Introdução ao *Habilitationsvortrag* de Bernhard Riemann[α]

José Ferreirós
(Universidade de Sevilha)
josef@us.es

I. Riemann Filósofo

Aquela filosofia que nos ocupa não se encontra, em absoluto, fora *dos restantes saberes, mas forma-se* neles *e* com *eles, como uma sua parte inseparável; tem com eles uma relação totalmente* imanente.[1]

A filosofia não é (nem deveria ser) alheia a considerações e dificuldades conceptuais que naturalmente surgem noutras esferas, pelo que pareceria arbitrário propor uma linha divisória fracturante entre o filosófico e o científico, ou o matemático. Sem tal pretender, podemos não obstante tratar de forma conexa vários problemas nos quais a reflexão filosófica desempenha um papel importante.

O de Riemann parece ser um desses casos, porventura frequentes, nos quais as ideias mais originais e particulares de um pensador surgem cedo. Aos 25 anos (cerca de 1852), já encontramos nele o essencial da sua nova orientação em análise, incluindo o início dos seus estudos cruciais sobre funções abelianas, mas também as directrizes que guiariam os seus esforços na teoria física, e uma evidente concentração em temas filosóficos. Após regressar a Göttingen em 1849, dedicou pelo menos três semestres a acompanhar cursos, não só sobre temas científicos, como os de Weber, mas também sobre filosofia. Mesmo após o seu doutoramento, Riemann constantemente dedicou uma parte muito considerável do seu tempo a leituras e

[α] As secções reproduzidas nesta introdução foram tomadas da vasta e notável introdução crítica que precede a edição espanhola da *Riemanniana Selecta* (secções 2 e 5 da Introdução; Bernhard Riemann, *Riemanniana Selecta*, C. S. I. C., Madrid, 2001, edição e estudo introdutório de José Ferreirós) as quais nos foram gentilmente cedidas pelo Prof. Dr. José Ferreirós para a presente tradução. Todas as omissões, adaptações e acrescentos tiveram aprovação do autor.

[1] Herbart, *Über philosophisches Studium* [1807], in *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vol.1, 230. Texto transcrito pelo próprio Riemann.

reflexões filosóficas. Aos poucos, encontraria um autor de referência, cujas obras se converteram em autênticas leituras de cabeceira: tratava-se do anterior catedrático de Göttingen, J. F. Herbart, um filósofo muito interessante, ainda que pouco estimado pelos profissionais da história da filosofia.

Em 1853 encontramos Riemann consultando obras de Fries e de Herbart, que em comum têm o serem filósofos não-idealistas, próximos à ciência do momento; evidentemente, a obra do kantiano Fries interessou-o menos que a de Herbart, cujos escritos se habituou a consultar todos os anos[2]. Todas as contribuições de Riemann revelam, com maior ou menor claridade, a imbricação de três fontes de conhecimento: matemática pura, física e filosofia. Para o demonstrar serve o seguinte texto, que Riemann deve ter escrito por volta de 1852/53:

> Os trabalhos que neste momento preferentemente me ocupam são:
>
> 1. De modo similiar ao que já sucedeu, com tanto êxito, com as funções algébricas, as funções exponenciais ou circulares, as funções elípticas e abelianas, introduzir o imaginário na teoria de outras funções transcendentes. Para isso estabeleci os pré-requisitos gerais mais necessários na minha dissertação inaugural [Cf., a dita dissertação, artigo 20, N.A.][3].
>
> 2. Em ligação com isso surgem novos métodos para a integração de equações diferenciais parciais, que já apliquei com êxito a diversos temas de física[4].
>
> 3. A minha principal ocupação diz respeito a uma nova concepção das conhecidas leis naturais – expressão das mesmas mediante outros conceitos básicos –, com o que se torna possível empregar os dados experimentais sobre a interacção entre calor, luz, magnetismo e electricidade, para investigar a sua inter-relação. A isso conduziu-me fundamentalmente o estudo das obras de Newton, de Euler e – por outro lado – de Herbart. No que toca a este último, as investigações mais antigas de Herbart, cujos resultados estão expressos na sua tese de doutoramente (de 22 e 23 de Outubro de 1802) conseguiram, quase na sua totalidade, a minha adesão, mas tive de afastar-me do caminho posterior da sua especulação num ponto essencial, o que acarreta diferenças com respeito à sua filosofia natural e àquelas proposições da psicologia relativas à sua ligação com a filosofia natural.

[2] Dados tomados do *Ausleihregister* [registo de requisições] da biblioteca universitária de Göttingen. A partir de 1853 requisita as obras de Herbart todos os anos, juntamente com as de outros autores herbartianos, entre os quais pode destacar-se Moritz Wilhelm Drobisch, matemático de Leipzig e autor de obras de lógica e psicologia

[3] A contribuição de Riemann para a teoria das funções de uma variável complexa, a que se refere este ponto 1, constitui uma obra de primeira grandeza, e foi a base da grande fama que alcançou em vida.

[4] O seu trabalho sobre equações diferenciