho 1 foi possível identificar num diálogo de um grupo as dúvidas e o modo como o grupo as ultrapassa. Por exemplo, na interpretação da informação do esquema da corrida:

Mário: Olha aqui. 50 mais 150 mais 300.

Gil: Não podemos somar isso Mário! Isso é a passagem aos 50, aos 150.

Mário: (Fala ao mesmo tempo que o Gil.) 10 mais 20 mais 30.

Gil: Somar isso (troços da corrida) vai dar mais que a corrida total! Dá 2000 [metros].

Mário revelou não estar familirizado com alguns aspectos que envolvem uma pista de corrida e fez inicialmente uma interpretação incorreta da informção e pretendia adicionar os dados referentes à distância dos vários troços da pista da corrida. No mesmo grupo, depois da representação dos dados na folha de cálculo, os alunos conjecturavam sobre o comportamento da tartatura e do coelho na corrida:

Gil: Nós temos de ver é a diferença entre o coelho e a Nini.

Joel: A diferença como?

Gil: Como é que eles iam na corrida…

(…)

Gil: Podemos saber por quantos metros é que o coelho perdeu.

António: Mas nós queremos saber por quanto é que ele perdeu?! Não, Gil!

(…)

Mário: Aí é que está! Nós não podemos calcular minutos com metros.

António: Podemos, podemos!

Gil: Eu já sei uma coisa principal! O coelho em cada minuto, ele faz 5 metros [no primeiro troço].

(…)

António: Calma! Olha Mário, é dividir 50 metros por 10 minutos. E se fizermos para tudo vai dar para ver… Hum! O que aconteceu na corrida, pois!

Este diálogo mostra a dificuldade dos alunos na negociação do significado de uma ação que denominam por "diferença". Gil pretende dizer que o objetivo é comparar o comportamento do coelho e da tartaruga e é provável que Joel tenha percebido que se tratava do resultado de uma subtração pois os alunos procuravam operar os dados. Por seu lado, Mário revela não aceitar a realização de operações aritméticas com as variáveis distância e tempo, dado a sua diferente natureza. É provável que o aluno tenha revelado esta dificuldade por se focar na exploração de estruturas aditivas, onde por ventura se sente matematicamente competente, e não na relação multiplicativa, embora revele ser proficiente em algoritmos. Finalmente, Gil diz ter descoberto algo que irá ser determinante na conjetura deste grupo, isto é, o cálculo da razão unitária em cada um dos troços permite "ver a diferença entre eles" (Gil). Se António e Joel ficaram convencidos, Mário pareceu só o ficar após a explicação de António sobre o procedimento de Gil.

O diálogo mostra que os alunos necessitam de negociar significados durante a realização da tarefa e isso obriga-os a comunicar o que pensam, o que vai além da mera realização de cálculos. É um trabalho que os confronta com a dificuldade em explicar aos outros colegas algo que para o próprio parece ser evidente. É durante este processo que as dificuldades e falsas conceções dos elementos do grupo vão sendo ultrapassadas.

5.2.3. Ficha de trabalho 2

Para realizar a tarefa da ficha de trabalho 2 (anexo 3) a turma A demorou 2 blocos e a turma B e utilizou 1,5 blocos.

Turma A. No início do primeiro bloco, Mariana fez uma introdução à tarefa procurando que os alunos incluíssem no seu relatório, que seria entregue no fim da aula em suporte digital, a descrição de todo o trabalho realizado. Ao concluir esta etapa da aula, disse aos alunos que continuariam a trabalhar com um problema mistério, tendo eles reagido com entusiamo Seguiu-se o processo algo moroso de distribuição dos computadores portáteis. Passaram cerca de 10 minutos até estarem reunidas as condições para se dar início ao trabalho.

Enquanto os alunos recuperam os dados contidos na ficha de trabalho 1, sobre a corrida da tartaruga (ver no anexo 12 as figuras A.12.3), questionaram-se sobre o significado da estratégia seguida pela Nini. Após alguma discussão concordaram que se tratava de "fazer a corrida a uma velocidade constante" (Pedro). A maior dificuldade registou-se quando os alunos tiveram de escolher um valor constante para velocidade que permitisse ao coelho ganhar a corrida à tartaruga. Como os alunos não estão habituados a trabalhar deste modo, isto é, serem eles a apresentar possíveis valores numéricos procuraram a opinião da professora sobre o seu trabalho. Foi interessante verificar o leque de condições mobilizadas pelos alunos, partindo de situações do seu quotidiano, para justificar a escolha de um valor numérico para a velocidade constante do coelho. Essas condições incluem uma velocidade exagerada para um coelho, a preguiça do coelho e a velocidade mínima maior que a da Nini. Depois, os alunos representaram na folha de cálculo a informação sobre a nova corrida do coelho – distância e constante de proporcionalidade – revelando bastante facilidade, o que é compreensível, pois era um trabalho algo semelhante ao realizado anteriormente na ficha de trabalho 1.

Outro momento de interesse esteve relacionado com o procedimento a realizar para determinar o tempo que o coelho demora a percorrer os troços e o tempo final. Alguns alunos tiveram dificuldade em identificar qual a operação a usar entre a distância e a constante de proporcionalidade (a que os alunos designam por ritmo) pois a operação depende da relação que escolheram (distância : tempo ou tempo : distância).

No segundo bloco de aulas foi realizada a discussão tendo sido projetado um documento digital com as respostas dos grupos. A professora começou por elogiar o documento do grupo de Catarina pelo relato detalhado do trabalho realizado e pela recuperação da tabela que representava a corrida da Nini (folha 1 do ficheiro Excel). A professora elogiou também a atitude dos grupos, pois tinha constatado no bloco de aula anterior, que estavam muito empenhados e concentrados no trabalho. Os alunos, em particular, os que nem sempre têm sucesso nas aprendizagens ficaram visivelmente satisfeitos. Mais tarde a professora questionou o grupo de Catarina sobre o cálculo do tempo da corrida do Barnabé, mantendo a velocidade constante e de modo a ganhar a corrida:

> **Professora Mariana**: Escolheram o “ritmo”, aqui 3 décimas de minuto por metro. O “ritmo” da corrida do Barnabé foi escolhido por vós. É a vossa constante. E depois Catarina, como é que vocês determinaram o tempo?
>
> **Catarina**: O tempo? (Passa algum tempo) No Excel? Foi escolher… Não! Foi esse, a distância vezes, que é com o asterisco, a constante.
>
> **Professora Mariana**: Porquê a multiplicar?
>
> **Catarina**: É de vezes, multiplicar, porque este se eu dividir, o tempo pela distância dá a constante 0,3. E… Para ver o tempo é a distância vezes a constante! É assim!

A professora chamou a atenção para o que tinha sido dito por Carolina e indicou a relação multiplicativa entre a distância e o tempo, como se pode observar na figura 5.4.

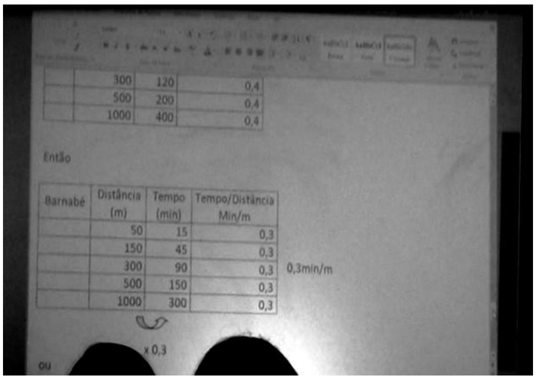


Figura 5.4. – Aspeto do documento produzido pela professora
e utilizado na discussão da tarefa

Seguidamente, foi discutida a resposta mais comum que envolvia a escolha da constante de proporcionalidade superior a 2,5 metros por minuto. Este momento de questionamento foi importante para alguns alunos da turma, com maior dificuldade, em particular, aqueles que dizem respeito à noção de divisão. Foi também importante para estes alunos aprofundarem o seu conhecimento da terminologia associada a essa noção.

Finalmente, foi feita uma síntese em que os alunos concluíram que, conhecendo a constante de proporcionalidade, podem determinar o dividendo (divisor x constante proporcionalidade) ou o divisor (dividendo : constante de proporcionalidade). De salientar que alguns alunos mostram perplexidade sobre os valores obtidos através da multiplicação e divisão com números decimais, chegando a duvidar que estejam corretos apesar de terem utilizado a folha de cálculo.

Turma B. O trabalho nesta turma decorreu de modo semelhante à turma A. A principal diferença regista-se na fase de trabalho autónomo, em que o trabalho em grupo continuou a ser problemático para alguns alunos apesar do empenho da professora na mediação dos conflitos.

A discussão foi realizada, num bloco de aula de Estudo Acompanhado, tendo sido usado o quadro para registar a informação (ver no anexo 12 a figura A.12.4). Foi construída uma tabela que apresenta a informação referente à corrida da Nini e a professora aproveitou para questionar os alunos sobre o que sabiam relativamente aquela situação. As suas perguntas dirigiram-se sobretudo aos àqueles que tinham revelado mais dificuldades na aula anterior.

Depois os alunos disseram que as regularidades identificadas na corrida a Nini deveriam verificar-se na corrida do Barnabé. Isto é, na corrida da Nini a estratégia passa por uma velocidade constante. No entanto, indicaram que essa velocidade teria de ser maior:

> **Professora Maria**: Escolheram uma velocidade constante? Porquê?
>
> **José**: Era a estratégia da corrida. A Nini corria sempre da mesma maneira.
>
> **Professora Maria**: Diz Mário, diz lá.
>
> **Mário**: Pode ser 2,6 de velocidade.
>
> **Professora Maria**: Está bem! Vamos lá colocar que a velocidade é constante e é 2,6 metros por minuto. Tens a certeza que o Barnabé ganha?
>
> **Mário**: Sim! Hum…
>
> **Professora Maria**: Então vamos ver. Ganha ou não? E como é que eu sei o tempo gasto em cada troço?

Os alunos explicaram inicialmente o modo como tinham resolvido a questão, utilizando a folha de cálculo, pelo que revelaram a utilização da relação funcional. No entanto, depois de indicarem o valor numérico do tempo, alguns alunos disseram e verificaram que os esses valores numéricos também poderiam ser obtidos através da relação escalar (ver no anexo 12 a figura A.12.5).

A discussão da tarefa foi um momento de intensa exploração de regularidades o que parece ter ajudado, pelo menos os alunos com mais dificuldades contribuindo para aprofundar o seu conhecimento sobre as estruturas multiplicativas. Os alunos utilizaram a calculadora para realizar os cálculos durante esta fase exploratória o que permitiu que a sua atenção estivesse focada na relação multiplicativa e não nos algoritmos.

5.2.4. Ficha de trabalho 3

Na realização das tarefas que constituem a ficha de trabalho 3 (anexo 4) ambas as turmas utilizaram 2 blocos de aulas.

Turmas B. Após os alunos arrumarem a sala para trabalharem em grupo a professora Maria distribuiu as fichas e as calculadoras. Depois informou os alunos sobre a obrigatoriedade de entregarem um registo escrito, por grupo, no final do trabalho autónomo, embora todos os alunos tivessem de fazer o seu próprio registo no caderno diário.

Os alunos revelaram facilidade na resolução do primeiro problema da ficha (ver figura 5.5.) e, tal como era esperado, mobilizaram o seu conhecimento sobre a relação de proporcionalidade direta para responder.

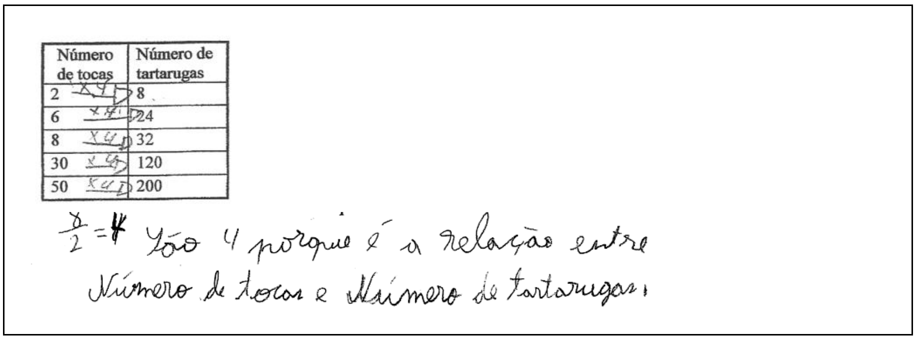
Por causa do tamanho das carapaças existe uma regra na atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.

1.1. É possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca?

Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

Figura 5.5. – Questão 1.1.

Para responder à questão alguns dos grupos exploraram de imediato a relação entre variáveis como se pode ver na resposta do grupo de Dário (figura 5.6.).

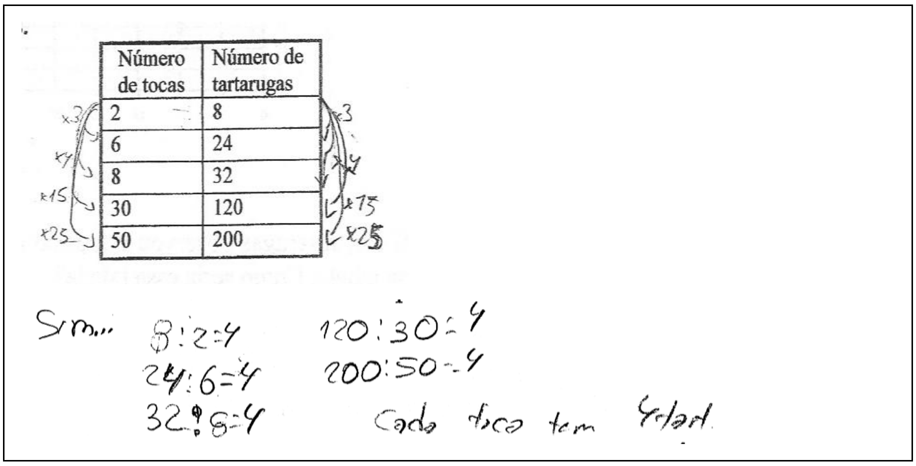


Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

$\frac{8}{2} = 4$ São 4 porque é a relação entre Número de tocas e Número de tartarugas.

Figura 5.6. – Resposta do grupo de Dário à questão 1.1.

Outros grupos começaram por explorar a relação de covariação das variáveis, que abandonam, e passam para a relação entre variáveis como se pode ver na seguinte resposta do grupo de Joel (figura 5.7.):



Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
6	24
8	32
30	120
50	200

Sim... 8:2=4 120:30=4

24:6=4 200:50=4

32:8=4 Cada toca tem 4

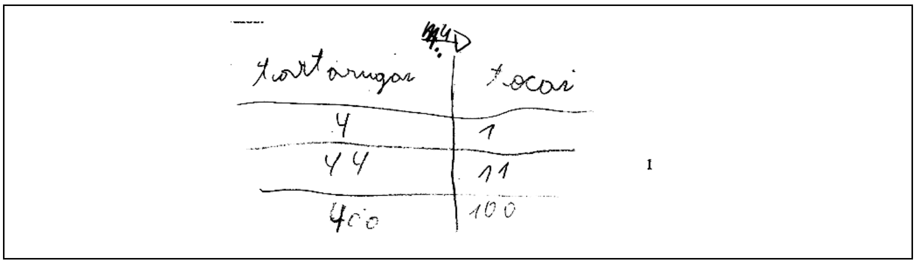
Figura 5.7. – Resposta do grupo de Joel à questão 1.1.

O grupo de Dário estabeleceu uma relação funcional (entre variáveis) depois de determinar a razão unitária utilizando o primeiro par numérico da tabela, escrevendo depois a resposta ao problema. Por seu lado, o grupo do Joel explorou primeiro a relação escalar (covariação das variáveis) e depois a relação funcional utilizando, nesta última relação, a representação da razão como divisão e cálculo da razão unitária (4 tartarugas por toda). Os registos dos grupos mostram que os alunos são capazes de utilizar flexivelmente múltiplas representações partindo da representação em tabela.

Para resolver a questão subsequente (figura 5.8), um problema de valor omisso, o grupo de Dário continuou a utilizar a relação funcional, mobilizando o fator funcional calculado na questão 1.1, utilizando a representação em tabela (figura 5.9).

> Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

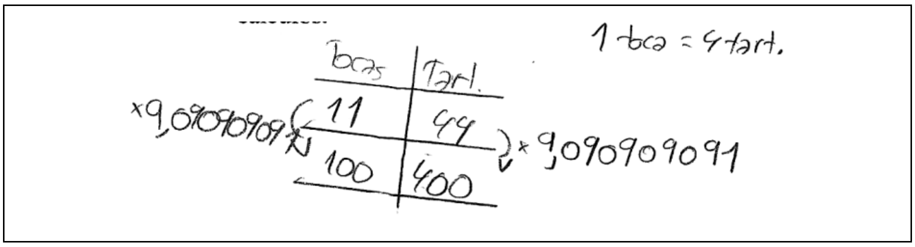
Figura 5.8. – Questão 1.3.


:4

tartarugas	tocas
4	1
44	11
400	100

Figura 5.9. – Resposta do grupo de Dário à questão 1.3.

Por seu lado, o grupo do Joel utiliza a relação escalar (figura 5.10) para resolver o problema (figura 5.8).


1 toca = 4 tart.

tocas	Tart.
11	44
100	400

×9,090909091 ×9,090909091

Figura 5.10. – Resposta do grupo de Joel à questão 1.3.

O grupo de Dário utiliza uma tabela, semelhante à apresentada na questão 1.1 (figura 5.5), trocando a ordem das variáveis, e utiliza a divisão do número de tartarugas pela constante de proporcionalidade para calcular o valor omisso. Por sua vez, o grupo de Joel utiliza a relação de covariação das variáveis para determinar o valor omisso, tendo calculado o primeiro valor omisso partindo da relação unitária (1 toca=4 tartarugas) e depois usado esse par numérico para calcular o segundo valor omisso pedido (número de tocas para 400 tartarugas). No entanto, esta estratégia revela-se problemática pois os alunos tendem a utilizar a representação decimal e, deste modo, têm de trabalhar com vários algarismos e fazer arredondamentos.

A correção da questão 1 da ficha de trabalho foi realizada quando a professora verificou que todos os grupos a tinham resolvido. Os alunos foram confrontados com as estratégias descritas anteriormente, tendo analisado aquilo a que chamaram eficiência do processo de resolução. A eficiência diz respeito à escolha de uma estratégia que envolva números mais simples e fáceis de usar nos cálculos e que, se possível, não implique arredondamentos, nem sempre fáceis de interpretar pelos alunos durante a resolução de problemas. De facto, quando os alunos comparam as diferentes estratégias têm a oportunidade explicar e ouvir as explicações dos colegas sobre as estratégias usadas.

A questão 2.1 da ficha de trabalho (figura 5.11) procura desenvolver nos alunos a capacidade de utilizar múltiplas representações.

O rei das tartarugas observou o gráfico mas decidiu escrever os dados numa tabela. Como seria essa tabela?

Figura 5.11. – Questão 2.1.

O grupo de Teresa discute:

Sara: O que é que isto quer dizer? Como seria essa tabela?!

João: Vá lá! Hum… É uma tabela.

Sara: Não sei como é essa tabela!

Joana: Oh pá! Pode ser deitada ou na vertical. Pode ser… Nós é que podemos dizer. (Olha para a Sara.) É isso, tás sempre a dizer isso mas é para não fazeres nada!

Teresa: Eu faço na folha [para entregar no final da aula]… (…) É melhor fazer a linha da proporcionalidade, não é? Dá para ver se estão todos assim (desenha uma linha sobre os pontos do gráfico). Estão todos na linha!

Joana: Faz assim (faz um gesto com a mão, desenhando no ar duas linhas verticais com os dedos.)

Teresa fez o registo indicado na figura 5.12. A figura mostra a representação numa tabela vertical dos dados representados no gráfico. De um modo geral os grupos não revelaram dificuldade em responder a esta questão. A demora neste trabalho deve-se ao facto de alguns alunos revelarem dificuldade em se centrarem exclusivamente no trabalho. Por vezes, são os colegas de grupo que censuram essa atitude.

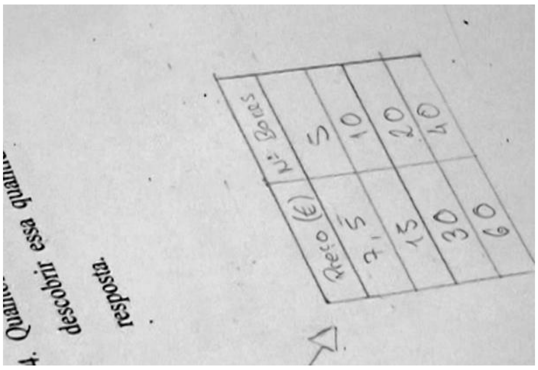


Figura 5.12. – O grupo de Teresa responde à questão 2.1.

Na questão 2.2 os alunos representaram os dados na forma de razão, utilizando preferencialmente a representação de divisão. Apenas um grupo utilizou a representação em fração. Assim, naquele momento do trabalho e para responder à questão 2.4 (figura 5.13.) os grupos tinham ao seu dispor pelo menos três representações disponíveis de imediato.

Quantos bonés se podem comprar com 45 euros? Será possível descobrir essa quantidade através do gráfico?

Figura 5.13. – Questão 2.4.

O grupo começa por utilizar a razão unitária:

Gil: É fácil! Um boné é 1 e meio [euros].

Joel: Ahh?!

António: É dividir 45 euros por 1 e meio [euros]!

Mário: (Utiliza a calculador.) Dá… 30!

(…)

Gil: Ehhhhh Aqui ainda é mais fácil! Sabes porque é que é fácil? (Coloca a folha de registo que vão entregar mais tarde à professora, virada para o Joel. O Mário segue com atenção.) Como nós temos esta linha aqui, vê só 45 euros (indica o valor no eixo vertical). (Ver no anexo 12 a figura A.12. 6.)

Joel: Pois é.

Gil: 45 euros, vens aqui. (Desloca o lápis sobre a linha correspondente aos 45 euros até ao ponto em que esta intercepta a linha que tinha desenhado no gráfico, como se pode ver na figura 5.14.)

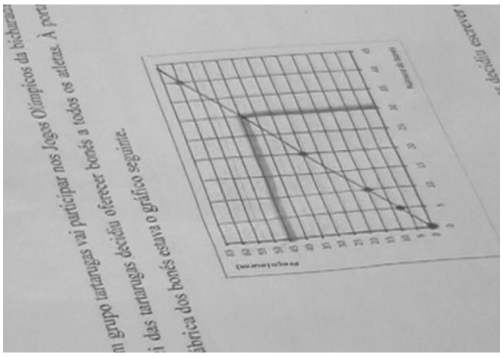


Figura 5.14. – Registo escrito do grupo com a linha correspondente a 45 euros.

O diálogo mostra que os alunos têm várias estratégias para responder à questão proposta: (i) a primeira envolve a utilização da relação unitária; e (ii) a segunda e a terceira envolvem a relação funcional, utilizando respetivamente a divisão pela constante de proporcionalidade e a leitura e interpretação de um gráfico.

Na interpretação da representação gráfica verificam-se duas situações, alguns alunos revelam uma grande facilidade enquanto outros revelam dificuldade. De salientar, que os alunos já trabalham com gráficos, em particular os de barras, desde o 1.º ciclo sendo que o trabalho na disciplina de História e Geografia contempla a capacidade de leitura e interpretação de informação nesta representação. Esta experiência pode explicar o modo intuitivo como Gil e outros alunos interpretam gráficos cartesianos.

Depois da discussão destas questões, a turma ainda teve tempo para realizar a tarefa 3, embora já não tinham tido tempo de fazer a sua discussão.

No bloco de aulas seguinte o trabalho foi iniciado com a discussão da questão resolvida na aula anterior. Na sequência das questões da ficha de trabalho, aquela que exigiu mais tempo foi a questão 5 (figura 5.15).

Para o lanche o Barnabé preparou sumo de cenoura para as tartarugas. Ele utilizou três receitas.

	Concentrado de cenoura (ml)	Água (ml)
Receita A	100	600
Receita B	250	1000
Receita C	320	1920

Qual é o sumo que sabe mais a cenoura? Justifica a tua resposta.

Figura 5.15. – Questão 5.

A maioria dos alunos parece compreender que se trata de um problema de comparação. No entanto, este problema não envolve uma situação facilitadora com que estejam familiarizados (por exemplo, identificar o objeto mais caro). De facto, o significado dos líquidos envolvidos, nomeadamente, concentrado de cenoura e o sumo de cenoura que resulta da diluição do concentrado em água (mistura homogénea) representam uma situação de difícil interpretação para alguns alunos. Durante o trabalho de grupo, os alunos também revelaram dificuldade em: (i) decidir qual das variáveis seria o dividendo e o divisor; e (ii) explicar oralmente o significado do quociente. Um dos dois registos escritos que apresentam uma resposta correta ao problema é apresentado na figura 5.16.

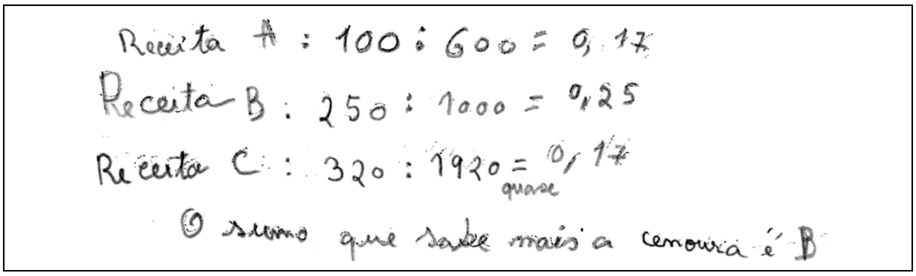

Receita A : 100 : 600 = 0,17
Receita B : 250 : 1000 = 0,25
Receita C : 320 : 1920 = 0,17 quase
O sumo que sabe mais a cenoura é B

Figura 5.16. – Resposta correta do grupo de Joana à questão 5

O grupo de Joana apresenta as razões entre a quantidade de concentrado de sumo e a quantidade de água na forma de divisão e calcula os respetivos quocientes, concluindo que a receita B é aquela que tem um sabor mais acentuado a cenoura. No entanto, o grupo não explica o significado dos quocientes (razão unitária).

Três dos cinco grupos apresentaram uma resposta incorreta, como exemplifica na figura 5.17.

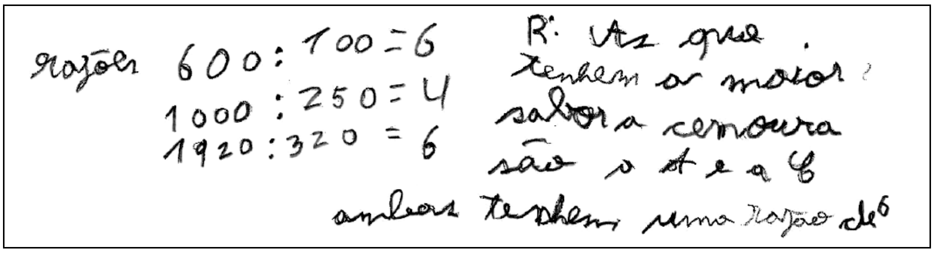

razões 600 : 100 = 6
1000 : 250 = 4
1920 : 320 = 6
R: As que tenhem o maior sabor a cenoura são o A e a C
ambos tenhem uma razão de 6

Figura 5.17. – Resposta incorreta do grupo de Carlos à questão 5

O grupo de Carlos apresenta as razões entre a quantidade de água e a quantidade de concentrado de sumo e calcula também os respetivos quocientes (razão unitária). Mas interpreta incorretamente o significado das razões, considerando que o quociente resulta da divisão da quantidade de concentrado de sumo pela quantidade de água. É provável que este erro resulte da inexperiência dos alunos em preparar este tipo de sumo (mistura homogénea de dois líquidos) e por isso, consideram ingenuamente que as razões têm o mesmo significado. As respostas dos alunos revelam que estes tendem a usar a razão na forma de divisão quando resolvem este tipo de problemas.

Durante a discussão desta questão, a professora centrou a atenção no significado do quociente (razão unitária) e os alunos dos grupos que responderam corretamente (ver a figura 5.16) tiveram uma intervenção ativa. Começaram por dizer que se tratava de "os mililitros de água que existem em 1 mililitro de concentrado" (Mário), deste modo, os "sumos que contêm mais água para uma unidade de concentrado são mais aguados e têm menor sabor a cenoura" (professora Maria). Por estar atenta às respostas dos alunos a professora, disse ao Mário que deveria dizer "0,25 ml de sumo para 1 ml de água" e não "0,25 ml de concentrado de cenoura em 1 ml de água" pois são duas substância diferentes que se juntam mas pode dizer "0,25 ml de concentrado de cenoura em 1,25 ml de sumo". Ainda disse aos alunos que devem pensar bem sobre as situações e mesmo sendo um processo mais demorado devem fazer desenhos para perceber bem a situação em que estão a trabalhar. Quase no final da discussão, o grupo de Teresa revelou ter optado por dividir a quantidade de água pela de concentrado de cenoura porque os quocientes são números maiores que uma unidade o que, para eles, é mais fácil de perceber comparativamente aos números decimais menores que a unidade. Esta situação mostra como os alunos contornam uma dificuldade que reside na interpretação da razão unitária quando esta envolve quantidades inferiores a uma unidade, na representação decimal.

Turma A. O trabalho foi realizada de um modo semelhante à turma B, no entanto são de salientar três pequenos episódios ajudam a conhecer com mais profundidade algumas dimensões do trabalho em sala de aula.

A discussão da questão 1 foi realizada logo após os grupos a terem resolvido e foi demorada, envolvendo a exploração da relação multiplicativa (ver no anexo 12 a figura A.12.7) a partir das questões colocadas pelos alunos. Esta discussão envolveu a ordem do dividendo e do divisor e o significado do quociente (constante de proporcionalidade). Foram ainda exploradas as múltiplas representações: (i) como se pode verificar, o registo que identifica a relação entre variáveis apresenta a barra de fração mas nos vários pares numéricos a relação é escrita utilizando a representação como divisão, que é aquela que os alunos revelam preferir; e (ii) na coluna mais à direita é possível ver as várias representações usadas para dar significado a "0,25 é a parte da toca ocupada por uma tartaruga" (Carolina). Posteriormente, alguns alunos questionaram a professora sobre a existência de covariação das variáveis pelo que esta foi igualmente explorada (ver no anexo 12 as figura A.12.8). Embora os alunos frequentem o 6.º ano de escolaridade, é com alguma surpresa que alguns reagem polo facto de 2 vezes 3,5 ser igual a 7.

De seguida, na discussão da tarefa 2.2, os alunos explicaram como tinham pensado. Inês escreveu duas representações da razão entre o preço e o número de bonés e Rui a razão entre o número de bonés e preço (ver no anexo 12 a figura A.12.9). Depois, a professora frisou que as razões podem envolver números não inteiros, ao contrário do que acontece na representação em fração da relação parte de um todo, que tinham estudado anteriormente.

Logo após, na discussão da questão 2.4, a professora utilizou como suporte visual a digitalização do trabalho do grupo de Rui (ver no Anexo 12 a figura A.12.10) e questionou os alunos:

> **Professora Mariana**: Vamos lá ver uma coisa. O grupo do Rui desenhou uma reta que passa sobre os pontos do gráfico para se certificar que se trata de uma relação de proporcionalidade direta. Não foi Rui?
>
> **Rui**: (Abana afirmativamente a cabeça.)
>
> **Professora Marina**: Mas então o que quererá isto dizer? (Vários alunos colocam o dedo no ar.) Diz lá Célia.
>
> **Célia**: Se não há dinheiro então não há bonés.

Este diálogo mostra que a discussão das tarefas vai além da tarefa inicial colocada aos alunos na fase de trabalho autónomo. É provável que, no caso desta experiência de ensino, esta extensão da tarefa resulte da preparação das tarefas no grupo de trabalho colaborativo. De facto, durante a preparação da unidade de ensino, as professoras e a investigadora exploraram detalhadamente as tarefas procurando antever estratégias e dificuldades dos alunos.

Quando os alunos voltaram à fase de trabalho autónomo para resolver a questão 3.1, que envolver um problema de comparação:

As tartarugas treinam para a maratona em pistas especiais que vão mudando de forma e tamanho. É o treinador que constrói as pistas mas nunca diz o que significa a medida M. Serás capaz de descobrir qual é a forma destas pistas? O que significa a medida M em cada tipo de pista?

Pistas tipo A

Medida M (m)	Perímetro (m)
50	200
60	240
100	400
250	1000

Figura 5.18. – Questão 3.1.

O grupo de Diogo teve a seguinte discussão:

Diogo: Medida M? Hummm

Célia: São duas coisas [perguntas]. A medida M e a forma da pista.

Rafael: Pois… Não percebo!

Diogo: Dividimos. (Pega na calculadora.)

Célia: O quê pelo quê?! Temos de saber o que é que vai dar. O que é que o número quer dizer quando divides.

Diogo: Este problema é esquisito! Parece que está ao contrário! (Ri.) Não é?

Célia: Pois é!

Este pequeno episódio é importante para a reflexão sobre o modo como os problemas são colocados aos alunos, algo que poderá estar enraizado nas práticas e nos recursos didáticos. Estes alunos detetaram uma alteração ao modo de apresentação das questões, pelo que dizem que o problema está ao contrário. A primeira questão envolve a constante de proporcionalidade que representa o número de lados de um polígono regular. Esta constante não tem uma unidade de medida associada, o que pode dificultar o trabalho dos alunos. A segunda questão pede aos alunos o significado de um conjunto de dados numéricos relativos à variável M, o que contraria o modo como habitualmente os problemas são colocados.

5.2.5. Ficha de trabalho 4

Em ambas as turmas, foi utilizado um bloco para realizar a ficha de trabalho (anexo 5).

Turma B. A professora iniciou o trabalho dando a indicação que o trabalho deveria ficar concluído naquele bloco de aulas, pelo que, para o trabalho autónomo os grupos disponham de quarenta e cinco minutos. Posteriormente seria realizada a discussão com a participação de todos os grupos, pelo que alertou que qualquer elemento do grupo deveria ter oportunidade para comunicar o trabalho do grupo. De facto, nesta turma, alguns alunos tomam a liderança não deixando os colegas do seu grupo apresentar o modo como pensaram.

Todos os grupos resolveram com alguma facilidade as tarefas da ficha de trabalho, que envolvia a noção de percentagem. Esta noção não é nova pois, no contexto de experimentação do PMEB (ME, 2007) e do programa de formação contínua de professores, os alunos trabalharam as diferentes representações de uma quantidade (decimal, fração e percentagem). De um modo geral, os alunos mobilizaram o seu conhecimento sobre a relação de proporcionalidade direta e utilizaram uma estratégia multiplicativa escalar ou funcional para resolver as questões da ficha de trabalho.

A maior dificuldade detetada diz respeito à verbalização oral e/ou escrita de uma resposta ao problema, sendo que, esta última representação é particularmente difícil para alguns alunos. Vários desses alunos tentam ultrapassar essa dificuldade escrevendo o máximo de informação de modo a responder corretamente quando são interpelados pela professora. Para isso, dedicaram algum tempo a comunicar oralmente e por escrito as respostas (ver no anexo 12 a figura A.12.11), tendo como base os dados numéricos das tabelas que construíram.

Turma A. Os alunos resolveram as questões com facilidade considerando este problema como qualquer outro problema de valor omisso. Só alguns dos alunos dos alunos com desempenho mais fraco, tiveram de ser acompanhados de perto pela professora na interpretação das duas últimas questões da ficha de trabalho, isto é, a quantidade que uma determinada percentagem representa.

5.2.6. Ficha de trabalho 5

As tarefas desta ficha de trabalho (anexo 6) envolvem a noção de escala e para a sua realização foi usado um bloco de aulas, na turma B e um bloco e meio de aulas na turma A. Em ambas as turmas os alunos revelaram agrado, em particular, para com a primeira questão porque reconheceram no mapa locais que lhes eram familiares.

As professoras apresentaram as tarefas, depois distribuíram a fichas de trabalho aos alunos, sendo que Mariana enfatizou o registo dos cálculos e de respostas completas e Maria informou os alunos que deveriam cumprir o tempo destinado ao trabalho em grupo que era a primeira metade do bloco. Note-se que os alunos já conhecem a noção de escala, pois esta noção é abordada no 5.º ano, nas disciplinas de História e Geografia de Portugal (HGP) e Educação Visual e Tecnológica (EVT).

Turmas B. Os grupos envolveram-se ativamente na tarefa e poucas vezes solicitaram o apoio da professora. A noção de escala parece ser compreendida pela maioria dos alunos, como mostram as repostas à questão 1.1 (figuras 5.19. e 5.20.) em que se perguntava o significado da escala 1:25000 do mapa.


1cm no desenho corresponde a 25000 na realidade

Figura 5.19. – Resposta do grupo de Márcia à questão 1.1.

Outros alunos têm uma noção que pode ser considerada como instrumental, pois parece associada ao trabalho de redução à escala que realizaram no ano letivo anterior na disciplina de EVT, como mostra a resposta seguinte.

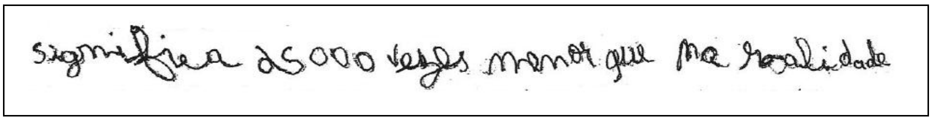

significa 25000 vezes menor que na realidade

Figura 5.20. – Resposta do grupo do Nuno à questão 1.1.

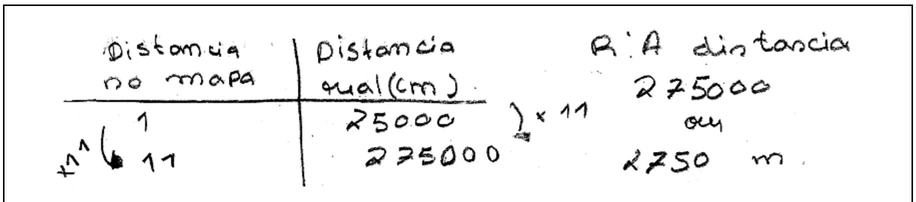
A questão que levantou mais dificuldades aos alunos foi a 1.3 porque exige a escolha de um trajeto entre dois locais. Alguns alunos não entenderam que lhes era dada liberdade para fazer uma escolha e outros pensaram que devia ser escolhido o trajeto mais curto, o que lhes causava dúvidas.

Os alunos terminaram as tarefas da ficha de trabalho no tempo previsto e passou-se para a fase de discussão da tarefa, com a colaboração dos vários grupos. A professora pediu aos alunos para fazerem as correções no caderno diário e não alterarem nada do que tinha escrito na ficha (documento que seria fotocopiado para este estudo e posteriormente devolvido aos alunos). Durante a discussão, a professora deu ênfase a uma situação frequente que é a escrita de números sem qualquer outra informação adicional e relembrou um momento do trabalho autónomo, do grupo de Joel, na resolução da questão 1.3 (figura 5.21.).

Se o Barnabé decidir ir do ponto C até à tua escola (marca no mapa um caminho), qual é a distância que terá de percorrer?

Figura 5.21. – Questão 1.3.

Quando a professora perguntou o que significava o 275000 que o grupo tinha registado, todos os alunos "encolheram os ombros e não disseram nada" (Maria). E a professora acrescentou que ela só pretendia que os alunos respondessem que era centímetros, levando-os a pensar como é difícil perceber, em termos práticos, quanto é 275000 centímetros. Por fim, com o questionamento da professora, os alunos converteram o número de centímetros em metros, colocando a unidade de medida, como mostra a figura 5.22.



Distancia no mapa	Distancia real (cm)
1	25000
11	275000

×11

R: A distancia 275000 ou 2750 m.

Figura 5.22. – Resposta à questão 1.3.

A maioria dos alunos recorreram a tabelas verticais e horizontais para representar os valores numéricos e ajudar a estabelecer a relação multiplicativa escalar. Na discussão, Carla refere que "fazer desta maneira é mais fácil porque a escala tem o 1 e 1 vezes qualquer número dá esse número".

Turma A. O desenvolvimento do trabalho foi semelhante à turma B, em particular, no que respeita à fase de trabalho autónomo dos alunos. Apenas se registou uma situação, um pouco hilariante em resultado de os alunos da turma terem escrito que mediam a mesma altura, para responder à questão 2.2 (figura 5.23.), o que de fato não correspondia à verdade.

A figura representa uma fotografia do coelho Barnabé.

Imagina que estavas na fotografia junto do Barnabé. Qual seria a tua altura na fotografia?

Figura 5.23. – Questão 2.2.

O que sucedeu foi que os alunos, na sua maioria, registaram a medida de um colega e utilizaram-na como sendo sua, com o pormenor, de essa altura ser um múltiplo de 15, isto é 150 centímetros (figura 5.24.).

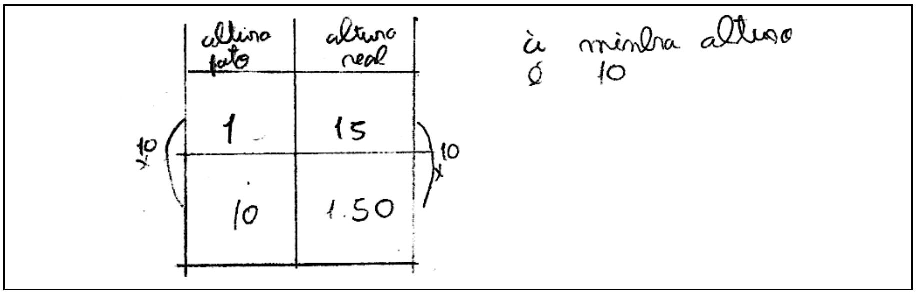


Figura 5.24. – Resposta do grupo de Rui à questão 2.2.

Quando a professora detetou esta situação, obrigou os alunos a utilizarem a altura que tinham no bilhete de identidade. Na sequência, um grupo apresentou uma fórmula, segundo as suas palavras, que permitia conhecer as alturas de todos os alunos na fotografia:

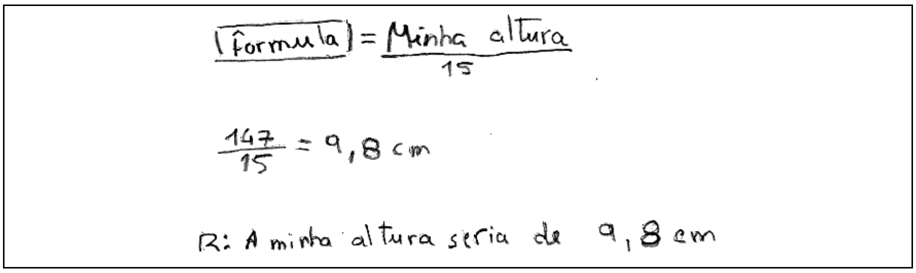


Figura 5.25 – Resposta do grupo de Carolina

Esta situação constituiu um momento de discussão alargada em que os alunos procuram justificar as semelhanças e diferenças dos procedimentos usados. É provável que tenha sido durante este trabalho que os alunos encontraram um procedimento comum que serve para todas as alturas (generalização), que apresentam como uma fórmula.

5.2.7. Teste final

No término da unidade de ensino foi realizado o teste final (Anexo 7), com a duração de 90 minutos. Na turma A foi realizado na aula de Matemática e na turma B em Estudo Acompanhado, por opção da professora. Novamente, ao distribuir os testes aos alunos, as docentes indicaram que deveriam escrever respostas completas e, em particular, avisaram que deveriam ler as respostas depois de escritas para verificarem se transmitem o que pretendem dizer. Nas duas turmas não se registaram quaisquer incidentes. Alguns alunos terminaram o teste cerca de meia hora antes do previsto e pediram às professoras para ler um livro ou fazer um desenho, como habitualmente costumam fazer. Os quadros 5.4. e 5.5. apresentam os resultados do teste final das duas turmas.

Quadro 5.4. – Resultados do teste final da turma A

Tipo de problema	N.º de questões	N.º de respostas corretas (25 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	77	61
Comparação	7	123	70
Pseudoproporcional	3	44	59
Comunicação/Representação	5	84	67

Quadro 5.5. – Resultados do teste final da turma B

Tipo de problema	N.º de questões	N.º de respostas corretas (26 alunos)	% de respostas corretas
Valor omisso	5	94	72
Comparação	7	156	85
Pseudoproporcional	3	43	55
Comunicação/Representação	5	75	58

Os resultados do teste final mostram que a maioria dos alunos resolveu com sucesso os diferentes tipos de problemas, revelando mais facilidade nos problemas de comparação e mais dificuldade nos problemas pseudoproporcionais. Os alunos da turma A tiveram maior sucesso nos problemas pseudoproporcionais e de comunicação/representação do que os alunos da turma B. Estes revelaram um melhor desempenho nos problemas de valor omisso e de comparação comparativamente aos alunos da turma A.

Na resolução de problemas de valor omisso e de comparação os alunos, na sua maioria, utilizaram estratégias de natureza multiplicativa. No que respeita aos problemas pseudoproporcionais, os alunos que respondem corretamente tendem a usar a relação de proporcionalidade direta (estratégia multiplicativa) para justificam a inexistência. É nos problemas em que não existe uma relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa entre as variáveis que os alunos incorretamente assumem tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta. Os alunos revelaram alguma dificuldade em responder corretamente às questões de comunicação/representação e, na turma B, alguns não responderam a estas questões.

5.3. Balanço da unidade de ensino

A unidade de ensino, em traços gerais, foi desenvolvida do modo combinado no grupo colaborativo. No entanto, foi necessário mais tempo que o previsto para o seu desenvolvimento – mais dois blocos na turma A e mais um na turma B.

O trabalho na sala de aula incluiu a apresentação das tarefas das fichas de trabalho, o trabalho autónomo dos alunos em grupo e a discussão final em grande grupo. Na fase da apresentação das tarefas, as professoras comunicaram aos alunos, de uma forma mais ou menos detalhada, como deveriam trabalhar durante a fase de trabalho autónomo. Deram ainda indicações sobre os recursos didáticos (por exemplo, a natureza das tarefas) e os registos escritos a entregar aquando da conclusão do trabalho. Também deram indicações para a gestão do trabalho em grupo.

O trabalho autónomo foi realizado na modalidade de trabalho de grupo e caracterizou-se pela elevada exigência colocada aos alunos, dado o cunho exploratório da unidade de ensino. De facto, esta unidade obriga os alunos a expor as suas ideias, a negociar significados com os colegas, a lidar com as suas dificuldades e a mobilizar e aprofundar o seu conhecimento sobre os vários aspetos que envolvem a capacidade de raciocínio proporcional. O trabalho autónomo realizado em grupo apresenta-se como promotor da aprendizagem dos alunos, mas requer igualmente um percurso de aprendizagem da parte destes, a ser gerido pelo professor. Os alunos precisam de entender o compromisso que se assume quando se trabalha em grupo e que vai além da partilha do espaço de uma mesa ou da entrega de um documento comum. Nesta unidade, procurou-se levar os alunos a perceber que esta modalidade de trabalho envolve a resolução conjunta de uma tarefa, a partilha do conhecimento e a negociação de significados. No que respeita ao trabalho das professoras, a fase de trabalho autónomo representa o momento em que elas tomam conhecimento do desempenho dos alunos, no que diz respeito às estratégias usadas (procedimentos e representações). Este trabalho de monitorização sistemática da atividade dos alunos é muito exigente e dele depende o sucesso da fase de discussão.

Durante a discussão das tarefas foi feita uma retrospetiva das estratégias usadas pelos grupos, um trabalho liderado pelas professoras mas com a participação dos alunos. Este momento de partilha permite aos alunos ampliar o seu conhecimento sobre as diferentes estratégias e discutir a respetiva eficiência, por exemplo, saber escolher estratégias que envolvam cálculos simples. Esta fase foi particularmente importante nas três primeiras fichas de trabalho, tendo os alunos colocado dúvidas que implicavam a exploração da relação multiplicativa. Após a realização da ficha de trabalho 3, a fase de discussão das tarefas teve uma marcada participação dos alunos. Ainda no que respeita ao trabalho das professoras, é provável que tenha sido esta a fase da aula marcada pelo efeito positivo da planificação das tarefas no grupo colaborativo. De facto, perante dúvidas dos alunos: (i) mobilizaram o seu conhecimento de outras situações do quotidiano; (ii) recuperaram situações trabalhadas em tarefas realizadas anteriormente, na unidade de ensino; e (iii) fizeram algumas extensões da tarefa, enriquecendo a discussão.

Antes da unidade de ensino os alunos consideraram existir uma relação de proporcionalidade direta em situações de proporcionalidade inversa e em situações em que não existe uma relação simples entre as variáveis. Na resolução de problemas de valor omisso e de comparação não revelaram compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, recorrendo frequentemente a estratégias não proporcionais e pré-proporcionais. As representações apresentavam elementos pictóricos e a disposição dos valores numéricos em tabelas insipientes.

As tarefas das fichas de trabalho 1 e 2 proporcionaram: (i) a exploração de uma situação em que existe uma relação de proporcionalidade direta simultaneamente com outra situação em que essa relação não existe; (ii) a exploração da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta; (iii) uso de múltiplas representações; e (iv) trabalho com uma grandeza intensiva.

As tarefas das fichas de trabalho 3, 4 e 5 incluem problemas de proporcionalidade direta que envolvem situações diversificadas e números inteiros e não inteiros. Os alunos mobilizaram as estratégias multiplicativas escalar e funcional para resolver esses problemas, como resultado do trabalho de exploração desenvolvido nas tarefas das fichas de trabalho 1 e 2.

No final da unidade de ensino, os registos dos alunos mostraram uma tendência para a utilização de representações em tabela e de razão como divisão na resolução de problemas. Os resultados do teste final indicam uma melhoria no desempenho dos alunos em todos os tipos de problemas em comparação com o teste inicial, bem como um desempenho satisfatório nas questões que envolvem comunicação/representação. De facto, por um lado, à medida que os alunos vão adquirindo experiência sobre as situações que envolvem relações de proporcionalidade direta, tornam-se mais eficientes em identificar situações onde esta não existe. Por outro lado, a exploração da relação multiplicativa levou os alunos a utilizar estratégias proporcionais na resolução de problemas de valor omisso de comparação. São no entanto, alguns problemas deste último tipo que geram grande dificuldade aos alunos, em particular quando é pedido um julgamento qualitativo e está envolvido um fenómeno que lhes é pouco familiar. Em alguns alunos, o seu desconhecimento do fenómeno traduz-se na dificuldade em explicar o significado da razão, realizando em consequência erros elementares que não se verificam quando o mesmo tipo de problema envolve uma situação familiar.

Capítulo 6

Percurso de aprendizagem de Carolina

6.1. Apresentação

Carolina é uma rapariga de onze anos, franzina e tranquila. Tem um olhar vivo, um sorriso meigo e relaciona-se de um modo afável com os colegas e professores. Vive com os pais e um irmão na periferia da cidade de Lisboa, num bairro próximo da escola e nos tempos livres gosta de ler e ver televisão. Na escola, é considerada uma boa aluna, em todas as disciplinas e, de acordo com o seu diretor de turma, o desempenho escolar ainda mais se destaca atendendo ao desempenho global pouco satisfatório da turma. Carolina revela um bom domínio da língua materna e uma boa capacidade de comunicação, sendo estes os dois fatores apontados pelo conselho de turma como fomentadores da qualidade geral do seu trabalho.

Na disciplina de Matemática, à semelhança do que foi observado durante a experiência de ensino, Carolina é uma aluna atenta e participativa que adere com facilidade às tarefas, isto é, que está "de corpo e alma" na aula. Esta sua atitude pode ser um reflexo da exigência imposta pela família, em particular, pela mãe que é professora no 1.º ciclo de escolaridade. O seu desempenho traduz-se em intervenções que revelam estar a pensar sobre as tarefas, num envolvimento no trabalho de modo que este seja realizado com sucesso e dentro do tempo estipulado. De acordo com a sua professora Carolina toma a liderança na realização da maioria das tarefas em grupo, agilizando o desenvolvimento do trabalho e impondo regras. No entanto, durante a experiência de ensino, partilhou a liderança do grupo com o Manuel, um colega que aceita as ideias e opiniões da Carolina mas questiona-a quando não as entende. Ao contrário, na fase de decisão, as duas outras colegas do grupo aceitam as opiniões da Carolina pois ela é que sabe porque é boa aluna.

Carolina revela bom domínio na utilização do computador, atendendo à sua idade e experiência, isto é, liga-o e desliga-o de acordo com um procedimento correto, utiliza o teclado com as duas mãos, conhece os comandos que lhe estão associados. Domina razoavelmente a folha de cálculo Excel, conhece a designação das células, sabe organizar a informação simples em tabelas (incluindo a sua formatação), utiliza os comandos das operações e sabe que é possível converter a informação representada em tabelas em gráficos, embora por vezes se esqueça de selecionar os dados e tenha de voltar atrás e demonstre ainda alguma dificuldade na escolha do tipo de gráfico.

6.2. Capacidade de raciocínio proporcional

Nas secções seguintes analiso as respostas de Carolina a diferentes tipos de problemas apresentados em testes e em entrevistas. As três primeiras secções correspondem respetivamente ao início, durante e final da unidade de ensino. Na segunda secção também descrevo parcialmente o trabalho da aluna na realização das tarefas da ficha de trabalho. Na quarta secção apresento uma síntese do desempenho de Carolina em cada tipo de problema.

6.2.1. Início da unidade de ensino

Neste subcapítulo analiso as respostas da Carolina ao teste diagnóstico e à primeira entrevista. É de referir que durante a entrevista a aluna foi questionada sobre aspetos menos claros do seu trabalho no teste diagnóstico.

Problemas pseudoproporcionais. Nesta secção analiso as respostas de Carolina às questões do teste diagnóstico, que envolvem problemas pseudoproporcionais. A questão 2 é um problema (ver a figura 6.1.) tido como gerador de uma estratégia proporcional embora envolva uma relação aditiva. O fenómeno descrito no problema é uma corrida, que os alunos do 2.º ciclo podem ter vivenciado nas aulas de educação física, envolve números inteiros e pequenos e a estrutura sintática é semelhante a um problema de valor omisso.

O Gil e o Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista. Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas faz o Tomás?

Figura 6.1. – Questão 2 do teste diagnóstico

Carolina usa uma estratégia aditiva e responde corretamente ao problema (ver a figura 6.2.).

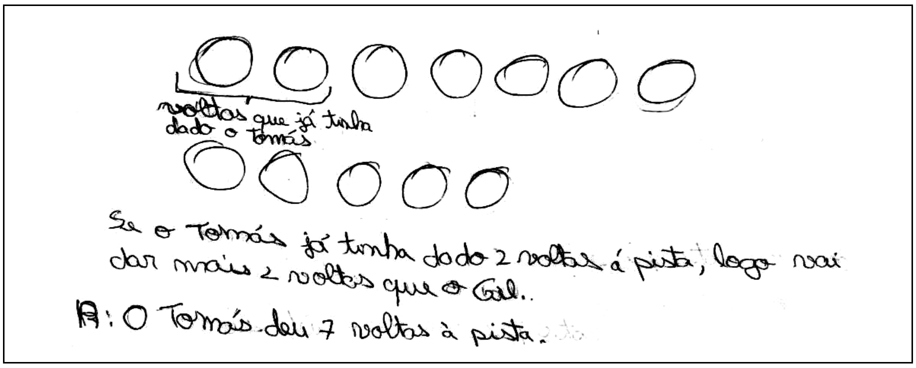


Figura 6.2. – Resposta de Carolina questão 2 do teste diagnóstico

Carolina coloca 7 elementos pictóricos na primeira linha, que correspondem ao número de voltas do Tomás e 5 elementos pictóricos na segunda linha, que correspondem à corrida do Gil e responde que o Tomás “vai dar mais 2 voltas” do que as 5 voltas do Gil. A estratégia de Carolina apresenta representações visuais (elementos pictóricos) e a linguagem matemática e natural escrita.

O problema pseudoproporcional, que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 6.3.), descreve um fenómeno do quotidiano passível de já ter sido observado pelos alunos e envolve números inteiros, sendo que dois deles são múltiplos de 3. O problema apresenta a estrutura sintática semelhante à dos problemas de valor omisso.

12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

Figura 6.3. – Questão 5 do teste diagnóstico

Carolina não responde à questão mas, posteriormente, durante a primeira entrevista, esclarece:

Investigadora: E aqui. Porque não respondeste a esta pergunta? (Pré-teste foi mostrado à aluna.)

Carolina: Esta! Hum... Não sei... Não me lembro bem.

Investigadora: Lê lá a pergunta pode ser que te lembres [porque não respondeste].

Carolina: (Lê parte da questão em voz baixa mas audível.) Ah! Já sei. Eu não percebi aqui. Eu...

Investigadora: Mas o que é que não percebeste?

Carolina: Isto aqui. Então se são mais [operários] em 5 dias, então 3 [operários] não vai dar menos que os 5 [dias].

Investigadora: E porque não escreveste isso que me estás a dizer?

Carolina: (Ri.) E depois estava mal.

Investigadora: Eu acho que estás a pensar bem.

O diálogo revela que Carolina não responde porque o fenómeno descrito não verifica a relação de covariação da proporcionalidade direta, que supostamente a aluna espera encontrar. No entanto, a aluna compreende que existe uma relação entre as duas variáveis que variam inversamente. Assim, pode considerar-se que a aluna responde corretamente, de forma oral durante a entrevista.

Um outro problema pseudoproporcional apresenta um fenómeno do quotidiano em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade (ver a figura 6.4.) mas apresenta a estrutura sintática de um problema de valor omisso e envolve números inteiros.

> A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria 3 toalhas a enxugar?

Figura 6.4. – Questão 9 do teste diagnóstico

Carolina considera de forma errada que se trata de uma relação de proporcionalidade direta e usa a estratégia de composição na resolução do problema (ver a figura 6.5.), provavelmente através do procedimento aditivo. A estratégia é revelada através da linguagem matemática e natural escrita.

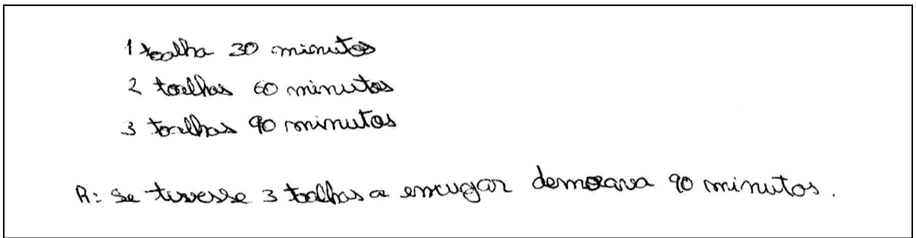


Figura 6.5. – Resposta de Carolina à questão 9 do teste diagnóstico

Problemas de valor omisso. O problema apresentado na questão 7 do teste diagnóstico (ver a figura 6.6.) envolve um fenómeno do quotidiano e números inteiros múltiplos de 5.

Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, quanto tempo levará a percorrer 125 quilómetros?

Figura 6.6. – Questão 7 do teste diagnóstico

Carolina responde (ver a figura 6.7.):

50 Km - 30 m.
25 Km - 15 m.

50 quilómetros - 30 minutos
100 quilómetros - 60 minutos
125 quilómetros - 75 minutos

R: Sim, levará 75 minutos a percorrer 125 minutos

Figura 6.7. – Resposta de Carolina à questão 7 do teste diagnóstico

Para determinar o valor omisso a aluna usa a estratégia de composição/decomposição sem, no entanto, dar a conhecer se o procedimento de cálculo é aditivo e/ou multiplicativo. Isto é, para obter os valores 100 quilómetros e 60 minutos respetivamente, a aluna pode ter efetuado: (i) as adições 50+50 e 30+30; ou (ii) as multiplicações 2x50 e 2x30. Depois, é provável que tenha determinado os valores 150 quilómetros e 90 minutos (sem registo escrito), verificando que o valor numérico da variável distância ultrapassa o valor numérico 125 (quilómetros). Perante isso, opta por decompor os valores iniciais, construindo uma nova representação em colunas (canto superior direito). Os valores numéricos que Carolina escreve, na terceira linha da primeira representação tabelar, parecem resultar da adição dos valores numéricos das segundas linhas das duas representações, isto é 125km=25km+100km e 75min=15min+60min. A estratégia de composição/decomposição é frequentemente associada à tabela (disposição dos dados em colunas), uma representação visual, que a aluna usa e complementa com a escrita (linguagem matemática e natural).

O problema apresentado na questão 1.1 (ver a figura 6.8.) da primeira entrevista, apresenta um fenómeno do quotidiano (compra de bens) e números inteiros múltiplos de 3.

A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros.
1.1 Quanto custam 9 livros?

Figura 6.8. – Questão 1.1. da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, a aluna responde corretamente:

Carolina: Então... (Passa algum tempo.)

Investigadora: No que estás a pensar? Vá, vai falando como combinámos.

Carolina: Se fossem 6 livros era o do dobro do dinheiro, 24. E se fossem 9 livros era 24 mais 12 euros. (Escreve a resposta falando baixinho. Ver a figura 6.9.)

Investigadora: E lembraste-te logo de ir para o dobro, não é?

Carolina: Sim. Ah... Ou então também podia fazer os 12 euros a dividir por 3 e dava o preço de cada livro. E depois somava os euros.

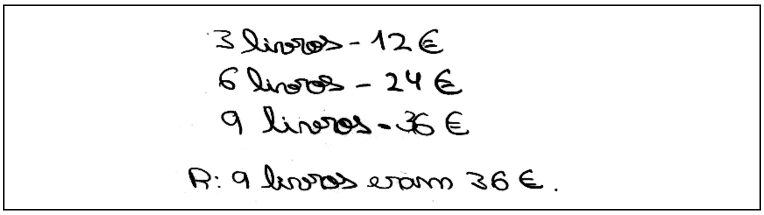


Figura 6.9. – Resposta de Carolina à questão 1.1 da primeira entrevista

Inicialmente a aluna usa a estratégia de composição, recorrendo a procedimentos multiplicativos e aditivos, para determinar o valor omisso. Carolina comunica esta estratégia em linguagem oral complementada pela representação visual e a linguagem matemática e natural escrita. Posteriormente, Carolina apresenta oralmente outra estratégia que envolve o cálculo da razão unitária e a adição sucessiva até ser determinado o valor omisso.

Para responder à questão 1.2 (ver a figura 6.10.), uma alínea do problema anterior (ver a figura 6.6.), Carolina mobiliza a estratégia descrita anteriormente e responde com correção.

1.2 Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar?

Figura 6.10. – Questão 1.2 da primeira entrevista

A aluna diz:

Carolina: Ah! Cada livro é 4 [euros]. Né?

Investigadora: Como?

Carolina: Vou escrever (ver a figura 6.11.). É quanto custa um livro, cada livro.

Investigadora: Ajuda-te a organizar o que estás a pensar?

Carolina: Hum? De escrever? Sim, para não me esquecer pois dos números. Posso fazer já para 10 e dá 40 e mais 1, não 2, dá 12 [livros] (ver a figura 6.11.).

Cada livro custa 4 €
Se 10 livros é 40 € mais 2 (8€) dá : 12 livros
R: Pode comprar 12 livros.

Figura 6.11. – Resposta de Carolina à questão 1.2 da primeira entrevista (parte 1)

O diálogo e o registo escrito em linguagem matemática e natural da aluna mostram que a sua estratégia envolve a razão unitária, calculada anteriormente, e usa essa informação para iniciar a estratégia de composição. Esta envolve procedimentos multiplicativos e aditivos até determinar o valor omisso.

Carolina mostra ser capaz de resolver oralmente o problema mas, no diálogo, parece querer dizer que faz registos escritos para monitorizar o seu trabalho, evitando erros por esquecimento.

A questão 3.1 é um problema de valor omisso (ver a figura 6.12.) e descreve um fenómeno do quotidiano que alguns alunos podem nunca ter vivenciado, apresentando números inteiros múltiplos de 2. Os fatores escalar e funcional, neste problema, são números não inteiros que devem ser considerados como elementos que aumentam a complexidade do problema.

Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 chávenas de água e 12 colheres pequenas de café. 3.1. Quantas colheres de café são necessárias se forem usadas 20 chávenas de água?

Figura 6.12. – Questão 3.1. da primeira entrevista

Carolina responde corretamente embora mostrando alguma dificuldade no início da resolução do problema:

Carolina: Sim. (Lê o problema novamente.) Primeiro que utilizar, tenho de ver quantas colheres dá para cada chávena.

Investigadora: Então...

Carolina: (Utiliza a calculadora.) 12 a dividir por 8... 1,5 Hum?!... (Na calculadora determina o quociente 8:12.) Ah! Agora aqui é que... (Volta a determinar o quociente 12:8.)

Investigadora: O que é que este valor significa? (Aponto para o visor da calculadora onde está 1,5.)

(…)

Carolina: Não sei se vou calcular assim (escreve na folha 12:8) ou da outra maneira (escreve na folha 8:12).

Investigadora: O que é que andas à procura? Ou então o que se dá mais jeito?

(…)

Carolina: 12 colher a divide por 8 chávenas. É este. Eu acho que é este.

Investigadora: Então e o outro [valor] o que será? E o que é que tu achas que significa?

Carolina: Não sei... Eu acho que é este [1,5]. (Passa algum tempo. Algum impasse.) Ah pois... (Parece continuar com dúvidas sobre o quociente que deve escolher...)

O diálogo revela que a aluna sabe dizer inicialmente o que pretende calcular mas mostra dificuldade em escolher qual das razões (12:8 ou 8:12) permite conhecer "quantas colheres dá para cada chávena". É provável que esta dificuldade resulte do facto de ambas as razões serem números não inteiros. Deste modo, abandona esta estratégia e inicia outra em que parece mais confiante:

Carolina: (Muda de estratégia.) Então se foram 16 chávenas é o dobro, é 24. (Passa algum tempo.) Ah! Então... Se for mais... Se for 16 [chávenas] é 24 colheres... 16 mais 4 dão as 20 chávenas. Pois eu tenho de é que descobrir o número de chávenas e depois aqui o 16... Mas depois já era 24, já era a mais se pusesse o triplo. (…) Acho que já sei. Se pusermos aqui o dobro dá 16 chávenas de água e 24 colheres de café.

Investigadora: Sim.

Carolina: E depois isto dá 16 chávenas para 20 faltam 4 chávenas. Então se for 4 chávenas. Deve ser 6 colheres de café. (Pede para escrever através do gesto com a mão. Ver a figura 6.13.)

Investigadora: Então vá...

Carolina: (Enquanto escreve vai repetindo o que já tinha dito.)

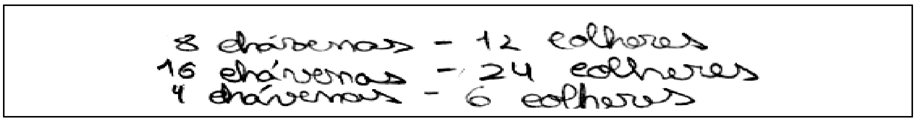


Figura 6.13. – Resposta de Carolina à questão 3.1 da primeira entrevista (parte 1)

Investigadora: E agora?

Carolina: Agora é só somar o 16 mais o 4 e dá 20 chávenas.

Investigadora: E as colheres de café?

Carolina: 6 colheres. Não! 30 colheres (ver a figura 6.14.).

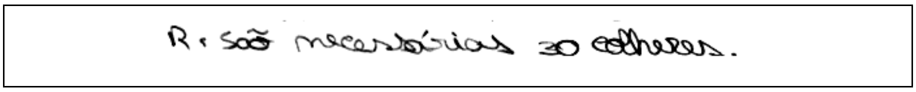


Figura 6.14. – Resposta de Carolina à questão 3.1 da primeira entrevista (parte 2)

Carolina opta pela estratégia de composição/decomposição na qual o primeiro passo é calcular o dobro do par numérico das variáveis envolvidas. Depois, mentalmente e sem fazer inicialmente qualquer registo escrito, verifica que o triplo do número inicial de chávenas de água ultrapassa as 20 chávenas, parecendo que calcula esse valor através da soma do dobro de 8 com 8. Então decide decompor os valores numéricos iniciais e calcula as respetivas metades, que adiciona para determinar o valor omisso. A estratégia da aluna envolve múltiplas representações, nomeadamente a linguagem oral, a visual (disposição da informação em colunas que designo como tabela elementar) e a linguagem matemática e natural escrita.

A questão 3.2 (ver a figura 6.15.) é uma alínea do problema anterior (ver a figura 6.12.), que tem um número inteiro como fator escalar.

3.2. Quantas chávenas de água são necessárias se forem usadas 18 colheres de café?

Figura 6.15. – Questão 3.2 da primeira entrevista

Em diálogo, a aluna responde corretamente:

Carolina: 18. (Passa algum tempo.) Então 18 colheres?

Investigadora: Qual é o problema do 18? Não gostas dele!

Carolina: (Ri.)

Investigadora: Vai dizendo... O que é que te está a fazer confusão? Se é que alguma coisa te está a fazer confusão.

Carolina: Acho que é 12 chávenas. Porque se fizermos 6 [colheres] vezes 3 dá o18 [colheres] (ver a figura 6.16).

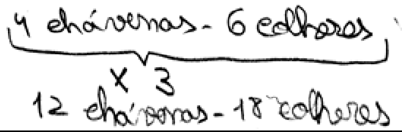


Figura 6.16. – Resposta de Carolina à questão 3.2 da primeira entrevista

Carolina usa a estratégia escalar (fator escalar 3) e determina mentalmente o valor omisso. A escolha desta estratégia parece depender do seu conhecimento sobre os múltiplos de 3. A aluna responde oralmente e em linguagem matemática e natural escrita.

A resolução dos dois problemas anteriores mostra que a aluna passa de uma estratégia de composição, que parece ser intuitiva, para uma estratégia escalar (multiplicativa, um só cálculo após para determinar o valor omisso) sendo que isto pode ser um meio para levar a Carolina a generalizar a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta.

A questão 10.2 do teste diagnóstico (ver a figura 6.17.) apresenta um problema do quotidiano que representa uma mistura. Os números do problema são inteiros e múltiplos de 3, sendo o valor conhecido do par numérico do valor omisso, superior a 30. Os fatores escalar e funcional são também números inteiros, sendo o primeiro fator substancialmente maior que o segundo. A informação do problema é parcialmente apresentada numa tabela.

Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate, quantos copos de leite serão necessários adicionar a 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

Figura 6.17. – Questão 10.2 do teste diagnóstico

24 copos de leite
6 colheres de chocolate

240 copos de leite
60 colheres de chocolate

Figura 6.18. – Resposta de Carolina à questão 10.2 do teste diagnóstico

O registo escrito mostra que a aluna usa a estratégia de composição, isto é, determina sucessivamente o dobro e décuplo dos valores numéricos iniciais. Contudo, não existe evidência da utilização da adição ou da multiplicação nos seus procedimentos de cálculo.

A questão 6 (ver a figura 6.19.) é um problema com um contexto de medida com objetos não convencionais (o fósforo e o clipe são as unidade de medida) o que poderá representar um elemento de dificuldade para os alunos. Os valores numéricos apresentados são inteiros múltiplos de 2 ou de 3 e os fatores escalar e funcional são ambos números não inteiros. Os dados do problema são parcialmente apresentados de forma pictórica (representação visual).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto.

Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

Figura 6.19. – Questão 6 do teste diagnóstico

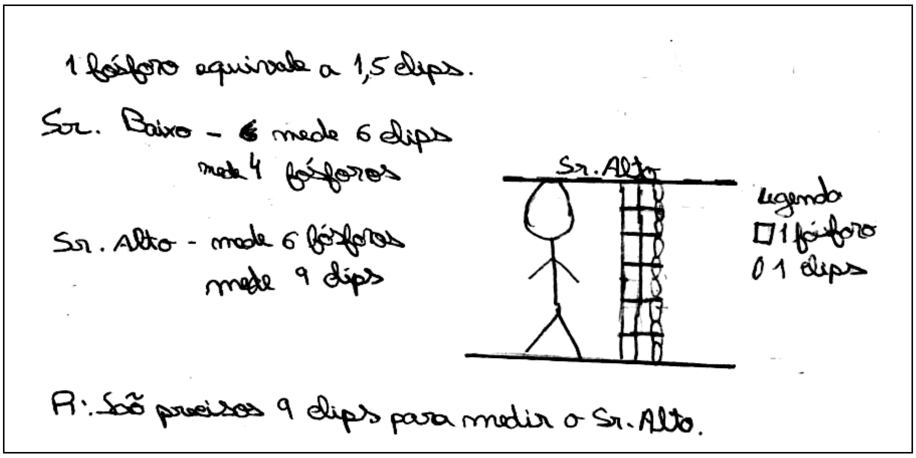


Figura 6.20. – Resposta de Carolina à questão 6 do teste diagnóstico

Carolina responde corretamente (ver a figura 6.20.) embora o seu registo não mostre como concluiu que 1 fósforo equivale a 1,5 clipes. No entanto, durante a primeira entrevista, a aluna esclarece que a sua estratégia é marcada pelos elementos pictóricos, diz que "primeiro fiz os fósforos no Sr. Baixo e vi que 1 fósforo era 1 clipe mais metade como aqui (…) depois fiz o Sr. Alto de meti lá 6 fósforos, estão aqui (aponta para os retângulos junto ao desenho do Sr. Alto) e depois foi colocar 1 clipes mais metade no tamanho de cada fósforo". A descrição da aluna mostra que a estratégia que usa para determinar o valor omisso é baseada em elementos pictóricos (representação visual), tendo sido desse modo que estabeleceu a relação entre o comprimento do fósforo e do clipe. A resposta da aluna envolve a linguagem matemática e natural escrita e a representação visual (elementos pictóricos).

Problemas de comparação. A questão 4 do teste diagnóstico (ver a figura 6.21.) é um problema que descreve um fenómeno que os alunos do 6.º ano já presenciaram pelo menos nas aulas de Educação Física. Os números apresentados no problema são inteiros e múltiplos de 2 e a razão entre o tempo e a distância é, em ambos os caso, inteira. Por se tratar de um problema com contexto, a aluna tem de fazer um julgamento qualitativo sobre a velocidade das atletas.

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

Figura 6.21. – Questão 4 do teste diagnóstico

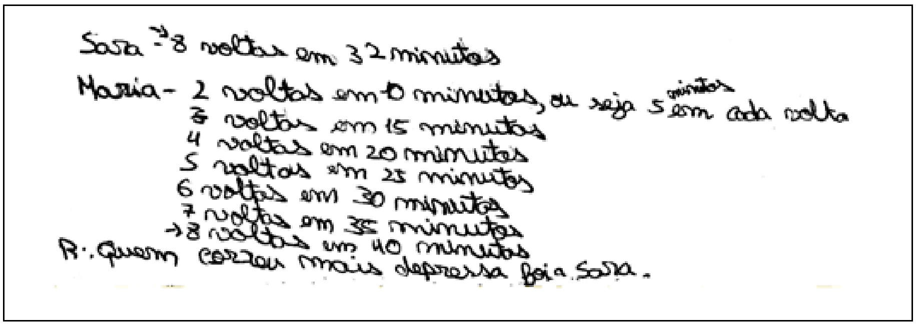


Figura 6.22. – Resposta de Carolina à questão 4 do teste diagnóstico

Carolina usa a estratégia de composição e responde corretamente (ver a figura 6.22.). Tendo como referência o par numérico dos dados da atleta Maria, a estratégia parece centrar-se apenas na adição sucessiva de uma e cinco unidades que correspondem, respetivamente, ao número de voltas e ao tempo. Quando fixa o número de voltas (8) compara os tempos das atletas e conclui que a Sara é a mais veloz por demorar menos tempo.

Num outro problema, a questão 4 da entrevista (ver a figura 6.23.) que descreve a partilha equitativa de pizas e envolve números inteiros múltiplos de 3 e 5 e razões não inteiras, Carolina responde de forma correta (ver a figura 6.24).

> Cinco raparigas partilharam três pizas e dez rapazes partilharam seis pizas.
> Quem comeu mais piza? As raparigas ou os rapazes?

Figura 6.23. – Questão 4 da primeira entrevista

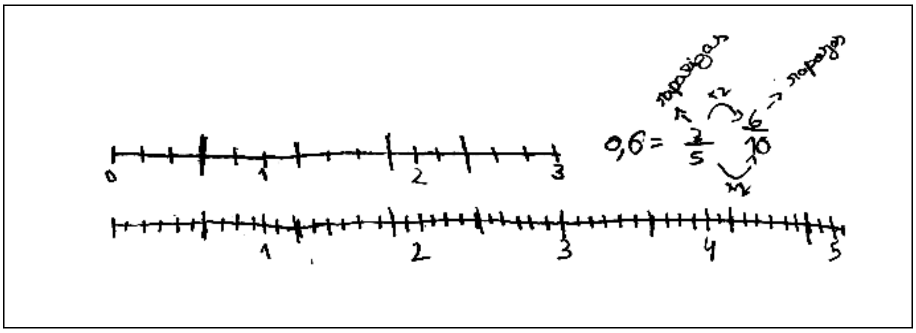


Figura 6.24. – Resposta de Carolina à questão 4 da primeira entrevista

Carolina é parca em palavras, desenha duas retas. Na primeira reta marca no início um tracinho e escreve zero, marca mais tracinhos (quase equidistantes) na vertical e no quinto (após o do zero) marca 1 e diz “isto é uma piza e vou dar uma fatia a cada uma [das raparigas]”. Continua o procedimento até indicar as 3 pizas na reta referindo “tenho de dividir isto pelas 5 [raparigas] (…) dá aqui” enquanto salienta os tracinhos verticais correspondentes a 0,6; 1,2; 1,8 e 2,4. Logo após, faz um procedimento semelhante na segunda reta e verifica que lhe falta espaço para marcar na reta a sexta piza. Perante esta adversidade, diz pretender "resolver de outra maneira" que corresponde à representação das razões na forma de fração "que até é mais fácil". Depois compara as razões através do fator escalar 2 e diz que "todos comeram o mesmo". Também diz que o resultado está certo porque a razão (6/10) que lê "6 décimos" corresponde ao número de tracinhos salientes da reta.

A estratégia inicial da aluna envolve a representação pictórica (visual) e é através desta que determina que cada rapariga come 6 décimos de uma piza. No entanto, um percalço na representação da informação dos rapazes na segunda reta leva ao abandono desta estratégia em que faz a partilha equitativa das pizas, respetivamente, pelo número de raparigas e rapazes. A aluna usa depois a representação na forma de fração e, usando o fator escalar 2, avalia a equivalência das razões.

O problema do teste diagnóstico (ver a figura 6.25.) envolve uma mistura de dois líquidos, os números inteiros são múltiplos de 2, 3 e 5, sendo a razão entre as quantidades de concentrado e de água não inteira. O problema pede um julgamento qualitativo sobre a intensidade do sabor a laranja.

Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de *Sunquick* (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de *Sunquick* a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

Figura 6.25. – Questão 8 do teste diagnóstico

Carolina responde e de forma correta (figura 6.26.) e usa a estratégia funcional sem explicar o significado da razão. Refere-se aos valores como "sabor a laranja de 1 copo" e não à quantidade de concentrado (colheres) por quantidade de água (copos). É provável que a sua decisão tenha sido facilitada pelo facto de as misturas apresentarem a mesma proporção de concentrado de laranja e água.

Segunda – 3 : 12 = 0,25 → sabor a laranja de 1 copo
Terça – 5 : 20 = 0,25 → sabor a laranja de 1 copo

R: Sim, os sumos tinham o mesmo sabor a laranja.

Figura 6.26. – Resposta de Carolina à questão 8 do teste diagnóstico

A questão 11 do teste diagnóstico é um problema (ver a figura 6.27.) que descreve um fenómeno do quotidiano que provavelmente todos os alunos do 6.º ano já vivenciaram: o custo de uma refeição. Os números presentes no problema são inteiros e não inteiros e as razões (preço unitário) são também números não inteiros. É pedido um julgamento qualitativo sobre em qual das mesas a refeição é mais cara, esse julgamento é possível ser feito apenas pela leitura e comparação dos valores numéricos.

11. Na pizzaria *Mama Mia* dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	5	65

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

Figura 6.27. – Questão 11 do teste diagnóstico

Carolina calcula o preço unitário da refeição em cada uma das mesas e compara-as, pelo que de forma correta (ver a figura 6.28.), indica ser na mesa B em que a refeição é mais cara. A estratégia é representada em linguagem matemática e natural escrita.

Mesa A - 48,80 : 8 = 6,1€ -> preço por pessoa

Mesa B - 65 : 10 = 6,5€ -> preço por pessoa

R: A Refeição foi mais cara na Mesa B.

Figura 6.28. – Resposta de Carolina à Questão 11 do teste diagnóstico

O problema da primeira entrevista sobre a mistura de tintas (ver a figura 6.29.) apresenta as quantidades de tinta preta e branca num registo visual, em que cada quadrícula preta e branca corresponde, respetivamente, a uma quantidade de tinta preta e branca (números inteiros). É pedido um julgamento sobre o tom da mistura, em particular, qual delas tem um tom mais escuro. O contexto do problema está associado às atividades das aulas de Educação Visual e Tecnológica, nas quais os alunos fazem misturas de tintas.

5. Na aula de EVT, a Inês e a Maria estão a juntar tinta preta com tinta branca para preparar tinta cinzenta. Qual das raparigas preparou tinta cinzenta mais escura?
5.1.

Figura 6.29. – Questão 5.1 da primeira entrevista

Em diálogo, a aluna diz:

Carolina: Isto é fácil

Investigadora: Ainda bem. Qual é a tinta mais cinzenta?

Carolina: (Desenha. Ver a figura 6.30.). Hum… Não, não me parece…

Investigadora: Diz o que está a pensar.

Carolina: Não é nada! Eu acho que tem a mesma cor de cinzento porque tem uma de tinta preta.

Figura 6.30. – Resposta de Carolina à questão 11 do teste diagnóstico

Carolina responde, de forma incorreta, que têm ambas a mesma tonalidade porque cada uma das misturas tem a mesma quantidade de tinta preta. Isto é, usa parcialmente os dados do problema para responder. Contudo, é de referir que inicialmente a aluna usa uma estratégia pictórica para reproduzir a mistura da Inês talvez com a intensão de a comparar coma a quantidade de tinta branca com a mistura de Maria.

6.2.2. Durante o desenvolvimento da unidade de ensino

Carolina é uma das alunas mais empenhadas em todas as tarefas apresentadas nas fichas de trabalho, o que não sendo uma atitude nova na aluna, revela que a mesma se mantém quando as tarefas envolvem a resolução de problemas não rotineiros. De facto, é uma aluna disponível para aprender, isto é, envolve-se na resolução dos problemas e mostra satisfação com esses desafios. Outro aspeto merecedor de atenção é a capacidade de Carolina em explicar aos colegas de grupo com dificuldade, de forma mais elementar (por exemplo, através de desenhos) uma estratégia mais elaborada (por exemplo, a que envolve a escrita e interpretação da razão).

As tarefas presentes nas fichas de trabalho 1 e 2 parecem ter sido do agrado de Carolina, de facto, a aluna entusiasma-se com as discussões e mais do qualquer outro colega do seu grupo esforça-se por explicar o que está a fazer. É provável que o entusiasmo também resulte das discussões com o seu colega Mauro, sobre o contexto dos problemas e procedimentos de cálculos. No capítulo 5 é descrito parte do trabalho do grupo de Carolina, na realização da investigação proposta na ficha de trabalho 1. É apresentado um diálogo que mostra como a aluna comunica ao grupo o modo como está a pensar e ainda um registo do relatório apresentado pelo grupo, no qual descrevem o trabalho realizado. Na discussão da resolução das tarefas das fichas 1 e 2, Carolina participou ativamente, quer de forma voluntária quer a pedido da professora. De referir, que muitas vezes a aluna pediu para intervir, colocando o dedo no ar, sem que esse pedido tenha sido concedido pela professora. De assinalar, ainda, o contributo dado por Carolina ao explicar, usando palavras próprias, a relação de covariação e invariância na corrida da tartaruga (ficha de trabalho 1) e a relação multiplicativa entre distância, tempo e velocidade (ficha de trabalho 2) durante as fases do trabalho de grupo e na discussão da tarefa. Nesta última, a professora chamou a atenção dos outros alunos para a explicação de Carolina, procurando colocar o foco na natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, usando as ideias apresentadas por Carolina.

A realização das tarefas das fichas de trabalho 3, 4 e 5 foram concluídas sempre dentro do período de tempo estipulado para tal, resultado da manutenção do ritmo de trabalho de Carolina e Mauro que de forma assertiva não deixam as duas outras colegas conversar sobre assuntos exteriores às tarefas. Sem colocar em causa o bom desempenho da aluna, é provável que a qualidade do seu trabalho fique a dever-se em parte ao grupo. Este é um dos dois grupos da turma que, segundo a professora, melhor geriu as tarefas e os conflitos na modalidade de trabalho de grupo, tendo em consideração a idade dos alunos.

Considerando os contributos de Carolina na resolução das tarefas das três primeiras fichas de trabalho e o seu desempenho no teste intermédio e na segunda entrevista, pode-se dizer que na resolução de problemas de valor omisso a aluna faz uma passagem poderosa da estratégia de composição/decomposição para a estratégia escalar. De facto, a sua estratégia inicial não é colocada em causa e a generalização da natureza multiplicativa da proporcionalidade direta permite-lhe usar as estratégias escalar e funcional às quais a aluna confere eficiência durante a resolução das tarefas da ficha de trabalho 3.

A turma de Carolina realizou o teste intermédio após a realização da tarefa 3 e a entrevista à aluna foi realizada seis dias depois do teste intermédio, durante uma parte da aula de Área de Projeto, antes da entrega e correção do teste intermédio.

Problemas pseudoproporcionais. Este tipo de problemas, no teste intermédio, apresenta uma estrutura sintática semelhante à dos problemas de comparação. A questão 5.4. apresenta um problema pseudoproporcional que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 6.31.) e Carolina revela compreender que não existe uma relação de proporcionalidade direta (ver a figura 6.32.).

5.4. Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.

Figura 6.31. – Questão 5.4. do teste intermédio

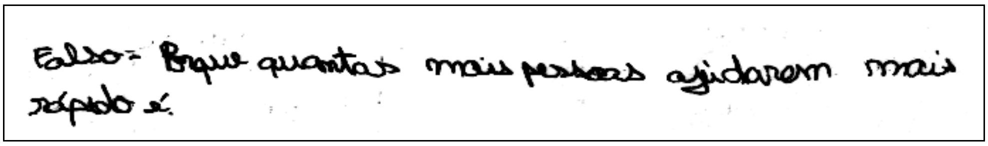


Figura 6.32. – Resposta de Carolina à questão 5.4. do teste intermédio

A aluna mostra compreender que se trata de uma relação em que as variáveis se comportam de modo inverso e usa o seu conhecimento intuitivo para negar a afirmação feita no problema. A resposta é apresentada em linguagem natural escrita.

O problema pseudoproporcional em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade (ver a figura 6.33.) apresenta um fenómeno do quotidiano e números inteiros. Carolina reconhece a inexistência de uma relação de proporcionalidade direta entre o número de raparigas e o tempo que demoram a chegar à escola (ver a figura 6.34.).

5. Indica se cada frase é verdadeira ou falsa e explica o raciocínio que utilizaste, em cada caso, para poderes responder: 5.1 Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos duas levam 20 minutos.

Figura 6.33. – Questão 5.1 do teste intermédio

Falso - Porque vai 1 rapariga ou 2 juntas levam o mesmo tempo a chegar à escola.

Figura 6.34. – Resposta de Carolina à questão 5.1 do teste intermédio

A aluna argumenta, com base no seu conhecimento intuitivo, que 1 ou 2 raparigas que vão juntas para a escola, demoram o mesmo tempo no percurso, mostrando compreender que não se trata de uma relação de proporcionalidade direta. A resposta é apresentada unicamente em linguagem natural escrita.

Problemas de valor omisso. A questão 2 do teste intermédio (ver a figura 6.35.) apresenta um problema que descreve um fenómeno do quotidiano, aparentemente simples, e números inteiros múltiplos de 2. Os fatores escalar e funcional são também números inteiros. Carolina usa duas estratégias diferentes e responde corretamente (ver a figura 6.36.).

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 6.35. – Questão 2 do teste intermédio

	Rosas Brancas	Rosas amarelas
1 ramo →	2	4
2 ramos →	4	8
3 ramos →	6	12
4 ramos →	8	16
5 ramos →	10	20

Em cada ramo há sempre o dobro de rosas amarelas. Logo dez rosas (brancas), tem que ser o dobro de amarelas, logo o dobro de 10 é 20.

R: Tinha de utilizar 20 rosas amarelas.

Figura 6.36. – Resposta de Carolina questão 2 do teste intermédio

A estratégia inicial de Carolina é a composição aditiva sucessiva de 2 (rosas brancas) e 4 (rosas amarela) (esclarecimento prestado pela aluna durante a entrevista). Esta estratégia envolve a representação visual (tabela) e a linguagem escrita. A estratégia inicial permite o estabelecimento da relação funcional entre o número de rosas brancas e amarelas, pois a aluna diz que as rosas amarelas são o dobro das brancas. Deste modo, usa a estratégia funcional (fator funcional 2, o dobro) para determinar o valor omisso.

O trabalho da aluna mostra que, na resolução de problemas de valor omisso, está numa fase em que tende a usar a estratégia em que se sente confortável, no entanto, mobiliza parte do trabalho realizado nas primeiras aulas e estabelece uma relação funcional. Deste modo, o trabalho em torno da exploração das relações multiplicativas, de forma direcionada, pode ajudar o aluno a abandonar as estratégias não proporcionais (por exemplo, composição através da adição sucessiva) e fazer usa das estratégias proporcionais (por exemplo, a estratégia funcional).

A questão 1 do teste diagnóstico (ver a figura 6.37.) apresenta um problema que descreve um fenómeno do quotidiano mas provavelmente não vivenciado por alguns alunos. Os números presentes no problema são inteiros múltiplos de 5, o fator escalar é um número inteiro mas o fator funcional é um número não inteiro. Carolina usa a estratégia escalar (ver a figura 6.38.) e responde corretamente.

Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 10 minutos a percorrer 15 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

Figura 6.37. – Questão 1 do teste intermédio

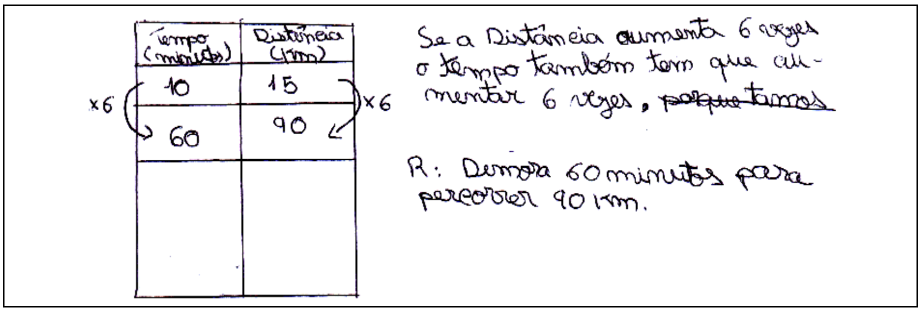


Figura 6.38. – Resposta de Carolina questão 1 do teste intermédio

A estratégia envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita. Contudo a aluna não mostra qual o procedimento que usa para determinar o fator escalar sendo provável que o tenha feito mentalmente porque os valores numéricos referentes ao tempo são múltiplos de 10.

A tabela, tal como se apresenta, parece indicar que a aluna pode pensar que precisa de colunas grandes para usar a morosa estratégia de composição, exigindo o cálculo de vários valores intermédios.

Na segunda entrevista, a questão 2.3 apresenta um problema (ver a figura 6.39.) que descreve um contexto do quotidiano aparentemente fácil para alunos do 6.º ano de escolaridade, envolvendo números inteiros múltiplos de 5 e ambos os fatores são também números inteiros. Este problema prevê que o valor omisso seja determinado através da leitura e interpretação de um gráfico.

> Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

Figura 6.39. – Questão 2.3. da segunda entrevista

Carolina responde que “isso é fácil porque aqui [n.º de embalagens] anda de 5 em 5 e aqui [n.º de pilhas] anda de 4 [quadrados] em 4 [quadrados] ” e “4 [quadrados] é 20 pilhas”. E acrescenta, “pontos ficam todos em linha assim. (Faz um gesto com a mão sobre os pontos desenhados.), a linha da proporcionalidade” e o ”ponto das 25 embalagens, tem de ficar em cima da linha proporcional como os outros (...) e isso vai dar 100 pilhas” (ver a figura 6.40).

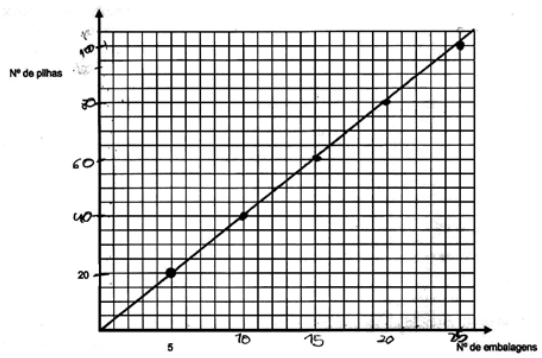


Figura 6.40. – Resposta de Carolina à questão 2.3 da segunda entrevista

Carolina explica a covariação das variáveis enquanto escreve os sucessivos valores numéricos nos eixos ordenados. Quando marca os pontos no gráfico descreve o aspeto gráfico (“linha da proporcionalidade”) da relação de proporcionalidade direta e determina o valor omisso (100 pilhas). O modo como a aluna diz pensar para determinar os valores das coordenadas nos eixos do gráfico não mostra se usa um raciocínio multiplicativo. Contudo, é de evidenciar que a aluna mostra compreender que a relação de covariação se mantém em diferentes representações, neste caso num gráfico, o que pode representar um aprofundamento do seu conhecimento sobre a proporcionalidade direta.

Problemas de comparação. O problema apresentado na questão 3 do teste intermédio (ver a figura 6.41.) descreve um fenómeno do quotidiano com o qual os alunos desta faixa etária já lidaram. O problema apresenta números inteiros múltiplos de 3 e de 5, a razão unitária (açúcar:chá) do jarro B é um número inteiro e as restantes razões unitárias são números não inteiros e exige um julgamento sobre o sabor adocicado dos chás. Carolina usa a estratégia funcional e responde corretamente explicando com clareza o seu julgamento qualitativo (ver a figura 6.42.).

Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce? Justifica a tua resposta.

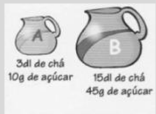
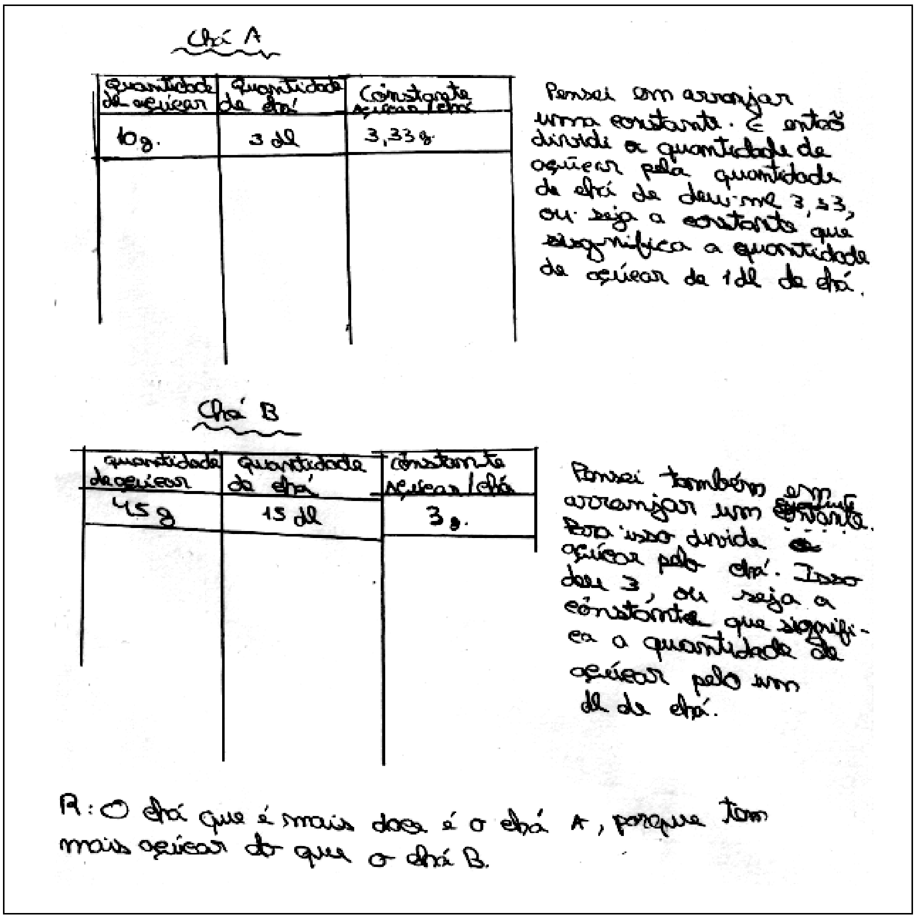


Figura 6.41. – Questão 3 do teste intermédio



Chá A

Quantidade de açúcar	Quantidade de chá	Constante açúcar/chá
10g.	3 dl	3,33g.

Pensei em arranjar uma constante. E então dividi a quantidade de açúcar pela quantidade de chá deu-me 3,33, ou seja a constante que significa a quantidade de açúcar de 1dl de chá.

Chá B

quantidade de açúcar	Quantidade de chá	constante açúcar/chá
45g	15 dl	3g.

Pensei também em arranjar uma constante. Para isso divido o açúcar pelo chá. Isso deu 3, ou seja a constante que signifi-ca a quantidade de açúcar pelo um dl de chá.

R: O chá que é mais doce é o chá A, porque tem mais açúcar do que o chá B.

Figura 6.42. – Resposta de Carolina à questão 3 do teste intermédio

A aluna constrói duas tabelas e pelo comprimento das colunas parece considerar a realização de explorações numéricas, o que pode ser interpretado como o querer fazer uso do trabalho realizado nas primeiras aulas e que envolvia tabelas com mais do que dois pares numéricos. Carolina diz investigar se existe uma constante de proporcionalidade e como não encontra a constante de proporcionalidade, pois as razões entre as quantidades de açúcar e de chá não são equivalentes, a aluna conclui que o chá do jarro A, com 3,(3) gramas de açúcar por decilitro de chá, é o mais adocicado. A estratégia de Carolina envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

A questão 4 do teste intermédio (ver a figura 6.43.) apresenta um contexto do quotidiano, envolvendo a compra de bens e é provável que os alunos já tenham vivenciado essa situação. O problema apresenta números inteiros e não inteiros, as razões são números não inteiros e é pedido um julgamento sobre os bens mais económicos. Carolina responde corretamente (ver a figura 6.43.).

Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.

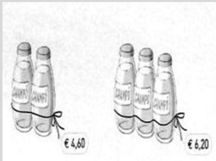
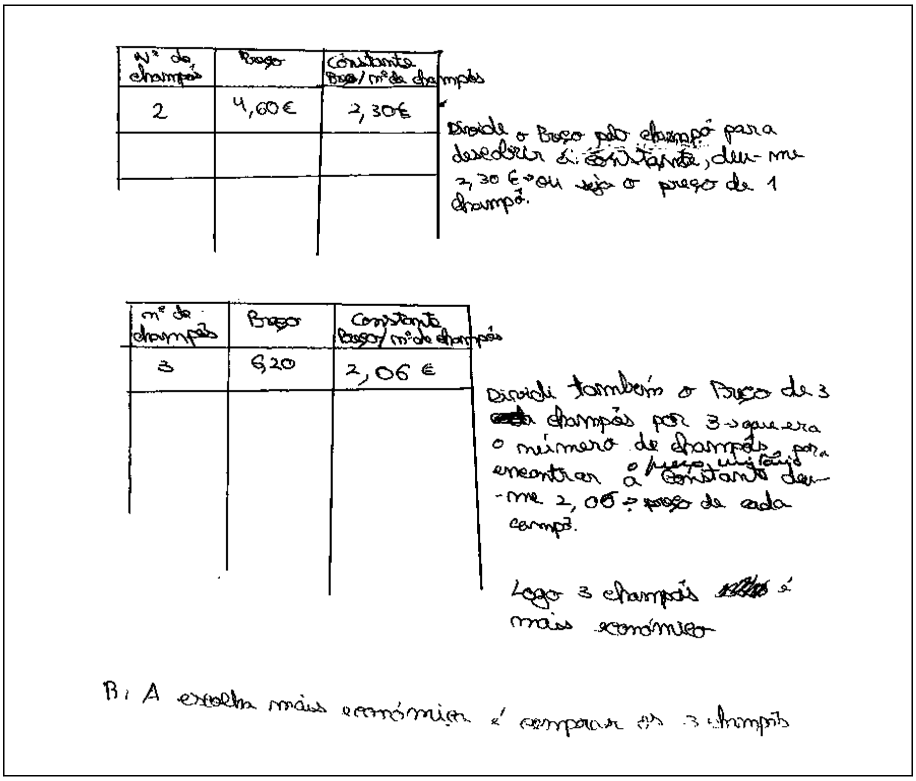


Figura 6.43. – Questão 4 do teste intermédio



Nº de champôs	Preço	Constante Preço/nº de champôs
2	4,60 €	2,30 €

Dividi o preço pelo champô para descobrir a constante, deu-me 2,30 € ou seja o preço de 1 champô.

nº de champôs	Preço	Constante Preço/nº de champôs
3	6,20	2,06 €

Dividi também o preço de 3 champôs por 3 que era o número de champôs para encontrar a constante o preço unitário deu-me 2,06 preço de cada champô.

Logo 3 champôs é mais económico

R: A escolha mais económica é comprar os 3 champôs

Figura 6.44. – Resposta de Carolina à questão 4 do teste intermédio

A estratégia de Carolina na resolução do problema é igual à usada na resolução do problema anterior (ver as figuras 6.41. e 6.42.), isto é, usa uma estratégia funcional para averiguar a existência de proporcionalidade direta. Contudo, como a razão unitárias dos conjuntos de champô é diferente e, tendo por base o significado da razão, explica que o conjunto com três frascos de champô é a opção mais económica. A representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita estão presentes na estratégia da aluna.

A classificação de Carolina no teste intermédio foi "Muito Bom", o que parece ter ido ao encontro das suas expectativas, tendo partilhado todo o seu contentamento com a investigadora durante a segunda entrevista. Disse ter percebido "muito bem a matéria" e ter estudado "bem as fichas de trabalho" da unidade de ensino.

6.2.3. Final da unidade de ensino

A turma de Carolina realizou o teste final duas aulas após o término da experiência de ensino. A entrevista à aluna foi realizada seis dias depois desse teste, durante a aula de Área de Projeto. A realização da entrevista antecedeu a entrega do teste final corrigido pela professora.

Problemas pseudoproporcionais. O problema presente na questão 1.7 do teste final (ver a figura 6.45) descreve um fenómeno que não é do quotidiano. Na situação apresentada não há uma relação de proporcionalidade direta entre o comprimento do inseto e o tempo decorrido.

1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

1.7

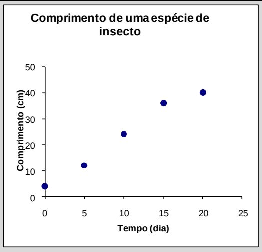
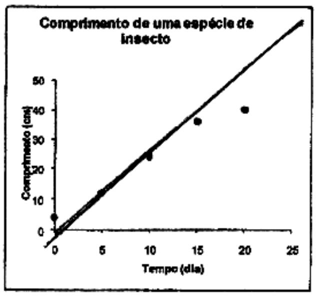


Figura 6.45. – Questão 1.7 do teste final

Carolina indica aspetos gráficos da relação de proporcionalidade direta, analisados durante o desenvolvimento da unidade de ensino, para justificar a sua inexistência (ver a figura 6.46.) no fenómeno descrito no problema. De facto, como indica a aluna, os pontos não se situam sobre a reta e nem esta "começa" na origem dos eixos (0,0).



R: Não é proporcional, porque se nós fizermos uma linha na diagonal que passasse pelo ponto 0 os pontinhos tinham que ficar em cima dela e neste gráfico a maior parte delas não fica.

Figura 6.46. – Resposta de Carolina à questão 1.7 do teste final

A questão 1.8 do teste final apresenta outro problema que descreve um fenómeno em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade direta ou inversa (ver a figura 6.47.). O problema apresenta s sintática de um problema de comparação.

> 1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.
>
> 1.8. Se uma camisola demora 20 minutos a enxugar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos.

Figura 6.47. – Questão 1.8. do teste final

Carolina responde corretamente (ver a figura 6.48.) usando o seu conhecimento intuitivo, diz que uma ou cinco toalhas demoram o mesmo tempo a enxugar, isto é, as variáveis são independentes uma da outra.

R: Não, porque estando no estendal 1 camisola ou 5 demorão o mesmo tempo a enxugar

Figura 6.48. – Resposta de Carolina à questão 1.8 do teste final

Num problema pseudoproporcional que apresenta uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 6.49.), a questão 1.6 do teste final, é descrito um fenómeno do quotidiano. A estrutura sintática do problema é semelhante aos problemas de comparação.

> 1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.
>
> 1.6. Se 5 operários levam 15 dias a pintar uma escola, então 1 só operário leva 3 dias a pintar a escola.

Figura 6.49. – Questão 1.6. do teste final

Carolina responde de forma incorreta (ver a figura 6.48) pois considera tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta e usa a estratégia escalar para comparar os valores numéricos.

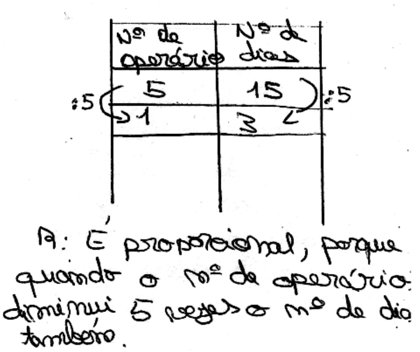


Figura 6.50. – Resposta de Carolina à questão 1.4. do teste final

Durante a terceira entrevista, a aluna não indica um motivo para a levou a considerar a existência da relação de proporcionalidade direta mas mostra algum descontentamento por ter errado “um problema tão fácil”. Contudo, esclarece que nestes problemas tem de ter muita atenção porque tem que ”ver bem do que fala [contexto] o problema e perceber os números” e como “os números estão em proporção” aceitou de imediato tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta.

Problemas de valor omisso. A questão 5.1 do teste final (ver a figura 6.51.) é um problema que descreve um fenómeno do quotidiano já estudado durante a unidade de ensino. Os números apresentados no problema são inteiros, o valor omisso pedido é não inteiro e os fatores escalar e funcional são números inteiros.

5. A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos com uma velocidade constante.

5.1. Quanto tempo gasta a percorrer 1 metros? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 6.51. – Questão 5.1 do teste final

A aluna usa a estratégia escalar e responde corretamente (ver a figura 6.52.).

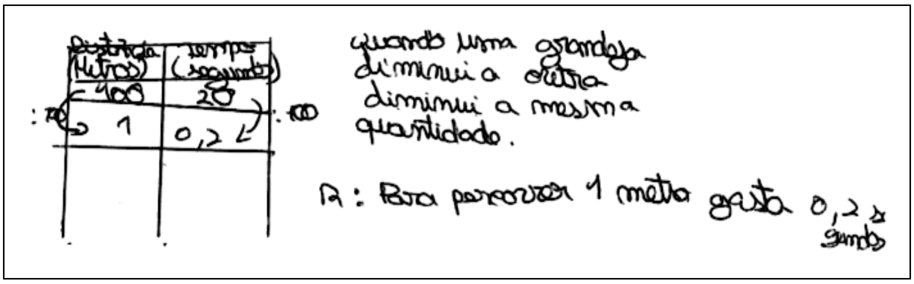


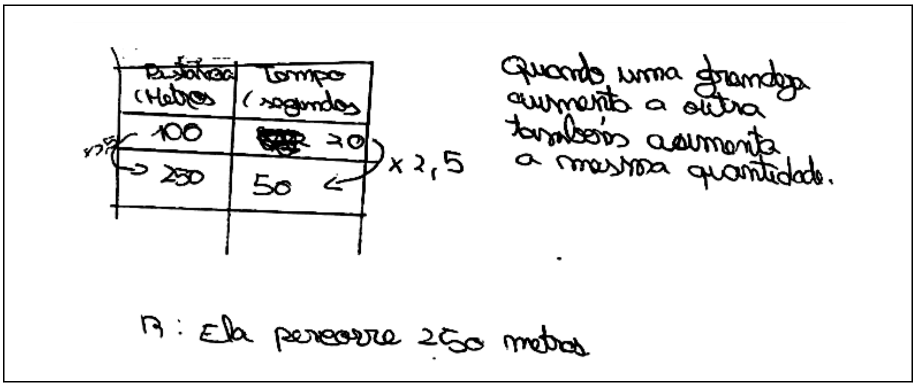
Figura 6.52. – Resposta de Carolina à questão 5.1 do teste final

Carolina representa os dados numa tabela e utiliza a divisão para determinar o valor omisso, mostrando de forma clara o uso da estratégia escalar. Não é possível saber como é calculado o fator escalar mas tendo em consideração os números envolvidos a aluna deve tê-lo feito mentalmente (100:1=100). No entanto, escreve um erro quando explica a diminuição dos valores numéricos das variáveis ao dividir por 100, pois a centésima parte de 100 não é a mesma quantidade que a centésima parte de 20. A aluna deveria ter escrito que as variáveis diminuem na mesma proporção. A estratégia da aluna envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natura escrita.

A questão 5.2 (ver a figura 6.53.) é uma alínea do problema anterior (ver a figura 6.51.) em que os fatores escalar e o funcional são, respetivamente, não inteiro e inteiro. Carolina usa a estratégia escalar, a mesma que usa na resolução do problema anterior e apresenta uma resposta correta (ver a figura 6.54.).

5.2. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 6.53. – Questão 5.2. do teste final



Distância (Metros)	Tempo (segundos)
100	20
250	50

x 2,5

Quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta a mesma quantidade.

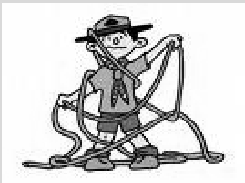
R: Ela percorre 250 metros

Figura 6.54. – Resposta de Carolina à questão 5.2. do teste final

A estratégia da aluna inclui a representação dos dados numa tabela e utiliza a multiplicação para determinar o valor omisso, indicando de forma clara o uso da estratégia escalar. Durante a entrevista, a aluna diz ter calculado o fator escalar com o auxílio da calculadora, esclarecendo que dividiu 50 por 20. Carolina escreve um erro, igual ao indicado na resposta ao problema anterior, pois diz existir o aumento dos valores numéricos das variáveis quando multiplica por 2,5. A estratégia da aluna envolve a representação visual (tabela) e a de escrita simbólica.

O problema seguinte, a alínea 1.1 da terceira entrevista (ver a figura 6.55.), apresenta um fenómeno de partilha de bens, isto é, do quotidiano. Os números envolvidos no problema são inteiros múltiplos de 2 e de 5 e os fatores são não inteiros.

1. No fim de semana passado um grupo de dez escuteiros fez um acampamento. Durante esse tempo o grupo comeu oito pães de forma.



1.1. No próximo fim de semana um grupo com quinze escuteiros vai fazer um acampamento semelhante. Quantos pães devem ser levados para a alimentação do grupo? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 6.55. – Questão 1.1. da terceira entrevista

Em diálogo Carolina responde:

Carolina: Isso é fácil… (Revela confiança.) Vou ver 10 é 8 pães. Comem, comem 8 pães. Eu quero saber 15, quantos pães comem. Agora vou ver…

Investigadora: Sim, estas a interpretar bem.

Carolina: 10 para 15 Ponho assim os números de pães para o fim de semana... (Inicial o registo escrito). É multiplica por 1, 5, não é? Dá 15.

Investigadora: Como é que estás a pensar?

Carolina: 15 a dividir por 10 dá 1,5. Vou confirmar na… (Usa a calculadora.) É isso, é 1,5. E 8 vezes 1,5 dá 12. (ver a figura 6.56). Cada miúdo come, não, os 15 [escuteiros] comem 12 pães.

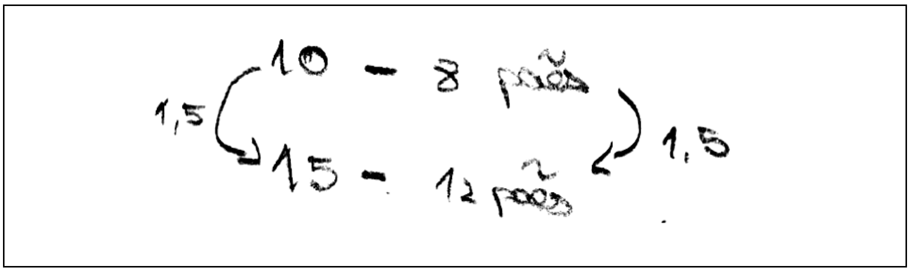


Figura 6.56. – Resposta de Carolina à questão 1.1 da terceira entrevista

A entrevista permite conhecer o uso da estratégia escalar pela aluna na resolução do problema. O fator escalar (1,5) é calculado mentalmente e verificado na calculadora. Ao questionar a aluna sobre a ausência daquela estratégia em que fazia “muitos cálculos e escrevia muitas linhas”, ela diz que já sabe como se passa de “um número para outro” como “aqui do 10 para 15 é uma vez mais meia (...) antes também sabia mas tinha de fazer metade de 10 e depois somava 10 mais 5 (...) e o mesmo com este [nº de pães]”. A estratégia da aluna envolve a representação oral pois trata-se de uma entrevista, mas também faz uso da representação visual (tabela) e da escrita simbólica.

Tendo em consideração a tendência, verificada no trabalho de Carolina, para o uso da estratégia escalar na resolução de problemas de valor omisso, pedi-lhe para mostrar se pode resolver a questão 1.2, uma alínea do mesmo problema, de outra maneira. A questão 1.2 (ver a figura 6.57.) apresenta números inteiros e os fatores são números não inteiros.

1.2. Se houvesse 44 pães quantos escuteiros podiam estar no acampamento? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 6.57. – Questão 1.2. da terceira entrevista

Carolina diz:

Carolina: Vou… De outra maneira? (…) Posso dividir… Dividir os pães pelos miúdos.

Investigadora: Pode. É como quiseres.

Carolina: Vai 10 escuteiros dá 8 pães e quero saber quantos [escuteiros] comem 44 pães. Sim (Escreve a informação.)

Investigadora: Disseste que ias dividir os pães.

Carolina: Pelos escuteiros. É para saber o que come cada um. 8 a dividir por 10 é… É oito décimas. (Escreve 8:10=0,8) Professora, o 0,8 é constante [de proporcionalidade] porque todos comem o mesmo. Cada um.

Investigadora: A mesma quantidade de pão. E quanto é?

Carolina: Cada um come 0,8 do pão.

Investigadora. Ok. E quantos escuteiros comeram os 44 pães?

Carolina: (…) De 10 para 8 multiplico por 0,8. E de 8 para 10 tenho de dividir. Hum… (Usa a calculadora.) É! Agora é 44 a dividir por 0,8 e dá… Oh, 55. São 55 escuteiros

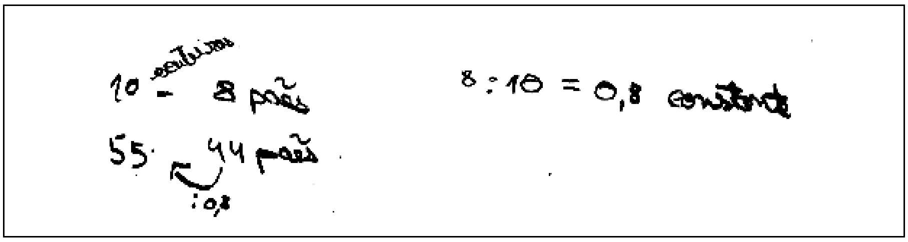


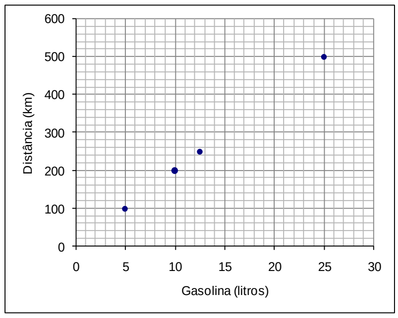
Figura 6.58. – Resposta de Carolina questão 1.2 da terceira entrevista (parte 1)

Carolina mostra ser capaz de usar a estratégia funcional descrevendo com pormenor o modo como pensa, em particular, os procedimentos de cálculo e as decisões que toma para os realizar. O fator funcional é também explicado com clareza. Tratando-se de uma entrevista, a resolução do problema não se cinge à representação oral pois esta é complementada pela visual e linguagem matemática e natural escrita.

Quando questionada sobre qual das estratégias mais usa, Carolina responde de imediato que prefere usar a estratégia escalar sem apresentar um motivo forte. De facto, diz apenas que essa é a estratégia que melhor sabe e que usa “nos problemas para um dos números” (problemas de valor omisso). Questionada no sentido de perceber se os números do problema influenciam o uso dessa estratégia, Carolina responde que não utiliza na maioria dos problemas de valor omisso a estratégia escalar, a “não ser que tenha números muito difíceis”.

A questão 3.2 do teste final é uma das alíneas de um problema que envolve um gráfico (ver a figura 6.59.).

3. O gráfico mostra o consumo de gasolina feito por um carro.



3.2. Será possível identificar no gráfico a quantidade de gasolina que este carro gasta para percorrer 400 km? Explica como pensaste.

Figura 6.59. – Questão 3.2 do teste final

Carolina indica corretamente que é possível saber esse valor omisso através da representação gráfica (ver a figura 6.60.) porque se trata de uma relação de proporcionalidade direta e descreve o procedimento de leitura do gráfico para determinar o valor omisso. Por seguinte, a reta é usada para indicar o ponto (20, 400), isto é, 20 corresponde ao número de litros de combustível (valor omisso) necessário para percorrer 400 quilómetros.

Sim, porque se é proporcional, basta seguir na linha da distância até à linha diagonal e depois daí até a linha da gasolina, que dá 20 litros de gasolina.

Figura 6.60. – Resposta de Carolina à questão 3.2 do teste final

O problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo (ver a figura 6.61.) consta do teste diagnóstico e do teste final, pelo que a sua descrição está junto da figura 6.19. Carolina usa duas estratégias – pictórica e escalar – e responde corretamente (ver a figura 6.62.).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto.

Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

Figura 6.61. – Questão 4.1 do teste final

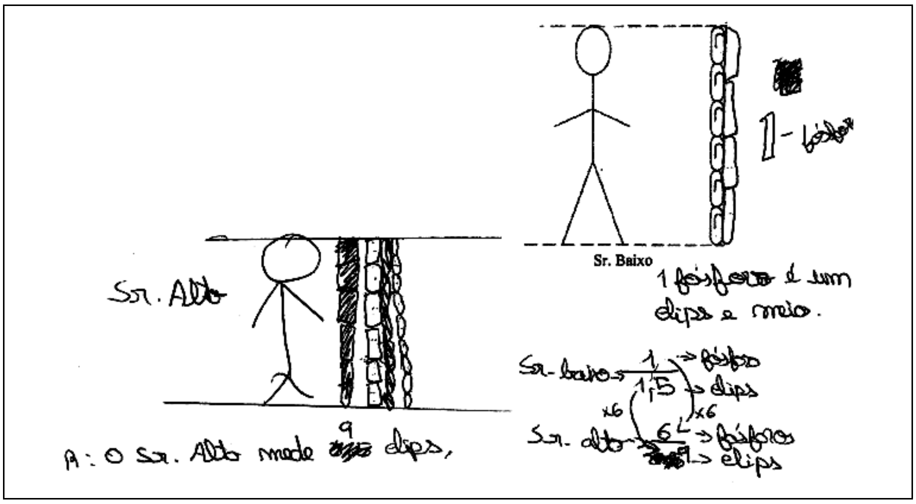


Figura 6.62. – Resposta de Carolina questão 4.1 do teste final

O registo do trabalho da aluna mostra o uso de duas estratégias. A primeira estratégia da aluna deve ter sido a pictórica, isto é, usa o desenho do Sr. Baixo para dispor os fósforos e determinar a razão entre o número de fósforos e de clipes, posteriormente, desenha o Sr. Alto e mede-o com fósforos e clipes e conclui que este mede 9 clipes. A segunda estratégia é escalar, faz uso da informação obtida pela medição do Sr. Baixo (1 fósforo para 1,5 clipes), Carolina escreve a razão na forma de fração e posteriormente escreve a razão equivalente usando o fator escalar 6. Na resolução do problema a aluna usa a representação visual (desenhos) e a escrita (linguagem matemática e natural).

Problemas de comparação. A questão 6 apresenta um problema que descreve o fenómeno de dissolução já usado em outros problemas da unidade de ensino (ver a figura 6.63.) O problema envolve três pares numéricos, com números inteiros e não inteiros (representação decimal e em fração), as razões são números inteiros e não inteiros e exige um julgamento qualitativo. Carolina usa a estratégia funcional e responde de forma correta (ver a figura 6.64.).

A Luísa preparou três jarros com diferentes capacidades com sumo de laranja. Antes de servir o sumo a Luísa adicionou açúcar a cada um dos jarros.

Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)
A	1	4
B	1,5	6
C	$\frac{3}{4}$	2

Investiga se existe algum sumo de laranja que seja mais doce? Justifica a tua resposta.

Figura 6.63. – Questão 6 do teste final

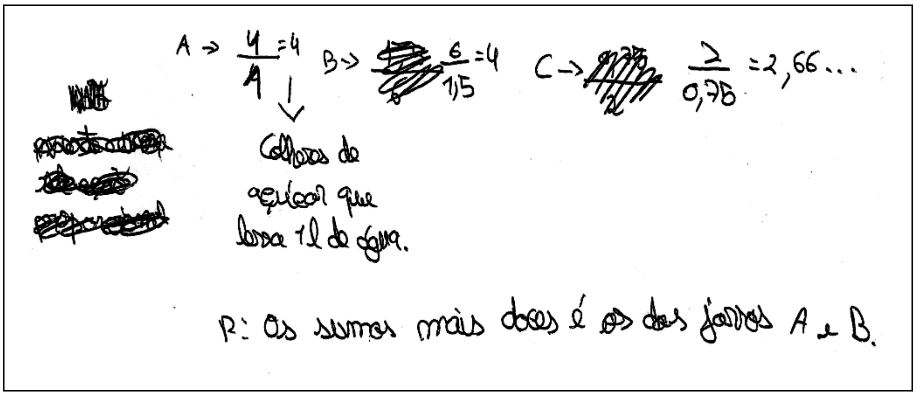


Figura 6.64. – Resposta de Carolina à questão 6 do teste final

A estratégia da aluna envolve inicialmente a passagem da informação da representação em tabela para a representação em razão (forma de fração) que representa a relação entre a quantidade de açúcar e a de sumo de laranja. Depois a aluna converte as razões na forma decimal e faz a comparação dos valores numéricos, o que lhe permite dizer que os sumos dos jarros A e B são os mais doces. A aluna redige com clareza o significado das razões.

A questão 5 da entrevista apresenta um problema sobre mistura de tintas (ver a figura 6.65.), um fenómeno analisado durante a unidade de ensino e que requer julgamento qualitativo. Os números apresentado no problema são números inteiros e não inteiros e as razões são números não inteiros.

> A Carolina e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Carolina preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês misturou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Figura 6.65. – Questão 5 da entrevista

Em conversa com a investigadora, a aluna diz:

Carolina: Ah. Este não é fácil! Isto…

Investigadora: Ai é? Então porquê?

Carolina: É que eu não sei explicar professora. É uma coisa…

Investigadora: Diz lá. Tens sempre opinião, Carolina. Diz e não penses que eu vou achar que é um disparate.

Carolina: É… Como é que vou dizer… Parece esquisito falar de tintas com número.

Investigadora: Já percebi. Parece-te estranho o problema. Já sabes que a matemática anda por aí em todo o lado. (…) Então resolve lá o problema.

Carolina. Ah. (…) Vou pôr 3 de branca é 2,5 de verde e 2 de branca é 1,5. (Faz o registo superior da figura 6.64.) Hum… Pois. (…) Estes números parecem fáceis mas não são!

Investigadora: Ai é? Porquê?

Carolina: Tenho de fazer uma tabela para perceber melhor. Agora vou ver as razões… (Escreve a razão verde:branco das duas misturas. Ver a figura 6.66.) Dá decimal, os verdes são diferentes. Vou fazer a outras… (Escreve a razão branco:verde das duas misturas.) As misturas são diferentes porque não há uma constante [de proporcionalidade].

Investigadora: E então? O que é que achas? Já disseste que…

Carolina: Não sei se sei explicar bem. A mistura da Carolina, a minha, [mistura] é mais verde (ri) porque tem mais tinta verde para 1 litro de tinta branca.

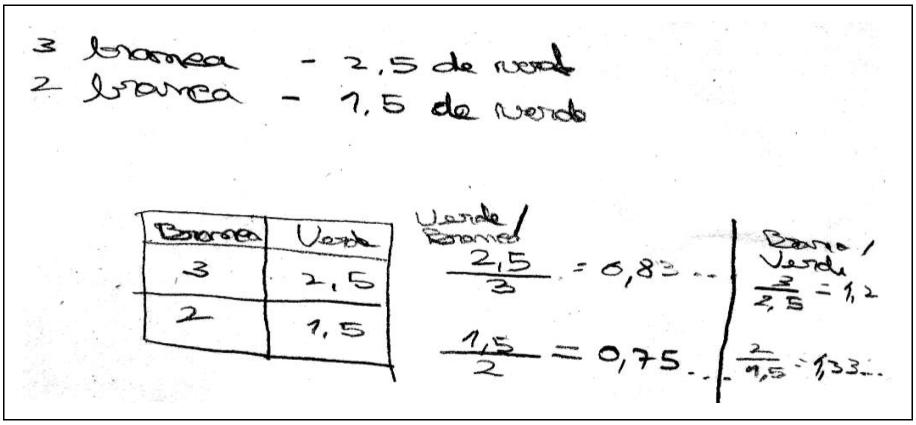


Figura 6.66. – Resposta de Carolina à questão 5 da terceira entrevista

Carolina usa a estratégia funcional na resolução correta do problema que considera difícil. A estratégia implica várias representações, isto é, duas tabelas (uma elementar e outra mais elaborada) e as razões (verde:branco e branco:verde) na forma de fração e decimal, parecendo este processo fundamental para a aluna compreender de forma aprofundada o problema e decidir os procedimentos a realizar. Carolina mostra compreender o significado das razões e que a não existência de constante de proporcionalidade implica a diferença no tom de verde das tintas. A estratégia da aluna envolve a representação oral pois trata-se de uma entrevista, a visual (tabelas) e a escrita simbólica.

6.2.4. Síntese

Esta secção apresenta uma síntese do desempenho de Carolina, em cada tipo de problema, ao longo da unidade de ensino.

Problemas pseudoproporcionais. No início da unidade de ensino, a aluna revela compreender que nem todos os fenómenos descritos nos problemas envolvem uma relação de proporcionalidade direta. De facto, Carolina identifica a relação aditiva e a relação de proporcionalidade inversa mas considera, de forma incorreta, existir uma relação de proporcionalidade direta quando as variáveis não têm relação proporcional ou aditiva.

Os problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação de proporcionalidade inversa configuram uma dificuldade a Carolina. No início da unidade de ensino não responde à questão que apresenta esse problema e esclarece na entrevista que receava estar a pensar mal, isto é, que o fenómeno descrito não seria modelado pela proporcionalidade direta. A aluna resolve corretamente este tipo de problema no teste intermédio mas erra no teste final. Considera que o motivo do seu erro reside nos números do problema que a induziram a aceitar a existência de proporcionalidade direta e a minimizar a importância do fenómeno descrito no problema. Situação diferente verifica-se nos problemas pseudoproporcionais em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade inversa. De facto, no teste diagnóstico a aluna considera, de forma errada, a existência de proporcionalidade direta nesse tipo de problema e usa a estratégia de composição. Durante a unidade de ensino e no seu final, melhora o desempenho na resolução deste tipo de problemas pseudoproporcionais e os argumentos, baseados no seu conhecimento intuitivo, indicam com clareza que as variáveis não têm relação proporcional ou aditiva. Quando este tipo de problema apresenta dados através da representação gráfica, usa argumentos que caracterizam o aspeto gráfico da relação de proporcionalidade direta para justificar a sua inexistência.

Os erros da aluna identificados na resolução dos problemas pseudoproporcionais devem-se ao facto desta considerar a existência de uma relação de proporcionalidade direta. Nestas situações usa a estratégia de composição/decomposição e a estratégia escalar na resolução dos problemas.

Na resolução correta de problemas pseudoproporcionais Carolina usa várias representações mas, no seu trabalho, predomina a linguagem matemática e natural escrita. É de salientar que, como este tipo de problemas são apresentados à aluna em testes, não se espera que a representação oral seja usada a não ser quando é pedido um esclarecimento durante entrevista.

Problemas de valor omisso. No início da unidade de ensino Carolina resolve corretamente todas os problemas de valor omisso e usa tendencialmente a estratégia de composição/decomposição na qual constam procedimentos aditivos e multiplicativos. Deste modo, mostra sentido de covariação das variáveis e usa estratégias pré-proporcionais não revelando compreender, de forma clara, a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Na resolução de um problema que envolve a compra de bens (ver a figura 6.8.) mostra sentido de invariância e calcula a razão unitária (preço unitário) mas num outro problema (ver a figura 6.12.) não distingue qual das razões é aquela que pretende, acabando por abandonar a estratégia pela composição. Na resolução de um problema (ver a figura 6.16.), em que parece conhecer bem as relações entre os números, usa a estratégia escalar, uma estratégia proporcional. Resolve o problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo (ver a figura 6.20.) através da estratégia pictórica, talvez por apresentar uma representação visual.

Durante a realização da unidade de ensino, em resultado do trabalho desenvolvido nas fichas de trabalho, Carolina parece estar numa fase de aprofundamento do seu conhecimento sobre a relação de proporcionalidade direta. Por exemplo, na resolução do problema apresentado na questão 2 do teste intermédio, usa a estratégia de composição aditiva. No desenvolvimento desta resolução, provavelmente em resultado do trabalho de exploração numérica, realizado nas fichas de trabalho 1 e 2, a aluna usa a estratégia funcional quando estabelece e descreve a relação entre o número de rosas brancas e amarela. Assim, usa inicialmente uma estratégia não proporcional e a partir desta, uma estratégia funcional. Carolina também mostra ser capaz de determinar o valor omisso através da representação gráfica (ver a figura 6.40.).

No fim da unidade de ensino, a estratégia escalar, uma estratégia proporcional, é aquela que a aluna usa preferencialmente, parecendo ser nesta estratégia que se sente mais confiante para calcular com sucesso o valor omisso. É provável que a estratégia escalar represente, para a aluna, a evolução da estratégia de composição/decomposição pois, na resolução da questão 1.1 da terceira entrevista (ver a figura 6.56.), revela que, nesse momento, sabe calcular o fator escalar. O uso desta estratégia parece não ser influenciado pelo fenómeno descrito no contexto do problema, pelos números envolvidos nem pela representação presente no enunciado do problema. No entanto, quando solicitado, usa a estratégia funcional na resolução de um problema. Durante e no fim da unidade de ensino as representações presentes nas estratégias de resolução dos problemas são as visuais (tabela) e a escrita simbólica (linguagem matemática e natural), incluindo nos problemas das entrevistas.

Problemas de comparação. No início da unidade de ensino, Carolina resolve corretamente a maioria dos problemas de comparação e, para isso, usa várias estratégias e representações. Usa a estratégia de composição (procedimento aditivo), isto é, uma estratégia não proporcional, na resolução de um dos problemas mas tendencialmente usa a estratégia de funcional (procedimento multiplicativo), isto é, uma estratégia proporcional, na resolução deste tipo de problemas. Estas estratégias, nos diferentes problemas, revelam o uso de múltiplas representações, tais como a visual (por exemplo, a reta numérica, ver a figura 6.24.), a escrita simbólica (por exemplo, representação da razão na forma de fração, ver a figura 6.24.) e linguagem oral que está presente nas respostas às questões da primeira entrevista.

Durante a realização da unidade de ensino e no seu final, continua a usar a estratégia funcional na resolução de problemas de comparação, uma estratégia proporcional. Neste percurso, a aluna revela estar a apropriar-se da noção de constante de proporcionalidade e continua a revelar cuidado em explicar o significado da razão unitária ou da constante de proporcionalidade (no caso da existência de proporcionalidade direta). No final da unidade de ensino a aluna usa também esta estratégia em problemas que envolvem a comparação da tonalidade da mistura de tintas, ultrapassando a sua dificuldade inicial. De referir que na resolução deste problema a aluna usa várias representações, o que parece ter contribuído para organizar os dados de modo a aprofundar o conhecimento do problema e tomar uma decisão sobre o "passo" seguinte a tomar. A representação das duas razões (verde:branco e branco:verde) parece também tê-la ajudado a lidar com o julgamento qualitativo sobre o tom da tinta. Finalmente, durante a unidade de ensino e no seu final, as representações presentes nas suas estratégias, são sobretudo, a visual (tabela) e a escrita simbólica (razão, na forma de fração).

Capítulo 7

Percurso de aprendizagem de Célia

7.1. Apresentação

Célia é uma rapariga de onze anos, serena e simpática. Embora revele alguma timidez, preferindo a companhia dos colegas que a acompanham desde o 1.º ciclo de escolaridade, relaciona-se bem com outros colegas, professores e funcionários da escola. Vive na periferia da cidade de Lisboa, num bairro próximo da escola, com os pais. Nos tempos livres gosta de jogos, de praticar ginástica e ver televisão.

Na escola, Célia é considerada uma aluna com um desempenho razoável, em todas as disciplinas. De acordo com o seu diretor de turma, é tida como trabalhadora e empenhada pelos professores, embora o seu esforço pareça ser traído por alguma ansiedade que revela durante a realização dos testes de avaliação, impedindo-a de obter melhores resultados. Na disciplina de Matemática, à semelhança do que foi observado durante a experiência de ensino, é uma aluna atenta que realiza todas as tarefas que lhe são pedidas mas que espontaneamente participa pouco. A aluna revela ter um frágil sentido de número, o que se reflete no recurso sistemático à utilização de algoritmos ou da calculadora para realizar operações aparentemente simples, tendo em consideração que frequenta o 6.º ano. De salientar, que a sua experiência escolar no 1.º ciclo ficou marcada pela sucessiva mudança de professores nos primeiros anos, o que na opinião do seu encarregado de educação, transmitida ao diretor de turma, influencia negativamente o atual desempenho da aluna, em particular, no que diz respeito à Matemática. Para ajudar Célia a melhorar as suas aprendizagens, o encarregado de educação diz fazer um acompanhamento à sua educanda, seguindo de perto as lições. Célia tem alguma dificuldade em trabalhar com tarefas de investigação/exploração por constituírem uma novidade na sua experiência escolar. No entanto, desde o início do 2.º ciclo tem melhorado a capacidade de resolução de problemas, de comunicação escrita e oral do seu trabalho e ainda a clareza com que apresenta suas dúvidas à professora.

Durante a realização das tarefas em grupo, Célia é participativa mas tem dificuldade em impor as suas ideias, pelo que a professora opta em colocá-la num grupo que aceite mais facilmente a participação de todos. Esta situação, foi tida em consideração durante a experiência de ensino.

Tendo em conta a sua idade e experiência, Célia revela dominar os procedimentos básicos de utilização do um computador. Conhece razoavelmente a folha de cálculo Excel, sabe organizar informação simples em tabelas, utilizar os comandos das operações e converter a informação representada em tabelas em gráficos. Durante a experiência de ensino, embora atenta, Célia deixou que o trabalho em suporte digital fosse realizado por um colega de grupo, preferindo envolver-se ativamente na redação das respostas.

7.2. Capacidade de raciocínio proporcional

Nas secções seguintes analiso as respostas de Célia a diferentes tipos de problemas apresentados em testes e em entrevistas. As três primeiras secções correspondem respetivamente aos momentos antes, durante e após a experiência de ensino. Na segunda secção descrevo parcialmente o trabalho da aluna na realização das tarefas da ficha de trabalho. Na quarta secção apresento uma síntese sobre a evolução do desempenho de Célia em cada tipo de problema.

7.2.1. Antes da experiência de ensino

Nesta secção analiso as respostas de Célia a problemas do teste diagnóstico e à primeira entrevista. De referir que, durante a entrevista, foi pedido à aluna que esclarecesse algumas das suas resoluções das questões colocada no teste diagnóstico.

Problemas pseudoproporcionais. Nesta secção analiso as respostas de Célia às questões do teste diagnóstico, que envolvem problemas pseudoproporcionais. A questão 2 é um problema (ver figura 7.1.) tido como gerador de uma estratégia proporcional embora envolva uma relação aditiva.

> O Gil e o Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista. Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas faz o Tomás?

Figura 7.1. – Questão 2 do teste diagnóstico

Célia responde corretamente identificando a relação aditiva e o seu registo escrito (ver a figura 7.2.) mostra que a aluna faz uma contagem de um em um para determinar o número de voltas do Tomás. Na representação dos dados do problema e daqueles que resultam do seu procedimento é usada uma tabela. A resposta envolve também uma frase em que a aluna evidência o número total de voltas dadas pelo Gil e pelo Tomás.

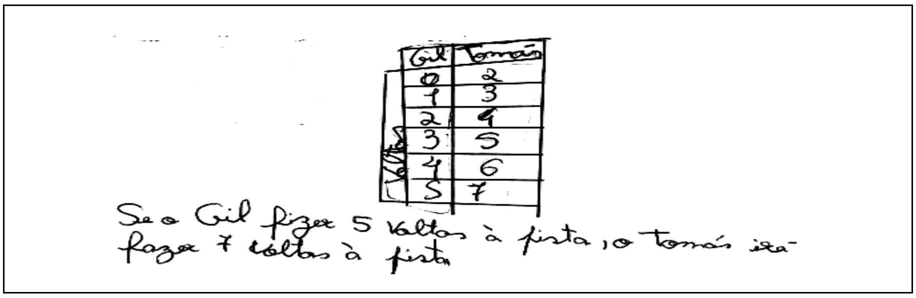


Figura 7.2. – Resposta de Célia questão 2 do teste diagnóstico

Num outro problema pseudoproporcional, que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver figura 7.3.).

> 12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

Figura 7.3. – Questão 5 do teste diagnóstico

Inicialmente, Célia considera tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta (ver figura 7.4) como se pode verificar pelo número de dias que escreve na linha três e quatro, respetivamente 2,5 e 1,25, que decide riscar. Depois “lembrei-me que se há menos operários, vai demorar mais dias” (Célia, primeira entrevista). O reconhecimento que o número de operários varia inversamente ao número de dias necessários para construir a vedação foi considerado como suficiente para a resposta ser aceite como correta. No entanto, a resposta que apresenta, em termos numéricos, não está correta, a aluna escreve 15, em vez de 20.

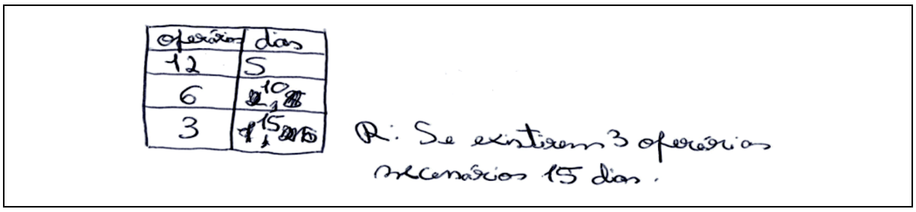


Figura 7.4. – Resposta de Célia questão 5 do teste diagnóstico

Na sua resolução a aluna escreve as metades sucessivas do número de operários e deve ter reconhecido alguns dos primeiros múltiplos de 3 (ordem decrescente) e decide escrever na coluna referente ao número de dias os múltiplos de 5 (ordem crescente) após ter percebido a variação inversa das variáveis. O seu erro resulta de não ter percebido que na coluna referente ao número de operários não está o 9 ao qual corresponderia os 15 dias. A estratégia da aluna envolve o uso tabela e um procedimento que envolve a composição/decomposição dos números.

Num problema pseudoproporcional em que não existe uma relação aditiva ou proporcional (ver figura 7.5.), Célia considera erradamente que existe proporcionalidade direta como revela a sua estratégia de resolução (ver figura 7.6.).

A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria 3 toalhas a enxugar?

Figura 7.5. – Questão 9 do teste diagnóstico

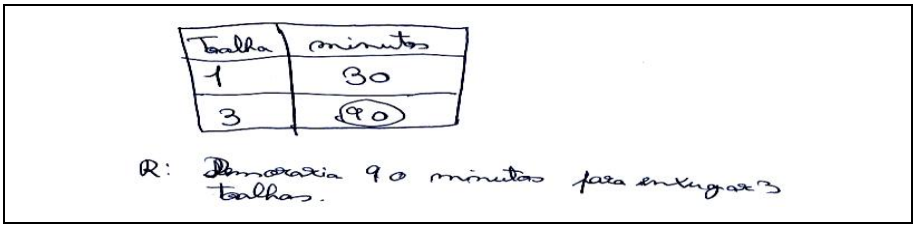


Figura 7.6. – Resposta de Célia à questão 9 do teste diagnóstico

Não é possível conhecer o tipo de procedimento usado para determinar o suposto valor omisso mas é provável que aluna tenha obtido o valor 90 calculando o triplo de 30. Os dados e a resposta são apresentados numa tabela e é complementada por uma frase. De salientar que durante a realização do teste diagnóstico, um aluno da turma a Célia questionou a professora, em voz alta, sobre o facto de as toalhas terem sido estendidas ao mesmo tempo, no entanto, tal esclarecimento parece não ter sido tomado em consideração por nenhum dos alunos.

Problemas de valor omisso. Na resposta à questão 7 do teste diagnóstico (ver figura 7.7.), Célia revela compreender que o tempo e o número de quilómetros variam na mesma proporção (ver a figura 7.8.).

> Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, quanto tempo levará a percorrer 125 quilómetros?

Figura 7.7. – Questão 7 do teste diagnóstico

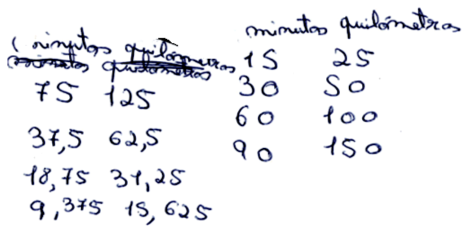


Figura 7.8. – Resposta de Célia Questão 7

Para determinar o valor omisso é usada a estratégia de composição/decomposição, cujo procedimento parece ter sido iniciada na tabela à direita, onde se encontra os dados do par numérico indicado no enunciado da questão. Nessa tabela elementar não é percetível se a composição numérica apresentada na tabela da esquerda foi obtida por um raciocínio aditivo (adição do número de cada linha a si próprio) ou um multiplicativo (dobro do número inscrito nas linhas da tabela). Quando a aluna determina o par numérico – 90 minutos e 150 quilómetros – que excede os 125 quilómetros enunciados, pára a construção desta tabela e organiza outra, no registo da aluna a que se encontra á esquerda, cujo primeiro par numérico parece resultar da adição do primeiro e terceiro pares numéricos da tabela mais à direita. Nesta última escreve, sem sentido aparente, as metades dos valores numéricos de linha anterior. A informação é registada em colunas algo desordenada e é por isso a designo por tabela elementar e não é complementada por qualquer outro registo.

Durante a primeira entrevista para na resposta à questão 1.1 (ver figura 7.9.).

> A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros.
> 1.1. Quanto custam 9 livros?

Figura 7.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, a aluna diz:

Célia: Penso que 3 livros custam 12 euros. 3 vezes 3 é 9. E 3 vezes 12 vai dar o resultado. Faço? [Escrevo?]

Investigadora: Sim. Faz como quiseres.

Célia: (Escreve o seguinte registo. Utiliza a calculadora para determinar o produto de 3 por 12.)

$3 \times 3 = 9$
$3 \times 12 = 36$ euros

Figura 7.10. – Resposta de Célia questão 1.1 da primeira entrevista

Investigadora: 3 vezes 3, porquê?

Célia: 3 livros vezes 3 vai dar 9 livros. 9 livros é 3 vezes 3. E 3 vezes 12 vai dar os euros.

Célia responde corretamente reconhecendo de imediato a relação de triplo entre os dados referentes ao número de livros. A estratégia desenvolvida para determinar o valor omisso é multiplicativa, fator escalar 3, correspondendo este ao primeiro número de cada uma das expressões escritas pela aluna. No entanto, para responder à questão 1.2 (ver figura 7.11.), Célia revela alguma dificuldade como mostra o diálogo com a investigadora.

1.2. Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar?

Figura 7.11. – Questão 1.2 da primeira entrevista

A aluna diz:

Célia: Agora é mais fácil fazer uma tabela.

Investigadora: Mais fácil. Porque dizes isso?

Célia: Porquê? Assim escrevo as ideias...

Investigadora: Ajuda-te a organizar o que estás a pensar?

Célia: Sim. (...). Dá 72.

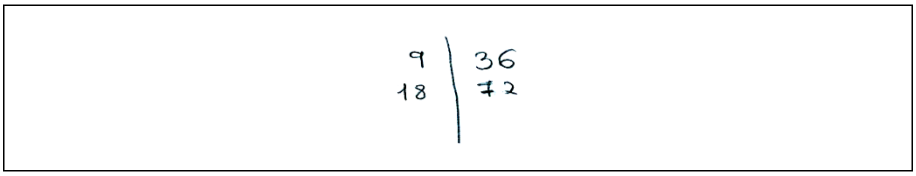


Figura 7.12. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 1)

Investigadora: Como é que passaste para aqui? (Aponto para a segunda linha da tabela.)

Célia: Multipliquei por 2. É o dobro. (Acrescenta mais informação ao seu registo.)

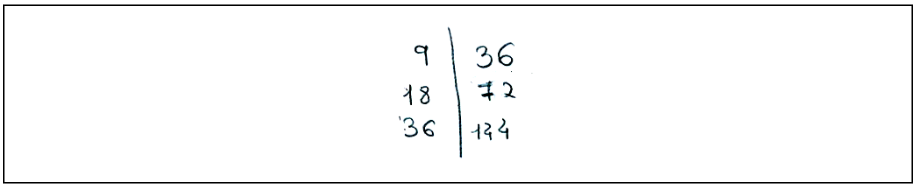


Figura 7.13. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 2)

Investigadora: E agora, o que estás a fazer?

Célia: Eu acho que assim não vai dar.

Investigadora: Não. Porquê?

Célia: 48 euros, é aqui. (Aponta para o espaço no papel entre os números 36 e 72.)

Investigadora: E então? Qual é o problema?

Célia: (Passa algum tempo.)

Investigadora: Diz o que não entendes. Relembro-te que isto não é um teste é uma conversa, só tens de me dizer o que estás a pensar.

Célia: Não vai dar porque o 48 já está, já passou.

O diálogo e os registos da aluna mostram uma estratégia de composição, de natureza multiplicativa suportada pelo cálculo do dobro dos números escritos em cada linha. A impossibilidade de determinar o valor omisso através desta estratégia só é detetada pela aluna após calcular o dobro de 36 o que poderá estar relacionado com o facto de a aluna não ter identificado as variáveis e ter por algum momento, perdido o significado dos valores numéricos.

O diálogo também mostra que Célia considera a tabela uma representação facilitadora da resolução de problemas onde vai colocando "as ideias", isto é, a informação inicial e os números que resultam de cálculos intermédios necessários até conseguir determinar o valor omisso. Entretanto, Célia faz uma nova tentativa para resolver o problema:

> **Célia:** Vou tentar... Fazer de outra maneira. (Passa algum tempo.) Já deu. (Apresenta o seguinte registo.)

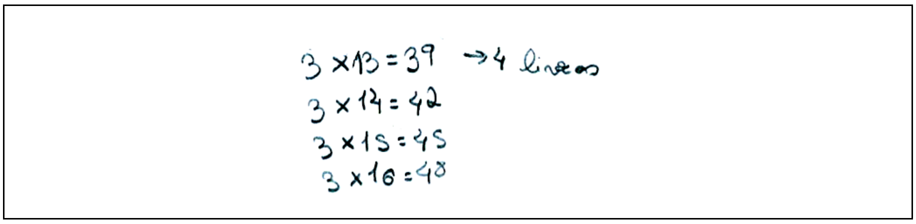


Figura 7.14. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 3)

> **Investigadora:** Já deu! Então diz lá como pensaste.
>
> **Célia:** 3 vezes 16, 48.
>
> **Investigadora:** E o que significa o 3?
>
> **Célia:** 3 livros. 3 livros vezes 16 euros.
>
> **Investigadora:** Recordo-te que 3 livros custam 12 euros.
>
> **Célia:** Então...
>
> **Investigadora:** Este 13, é o quê? (Aponto para a expressão 3x13.)
>
> **Célia:** Era os 12 euros mais 1 livro.
>
> **Investigadora:** E aqui? (Aponto para a 3x14.)
>
> **Célia:** (Passa algum tempo.) Não pode ser 4 livros. Acho que está mal. Não sei...

Nesta última tentativa a aluna mobiliza a relação multiplicativa usada para resolver a questão 1.1., através da qual consegue determinar o número 48. No entanto, é evidente que a aluna não compreende bem o seu procedimento pois, por exemplo, ao ser questionada diz que o número 13 representava "12 euros mais 1 livro". De fato, só quando a investigadora relembra a informação dada pelo enunciado do problema, a aluna pondera a possibilidade de o seu resultado está errado e talvez, por conhecer bem o contexto do problema e das quantidades envolvidas, não desiste de o resolver.

> **Célia:** Acho que... É melhor ver quanto custa 1 livro. Se fizer 12 a dividir por 3. (Utiliza a calculadora.) 1 livro é 4 euros, 40 livros, não! Com 48 euros posso comprar 12 livros. (Faz o registo seguinte.)

12 : 3 = 4 €

48 : 4 = 12

Figura 7.15. – Resposta de Célia questão 1.2 da primeira entrevista (parte 4)

Nesta nova abordagem Célia decide determinar a razão unitária que utiliza para determinar o número de livros que são passíveis de adquirir com 48 euros. Esta estratégia é multiplicativa e funcional uma vez que relaciona as duas variáveis envolvidas no problema. Nesta última tentativa a aluna apresenta as indicações das operações entre os valores numéricos e os respetivos resultados, acrescentando o símbolo do euro a um dos quocientes.

Durante a entrevista, na resolução de um problema de valor omisso (ver figura 7.16.), a aluna diz nunca o ter vivenciado o fenómeno descrito.

Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 chávenas de água e 12 colheres pequenas de café.
3.1. Quantas colheres de café são necessárias se forem usadas 20 chávenas de água?

Figura 7.16. – Questão 3.1. da primeira entrevista

Célia constrói uma tabela elementar (ver figura 7.17.) e explica como pensou à investigadora.

água	café
8	12
16	34
32	68

Figura 7.17. – Resposta de Célia questão 3.1 da primeira entrevista (parte 1)

Investigadora: Como é que pensaste daqui para aqui? (Aponto para as segunda e terceira linhas da tabela.)

Célia: Ah? Multipliquei por 2... Já passou!

Investigadora: Porque dizes que já passou?

Célia: Porque é... Deste lado [esquerdo da tabela].

Investigadora: Como passaste daqui para aqui? (Aponto para as terceira e quarta linhas da tabela.)

Célia: Multipliquei por 2. (…) Já passou! Não dá…

Investigadora: Diz-me uma coisa, nesta tabela só utilizas os dobros?

Célia: Não. Posso fazer com outros números.

Investigadora: Quais? Queres tentar outra vez?

Célia: Pode ser.

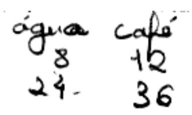


Figura 7.18. – Resposta de Célia questão 3.1 da primeira entrevista (parte 2)

O diálogo revela que a aluna desenvolve estratégias de composição de natureza multiplicativa, que envolvem apenas fatores inteiros (dobro e triplo). Deste modo, Célia não consegue determinar o número de colheres de café (valor omisso) apesar de os números serem todo pares e de usar a representação em tabela.

Para responder à questão 3.2 (ver figura 7.19.) que envolve o mesmo contexto.

3.2. Quantas chávenas de água são necessárias se forem usadas 18 colheres de café?

Figura 7.19. – Questão 3.2 da primeira entrevista

A aluna responde:

Célia: Hum... Estava a pensar. (Lê a questão em voz baixa.) E agora tem 18. (Parece um pouco confusa.) 8 para 12 e dá 4. E agora tiro 4 ao 18 e dá o resultado. (Ver a figura 7.20.)

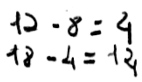


Figura 7.20. – Resposta de Célia à questão 3.2 da primeira entrevista

Investigadora: 14 quê?

Célia: 14 chávenas de água.

A aluna calcula a diferença entre o número de colheres de café e o número de chávena (4) e utiliza esse valor para determinar o valor omisso, escrevendo duas expressões em linguagem matemática. Incorretamente, o invariante 4 existe para a aluna que parece satisfeita com a sua resposta, sendo provável que o considere como o corresponde à razão unitária.

No problema 10.2 do teste diagnóstico (ver figura 7.21.), Célia usa uma estratégia multiplicativa mas revela uma outra dificuldade (ver figura 7.22).

Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate, quantos copos de leite serão necessários adicionar a 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

Figura 7.21. – Questão 10.2 do teste diagnóstico

Leite (n.º de copos)	12	20
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

Se 12 : 3 = 4
60 : 3 = 20

Figura 7.22. – Resposta de Célia questão 10.2 do teste diagnóstico

A aluna calcula a razão unitária (4) mas o seu significado - número de copos de leite por cada colher de chocolate – parece não ser claro para a aluna. De facto, de modo incorreto, divide 60 por 3 em vez de multiplicar por 4 (razão unitária). Quando questionada a sua estratégia de resolução, a aluna diz perceber que se enganou na operação pois deveria ter multiplicado para calcular o número de copos de leite mas continuo a considerar o 3 como razão unitária.

A resposta de Célia à questão 6 (ver figura 7.23.) revela outra dificuldade da aluna (ver figura 7.24.).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.
Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

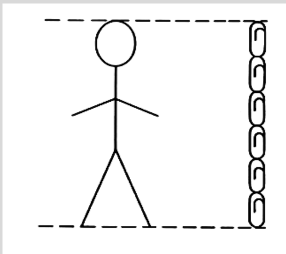


Figura 7.23. – Questão 6 do teste diagnóstico

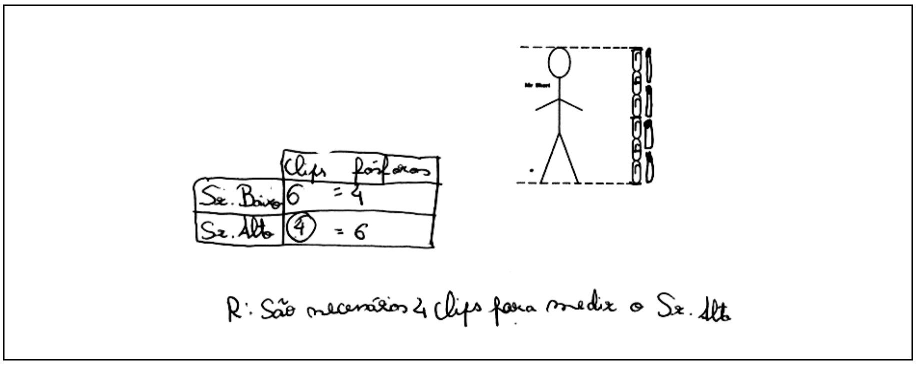


Figura 7.24. – Resposta de Célia questão 6 do teste diagnóstico

Célia terá iniciado a resolução do problema desenhando 4 fósforos junto à imagem dada no problema, sendo possível perceber que cada fósforo mede aproximadamente 1,5 clipes. Contudo, a aluna não mobiliza essa relação para determinar a altura do Sr. Alto (clipes). Depois, representa a informação numa tabela e depois e sem apresentar qualquer cálculo diz que o Sr. Alto mede 4 clipes, uma altura menor que o Sr. Baixo que mede 6 clipes. Durante a entrevista a aluna não foi capaz de explicar a sua estratégia dizendo que não se lembrava, é provável que o seu erro resulte da escrita do sinal de igual entre os dados referentes aos Sr. Baixo (6=4), levando a aluna a escrever que 4=6 também conhecido como erro de reflexão.

Problemas de comparação. Num problema de comparação do teste diagnóstico (ver figura 7.25.), Célia responde de forma incorreta porque interpreta incorretamente os valores numéricos (ver figura 7.26.).

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

Figura 7.25. – Questão 4 do teste diagnóstico

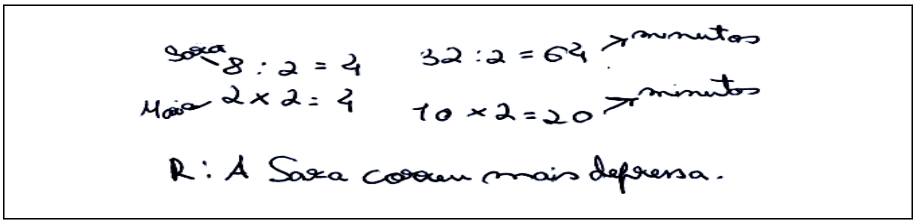


Figura 7.26. – Resposta de Célia à questão 4 do teste diagnóstico

Célia interpreta o tempo, em termos absolutos (64 minutos), como sendo a sendo a velocidade, uma interpretação errada dos valores calculados. Na sua estratégia de resolução do problema, Célia divide por 2 os dados referentes à Sara e multiplica por 2 os dados referentes à Maria, deste modo fixa o número de voltas em 4 para ambas as atletas comparando depois os valores referentes ao tempo. Contudo, a aluna comete um erro de cálculo pois, no que respeita ao tempo da Sara, calcula o dobro em vez de dividir por dois. Deste modo, o raciocínio inicial da aluna, não obstante o erro de cálculo, é correto mas a resposta de Célia mostra que uma interpretação incorreta dos valores numéricos em termos relativos, pois se Sara demora 64 minutos a percorrer 4 voltas não é mais rápida que a Maria.

Num outro problema, a questão 4 da entrevista (ver figura 7.27.).

Cinco raparigas partilharam três pizas e dez rapazes partilharam seis pizas.
Quem comeu mais piza? As raparigas ou os rapazes?

Figura 7.27. – Questão 4 da primeira entrevista

Célia faz um registo pictórico e escreve as frações (ver figura 7.28.) e em diálogo com a investigadora, diz:

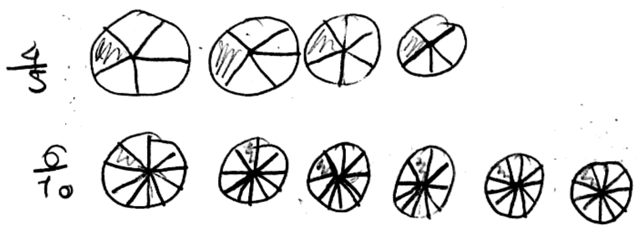


Figura 7.28. – Resposta de Célia questão 4 da primeira entrevista

Depois, a aluna escreve a fração equivalente a quatro quintos com denominador 10 (ver figura 7.29.) e diz que cada uma das raparigas come mais piza.

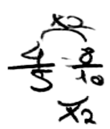


Figura 7.29. – Resposta de Célia questão 4 da primeira entrevista

Célia diz corretamente que as raparigas comem a maior quantidade de piza (tendo em conta, que considera existirem 4 pizas em vez de 3 pizas), a resolução do problema envolve a representação pictórica da parte de um todo e só depois escreve esta relação na forma de fração. Para comparar a quantidades de piza das raparigas desenvolve uma estratégia multiplicativa (fator escalar 2) de forma a escrever a fração equivalente oito décimos, sendo esta última comparada com a fração de piza dos rapazes.

Não indiquei a Célia a incorreção sobre o número de pizas para que a aluna não ficasse mais nervosa, do que o que aparentava estar, apesar de lhe ter sido dito que não se tratava de uma ficha de avaliação.

Num outro problema do teste diagnóstico que envolve uma mistura de dois líquidos (ver figura 7.30.).

Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de *Sunquick* (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de *Sunquick* a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

Figura 7.30. – Questão 8 do teste diagnóstico

Célia resposte de forma incorreta como mostra a figura 7.31.

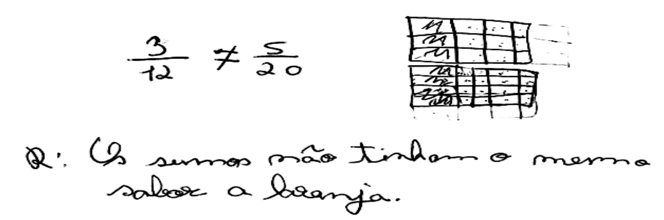


Figura 7.31. – Resposta de Célia questão 8 do teste diagnóstico

A aluna inicia a resolução do problema representada a razão entre os líquidos na forma de fração (relação parte:parte) e para averiguar a relação entre as razões recorre há representação pictórica das razões (relação parte:todo). Parece ter sido a falta de rigor da representação pictórica o que levou a aluna a concluir, de modo incorreto, que as razões não são equivalente, no entanto, o dificuldade da aluna envolve a distinção da relação parte:parte e a relação parte:todo nas diferentes representações.

A seguinte questão do teste diagnóstico é um problema de comparação (ver figura 7.32.) que envolve o custo de uma refeição e ao qual a aluna responde de forma correta (ver figura 7.33.).

11. Na pizzaria *Mama Mia* dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	5	65

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

Figura 7.32. – Questão 11 do teste diagnóstico

$8 : 4 = 2$ $48,80 : 4 = 12,2$
$10 : 5 = 2$ $65 : 5 = 13$

R: A refeição mais cara foi a da mesa B

Figura 7.33. – Resposta de Célia à Questão 11 do teste diagnóstico

Célia apresenta um conjunto de cálculos para responder ao problema. De facto, a aluna divide por 4 o número de pessoas da mesa A e repete o procedimento com os valores numéricos referentes ao preço da refeição, determinando o preço de duas refeições. Relativamente à mesa B, apresenta um cálculo sem aparente significado e determina o preço unitário da refeição. A aluna compara o preço de uma refeição da mesa B (13 euros) com o preço de duas refeições da mesa A (12,20 euros), o que lhe permite dizer que a refeição da mesa B é mais cara. Contudo, na primeira entrevista a aluna revelou pensar na comparação do preço unitário de refeições, das mesas A e B e disse também já não se lembrar do modo como tinha pensado.

Num problema sobre mistura de tintas (ver figura 7.34.).

5. Na aula de EVT, a Inês e a Maria estão a juntar tinta preta com tinta branca para preparar tinta cinzenta. Qual das raparigas preparou tinta cinzenta mais escura?
5.1.

Figura 7.34. – Questão 5.1 da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, a aluna diz:

Célia: É igual.

Investigadora: O tom da tinta é igual?

Célia: É... Ou não? Este [mistura da Maria] tem mais 1 [copo de] branco. Tem o mesmo de preto, é igual.

Célia considera apenas parte da informação disponível, isto é, a quantidade de tinta preta e por isso diz que as tintas apresentam a mesma tonalidade. De salientar que, na sua resolução a aluna revela compreender o contexto mas não se lembra de ter feito uma mistura de tintas.

7.2.2. Durante a experiência de ensino

Durante a realização da unidade de ensino, o trabalho de Célia é marcado por duas fases que correspondem respetivamente aos períodos antes de depois do teste intermédio, no qual a aluna obteve uma classificação superior às obtidas em testes anteriores. De facto, antes do teste intermédio, o trabalho da aluna caracteriza-se por diminutas intervenções orais, em particular, nos momentos de trabalho autónomo dos alunos em grupo, embora tenha revelado atenção às ideias dos seus colegas e empenho na realização e conclusão das tarefas. Após o teste intermédio, as intervenções orais de Célia são frequentes no trabalho de grupo e são os colegas que a instigam a dizer a sua opinião quando iniciam a resolução do problema. É provável que a classificação do teste tenha funcionado para o grupo como um fator de reconhecimento do conhecimento de Célia, pois é algo a que os seus colegas aludem quando se confrontam com problemas em que sentem mais dificuldade.

As tarefas apresentadas nas fichas de trabalho 1 e 2 representaram um desafio exigente para o grupo de Célia que, por várias vezes, solicitou a presença da professora para ajudar alguns conflitos. A aluna não se destacou nos seus contributos para a resolução dos tarefa, limitando-se a aceitar, ou não, as ideias de outros colegas. No entanto, teve um papel importante na redação das ideias que cada um dos elementos do grupo ia tendo, o que é uma mais valia aquando da elaboração do relatório de cada uma das tarefas. Na discussão da tarefa 1, Célia apresenta uma pergunta de confirmação à professora sobre a leitura das razões (distância:tempo e tempo:distância) e se a ordem da leitura se aplica de forma semelhante em situações que envolvem outras variáveis.

Na realização de algumas tarefas da ficha 3 Célia, sem partilhar as suas intenções oralmente aos colegas, começa a resolução dos problemas construindo tabelas mesmo em situações em que estas são apresentadas no enunciado do problema. Os colegas de grupo também usam esta representação, reproduzindo o trabalho de Célia sem a questionar, talvez por ter sido esta a representação usada com mais frequência na resolução das nas tarefas das fichas 1 e 2. De referir, que a aluna utiliza esta representação com frequência antes da realização da unidade de ensino.

Na realização das tarefas da ficha de trabalho 3 Célia e os seus colegas de grupo, envolveram-se em intensa exploração de regularidades indo além dos cálculos necessários para responder, por exemplo, a um problema de valor omisso. De facto, os alunos procuravam verificar a covariação das variáveis e a invariância entre variáveis, explicando com palavras suas o significado dos fatores escalar e funcional.

A turma de Célia realizou o teste intermédio após a realização da tarefa 3 e a entrevista à aluna foi realizada seis dias depois do teste intermédio, durante uma parte da aula de Estudo Acompanhado, antes da entrega e correção do teste intermédio.

Problemas pseudoproporcionais. Este tipo de problemas, no teste intermédio, apresenta uma estrutura sintática semelhante a problemas de comparação. A questão 5.4. apresenta um problema pseudoproporcional que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 7.35.) e Célia revela compreender que não existe uma relação de proporcionalidade direta (ver figura 7.36.).

5.4. Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.

Figura 7.35. – Questão 5.4 do teste intermédio

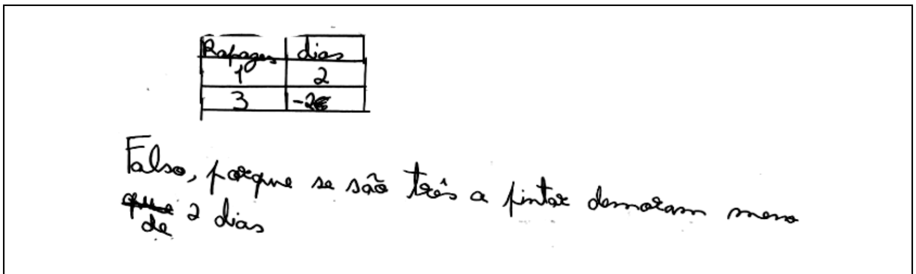


Figura 7.36. – Resposta de Célia à questão 5.4 do teste intermédio

A resposta de Célia é considerada correta e mostra que ela compreende que se o número de rapazes aumenta o tempo (dias) necessário para pintar uma parede será menor. A aluna usa uma tabela para organizar a informação recolhida no texto do problema, no entanto decide que 6 não pode corresponder ao número de dias necessário, risca-o escreve -2. Na correção do teste, a professora analisou com a aluna a inexistência de -2 dias, sendo que ela explicou que queria dizer “menos de 2 dias”.

Num outro problema pseudoproporcional (ver a figura 7.37.) a aluna reconhece a inexistência de uma relação de proporcionalidade direta entre o número de raparigas e o tempo que demoram a chegar à escola (ver a figura 7.38.).

> 5. Indica se cada frase é verdadeira ou falsa e explica o raciocínio que utilizaste, em cada caso, para poderes responder:
>
> Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos duas levam 20 minutos.

Figura 7.37. – Questão 5.1 do teste intermédio

> Falso, porque se forem à mesma velocidade chegam as duas ao mesmo tempo

Figura 7.38. – Resposta de Célia à questão 5.1 do teste intermédio

Célia mobiliza o seu conhecimento para responder, coloca a condição da velocidade constante (informação não dada no enunciado do problema), o que implica demorar o mesmo tempo para percorrer igual distância. É provável que a aluna tenha aprofundado o seu conhecimento sobre a noção de velocidade (grandeza intensiva), nas primeiras duas tarefas da experiência de ensino, o que permitiu intuir sobre o número de raparigas ser independente do tempo.

Problemas de valor omisso. Num problema do teste intermédio (ver figura 7.39.), Célia revela como explora a relação multiplicativa da proporcionalidade direta para determinar o valor omisso (ver a figura 7.40.).

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 7.39. – Questão 2 do teste intermédio

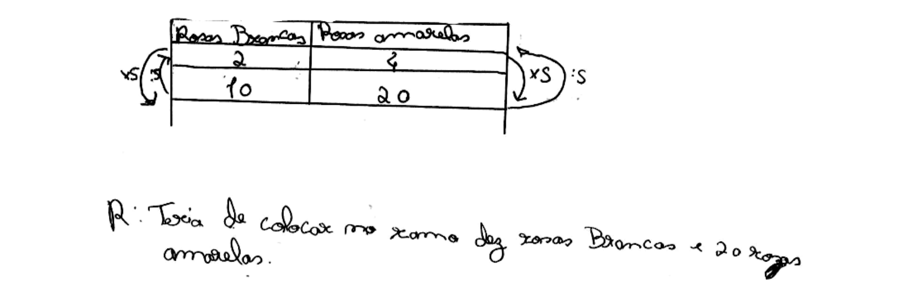


Figura 7.40. – Resposta de Célia questão 2 do teste intermédio

A estratégia de resolução envolve a exploração da relação multiplicativa de covariação (fator escalar 2) e representação em tabela e numa frase. A estratégia revela que a aluna faz uso do conhecimento sobre regularidades da proporcionalidade direta que foram foco de trabalho nas primeiras aulas da unidade de ensino.

Na resolução de um problema do teste diagnóstico (ver a figura 7.41.), Célia usa uma estratégia multiplicativa (ver a figura 7.42.) e responde corretamente.

Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 10 minutos a percorrer 15 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

Figura 7.41. – Questão 1 do teste intermédio

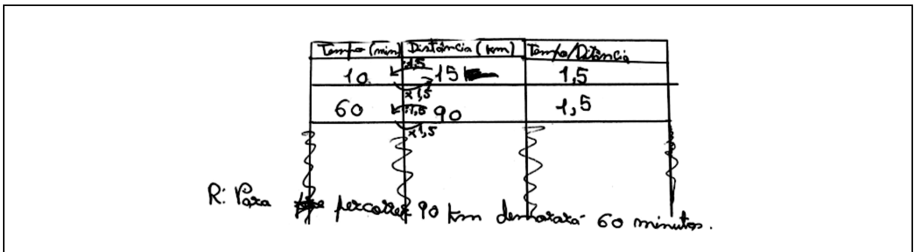


Figura 7.42. – Resposta de Célia questão 1 do teste intermédio

A estratégia da aluna envolve o cálculo a constante de proporcionalidade (1,5) e exploração de regularidades. O valor omisso é calculado através de uma estratégia multiplicativa funcional, isto é, através da divisão de 90km pela constante de proporcionalidade. Célia representa os dados iniciais e o valor omisso numa tabela, à qual anexa a informação referente aos procedimentos de cálculo e indica também a informação referente ao valor omisso numa frase. A estratégia parece ser decorrente do trabalho desenvolvido na experiência de ensino porque (i) a constante de proporcionalidade é colocada em evidência numa coluna etiquetada com a natureza da relação que representa; (ii) a constante de proporcionalidade é usada para explorar a relação multiplicativa entre os valores numéricos das variáveis; e (iii) a constante de proporcionalidade é usada para calcular com clareza o valor omisso. No entanto, é de evidenciar que a aluna parece não ter em consideração os números o problema (dados e fatores escalar e funcional) na escolha da estratégia, pois se os tivesse contemplado optaria pela estratégia escalar que envolve cálculos mais elementares. A representação de uma tabela com colunas grandes que são riscadas posteriormente poderá indicar que inicialmente a aluna poderá ter pensado na estratégia de composição/decomposição para resolver o problema.

Em um problema, da segunda entrevista, que envolve a leitura de um gráfico (ver figura 7.43.).

Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

Figura 7.43. – Questão 2.3. da segunda entrevista

A aluna, em diálogo com a investigadora, diz:

Célia: Vou pôr os números da tabela. Nestas linhas. (Aponta para os eixos horizontal e vertical.)

Investigadora: E?

Célia: (Marca os valores numéricos, contando o número de quadradinhos. De 5 em 5 quadradinhos no eixo das abcissas e de 4 em 4 no eixo das ordenadas.) Agora vou fazer os pontos de encontro destas embalagens com as pilhas.

A aluna mostra saber converter os dados da tabela para o gráfico, cuja estrutura é dada no enunciado da questão. Célia indica também que a relação entre os valores numéricos das duas variáveis, em termos gráficos, é dada por "pontos de encontro".

No decurso da entrevista, a aluna também refere:

Célia: Como é constante de proporcionalidade, os pontos ficam todos em linha assim. (Faz um gesto com a mão sobre os pontos desenhados.) Faço?

Investigadora: O quê?

Célia: Ponho uma linha assim. (Repete o gesto anterior.)

Investigadora: Faz o que quiseres.

Célia: (Desenha uma linha sobre os pontos como mostra a figura 7.44.)

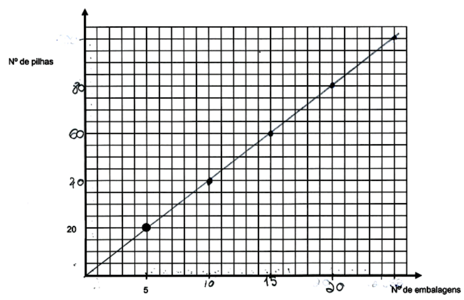


Figura 7.44. – Resposta de Célia questão 2.3 da segunda entrevista (parte 1)

Célia: Sim. Vou continuar.

Investigadora: Vais continuar o quê?

Célia: O gráfico.

Investigadora: Como?

Célia: Ponho 25 na linha de baixo. (Conta 5 quadradinhos depois do 20, no eixo das abcissas e marca a abcissa 25.) E depois aqui [no eixo das ordenadas] vai dar 100 [pilhas] (ver a figura 7.45).

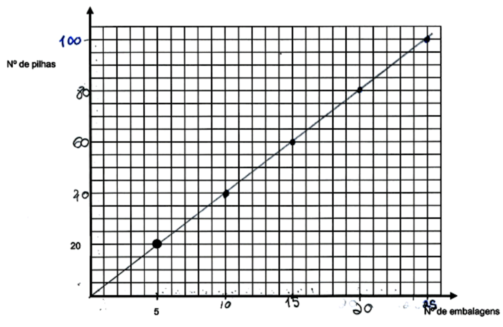


Figura 7.45. – Resposta de Célia questão 2.3. da segunda entrevista

Investigadora: Mas como é que já sabes que é 100?!

Célia: Eu sei que é proporcional. Vou subir até á linha de proporcionalidade e de pois vou para a esquerda [até encontrar o eixo das ordenadas. E eu já sei que é 100 porque aqui anda de 20 em 20 e 5 vezes 20 da 100, não é?

Investigadora: Como sabes que é 5 vezes 20?

Célia: 20 é o primeiro número, 40 é o segundo e é 20 vezes 2 e assim. Ao chegar ao quinto número é 20 vezes 5 e dá 100.

Célia compreende que a relação de proporcionalidade direta se traduz graficamente num registo em que os "pontos ficam todos em linha assim. (Faz um gesto com a mão sobre os pontos desenhados.)". É com recurso à "linha da proporcionalidade" e ao "ponto de encontro" que Célia estabelece a correspondência entre as 25 embalagens e 100 pilhas (valor omisso). O modo como a aluna diz pensar para determinar os valores das coordenadas do gráfico mostra que usa um raciocínio multiplicativo e deste modo o trabalho em torno do uso de múltiplas representações é uma oportunidade de aprofundar a generalização da relação multiplicativa da proporcionalidade direta.

Problemas de comparação. Num problema do teste intermédio (ver figura 7.46.) Célia usa várias representações, concluindo que é o chá mais adocicado está no jarro A (ver figura 7.47.).

Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce? Justifica a tua resposta.

Figura 7.46. – Questão 3 do teste intermédio

	~~chá~~ açucar	~~açucar~~ chá	açucar/chá
A	10g	3 dl	3,33...
B	45g	15 dl	3

10 : 3 = 3.33 → partes de açucar por cada litro de chá

45 : 15 = 3 → partes de açucar por cada litro de chá

açucar, chá

R: O jarro A tem mais açucar e mais doce.

Figura 7.47. – Resposta de Célia questão 3 do teste intermédio

Célia desenvolve uma estratégia funcional pois relaciona a quantidade de açúcar com a quantidade de chá. Parece que a informação na tabela não terá sido suficiente para a aluna julgar sobre o doce do chá pois duplica a informação, escrevendo-a na forma de razão (como divisão) e etiquetando o significado dos valores numéricos. Posteriormente, a aluna decide o jarro A (3,(3) gramas de açúcar por decilitro de chá) contém o chá mais adocicado e acrescenta uma frase à sua resposta com essa informação.

A resposta de Célia ao problema 4 do teste intermédio (ver a figura 7.48.), mostra a sua opção pela representação em razão (como divisão) para determinar a razão unitária (ver a figura 7.49.).

Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.

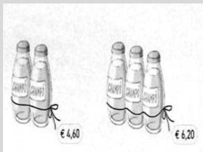
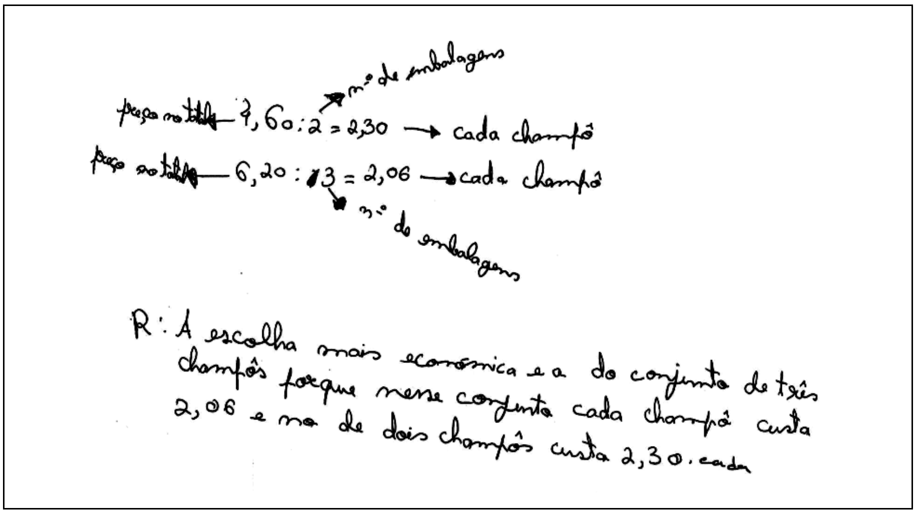


Figura 7.48. – Questão 4 do teste intermédio



nº de embalagens

preço no total — 4,60 : 2 = 2,30 → cada champô

preço no total — 6,20 : 3 = 2,06 → cada champô

nº de embalagens

R: A escolha mais económica é a do conjunto de três champôs porque nesse conjunto cada champô custa 2,06 e na de dois champôs custa 2,30. cada

Figura 7.49. – Resposta de Célia questão 4 do teste intermédio

A aluna usa uma estratégia funcional – relaciona preço da embalagem com o número de frascos – e responde corretamente. As etiquetas com o significado dos dados e valores calculados parecem ser fundamentais para a aluna fazer o seu julgamento, isto é, precisa ter presente os significado individual de cada valor numérico. A frase longa apresentada no fim do seu registo da aluna mostra uma clara compreensão de que a aluna compara o preço unitário dos produtos.

Na realização das tarefas das fichas de trabalho 4 e 5 a aluna tem um papel mais ativo, isto é, parece mais confiante das suas opiniões que são também valorizadas pelos colegas de grupo e da turma. De salientar que Célia, continua a fazer vários registos do seu trabalho, que são na sua maioria frases e que parecem ser a resposta ao pedido do encarregado de educação da aluna, pois ela na segunda entrevista diz que isso lhe é pedido desde o 5.º ano para que depois seja mais fácil estudar em casa. A aluna refere também que escreve a lápis, no caderno diário, frases "muito importantes" da professora durante a aula. Estes registos apresentam também outras representações (por exemplo, tabelas complementadas com setas que indicam as relações multiplicativas). No trabalho em grupo, faz uso de várias representações (por exemplo: tabela, razão como divisão e representação pictórica) para ajudar os colegas a compreender o que está a dizer oralmente.

Célia participou na discussão da ficha de trabalho da ficha 4 e 5 por solicitação da professora, tendo usado como fonte de informação os seus registos próprios e raramente o registo do grupo. A qualidade das suas intervenções é substancialmente melhor no entanto comparativamente às primeiras fichas de trabalho, contudo a aluna procura ler alguma frase que tenha escrito no seu caderno sem que, por vezes, essa frase resposta à questão da professora.

7.2.3. Após a experiência de ensino

A turma de Célia realizou o teste final duas aulas após o término da experiência de ensino. A entrevista à aluna foi realizada seis dias depois desse teste, durante a aula de Estudo Acompanhado. A realização da entrevista foi antecedeu a entrega do teste final corrigido pela professora.

Problemas pseudoproporcionais. Na resposta a um problema que envolve a representação gráfica (ver figura 7.50.), Célia indica aspetos gráficos da relação de proporcionalidade direta para justificar a sua inexistência na situação descrita (ver a figura 7.51.).

1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

1.7

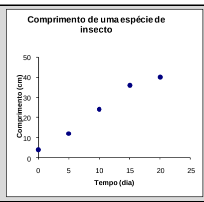


Figura 7.50. – Questão 1.7 do teste final

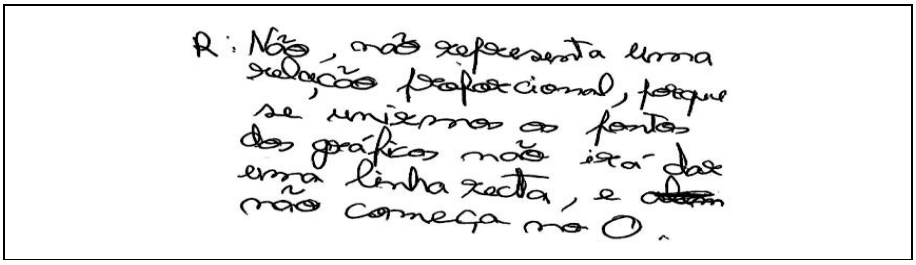

R: Não, não representa uma relação proporcional, porque se unirmos os pontos dos gráficos não irá dar uma linha recta, e não começa no 0.

Figura 7.51. – Resposta de Célia à questão 1.7 do teste final

De facto, como indica a aluna, os pontos não se situam sobre a reta e nem esta “começa” na origem dos eixos (0,0).

Num problema pseudoproporcional semelhante a um colocado no teste diagnóstico (questão 9), em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade direta ou inversa (ver a figura 7.52.), Célia responde corretamente (ver figura 7.53.).

> 1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.
>
> 1.8. Se uma camisola demora 20 minutos a enxugar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos.

Figura 7.52. – Questão 1.8. do teste final

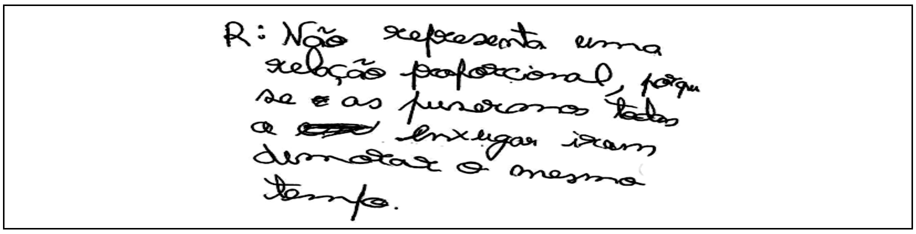

R: Não representa uma relação proporcional, porque se e as pusermos todas a enxugar iram demorar o mesmo tempo.

Figura 7.53. – Resposta de Célia à questão 1.8 do teste final

A aluna indica a inexistência duma relação de proporcionalidade direta entre a quantidade de camisolas e o tempo que demoram a enxugar.

E, finalmente, num problema pseudoproporcional que apresenta uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 7.54.), Célia responde que a o número de operários se comporta de forma inversa ao número de dias necessários para pintar uma escola (ver 7.55.).

> 1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.
> 1.6. Se 5 operários levam 15 dias a pintar uma escola, então 1 só operário leva 3 dias a pintar a escola.

Figura 7.54. – Questão 1.6. do teste final

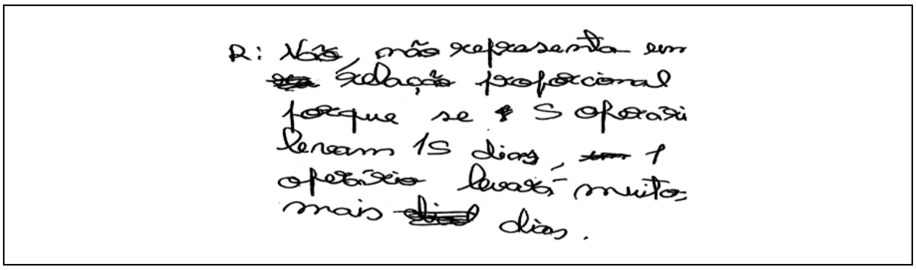


Figura 7.55. – Resposta de Célia à questão 1.4 do teste final

Célia mostra compreender que um operário necessita de “muitos mais dias” do que 15 dias para pintar a escola o que escreve apenas numa frase.

Problemas de valor omisso. Na resolução de um problema do teste final (ver a figura 7.56.) é usada uma estratégia multiplicativa funcional (ver a figura 7.57.).

5. A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos com uma velocidade constante.

5.1. Quanto tempo gasta a percorrer 1 metros? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 7.56. – Questão 5.1 do teste final

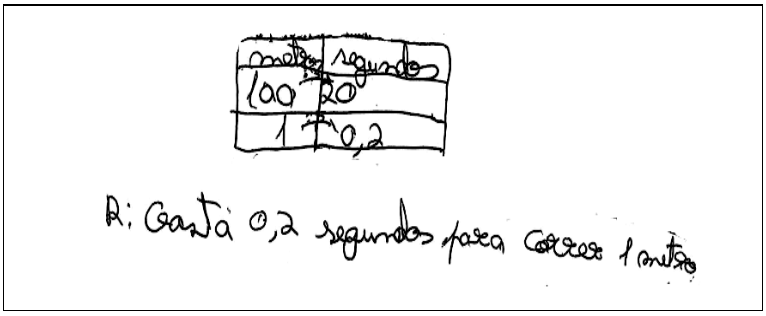


Figura 7.57. – Resposta de Célia à questão 5.1 do teste final

O registo escrito mostra que a aluna calcula a constante de proporcionalidade (divisão de 100 por 20), sendo esta usada para determinar o valor omisso (divisão de 1 pela constante de proporcionalidade 5). A aluna usa uma tabela para representar os dados e o valor omisso, completada pela indicação dos procedimentos de cálculo e por uma frase.

Na resposta à questão 5.2., uma alínea do problema anterior (ver a figura 7.58.), Célia revela ser capaz de mobilizar o seu conhecimento global do problema complementando a tabela usada na resposta à questão 5.1 (ver a figura 7.59.).

> 5.2. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 7.58. – Questão 5.2 do teste final

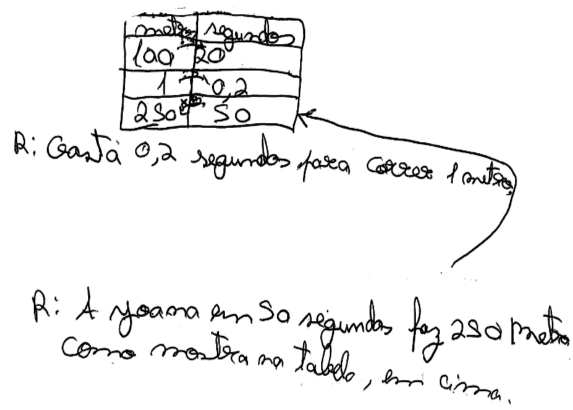


Figura 7.59. – Resposta de Célia à questão 5.2 do teste final

A aluna usa uma estratégia funcional, isto é, multiplica 50 pela constante de proporcionalidade 5, obtendo o valor omisso 250 metros. Os dados e o valor omisso são apresentados numa tabela e numa frase.

O problema seguinte faz parte da terceira entrevista (ver figura 7.60.).

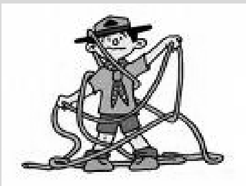
> 1.No fim de semana passado um grupo de dez escuteiros fez um acampamento. Durante esse tempo o grupo comeu oito pães de forma.
>
> 
>
> 1.1.No próximo fim de semana um grupo com quinze escuteiros vai fazer um acampamento semelhante. Quantos pães devem ser levados para a alimentação do grupo? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 7.60. – Questão 1.1 da terceira entrevista

Em conversa com a entrevistadora, Célia responde:

Célia: Ponho assim os números de pães para o fim de semana... E com o número de escuteiros (ver a figura 7.61.).

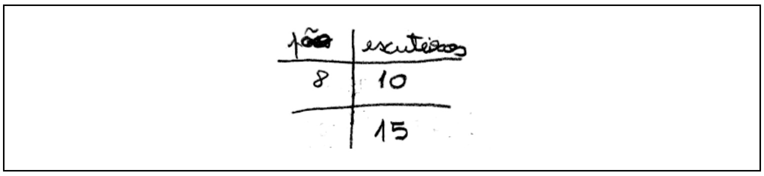


Figura 7.61. – Resposta de Célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 1)

Investigadora: E agora, o que pensas fazer? Já tens aí a informação organizada.

Célia: Vou... (Utiliza a calculadora e descreve em voz baixa o que está a fazer.) 10 por 8 é 1,25. Depois aqui... (Aponta para a terceira linha da tabela.) Depois, aqui em vez de dividir é a multiplicar.

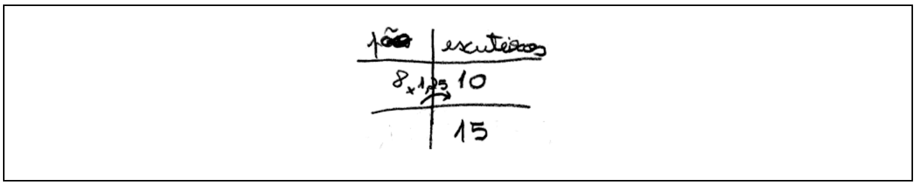


Figura 7.62. – Resposta de Célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 2)

Investigadora: E agora? O que vais fazer

Célia: É 15 a dividir por 1,25 e é... (Utiliza a calculadora.) É 12… 12 pães (ver a figura 7.63.).

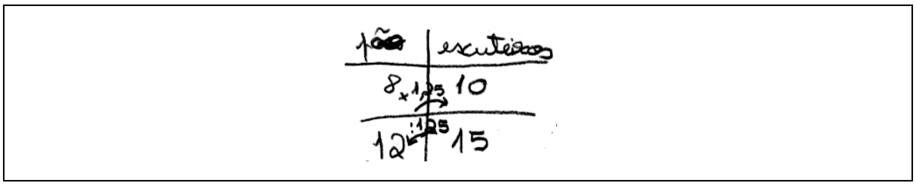


Figura 7.63. – Resposta de Célia questão 1.1 da terceira entrevista (parte 3)

Célia: Agora nesta [questão 1.2], vou continuar a tabela.

Investigadora: Espera... Olha aqui... Porque colocaste uma seta de correspondência do 8 para o 10? O cálculo inicial foi 10 a dividir por 8, não foi? Fizeste o cálculo neste sentido. (Aponto para a seta da correspondência escrita pela aluna na terceira linha da tabela.) E escreveste esta correspondência. (Aponto para a segunda linha da tabela registada pela aluna.)

Célia: Hum... Não sei! Acho... Dá-me mais jeito assim. (Com o dedo faz um movimento da esquerda para a direita.)

Investigadora: Ah, está bem.

A entrevista permite conhecer com detalhe a estratégia multiplicativa e funcional desenvolvida pela aluna. Mostra que após a representação dos dados do problema numa tabela, escolhe a relação entre o número de escuteiros e a quantidade pães para determinar a constante de proporcionalidade (1,5). No entanto, indica na tabela a relação multiplicativa entre o número de pães e o número de escuteiros, utilizando uma seta, o símbolo da multiplicação e a constante de proporcionalidade. A aluna diz preferir estabelecer a relação multiplicativa da esquerda para a direita por lhe dar “mais jeito”, isto é, deve ser facilitar da leitura e da compreensão da relação. Para determina o valor omisso, efetuando a operação inversa (divisão de 15 pela constante de proporcionalidade). Não obstante a resolução correta do problema, a aluna parece não considerar a existência de uma estratégia mais eficiente pois a aluna poderia ter optado por uma estratégia escalar que envolve cálculos que a aluna pode realizar sem recorrer à calculadora.

A questão seguinte é uma alínea do problema anterior (ver a figura 7.64.), na qual o valor omisso corresponde ao número de escuteiros, ao contrário da alínea anterior (ver a figura 7.60.), em que o valor omisso corresponde ao número de pães.

1.2. Se houvesse 44 pães quantos escuteiros podiam estar no acampamento? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 7.64. – Questão 1.2 da terceira entrevista

A aluna durante a entrevista diz:

Célia: Vou continuar a tabela [construída para responder à questão anterior]. (Ver a figura 7.65.)

Investigadora: E o que queres saber agora?

Célia: O número de escuteiros que comem 44 pães. (Acrescenta a informação à tabela inicial como mostra a figura seguinte.) Então vou dividir 44 por 12. (Utiliza a calculadora.) Hum... (Manifesta algum desagrado quando lê o valor do quociente no visor da calculadora.)

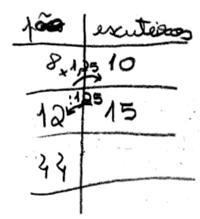


Figura 7.65. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 1)

Não é percetível porque é que a aluna muda de estratégia tendo em consideração que já tinha calculado a constante de proporcionalidade e até estava a trabalhar na representação que tinha usado para responder à questão anterior. É possível que quisesse mostrar à investigadora que sabia determinar o valor omisso através da relação multiplicativa de covariação dos valores numéricos.

Na continuação da entrevista:

Investigadora: (Passa algum tempo.) Já não vais utilizar este 1,25?

Célia: Posso usar... É... É mais fácil, até. (Utiliza a calculadora.) 55 escuteiros (ver a figura 7.66).

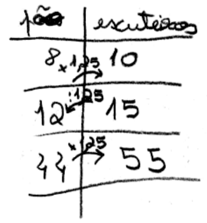


Figura 7.66. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 2)

Investigadora: Vamos voltar aqui atrás. Quando calculaste 44 a dividir por 12. O que estavas a fazer?

Célia: Estava a ver o número... Que havia entre estes dois. (Aponta para os números 12 e 44 da tabela.)

Célia: 3, 67 é da divisão e arredondei. (…) É de 55 [escuteiros] na mesma (ver a figura 7.67).

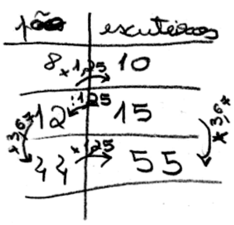


Figura 7.67. – Resposta de Célia questão 1.2 da terceira entrevista (parte 3)

Investigadora: 15 vezes 3,67, dá 55?

Célia: Dá.

Investigadora: Calcula lá.

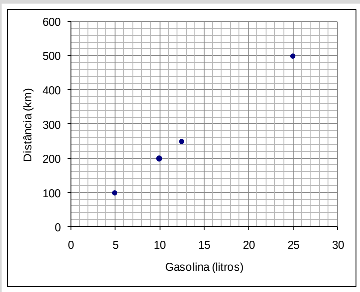
Célia: (Utiliza a calculadora.) Dá mas com “arredondação” [arredondamento]. Acho que é porque não era mesmo 3,67...

Investigadora: Já percebi. Acho que tens de ter cuidado com os arrendamentos.

A aluna revela ser capaz de usar as estratégias multiplicativas escalar e funcional para determinar o número de escuteiros presentes no acampamento, no entanto, não mostra como opta por uma ou por outra. É provável que só faça opções quando os fatores escalar ou funcional levam a fazer arredondamentos ou à representação e cálculo com frações. De notar, que a aluna podia ter usado a estratégia escalar em que pensou inicialmente usando os valores numéricos dados no enunciado do problema - fator escalar (5,5) - que não envolve imprecisões dependentes do arredondamento.

Num problema em que os dados são apresentados num gráfico (ver a figura 7.68.), a Célia indica corretamente o valor omisso no gráfico (ver a figura 7.69.).

3. O gráfico mostra o consumo de gasolina feito por um carro.



3.2. Será possível identificar no gráfico a quantidade de gasolina que este carro gasta para percorrer 400 km? Explica como pensaste.

Figura 7.68. – Questão 3.2 do teste final

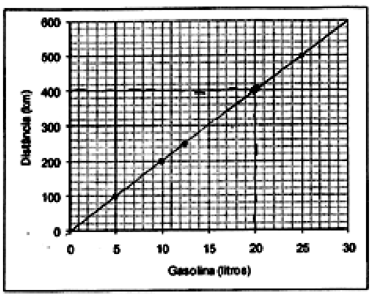
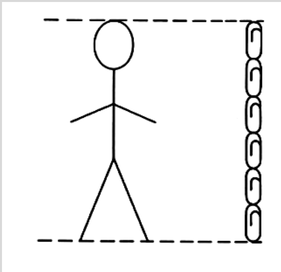


Figura 7.69. – Resposta de Célia questão 3.2 do teste final

A aluna verifica a posição dos pontos do gráfico sobre uma linha reta embora que passa na origem de esta passar na origem. Por seguinte, a reta é usado para indicar o ponto (20, 400), isto é, 20 corresponde ao número de litros de combustível (valor omisso) necessário para percorrer 400 quilómetros.

Para responder ao problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo (ver a figura 7.70.) a aluna usa uma estratégia funcional (ver a figura 7.71.).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.



Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

Figura 7.70. – Questão 4.1 do teste final

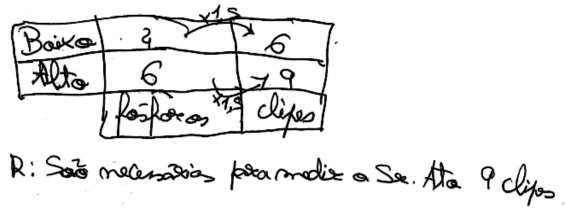


Figura 7.71. – Resposta de Célia questão 4.1 do teste final

O registo da aluna mostra o modo como a constante de proporcionalidade (1, 5 clipes por fósforo) é usada para calcular o valor omisso (9 clipes). A estratégia envolve a representação dos dados e valor omisso numa tabela, esta é semelhante aquela que tinha usado no teste diagnóstico na resolução deste problema.

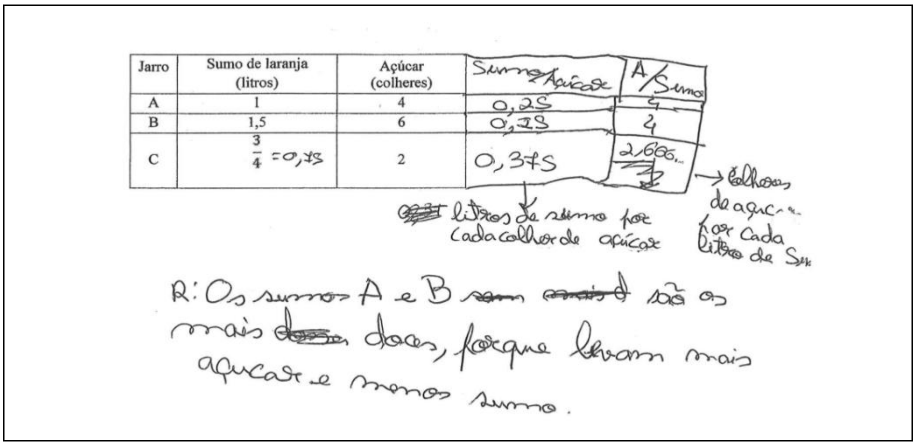
Problemas de comparação. A questão seguinte apresenta um problema de comparação que envolve julgamento qualitativo (ver a figura 7.72.) ao qual a aluna responde de forma correta (ver a figura 7.73.) e usa uma estratégia funcional.

A Luísa preparou três jarros com diferentes capacidades com sumo de laranja. Antes de servir o sumo a Luísa adicionou açúcar a cada um dos jarros.

Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)
A	1	4
B	1,5	6
C	$\frac{3}{4}$	2

Investiga se existe algum sumo de laranja que seja mais doce? Justifica a tua resposta.

Figura 7.72. – Questão 6 do teste final



Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)	Sumo/Açúcar	A/Sumo
A	1	4	0,25	4
B	1,5	6	0,25	4
C	$\frac{3}{4}$ =0,75	2	0,375	2,666...

litros de sumo por cada colher de açúcar

colheres de açúcar por cada litro de sumo

R: Os sumos A e B são os mais doces, porque levam mais açucar e menos sumo.

Figura 7.73. – Resposta de Célia questão 6 do teste final

É provável que o primeiro procedimento da aluna tenha sido escrever na representação decimal a quantidade de água representada na forma de fração. Logo após, anexa mais uma coluna à tabela e representa a razão sumo:açúcar e revela ser capaz de dizer o seu significado. No entanto, tendo em consideração que todos os valores numéricos dessa coluna são menores que a unidade, é provável que tenha sentido dificuldade na sua interpretação e julgamento qualitativo, pelo que explora a relação açúcar:sumo. Esta razão, cujos valores numéricos são maiores que a unidade, ser a base do julgamento que a aluna faz sobre o fato de serem os jarros A e B aqueles que apresentam maior quantidade de açúcar em um litro de sumo. A frase final da aluna mostra alguma incongruência face ao texto escrito corretamente na parte direita da tabela, de facto, a razão compara a quantidade de açúcar em um litro de sumo e não o que aluna diz na resposta final “mais açúcar e menos sumo”.

Uma questão da entrevista apresenta um problema sobre uma mistura de tinta (ver a figura 7.74.) e requer julgamento qualitativo.

A Célia e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Célia preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês mistorou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Figura 7.74 – Questão 5 da entrevista

Em conversa com a investigadora, a aluna diz:

Célia: Aqui vou fazer só assim. (Gesticula com a caneta um linha horizontal.)

Investigadora: Como?

Célia: Em fração (ver a figura 7.75). Eu, este problema já percebi.

$$\frac{3}{2,5}$$

Figura 7.75. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 1)

Investigadora: E o que estás a relacionar?

Célia: É a tinta branca com a tinta verde. Ponho aqui? É melhor(ver a figura 7.76)

$$\frac{3}{2,5}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\text{tinta branca}}{\text{tinta verde}}$$

Figura 7.76. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 2)

Investigadora: Está bem.

Célia: (Escreve a razão da segunda mistura de tinta. Ver a figura 7.77)

$$\frac{3}{2,5} \qquad \frac{2}{1,5}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\text{tinta branca}}{\text{tinta verde}}$$

Figura 7.77. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 3)

Célia: Vou ver se há uma constante... Se as frações são equivalentes.

Investigadora: Se há uma constante?

Célia: Se há aqui o mesmo número a dividir [o quociente]. As frações equivalentes. (Utiliza a calculadora e acrescenta os quocientes. Ver a figura 7.78)

$$\frac{3}{2,5} = 1,2 \qquad \frac{2}{1,5} = 1,3$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\text{tinta branca}}{\text{tinta verde}}$$

Figura 7.78. – Resposta de Célia questão 5 da terceira entrevista (parte 4)

Investigadora: E então? Há uma constante?

Célia: Não.

Investigadora: O que podes dizer sobre o tom da tinta? É igual?

Célia: Este tem... (Passa algum tempo.)

Investigadora: O que significam estes números? (Aponto para 1,2 e 1,3.)

Célia: (Passa algum tempo.) Este tem 1,2 [litro] de tinta branca por cada um [litro] de tinta verde. E... E este tem 1,3 [litro] de tinta branca por cada um [litro] de tinta verde.

Investigadora: E o que podes dizer sobre o tom [da tinta]?

Célia: (Passa algum tempo.)

Investigadora: Qual das misturas é verde escura?

Célia: (Passa algum tempo.) Eu acho que é esta porque tem mais branco. (Aponta para o número 1,3.) Não! Tem de ser a que tem menos branco, é esta a que tem 1,2 [litro] de tinta branca para 1 [litro] de verde

Célia calcula os quocientes entre a quantidade de tinta branca e a quantidade de tinta verde, isto é, uma estratégia multiplicativa funcional. No início da resolução do problema a aluna diz compreende-lo bem, pelo que opta por representar as razões na forma de fração. A aluna revela compreender o significado das razões unitárias e o fato de não serem equivalentes indica que as tintas têm uma tonalidade diferente. Apesar do tempo que demorou a dizer o significado do valor numérico decimal de cada razão, diz que a tinta mais clara é a que apresenta maior quantidade de branco omitindo a igual quantidade de tinta verde.

Célia utiliza uma estratégia funcional, utiliza a representação da razão com a barra de fração e como a relação entre os valores não é constante responde que não existe uma relação de proporcionalidade direta.

7.2.4. Síntese

Esta secção apresenta uma síntese do desempenho de Célia em cada tipo de problema, ao longo da unidade de ensino.

Problemas pseudoproporcionais. Antes da realização da unidade de ensino, Célia revela compreender que nem todos os fenómenos descritos nos problemas envolvem uma relação de proporcionalidade direta. De facto, a aluna identifica a em certos casos relação aditiva e a relação de proporcionalidade inversa mas considera erradamente noutros casos que existe uma relação de proporcionalidade direta.

Na resolução dos problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação de proporcionalidade inversa, antes e durante a unidade de ensino, a aluna considera inicialmente que se trata uma relação de proporcionalidade direta, pois apresenta valores numéricos tendo por base essa relação. No entanto, quando considera o fenómeno descrito no problema, risca esses valores e procura outros. Os seus procedimentos destacam a relação inversa das variáveis mas não são claros. Os seus registos apresentam tabelas complementadas por uma frase. No pós-teste, a aluna escreve apenas frases na resolução deste problemas, nas quais procura justificar a relação inversa das variáveis.

No teste diagnóstico, a aluna considera que existe proporcionalidade direta num problema em que essa relação não existe. Pelo contrário, nos testes intermédios e final argumenta com clareza sobre a inexistência de relações de proporcionalidade direta, mobilizando conhecimento do quotidiano e também o seu conhecimento escolar para justificar a sua resposta. Na resolução correta destes problemas usa apenas frases.

Problemas valor omisso. O teste diagnóstico e a primeira entrevista mostram que Célia compreende a relação de covariação entre variáveis nos fenómenos descritos nos problemas, tendendo a desenvolver a estratégia de composição/decomposição. No entanto, esta estratégia que envolve essencialmente o cálculo sucessivo do dobro não lhe permite determinar, na maior parte das vezes, o valor omisso. Parece reconhecer a relação invariante apenas em alguns contextos como, por exemplo, o custo de bens e serviços. Noutros contextos, a sua estratégia envolve a exploração de regularidades mas quase sempre perde o significado dos valores numéricos e utiliza procedimentos de cálculo inadequados. A tabela, mais ou menos elaborada, é a representação preponderante nas suas estratégias. Assim, as estratégias que usa são predominantemente pré-proporcionais, embora isso não signifique o cálculo correto do valor omisso. Na resolução destes problemas, quando não parece compreender o contexto ou relação numérica, utiliza estratégias sem aparente sentido.

No teste intermédio Célia revela ser capaz de resolver problemas de valor omisso através de uma estratégia multiplicativa escalar funcional, mobilizando o estudo de regularidades feito durante a experiência de ensino. O seu registo mostra que ainda pondera apresentar tabelas com várias linhas, o que se pode associar à estratégia de composição/decomposição. Tendo em consideração o seu conhecimento sobre a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade, parece existir uma evolução natural para estratégias proporcionais mais eficientes. Também revela ser capaz de indicar o valor através da representação gráfica e é particularmente interessante o modo como mobiliza as regularidades para escrever os valores numéricos dos eixos.

Após a unidade de ensino, Célia usa estratégias proporcionais e no seu trabalho predomina a relação funcional e a representação em tabela. Parece que a aluna usa esta estratégia indiscriminadamente, não ponderando o uso da estratégia escalar em situações em que esta envolve procedimentos de cálculo mais simples e que evitam arredondamentos. Assim, nem sempre escolhe a estratégia mais eficiente, isto é, que envolve cálculos mais simples e/ou evite uma constante de proporcionalidade ou um fator escalar não inteiro. Existe a possibilidade de a aluna ter pensado erradamente que a estratégia funcional é a mais eficiente dado o tempo que foi dedicado à sua exploração, em particular, ao significado da constante de proporcionalidade.

Problemas de comparação. Antes da unidade de ensino, o desempenho de Célia é influenciado pelo seu conhecimento sobre o contexto do problema. Responde corretamente a questões que envolvem a comparação de preços e a partilha equitativa de bens. Pelo contrário, responde de forma incorreta a problemas de misturas que exigem um julgamento qualitativo. As respostas incorretas da aluna resultam de: (i) erro no procedimento de cálculo; (ii) utilização parcial dos dados; (iii) interpretação incorreta dos valores numéricos obtidos; (iii) compreensão frágil da relação parte:todo e da relação parte:parte e suas representações. Na resolução destes problemas usa desenhos, a razão como divisão e a razão como fração.

O trabalho realizado com as primeiras fichas de trabalho, em particular, a leitura e interpretação das razões unitárias, parece ter contribuído para a melhoria do desempenho da Célia nos problemas de mistura. De facto, as suas estratégias mostram o uso de palavras e frases para dar significado aos valores numéricos. Para além destas representações, usa frequentemente a tabela e a fração na forma de divisão na resolução dos problemas.

No final da unidade de ensino, a aluna usa estratégias multiplicativas na resolução dos problemas sobre misturas que exigem um julgamento qualitativo, embora as justificações que apresenta, na forma de frase, não sejam claras sobre o modo como está a pensar. A compreensão do significado da razão unitária parece ter sido importante para a aluna resolver com sucesso os problemas de comparação embora revele necessidade de colocar etiquetas com o significado dos valores. Este é um modo de a ajudar a ler essa relação da razão.

Capítulo 8

Percurso de aprendizagem de António

8.1. Apresentação

António é um rapaz de onze anos, muito simpático e ativo e por isso muito acarinhado por colegas e professores. De facto, embora diga que tem na turma os seus melhores amigos, relaciona-se bem com alunos de outras turmas e está envolvido em várias iniciativas promovidas pelos professores da escola (por exemplo, desporto escolar). António diz morar longe e é com pai, que trabalha perto do estabelecimento de ensino, que faz as viagens diárias entre a sua residência e a escola. Nos tempos livres gosta de ouvir música, de jogar futebol e consola e diz estar impaciente pela chegada do período de férias de Verão, para ir praticar surf.

António tem um bom desempenho escolar, "só quatros e cincos porque não gosto de estudar tudo, (…) algumas coisas chatas" (António, primeira entrevista), isto é, o aluno reconhece que não estuda todos os assuntos com o mesmo empenho. Em relação à disciplina de Matemática, também estuda os assuntos de que gosta e não aqueles que considera aborrecidos, como por exemplo, as expressões numéricas. A professora de Matemática considera que o aluno participa com regularidade nas aulas de forma voluntária, que é empenhado no seu trabalho mas não lida bem com os seus erros. Esta situação foi possível de verificar durante a experiência de ensino, em particular, a mobilização o seu conhecimento intuitivo sobre fenómenos do quotidiano para resolver problemas apresentados nas aulas, comparando fenómenos para explicar as suas ideias corretas ou não.

O pai de António é quem o ajuda a estudar todas as disciplinas em casa, em particular, na véspera da realização dos testes pois, segundo o aluno, não é suficiente o apoio que recebe no centro de atividades de tempos livres, que frequente diariamente após as aulas. O aluno revela grande preocupação com os testes de avaliação, uma ideia que parece ser também a da sua família que se envolve nesse trabalho. Esta atitude de António pode estar associada à sua experiência escolar em minimizar outros instrumentos de avaliação, pois o aluno pensa que só são usados para avaliar os alunos "que têm negativas nos testes e quase a tudo" (António, primeira entrevista), pelo que, se ele pretende ter nível 4 ou 5 tem de investir nos testes.

Nas aulas de Matemática, durante a realização das tarefas em grupo, António partilhou a liderança do grupo com Gil, que é um dos seus melhores amigos e com o qual se envolveu em discussões pertinentes que ajudaram o grupo a resolver os problemas com sucesso.

António domina, tendo em conta a sua idade, a utilização do computador, em particular, diz ser um utilizador frequente da *internet*. O aluno também utiliza o processador de texto Word, o programa de apresentações PowerPoint e a folha de cálculo Excel. Durante a experiência de ensino, António empenhou-se no trabalho com o computador e é um dos alunos que melhor domina a folha de cálculo do Excel (por exemplo, escreve fórmulas simples de forma autónoma).

8.2. Capacidade de raciocínio proporcional

Nas secções seguintes analiso as respostas de António a diferentes tipos de problemas, apresentados em testes e em entrevistas. As três primeiras secções correspondem respetivamente aos momentos antes, durante e após a experiência de ensino. Na segunda secção é também descrito parte do trabalho do aluno na realização das tarefas das fichas de trabalho da unidade de ensino. A quarta secção é uma síntese das resoluções de António em cada tipo de problema.

8.2.1. Antes da experiência de ensino

Nesta secção analiso as respostas de António a problemas do teste diagnóstico e da primeira entrevista. De referir que o aluno não usou a calculadora, quer no teste diagnóstico quer na entrevista, embora lhe tenha sido dito que a poderia usar.

Problemas pseudoproporcionais. A figura 8.1. apresenta um problema que envolve uma relação aditiva e é tido na literatura como gerador nos alunos, de uma estratégia proporcional.

> O Gil e o Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista. Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas faz o Tomás?

Figura 8.1. – Questão 2 do teste diagnóstico

António responde de modo correto e com clareza explica que a relação é aditiva (ver a figura 8.2.). A sua estratégia apresenta os dados e a resposta ao problema em linguagem matemática e natural escrita, isto é, em linguagem matemática e frases na língua materna.

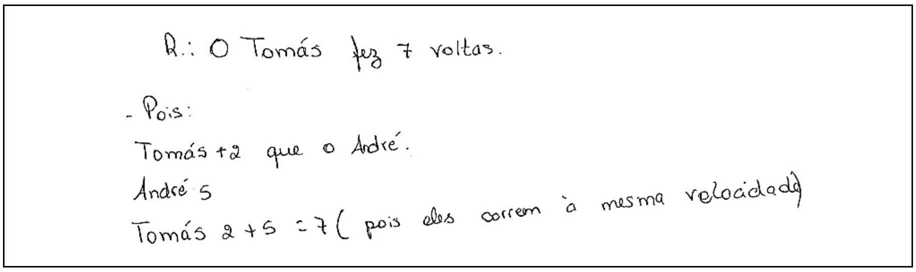


Figura 8.2. – Resposta de António à questão 2 do teste diagnóstico

Num outro problema pseudoproporcional, que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 8.3).

> 12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

Figura 8.3. – Questão 5 do teste diagnóstico

O registo escrito de António (ver a figura 8.4), mostra que ele faz várias abordagens para resolver o problema e é que na última que usa uma estratégia multiplicativa correta, embora responda incorretamente devido a um erro de cálculo.

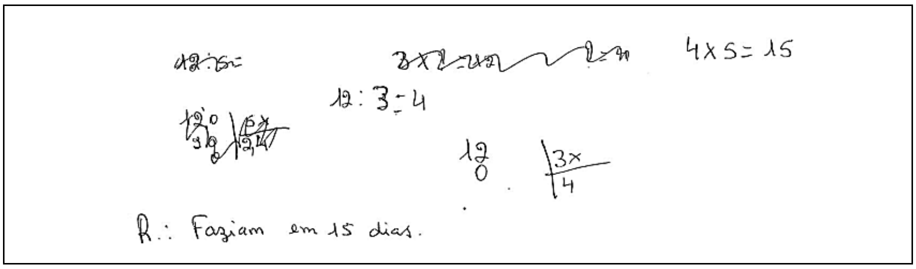


Figura 8.4. – Resposta de António questão 5 do teste diagnóstico

Na primeira entrevista, o aluno recorda que foi difícil para si resolver o problema pois por um lado, o "problema parecia estar escrito ao contrário" e por outro lado, não sabia "que contas fazer". No relato do modo como pensou, o aluno parece reconhecer que o número de operários varia inversamente ao número de dias necessários para construir a vedação e alguma dificuldade em estabelecer as relações entre valores numéricos concordante com a relação de proporcionalidade inversa. O aluno não soube explicar porque optou pela cálculo da divisão de 12 operários por 3 operários mas disse que os operários eram "quatro vezes mais no início que no fim". Quando António identificou o seu erro de cálculo (4x5=15) ficou um pouco constrangido e indignado referiu não saber como é que tinha escrito essa resposta. A linguagem matemática e natural escrita está presente na resolução do aluno no teste diagnóstico. Durante a entrevista, na qual o aluno esclareceu o modo como pensou, apenas está presente a representação oral.

Num problema pseudoproporcional (ver a figura 8.5), problema em que existe um outro tipo de relação entre as variáveis, António considera a existência de proporcionalidade direta (ver a figura 8.6).

A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria 3 toalhas a enxugar?

Figura 8.5. – Questão 9 do teste diagnóstico

1 = 30m

3x30m = 90m

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 3 \\ \hline 90 \end{array}$$

R.: levaria 90 minutos.

Figura 8.6 – Resposta de António à questão 9 do teste diagnóstico

A estratégia errada do aluno é multiplicativa e mostra como este considera a existência de uma relação de proporcionalidade direta entre o número de toalhas e o tempo que demoram a enxugar. Na primeira entrevista e sem que eu o tivesse inquirido sobre a sua resposta a este problema, António diz que após o teste diagnóstico e já no exterior da sala de aula, riu sobre a sua resposta que sabe agora estar incorreta depois de a discutir com o seu colega Gil. O aluno diz ainda que estes problemas podem enganar os “alunos que naquele momento só pensam nos cálculos”. A escrita em linguagem matemática e natural é a representação usada na estratégia de resolução do aluno.

Problemas de valor omisso. Na resposta à questão 7 do teste diagnóstico (ver a figura 8.7), António revela compreender que existe uma relação de proporcionalidade direta entre variáveis e responde com correção (ver a figura 8.8).

Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, quanto tempo levará a percorrer 125 quilómetros?

Figura 8.7. – Questão 7 do teste diagnóstico

30 m = 50 Km   15 m = 25 Km
60 m = 100 Km
~~125 m~~
75 m = 125 Km

Figura 8.8. – Resposta de António à questão 7

António usa a estratégia de composição/decomposição, cujo procedimento parece ter sido iniciada na tabela elementar à esquerda. Não é possível saber se a composição e a decomposição numérica é feita através do raciocínio aditivo ou do multiplicativo pois o registo do aluno não indica o modo como determinou os valores numéricos. A informação numérica é apresentada em colunas, à qual o aluno anexa sucessivamente os símbolos de igual e das unidades de medida pelo que a designo como tabela elementar, correspondendo às representações visuais (tabela) e linguagem matemática escrita.

Durante a primeira entrevista para dar resposta à questão 1.1 (ver a figura 8.9).

A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros.
1.1. Quanto custam 9 livros?

Figura 8.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, o aluno diz:

António: É fácil! Eu sei… Divido os 12 [euros] pelo número de livros e dá o preço de cada um. É quatro [euros] cada um…

Investigadora: Cada um? Queres dizer cada livro?

António: Sim. Agora faço 4 euros vezes 9 [livros]… 4 vezes 9 é 36. É 36 euros, os livros todos.

António revela conhecer bem o contexto do problema e o cálculo do preço unitário (razão unitária) dos livros da coleção parece, neste contexto, uma ideia intuitiva. O preço unitário parece ser para o aluno a informação intermédia relevante. Para determinar o valor omisso calcula o produto pela razão unitária pelo número de livros, isto é, usa uma estratégia multiplicativa funcional. Na resolução do problema o aluno apenas usa a representação oral.

O aluno mobiliza o conhecimento sobre a razão unitária, referente ao problema anterior (ver a figura 8.9) e responde à questão 1.2 (ver figura 8.10).

1.2. Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar?

Figura 8.10. – Questão 1.2 da primeira entrevista

O aluno diz:

António: Aí é mais de 10 [livros]… Faço 48 [euros] a dividir… Dá 12 [livros]. É preciso escrever?

Investigadora: Podes dizer como é que pensaste? Escrever ou não, a decisão é tua. Se precisares podes usar o papel e a calculadora.

António: Ah! Não é preciso. Eu fiz assim… (Passa algum tempo.) Pensei em dividir o dinheiro dela [Margarida] pelo preço de cada livro e vai dar quantos livros ela pode comprar…

Investigadora: E o cálculo? Como é que fizestes?

António: Ah! Pois, ah… Pois, eu não sabia que 48 a dividir por 4 dava 12. Fiz… Assim, fiz 40 a dividir por 4 e 8 a dividir por 4 e dá 10 mais 2.

O diálogo revela que António compreende bem o problema e usa uma estratégia multiplicativa funcional para o resolver, mobilizando a razão unitária calculada na resolução do problema anterior (ver a figura 8.9). O procedimento de cálculo mental que o aluno comunica oralmente revela que usa a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para mais facilmente calcular o valor omisso.

Durante a primeira entrevista, na resolução de outro problema de valor omisso (ver figura 8.11) que envolve um contexto de uma mistura, António diz não ser capaz de o resolver.

Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 chávenas de água e 12 colheres pequenas de café.
3.1. Quantas colheres de café são necessárias se forem usadas 20 chávenas de água?

Figura 8.11. – Questão 3.1 da primeira entrevista

António: Eu não estou a ver como resolver isto!

Investigadora: Mas o que é que não percebes?

António: 8 [chávenas de água] dá 12 [colheres de café]…

Investigadora: Percebes que para fazer café é necessário água e café em pó?

António: Sim, mas… Não estou a perceber! (…) Como é que eu vou saber as colheres de café em 20 chávenas?! Não sei, professora. Este [problema], eu não sei [resolver].

Investigadora: E não queres pensar outra vez? Talvez… Podias pensar como resolveste os problemas anteriores.

António: Pode ser. (Lê o problema novamente e passa algum tempo.)

Investigadora: Podemos falar… Isto não é um teste de avaliação. Diz-me o que não percebes. Não gostas desses números?

António: Eu não sei como vou fazer isto… Aqui…

Investigadora: Vê lá como resolveste os problemas anteriores pode ser que tenhas uma ideia.

António: Oh professora, aqui não dá para saber para uma!

(…)

Investigadora: Vamos passar á frente e depois se houver tempo voltas a tentar, está bem?

António: É melhor, eu não sei este…Ah! Pode ser quantas colheres. Não!

O aluno diz compreender o problema, nomeadamente o seu contexto e não saber como resolvê-lo. De facto, António não mobiliza a estratégia que envolve o cálculo da razão unitária que usa na resolução de problemas anteriores, para determinar o número de colheres de café (valor omisso).

Por falta de tempo António não voltou a tentar responder ao problema e também não responde à questão 3.2 (ver a figura 8.12), tendo alegando que não o sabia resolver.

Quantas chávenas de água são necessárias se forem usadas 18 colheres de café?

Figura 8.12. – Questão 3.2 da primeira entrevista

Porém, na resolução problema 10.2 do teste diagnóstico (ver figura 8.13), um problema semelhante ao problema da questão 3.1 da primeira entrevista (ver a figura 8.11), António usa uma estratégia multiplicativa e determina o valor omisso (ver figura 8.14).

Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate, quantos copos de leite serão necessários adicionar a 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

Figura 8.13. – Questão 10.2 do teste diagnóstico

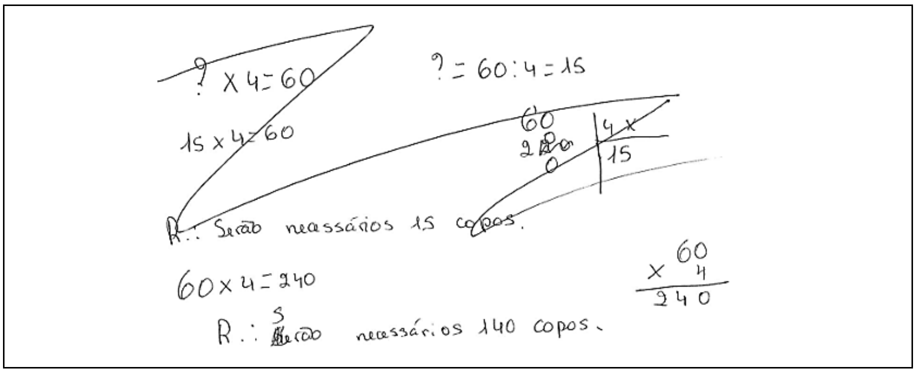


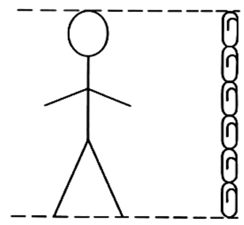
Figura 8.14. – Resposta de António à questão 10.2 do teste diagnóstico

O registo escrito do aluno mostra usa sucessão de abordagens multiplicativas, algumas abandonadas, que não mostra como é que determinou o fator 4. Os procedimentos de António, incluindo os que risca, revelam que: (i) precisa explorar o sentido da relação funcional, entre o número de copos de leite e o número de colheres de chocolate, para escolher a que pensa ser adequada; (ii) antes de indicar e realizar uma divisão, indica a multiplicação com o fator em falta. (Este procedimento está presente no trabalho de António que diz ter aprendido a divisão "como a multiplicação ao contrário" pelo que escreve sempre a multiplicação e "número que não se sabe é o ? (ponto de interrogação)".

A estratégia (não riscada) é desenvolvida quando António confere a razoabilidade da resposta (riscada) face ao problema e aos dados, pois "não podia ser só 15 [copos] de leite, tinha de ser muito mais" e o que poderá estar na base da rejeição dessa resposta é o sentido do aluno de como covariam das variáveis. Nesta última abordagem de resolução do problema, António calcula corretamente o algoritmo contudo quando escreve uma frase com a resposta engana-se e escreve um número que não corresponde ao produto obtido no algoritmo.

A questão 6 (ver figura 8.15) apresenta o problema do Sr. Alto e do S. Baixo, ao qual responde corretamente (ver figura 8.16).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto.
Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.
Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?



Sr. Baixo

Figura 8.15. – Questão 6 do teste diagnóstico

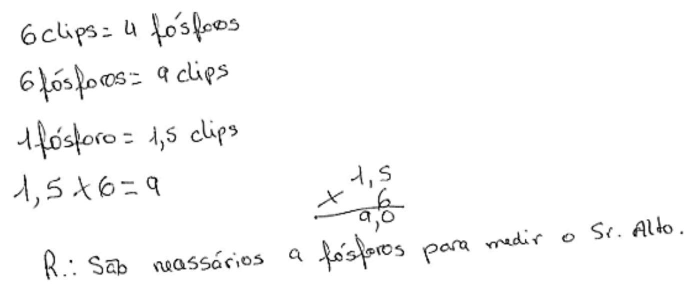


Figura 8.16. – Resposta de António à questão 6 do teste diagnóstico

O aluno não mostra como determina a razão unitária (1 fósforo = 1,5 clips) mas é provável que o tenha feito através da estratégia pictórica que foi apagada pelo aluno. Pois, as marcas dos desenhos dos senhores Alto e Baixo a lápis e dos clips e dos fósforos, que configuram a primeira abordagem à resolução do problema, são visíveis na folha do teste diagnóstico. Na abordagem seguinte ao problema que deixa registada, António substitui os desenhos pela linguagem matemática e materna, como por exemplo, o algoritmo da multiplicação (razão unitária x número de fósforos do Sr. Alto) para calcular o valor omisso que corresponde à medida do Sr. Alto (clipes). A resposta final, escrita em linguagem natural, mostra que o aluno se engana na escrita da resposta e em vez de clipes escreve fósforos como valor omisso. Deste modo, António usa uma estratégia funcional e as representações um registo pictórico e de linguagem matemática e natural escrita.

Problemas de comparação. Num problema de comparação do teste diagnóstico (ver a figura 8.17), António responder de forma correta (ver a figura 8.18).

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

Figura 8.17. – Questão 4 do teste diagnóstico

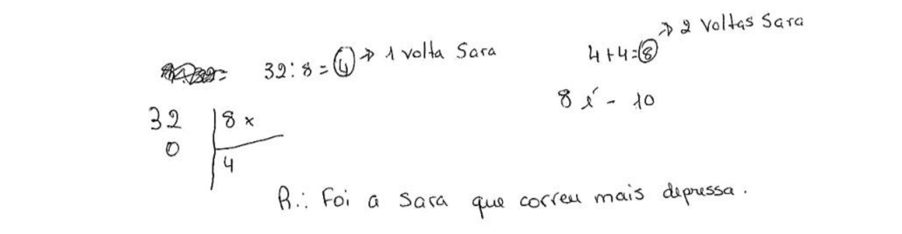


Figura 8.18. – Resposta de António à questão 4 do teste diagnóstico

António usa uma estratégia de composição/decomposição que envolve os dados referentes a Sara. No lado esquerdo do registo, em linguagem matemática escrita, o aluno apresenta o cálculo a razão unitária (4 minutos por volta) e no lado direito superior do registo, a adição dos valores referentes à razão unitária (4 minutos+4 minutos e 1 volta+1 volta). Deste modo, o aluno fixa o número de voltas e compara os tempos gastos por Sara (8 minutos) e Maria (10 minutos) e responde que é Sara a atleta mais veloz. As representações envolvem a escrita em linguagem matemática e natural.

Num outro problema, a questão 4 da entrevista (ver a figura 8.19), António faz um registo pictórico (ver a figura 8.20).

Cinco raparigas partilharam três pizas e dez rapazes partilharam seis pizas. Quem comeu mais piza? As raparigas ou os rapazes?

Figura 8.19. – Questão 4 da primeira entrevista

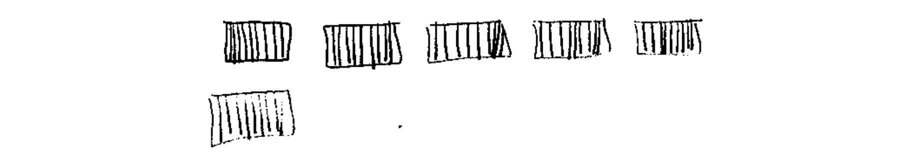


Figura 8.20. – Resposta de António à questão 4 da primeira entrevista

E diz à investigadora:

António: Eu já sei, é fácil! Se tem 6 pizas, parte-se em 10 fatias para dar uma [fatia] a cada um [rapaz]. Cada miúdo come seis décimos.

Investigadora: E as raparigas?

António: É mais fácil, é de três quintos.

António completa o seu registo (ver a figura 8.21) e diz corretamente que os rapazes e raparigas comem a mesma quantidade de piza. Ao questionamento da investigadora sobre essa conclusão, António diz que as frações são equivalente, que 3 vezes 2 dá 6 e 5 vezes 2 dá 10.

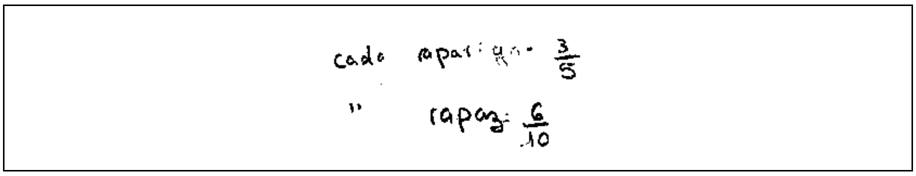


Figura 8.21. – Resposta de António questão 4 da primeira entrevista

A resolução do problema envolve o desenho de 6 pizas, divididas em dez partes, uma representação que parece ter sido necessária para o aluno compreender a quantidade de piza que cada rapaz iria comer. No entanto, não fez uma representação semelhante para as pizas partilhadas pelas raparigas talvez por essa situação envolver quantidades menores. António parece compreender bem o problema, transcreve os dados referentes à partilha de piza pelos rapazes numa representação pictórica e posteriormente na representação em linguagem oral. Quando ao aluno explica o modo como para justificar a equivalência das frações, apresenta a representação em linguagem matemática escrita (fração). Para comparar as quantidades usa uma estratégia multiplicativa escalar (fator escalar 2).

Num outro problema de comparação do teste diagnóstico que envolve uma mistura de dois líquidos (ver a figura 8.22).

> Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de *Sunquick* (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de *Sunquick* a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

Figura 8.22. – Questão 8 do teste diagnóstico

António responde de forma correta (ver a figura 8.23).

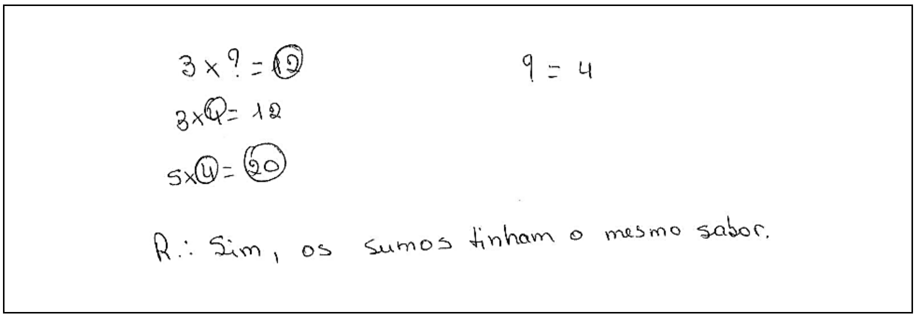


Figura 8.23. – Resposta de António questão 8 do teste diagnóstico

O aluno explora as regularidades entre os dados do problema, determina o fator em falta (4) que identifica como invariante, parecendo ter sido esse o pressuposto que o leva a afirmar que os sumos têm o mesmo sabor. O procedimento do aluno envolve a relação entre variáveis o que representa uma estratégia multiplicativa representada de em linguagem matemática e materna escrita.

A seguinte questão do teste diagnóstico é um problema de comparação (ver a figura 8.24) que envolve o custo de uma refeição e ao qual o aluno responde de forma correta (ver a figura 8.25).

11. Na pizzaria *Mama Mia* dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	5	65

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

Figura 8.24. – Questão 11 do teste diagnóstico

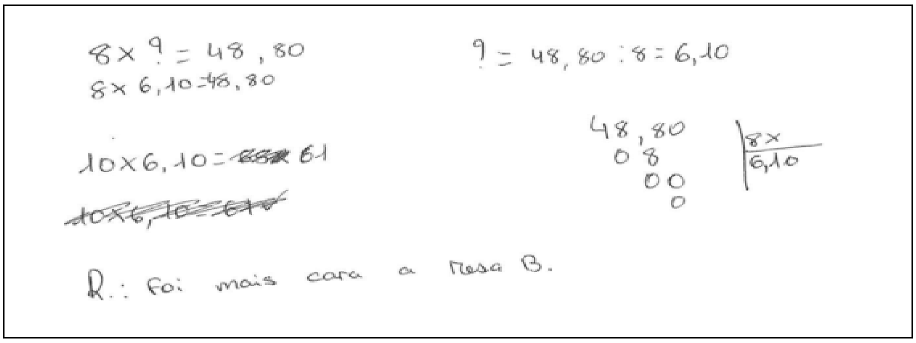


Figura 8.25. – Resposta de António à questão 11 do teste diagnóstico

António não identifica de imediato a mesa B como aquela que apresenta a mais cara refeição, por pessoa, e poderia ter feito um julgamento qualitativo sem fazer cálculos. De facto, o aluno calcula o preço unitário da refeição da mesa A e posteriormente, o preço de 10 refeições dessa mesa, isto é, uma estratégia de composição/decomposição multiplicativa. Ao determinar o preço (61 euros) de 10 refeições da mesa A, parece ter concluído que a mesa B é a mais cara pois as 5 refeições têm um custo superior às 10 refeições da mesa A. A resposta ao problema envolve a escrita em linguagem matemática e natural.

Num problema sobre mistura de tintas (ver a figura 8.26).

5. Na aula de EVT, a Inês e a Maria estão a juntar tinta preta com tinta branca para preparar tinta cinzenta. Qual das raparigas preparou tinta cinzenta mais escura?
5.1.

Figura 8.26. – Questão 5.1 da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, António responde de modo correto:

António: Quem tem mais tinta é a Maria que tem 6 copos.

Investigadora: Mais tinta. Mas queremos saber qual das tintas é mais escura. Lê outra vez [a pergunta].

António: Pois… Eu acho que a mais cinzenta é… Isto é para fazer com contas? Uh… Com contas não dá!

Investigadora: Resolve como pensas que é.

António: Eu acho que a Maria tem mais tinta, mais tinta branca… Deve ser mais branco [claro]… Então, eu acho que a cor da Inês é mais preta [escuro].

Inicialmente António considera uma outra propriedade das misturas, isto é, a sua quantidade e não na sua tonalidade. Depois de o ter alertado para essa situação, responde com alguma hesitação que é a mistura de Inês a que é mais escura. O seu julgamento parece ser baseado na comparação entre a quantidade de tinta branca das duas misturas, tendo em conta que a quantidade de tinta preta se mantém inalterada. De salientar que, António questiona-me se o problema deveria ser resolvido com o uso de "contas" ainda que diga que não o pode fazer. A resposta do aluno ao problema é exclusivamente em linguagem oral.

8.2.2. Durante a experiência de ensino

Durante o desenvolvimento da unidade de ensino, o aluno mostra grande empenho na realização das diferentes tarefas das fichas de trabalho, em particular, nas tarefas de investigação e exploração. Na fase de trabalho autónomo em grupo, António apresenta contributos decisivos para as discussões em que os alunos e, simultaneamente, é paciente e apoia os colegas com dificuldades.

As tarefas apresentadas nas fichas de trabalho 1 e 2 são desafiantes para António e o seu grupo, tendo sido este o que as concluiu primeiro. O aluno destacou-se pelos seus contributos para a resolução das tarefas, em despique com o seu colega Gil, transmitindo ao grupo de um modo claro o que estava a pensar. Neste grupo, por pressão de António, todos os elementos escreveram no caderno diário o que mais tarde viriam a redigir nos relatórios pois o aluno alegava que os colegas perdiam sempre os materiais, de uma aula para outra. No capítulo 5, no desenvolvimento da tarefa da ficha 1 na turma B, é apresentada uma discussão do grupo que exemplifica o contributo de António. Durante a discussão dessa tarefa, quando a professora disse que o invariante se designava constante de proporcionalidade, o aluno reage com algum espanto e diz "ah, é isto!" pois é provável que já tivesse contactado com esta terminologia no apoio ao estudo do centro de atividade de tempos livres que frequenta.

Na realização das tarefas da ficha de trabalho 3 António e os seus colegas de grupo, envolveram-se na exploração de regularidades e mobilizaram alguns termos específicos (por exemplo, "aumenta na mesma proporção", "constante de proporcionalidade", "relação entre" que a sua professora usou na discussão das tarefas 1 e 2. A tabela como forma de representar os dados e os resultados passa a estar presente na maioria das estratégias de resolução dos problemas. No entanto, António refere várias vezes que a construção das tabelas dá muito trabalho e por vezes evita construí-las em suporte de papel. Algumas vezes voltou a trás na sua decisão após a censura dos outros colegas do grupo.

A turma de António realizou o teste intermédio após a realização da tarefa 3 e a entrevista ao aluno foi realizada dois dias depois do teste intermédio, durante uma parte da aula de Estudo Acompanhado, antes da entrega e correção do teste intermédio.

Problemas pseudoproporcionais. A questão 5.4. apresenta um problema pseudoproporcional que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 8.27).

> Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.

Figura 8.27. – Questão 5.4. do teste intermédio

A resposta de António mostra que ele compreende que existe uma relação, em que o número de pessoas e o tempo necessário para executar uma pintura, variam de forma inversa (ver a figura 8.28).

> R.: Não pois se pintarem os três juntos, ~~fica~~ pintam mais depressa.

Figura 8.28. – Resposta de António à questão 5.4. do teste intermédio

A resposta correta de António revela que ele considera que existe uma relação inversa entre as variáveis, pois se o número de rapazes aumenta, o tempo (dias) necessário para pintar uma parede será menor. O aluno acrescenta uma condição ao contexto do problema, nomeadamente o trabalho conjunto dos três rapazes o que poderá estar associado às discussões em sala de aula relativas às condições que envolvem os fenómenos descritos nos problemas. A resposta de António é apresentada em linguagem natural escrita.

Num outro problema pseudoproporcional (ver a figura 8.29) o aluno também reconhece a inexistência de uma relação de proporcionalidade direta entre o número de raparigas e o tempo que demoram a chegar quando vão juntas para a escola (ver a figura 8.30).

> Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos três levam 30 minutos.

Figura 8.29. – Questão 5.1 do teste intermédio

> R.: Não, pois vão as três juntas e não uma de cada vez.

Figura 8.30. – Resposta de António à questão 5.1 do teste intermédio

A resposta mostra que o aluno pondera dois cenários, mobilizando provavelmente aspetos da discussão da tarefa da ficha de trabalho 1. De facto, o aluno parece considerar que se as raparigas vão juntas para a escola demoram o mesmo tempo e, pelo contrário, se as raparigas fizerem esse trajeto individualmente demoraram 30 minutos. A resposta do aluno é apresentada em linguagem natural escrita.

Problemas de valor omisso. Num problema do teste intermédio (ver a figura 8.31), António revela como explora a relação multiplicativa da proporcionalidade direta para determinar o valor omisso (ver a figura 8.32).

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com seis rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 8.31. – Questão 2 do teste intermédio

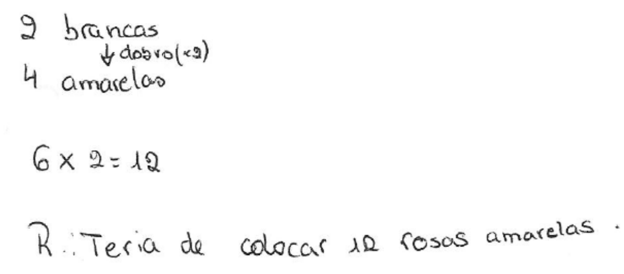


Figura 8.32. – Resposta de António à questão 2 do teste intermédio

A estratégia de resolução do aluno envolve a relação entre as rosas brancas e amarela, sendo que o fator funcional 2 parece ter sido identificado intuitivamente. Esse fator é usado esse fator para determinar o valor omisso. Por conseguinte, trata-se de uma estratégia funcional que envolve a representação em linguagem matemática e natural escrita.

Na resolução de um problema do teste intermédio (ver a figura 8.33), António usa uma estratégia multiplicativa (ver a figura 8.34) e responde corretamente.

Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 20 minutos a percorrer 30 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

Figura 8.33. – Questão 1 do teste intermédio

90 : 30 = 3

3x20 = 60

60 minutos

R.: Demorava 1 hora a percorrer 90Km.

Figura 8.34. – Resposta de António questão 1 do teste intermédio

A estratégia do aluno envolve a relação dentro das variáveis, de fato, aos dividir 90 por 30, determinar o do fator escalar (3) que é usado para determinar o valor omisso e por isso trata-se de uma estratégia escalar. De notar que o aluno resolve o problema sem etiquetar o significado dos valores numéricos. António apresenta os dados iniciais, os procedimentos de cálculo e a resposta usando exclusivamente em linguagem matemática e natural escrita.

Em um problema, da segunda entrevista, que envolve a leitura de um gráfico (ver a figura 8.35).

Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

Figura 8.35. – Questão 2.3 da segunda entrevista

O aluno, em diálogo coma investigadora, diz:

António: Tem de ser possível. Eu já disse aqui que há [proporcionalidade direta] (Aponta para a resposta à questão 2.1 da segunda entrevista). (Ver a figura 8.36)

Ao observar vi que a relação entre os números de embalagens e de pilhas era/é ou quadruplo. A constante de proporcionalidade é quatro (Nº de pilhas : 1 embalagem)

Figura 8.36. – Resposta de António à questão 2.1 da segunda entrevista

Investigadora: O que queres dizer com isso?

António: (…) Quando há proporcionalidade dá sempre para fazer. Pode ser nos números, na tabela ou no gráfico… (…) Como há sempre regularidade dá para ver. Aqui… Aqui é as caixas tem sempre 4 pilhas.

Investigadora: Ah! Já percebi o que queres dizer. Então vamos ver no gráfico?

O aluno parece pretender dizer que, independente da representação usada, se existe uma relação de proporcionalidade direta pode saber o valor omisso. De salientar que António mostra no seu registo escrito que compreende que a constante de proporcionalidade é o “N.º de pilhas:1 embalagem”, corresponde à razão unitária.

Para concluir a sua resposta, o aluno também diz:

António: Vou pôr o 25 (Marca 25 no eixo das abcissas.). Agora vou até á reta de proporcionalidade.

Investigadora: O quê?

António: (Marca ponto (25,100).) Este ponto, aqui… É assim… Uma marca da relação entre as embalagens e as pilhas. Agora é só ler aqui (desliza a ponta do lápis sobre a linha da quadrícula referente à ordenada 100.) Se estes andam de 20 em 20, então… Então, eu acho que aqui é 100 (ver a figura 8.44). (…) É 100, professora. Quer ver? Olhe aqui, 5 vezes 5 dá 25 e 5 vezes 20 dá 100… E também 4, da constante, vezes 25 dá 100 (ver a figura 8.37)… Yes!

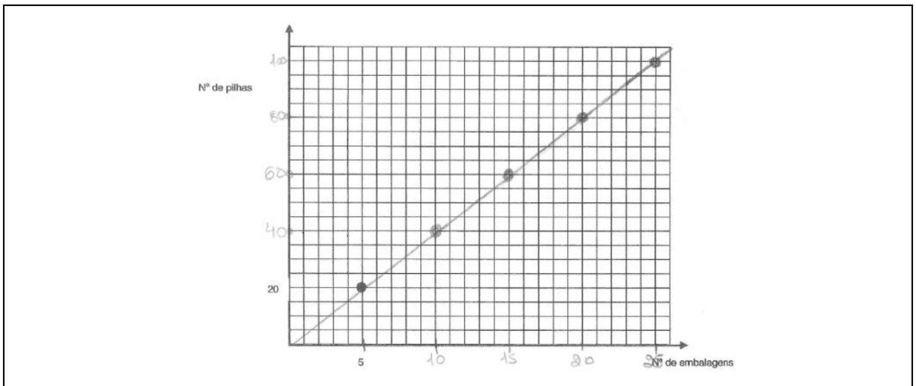


Figura 8.37. – Resposta de António questão 2.3 da segunda entrevista

António responde que é possível determinar o número de pilhas (valor omisso) que existem em 25 embalagens usando a representação gráfica. A sua justificação final mostra refletir sobre a veracidade de o valor omisso ser 100 pilhas e é curiosa a associação que o alunos faz entre desta estratégia gráfica às estratégias escalar e funcional mostrando que o aluno. O trabalho com múltiplas representações parece ter contribuído para reforçar a noção do aluno sobre a relação de proporcionalidade direta, nomeadamente a verificação de regularidades inerentes a essa relação em diferentes representações. Na resposta do aluno predomina a linguagem oral apoiada pela representação visual (desenho da "reta da proporcionalidade) e linguagem matemática escrita.

Problemas de comparação. Num problema do teste intermédio (ver a figura 8.38) António indica com correção que o jarro A tem o chá mais doce mas a sua justificação, redigida no teste é incorreta (ver a figura 8.39).

Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce?
Justifica a tua resposta.

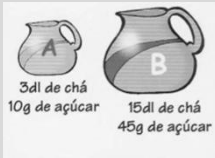


Figura 8.38. – Questão 3 do teste intermédio

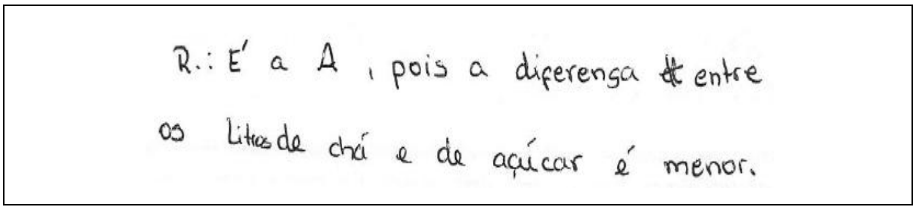

R.: É a A, pois a diferença ~~de~~ entre os Litros de chá e de açúcar é menor.

Figura 8.39. – Resposta de António à questão 3 do teste intermédio

A justificação do aluno, em linguagem natural escrita, revela o uso de uma estratégia não proporcional, isto é, calcula a diferença entre a quantidade de chá (dl) e a de açúcar (g). Antes de o teste intermédio ter sido corrigido, no final da segunda entrevista e porque o tempo disponível o permitiu, pedi ao António para explicar como tinha pensado para resolver o problema pois tendo em consideração o trabalho do aluno, na minha opinião, o erro não era consistente com o seu desempenho. António pergunta se é o chá do jarro A o mais doce, respondo que sim e indico-lhe que não se percebe bem como ele pensou para resolver o problema. O aluno diz que fez as contas na calculadora e que não as escreveu na folha do teste porque se esqueceu. Os cálculos relatados são as divisões entre as quantidades de chá e de açúcar cujos quocientes são, respetivamente para os jarros A e B (o aluno usou novamente a calculadora para indicar os quocientes), 0,3 e 0,(3) e acrescenta que o "A porque tem menos aguado por 1[grama] de açúcar". António percebeu que a sua resposta não estava completamente correta e ficou algo preocupado pelo que o aconselhei a registar os cálculos no próximo teste. Ao terminar a entrevista António partilhou comigo o seu desejo de ter boa nota no teste.

Através da explicação de António, torna-se claro que usa uma estratégia proporcional pois calcula e compara as razões unitárias e faz um julgamento qualitativo adequado. Contudo, talvez por não ter feito qualquer registo dos cálculos efetuados, escreve uma justificação que contraria o seu raciocínio pois o termo “diferença” na não se referir ao resultado de uma substração mas ao que ao diferença de sabor dos chás dos dois jarros. Sendo que, é no jarro A que a razão unitária (chá:açúcar) é “menor” (menos aguado).

O aluno usa a linguagem natural escrita na estratégia que apresenta no teste e a linguagem oral, quando explica me explica a resolução do problema, na entrevista.

Ao problema 4 do teste intermédio (ver a figura 8.40), António responde corretamente (ver a figura 8.41).

Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.

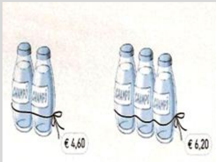


Figura 8.40. – Questão 4 do teste intermédio

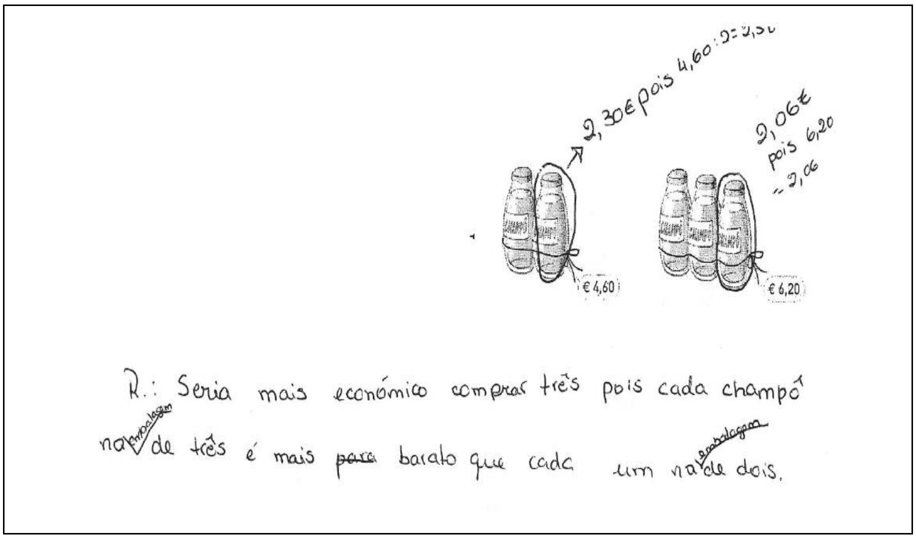


Figura 8.41. – Resposta de António questão 4 do teste intermédio

O aluno usa uma estratégia funcional pois calcula as razões unitárias depois compara-as e faz um julgamento qualitativo correto pois que o champô mais económico é o vendido em conjuntos de três (menor preço unitário). Na sua estratégia está presente a representação escrita (linguagem matemática e natural).

Na aula em que a turma de recebeu teste intermédio corrigido, apesar de tido a nota Bom, António mostra-se desagradado com o seu resultado e diz que saber bem a matéria pois na sua opinião tinha estudado muito. De facto, no teste os registos escritos do aluno são pouco cuidados, ao contrário do que sucedeu nas aulas.

Na realização das tarefas das fichas de trabalho 4 e 5 o aluno continuou a trabalhar com empenho, mostra compreender os problemas e domina os procedimentos de cálculo, que realiza por vezes mentalmente mesmo quando estão envolvidos fatores não inteiros. No entanto, descurou um pouco os registos deixando esse trabalho para os outros colegas de grupo. Quando os seus colegas Mário e Joel têm dúvidas, António incito-os a construir tabelas e ajuda-os a explorar a relação multiplicativa e escolher a estratégia que para si é a mais eficiente. Na resolução do primeiro problema de 5, que envolve a noção de escala, António questionou a professora no sentido validar a sua ideia de que a escala é uma constante

António participou na discussão da ficha de trabalho da ficha 4 e 5 por iniciativa própria e também pediu algumas vezes à professora para validar o seu significado da razão unitária. A qualidade das suas intervenções orais é substancialmente melhor no entanto comparativamente às primeiras fichas de trabalho, pois o aluno consegue mobilizar o trabalho realizado na resolução dos problemas da fichas de trabalho e testes. De salientar, uma intervenção do aluno durante a realização da ficha de trabalho 5, sobre escalas, em que o aluno coloca a hipótese no grupo de a escala ser a constante de proporcionalidade. Este episódio, por falta de tempo, foi explorado apenas no grupo com a ajuda da professora para negociar os aspetos terminológicos e de representações, mostra o envolvimento do aluno nas tarefas e a mobilização do conhecimento para novas situações.

8.2.3. No final da unidade de ensino

A turma de António realizou o teste final duas aulas após o término da experiência de ensino. A entrevista ao aluno foi realizada seis dias depois do teste final, durante a aula de Formação Cívica. A realização da entrevista antecedeu a entrega do teste final corrigido pela professora e antes de realizar os problemas António comunicou-me que não teria boa nota no teste porque, na sua opinião, teria respondido sem explicar bem como tinha pensado. Disse também que o teste tinha sido fácil pois tinha percebido bem todos os problemas e nem gastou a totalidade do tempo disponível para a sua realização. No entanto, após ter saído da sala, quando conversou com os colegas verificou que não respondeu “bem explicado” aos problemas o que o tinha deixado triste.

Problemas pseudoproporcionais. Na resposta a um problema que envolve a representação gráfica (ver a figura 8.42), António responde sem dizer se se trata de uma relação de proporcionalidade direta (ver a figura 8.43), apresentando duas ideias que se podem associar à inexistência dessa relação.

Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

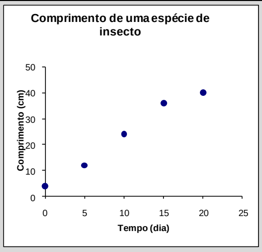


Figura 8.42. – Questão 1.7 do teste final

R.: O Gráfico é irregular, pois não esta em linha.

Figura 8.43. – Resposta de António à questão 1.7 do teste final

De facto, na sua resposta escrita, António parece querer dizer que não existe uma relação de proporcionalidade direta devido à inexistência de regularidades. O aluno parece compreender que em a relação de proporcionalidade direta se traduz num gráfico cartesiano na disposição dos pontos “em linha” omitindo, no entanto, a necessária passagem da reta pela origem. No entanto, na redação da resposta o aluno é pouco claro sobre o modo como pensou.

Num problema pseudoproporcional semelhante a um colocado no teste diagnóstico (questão 9), em que em que existe um tipo de relação entre as variáveis que não é aditiva ou de proporcionalidade inversa (ver a figura 8.44), António responde corretamente e com mais clareza (ver a figura 8.45).

1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

1.8. Se uma camisola demora 20 minutos a enxugar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos.

Figura 8.44. – Questão 1.8 do teste final

R.: Não, pois 5 camisolas ao ~~mest~~ mesmo tempo ~~demouram~~ demora 20 (tal como uma).

Figura 8.45. – Resposta de António à questão 1.8 do teste final

O registo escrito do aluno, em linguagem natural, indica a inexistência duma relação de proporcionalidade direta e explica com clareza que 5 de camisolas demoram a secar o tempo que 1 só camisola. Isto é, António reconhece que o número de camisolas é independente do tempo que demoram a secar.

Num problema pseudoproporcional que apresenta uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 8.46), António diz não com clareza não se tratar de uma relação de proporcionalidade direta (ver a figura 8.47).

1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

1.6. Se 5 operários levam 15 dias a pintar uma escola, então 1 só operário leva 3 dias a pintar a escola.

Figura 8.46. – Questão 1.6 do teste final

R.: Não, pois um operário não pode levar menos tempo a pintar do que 15 operários.

Figura 8.47. – Resposta de António à questão 1.4 do teste final

O aluno mostra compreender, através do seu registo escrito em linguagem natural, que um operário não demora menos tempo a executar a pintura do um número superior de operários. No registo escrito é possível verificar que António troca o número de dias (15) pelo número de operários o que, estando incorreto, não influencia a qualidade do raciocínio do aluno.

Problemas de valor omisso. Para resolver o problema 5.1. do teste final (ver a figura 8.48) o aluno calcula de imediato a razão unitária (ver a figura 8.49).

5. A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos com uma velocidade constante.

5.1. Quanto tempo gasta a percorrer 1 metros? Apresenta os teus registos de forma organizada.

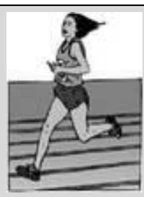
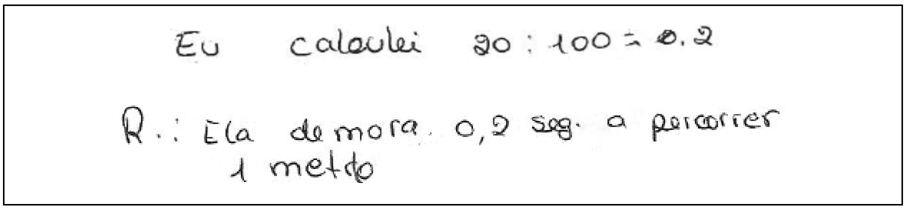


Figura 8.48. – Questão 5.1 do teste final


Eu calculei 20 : 100 = 0.2

R.: Ela demora 0,2 seg. a percorrer 1 metro

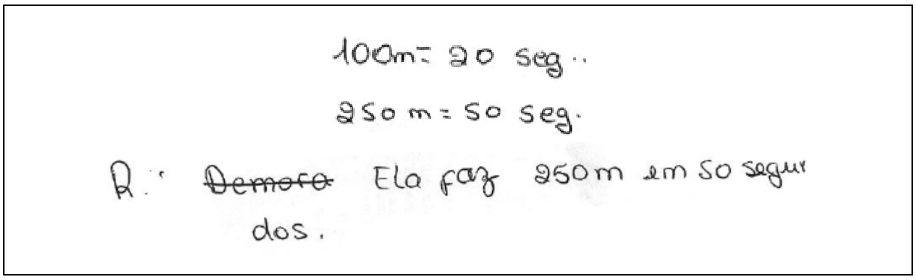
Figura 8.49. – Resposta de António à questão 5.1 do teste final

O registo escrito mostra que o aluno divide o tempo pela distância e determina o valor omisso, sendo que o valor corresponde à razão unitária (0,2 segundos por metro) ou constante de proporcionalidade, cujo significado o aluno descreve. O aluno usa uma tabela para representar os dados e o valor omisso, completada pela indicação dos procedimentos de cálculo e por uma frase.

Na resposta à questão 5.2., uma alínea do problema anterior (ver a figura 8.50), António responde corretamente mas usa outra estratégia para resolver o problema (ver a figura 8.51).

5.2. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 8.50. – Questão 5.2 do teste final


100m = 20 seg.

250 m = 50 seg.

R.: ~~Demora~~ Ela faz 250m em 50 segundos.

Figura 8.51. – Resposta de António à questão 5.2 do teste final

O registo escrito do aluno omite os procedimentos de cálculo e deste modo não é possível conhecer a estratégia usada, sendo provável o uso da estratégia multiplicativa escalar, a estratégia de composição/decomposição também pode ser considerada pois o aluno pode ter feito cálculos mentalmente e não os indicar por escrito. Durante a entrevista, o aluno esclareceu a sua estratégia e disse que inicialmente "não estava a ver bem como passar de 20 para 50 (…) era mais que o dobro e menos que três (…) depois pensei que podia ser de 2,5 e era" o que mostra que o aluno mentalmente procurou o escalar, pelo que usa a estratégia escalar. Em diálogo com a investigadora:

Investigadora: Mas poderias ter calculado o 2,5 de imediato sem estar a ver como passar de 20 para 50?

António: Ah. Aqui? (Aponta para o registo escrito.) Qual é o número de multiplicado por 20 dá 50?

Investigadora: Sim.

António: Fiz… Primeiro tento adivinhar e depois se não der divido. (Usa a calculadora.) 50 a dividir por 20, dá 2,5.

O que revela que mesmo em situações em que não usa o seu cálculo mental o aluno tende pensar a situação como o produto de um fator em falta, com a qual se sente mais confiante e não usa de imediato a divisão, surgindo esta operação como o último recurso.

Finalmente, questionado sobre o motivo de ter alterado a sua estratégia entre as resoluções das questões 5.1 e 5.2 (ver as figuras 8.49 e 8.51), tendo em conta, que na resposta à questão 5.1 explicado muito bem o significado do valor numérico obtido, o aluno revela:

António: Quando é para descobrir um número… Eu agora faço sempre as contas para baixo… Assim… (Com os dois dedos indicadores desenha no ar duas linhas curvas sobre os dados numéricos indicados na figura 8.51.)

Investigadora: Metros para metros e segundos para segundos?

António: Sim.

Investigadora: E porquê?

António: Gosto mais. Dá para ver melhor que aumenta de proporção…

Investigadora: Sim? Precisas de te certificar se aumentam na mesma proporção e esta estratégia permite-te ver isso? É?

António: Ou diminui… Diminui de proporção. Sim, eu agora gosto mais de resolver assim.

(…)

Investigadora: Mas António, tu não resolveste a [questão] 5.1 da forma que estás dizer? Ora vê lá. Dividiste o tempo pela distância, não foi?

António: Oh pois não! (…) Ah, sei! Foi assim, como era para saber por 1 metro (…) Dividi logo 20 [segundos] por 100 [metros] e assim era 0,2 [segundos] para 1 [metro].

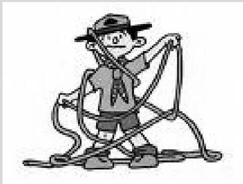
Investigadora: Usas mais estratégia de aumentar ou diminuir na mesma proporção mas também esta (ver a figura 8.49), depende das situações.

António: Ai. Eu já não sei… Eu acho que… Eu agora gosto mais desta (aponta para a figura 8.50).

António diz ter preferência pela estratégia escalar para resolver um problema de valor omisso e justifica a sua escolha pela facilidade em que verifica a covariação dos valores numéricos. Apesar dessa preferência, o aluno usa a estratégia funcional no problema de valor omisso que pede da razão unitária. Esta mostra que apesar de os alunos preferirem uma estratégia, provavelmente pela confiança em obter um resultado correto ou pela facilidade em monitorizar a informação, existem outros fatores que levam os alunos a tomar opções sobre a estratégia a tomar. António raramente usa a calculadora, pelo que a necessidade em monitorizar os valores numéricos que diz ter, pode levá-lo a dizer que tem preferência pela estratégia escalar.

O problema seguinte faz parte da terceira entrevista (ver figura 8.52).

1.No fim de semana passado um grupo de dez escuteiros fez um acampamento. Durante esse tempo o grupo comeu oito pães de forma.



1.1.No próximo fim de semana um grupo com quinze escuteiros vai fazer um acampamento semelhante. Quantos pães devem ser levados para a alimentação do grupo? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 8.52. – Questão 1.1 da terceira entrevista

António responde em diálogo com a investigadora:

António: Isso é fácil! (Relata o seu cálculo mentalmente.) 10 para 5, é metade! E metade e 8 é 4...

Investigadora: Mas olha lá que não são 5 escuteiros! Calma, não te precipites.

António: Humm Não é?! (…) É 15, é 15. Faço sempre isto [engano-me]! Ah! Então 10 para 15 é… Não! Qual é o número que multiplicado por 10 da 15… É 1,5. E 8 vezes 1,5 dá… Dá 12

Investigadora: Espera lá um bocadinho. Como sabes que dá 15 e 12?

António: É preciso 12 pães. Como é que eu fiz? Tenho de escrever?

Investigadora: Quero que me expliques como é que calculaste? Só escreves o que quiseres.

António: Está! Acho... Eu vi que para passar de 10 escuteiros para 15 tinha de multiplicar por 1,5. E depois… Na mesma proporção, fiz o número de pães, 8 vezes 1,5 dá 12. 15 escuteiros ficam com 12 pães.

Investigadora: Mas como é que calculaste o 1,5?

António: 1,5? Ah… Qual é o número que multiplicado por 10 da 15… Eu vi que tinha de ser menos de 2 [porque 2 vezes 10] dava 20. Tem de ser 1,5 que é o único que pode dar 15!

Investigadora: E alguma forma de calcular o 1,5 sem estares a fazer usar essas aproximações? Por tentativas…

António: Calcular? (…) Fazer uma conta?

Investigadora: Tu dizes que vês o número que pode ser ou não pode ser. E se não visses o número como é que resolvias o problema?

António: Não sei! (…) Eu podia fazer uma conta para descobrir o 1,5 mas é a de dividir! Fazia 15 escuteiros a dividir por 10 e tinha de dar 1,5.

António responde corretamente e a entrevista permite conhecer com detalhe a estratégia multiplicativa escalar que usa na resolução do problema. O cálculo do fator escalar (1,5) é feito mentalmente quando determinar o fator em falta, por aproximação ao valor do produto (15). Esse procedimento pode estar associado ao modo como António costuma resolver as divisões e também à sua capacidade de cálculo mental. No entanto, o aluno diz durante a entrevista que o fator escalar pode ser calculado através da divisão entre o número de escuteiros, respetivamente, no segundo e no primeiro acampamento. A resolução do problema é apresentada exclusivamente na linguagem oral.

A questão seguinte (ver a figura 8.53), é uma alínea do problema anterior, à qual o aluno responde com correção.

1.2. Se houvesse 44 pães quantos escuteiros podiam estar no acampamento? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 8.53. – Questão 1.2 da terceira entrevista

António, em diálogo com a investigadora, diz:

António: Agora é 44 [pães]. De 8… 5 vezes 8 dá 40. Ah! 6 vezes 8. Já sei, é para aí 5 e meio. Posso usar [a calculadora]?

Investigadora: O que quiseres. Faz como quiseres!

António: (Na calculadora digita 5,5x8.) Dá 44. (Utiliza novamente a calculadora.) 44, que é os pães, a dividir por 8 é 5,5.

Investigadora: Mas já sabias. Foi para confirmar? E agora?

António: Sim. Eu sei que o 5,5 é o número de proporção.

Investigadora: Número de proporção?

António: Sim, os pães e escuteiros aumentam em proporção. Em 5,5.

Investigadora: Ah, já percebi.

António: E agora 5,5, vezes 10 dá… 55.

Investigadora: Escuteiros, certo? Oh António, diz-me uma coisa, podes resolver este problema de outra maneira?

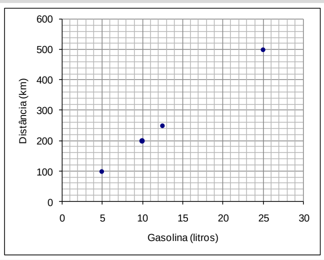
António: Ah! Fazer quanto é que comia 1 escuteiro? Podia… (…) Era 8 a dividir por 10 é… Ei… (Calcula mentalmente.) 8 por 10, é oito décimas. Dava 0.8 de pão para 1 escuteiro, esta maneira para resolver o problema é com a constante proporcional pois… (…) Depois… Depois divido e dá os escuteiros.

António usa a estratégia multiplicativa escalar para resolver o problema, à semelhança da estratégia usada na resolução da alínea anterior do mesmo problema. Do mesmo modo, procura mentalmente encontrar o fator escalar através do fator em falta pois o que poderá resultar do bom conhecimento sobre os múltiplos de oito. Paralelamente, mostra ser capaz de estimar valores intermédios com facilidade. Tal como referiu na resposta ao problema da questão anterior, António opta por esta estratégia contudo, quando questionado, diz que outra estratégia de resolução do problema envolve o cálculo da constante de proporcionalidade para calcular o valor omisso. António responde ao problema de forma oral, recorrendo à calculadora para verificar os cálculos.

Para além do modo como o aluno efetua os cálculos, a tomada de decisão do uso da estratégia escalar pelo aluno o aluno parece residir na sua intuição sobre a covariação das variáveis, sendo que o aluno indica o fator escalar como o "número de proporção".

Num problema de valor omisso, que envolve a representação gráfica (ver a figura 8.54), a António indica corretamente o valor omisso no gráfico (ver a figura 8.55).

3. O gráfico mostra o consumo de gasolina feito por um carro.



3.2. Será possível identificar no gráfico a quantidade de gasolina que este carro gasta para percorrer 400 km? Explica como pensaste.

Figura 8.54. – Questão 3.2 do teste final

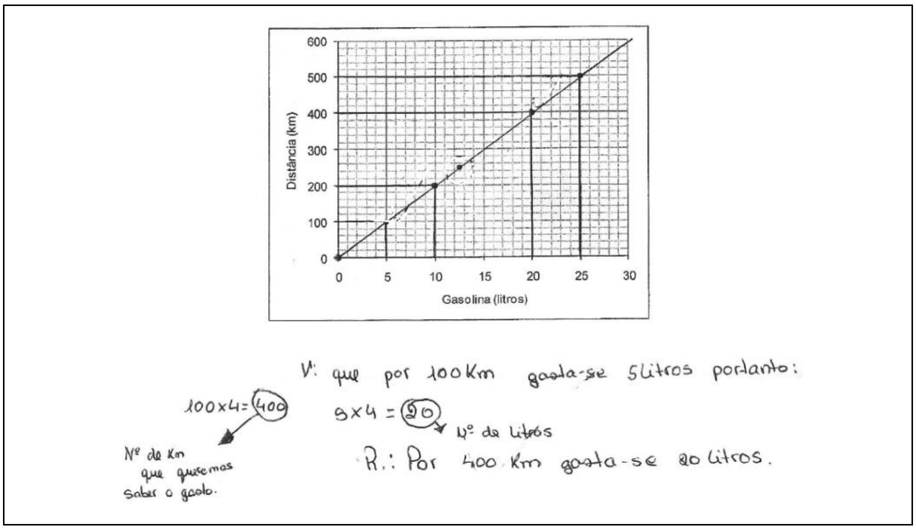


Figura 8.55. – Resposta de António à questão 3.2 do teste final

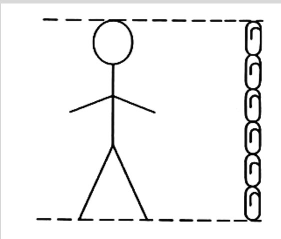
O registo escrito de António mostra que não usa apenas o gráfico para determinar o valor omisso. De facto, parece que o aluno mobiliza a informação do gráfico - 5 litros de gasolina corresponde a 100 quilómetros – e usa a estratégia escalar para calcular o valor omisso (20 litros de gasolina). É provável que os registos que António faz no gráfico, que também indicam o valor omisso, sejam posteriores aos procedimentos de cálculo. A estratégia do aluno envolve representações visuais e escritas (linguagem matemática e natural).

Considerando os erros que António comete com frequência por fazer leituras apressadas é provável que não tenha percebido que era pedido para determinar o valor omisso apenas com suporte ao gráfico. Contudo, a resposta do aluno permite perceber que ele é capaz de utilizar as duas representações para responder ao problema.

Para responder ao problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo (ver a figura 8.56) o aluno usa uma estratégia funcional (ver a figura 8.57).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?



Sr. Baixo

Figura 8.56. – Questão 4.1 do teste final

Olhei para a figura do Sr. Baixo e vi que um fósforo era ~~1,5 clipe~~ 1clipe e meio portanto:

O Sr. Alto mede- 6 x 1,5 = 9

R.: O Sr. Alto mede 9 clipes.

Figura 8.57. – Resposta de António à questão 4.1 do teste final

António usa a estratégia funcional e responde com correção. O registo escrito não mostra o modo como a constante de proporcionalidade (1, 5 clipes por fósforo) é determinada, limitando-se o aluno a dizer que o fez porque vê essa relação quando observa a figura do Sr. Baixo. A estratégia envolve a linguagem matemática e natural escrita.

Problemas de comparação. A questão apresenta um problema de comparação que envolve julgamento qualitativo (ver a figura 8.58) ao qual o aluno responde de forma correta (ver a figura 8.59).

A Luísa preparou três jarros com diferentes capacidades com sumo de laranja. Antes de servir o sumo a Luísa adicionou açúcar a cada um dos jarros.

Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)
A	1	4
B	1,5	6
C	$\frac{3}{4}$	2

Investiga se existe algum sumo de laranja que seja mais doce? Justifica a tua resposta.

Figura 8.58. – Questão 6 do teste final

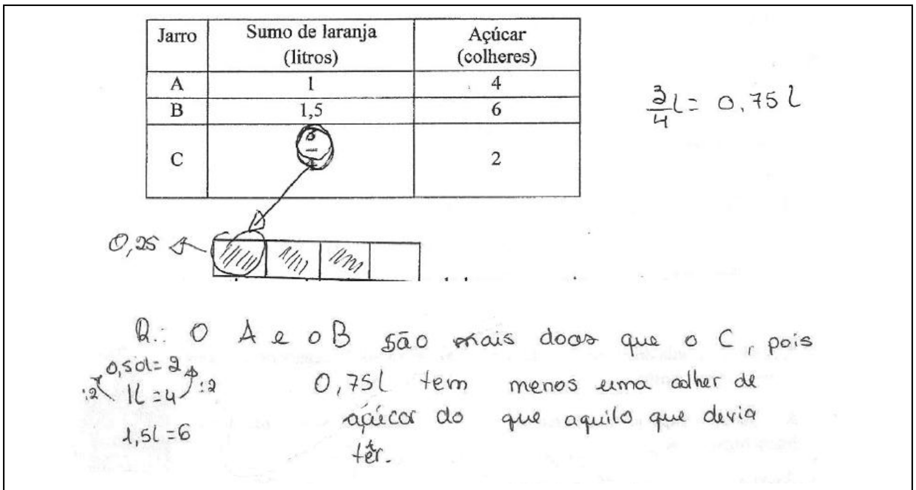


Figura 8.59. – Resposta de António à questão 6 do teste final

A parte inicial da resolução do problema envolve a passagem da representação em fração para a decimal, da quantidade de sumo de laranja do jarro C, mediada pela representação visual (retângulo dividido em 4 partes iguais, das quais 3 estão pintadas). Depois o aluno usa uma estratégia escalar para determinar um valor de referência (0,5 litros para 2 colheres de açúcar), parecendo ser com base neste que diz que os sumos dos jarros A e B são mais adocicados do que o sumo do jarro C. Sendo que este último, para ter o mesmo doce que os jarros A e B deveria ter mais uma colher de açúcar. O registo escrito (linguagem matemática e natural) não descreve com clareza as comparações que o aluno faz e que suportam o seu julgamento qualitativo mas parece claro que considera a existência de uma relação proporcional entre as quantidades de sumo e açúcar dos jarros A e B e que essa relação não é a mesma que envolve o jarro C.

Um dos problemas de comparação da terceira entrevista envolve uma mistura de tinta (ver a figura 8.60.) e requer julgamento qualitativo.

A António e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a António preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês misturou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Figura 8.60. – Questão 5 da entrevista

António responde corretamente:

António: Já sei… Eu já sei! (O aluno revela contentamento.)

Investigadora: Que bom! Como é bom saber coisas.

António: (Aponta para a calculadora).

Investigadora: Queres usar a calculadora? Tu que decides.

António: É melhor estes número são coisos, com vírgulas. Dois [números com vírgulas]. (…) Eu antes achava que estes problemas não se faziam com contas.

Investigadora: Ai é? Então porquê?

António: Eu não sabia… Vou fazer assim. (Faz um gesto no ar na horizontal.) Quando há os quatro números até é mais fácil fazer assim…

Investigadora: O que queres dizer com fazer assim? Espera 1 bocadinho. O que estás a calcular? É que eu não consigo ver o que estás a escrever na máquina?

António: Vai escrever o que eu estou a fazer nesse caderninho?

Investigadora: Sim. Como resolves o problema sem escrever eu tenho de anotar aqui o que estás a fazer. Mas não te preocupes, isto é só meu e não é para nenhuma avaliação.

António: Sim. Só acho giro, parece uma entrevista de jornal.

Investigadora: E é uma entrevista António, é muito importante para mim saber como é que pensas quando estás a resolver os problemas. Vamos voltar aqui ao problema que já temos pouco tempo até tocar.

António: É assim... Vou ver se quando divido se os números são iguais, se há constante proporcional. (Divide a quantidade de tinta branca, pela quantidade de tinta verde.) (…) As tintas são quase iguais no verde, mas são diferentes. Uma é 1,2 [3:2,5] e a outra é 1,333 [2:1,5]… A [tinta] da Inês tem mais branco por 1 de tinta verde, é a mais branca.

Investigadora: Diz uma coisa para terminar. Tu disseste no início que agora preferes resolver os problemas calculando o “número de proporção”, certo? Como fizeste aqui. (Indico a resolução do problema da questão 5.2 do teste final.) Mas agora não resolveste assim.

António: Pois foi. Ai… (…) Eu gosto mais de resolver assim! (Indica a resolução da questão 5.2. do teste final.)

Investigadora: Mas neste problema decidiste fazer a divisão da tinta branca pela tinta verde. Porquê?

António: Ai, pois foi… Eu não sei, eu acho que é mais fácil [esta estratégia] neste problema!

António responde oralmente ao problema tendo tomado a decisão de usar de imediato a calculadora, para determinar os quocientes. Nessas divisões os divisores são números não inteiros, o que parece ser o motivo para a utilização da calculadora. O aluno usa a estratégia funcional e diz ser esta a que lhe permite resolver mais facilmente os problemas de comparação embora sem dizer o que o motiva a ter tal opinião. A tomada de decisão sobre a tonalidade diferente é baseada na não equivalência das razões e como o aluno opta pela razão entre a tinta branca e a tinta verde, talvez porque a quantidade de tinta branca é em ambos os casos superior à quantidade de tinta verde, o seu julgamento é baseado na maior quantidade de tinta branca, na mistura da Inês.

O aluno também revela percebe que os problemas que envolvem cores podem ser resolvidos através de procedimentos de cálculo, o que na sua opinião não acontecia até à realização da unidade de ensino.

8.2.4. Síntese

Nesta secção apresento uma síntese do desempenho de António, em cada tipo de problema, ao longo da realização da unidade de ensino.

Problemas pseudoproporcionais. Antes da realização da unidade de ensino António compreende que nem todos os fenómenos descritos nos problemas propostos envolvem uma relação de proporcionalidade direta. O aluno identifica com facilidade a relação aditiva e, no que se refere ao problema que apresenta a proporcionalidade inversa, diz que este parece estar escrito ao contrário, querendo dizer que a relação multiplicativa apresentada é inversa da relação que espera encontrar, a relação de proporcionalidade direta. De modo errado considera a existência de uma relação de proporcionalidade direta no problema pseudoproporcional em que existe um outro tipo de relação entre as variáveis.

Durante e após a realização da unidade o aluno melhora o seu desempenho na resolução de problemas pseudoproporcionais, nomeadamente nos que envolvem a relação de proporcionalidade inversa e naqueles em que existe um outro tipo de relação entre as variáveis. Os seus registos mostram que apresenta argumentos baseados no seu conhecimento intuitivo, que aprendeu a considerar o fenómeno descrito nos problemas e não a atender apenas à sua sintaxe. Nos problemas em que não existe relação aditiva ou de proporcionalidade entre as variáveis, mostra ser capaz de enunciar condições que poderiam tornar o fenómeno descrito numa relação de proporcionalidade direta.

O problema pseudoproporcional em que António responde de um modo pouco claro é aquele que envolve a representação gráfica, não sendo possível conhecer o motivo dessa dificuldade uma vez que o aluno mostra saber usar esta representação na resolução de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta.

Problemas valor omisso. Antes da realização da unidade de ensino António mostra ser capaz de resolver alguns problemas de valor omisso: (i) compreende a relação de covariação das variáveis nos fenómenos descritos e usa a estratégia de composição/decomposição; (ii) compreende a relação invariante entre variáveis e, por isso, determina a razão unitária, enquanto cálculo intermédio para determinar o valor omisso. Contudo, a utilização destas estratégias parece depender do conhecimento do aluno sobre os fenómenos descritos no problema, pois não considera o seu uso na resolução do problema de valor omisso que envolve a confeção de café. Tendo em consideração a capacidade de cálculo mental do aluno e o seu conhecimento sobre multiplicação e divisão, não parece que essa dificuldade resulte dos números utilizados no problema. Na resolução destes problemas, o aluno usa várias representações incluindo a visual (desenhos) que apaga durante a resolução do problema, predomina a escrita em linguagem matemática e natural e a linguagem oral. António é capaz de responder às questões da entrevista sem fazer registos escritos.

Durante a realização da unidade de ensino António usa estratégias proporcionais (escalar e funcional) para resolver os problemas. As respostas aos problemas do teste intermédio, apresentam registos simples mas que não deixam dúvidas da utilização da relação multiplicativa. Durante a segunda entrevista o aluno revela compreender o significado de constante de proporcionalidade, descrevendo a regularidade da relação de proporcional direta em diferentes representações que parece ter aprendido com as tarefas das primeiras fichas de trabalho da unidade de ensino.

Após a realização da unidade de ensino, António continua a usar estratégias proporcionais e diz preferir usar a estratégia escalar, o que se verifica na sua resolução dos problemas. O aluno justifica a sua opção pelo fato de esta lhe permitir verificar com facilidade se os valores numéricos estão na mesma proporção. Contudo, a sua opção pela estratégia escalar pode resultar da sua predisposição para: (i) realizar cálculos mentalmente, sendo facilitador usar a estratégia que estabelece relações multiplicativas dentro da mesma variável; e (ii) efetuar tendencialmente as divisões através da operação inversa, isto é, utilizando o fator em falta. Na terceira entrevista, explica o modo como calcula mentalmente através do procedimento do fator em falta e por aproximação a valores de referência (múltiplos).

A resposta do aluno ao problema de valor omisso cujos dados são apresentados num gráfico revela como António gere diferentes representações – visual e a linguagem matemática escrita- para escrever a resposta e indicar o valor omisso. Em relação às representações, durante e após a unidade de ensino, pode dizer-se que nas suas respostas há um domínio da escrita em linguagem matemática e natural, num registo económico, quando os problemas são apresentados em testes, e um domínio da linguagem oral aquando das entrevistas.

Os erros do aluno na resolução dos problemas parecem resultar de leituras apressadas ou de distrações que, de um modo geral, não influenciam muito a qualidade do trabalho. No entanto, a interpretação incorreta dos problemas impede António de mostrar claramente o seu conhecimento. Também as respostas “económicas” fragilizam a qualidade das suas respostas, o que poderá ficar a dever-se à ausência, na sua experiência escolar, da importância em saber explicar, por escrito, o modo como se pensa, embora revele capacidade para o fazer oralmente como mostra nas aulas e nas entrevistas. De salientar que o aluno evita usar representações que "dão muito trabalho" como tabelas, uma opinião que poderá resultar do fato de calcular mentalmente com alguma rapidez, e de encarar a construção de tabelas como um processo moroso.

Problemas de comparação. Antes da unidade de ensino, António responde corretamente às questões que envolvem problemas de comparação e tendencialmente usa estratégias proporcionais, nas quais é possível perceber a relação multiplicativa. No entanto, as respostas do aluno revestem-se de alguma singularidade, que parece resultar do seu conhecimento intuitivo, e sugerem alguma criatividade. Assim, na resolução do problema que envolve a velocidade de duas atletas, fixa o valor de uma variável para poder comparar os valores absolutos da outra variável. Na resolução do problema de partilha equitativa de pizas, a sua estratégia envolve duas representações, a visual e a escrita matemática, sendo através da representação em fração que compara a quantidade de piza atribuída a rapazes e raparigas. A resolução do problema *Sunquick* envolve a exploração de uma regularidade, através da expressão do fator em falta, sendo que o mesmo fator 4 indica ao aluno que o sabor a laranja é igual nos dois sumos. Esta multiplicidade de estratégias de resolução, parece decorrer da intuição do aluno sobre o fenómeno descrito no problema e sobre as possíveis estratégias de resolução, isto é, constitui um "ziguezaguear" de procedimentos que fazem sentido para o aluno e produzem respostas corretas. A diversidade de estratégias mostra riqueza de procedimentos e representações do aluno que podem ser aproveitadas no aprofundamento do seu conhecimento sobre a relação de proporcionalidade direta, desenvolvendo de forma poderosa o raciocínio proporcional do aluno.

António apenas mostra alguma dificuldade no problema da mistura de tintas pois inicialmente centra-se numa outra propriedade da mistura que não a sua tonalidade. Durante a realização da unidade de ensino, mostra dificuldade na resolução de um problema em que explica, usando apenas linguagem natural, qual dos chás é mais doce. A sua resposta escrita no teste intermédio transmite o contrário do procedimento que diz ter realizado, durante a segunda entrevista. O registo "económico" do aluno, sem apresentar os procedimentos de cálculo ilustra a sua conclusão podendo esta situação resultar uso do cálculo mental (sem registo escrito), o que dificulta a redação de uma resposta coincidente com os cálculos realizadas. Um outro motivo poderá ser a tónica dada, durante a unidade de ensino, à explicação dos valores numéricos, nomeadamente à constante de proporcionalidade, o que poderá erradamente ter dado um sinal ao aluno para escrever uma justificação.

No final da unidade de ensino, o aluno usa estratégias proporcionais (escalar e funcional) para resolver problemas, justificando com clareza os seus julgamentos qualitativos. Contudo, não revela saber o que o leva a optar por uma estratégia ou por outra e diz que prefere usar a escalar. Esta estratégia, segundo o aluno, permite-lhe identificar mais facilmente se os valores numéricos estão na mesma proporção. António revela ainda que, nesse momento, já sabe que os problemas que envolvem a tonalidade da cor podem ser resolvidos usando números. Isto poderá justificar o fato de o aluno ter tido em consideração outra propriedade das misturas (quantidade) que não a tonalidade, aquando da resolução de um problema semelhante, no teste diagnóstico. No problema dos sumos de laranja, mostra compreender que os dos jarros A e B têm o mesmo sabor porque existe uma relação de covariação, o que não acontece com o jarro C, indicando também a quantidade de açúcar a adicionar para ficar com o mesmo sabor adocicado. No problema das misturas de tinta, mostra compreender o significado das razões unitárias e da ausência de constante de proporcionalidade.

As respostas de António apresentam várias representações, a escrita em linguagem matemática e natural e linguagem oral, conforme se trata de um teste ou de uma entrevista. À escrita associa, por vezes, uma representação visual, nomeadamente a disposição dos valores numéricos em colunas, o que poderá ser considerado uma tabela elementar.

Capítulo 9

Percurso de aprendizagem de Manuel

9.1. Apresentação

Manuel tem onze anos e é um rapaz simpático, que se relaciona bem com os colegas e tem sempre um tema para uma nova conversa, tornando-se, por vezes, o centro de uma alguma discussão se o assunto é o futebol ou o *wrestling*. É cordial com os professores, cumprimenta-os no início da aula e, por vezes, comenta o estado do tempo ou outro assunto de ocasião. Diz morar perto da escola mas a mãe acompanha-o no trajeto por temer algum acidente e, por vezes, usa o serviço de transporte do centro de tempos livres. Gosta de ver televisão, de jogar no computador e de ir ao cinema.

Segundo a sua diretora de turma, Manuel tem um desempenho escolar global satisfatório. Contudo, na disciplina de Matemática, o seu desempenho é fraco no domínio do conhecimento, situação que não o impede de obter o nível 3 na avaliação sumativa, pois o regime de avaliação dos alunos indica a ponderação de 70 por cento para o conhecimento e 30 por cento para as atitudes. A professora de Matemática considera que o aluno nem sempre participa na aula de forma ativa, isto é, não realiza as tarefas dentro do tempo destinado para o efeito e frequentemente espera que o trabalho seja corrigido para o copiar para o seu caderno. Frequentemente, apresenta-se como voluntário para corrigir o trabalho de casa que, segundo o aluno, realiza no centro de atividades de tempo livres ou com o apoio da mãe. De acordo com a informação dada pela diretora de turma e pela professora de Matemática, o seu comportamento na sala de aula é bom mas nem sempre está atento e precisa ser advertido.

Na primeira entrevista, Manuel mostra surpresa por ter sido escolhido para participar neste estudo pois, na sua opinião, não é bom aluno apesar de estudar muito para os testes. Confidencia que, na opinião da sua mãe, não sabe resolver problemas pois nunca sabe "que conta" deve usar. Também diz que é a mãe quem o apoia na preparação dos testes e na resolução dos trabalhos de todas as disciplinas. Este acompanhamento parece ser fundamental no desempenho escolar do aluno porém, pode estar na origem da sua falta de empenho durante as aulas pois refere que "o que não faço na aula, a minha mãe ajuda-me em casa" (primeira entrevista) mas o trabalho de preparação dos testes não parece aprofundar o trabalho da aula pois diz "tive de dizer à minha mãe que aquela regra não serve para todos os problemas" (terceira entrevista), referindo os problemas pseudoproporcionais. O aluno alude à regra de três simples que foi explicada pela sua mãe durante a preparação do teste intermédio mas que diz não usar porque percebe melhor "como aprendi na aula" (terceira entrevista).

Nas aulas de Matemática observadas, durante a realização das tarefas em grupo, Manuel foi um aluno passivo seguindo o trabalho dos colegas. É provável que as tarefas das duas primeiras fichas de trabalho assumam para ele grande dificuldade dado o seu conhecimento matemático frágil, em particular, sobre as noções de multiplicação e divisão e pensar que a resolução de problemas se cinge à utilização de algoritmos.

Tendo em conta a sua idade, Manuel domina a utilização do computador, em particular, o processador de texto Word e tem algum conhecimento sobre a folha de cálculo Excel. Durante a experiência de ensino, nomeadamente na resolução da tarefa da ficha de trabalho 2, foi o responsável pelo uso da folha de cálculo seguindo as instruções dos colegas de grupo.

9.2. Capacidade de raciocínio proporcional

Nas secções seguintes analiso as respostas de Manuel a diferentes tipos de problemas, apresentados em testes e em entrevistas. As três primeiras secções correspondem respetivamente aos momentos antes, durante e após a experiência de ensino. Na segunda secção também relato parte do trabalho do aluno durante a unidade de ensino. Na quarta secção apresento uma síntese das estratégias de resolução e das suas dificuldades em cada tipo de problema.

9.2.1. Início da unidade de ensino

Nesta secção analiso as respostas de Manuel a problemas do teste diagnóstico e da primeira entrevista. O aluno não usou a calculadora durante a resolução dos problemas embora lhe tenha sido dito que o poderia fazer.

Problemas pseudoproporcionais. A figura 9.1. apresenta um problema que envolve uma relação aditiva ao qual Manuel responde de forma incorreta (ver a figura 9.2.).

O Gil e o Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista. Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas faz o Tomás?

Figura 9.1. – Questão 2 do teste diagnóstico

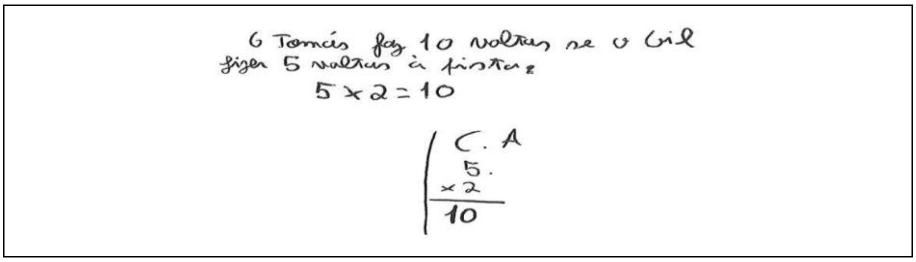


Figura 9.2. – Resposta de Manuel à questão 2 do teste diagnóstico

Manuel parece considerar a existência de uma relação de proporcionalidade entre o número de voltas do Gil e do Tomás. De facto, diz que as voltas do Tomás são o dobro das voltas do Gil. A sua estratégia envolve o procedimento multiplicativo e a representação em linguagem matemática e natural escrita.

Na resolução de outro problema pseudoproporcional, que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 9.3.), o aluno usa uma estratégia aditiva e responde de forma incorreta (ver a figura 9.4.) embora pareça reconhecer o comportamento inverso das variáveis.

12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

Figura 9.3. – Questão 5 do teste diagnóstico

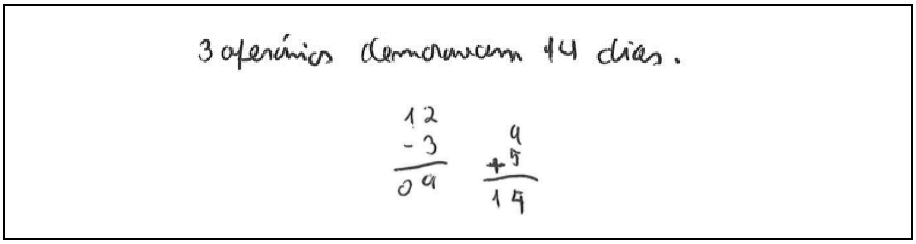


Figura 9.4. – Resposta de Manuel questão 5 do teste diagnóstico

O aluno calcula a diferença do número de operários (12-3=9) e adiciona incorretamente essa diferença ao número de dias de trabalho de 12 operários (9+5=14). Isto é, aparentemente Manuel faz cálculos sem sentido, em particular, no último adiciona o número de operários com o número de dias e a soma corresponde ao número de dias. No entanto, na primeira entrevista, o aluno explica que "se o número de operários é menor então o número de dias tem de ser maior (…) na mesma quantidade". Assim, Manuel reconhece a relação de proporcionalidade inversa mas não compreende a sua natureza multiplicativa. A estratégia do aluno envolve a linguagem matemática e natural escrita na resolução do teste diagnóstico. Durante a entrevista, na qual o aluno esclareceu o modo como pensou, apenas está presente a representação oral.

Num problema pseudoproporcional (ver a figura 9.5.), em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade, Manuel considera a existência de proporcionalidade direta (ver a figura 9.6.) e responde de forma incorreta.

A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria 3 toalhas a enxugar?

Figura 9.5. – Questão 9 do teste diagnóstico

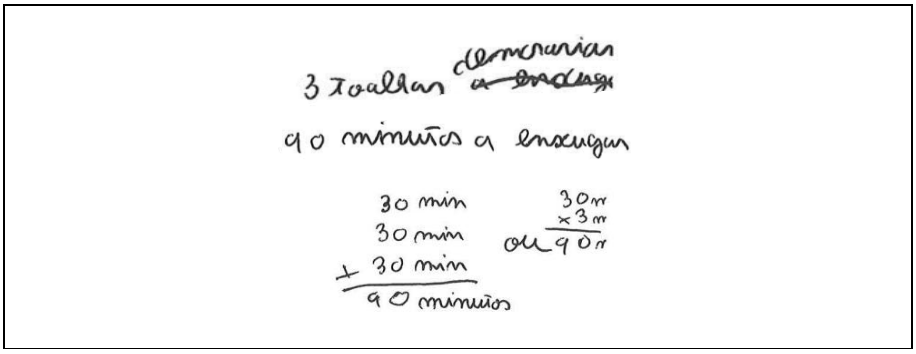


Figura 9.6 – Resposta de Manuel à questão 9 do teste diagnóstico

Duas estratégias são usadas para resolver o problema, como se tratasse de uma relação de proporcionalidade direta. Na primeira estratégia o aluno usa um procedimento aditivo e na segunda estratégia usa um procedimento multiplicativo. A escrita (linguagem matemática e natural) é a representação usada na estratégia de resolução do aluno.

Problemas de valor omisso. Na resposta à questão 7 do teste diagnóstico (ver a figura 9.7.), Manuel responde de forma incorreção (ver a figura 9.8.).

> Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, quanto tempo levará a percorrer 125 quilómetros?

Figura 9.7. – Questão 7 do teste diagnóstico

$$\begin{array}{r} 125 \\ -\ 50 \\ \hline 075 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ -\ 75 \\ \hline 050 \end{array}$$

Figura 9.8. – Resposta de Manuel à questão 7

Manuel parece não compreender o fenómeno descrito no problema. De facto, o aluno usa parcialmente os dados do problema e calcula duas subtrações aparentemente sem sentido. A estratégia errada do aluno envolve a representação em linguagem matemática escrita.

A questão 1.1 faz parte dos problemas da primeira entrevista (ver a figura 9.9.).

> A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros.
> 1.1. Quanto custam 9 livros?

Figura 9.9. – Questão 1.1. da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, o aluno diz:

Manuel: Eu faço (desenha a primeira linha de figuras retangulares da figura 9.10).

Investigadora: Vai dizendo o que estás a pensar.

Manuel: Eu faço os livros até dar 9. (…) Estes 3 [livros] é 12 euros. E mais 12 [euros] e 12 [euros]. (Faz o algoritmo da adição.) É 36 [euros] o preço (ver a figura 9.10).

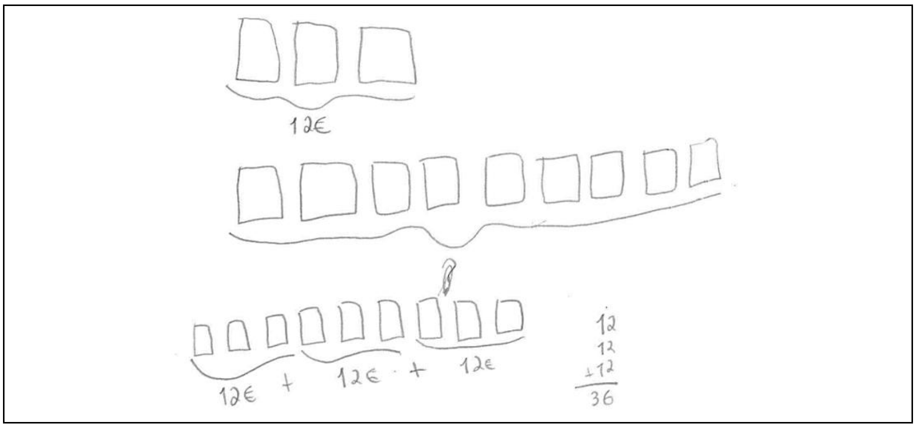


Figura 9.10. – Resposta de Manuel à questão 1.1 da primeira entrevista

Manuel revela conhecer o contexto do problema e responde corretamente. A estratégia do aluno conjuga elementos pictóricos dos livros e o procedimento aditivo, isto é, adição do preço de três conjuntos de 3 livros. Na resolução do problema o aluno usa a representação oral, a visual e a escrita (linguagem matemática).

O problema da questão 1.2 (ver figura 9.10.) é também corretamente respondido pelo aluno.

1.2. Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar?

Figura 9.11. – Questão 1.2 da primeira entrevista

Manuel diz:

Manuel: Eu posso fazer mais livros até dar. Não é?

Investigadora: Resolves como quiseres.

Manuel: (Desenha 9 figuras retangulares para representar os livros. Ver a figura 9.12.) Estes [livros] é 36 euros. (…) Se fizer mais 3 livros. (Desenha mais 3 figuras retangulares.) Vai dar… 6 mais 2 é 8. Olha, dá 48 [euros]. Então 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (contagem unitária das figuras retangulares). Ah, dá 12.

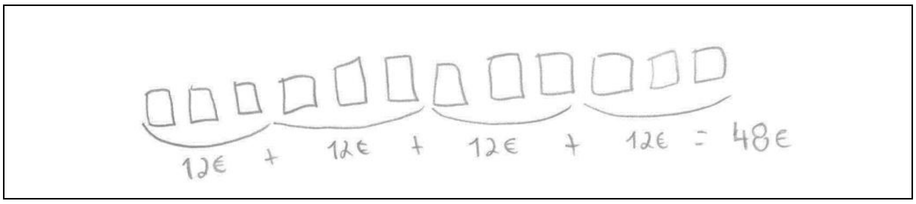


Figura 9.12. – Resposta de Manuel à questão 1.2 da primeira entrevista

Manuel responde corretamente ao problema. O aluno mobiliza a estratégia usada para responder do problema anterior (ver a figura 9.10.), isto é, conjuga elementos pictóricos dos livros e o procedimento aditivo para calcular mentalmente o montante de 48 euros. O valor omisso é determinado através da contagem unitária dos elementos pictóricos que representam os livros. Na resolução do problema o aluno usa as representações oral, visual e a linguagem matemática escrita.

A questão seguinte (ver figura 9.13.) pertence à primeira entrevista.

Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 chávenas de água e 12 colheres pequenas de café.
3.1. Quantas colheres de café são necessárias se forem usadas 20 chávenas de água?

Figura 9.13. – Questão 3.1 da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, o aluno diz:

Manuel: (Demora algum tempo.) Eu acho que não sei!

Investigadora: Não sabes. E o que é que não sabes?

Manuel: Como fazer… Saber as colher de café?

Investigadora: Afinal sabes qualquer coisa. Queres saber o número de colheres de café.

Manuel: Eu não sou bom a fazer isto! Quando é um problema… A minha mãe acha que eu não sei resolver problemas, eu nunca acerto na conta que é para fazer.

Investigadora: Ai sim? E o que é que tu achas?

Manuel: Sei pouco… Quando eu vou ler o problema, eu não sei, eu não percebo o que… Não sei explicar.

Investigadora: Espera lá. Não percebes a situação descrita no problema, é isso?

Manuel: Sim e não. Algumas vezes eu não percebo o que está lá escrito no problema… É difícil. Mais vezes eu não sei o que fazer…

Investigadora: Percebes a situação do problema mas não sabes como o resolver. É?

Manuel: Sim, mais ou menos. Eu não sei qual é a conta para fazer.

Investigadora: Então vamos lá ver este problema. Percebes a situação do problema?

Manuel: Deste? (Aponta para o enunciado do problema.) Sim… É como se faz café. Tem uma quantidade ideal!

Investigadora: Muito bem. Afinal sabes alguma coisa. E quanto é essa quantidade, essa quantidade ideal, se eu quiser usar 20 chávenas de água. Quantidade de café.

Manuel: Sim… Mas agora. Eu sei que a água aumentou. É… Acho que já sei. A água aumenta. (Usa a calculadora e digita 20-8.) Aumenta 12. Então o café também vai aumentar 12, não é?

Investigadora: Faz como estás a pensar. Isso é que importa.

Manuel: Dá 12+12. É 24 [colheres] de café.

Manuel responde de forma incorreta embora mostre compreender o fenómeno descrito. O aluno de forma oral revela sentido sobre a covariação das variáveis e usa uma estratégia aditiva, na qual considera igual diferença entre os valores numéricos das variáveis.

Manuel também responde à questão 3.2 (ver a figura 9.12.) de forma errada.

Quantas chávenas de água são necessárias se forem usadas 18 colheres de café?

Figura 9.14. – Questão 3.2 da primeira entrevista

Manuel: Posso usar este?

Investigadora: Qual?

Manuel: Os números deste? (Aponta para a alínea 3.1 do mesmo problema.).

Investigadora: O resultado? Faz como quiseres.

Manuel: Está mais próximo. 18 para 24. (Conta pelos dedos.) É 19, 20, 21, 22, 23, 24. É 6. Se tiro 6 ao café também tiro à água. (…) Dá… (Usa a calculadora. Digita 20-6.) É 12.

A estratégia usada pelo aluno é aditiva e mostra a redução da mesma quantidade numérica às duas variáveis do problema. A estratégia do aluno envolve apenas a representação oral.

Na resolução problema 10.2 do teste diagnóstico (ver figura 9.15) Manuel usa uma estratégia aditiva e responde de forma incorreta (ver figura 9.16).

Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate, quantos copos de leite serão necessários adicionar a 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

Figura 9.15. – Questão 10.2 do teste diagnóstico

Leite (n.º de copos)	12	69
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

$$\begin{array}{r} 12 \\ -3 \\ \hline 09 \end{array}$$ diferença é nove

$$\begin{array}{r} 69 \\ -60 \\ \hline 09 \end{array}$$ diferença é de nove

Figura 9.16. – Resposta de Manuel à questão 10.2 do teste diagnóstico

O registo escrito do aluno mostra uma estratégia aditiva para determinar o valor omisso. Os procedimentos de cálculo não têm sentido pois à quantidade de leite (copos) é retirada uma quantidade de chocolate em pó (colheres de sopa), contudo, o aluno considera ter calculado corretamente o valor omisso porque a diferença calculada é igual. Importa evidenciar a indicação dada pelo aluno sobre a diferença ser sempre 9 pois isso poderá indicar algum sentido sobre a relação invariante entre variáveis que o aluno incorretamente pensa ser de natureza aditiva. Na resolução do problema o aluno usa a linguagem matemática e natural escrita.

A questão 6 (ver figura 9.17.) apresenta o problema do Sr. Alto e do S. Baixo, ao qual Manuel responde de forma incorreta (ver figura 9.18.).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.
Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

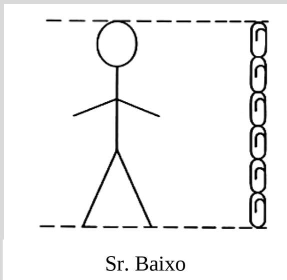


Figura 9.17. – Questão 6 do teste diagnóstico

precisos 8 clips para medir o Sr. Alto

6 fósforos (Sr. Alto)
- 4 fósforos (Sr. baixo
2 fósforos

6 clips (medida do senhor Baixo)
+ 2 clips (diferença de altura
8 clips (medida do senhor Alto.

Figura 9.18. – Resposta de Manuel à questão 6 do teste diagnóstico

A estratégia aditiva usada pelo aluno envolve o cálculo da diferença das alturas do Sr. Alto e do Sr. Baixo (em fósforos). Essa diferença é posteriormente adicionada a 6 clips, a altura do Sr. Baixo, para calcular a altura do Sr. Alto. Manuel revela sentido de covariação das variáveis mas de forma errónea, usa uma relação aditiva para determinar o valor omisso. O aluno usa apenas a linguagem matemática e natural escrita na resolução do problema.

Problemas de comparação. Num problema de comparação do teste diagnóstico (ver a figura 9.19.), Manuel responde de forma incorreta (ver a figura 9.20.).

A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

Figura 9.19. – Questão 4 do teste diagnóstico

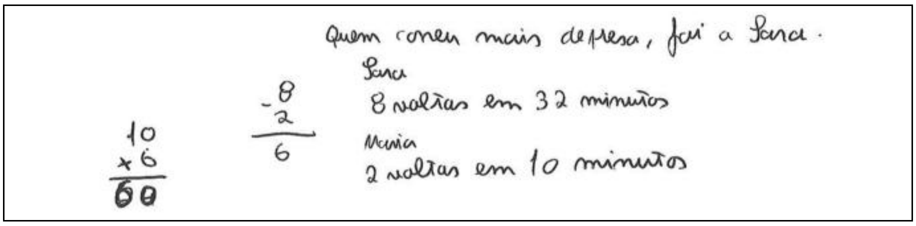


Figura 9.20. – Resposta de Manuel à questão 4 do teste diagnóstico

A estratégia do aluno mostra um erro de interpretação e deste modo a resposta está correta partindo de um pressuposto incorreto. No primeiro procedimento de cálculo determina a diferença do número de voltas das duas atletas. No segundo procedimento de cálculo determina o produto do tempo de 2 voltas de Maria (10 minutos), pela diferença de voltas das atletas, o que representa o tempo (60 minutos) de 12 voltas. Contudo, o aluno parece pensar que 60 minutos é o tempo referente a 6 voltas de Maria pelo que, a Sara é a mais veloz das duas pois só precisa demora 32 minutos a percorrer 8 voltas. O aluno usa a linguagem matemática e natural escrita na resolução do problema.

Num outro problema, a questão 4 da entrevista (ver a figura 9.21.), Manuel responde corretamente.

Cinco raparigas partilharam três pizas e dez rapazes partilharam seis pizas. Quem comeu mais piza? As raparigas ou os rapazes?

Figura 9.21. – Questão 4 da primeira entrevista

Em diálogo diz:

Manuel: Eu já fiz este problema!

Investigadora: Já?! Quando?

Manuel: Já. Nas frações.

Investigadora: No 1.º período? Quando estudaram as frações?

Manuel: Sim. No livro tem muitos problemas destes. Tenho de escrever? Ou digo?

Investigadora: É como quiseres. Se precisares escrever, escreve. Se não quiseres, diz como estás a pensar.

Manuel: É assim. 3 pizas, comem 5 raparigas. É 3 quintos. E 6 pizas é 10 rapazes. É 6 décimos. (Passa algum tempo.)

Investigadora: E?

Manuel: Ah?

Investigadora: E quem comeu mais?

Manuel: Pois, já me esquecia. Pensava que era só para dizer a fração. (…) 3 quintos e 6 décimos. As… São equivalentes, seu eu multiplicar o denominador e o… O outro por 2 dá 6 décimos.

Investigadora: E?

Manuel: Ah? São equivalentes. (…) Ah! (Ri.) Comeram a mesma [quantidade de] piza, todos.

Manuel reconhece de imediato o contexto de partilha de pizas porque já resolveu problemas semelhantes durante o estudo das frações. De forma oral o aluno indica que as frações de piza destinadas a cada rapariga e a cada rapaz são equivalentes, pelo que todos comeram a mesma quantidade de piza.

A questão 8 do teste diagnóstico é um problema comparação que descreve a mistura de dois líquidos (ver a figura 9.22.).

Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de *Sunquick* (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de *Sunquick* a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

Figura 9.22. – Questão 8 do teste diagnóstico

Manuel responde de forma correta (ver a figura 9.23.), usa uma estratégia funcional que envolve o cálculo (algoritmo da divisão) e comparação da razão unitária dos dois sumos através do algoritmo da divisão sem, no entanto, explicar o significado dessa razão. O julgamento qualitativo correto pode ter sido facilitado pela igualdade das razões. A estratégia do aluno envolve apenas a escrita (linguagem matemática e natural).

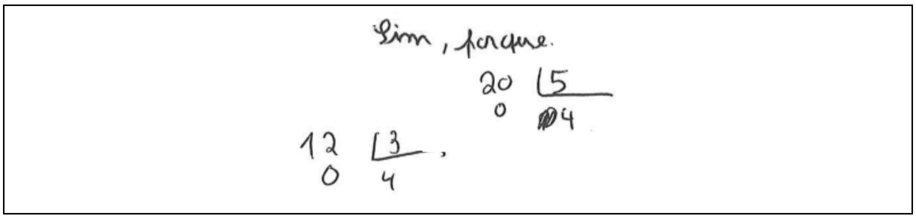

Sim, porque.
20 |5
0 4
12 |3 .
0 4

Figura 9.23. – Resposta de Manuel questão 8 do teste diagnóstico

A questão 11 do teste diagnóstico é um problema de comparação (ver a figura 9.24.) que envolve o custo de refeições.

11. Na pizzaria *Mama Mia* dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	5	65

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

Figura 9.24. – Questão 11 do teste diagnóstico

Manuel responde de forma correta (ver a figura 9.25.) mas a sua justificação é confusa. Durante a primeira entrevista o aluno esclarece que "na mesa B, haviam menos pessoas e pagaram mais" e conclui ser essa a mesa com as refeições mais cara como tinha indicado no teste diagnóstico. De facto, o aluno mostra ser capaz de fazer um julgamento qualitativo como base na comparação dos valores numéricos das variáveis e sem usar procedimentos de cálculo desnecessários neste problema. A justificação confusa apresentada no teste diagnóstico para resultar da não verificação, pelo aluno, da sua adequação à questão. A estratégia do aluno envolve apenas a linguagem natural escrita no teste diagnóstico e a representação oral na entrevista.

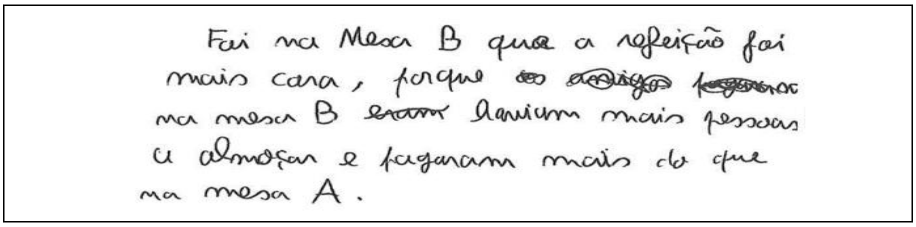

Foi na Mesa B que a refeição foi mais cara, porque ~~os amigos pagaram~~ na mesa B ~~eram~~ haviam mais pessoas a almoçar e pagaram mais do que na mesa A.

Figura 9.25. – Resposta de Manuel à questão 11 do teste diagnóstico

A questão 5.1 da primeira entrevista apresenta um problema sobre mistura de tintas (ver a figura 9.26.).

5. Na aula de EVT, a Inês e a Maria estão a juntar tinta preta com tinta branca para preparar tinta cinzenta. Qual das raparigas preparou tinta cinzenta mais escura?
5.1.

Figura 9.26. – Questão 5.1 da primeira entrevista

Em diálogo com a investigadora, Manuel responde de forma incorreta:

Manuel: Mais cinzenta? Eu não sei bem mas… Hum! Tem um de tinta preta as duas [misturas]. (…) Então são iguais.

Investigadora: E também têm tinta branca.

Manuel: É. Mas, mas é uma de preto faz o mesmo cinzento.

Manuel de forma errónea diz oralmente que as tintas têm a mesma tonalidade. O julgamento do aluno é baseado apenas na comparação da quantidade de tinta preta, isto é, só parte dos dados do problema são usados.

9.2.2. Durante o desenvolvimento da unidade de ensino

Durante o desenvolvimento da unidade de ensino, o aluno manteve um comportamento passivo, isto é, tende a esperar pela iniciativa dos colegas, raramente faz perguntas e por isso foi difícil conhecer as suas opiniões e/ou dúvidas. Na fase de trabalho autónomo em grupo, Manuel também se distrai com frequência em assuntos não relacionados com o trabalho. A professora teve de advertir Manuel e outro colega do grupo sobre o seu comportamento. Na fase de discussão das tarefas Manuel participou, de forma construtiva, sempre que a professora o questionou.

O grupo de Manuel revelou alguma dificuldade nas tarefas das fichas de trabalho 1 e 2, em particular, na sua fase inicial em que é necessário discutir ideias ainda pouco estruturadas. De facto, os alunos mostram-se pouco seguros na tomada de decisões, por si próprios e, por vezes, colocam de lado a exploração matemática e questionaram a professora sobre o trabalho a realizar. É importante referir que, em particular, os alunos da turma B não têm uma experiência escolar que tenha privilegiado a diversidade de tarefas e a modalidade de trabalho em grupo de forma continuada. Assim, as dificuldades reveladas pelos alunos devem ser entendidas com naturalidade, refletindo a uma adaptação a um processo de trabalho exigente e que altera a prática trabalho de vários anos na sala de aula e até a conceção que os alunos têm de Matemática.

As tarefas de ficha de trabalho 3 foram resolvidas com mais facilidade pelo grupo, sem tantos pedidos à professora para certificar o trabalho e com mais cuidado em explicar o significado dos valores numéricos. No entanto, o grupo de Manuel não concluiu a ficha de trabalho, no tempo destinado para a sua realização porque os alunos se distraiam várias vezes com assuntos foram do contexto da aula.

A turma de Manuel realizou o teste intermédio após a realização da tarefa 3 e a entrevista ao aluno foi realizada dois dias depois do teste intermédio, durante uma parte da aula de Estudo Acompanhado, antes da entrega e correção do teste intermédio.

Problemas pseudoproporcionais. A questão 5.4. do teste intermédio apresenta um problema pseudoproporcional que envolve uma relação de proporcionalidade inversa (ver a figura 9.27.).

Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.

Figura 9.27. – Questão 5.4. do teste intermédio

Manuel considera, de modo errôneo, tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta entre número de pessoas e o tempo necessário para executar uma pintura (ver a figura 9.28.), como mostra o seu procedimento que verifica a relação invariante. O aluno parece não atendido ao fenómeno descrito no problema. A estratégia de resolução envolve a representação visual (tabela elementar) e a linguagem matemática e natural escrita.

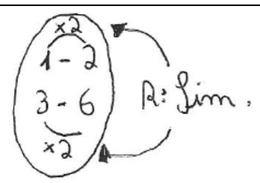


Figura 9.28. – Resposta de Manuel à questão 5.4. do teste intermédio

Na resolução de outro problema pseudoproporcional (ver a figura 9.29.), Manuel reconhece que o tempo não depende do número de raparigas (ver a figura 9.30.) podendo estas demorar o mesmo tempo (10 minutos). A justificação do aluno não é clara sobre o que pretende comunicar mas é evidente que o aluno atende ao fenómeno descrito no problema. A estratégia do aluno envolve apenas a linguagem natural escrita.

Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos três levam 30 minutos.

Figura 9.29. – Questão 5.1 do teste intermédio

R: Demoram o mesmo, pois só por não serem 3 raparigas não quer dizer que demorem mais tempo.

Figura 9.30. – Resposta de Manuel à questão 5.1 do teste intermédio

Problemas de valor omisso. A alínea 2 do teste intermédio é um problema (ver a figura 9.31.), ao qual Manuel responde corretamente (ver a figura 9.32.).

Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com seis rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

Figura 9.31. – Questão 2 do teste intermédio

R.B	R.A
2	4
6	12

×2

R: Teria de colocar 12 rosas amarelas.

Figura 9.32. – Resposta de Manuel à questão 2 do teste intermédio

A estratégia de resolução do aluno é funcional e é provável que tenha calculado mentalmente o fator funcional 2, através do qual determina o valor omisso. O registo escrito do aluno mostra que o aluno explora a relação multiplicativa entre e dentro (o que está riscado) das variáveis, mobilizando para a resolução de problemas o conhecimento que se pretendia que os alunos adquirissem com a realização das duas primeiras fichas de trabalho. A estratégia envolve a representação visual e a linguagem matemática e natural escrita.

Manuel também responde corretamente à questão 1 do teste intermédio (ver a figura 9.33.).

Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 20 minutos a percorrer 30 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

Figura 9.33. – Questão 1 do teste intermédio

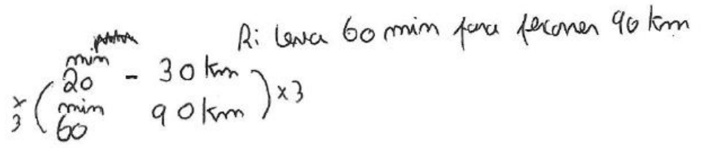


Figura 9.34. – Resposta de Manuel questão 1 do teste intermédio

O aluno usa a estratégia escalar para calcular o valor omisso, sem mostrar, contudo, como determinou o fator escalar (3). De notar que o aluno coloca etiquetas, com a unidade de medida, aos valores numéricos indicados no problema e ao valor omisso. A estratégia do aluno envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

A questão 2.3, da segunda entrevista, envolve a leitura de um gráfico (ver a figura 9.35.).

Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

Figura 9.35. – Questão 2.3 da segunda entrevista

Manuel, em diálogo com a investigadora, diz:

Manuel: Oh! Eu não sei esta também! (Manuel também não responde com alguma dificuldade à questão 2.2 que também envolve um gráfico.)

Investigadora: Mas o que é que não sabes exatamente?

Manuel: Isto [gráfico] é um bocado difícil. (…) É quase como a tabela, só que na tabela é mais fácil de ver os números e o resultado… (Passa algum tempo.)

Investigadora: Vamos lá tentar responder?

Manuel: Oh! Eu não sei mesmo. Eu não estudei isto! Eu acho… Não sei.

O aluno não responde ao problema pois na sua opinião, por um lado, a representação gráfica é difícil e por outro lado, não estudou esta representação. No entanto, Manuel revela a importância da tabela nas suas estratégias de resolução dos problemas, pois esta facilita a leitura dos dados e cálculo do "resultado". O termo "resultado" é provavelmente usado pelo aluno para identificar o valor omisso.

Problemas de comparação. A questão 3 teste intermédio é um problema sobre misturas (ver a figura 9.36.) ao qual Manuel responde de forma correta (ver a figura 9.37.).

Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce? Justifica a tua resposta.

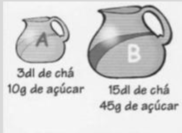


Figura 9.36. – Questão 3 do teste intermédio

$10:3=\boxed{3,33}\ldots$

$45:15=\boxed{3}$ R: O chá mais doce, é o A.

Figura 9.37. – Resposta de Manuel à questão 3 do teste intermédio

Manuel usa a estratégia funcional pois escreve as razões, na forma de divisão, entre a quantidade de açúcar e a quantidade de chá correspondentes ao jarros A e B. Depois calcula a razão unitária e faz o seu julgamento qualitativo indicando ser o chá do jarro A o mais doce Contudo, o aluno não apresenta o significado da razão unitária nem explica os pressupostos do seu julgamento qualitativo. O aluno usa a linguagem matemática e natural escrita na representação da sua estratégia de resolução do problema.

O aluno usa a mesma estratégia na resolução problema 4 do teste intermédio (ver a figura 9.38.), ao qual responde corretamente (ver a figura 9.39.).

Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.

Figura 9.38. – Questão 4 do teste intermédio

conjunto do champô
4,60€ : 2 = 2,3
conjunto do champô
6,20€ : 3 = 2,06

R: A escolha mais económica, é o conjunto 3 champôs.

Figura 9.39. – Resposta de Manuel questão 4 do teste intermédio

O aluno usa uma estratégia funcional, representa as razões na forma de divisão e calcula as razões unitárias. O julgamento qualitativo correto é baseado na comparação das razões unitárias (preço de cada embalagem de champô em cada pacote) embora o aluno não descreva o seu significado. A estratégia envolve a representação escrita (matemática e natural).

Na aula em que a turma de recebeu teste intermédio corrigido, Manuel mostrou-se surpreendido pelo bom resultado e o seu contentamento foi tão grande que mostrou a classificação a todos os colegas que estavam sentados em seu redor.

Na realização das tarefas das fichas de trabalho 4 e 5 o grupo de Manuel revelou mais empenho na conclusão atempada do trabalho o que poderá ser uma consequência dos resultados satisfatórios obtidos pelos elementos do grupo. Manuel e os restantes colegas, contrariando as indicações da professora, continuaram a minimizar a importância da escrita do significado da razão e da constante de proporcionalidade e da escrita de justificações mais claras. Esta situação pode estar na origem da dificuldade em usar a terminologia associada ao tópico da proporcionalidade (por exemplo, constante de proporcionalidade) no seu discurso oral e nos registos escritos. A tabela passou a ser usada, com bastante frequência, na representação dos dados dos problemas e apoiar a resolução de problemas de valor omisso.

Manuel participou na discussão da ficha de trabalho da ficha 4 por solicitação da professora e a sua resposta resumiu-se à transcrição do registo escrito da resolução do grupo. Com o questionamento da professora Manuel acrescentou mais algumas informações sobre o modo como o seu grupo tinha pensado.

9.2.3. No final da unidade de ensino

A turma de Manuel realizou o teste final duas aulas após o término da experiência de ensino. A entrevista ao aluno foi realizada seis dias depois do teste final, durante a aula de Formação Cívica. Na terceira entrevista Manuel revela que a mãe lhe ensinou a “regra de três simples” para resolver os problemas mas ele não a usa porque “é mais fácil como fazemos na aula”. Acrescentou ainda que aquela “regra não serve para resolver tudo”, o que terá dito à mãe aquando da preparação do teste final, referindo-se ao “problema das toalhas que não tem proporcionalidade direta”

Problemas pseudoproporcionais. A questão 1.7 apresenta um problema que envolve a representação gráfica (ver a figura 9.40.) e sobre o qual Manuel corretamente que não se trata de uma relação de proporcionalidade direta (ver a figura 9.41.).

Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

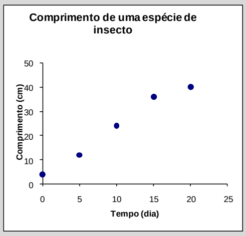


Figura 9.40. – Questão 1.7 do teste final

A: Não exciste proporcionalidade directa, porque se unirmos os pontos, não dá uma linha recta que signifique a proporcionalidade directa.

Figura 9.41. – Resposta de Manuel à questão 1.7 do teste final

O aluno justifica a sua resposta com a inexistência do aspeto gráfico da proporcionalidade, isto é, a disposição dos pontos em linha reta mas omite que esta passa pela origem. A estratégia do aluno envolve a escrita em linguagem natural.

Manuel também responde à questão 1.8 do teste final (ver a figura 9.42.) de forma correta (ver a figura 9.43.).

1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.

1.8. Se uma camisola demora 20 minutos a enxugar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos.

Figura 9.42. – Questão 1.8 do teste final

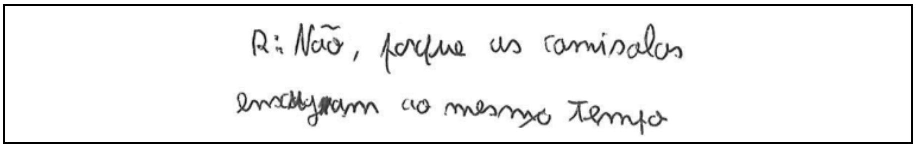


Figura 9.43. – Resposta de Manuel à questão 1.8 do teste final

O registo escrito do aluno, em linguagem natural, mostra que o uso do seu conhecimento intuitivo e diz que o número de camisolas é independente do tempo que demoram a secar. A estratégia do aluno envolve apenas a linguagem natural escrita.

O problema pseudoproporcional apresentado na questão 1.6 (ver a figura 9.44.), envolve uma relação de proporcionalidade inversa e Manuel reconhece corretamente a variação inversa das variáveis (ver a figura 9.45.).

> 1. Considera as seguintes situações e diz se representam uma relação de proporcionalidade direta. Explica como pensaste.
>
> 1.6. Se 5 operários levam 15 dias a pintar uma escola, então 1 só operário leva 3 dias a pintar a escola.

Figura 9.44. – Questão 1.6 do teste final

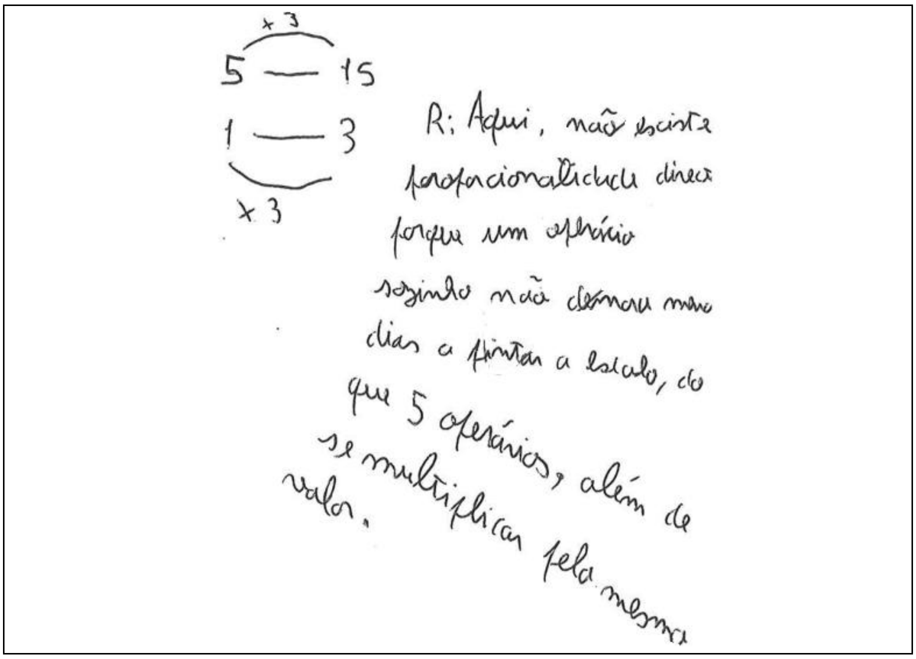


Figura 9.45. – Resposta de Manuel à questão 1.4 do teste final

Atendendo à disposição do registo escrito, é provável que Manuel tenha inicialmente pensado que o problema envolve uma relação de proporcionalidade direta como mostra a exploração numérica que apresenta. Contudo, o fenómeno descrito no problema contraria a relação numérica e é desse modo que Manuel justifica a inexistência de proporcionalidade direta. A estratégia do aluno envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

Problemas de valor omisso. Manuel responde à questão 5.1 do teste final (ver a figura 9.46.) de forma correta (ver a figura 9.47.).

5. A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos com uma velocidade constante.

5.1. Quanto tempo gasta a percorrer 1 metros? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 9.46. – Questão 5.1 do teste final

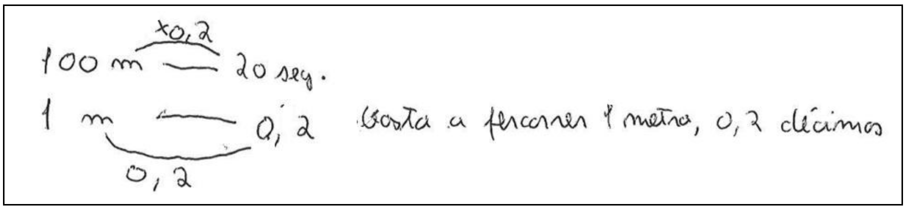


Figura 9.47. – Resposta de Manuel à questão 5.1 do teste final

O aluno usa a estratégia funcional para determinar o valor omisso mas não mostra como determinou o fator funcional. O aluno usa uma tabela para representar os dados e o valor omisso e a esta anexa indicação dos procedimentos de cálculo e uma frase incompleta. A estratégia do aluno envolve a representação visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

Manuel também responde corretamente à questão 5.2 (ver a figura 9.48.).

5.2. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos? Apresenta os teus registos de forma organizada.

Figura 9.48. – Questão 5.2 do teste final

O registo do aluno mostra a estratégia funcional (ver a figura 9.49.), isto é, calcula o fator funcional que usa para determinar o valor omisso indicando os procedimentos de cálculo. Durante a entrevista o aluno revelou ter realizado todos os cálculos na calculadora. A representação visual (tabela) e a escrita (linguagem matemática e natural) são usadas pelo aluno na resolução do problema.

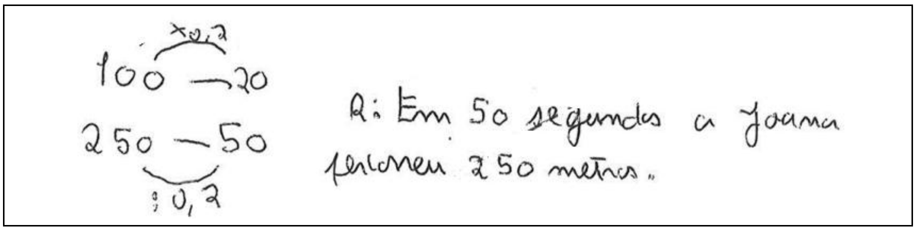
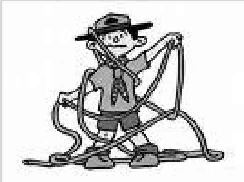


Figura 9.49. – Resposta de Manuel à questão 5.2 do teste final

O problema é a questão 1.1 da terceira entrevista (ver figura 9.50.).

1.No fim de semana passado um grupo de dez escuteiros fez um acampamento. Durante esse tempo o grupo comeu oito pães de forma.



1.1.No próximo fim de semana um grupo com quinze escuteiros vai fazer um acampamento semelhante. Quantos pães devem ser levados para a alimentação do grupo? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 9.50. – Questão 1.1 da terceira entrevista

Manuel responde:

Manuel: Eu agora já sei fazer estes problemas! É até muito fácil.

Investigação: Isso é bom. Já sabes resolver problemas?

Manuel: Sim. Eu vou fazer uma tabela. (Ver a figura 9.51.) Eu acho que a tabela ajuda a ver o que é para fazer. (…) Ponho aqui o [sinal] de interrogação.

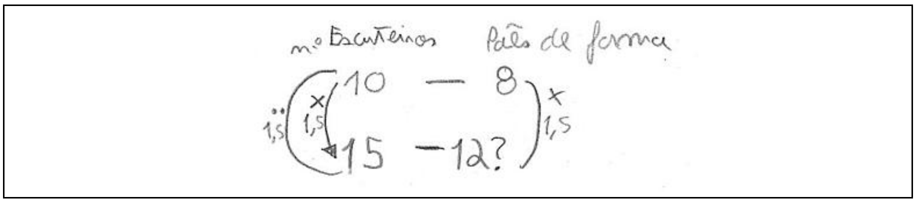


Figura 9.51. – Resposta de Manuel à questão 1.1 da terceira entrevista

Investigadora: Constróis sempre a tabela?

Manuel: Não. Agora eu faço mas antes não. (…) Nos problemas onde é para descobrir o número eu faço. Dá para ver o que é para fazer, as contas. (…) Eu tive boa nota no teste [final].

Investigadora: Que bom. Parabéns.

Manuel: (Usa a calculadora.) 15 a dividir por 10 é 1,5. E [10] vezes 1, 5 dá 15. (Desenha a seta e escreve “x 1,5”.) E 8 vezes 1,5 é 12. Dá 12. (Desenha a seta do lado direito da tabela e escreve “x 1,5”) É preciso escrever a resposta? (Desenha mais uma seta no lado esquerdo da tabela e escreve “: 1,5.)

Manuel usa a estratégia escalar e responde corretamente ao problema. O aluno descreve o modo como pensa e faz um registo detalhado de todas as relações multiplicativas que estabelece até determinar o valor omisso. Este é identificado pelo aluno com o sinal de interrogação e que é algo pessoal mas que o ajuda a resolver o problema. A resolução do problema envolve a representação em linguagem oral, a visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

É de salientar a importância dada pelo Manuel à tabela na resolução de problemas, de facto, esta representação parece facilitar a leitura dos dados e a focar o aluno no que se pretende calcular. De facto, parece que o aluno associa o seu sucesso no teste ao uso da tabela.

A questão seguinte (ver a figura 9.52.), é outra das alíneas do problema anterior, à qual o aluno também responde com correção.

> 1.2. Se houvesse 44 pães quantos escuteiros podiam estar no acampamento? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

Figura 9.52. – Questão 1.2 da terceira entrevista

Manuel, em diálogo com a investigadora, diz:

Manuel: Vou fazer da mesma maneira! (Usa a calculadora. Escreve o registo que se pode ver na figura 9.53.)

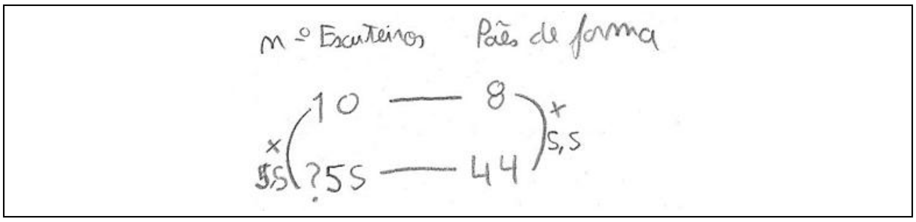


Figura 9.53. – Resposta de Manuel à questão 1.2 da terceira entrevista

Investigadora: Diz lá como estás a pensar.

Manuel: Ah pois. Fiz a tabela com os números do problema. (Indica a coluna da direita.) Estes [números] são do pão. (Indica a coluna da esquerda.) E este [número] é dos escuteiros. Aqui fica a interrogação porque é o número de escuteiros que é para dizer, saber… Os escuteiros para 44 pães.

Investigadora: Então e este número aqui, o 5,5 aqui, para que serve? Como é que o calculaste?

Manuel: Sim. 5,5? Para passar de 8 para 44… 44 é quantas vezes maior que 8, fui fazer 44 a dividir por 8. (Passa algum tempo.)

Investigadora: E para que é que o calculaste?

Manuel: Para… Porque tinha de saber o número de escuteiros. (…) Os escuteiros também são maior que 10. É 5,5 vezes maio. (…) Aumenta em pro, "profurção", foi o que aprendi nas aulas…

Investigadora: Queres dizer proporção?

Manuel: Sim, sim… Já não me lembrava bem do nome que a stora [professora da turma] disse.

O aluno usa a estratégia escalar para resolver o problema, isto é, estabelece uma relação multiplicativa dentro das variáveis e usa o fator escalar (5,5) para determinar o valor omisso. Manuel revela compreender o número de pães e de escuteiros aumenta na mesma proporção embora tenha dificuldade em usar a terminologia correta. Na resolução do problema são usadas as representações em linguagem oral (entrevista), visual (tabela) e a linguagem matemática e natural escrita.

No decurso do problema questionei o aluno sobre a tomada de decisão em usar a estratégia escalar e a estratégia funcional:

Investigadora: Manuel diz-me uma coisa. Neste problema pensaste que os pães e os escuteiros aumentam na mesma proporção. (Aponto para a resolução da questão 1.2.) Mas aqui nesta questão do teste

Manuel: Ah, a stora tem o meu teste!

Investigadora: É para saber melhor como é que tu pensas. E nesta questão aqui, resolveste de outra maneira. (Aponto para a questão 5.1 do teste final.) O que eu gostava de saber é como é que tu decides como vais resolver.

Manuel: (Passa algum tempo.) Pois… Eu não sei… É na hora, o que me dá para fazer…

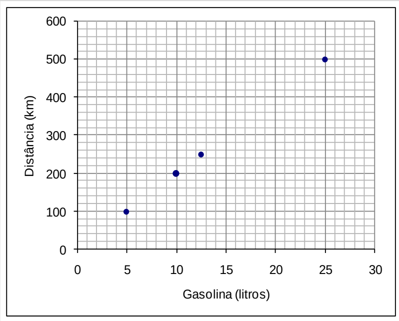
Investigadora: Na hora. Mas deve haver algum motivo, pensa lá um bocadinho.

Manuel: Hum… Não sei bem… Lembro-me de ter feito um problema parecido. Não sei.

O aluno não aponta um motivo concludente sobre o uso da estratégia escalar ou da funcional na resolução dos problemas de valor omisso. De facto, parece que esta decisão está dependente da experiência do aluno, isto é, do reconhecimento de semelhanças entre o problema a resolver e os resolvidos anteriormente.

A questão 3.2 do teste final é um problema de valor omisso que envolve a representação gráfica (ver a figura 9.54.), ao qual Manuel responde corretamente (ver a figura 9.55.).

3. O gráfico mostra o consumo de gasolina feito por um carro.



3.2. Será possível identificar no gráfico a quantidade de gasolina que este carro gasta para percorrer 400 km? Explica como pensaste.

Figura 9.54. – Questão 3.2 do teste final

Eu pensei, pondo o resultado do 20 litros de gasolina na recta.
R: Sim, a quantidade de gasolina que ele gasta, é de 20 litros

Figura 9.55. – Resposta de Manuel à questão 3.2 do teste final

O registo escrito de Manuel não mostra qualquer registo no gráfico mas ele descreve, de um modo muito simplificado, que fez uso da reta para determinar corretamente o valor omisso (20 litros). Contudo, o aluno não diz a que reta se refere e que por falta de tempo, durante a terceira entrevista, não foi possível questionar o aluno sobre o assunto. A estratégia do aluno envolve representações visuais e escritas (linguagem matemática e natural).

Para responder ao problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo (ver a figura 9.56.) o aluno usa uma estratégia escalar e responde corretamente (ver a figura 9.57.).

Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clipes. O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto?

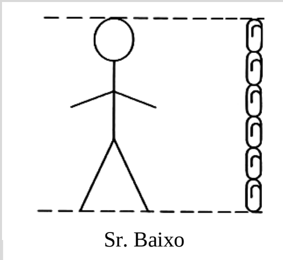


Figura 9.56. – Questão 4.1 do teste final

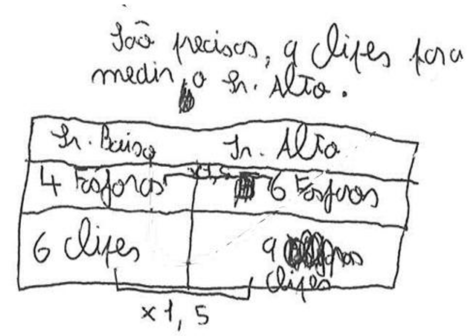


Figura 9.57. – Resposta de Manuel à questão 4.1 do teste final

Manuel estabelece uma relação dentro das variáveis para resolver o problema. Considerando o seu registo escrito determina o fator escalar (1,5) pela divisão do número de fósforos do Sr. Alto pelo número de fósforos do Sr. Baixo. Posteriormente usa o fator escalar para determinar o valor omisso que corresponde ao produto desse fator pela altura do Sr. Baixo (clipes). O registo escrito não mostra o modo como a constante de proporcionalidade (1, 5 clipes por fósforo) A estratégia envolve a representação visual e a linguagem matemática e natural escrita.

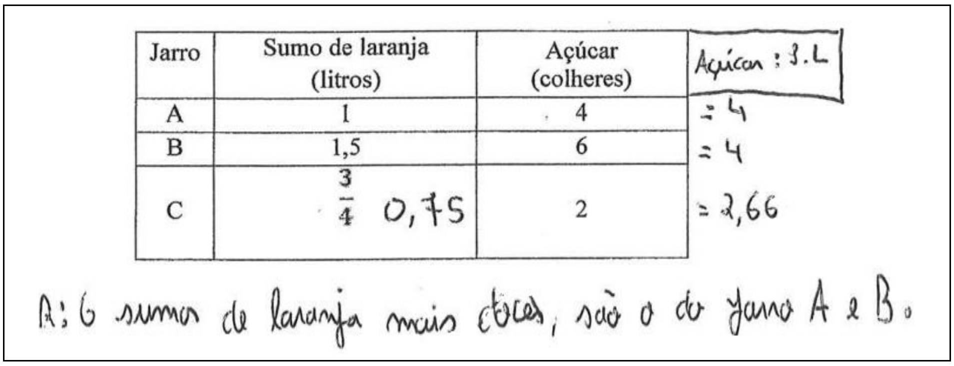
Problemas de comparação. À questão 6 do teste final (ver a figura 9.58.) Manuel responde de forma correta (ver a figura 9.59.).

A Luísa preparou três jarros com diferentes capacidades com sumo de laranja. Antes de servir o sumo a Luísa adicionou açúcar a cada um dos jarros.

Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)
A	1	4
B	1,5	6
C	$\frac{3}{4}$	2

Investiga se existe algum sumo de laranja que seja mais doce? Justifica a tua resposta.

Figura 9.58. – Questão 6 do teste final



Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)	Açúcar : 1.L
A	1	4	= 4
B	1,5	6	= 4
C	$\frac{3}{4}$ 0,75	2	= 2,66

R: Os sumos de laranja mais doces, são o do jarro A e B.

Figura 9.59. – Resposta de Manuel à questão 6 do teste final

É usada a estratégia funcional na resolução do problema pois o aluno estabelece a razão entre a quantidade de açúcar e a quantidade de sumo. O primeiro procedimento do aluno deve ter sido a passagem da representação em fração, da quantidade de açúcar, representação decimal. O segundo procedimento deve ter sido o cálculo das razões unitárias (açúcar:sumo), representadas na forma decimal. São estes os valores numéricos que o aluno usa para fazer o seu julgamento qualitativo sobre o doce dos sumos embora não indique o significado da razão unitária. Na sua estratégia o aluno faz uso da representação visual (acrescenta mais uma coluna à tabela existente) e a linguagem matemática e natural escrita.

Finalmente, a questão 5 da terceira entrevista, um problema sobre uma mistura de tinta (ver a figura 9.60.), Manuel não responde embora tenha feito alguns registos.

> A Manuel e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Manuel preparou a tinta e misturou 3 litros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês misturou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

Figura 9.60. – Questão 5 da entrevista

Manuel: Oh! Não sei esta!

Investigadora: Porquê? Lê lá de novo.

Manuel: (Passa algum tempo.) Vou fazer assim. (Representa os dados numa tabela, ver a figura 9.61.). (Passa algum tempo. Usa a calculadora e divide 2,5 por 3. Escreve a razão unitária (arredondada às centésimas).)

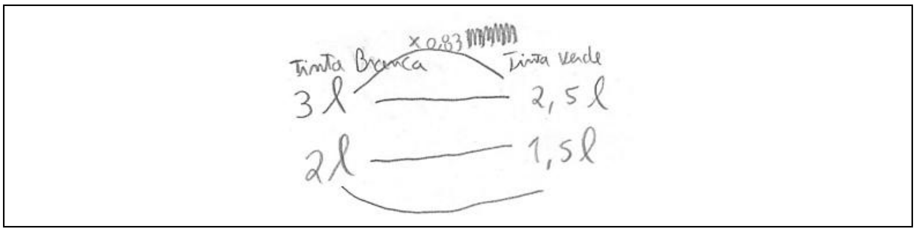


Figura 9.61. – Resposta de Manuel à questão 5 da terceira entrevista

Investigadora: Diz como estás a pensar.

Manuel: Ah, pois isso é que eu não… Este problema é muito difícil!

Investigadora: Mas porque é que dizes isso?

Manuel: Ah pois, eu não sei!

Investigadora: Vamos lá ver com calma o que é que este problema tem para ser difícil. São os números?

Manuel: Hum… Não, são fáceis.

Investigadora: É este 0,83? Porque não escreveste aqui em baixo?

Manuel: Aqui? É que não dá!

Investigadora: Então já sabes alguma coisa.

Manuel: Eu não sei explicar como na aula. (Passa algum tempo.) Estes com tintas são muito difíceis, os problemas

Investigadora: (Como o aluno revela algum aborrecimento por não saber responder decidi terminar o questionamento. Contudo, o registo escrito poderia ser a base para colocar mais questões ao aluno e conhecer as decisões do Manuel.)

Manuel averigua a relação invariante entre a quantidade de tinta branca e verde que diz não existir. No entanto, não revelou ser capaz de usar esse conhecimento para indicar que as tintas têm uma tonalidade diferentes. O principal motivo da dificuldade do aluno parece ser o contexto do problema que envolve tintas e o fenómeno da sua diluição.

9.2.4. Síntese

Nesta secção apresento uma síntese do desempenho de Manuel, em cada tipo de problema, ao longo do desenvolvimento da unidade de ensino.

Problemas pseudoproporcionais. No início da unidade de ensino o aluno tem um desempenho fraco neste tipo de problemas. Parece considerar a existência de proporcionalidade direta no problema que envolve a relação aditiva e considera, de forma clara, a existência dessa relação no problema em que as variáveis não têm relação proporcional. Pelo contrário, revela compreender o comportamento das variáveis no problema de proporcionalidade inversa mas, de forma errónea, pensa que esta tem uma natureza aditiva. Durante o desenvolvimento da unidade de ensino continua a revelar alguma dificuldade na resolução de problemas pseudoproporcionais. De facto, considera incorretamente tratar-se uma relação de proporcionalidade direta um problema de proporcionalidade inversa, pois toma em consideração apenas os dados numéricos e não o fenómeno descrito no problema. No teste intermédio, na resolução do problema pseudoproporcional em que não existe relação de proporcionalidade direta, utiliza argumentos do contexto do problema para justificar corretamente a sua resposta.

As resoluções dos problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação de proporcionalidade inversa, ao longo da unidade de ensino, mostram como a aprendizagem não se faz de forma linear e como é importante o professor conhecer as dificuldades dos alunos para os ajudar a ultrapassá-las. De facto, Manuel, no início da unidade de ensino, revela compreender que o fenómeno descrito no problema envolve um comportamento inverso das variáveis, embora incorretamente pense ser aditivo. Durante a unidade de ensino, após a exploração da relação multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, ao resolver o problema pseudoproporcional, o aluno não considera o fenómeno do problema e, tendo em conta os valores numéricos, responde incorretamente como se tratasse de uma relação de proporcionalidade direta. No final da unidade de ensino, na resolução de um problema semelhante, o aluno usa um argumento do fenómeno descrito no problema que não se trata de proporcionalidade direta embora os dados numéricos pudessem, erradamente, indicar tal situação.

Problemas de valor omisso. No início da unidade de ensino, Manuel resolve com correção os problemas em que conjuga as estratégias pictórica e aditiva. Responde incorretamente à maioria dos problemas colocados no teste e na entrevista pois usa uma estratégia aditiva que não lhe permite conhecer o valor omisso dado que o sentido de covariação e invariância, que revela ter, é formalizado em termos absolutos e não em termos relativos. Deste modo, os cálculos que realiza parecem não ter qualquer sentido pois, por exemplo, no problema do Sr. Alto e do Sr. Baixo adiciona 2 clipes (“diferença entre alturas”) como se se tratasse de 2 fósforos. Na resolução destes problemas, usa várias representações incluindo a visual (desenhos) mas há um predomínio da linguagem matemática e da linguagem natural escrita e oral (nas entrevistas). Há evidência do uso frequente dos algoritmos da adição na realização de cálculos simples.

Durante o desenvolvimento da unidade de ensino Manuel usa predominantemente a estratégia escalar na resolução dos problemas de valor omisso. As respostas aos problemas mostram a relação multiplicativa que estabelece dentro das variáveis. Contudo, durante a segunda entrevista, o aluno diz que não sabe usar o gráfico, para determinar o valor omisso, e considera a representação difícil por não a ter estudado.

Após a realização da unidade de ensino, Manuel continua a usar estratégias proporcionais (escalar e funcional) e responde corretamente. Contudo, não foi possível perceber quando é que opta por uma das estratégias e apenas diz que no momento da decisão deve lembrar-se de algum problema resolvido anteriormente.

A sua resposta ao problema de valor omisso cujos dados são apresentados num gráfico revela como Manuel conhece a representação mas tem dificuldade em expressar como interpreta a informação e determina o valor omisso.

Em relação às representações, durante e após a unidade de ensino, pode dizer-se que nas respostas de Manuel prevalece a representação visual (tabelas) e a linguagem matemática e linguagem natural quando os problemas são apresentados em testes. O mesmo acontece na resolução dos problemas apresentado nas entrevistas, sendo que nestes momentos a representação em linguagem oral também está presente.

Problemas de comparação. No início da unidade de ensino, Manuel responde corretamente a alguns problemas deste tipo, por exemplo, ao que envolve a partilha de pizas e usa estratégias proporcionais (escalar e funcional). No entanto, também responde de forma errada a vários problemas de comparação. Os seus erros parecem associados às representações usadas para apresentar o problema e que se traduzem em dificuldade em: (i) gerir e dar significado à informação referente aos valores numéricos (ver a figura 9.20.); e (ii) usar flexivelmente diferentes representações pois a leitura incorreta da tabela parece estar na origem do erro (ver a figura 9.25.). Outro erro do aluno que emerge no problema da mistura de tintas, diz respeito ao uso parcial dos dados, o que não lhe permite fazer um julgamento correto sobre a tonalidade da mistura das tintas.

Na resolução destes problemas, o aluno usa principalmente a linguagem matemática e natural (escritas) e a linguagem oral (nas entrevistas). Há evidência de uso frequente dos algoritmos da adição até para realizar cálculos simples.

Durante a unidade de ensino e no seu final Manuel tende a usar a estratégia funcional, que é uma estratégia proporcional, mas nunca explicita por palavras próprias o significado as razões (forma de divisão) e/ou das razões unitária. De fato, o aluno faz julgamentos qualitativos corretos mas não justifica, tendo em conta o fenómeno do problema, de que modo a informação numérica o levou a fazer esse julgamento. É provável que não dê importância à justificação das suas respostas por pensar ingenuamente não ser importante tal como aconteceu, com a representação gráfica à qual não deu importância pois, segundo ele, não a estudou. No final da unidade de ensino revela dificuldade na resolução do problema de misturas de tinta, embora tenha reconhecido a inexistência de relação de proporcionalidade direta. Diz não saber responder devido à dificuldade dos problemas que envolvem tintas. É provável que a sua dificuldade em resolver este problema, tendo em consideração o seu registo, esteja associada a uma rotina de explicação do significado das razões.

As respostas de Manuel apresentam várias representações, nomeadamente, a visual (tabelas), a escrita em linguagem matemática e natural e a linguagem oral (entrevista). Quando representa as razões tende a usar a representação na forma de divisão e nem sempre indica o significado dos valores numéricos. Ao longo da unidade de ensino e no seu final o aluno usa com regularidade a calculadora para realizar os cálculos não imediatos. Realiza os procedimentos de cálculo mais elementares mentalmente e não através de algoritmos.

Capítulo 10

Os percursos de aprendizagem dos alunos

Neste capítulo apresento a análise cruzada dos percursos de aprendizagem de Carolina, Célia, António e Manuel tendo em atenção os seus desempenhos no início, durante e no final da unidade de ensino. Assim, começo por comparar as estratégias dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais, de seguida comparo as suas estratégias na resolução de problemas de valor omisso e, finalmente, comparo as estratégias dos quatro alunos na resolução de problemas de comparação.

10.1. Problemas pseudoproporcionais

O quadro 10.1. apresenta, de forma sintética, as estratégias e as dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais no início da unidade de ensino. Os problemas pseudoproporcionais caracterizam-se por gerarem nos alunos uma forte tendência para considerar a existência de uma relação de proporcionalidade direta sem que ela exista. Os problemas pseudoproporcionais do teste diagnóstico apresentam: (i) uma relação aditiva (questão 2); (ii) uma relação de proporcionalidade inversa (questão 5); e (iii) outro tipo de relação não proporcional entre variáveis (questão 9). A informação apresentada neste quadro permite concluir que: (i) três dos quatro alunos respondem corretamente a problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação aditiva; (ii) dois dos quatro alunos respondem corretamente ao problema que envolve a relação de proporcionalidade inversa; e (iii) os quatro alunos respondem de forma incorreta ao problema em que existe um outro tipo de relação não proporcional entre as variáveis.

Quadro 10.1. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais no início da unidade de ensino (no teste diagnóstico)

	Problemas pseudoproporcionais (tipo de relação)		
	Aditiva (Questão 2)	Proporcionalidade Inversa (Questão 5)	Outro tipo de relação não proporcional (Questão 9)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Procedimento aditivo. - Representações: visual (elementos pictóricos) e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: NR Estratégia: --- Dificuldade: Na entrevista explica que não respondeu porque o fenómeno do problema não envolve a relação de proporcionalidade.	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.
Célia	Resposta: C Estratégia: - Procedimento de contagem unitária. - Representações: visual (tabela) e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição multiplicativa. - Representações: visual (tabela) e escrita. Dificuldade: Erro de cálculo	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.
António	Resposta: C Estratégia: - Procedimento aditivo. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Procedimento multiplicativo - Representação: escrita. Dificuldade: Cálculo incorreto.	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.
Manuel	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Parece considerar a existência de proporcionalidade direta.	Resposta: I (Reconhece a relação inversa das variáveis.) Estratégia: --- Dificuldade: Estratégia aditiva.	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.

(C – resposta correta; I – resposta incorreta; NR – não responde)

Na resolução do problema pseudoproporcional que envolve a relação aditiva os alunos usam uma estratégia que envolve o procedimento aditivo ou a contagem unitária.

Carolina e Célia utilizam dois tipos de representações, as visuais (elementos pictóricos e tabela) e a linguagem matemática a natural escrita.

Célia e António respondem corretamente ao problema pseudoproporcional que envolve a relação de proporcionalidade inversa. A estratégia destes alunos envolve procedimentos multiplicativos embora tenham cometido erros de cálculo. Carolina não responde ao problema no teste diagnóstico e explica, durante a entrevista, que a sua decisão foi baseada na identificação do comportamento inverso das variáveis que contraria a relação de proporcionalidade direta, que a aluna pensa existir. Todos os alunos respondem incorretamente ao problema pseudoproporcional em que existe um outro tipo de relação entre variáveis, pois consideram tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta.

De salientar que todos os problemas pseudoproporcionais do teste diagnóstico apresentam a estrutura sintática semelhante aos problemas de valor omisso, um aspeto que Verschaffel, Greer e De Corte (2000) consideram influenciar fortemente a tendência para assumir a existência de uma relação de proporcionalidade direta. No entanto, no início da unidade de ensino, esse aspeto parece não ser determinante, pois estes alunos tendem a identificar as relações aditivas e de proporcionalidade inversa em problemas cuja estrutura sintática é semelhante a problemas de valor omisso o que poderá indicar que o fenómeno descrito no problema pseudoproporcional se sobrepõe à estrutura sintática. Pelo contrário, verifica-se a tendência para considerar a existência de proporcionalidade direta no problema em que não existe uma relação aditiva ou de proporcionalidade direta ou inversa entre variáveis o que poderá ser explicado pelo profundo enraizamento da proporcionalidade direta no conhecimento intuitivo (Bock et al., 2002). Neste tipo de problema pseudoproporcional, sem evidência de uma relação aditiva ou de proporcionalidade inversa, os alunos consideram espontaneamente a existência de uma relação de proporcionalidade direta. Esta situação pode ser explicada pela ausência de análise deste tipo de problemas no seu percurso escolar.

Manuel é o aluno que apresenta maiores dificuldades, errando os três tipos de problemas pseudoproporcionais. Estas dificuldades parecem relacionadas com: (i) a conceção do aluno sobre a resolução de problemas, marcada pela utilização de algoritmos; (ii) o seu conhecimento sobre as noções de adição, subtração, multiplicação e divisão parece ser sobretudo processual, levando-o, por exemplo, a adicionar entes de diferente natureza e dizer que a soma diz respeito apenas a um desses entes.

O quadro 10.2. apresenta, de forma sintética, as estratégias e dificuldades dos alunos, na resolução de problemas pseudoproporcionais, durante a unidade de ensino. É de referir que no teste intermédio não foi colocado nenhum problema pseudoproporcional envolvendo uma relação aditiva porque a maioria dos alunos das duas turmas responderam corretamente a este tipo de problema no teste diagnóstico e, além disso, não era possível colocar no teste intermédio todos os tipos de problemas devido ao tempo disponível para a sua realização. Os problemas pseudoproporcionais do teste intermédio caracterizam-se por uma estrutura sintática semelhante a problemas de comparação evitando algum viciamento dos alunos. A informação apresentada no quadro permite concluir que: (i) três dos quatro alunos respondem corretamente a problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação de proporcionalidade inversa; (ii) os quatro alunos respondem de forma correta ao problema em que existe um outro tipo de relação entre as variáveis.

As estratégias corretas dos alunos envolvem a explicação do fenómeno, apontando a relação inversa das variáveis ou a inexistência de relação de proporcionalidade direta. A representação mais usada pelos alunos é a linguagem natural. De referir que a justificação sobre o comportamento inverso das variáveis foi tida como suficiente para considerar a resposta como correta. No entanto, os alunos que quisessem poderiam usar procedimentos de cálculo.

A justificação de António na resolução do problema em que existe um outro tipo de relação entre variáveis apresentada pode estar relacionada com as primeiras duas tarefas da unidade de ensino. De facto, na primeira tarefa o contexto do problema (corrida) a tartaruga tinha uma velocidade constante (originando uma proporcionalidade direta entre tempo e distância percorrida) e a velocidade do coelho não apresentava essa caraterística. Na segunda tarefa da unidade de ensino os alunos tiverem de apresentar uma possível corrida do coelho que implicava colocá-lo a correr a uma velocidade constante de modo a ganhar à tartaruga. Isto levou os alunos a pensar que, por um lado, nem todos os fenómenos envolvem a proporcionalidade direta (o mesmo contexto de uma corrida e a tartaruga e o coelho têm comportamentos diferentes) e por outro lado, a analisar as diferenças entre as relações.

Manuel responde erradamente ao problema que envolve uma relação de proporcionalidade inversa pois considera tratar-se de uma relação de proporcionalidade direta.

Quadro 10.2. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais durante a unidade de ensino (teste intermédio)

	Problemas pseudoproporcionais (tipo de relação)	
	Proporcionalidade inversa (Questão 5.4)	Sem relação (Questão 5.1)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Justifica a relação inversa das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: - Informações contrárias quando usa diferentes representações.	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---
António	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. (Apresenta também uma condição para ser uma relação de proporcionalidade direta.) - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---
Manuel	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: - Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: linguagem natural escrita. Dificuldade: ---

(C - resposta correta; I – resposta incorreta)

Quadro 10.3. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas pseudoproporcionais no fim da unidade de ensino (teste final)

	Problemas pseudoproporcionais (tipo de relação)		
	Proporcionalidade inversa (Questão 1.6)	Sem relação (gráfico) (Questão 1.7)	Sem relação (Questão 1.8)
Carolina	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: - Considera ser uma relação de proporcionalidade direta.	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de proporcionalidade direta com base análise do aspeto gráfico desta relação. - Representações: visual (reta) e escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Justifica a variação inversa das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de proporcionalidade direta com base análise do aspeto gráfico desta relação. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---
António	Resposta: C Estratégia: - Justifica a relação inversa das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: - Informação incompleta sobre a natureza da relação.	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de um dos aspetos gráficos da relação de proporcionalidade direta - Representação: escrita. Dificuldade: - Informação incompleta.	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---
Manuel	Resposta: C Estratégia: - Justifica a relação inversa das variáveis com base no fenómeno descrito no problema apesar dos dados numéricos poderem indicar a sua existência - Representações: visual; escrita (linguagem matemática e natural). Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de um dos aspetos gráficos da relação de proporcionalidade direta. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: - Informação incompleta	Resposta: C Estratégia: - Justifica a inexistência de relação das variáveis com base no fenómeno descrito no problema. - Representação: escrita (linguagem natural). Dificuldade: ---

(C – resposta correta; I – resposta incorreta; NR – não responde)

O quadro 10.3. apresenta sinteticamente as estratégias e dificuldades dos alunos, na resolução de problemas pseudoproporcionais, no fim da unidade de ensino. Estes problemas caracterizam-se por uma estrutura sintática semelhante a problemas de comparação pois apresentam pelo menos quatro dados numéricos e questiona os alunos sobre a existência de proporcionalidade direta. A informação apresentada no quadro permite concluir que: (i) três dos quatro alunos respondem corretamente a problemas pseudoproporcionais que envolvem a relação de proporcionalidade inversa; (ii) os quatro alunos respondem de forma correta aos problemas em que não existem uma relação entre as variáveis, incluindo aquele que envolve a representação gráfica.

As estratégias dos alunos na resolução do problema pseudoproporcional – relação de proporcionalidade inversa – envolvem a justificação da inexistência da relação de proporcionalidade direta com base no fenómeno descrito no problema. Manuel indica que a sua decisão reside no fenómeno descrito no problema pois nesse caso os valores numéricos indiciariam a existência de proporcionalidade direta. Carolina, que erra o problema, explica na entrevista que, quando os valores numéricos estão em proporção, o contexto do problema é secundarizado. As estratégias usam sobretudo a representação escrita em linguagem natural.

As estratégias dos alunos na resolução dos problemas pseudoproporcionais em que não existe uma relação entre variáveis envolvem: (i) a comparação com o aspeto gráfico da proporcionalidade direta (problema que envolve a representação gráfica); e (ii) a explicação com base no fenómeno do problema justificando a não relação entre variáveis. As estratégias envolvem essencialmente a representação linguagem natural escrita mas também a visual (desenho de uma reta no gráfico).

A análise comparativa dos quadros 10.1., 10.2. e 10.3. permite dizer que os alunos melhoraram o seu desempenho na resolução de problemas pseuproporcionais se se tiver em consideração o desempenho dos alunos no início da unidade de ensino em comparação com o seu desempenho durante e no fim a unidade de ensino. É provável que esta melhoria no desempenho dos alunos resulte da natureza exploratória da unidade de ensino, que mobiliza o conhecimento intuitivo dos alunos na investigação/ exploração de regularidades, com o tempo aparentemente suficiente, para o aprofundamento da noção de proporcionalidade direta. Simultaneamente, a trabalho com problemas pseudoproporcionais pode levar os alunos encontrar formas de monitorizar o seu trabalho, como mostram Carolina e Manuel na entrevista sobre a sua resolução da questão 1.6 do teste final.

Apesar da melhoria no desempenho dos alunos neste tipo de problemas, as dificuldades parecem subsistir naqueles que envolvem uma relação de proporcionalidade inversa, isto é, os alunos podem voltar a considerá-los uma relação de proporcionalidade direta. Esta situação é corroborada por Brousseau (1997) e De Bock et al. (2002) que argumentam sobre a persistência deste erro nos alunos pois ele não resulta da ignorância mas sim da utilização de uma noção enraizada no conhecimento intuitivo dos alunos. Esta situação poderá ser ultrapassada quando os alunos aprenderem formalmente a relação de proporcionalidade inversa.

10.2. Problemas de proporcionalidade direta

10.2.1. Problemas de valor omisso

O quadro 10.4. apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas de valor omisso, no início da unidade de ensino. Os problemas de valor omisso apresentados aos alunos no teste diagnóstico e na primeira entrevista envolvem contextos diversos mas procurei que estes não constituíssem uma dificuldade exagerada para os alunos, sob pena de não conseguir conhecer as suas estratégias. Os problemas também envolvem números inteiros e não inteiros e fatores (escalar e funcional) inteiros e não inteiros. A informação apresentada no quadro permite concluir que: (i) só um dos quatro alunos responde corretamente a todos os problemas do teste diagnóstico e da primeira entrevista; (ii) dois alunos respondem com correção a pelo menos três dos sete problemas; e (iii) um dos alunos apenas responde corretamente a dois dos sete problemas.

Quadro 10.4. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso no início da unidade de ensino

	Problemas						
	(Questão 7 td)	(Questão 1.1 pe)	(Questão 1.2 pe)	(Questão 3.1 pe)	(Questão 3.2 pe)	(Questão10.2 td)	(Questão 6 td)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição. E funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição partindo da razão unitária. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Composição - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Comparação dos elementos pictóricos. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - 1.ª Composição (dobros sucessivos). 2.ª Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: A 1.ª estratégia não permite calcular o valor omisso.	Resposta: NR Estratégia: - Composição (dobro e triplos). - Representações: visual e escrita. Dificuldade: Não pondera usar fatores não inteiros.	Resposta: I Estratégia: Dificuldade: Relação aditiva.	Resposta: I Estratégia: Dificuldade: Uso incorreto do fator funcional.	Resposta: I Estratégia: Dificuldade: Erro de reflexão.
António	Resposta: C Estratégia: - Composição/ decomposição. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional - Representação oral Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Usa a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. - Representação oral Dificuldade: ---	Resposta: NR Estratégia: Dificuldade: Diz não saber resolver o problema.	Resposta: NR Estratégia: Dificuldade: Diz não saber resolver o problema.	Resposta: C Estratégia: - Funcional - Representação escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Baseada na comparação de elementos pictóricos e funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade:---
Manuel	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Relação aditiva.	Resposta: C Estratégia: - Elementos pictóricos e adição sucessiva. - Representações: oral, visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Elementos pictóricos e adição sucessiva. - Representações: oral, visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Relação aditiva	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Relação aditiva	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Relação aditiva	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Relação aditiva

(C - resposta correta; I - resposta incorreta; td - teste diagnóstico; pe - primeira entrevista)

A estratégia mais usada por Carolina e Célia na resolução dos problemas é a composição/decomposição, envolvendo procedimentos aditivos, multiplicativos ou ambos e a representação visual (tabela elementar) associada à escrita. Esta estratégia é não proporcional quando envolve apenas procedimentos aditivos e é pré-proporcional quando são usados procedimentos aditivos e multiplicativos. Carolina e Célia, na resposta aos problemas da entrevista, usam a linguagem oral associada à representação visual e à linguagem matemática e natural escrita.

A estratégia de composição/decomposição, quando o aluno faz um procedimento por aproximação sucessiva, com pouco conhecimento sobre as relações numéricas, não permite determinar o valor omisso. Foi o que aconteceu com Célia na resolução do problema apresentado na questão 3.1 da primeira entrevista.

Carolina e Célia também usam a estratégia escalar na resolução dos problemas, respetivamente, questão 3.2 e na questão 1.1 da primeira entrevista associada à representação visual (tabela). Isto é, usam uma estratégia proporcional ainda que seja na resolução de apenas um problema.

António usa a estratégia funcional na resolução de três dos sete problemas, isto é, determina a razão unitária e utiliza esse valor numérico para determinar o valor omisso. Deste modo, o aluno usa uma estratégia proporcional na resolução de alguns problemas e, para resolver outros problemas, usa a estratégia de composição/decomposição e a comparação de elementos pictóricos, respetivamente uma estratégia pré-proporcional e não proporcional. Apesar de ser o aluno que maior reportório de estratégias usa na resolução dos problemas de valor omisso, diz não ser capaz resolver as questões 3.1 e 3.2 da primeira entrevista. Aparentemente o fenómeno descrito no contexto do problema – mistura de café em pó e água para fazer café – condiciona a sua decisão. Porém, talvez devido à facilidade com que calcula mentalmente, este é o único aluno capaz de resolver só oralmente os problemas da entrevista.

Manuel usa, na resolução dos problemas da primeira entrevista, uma estratégia que envolve elementos pictóricos e adição sucessiva, isto é, uma estratégia não proporcional. A representação visual (elementos pictóricos) complementada pela linguagem escrita e a linguagem oral estão presentes nas suas estratégias. As dificuldades do aluno traduzem a ideia que considera de forma errada, que a relação de proporcionalidade direta é aditiva.

No início da unidade de ensino, os alunos mostram um desempenho heterogéneo na resolução de problemas de valor omisso e um reportório variado de estratégias: (i) calculam corretamente o valor omisso de vários problemas através de estratégias de composição/decomposição, de contagem de elementos pictóricos associada a procedimentos aditivos, por isso, dado que estas são estratégias são pré-proporcionais e não-proporcionais; (ii) a estratégia de composição/decomposição é condicionada pela abordagem individual dos alunos e nem sempre lhes permite calcular o valor omisso; (iii) o uso da estratégia funcional (proporcional), por parte de um aluno, parece condicionado pelo fenómeno descrito no contexto do problema. Deste modo, pode dizer-se que os alunos não compreendem claramente que a relação de proporcionalidade direta tem natureza multiplicativa.

O quadro 10.5 apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas de valor omisso, apresentados aos alunos durante a realização da unidade de ensino, especificamente no teste intermédio e na segunda entrevista. Estes problemas envolvem contextos diversos mas não são em termos teóricos mais complexos que os apresentados no início da unidade de ensino, pois pretendia conhecer se existia mudança de estratégia por parte dos alunos aquando da resolução semelhantes. Os problemas também envolvem números inteiros e não inteiros e fatores (escalar e funcional) inteiros e não inteiros. A informação apresentada no quadro permite concluir que os alunos respondem corretamente a todos os problemas, exceto António que não responde ao problema que envolve a representação gráfica (questão 2.3 da segunda entrevista).

Os alunos usam essencialmente as estratégias escalar e funcional, que se caraterizam pela sua natureza multiplicativa, isto é, usam estratégias proporcionais. As estratégias de Carolina, Célia e Manuel mostram o uso de tabelas (representação visual) para representar os dados, para suportar a exploração de relações, o cálculo dos fatores escalar e funcional e do valor omisso. A tabela é frequentemente complementada pela linguagem natural escrita. António, talvez pela sua maior facilidade em realizar cálculos . é o aluno que menos usa a tabela. De referir que se regista, na resolução de um problema, variação da estratégia proporcional, isto é, por exemplo na questão 1 do teste intermédio, Carolina, António e Manuel usam a estratégia escalar e Célia a estratégia funcional.

Na questão 2.3 da segunda entrevista, um problema que envolve a representação gráfica, os alunos que respondem usam para além da estratégia gráfica que se baseia no aspeto gráfico da relação de proporcionalidade direta, a estratégia escalar ou funcional na qual relatam respetivamente a covariação e a invariância dos dados. Isto poderá indicar que os alunos estão a usar representações dando significado próprio ao seu trabalho e a aprofundar o seu conhecimento sobre a noção de proporcionalidade direta através do trabalho com várias representações.

Quadro 10.5. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso durante a da unidade de ensino (teste intermédio e segunda entrevista)

	Problemas		
	(Questão 2 do teste)	(Questão 1 do teste)	(Questão 2.3 da entrevista)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - 1.ª Composição (aditiva) - 2.ª Funcional - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica e escalar. - Representações: visual e oral. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica e escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---
António	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representação escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica e funcional. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---
Manuel	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: NR Estratégia: --- Dificuldade: Indica a representação gráfica como difícil.

(C – correta; I – incorreta; NR – não responde)

De salientar que a resolução do problema apresentado na questão 2.1 do teste intermédio por Carolina, apresenta duas estratégias, a primeira não-proporcional e a segunda proporcional. De facto, a aluna constrói uma tabela na qual representa parte dos dados, faz adições sucessivas até determinar o valor omisso, mas, durante este procedimento reconhece a relação proporcional entre o número de rosa brancas e amarelas. Este episódio revela que o trabalho desenvolvido em sala de aula, permite levar os alunos a usar estratégias proporcionais sem criar uma lacuna conceptual com o seu conhecimento intuitivo.

O quadro 10.6 apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso durante a realização da unidade de ensino, especificamente no teste final e na terceira entrevista. Estes problemas envolvem contextos diversos e alguns são, em termos teóricos, mais complexos porque os fatores escalar e funcional são simultaneamente números não inteiros (por exemplo, o problema apresentado na questão 1.1 da terceira entrevista). A informação apresentada neste quadro permite concluir que os alunos respondem corretamente a todos os problemas de valor omisso do teste final e da terceira entrevista e usam estratégias proporcionais que envolvem frequentemente o uso de tabelas.

Os alunos usam essencialmente as estratégias escalar e funcional, isto é, estratégias proporcionais e envolvem o uso de tabelas para representar os dados, para suportar a exploração de relações, o cálculo dos fatores escalar e funcional e o cálculo do valor omisso. A linguagem matemática e natural escrita está também presente nestas estratégias. António é o único aluno a responder aos problemas apresentados na entrevista de forma oral.

Carolina revela usar predominante a estratégia escalar (proporcional) no fim da unidade de ensino a estratégia escalar. É provável que a estratégia escalar represente para a aluna a evolução da estratégia de composição/decomposição (não-proporcional ou pré-proporcional) com a qual resolveu corretamente todos os problemas de valor omisso apresentados no início da unidade de ensino. A estratégia escalar desta aluna é marcada pelo uso da tabela. Questionada pela investigadora, Carolina mostra ser capaz de usar a estratégia funcional (questão 1.2 da terceira entrevista). Pelo contrário, Célia usa predominantemente a estratégia funcional (proporcional) e a representação em tabela, mostrando ser capaz de usar a estratégia escalar quando lhe é perguntado se saber resolver o problema de outro modo. António e Manuel usam a estratégia escalar e funcional (estratégias proporcionais) na resolução dos problemas, contudo, António só pontualmente usa a tabela e Manuel usa-a na maioria das suas estratégias. António usa a linguagem matemática escrita, por exemplo, indicando as operações. Este aluno continua a ser capaz de resolver os problemas das entrevistas oralmente.

Quadro 10.6. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de valor omisso no fim da unidade de ensino

	Problemas					
	(Questão 5.1 tf)	(Questão 5.2 tf)	(Questão 1.1 te)	(Questão 1.2 te)	(Questão 3.2 tf)	(Questão 4.1 tf)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional*. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Comparação de elementos pictóricos. Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - 1.º Funcional 2.º Escalar* - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica. - Representação visual. Dificuldade:	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade:
António	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representação oral. Dificuldade:---	Resposta: C Estratégia: - 1.º Escalar. 2.º Funcional - Representação oral. Dificuldade:---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica e escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Comparação de elementos pictóricos. Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---
Manuel	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Gráfica. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---

(C – resposta correta; I – resposta incorreta; NR – não responde; tf - teste final; te - terceira entrevista; * sugestão da investigadora para uso de outra estratégia)

10.2.2. Problemas de comparação

O quadro 10.7 apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas de comparação, no início da unidade de ensino. Os problemas de comparação apresentam quatro valores e é solicitado, tendo em consideração o contexto, um julgamento qualitativo. Estes problemas envolvem contextos diversos mas que não constituíssem uma dificuldade exagerada para os alunos para se conhecer as suas estratégias. Os problemas também envolvem números inteiros e não inteiros e fatores (escalar e funcional) inteiros e não inteiros. A informação apresentada no quadro permite concluir que: (i) um dos quatro alunos responde corretamente a todos os problemas do teste diagnóstico e da primeira entrevista; (ii) dois alunos respondem com correção a pelo menos três das cinco problemas; e (iii) um dos alunos apenas responde corretamente a dois dos cinco problemas.

Os alunos usam estratégias proporcionais (escalar e funcional) na resolução de alguns problemas de comparação no início da unidade de ensino. O desempenho dos alunos parece estar relacionado com o trabalho em torno dos diferentes sentidos da fração num passado recente. Os quatro alunos usam a estratégia escalar na resolução do problema que envolve a partilha de pizas (questão 4 da primeira entrevista), que envolve o uso da representação em fração. Três desses alunos usam uma representação visual (reta numérica, elementos pictóricos) e linguagem matemática escrita (por exemplo, a fração), para além da linguagem natural escrita e oral.

A estratégia mais usada na resolução dos problemas do sumo de laranja (questão 8 do teste diagnósticos) e do preço de refeições (questão 11 teste diagnóstico) é a funcional (proporcional), envolvendo essencialmente a representação escrita, em particular a razão como divisão (linguagem matemática).

No reportório das estratégias usadas pelos alunos estão presentes também: (i) a composição por adição sucessiva (estratégia não-proporcionais); e (ii) a composição aditiva a partir da razão unitária (estratégia pré-proporcional).

Três dos alunos revelaram dificuldade no problema de comparação sobre a mistura de duas tintas onde se pede um julgamento qualitativo. Essa dificuldade está relacionada pelo uso parcial dos dados, isto é, os alunos usam apenas os dados relativos a uma das tintas para fazer o julgamento qualitativo.

Quadro 10.7. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação no início da unidade de ensino

	Problemas				
	(Questão 4 td)	(Questão 4 pe)	(Questão 8 td)	(Questão 11 td)	(Questão 5.1 pe)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Composição (adição sucessiva). - Representação: escrita Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Reta numérica. Escalar. - Representações: visual, oral e escrita Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita Dificuldade: ---	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Uso parcial dos dados.
Célia	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: A análise da resolução mostra que a resposta correta resulta da interpretação incorreta dos valores numéricos do problema.	Resposta: C Estratégia: - Elementos pictóricos. Escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: Eventualmente por distração usa um valor numérico que não estava no problema.	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Falta rigor na representação pictórica.	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Uso parcial dos dados.
António	Resposta: C Estratégia: - Razão unitária. Composição (aditiva). - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Elementos pictóricos. Escalar. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional (investiga a existência de uma invariante). - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Julgamento qualitativo sem quantificação. - Representação: oral. Dificuldade: Inicialmente considera a quantidade de tinta e não o tom.
Manuel	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: Interpretação incorreta dos dados.	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representação: oral Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: Não explica o significado da invariante.	Resposta: C Estratégia: - Julgamento qualitativo sem quantificação. - Representação: escrita. Dificuldade:	Resposta: I Estratégia --- Dificuldade: Uso parcial dos dados.

(C -resposta correta; I – resposta incorreta; td - teste diagnóstico; pe - primeira entrevista)

O quadro 10.8 apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas de comparação, durante a unidade de ensino. Os dois problemas pertencem ao teste intermédio e têm contextos semelhantes a dois problemas apresentados no início da unidade de ensino. O primeiro problema envolve a mistura de chá com açúcar e o segundo problema, o preço unitário de um bem de consumo. Os problemas apresentam números inteiros e não inteiros e fatores (escalar e funcional) inteiros e não inteiros. A informação apresentada no quadro permite concluir que os quatro alunos respondem corretamente aos dois problemas, exceto António que responde à questão 3 de forma pouco clara, que, tendo em consideração o que esclarece na entrevista, parece não corresponder ao modo como pensou.

Quadro 10.8 – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação durante a da unidade de ensino

	Problemas	
	(Questão 3 ti)	(Questão 4 ti)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representação: escrita. Dificuldade: ---
António	Resposta: I Estratégia: --- Dificuldade: O registo escrito do aluno não relata o modo como pensou. O que esclarece na entrevista.	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: Descrição da razão unitária.
Manuel	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: ---

(C – correta; I – incorreta)

Os alunos usam exclusivamente a estratégia funcional que envolve a relação entre variáveis, isto é, uma estratégia proporcional. Observa-se a tendência para o uso de tabelas (representação visual) e da razão como divisão (representação em linguagem matemática escrita). A opção por esta estratégia parece depender da aparente facilidade que imprime ao julgamento qualitativo.

De salientar que as alunas da turma A descreveram com clareza o significado das razões unitárias o que poderá estar mais relacionado com a sua experiência escolar, pois a escrita do modo como pensaram, do significado dos dados numéricos é uma rotina no seu trabalho. Pelo contrário, este trabalho só foi recentemente pedido aos alunos da turma B pelo que estes parecem não lhe dar a necessária importância. De referir também que António comunica bem oralmente o modo como pensa, contudo mostra dificuldade escrever o modo como pensou e no caso da resposta à questão 3, utiliza termos que indicam outro tipo de procedimentos.

O quadro 10.9 apresenta as estratégias e as dificuldades dos alunos, na resolução de problemas de comparação, no fim da unidade de ensino. Um dos problemas pertence ao teste final e outro à terceira entrevista. O primeiro problema envolve a mistura de sumo de laranja com açúcar e o segundo problema, a mistura de tintas, sendo que este último é semelhante ao problema da primeira entrevista (questão 5.1) em que os alunos revelaram dificuldades. Os problemas apresentam números inteiros e não inteiros e fatores (escalar e funcional) inteiros e não inteiros. A informação apresentada no quadro mostra que os quatro alunos respondem corretamente aos dois problemas, tendendo a usar estratégia funcional que envolve a relação entre variáveis, isto é, uma estratégia proporcional. Embora usando o mesmo tipo de estratégia os alunos usam várias representações: (i) tabela (representação visual); (ii) razão como divisão (representação escrita em linguagem matemática); e (iii) razão em fração (representação escrita em linguagem matemática). A opção por esta estratégia parece depender da aparente facilidade que imprime ao julgamento qualitativo. Todavia, como representações, António usa a estratégia escalar (proporcional) na resolução do problema do teste final (questão 6) que envolve uma barra, um tabela elementar e a escrita. O seu julgamento qualitativo é baseado em várias comparações numéricas o que parece ser apenas acessível a um aluno com bom conhecimento sobre números e relações numéricas.

Quadro 10.9. – Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de problemas de comparação no fim da unidade de ensino

	Problemas	
	(Questão 6 teste)	(Questão 5 entrevista)
Carolina	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: visual, oral e escrita. Dificuldade: ---
Célia	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representações: escrita. Dificuldade: Alguma dificuldade em fazer um julgamento sobre a tonalidade da cor.
António	Resposta: C Estratégia: - Escalar. - Representações: visual e escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C Estratégia: - Funcional. Descreve claramente o significado da razão unitária. - Representação: oral. Dificuldade: ---
Manuel	Resposta: C Estratégia: - Funcional. - Representação: escrita. Dificuldade: ---	Resposta: C (parcialmente) Estratégia: - Funcional. - Representações: visual e oral. Dificuldade: Não faz o julgamento sobre o tom da tinta.

(C - resposta correta; I -resposta incorreta)

De notar que as alunas da turma A e António da turma B descreveram com clareza o significado das razões unitárias o que pode ser um aspeto fundamental no julgamento qualitativo, em particular no problema que envolve a mistura de cores (questão 5 da terceira entrevista). Este é provavelmente o motivo pelo qual Manuel diz apenas que as tintas são diferentes e mostra dificuldade a fazer o julgamento sobre o tom do verde da mistura de tintas. António continua a revelar a capacidade de resolver oralmente os problemas colocados na entrevista, sem fazer qualquer registo escrito.

Capítulo 11

Conclusões

Neste capítulo apresento as conclusões do estudo. A primeira parte constitui uma síntese do estudo, a segunda parte indica as principais conclusões tendo em consideração as questões do estudo e, finalmente, a terceira parte apresenta as ideias emergentes do estudo e faz uma breve reflexão pessoal sobre o seu contributo para o meu desenvolvimento profissional

11.1. Síntese do estudo

O presente estudo pretende conhecer como se desenvolve a capacidade de raciocínio proporcional de alunos do 6.º ano de escolaridade, no quadro do desenvolvimento de uma unidade de ensino. Neste estudo considero que o raciocínio proporcional envolve três aspetos: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenómeno descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e representações (texto, gráficos, tabelas, razões).

Considerando o objetivo do estudo, identifico dois grupos de questões de investigação a que procuro dar resposta:

- Que estratégias usam os alunos para resolver problemas de valor omisso e de comparação? Que procedimentos de cálculo e representações mostram essas estratégias?
- Que estratégias usam os alunos para resolver problemas que envolvem a decisão se existe ou não uma relação de

> proporcionalidade direta? Que procedimentos de cálculo e representações mostram essas estratégias?

O quadro teórico aborda cinco tópicos essenciais para o desenvolvimento deste estudo: (i) raciocínio proporcional e seu desenvolvimento; (ii) tipos de problemas; (iii) estratégias e dificuldades; (iv) investigação realizada em Portugal; e (v) ensino para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional. No primeiro, discuto o que se entende por capacidade de raciocínio proporcional. No segundo, apresento diferentes categorizações de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade e de problemas pseudoproporcionais. No terceiro descrevo diferentes categorizações das estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta e a sua relação com as dificuldades dos alunos. No quarto relato o contributo de estudos desenvolvidos em Portugal que envolvem o raciocínio proporcional. Finalmente, no quinto tópico apresento as sugestões provenientes da investigação para o ensino que visa o desenvolvimento desta capacidade matemática.

Apresento também uma discussão teórica sobre unidades de ensino e descrevo a unidade que foi construída para servir de base a este estudo. Esta unidade de ensino dá ênfase a tarefas de investigação/exploratórias e problemas, a situações contextualizadas e ao uso de tecnologia. Também tem associada uma estratégia de ensino exploratória, que consiste em levar os alunos, através da exploração de tarefas abertas, a estabelecer as suas próprias estratégias de resolução de problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta. A conjetura de ensino-aprendizagem da unidade de ensino assume que os alunos do 6.º ano desenvolvem o seu raciocínio proporcional quando: (i) exploram a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o seu conhecimento sobre a covariação e invariância de relações em certas condições; (ii) trabalham na resolução de problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta (de valor omisso e de comparação) e problemas pseudoproporcionais; e (iii) trabalham em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fração; razão como divisão).

Este estudo segue um paradigma metodológico de *design research*, tendo por base uma experiência de ensino que pretende conhecer a influência de uma unidade de ensino especialmente concebida para o efeito na capacidade de raciocínio proporcional dos alunos. A unidade de ensino foi desenvolvida em duas turmas do 6.º ano de uma escola da periferia de Lisboa. Estas turmas têm como docentes duas professoras que aceitaram experimentar a unidade de ensino, trabalhando em colaboração com a investigadora. De forma a preservar a identidade dos alunos, os nomes dos participantes no estudo são fictícios. A turma A é composta por 25 alunos e a turma B por 26 alunos, com idades entre os 11 e os 14 anos (a maioria dos alunos tem 11 anos). São descritos e analisados os percursos de aprendizagem de quatro alunos, dois de cada uma das turmas. Durante a realização da unidade de ensino, para além das reuniões com as professoras, a investigadora esteve presente em todas as aulas, que foram gravadas em vídeo, tendo recolhido cópias dos registos escritos dos alunos nas diversas tarefas. Foram aplicados às turmas três testes, um diagnóstico, um intermédio e um final que também foram fotocopiados e posteriormente devolvidos aos alunos. Os quatro alunos escolhidos para análise do seu percurso de aprendizagem também responderam a três entrevistas realizadas após cada um dos testes. Tendo em consideração a natureza do estudo, a análise de dados é essencialmente descritiva, usando as seguintes categorias: (i) estratégias (processos de cálculo e representações) usadas pelos alunos para resolver problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta; e (ii) estratégias (processos de cálculo e representações) usadas pelos alunos para distinguir relações de proporcionalidade direta de outras que o não são. Os dados recolhidos nos testes foram também alvo de uma análise quantitativa.

11.2. Principais conclusões do estudo

As conclusões deste estudo inferidas dos dados analisados nos cinco capítulos anteriores são apresentadas nas secções seguintes, tendo em conta o seu objetivo e as respetivas questões de investigação.

11.2.1. Problemas pseudoproporcionais: Estratégias de resolução

Os diferentes problemas pseudoproporcionais colocados aos alunos no início da unidade de ensino – (i) relação aditiva, (ii) relação de proporcionalidade inversa e (iii) sem relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa – embora tenham a mesma estrutura sintática, não geram a mesma tendência para considerar erradamente a existência de proporcionalidade direta. Assim, não parece ser a estrutura sintática do problema, neste caso semelhante aos problemas de valor omisso, o aspeto determinante no desempenho dos alunos, o que contraria em parte os resultados de Verschaffel et al.

(2000). O fenómeno descrito no problema parece sobrepor-se a esse aspeto e os alunos identificam as relações aditivas e de proporcionalidade inversa embora, nesta última, possam não reconhecer a sua natureza multiplicativa. O problema pseudoproporcional em que os alunos mais tendem em considerar a existência de proporcionalidade direta é aquele em que não existe uma relação aditiva, de proporcionalidade direta ou inversa. É provável que isso seja uma consequência do enraizamento da noção de proporcionalidade direta no conhecimento intuitivo dos alunos, uma vez que tendo em consideração o fenómeno do problema, estes excluíram a relação aditiva e de proporcionalidade inversa.

As estratégias dos alunos, no caso do problema aditivo, envolvem: (i) procedimentos aditivos e/ou contagem unitária; e (ii) representações visuais e uso da linguagem natural escrita. As estratégias para a resolução do problema de proporcionalidade inversa mostram que os alunos reconhecem a relação inversa das variáveis, mas nem sempre reconhecem a sua natureza multiplicativa. Os alunos usam procedimentos de composição/decomposição ou multiplicativos e representações visuais e a linguagem natural.

Durante e no fim da unidade de ensino, os alunos melhoraram significativamente o seu desempenho na resolução destes problemas. Isso aconteceu, em particular, com Manuel. Os alunos usam estratégias que explicam a inexistência da relação de proporcionalidade direta com argumentos baseados no fenómeno descrito no problema, o que é natural que aconteça uma vez que estão a aprender formalmente essa noção. A representação mais usada pelos alunos é a escrita em linguagem natural. António mostra ser capaz de indicar condições, baseadas no problema, para transformar uma relação noutra de proporcionalidade direta. E Carolina e Manuel revelam ser capazes de monitorizar o seu próprio trabalho. Assim, Carolina reconhece o seu erro e indica o que, segundo ela, o que o motivou. Manuel mostra como lida com os dados do problema quando os números, por si só, indicam a existência de proporcionalidade direta mas o fenómeno do problema, contraria essa relação. Esta última situação é de particular importância no trabalho com os alunos, uma vez que os dados de um problema não são só os números mas sim o conjunto dos números e o fenómeno descrito no contexto do problema. Assim, a melhoria do desempenho dos alunos neste tipo de problemas parece indubitavelmente dependente do desenvolvimento da unidade de ensino, sobretudo da sua natureza exploratória e que envolveu também a resolução de problemas pseudoproporcionais.

Embora o desempenho dos alunos tenha melhorado neste tipo de problemas, o erro persiste mesmo depois do desenvolvimento da unidade de ensino que inclui problemas deste tipo, em consonância com resultado anteriores da investigação (Brousseau, 1997; De Bock et al., 2002). Depois da aprendizagem formal da noção de proporcionalidade direta, o erro neste tipo de problemas parecem agora ser de outra natureza, isto é, não resulta de um "automatismo" pois os alunos sabem que algumas situações não envolvem a relação de proporcionalidade direta, como mostra Carolina quando lhe é pedido para analisar a sua resposta. Este erro parece resultar de uma abordagem superficial aos problemas, em que o aluno tem em consideração apenas os números ou palavras-chave, sem ter a preocupação de uma compreensão global do problema, o que se relaciona com a conceção dos alunos sobre a resolução de problemas.

11.2.2. Problemas proporcionais: Estratégias de resolução

No início da unidade de ensino, constatei que os alunos tinham um desempenho diferente na resolução de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade direta. E essa diferença é muito forte conforme o tipo de problemas, nomeadamente, de valor omisso e comparação. Na resolução de problemas de valor omisso a estratégia de composição/decomposição é a mais frequente, envolvendo procedimentos só aditivos ou procedimentos aditivos conjugados com multiplicativos (por exemplo, o dobro) associados a tabelas elementares. No entanto, dois alunos usam pontualmente estratégias multiplicativas recorrendo apenas ao cálculo do fator escalar e funcional, isto é, usam uma estratégia proporcional. A dificuldade que emerge no trabalho de Manuel tem foco na natureza aditiva que o aluno pensa existir, de forma errada, na relação de proporcionalidade direta embora revele sentido de covariação e invariância.

Na resolução de problemas de comparação, os alunos usam um conjunto alargado de estratégias e o mesmo aluno, consoante o problema, usa estratégias não proporcionais e proporcionais (escalar e funcional). É provável que o uso deste último tipo de estratégias, na resolução de alguns problemas, resulte da experiência escolar dos alunos no passado recente (5.º ano e início do 6.º ano), sobre números racionais e uso de frações. As estratégias dos alunos envolvem também várias representações, parecendo serem relevantes os elementos pictóricos (representações visuais) e a razão como fração e como divisão (escrita em linguagem matemática). De salientar a particular dificuldade dos alunos em resolver o problema que compara duas misturas de cores, sendo que o erro reside no uso parcial dos dados (tal como já indicado por Tournaire & Pulos, 1985).

Assim, no início da unidade de ensino não é evidente que os alunos compreendam claramente a natureza multiplica da relação de proporcionalidade direta, sendo particularmente preocupante o conhecimento de Manuel sobre a relação multiplicativa. Contudo, todos os alunos mostram sentido de covariação das variáveis, isto é, compreendem que estas crescem ou decrescem no mesmo sentido. Em particular, no que respeita aos problemas de valor omisso, podemos dizer que alguns alunos resolvem-nos corretamente sem usar raciocínio proporcional, guiados pelo sentido de covariação e usando estratégias não proporcionais ou pré-proporcionais. A eficácia destas estratégias é condicionada pelo modo como os alunos a desenvolvem e o seu conhecimento sobre números e relações numéricas.

Durante o desenvolvimento da unidade de ensino, os alunos passam a usar estratégias proporcionais, que envolvem o cálculo do fator escalar ou funcional na resolução de problemas de valor omisso e de composição. Nesse momento, as estratégias de resolução de problemas de valor omisso envolvem a frequente utilização da tabela (representação visual) complementada pela linguagem natural escrita. No que respeita aos problemas de comparação usam também frequentemente a representação da razão, como divisão (linguagem matemática escrita).

No fim da unidade de ensino, os alunos mantêm o uso de estratégias proporcionais na resolução dos problemas, parecendo não estar dependentes dos fenómenos descritos nos contextos, dos valores do enunciado (inteiros e não inteiros), dos fatores escalar e funcional (inteiros e não inteiros) e das representações. O uso de estratégias proporcionais parece resultar de forma consistente do percurso de aprendizagem dos alunos ao longo da unidade de ensino, que procurou explorar a natureza multiplicativa da proporcionalidade direta, levando-os a reconhecer a eficiência destas estratégias e a evidenciar a evolução do seu trabalho. Com esta unidade de ensino os alunos ampliaram o seu conhecimento sobre representações, nomeadamente a gráfica, o que constitui uma forma de aprofundar os seu conhecimento sobre a noção de proporcionalidade direta, tendo em consideração a explicação que apresentam sobre a leitura dos gráficos e a identificação do valor omisso.

Na resolução de problemas de valor omisso alguns alunos mostraram tendência para usar apenas um tipo de estratégia, escalar ou funcional, ainda que todos tenham mostrado ser capazes de utilizar ambas. Neste tipo de problemas a tabela é frequentemente usada para representar os dados e organizar os procedimentos para calcular o valor omisso. Contudo, não foi possível perceber de forma clara o que motiva os alunos a escolher de uma das estratégias. Na resolução de problemas de comparação eles mostraram tendência para o uso da estratégia funcional aparentemente porque esta é facilitadora do julgamento qualitativo.

11.2.3. Unidade de ensino

É importante conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos antes de se iniciar o ensino formal deste tópico no 6.º ano. A identificação de uma possível base de conhecimento informal por parte dos alunos é um elemento a ter em conta no ensino formal da proporcionalidade direta, sendo o diagnóstico desse conhecimento importante para decidir percurso de trabalho dos alunos tendo em vista o aprofundamento do seu conhecimento e a eliminação de ideias falsas. Esse é um ponto forte desta unidade de ensino pois antecipadamente dá indicações às professoras sobre aspetos em que devem ter em atenção, nomeadamente, levar os alunos a abandonar estratégias não proporcionais e pré-proporcionais e levá-los a usar estratégias proporcionais num percurso de aprendizagem que procurar mobilizar o conhecimento intuitivo, pois só desta forma as aprendizagens são feitas com compreensão da noção de proporcionalidade direta e podem traduzir-se em capacidade de raciocínio proporcional. Nesse momento, é possível observar em alguns registos escritos dos alunos, aspetos da sua aprendizagem resultantes das duas primeiras tarefas. Carolina, por exemplo, na resolução de um problema do teste intermédio, usa inicialmente uma estratégia não proporcional e é no decurso deste trabalho que identifica a relação invariante entre as variáveis do problema, revelando ainda ser capaz de explicar com clareza o modo como está a pensar.

As duas primeiras tarefas da unidade de ensino, respetivamente, uma investigação e um exploração parecem ter sido determinantes para os alunos aprofundarem a compreensão da relação de covariação e de invariância da relação de proporcionalidade, em particular, a sua natureza multiplicativa. Este conhecimento foi depois mobilizado na resolução dos diferentes problemas apresentados aos alunos nas restantes fichas de trabalho. As primeiras tarefas da unidade de ensino levaram-nos a usar tabelas para representar os dados mas também como suporte na exploração da relação multiplicativa. De notar que esta representação não é nova para os alunos mas passou a ser usada por alguns de forma consistente como representação na resolução de problemas. Os alunos com um conhecimento mais aprofundado sobre números e operações mostram ser capazes de usar outras representações.

A unidade de ensino é realizável na maioria das escolas requerendo apenas a existência, pelo menos, de um computador para dois alunos. Note-se, ainda, que a experiência dos alunos no uso do computador e da folha de cálculo é um aspeto importante desta unidade de ensino, que requer um conhecimento elementar desses recursos didáticos. No caso dos alunos não possuírem esse conhecimento, ele deverá ser proporcionado previamente à lecionação da unidade.

11.3. Perspetivas que emergem do estudo e reflexão final

Algumas ideias emergem deste estudo relativas ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Assim, o estudo sugere que uma unidade de ensino deve configurar indicadores claros sobre o que se considera ser o raciocínio proporcional. Esta unidade de ensino tem em consideração as indicações da investigação nacional e internacional (Behr et al., 1992; Boyer, Levine & Huttenlocher, 2008; Fernández, 2010; Heller et al. 1989; Silvestre & Ponte, 2009; Steinthorsdottir, 2003; Vergnaud, 1983) considerando que o raciocínio proporcional envolve: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenómenos descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões). Esta noção multifacetada sobre o que se entende por capacidade de proporcional assume uma grande importância.

O estudo também sugere que uma unidade de ensino de cunho exploratório, cuja conjetura de ensino-aprendizagem envolve: (i) a exploração da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta, reforçando o conhecimento sobre a covariação de grandezas e invariância de relações em certas condições; (ii) a resolução de problemas de relações de proporcionalidade direta (de valor omisso e de comparação), problemas pseudoproporcionais; e (iii) o trabalho em simultâneo com diferentes representações (tabelas; gráficos; razão na forma de fração; razão como divisão) desenvolve o raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano.

Deste estudo emerge ainda a importância de o professor conhecer a natureza das estratégias de resolução de problemas dos alunos pois estes podem resolver problemas de proporcionalidade direta sem usar estratégias proporcionais. A eventual estagnação do uso de estratégias não proporcionais e/ou pré-proporcionais condiciona o desenvolvimento do raciocínio proporcional, o que pode ter consequências negativas na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras ciências. Após o ensino formal da noção de proporcionalidade direta, no 6.º ano, os alunos devem usar tendencialmente estratégias proporcionais. O percurso de aprendizagem dos alunos deve contemplar a compreensão da relação multiplicativa da relação de proporcionalidade direta pois esta parece ser fundamental na passagem do uso de estratégias não proporcionais e/ou pré-proporcionais para as estratégias proporcionais. As estratégias proporcionais – escalar e funcional – devem aprofundar o sentido de covariação e invariância que os alunos revelam ter e, em simultâneo, ser vistas como estratégias mais eficientes pois o seu uso permite conhecer sempre o valor omisso de um problema ou fazer comparações com ou sem julgamento qualitativo, de forma correta.

Finalmente, deste estudo emerge ainda outra ideia que envolve a necessidade de contrariar a tendência de os alunos considerarem como de proporcionalidade direta as relações entre variáveis que o não são. O ensino formal da noção de proporcionalidade deve pois levar os alunos a desenvolver a capacidade de as distinguir, sendo que este aspeto está relacionado com a capacidade de resolução de problemas, isto é, os alunos têm de atender aos dados de um problema e não apenas os números ou o fenómeno do contexto do problema de forma isolada.

Ao fazer uma reflexão final sobre a realização deste estudo, enquanto investigadora e, sobretudo, como professora, penso que esta foi a minha experiência profissional mais significativa até ao momento. Na origem deste estudo estão os resultados promissores sobre o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos registados no meu trabalho de mestrado. Desde então, cedo percebi que o estudo não seria apenas meu mas também dos que contribuíram para o seu desenvolvimento. Refiro naturalmente o meu orientador e os seus contributos oportunos mas também todos os investigadores que tive o privilégio de conhecer, em seminários nacionais e internacionais e que, ao longo destes quatro anos, contribuíram com múltiplas questões, criticas e sugestões. Hoje estou ciente que, a cada momento de partilha e apresentação parcial do trabalho, um novo patamar de dificuldade surgia no seu desenvolvimento pela necessidade de outras leituras, pela perceção da complexidade de assuntos que tive de estudar e pela reflexão que empreendi e, sobretudo, pela dificuldade que reside na tomada de decisões sobre o rumo da investigação. Foi um longo caminho, por vezes sinuoso, mas fundamentalmente foi um percurso de aprendizagem significativa.

Este trabalho permitiu-me aprofundar o conhecimento dos vários aspetos que envolvem o raciocínio proporcional. Por um lado, procurei perceber o estado da arte num conjunto de estudos e analisar segmentos particulares deste campo de investigação, por exemplo o tipo de estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta. Por outro lado, fui dando conta da dificuldade que é construir materiais didáticos que seguem uma hipótese de aprendizagem para no seu conjunto desenvolver uma capacidade transversal como o raciocínio dos alunos, dado que na sala de aula todos os alunos têm um conhecimento diferente e aprendem de forma diferente. Fica-me a forte convicção de que os alunos não aprendem porque se lhes dá indicações sobre o que fazer, aprendem quando dão significado ao trabalho que estão a realizar. Tendo em conta o percurso de aprendizagem dos quatro alunos, só um trabalho poderoso como o que realizaram pôde desenvolver de modo tão marcante o seu raciocínio proporcional.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: DEB, ME.

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 149-175.

Ahl, V., Moore, C., & Dixon, J. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development*, *7*, 81-108.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that preservice teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90*, 449-466.

Ball, D.L.: 1992, 'Magical hopes. Manipulatives and the reform of math education'. *American Educator 16*(2), 14–18, 46–47.

Baroody, A. J. (1989). One Point of View: Manipulatives Don't Come with Guarantees. *Arithmetic Teacher 37*, 4-5

Baroody, A., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach in K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: MacMillan.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies* in *Mathematics*, *15*, 129-147.

Bell, J. (2002). *Como realizar um projecto de investigação: Um guia para a pesquisa em Ciências Sociais e da Educação*. Lisboa: Gradiva.

Ben-Chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C., & Miller, J. (1998), 'Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences', *Educational Studies in Mathematics*, *36*, 247-273

Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, *9*(3), 321-327.

Bereiter, C. (2002). Design research for sustained innovation. *Cognitive Studies, Bulletin of the Japanese Cognitive Science Society*, *9*(3), 321-327.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boaler, J. & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: the case of Railside school. *Teachers College Record*, *110*(3), 608-645.

Bowers, J., Nickerson, S., & Kenehan, G. (2002). Using technology to teach concepts of speed. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.) *Making sense of fractions, ratios and proportions* (pp. 176-187). Reston, VA: NCTM.

Boyer, T., Levine, S.C. & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, *44*, 1478-1490

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Burrill, G. (1997). Computation, calculators, and the "basics". *NCTM News Bulletin*, *3*.

Cabrita, I. (1998). *Resolução de Problemas: aquisição do modelo de proporcionalidade direta apoiada num documento hipermédia.* Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Cai, J. & Knuth, E. J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional, and learning perspectives. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik (International Review on Mathematics Education)*, *37*(1), 1-4.

Cai, J. & Lester, F. A. (2005). Solution and pedagogical representations in Chinese and U.S. mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *24* (3-4), 221-237.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies. In Carole Greenes & Rheta

Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp.169-180). Reston: NCTM.

Cai, Jinfa, Hee Chan Lew, Anne Morris, John C. Moyer, Swee Fong Ng, & Jean Schmittau. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective.” *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik, 37*, 5-15.

Campbell, P. F., & Stewart, E. L. (1993). Calculators and computers. In R. Jensen (Ed.), *Early childhood mathematics: NCTM research interpretation project* (pp. 251–268). New York: Macmillan Publishing Co.

Carpenter, T. P., Gomez, C., Rousseau, C., Steinthorsdottir, O. B., Valentine, C., Wagner, L., et al. (1999). *An analysis of student construction of ratio and proportion understanding.* Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Carpenter, T. P., Megan L. F, & Levi, L. (2. *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

Carpenter, T., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cetin, H., & Ertekin, E. (2011). The relationship between eighth grade primary school students’ proportional reasoning skills and success in solving equations. *International Journal of Instruction*, *4*(1), 47-62.

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 321-336.

Clarke, F., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41-51.

Clement, L. (2004). A model for understanding, using and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, *11*, 97-102.

Clements, D.H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, *99*(1), 5-11.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1,* 5-44.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1,* 5–44.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13, 35-37.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1), 113-163.

Cobb, P., Yachel, F., & Wood, T. (1992). A constructive alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 2-33.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 2-33.

Collins, A. (1992). Towards a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15-22). Berlin: Springer.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Confrey, J. (1995). Student voice in examining 'splitting' as an approach to ratio, proportion, and fractions. In *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-29). Recife, Brazil: PME.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J., & Lachance, A. (1999). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231 - 265). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Conner, G., Harel, G., & Behr, M. (1988). The effect of structural variables on the level of difficulty of missing value proportion problems. In M. Behr, C. Lacampagne, & M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 9th Annual Conference of the PME-NA* (pp. 65-71). Illinois, Northern Illinois: PME-NA.

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cramer, K., & Post, T. (1993a). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cramer, K., & Post, T. (1993b). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher, 40*, 342-346.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). *Learning and teaching ratio and proportion: Research implications*. Retrieved from: http://education.umn.edu/rationalnumberproject /93_4.html

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159-178). New York, NY: Macmillan.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

De Bock, D. (2002). The illusion of linearity: An empirical analysis of secondary school students' improper proportional reasoning in geometry problems. Doctoral dissertation, University of Leuven, Leuven, Belgium.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2001). Secondary school pupils' improper proportional reasoning: an in depth study of the nature and persistence of pupils' errors. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 313-320). Utrecht, The Netherlands: PME

De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-314.

De Bock, D., Verschaffel, K., Janssens, D., Van Dooren., W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students; performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13* (4), 441-463.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65-85.

Dede, C. (2004). If design-based research is the answer, what is the question? *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 105–114.

diSessa, A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

DiSessa, A.A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. Journal on Mathematical Behavior, 10, 117-160.

Dole. S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(2), 18-22.

Duarte, J., & Alves, L. (2001). *Guião de utilização e atividades com a folha de cálculo*. Setúbal: Escola Superior de Educação.

Dunham, P. H. (1995). Calculator use and gender issues. *Association for Women in Mathematics Newsletter*, *25*(2), 16-18.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Evan, R. & Lappin, G. (1994). Constructing meaningful understanding of mathematics content. In D. Aichele & A, Coxford (Eds.), *Professional Development for Teachers of Mathematics*, pp. 128-143. Reston, Virginia: NCTM.

Falk, R., & Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Developmental Psychology*, *34*, 1340-1357.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Doctoral dissertation, Universitat de Valencia, Valencia Spain.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? In M.M.F. Pinto, & T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Fujmura, N. (2001). Facilitating children's proportional reasoning: A model of reasoning processes and effects of intervention on strategy change. *Journal of Educational Psychology, 93*, 589-603.

Fuson, K.C., & Abrahamson, D. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual-phase problem-solving models. In J. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 213-234). New York, NY: Psychology Press.

Geller, U. (2004). Didactic material confronted with the concept of mathematical literacy. Educational Studies in Mathematics, *55*, 163-179.

Gero, J. S. (2000) Research methods for design science research: Computational and cognitive approaches. In D. Durling and K. Friedman (Eds.), *Doctoral Education in Design*, (pp.143-162). Stoke-on-Trent: Staffordshire University Press.

Gold, A. P. (1978). *Cumulative Learning Versus Cognitive Development: A Comparison of Two Different Theoretical Bases for Planning Remedial Instruction in Arithmetic.* Doctoral dissertation, University of California, Berkeley, USA.

Goldenberg, E. P. (2000). Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. *Issues in Mathematics Education*. Retrieved from http://www2.edc.org/mcc/PDF/iss_tech.pdf.

Goldin, G. & Stheingold (2001). System of representations and the development of mathematics concepts. In A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 1–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gravemeijer, K. P. E. (1998). Developmental research: Research for the sake of educational change. In G. Cebola, & M. A. Pinheiro (Eds.), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 41-66). Lisboa: Secção da Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM-SPCE).

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing students' algebraic reasoning abilities. *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 127-137). Reston, VA: NCTM.

Greeno, James G. & Hall, Rogers P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, January, 361-367.

Greer, B. (1997). Modelling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*, 293-307.

Hart, K. (1981). Ratio and proportion. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 88-101). London: John Murray.

Hart, K. (1983). I know what I believe; Do I believe what I know? *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 119-125.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. *Number concept and operations in the middle grades* (pp.198-219). Reston, VA: NCTM.

Hart, K., (1984). *Ratio: Childrens strategies and errors*. London: NFER Nelson.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational studies in mathematics*, *12*(1), 71-87.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, *26*(3), 205-220.

Hiebert, J., & Behr, M. J. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Research agenda in mathematics education: Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 1-18). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hiebert, J., Morris, A., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(3), 201-222.

Horowitz, L. (1981). Visualization and arithmetic problem solving. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Los Angeles, CA, USA.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*, 391-417

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York, NY: Basic Books.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school childrens’ access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of* *international research in mathematics education* (pp. 113-142). Mawah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jones, K. & Smith, K. (1997), *Student Teachers Learning to Plan Mathematics Lessons*. Paper presented at the Annual Conference of the Association of Mathematics Education Teachers (AMET1997). Leicester, UK.

Juraschek, W. A., & Grady, M. T. (1981). Format variations on equilibrium in the balance. *Journal of Research in Science Teaching, 18*(1), 47-49.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding,* (pp. 133-155). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In J. Confrey & G. Harel (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Adi, H., & Lawson, A.E. (1980). Intellectual development beyond elementary school: Proportional, probabilistic and correlational reasoning. *School Science and Mathematics*, *80*, 673-683.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983b). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 45-90). New York, NY: Academic Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 219-234.

Kelly, A. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Kenney, P. A., Lindquist, M. M., & Heffernan, C. L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 87-99). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Khoury, H. A. (2002). Exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. Short. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook* (pp.100-102). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator 8*, 139-151.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. Romberg (Ed.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.49–84). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Kieren, T., & Southwell, B. (1979). The development in children and adolescents of the construct of rational number as operator. *The Alberta Journal of Educational Research*, *25*, 234-247.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics*, *103*(2), 92-97.

Korth, J. (2010). *Proportional reasoning*. (Math in the Middle Institute Partnership Action Research Project Report in partial fulfillment of the Math Degree, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, USA.

Lamon, S. (1989). Ratio and proportion: Preinstructional cognitions. Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin, Madison, USA.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (1), 41–61.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: Sate University of New York Press.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning* (pp. 89-120). New York: SUNY Press.

Lamon, S. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In B. P. Schappelle (Ed.), *Providing foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167–198). Albany: State University of New York Press

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2005). Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Lawrence Erlbaum

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Langrall, C., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*, 254-261.

Lanius, C. S., & Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying themefor the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 392–396.

Lesh, R., & Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Lesh, R., & Kelly, A., (2000) Multitiered Teaching Experiments. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*. (pp. 197-230). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Lessard-Hérbert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

Lewis, P. (2001). *Use spreadsheets to teach mathematics and meet standards*. Paper presented at the *National Educational Computing Conference*. Chicago, IL, USA.

Lo, J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader, *Journal for Research in Mathematics Education*, *28* (2), 216-236.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning, Grades 6-8.* Reston, VA: NCTM.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(2), 78–85.

Magalhães, A., & Alçada, I. (2001). *Uma aventura no Palácio da Pena* (7ª edição). Lisboa: Caminho.

Marques, S. (2006). A *proporcionalidade direta* em *manuais* escolares de diversos países. Tese de mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

ME, (1991). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 2º Ciclo*: Vol. I. Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação.

ME, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico*. *Competências essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

ME, (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Children's arguments in discussion of a 'difficult' ratio problem: The role of a pictorial representation. Retrieved from http://www.lettredelapreuve.it

Misailidou, C., & Williams, J. (2004). Helping children to model proportionally in group argumentation: Overcoming the constant sum error. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 321-328). Bergen, Norway: PME.

Misailidou, C., & Williams, J. (2004, Julho). *Improving performance on 'ratio' tasks: Can pupils convert their 'additive approach'?.* Comunicação apresentanda no 10th International Congress on Mathematics Education (ICME), Roskilde, Denmark. Recuperado de www.icmeorganisers.dk/tsg01/Misailidou_rev1.doc

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood.* New York: Oxford University Press.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2004). Linear or not linear? Students' improper proportional reasoning. In G. Makrides, A. Gagatsis & K. Nicolaou (Eds.), *Proceedings of the CASTME International and CASTME Europe Conference (21-33).* Nicosia, Cyprus.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2006). Can the spontaneous and uncritical application of the linear model be questioned?. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N. Stehlikova (eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, p. 169-176). Prague, Czech Republic: PME.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007).Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology 27*(1), 75-92.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(3), 313-324.

Modestou, M., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: the case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, p. 345-352). Bergen, Norway: PME.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 435-440.

Monteiro C., Serrazina L., & Barros, E. (2002). Children 's strategies to solve proportion problems in a real world context. In Cockburn, A., Nardi, E., (Eds.) *Proceedings of 26th International Conference of the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp.301). Norwich, England: PME.

Monteiro, C. (2003). Prospective elementary teachers' misunderstandings in solving ratio and proportion problems. In Pateman, N., Dougherty, B., Zilliox, J., (Eds.) *Proceedings of the 27th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.317-323). Honolulu, USA: PME.

Moore, C. F., Dixon, J. A., & Haines, B. A. (1991). Components of understanding in proportional reasoning: A fuzzy set representation of developmental progressions. *Child Development, 62*, 441-459.

Moreira, L. (1989). *A folha de cálculo na educação matemática: Uma experiência com alunos do ensino preparatório* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 37-69.

Moyer, J., Cai, J., Laughlin, C., & Wang, N. (2009). The effect of curriculum type on middle grades instruction. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S .Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (*Vol. 5, pp. 201-209). Atlanta, GA: Georgia State University.

Moyer, P. S. (2001) Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 175-197.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (edição original em inglês de 2000).

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neusa, B. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 1-24.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217–253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2. Problem-structure at successive stages. Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331–363.

Norton, S. & Irvin, J. (2007). A concrete approach to teaching symbolic algebra. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (MERGA). Retrieved from http://www.merga.net.au/documents/RP502007.pdf

Norton, S.J. (2005). The Construction of Proportional Reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, p. 17-24). Melbourne: PME.

P Pittalis, M., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2003). Students' ability in solving proportional problems. In *Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education*. Bellaria: Italy. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_list.

Papert, S. (1991). Ensinar crianças a serem matemáticos versus ensinar Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *O computador na educação matemática* (pp. 29-44). Lisboa: APM.

Perry, B., & Dockett, S. (2002). Young children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.81-111). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Person, A. C., Berenson, S. B., & Greenspon, P. J. (2004). The role of number in proportional reasoning: A prospective teacher's understanding. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics* Education (pp. 17-24). Bergen, Norway: PME

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York, NY: Norton.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Pomerantz, H. (1997). *The role of calculators in math education*. Dallas, Texas: Texas Instrument.

Ponte, J. P. & Canavarro, A. P. (1997) Matemática e novas tecnologias. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática, 34*, 2-7.

Ponte, J. P. *(*2005*). Gestão curricular* em *Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (pp. 239-254). Berlin: Springer.

Ponte, J. P., Brocardo, J., e Oliveira, H. (2003). Investigações no currículo. Em J. P. Ponte, J. Brocardo e Oliveira, H. (Ed.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp.55-70). Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010). O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Lisboa: APM. Retirado de

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kieren, T., & Lesh, R. (1998). *Research on rational number, ratio and proportionality*. Retrieved from http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/.

Pulos, S., Karplus, R., & Stage, E. K. (1981). Generality of Proportional Reasoning in Early Adolescence: Content Effects and Individual Differences. *Journal of Early Adolescence*,*1*(3), *257–264.*

Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. Romberg (Ed.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reys, R. E., Suydam, M. N. and Lindquist, M. M. (1995), *Helping Children Learn Mathematics* (4th Edition). Boston, Mass: Allyn and Bacon.

Robinson, F. G. (1981). *Rate and ratio: Classroom-tested curriculum materials for teachers at elementary level*. Ontario: OISE Press/The Ontario Institute for Studies in Education.

Rocha, G. (2007). *Desenvolvimento do raciocínio proporcional em alunos do 6.º ano.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Sandoval, W. A. (2004). Developing learning theory by refining conjectures embodied in educational designs. *Educational Psychologist*, *39*(4). 213-223.

Sandoval, W. A., & Bell, P. L. (2004). Design-Based Research Methods for Studying Learning In Context: Introduction. *Educational Psychologist, 39*(4), 199-201.

Sawyer, R. (2006). The New Science of Learning. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 1-18). New York, NY: University Press.

Saxe, G.B., Gearhart, M., & Seltzer, M. (1999). Relations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and Instruction*, 17, 1-24.

Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1997). Razões e proporções na vida diária e na escola**.** *Estudos em Psicologia da Educação Matemática* (p. 13-37). Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco

Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1992). Proportional reasoning in and out of school. In P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and Cognition* (pp. 47-73). Hemel Hempstead, Harvester-Wheatsheaf.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.). *Mathematical Thinking and Problem Solving.* (pp. 53-69). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schwartz, J. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication and division problems*. (Final report to NIE, Grant NIE-G-80-0144). MIT, Cambridge, MA.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (p. 41-53). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates and Reston, VA: National Council of Tearcher

Schwartz, S., & Whitin. D. (2000). Don't delay: Build and talk about the rich experiences from the beginning. *Mathematics Education Dialogues, 3*, 2.

Sekiguchi, Y. (2006). Mathematical norms in Japanese mathematics lessons. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insiders' perspective* (pp. 289–306). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Sellke, D. H., Behr, M. J., & Voelker, A. M. (1991). Using data tables to represent and solve multiplicative story problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 30–38.

Sharp, J. M., & Adams, B. (2003). Using a pattern table to solve contextualized proportion problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(8), 432-239.

Shavelson, R., Phillips, D., Towne, L., & Feuer, M. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, 32(1), 25–28.

Shield, M. J., & Dole, S. (2002). Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch, & M. Thomas (Eds.). *Mathematics Education in the South Pacific: Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 608-615), Auckland, NZ: MERGA.

Silvestre, A. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade direta: Uma experiência no 2.º ciclo.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185-192). Ankara, Turkey: PME PME35 Conference. Ankara, Turkey.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2012). An exploratory teaching unit to develop proportional reasoning. Acepted at *The 12th International Congress on Mathematical Education.* Seoul, Korea: ICME (8-15 de July).

Silvestre, A., & Ponte, J. P. (2009). Ser ou não ser uma relação proporcional. In *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação*. Viana do Castelo: APM. (Edição em CD-ROM)

Simon, H. A. (1969). Chapter 1, *The Sciences of the Artificial*. Cambridge, MA: MIT Press.

Singer, J. A., Kohn, S. A., & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.

Singer-Freeman, K. E.,& Goswami, U. (2001). Does a half pizza equal half a box of chocolate? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811–829.

Singh, P. (2000). Understanding the concept of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education In Science and Technology, 31(4)*: 579-599.

Smith, J. P., (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller (Ed.) *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Sophian, C., & Wood, A. (1997). Proportional reasoning in young children: The parts and the whole of it. *Journal of Educational Psychology, 89*, 309-317.

Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, *5*(33), 731-744.

Sousa, H. (2010). *O estudo da Proporcionalidade Direta/ Inversa com alunos de um Curso de Formação e Educação.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 127–155.

Spinillo, A. (1997). Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In A. Schliemann, D. Carraher, A. Spinillo, L. Meira, J. Falcão & N. Acioly-Régnier (Orgs.).

Estudos em Psicologia da Educação Matemática (pp. 40-61). Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco.

Spinillo, A. (2003). Ensinando proporção a crianças: Alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim do GEPEM*, *43*(3), 11-47.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantities. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181-197.

Sriraman, B., & English, L. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. Connecting research into teaching. *The Mathematics Teacher*, *98*(3), 182–191.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Beyond Traditional conceptions of modelling. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 247-254.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). 'Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum'. In R.I. Charles & E.A. Silver (Eds), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, (pp.1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2010a). The influence of curriculum on student learning. In B. Reyes, R. Reyes, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends and future directions* (pp. 351-362). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2010b). The role of curricular materials in elementary mathematics classrooms. In D. V. Lambdin & F. K. Lester (Eds.), *Translating research to the elementary classroom.* Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking & Learning, 10*, 313–340.

Steinthorsdottir, 2003. *Making meaning of proportion: Case study of two 5th grade classes in Iceland.* Doctoral thesis. University of Wisconsin, Madison, USA.

Steinthorsdottir, O. B. (2005, July). *Girl's journey towards proportional Reasoning*. Paper presentation at the annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia

Steinthorsdottir, O. B. (2006). *Proportional reasoning: Variables influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies* In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 5, p. 169-176). Prague, Czech Republic: PME.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.

Suydam, M.N.: 1985, *Research on Instructional Materials for Mathematics*, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, Columbus, OH. (ERIC Document Reproduction Service No. 276 569).

Swan, M. (2006). Learning GCSE mathematics through discussion: What are the effects on students? *Journal of Further and Higher Education, 30*(3), 229-241

The Design Based Research Collective (DBRC) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Thompson, P.W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2010). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally (7th ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Van Dooren, W. (2005). The linear imperative: A search for the roots and an evaluation of the impact of the overuse of linearity (doctoral dissertation). Leuven, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*, 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Ups and downs' is students' over-reliance on proportional methods. *Cognition and Instruction, 23* (1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). Students' over-reliance on linear methods: A scholastic effect? *British Journal of Educational Psychology, 77*, 307-321.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D., Weyers, D., & Verschaffel, L. (2004). The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of 'more a-more b' and 'same a-same b'. *Educational Studies in Mathematics, 56* (3), 179-207.

Vance, J. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics 4*(January), 282-285.

Vergnaud, G (1979) The acquisition of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics, 10,* 263-274

Vergnaud, G. (1980). Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools. In W. F. Archenhold, A. Orton, R. H. Driver, & C. Wood-Robinson (Eds.), *Cognitive development research in science and mathematics* (pp. 190–201). Leeds, England: University of Leeds.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hilbert & M. Behr (Org.), Number concepts and operations in the middle grades VII (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, & P. Nesher (Org.), Theories of mathematical learning (pp. 219-239). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Vergnaud, G. (1997). Algebra, additive and multiplicative structures. Is there any coherence at the early secondary level? *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, Podebrady, pp. 35-45.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger

Wang, F. & Hannafin, M. (2004). Using design-based research in design and research of technology-enhanced learning environments. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA, USA.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5-23.

Wearne, D., & Kouba, V. L. (2000). Rational numbers. In A. Silver & P. A. Kenny (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 163-191). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wittmann, E. C. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics eduction. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 25-36.

Wittmann, E. C. (1998) Mathematics Education as a 'Design Science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer.

Wood, T., & Berry, B. (2003). Editorial: What Does "Design Research" Offer Mathematics Teacher Education? *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*,(3), 195-199.

Woodruff, E., & Nirula, L., (2005) Design Research in the Elementary School Classroom. In C. Howard, J. Boettcher, L. Justice & K. Schenk (Eds.) *Encyclopedia of Online Learning and Technology* (Vol. II, pp. 510-517). Information Science Publishing.

Yetkiner, Z. E., & Capraro, M. M. (2009). Research summary: Teaching fractions in middle grades mathematics. Retrieved from http://www.nmsa.org/Research/ResearchSummaries/TeachingFractions/tabid/1866/Default.aspx

Anexo 1 – Teste diagnóstico

Teste Diagnóstico

1. O André e os seus amigos vão pintar as paredes da garagem. Antes de começarem ele preparou uma grande quantidade de tinta misturando 3 latas de tinta branca com 2 latas de tinta azul escura. O Pedro, irmão do André, também veio ajudar e quando chegou percebeu que era necessária mais quantidade de tinta. Noutro recipiente, ele juntou 2 latas de tinta branca a 1 lata de tinta azul escura.

O que podes dizer sobre as misturas feitas pelos dois irmãos?

- ☐ A mistura do Pedro é mais escura que a mistura do André.
- ☐ A mistura do Pedro é mais clara que a mistura do André
- ☐ A mistura do Pedro tem o mesmo tom que a mistura do André.
- ☐ Não é possível dizer qualquer informação sobre a tonalidade das misturas.

2. O Gil e Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista. Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas voltas faz o Tomás?

3. Na pizzaria *Bella Italia* 3 pizas familiares chegam para o almoço de 8 pessoas.

3.1.Quantas pizas serão necessárias para o almoço de 40 pessoas?

3.2. E se houver apenas $1\frac{1}{2}$ de piza, quantas pessoas podem almoçar?

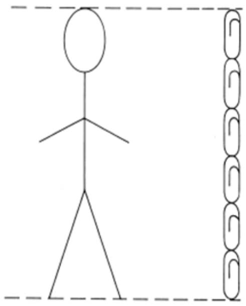
4. A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

5. 12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

6. Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com *clips*.

   O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

   Quantos *clips* são necessários para medir o Sr. Alto?



Sr. Baixo

7. Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, levará 75 minutos a percorrer 125 quilómetros?

8. Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de Sunquick (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de Sunquick a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

9. A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria se tivesse colocado 3 toalhas a enxugar?

10. O Luís e a Rosa vão fazer leite com chocolate para o lanche dos irmãos e dos primos. Nas tabelas estão representadas as quantidades usadas pelos dois amigos.

Receita do Luís

Leite (n.º de copos)	12
Chocolate em pó (n.º de colheres de sopa)	3

Receita da Rosa

Leite (n.º de copos)	20
Chocolate em pó (n.º de colheres de sopa)	5

10.1. Em que receita o leite sabe mais a chocolate?

10.2. Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate. Quantos copos de leite serão necessários se o Luís adicionar 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

11. Na pizzaria *Mama Mia* dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	10	65

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

Anexo 2 – Ficha de trabalho 1

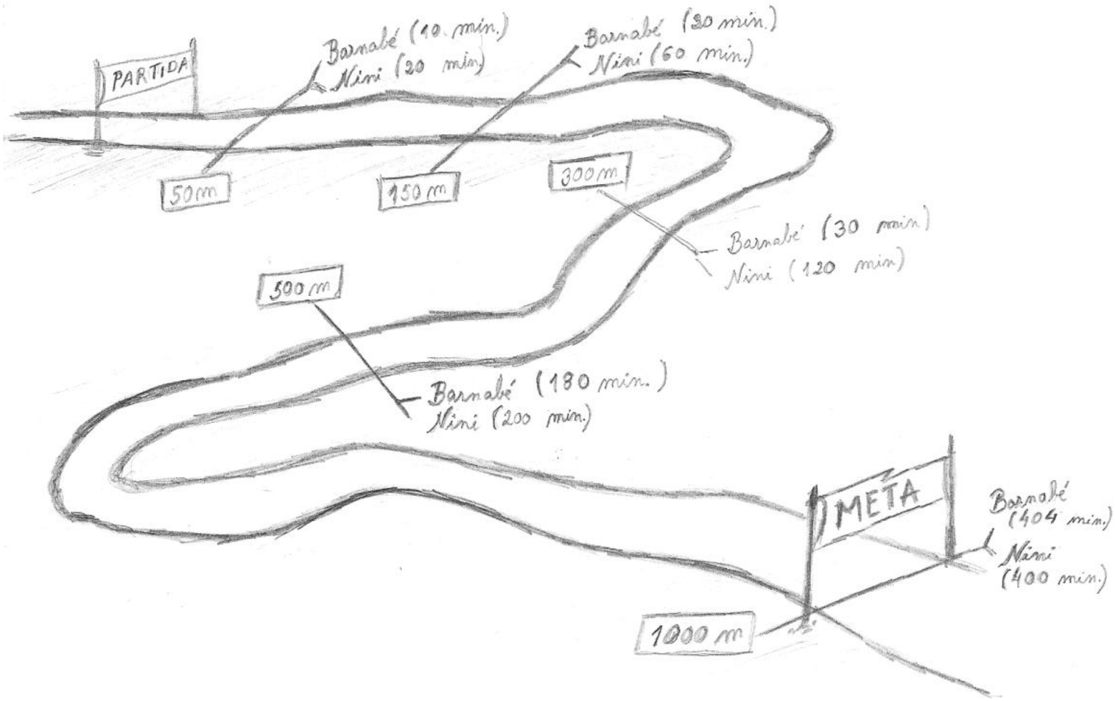
O COELHO E A TARTARUGA

Todos os anos se realiza a corrida mais famosa do mundo. Na floresta, os animais esperam ansiosos pelo dia da corrida e riem da sonolência da tartaruga e dos disparates do coelho. Esta corrida é mais conhecida pelas trapalhadas do que pelas medalhas.

O presidente dos coelhos estava certo que este ano ganharia e assim o seu atleta estaria presente nos Jogos Olímpicos da bicharada. Ele próprio tinha treinado o seu coelho corredor e por isso ganharia a corrida pela primeira vez. O seu esforço foi tanto que andou a inspecionar o trajeto dias antes da prova. Enquanto isso o treinador da tartaruga divertia-se a andar de patins.

E no dia combinado lá estavam os atletas prontos para mais uma prova. A tartaruga Nini e o coelho Barnabé tinham sido os atletas escolhidos e estavam ansiosos por começar a prova.

O esquema mostra a prova realizada pelo coelho e pela tartaruga.



1.Mais uma vez a história se repete.

1.1. Investiga o que terá acontecido durante a corrida.

1.2. Se o percurso da prova tivesse 2000 m, é possível prever o tempo que cada um dos atletas precisaria para concluir a prova?

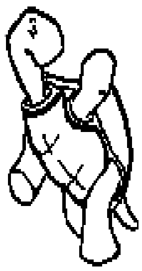
<u>Sugestões</u>:

- Observa os dados com atenção.
- Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar da situação; escrever o modo como relacionam os dados; escrever o significado dos números no problema) de modo a facilitar a escrita do relatório.
- Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as tuas conjeturas.

Anexo 3 – Ficha de trabalho 2

O SEGREDO DA TARTARUGA

O coelho Barnabé nem queria acreditar no que tinha acontecido. Tantos dias a treinar para acabar a corrida atrás de uma tartaruga molengona.



Alguns dias mais tarde o Barnabé encontrou a Nini que treinava para os Jogos Olímpicos. Matreiro como sempre, o coelho perguntou-lhe qual tinha sido a estratégia secreta para ganhar a corrida.

A tartaruga que era mais esperta que o coelho respondeu:

- O segredo para ganhar as corridas está na Matemática.

O coelho ficou a pensar se isso seria mesmo verdade.

1. Ajuda este coelho tonto. Investiga a possibilidade de o Barnabé ganhar a corrida usando a estratégia da tartaruga Nini.

<u>Sugestões</u>:

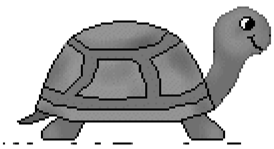
- Observa os dados com atenção.
- Faz registos do teu trabalho (ex.: recontar da situação; escrever o modo como relacionam os dados; escrever o significado dos números no problema) de modo a facilitar a escrita do relatório.
- Utiliza a folha de cálculo do Excel para representar os dados e para testar as vossas conjeturas.

Anexo 4 – Ficha de trabalho 3

NO PAÍS DAS TARTARUGA

O país das tartarugas é um sítio muito especial que esconde um mistério.

1. Por causa do tamanho das carapaças existe uma regra para a atribuição de tocas. Na tabela estão representados alguns dados recolhidos em cinco veredas.



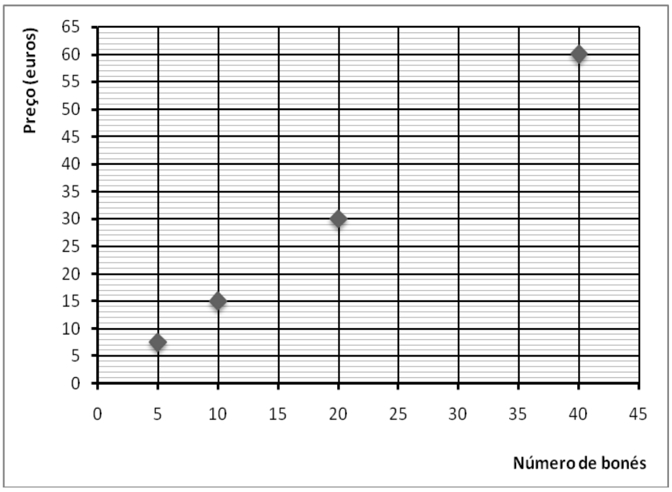
Número de tocas	Número de tartarugas
2	8
7	28
15	60
304	1216
1000	4000

1.1. É possível saber o número de tartarugas que existe em cada toca?

1.2. Quantas tartarugas existem em 100 tocas? Apresentem um registo dos vossos cálculos.

1.3. Quantas tocas serão necessárias para colocar 44 tartarugas? E 400 tartarugas?

2. Um grupo tartarugas vai participar nos Jogos Olímpicos da bicharada. O rei das tartarugas decidiu oferecer bonés a todos os atletas. À porta da fábrica dos bonés estava o gráfico seguinte.



2.1. O rei das tartarugas observou o gráfico mas decidiu escrever os dados numa tabela. Como seria essa tabela?

2.2. Será possível representar os dados de outro modo?

2.3. Quanto custa um boné?

2.4. Quantos bonés se podem comprar com 45 euros? Será possível descobrir essa quantidade através do gráfico?

3. As tartarugas treinam para a maratona em pistas especiais que vão mudando de forma e tamanho. É o treinador que constrói as pistas mas nunca diz o que significa a medida M. Serás capaz de descobrir qual é a forma destas pistas? O que significa a medida M em cada tipo de pista?

3.1. Pistas tipo A

Medida M (m)	Perímetro (m)
50	200
60	240
100	400
250	1000

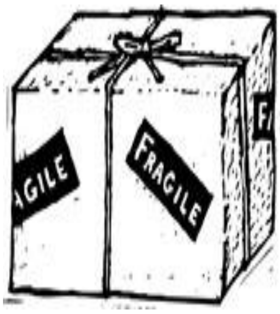
3.2. Pistas tipo B

Medida M (m)	Perímetro (m)
50	157
60	188,4
100	314
250	785

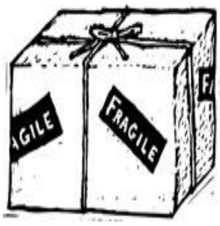
3.3. Pistas tipo C

Medida M (m)	Perímetro (m)
50	300
60	3600
100	600
250	1500

4. Para transportar as tartarugas atletas até Pequim onde vão participar nos Jogos Olímpicos, o rei das tartarugas encomendou duas caixas dos correios.



Caixa A
Natação: 4
Remo: 2
Maratona: 3
Salto com Vara:1
Salto em Comprimento: 3
Ginástica: 1
Patinagem: 6



Caixa B
Natação: 3
Salto com Vara:1
Salto em Comprimento: 1
Hipismo: 2
Ginástica:2
Patinagem: 1

4.1. O rei das tartarugas disse ao carteiro que na caixa A a razão entre o número de tartarugas nadadoras e o número de tartarugas patinadoras é 2 para 3. Será verdade?

4.2. Na caixa B, qual é a razão entre o número de tartarugas do salto em comprimento e o número de tartarugas do salto com vara?

4.3. Escreve a razão entre o número de tartarugas ginastas e o número de tartarugas remadoras da caixa A?

4.4. Escreve a razão entre o número de tartarugas patinadoras e o número total de tartarugas para as caixas A e B.

4.5. É aceitável dizer que as caixas A e B transportam tartarugas patinadoras na mesma proporção?

5. Para o lanche o Barnabé preparou sumo de cenoura para as tartarugas. Ele utilizou três receitas.

	Concentrado de cenoura (ml)	Água (ml)
Receita A	100	600
Receita B	250	1000
Receita C	320	1920

Qual é o sumo que sabe mais a cenoura? Justifica a tua resposta.

Anexo 5 – Ficha de trabalho 4

MARATONA DOS COELHOS E MAIS PROBLEMAS

O presidente dos coelhos quer ganhar a próxima corrida e por isso decidiu treinar muitas equipas. Foi a todas as florestas do país dos coelhos e conseguiu reunir algumas dezenas de atletas.

1. Como o presidente dos coelhos não tem tempo para treinar tantos atletas pediu a cada um dos alunos desta turma para treinar uma equipa. De cada equipa fazem parte um coelho da floresta verde, dois da floresta branca e dois da floresta azul.

1.1. Quantos coelhos existem na tua equipa? Escreve a razão entre o número de coelhos das diferentes florestas

1.2. Completa a tabela e descubram qual é percentagem de coelhos da floresta azul numa equipa.

Coelhos da floresta azul	Total de coelhos
	5
	100

1.3. Calcula a percentagem de coelhos da floresta branca em cada equipa?

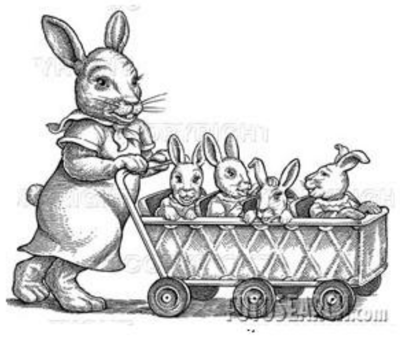
1.4. Qual é a percentagem de coelhos da floresta verde em cada equipa? Explica como pensaste

2. Dos 350 coelhos atletas apenas 20% dos coelhos foram selecionados para a maratona. Completa a tabela e indiquem o número de coelhos que vão participar na maratona.

Coelhos que participam maratona	Total de coelhos
20	100
	350

3. Dos 350 coelhos atletas 12% foram indicados para a marcha. Quantos são os coelhos que vão participar nesta modalidade?

4. Os gémeos Orelhudos fazem parte do grupo de atletas da corrida de estafeta. Se os gémeos representam apenas 25% do grupo, quantos coelhos vão participar nesta modalidade? Apresenta os dados de um modo organizado e escreve como pensaste.

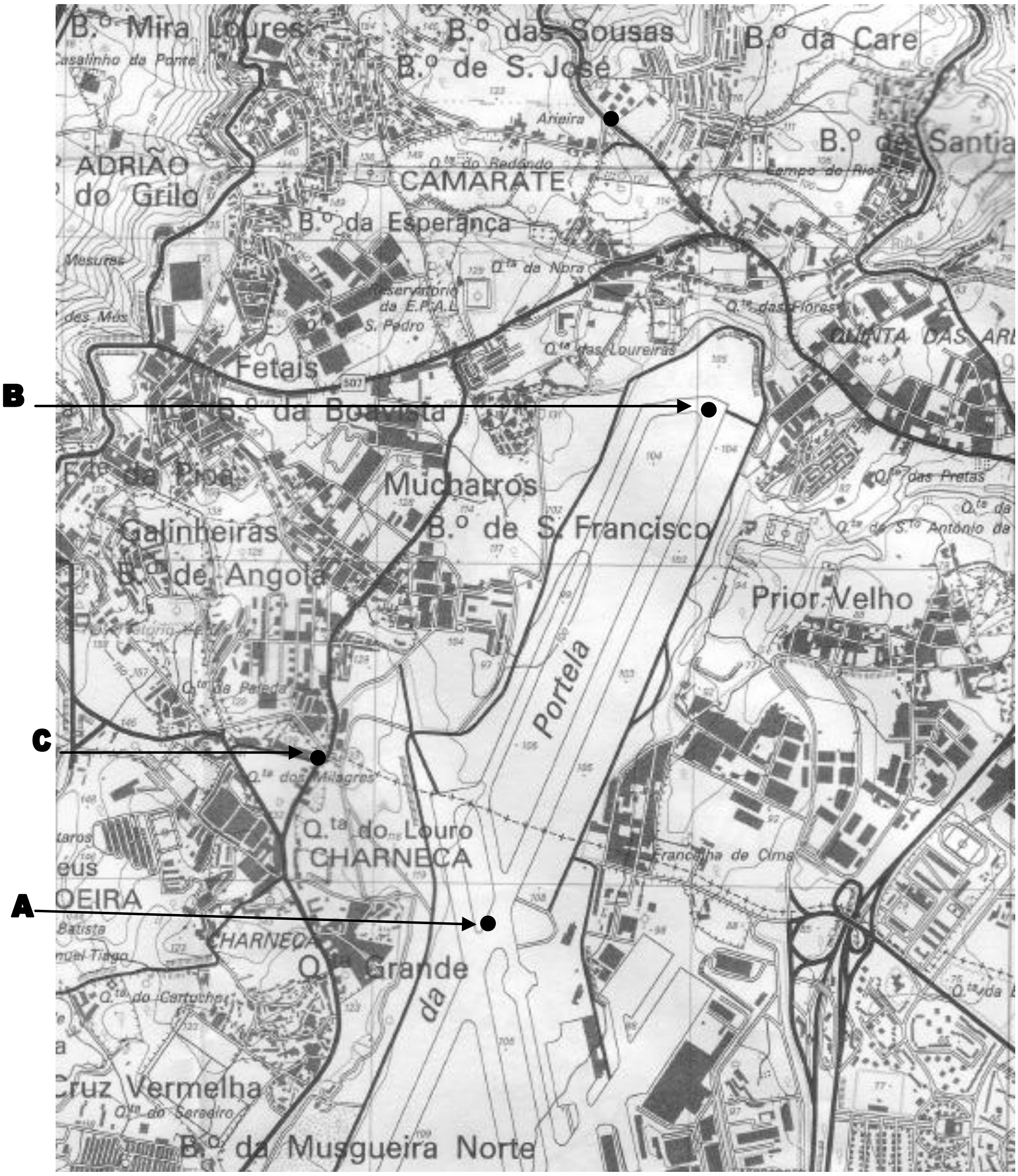


Anexo 6 – Ficha de trabalho 5

PISTA INTERDITA A COELHOS E OUTRAS HISTÓRIAS

1. Os coelhos descobriram uma pista óptima para as suas corridas. E apesar do polícia Bartolomeu lhes dizer que ali não podiam correr porque a pista era para os aviões, os teimosos coelhos não desistiram.

   A figura representa o mapa (Escala 1:25000) da pista onde os coelhos querem treinar.



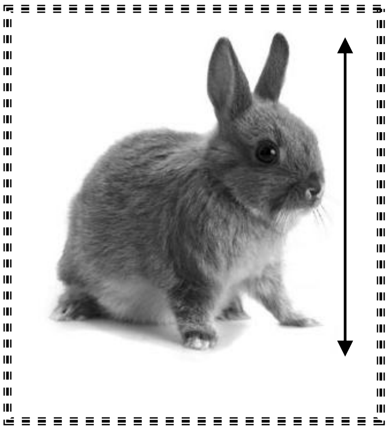
1.1.O que significa a escala 1:25000 do mapa?

1.2. Completa a tabela e descobre qual é o comprimento real de metade da pista entre os pontos A e B.

Distância no mapa (cm)	1	
Distância real (cm)	25000	

1.3. Se o Barnabé decidir ir do ponto C até à tua escola (marca no mapa um caminho), qual é a distância que terá de percorrer?

2. A figura representa uma fotografia do coelho Barnabé.



2.1.Qual é a altura real do coelho se a fotografia tiver uma escala 1: 15?

2.2. Imagina que estavas na fotografia junto ao Barnabé, qual seria a tua altura fotografia?

Anexo 7 – Teste final

Teste final

1. Considera as seguintes situações e diz se representam ou não uma relação proporcional.

1.1 Se com 6,15 euros compro 3 caixas de clipes, então se tiver 18,45 euros posso comprar 9 caixas.

1.2.

A	2,5	4,3	5
B	7,5	12,9	$\frac{45}{3}$

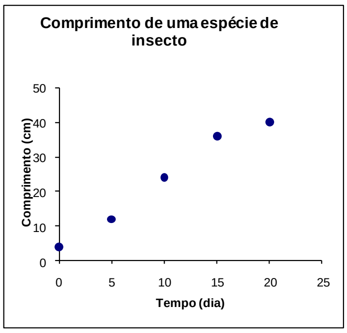
1.3. $\frac{5}{1} = \frac{12,5}{2,5} = \frac{22,5}{4,5}$

1.4. Se 5 operários levam 15 dias a pintar uma escola, então 1 só operário leva 3 dias a pintar a escola.

1.5. A impressora da Rita demora exatamente 12 minutos a imprimir 14 folhas, então em 30 minutos imprime 32 folhas.

1.6. A impressora da Inês demora exatamente 8 minutos a imprimir 12 folhas, então em 28 minutos imprime 42 folhas.

1.7.



1.8 Se uma camisola demora 20 minutos a enxugar, então 5 camisolas exatamente iguais demoram 100 minutos.

2. As tabelas apresentam os tarifários de duas empresas de telemóveis.

Trim Trim	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	2
45	3
60	4
90	6

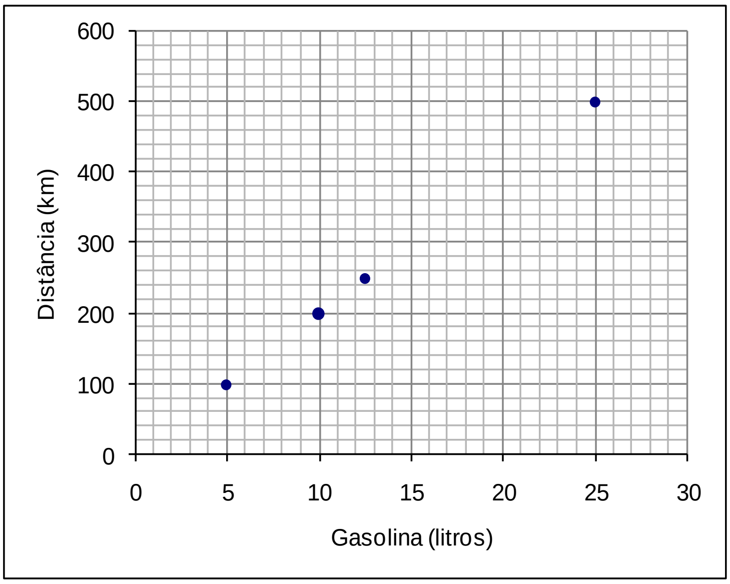
Está Lá	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
20	1,6
40	3,2
60	6
90	9

2.1. Qual é a empresa em que o preço a pagar é diretamente proporcional ao tempo de utilização do telemóvel? Apresenta duas estratégias diferentes para investigar a existência de proporcionalidade direta.

2.2. Explica por palavras tuas o significado de proporcionalidade direta.

2.3. Considera a empresa de telemóveis cujo tarifário apresenta uma relação de proporcionalidade direta e explica o significado da constante de proporcionalidade. (Nota: Caso seja necessário arredonda os valores numéricos às centésimas.)

3. O gráfico mostra o consumo de gasolina feito por um carro.



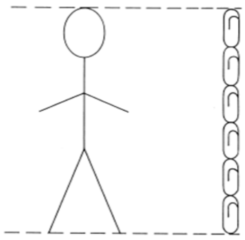
3.1. Existe uma relação proporcional entre a distância percorrida e a quantidade de gasolina gasta por este carro. Justifica a afirmação.

3.2. Será possível identificar no gráfico a quantidade de gasolina que este carro gasta para percorrer 400 km? Explica como pensaste.

3.3. Representa a informação contida no gráfico numa tabela e na forma de razão.

3.4. Determina a constante de proporcionalidade e explica o seu significado no contexto do problema.

4. O amigo do Sr. Baixo é o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede 6 fósforos.



Sr. Baixo

Quantos clipes são necessários para medir o Sr. Alto? Explica como pensaste.

5. A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos com uma velocidade constante.

5.1. Quanto tempo gasta a percorrer 1 metros? Apresenta os teus registos de forma organizada.

5.2. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos? Apresenta os teus registos de forma organizada.

6. A Luísa preparou três jarros com diferentes capacidades com sumo de laranja. Antes de servir o sumo a Luísa adicionou açúcar a cada um dos jarros.

Jarro	Sumo de laranja (litros)	Açúcar (colheres)
A	1	4
B	1,5	6
C	$\frac{3}{4}$	2

Investiga se existe algum sumo de laranja que seja mais doce? Justifica a tua resposta.

7. Determina a distância (metros) entre o [não identificado para proteger a identidade da escola] e a [não identificado para proteger a identidade da escola]. (Nota: O caminho é o que está indicado no mapa.)

Escala 1: 25 000

Anexo 8 – Teste intermédio

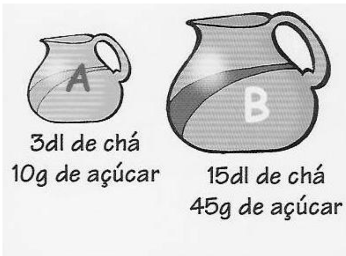
Teste intermédio

1. Um automóvel que circula a uma velocidade constante demora 10 minutos a percorrer 15 km. Quanto tempo leva para percorrer 90 km? Explica o teu raciocínio.

2. Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas por cada quatro amarelas.

   Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teria de colocar no ramo? Mostra como chegaste à tua resposta. Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas e cálculos.

3. Repara na imagem. Que chá, A ou B, é o mais doce? Justifica a tua resposta.



4. Num supermercado estão a fazer uma promoção em que vendem champôs em conjuntos de dois ou de três. Indica qual é a escolha mais económica. Diz como chegaste a essa conclusão.

5. Indica se cada frase é verdadeira ou falsa e explica o raciocínio que utilizaste, em cada caso, para poderes responder:

5.1. Se uma rapariga chega à escola em 10 minutos duas levam 20 minutos.

5.2. Se uma caixa de cereais custa 2,80€ duas custam 5,60€.

5.3. Se um rapaz faz um modelo de carro em 2 horas, pode fazer 3 modelos iguais em 6 horas.

5.4. Se o Hugo pinta o muro em 2 dias, o Hugo, o Tomás e um terceiro colega pintam em 6 dias.

Anexo 9 – Primeira entrevista

Primeira entrevista

1. A Margarida comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros.

1.1 Quanto custam 9 livros?

1.2. Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar? (Gastando todo o dinheiro.)

1.3. Se a Margarida tivesse comprado apenas 2 livros, quanto teria gasto?

1.4. A coleção “Era uma vez“ é constituída por 45 livros. Quanto custa a coleção?

2. O João comprou 3 livros da coleção “Era uma vez” por 12 euros e o Luís comprou 4 livros da mesma coleção por 20 euros. Qual dos rapazes comprou os livros mais baratos?

3. Quando a mãe do David utiliza a cafeteira elétrica costuma utilizar 8 chávenas de água e 12 colheres pequenas de café.

3.1. Quantas colheres de café são necessárias se forem usadas 20 chávenas de água?

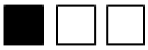
3.2. Quantas chávenas de água são necessárias se forem usadas 18 colheres de café?

4. Cinco raparigas partilharam três pizas e dez rapazes partilharam seis pizas. Quem comeu mais piza?

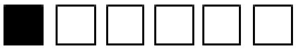
5. Na aula de EVT, a Inês e a Maria estão a juntar tinta preta com tinta branca para preparar tinta cinzenta. Qual das raparigas preparou tinta cinzenta mais escura?

5.1.

Inês

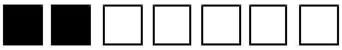


Maria

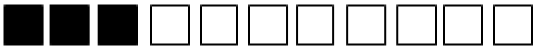


5.2.

Inês

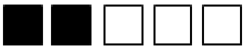


Maria

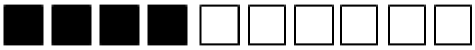


5.3.

Inês



Maria



Anexo 10 – Segunda entrevista

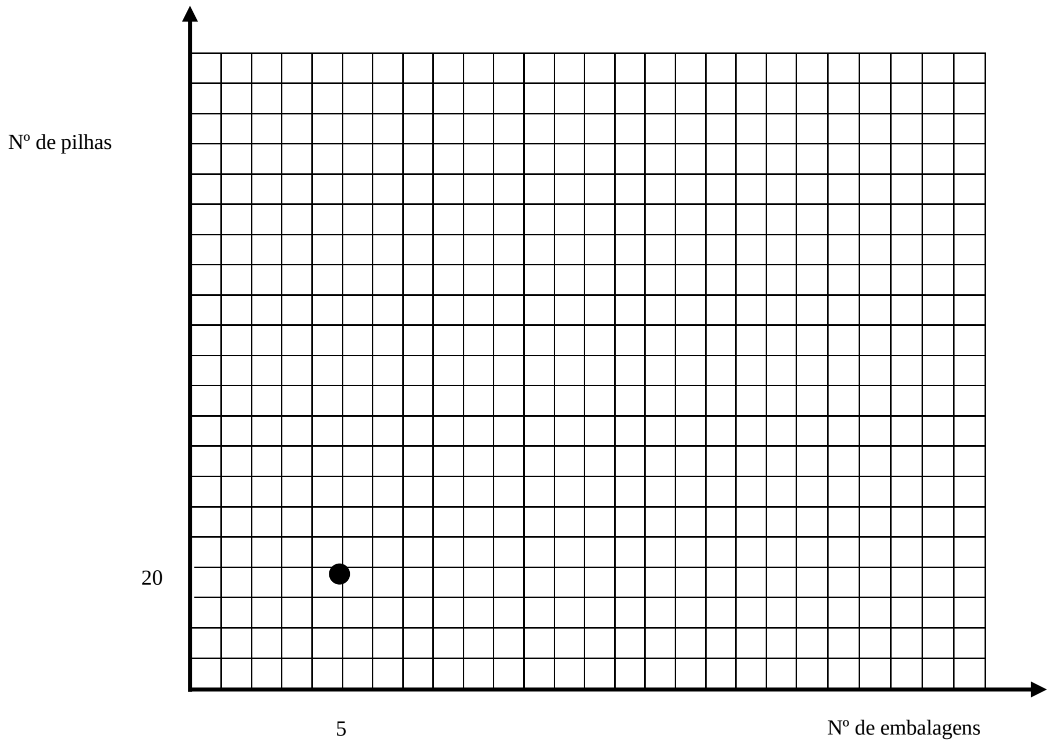
Segunda entrevista

1. A tabela representa a relação entre o número de embalagens e o número de pilhas.

Número de embalagens	Número de pilhas
5	20
10	40
15	60
20	80

1.1. Como podes utilizar a informação existente na tabela para determinar se é proporcional a relação entre o número de pilhas e o número de embalagens? Apresenta duas estratégias diferentes e explica o teu raciocínio.

1.2. Completa o gráfico utilizando os dados disponíveis na tabela.



1.3. Será possível determinar através do gráfico o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

2. O Pedro e a Margarida foram passear ao Parque das Nações e decidiram alugar bicicletas. O Pedro escolheu a empresa *Ciclotour* e a Margarida a *YBike*.

Ciclotour	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
30	3
45	4,5
60	6
90	9

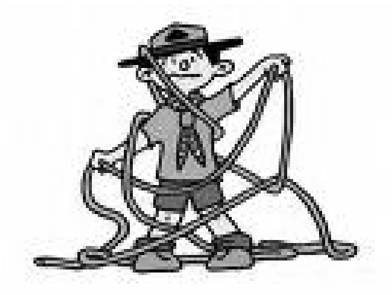
YBike	
Tempo (minutos)	Preço (euros)
20	1,5
40	4
60	6,5
90	10

2.1. Qual é a empresa em que o preço a pagar é diretamente proporcional ao tempo de utilização da bicicleta? Apresenta duas maneiras diferentes para investigar a existência de proporcionalidade direta.

2.2. Em que empresa é possível prever o preço a pagar, pelo aluguer da bicicleta, durante 120 minutos? Justifica a tua resposta.

Anexo 11 – Terceira entrevista

Terceira entrevista



1. No fim-de-semana passado um grupo de dez escuteiros fez um acampamento. Durante esse tempo o grupo comeu oito pães de forma.

1.1. No próximo fim-de-semana um grupo com quinze escuteiros vai fazer um acampamento semelhante. Quantos pães devem ser levados para a alimentação do grupo? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

1.2. Se houvesse 44 pães quantos escuteiros podiam estar no acampamento? (Considera que cada escuteiro come exatamente a mesma quantidade de pão.)

2. Numa loja de animais a ração para cão está em promoção. O António comprou 25 kg de ração e gastou 4,50 euros.

2.1. Quanto custa 50 kg de ração?

2.2. Quanto custa 10 kg de ração?

3. Na fruteira azul razão entre maçãs e pêras é 4 para 5. Qual das seguintes fruteiras apresenta uma razão entre os frutos é semelhante?

☐ Fruteira amarela: 5 maçãs para 4 pêras.

☐ Fruteira branca: 5 maçãs para 6 pêras.

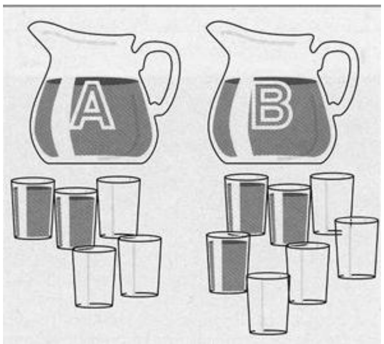
☐ Fruteira verde: 12 maçãs para 15 pêras.

☐ Fruteira castanha: 8 maçãs para 10 laranjas

4. A professora Margarida pediu na repografia da escola a ampliação de uma fotografia (comprimento 24=cm; largura= 20 cm). Se a cópia ampliada tem 50 cm de largura, quanto mede o seu comprimento?

5. A Carolina e a Inês vão pintar um painel na escola. Antes de começarem a Carolina preparou a tinta e misturou 3 lltros de tinta branca com 2,5 litros de tinta verde. A Inês mistorou 2 litros de tinta branca com 1,5 litros de tinta verde. As misturas feitas pelas duas raparigas têm a mesma tom de cor? Porquê?

6. Observa a figura.



Qual dos sumos tem mais sabor a laranja? Porquê?

Anexo 12 – Figuras do capítulo 5

Figura A.12.1 – Um aspeto da sala durante a discussão da tarefa da ficha 1 (turma A).

Figura A.12.2 – Discussão da tarefa da ficha 1 (turma A).

Figura A.12.3 – Aspeto do trabalho dos alunos (turma A).

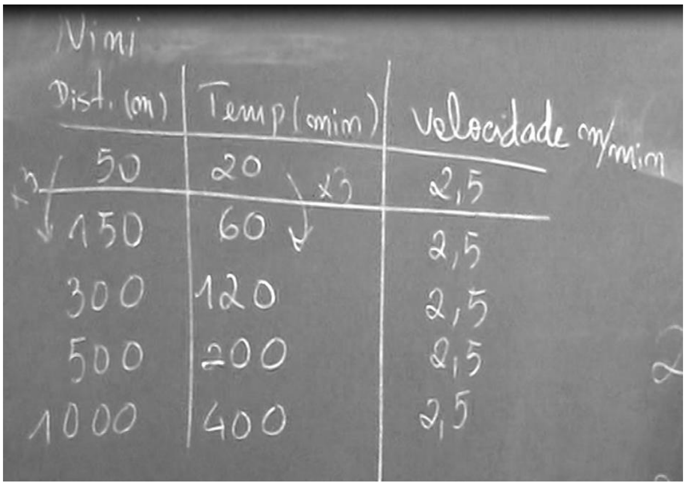


Figura A.12.4 – Exploração da relação multiplicativa na tarefa 2 (turma B).

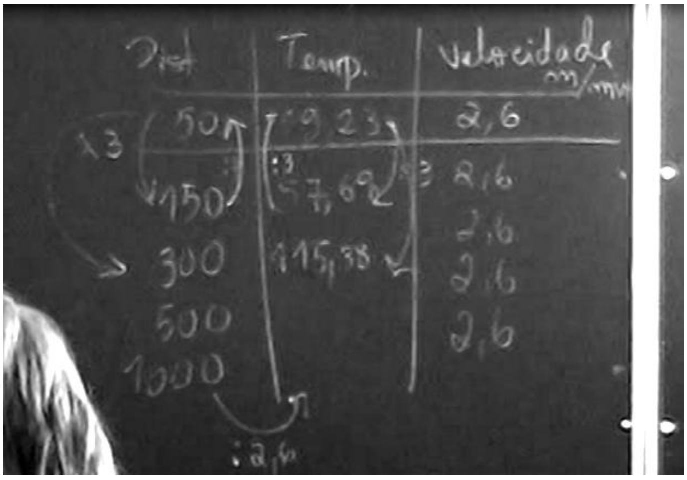


Figura A.12.5 – Continuação da exploração da relação multiplicativa (turma B).

Figura A.12.6 – Gil explica como pensou a Joel (turma B).

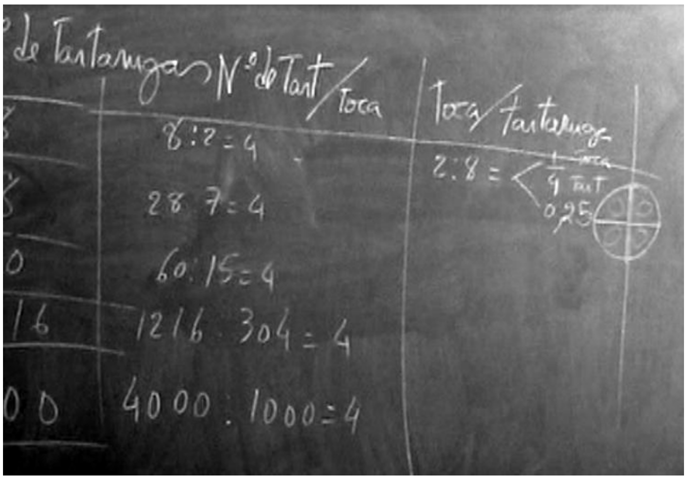


Figura A.12.7 – Início da discussão à questão 5 (turma A).

Figura A.12.8 – Continuação da discussão da questão 5 (turma A).

Figura A.12.9 – Inês explica como se lê a razão (turma A).

Figura A.12.10 – Professora aponta para o ponto (0,0) (turma A).

Figura A.12.11 – O grupo de Diogo discute a resposta à questão 1.3 (turma B).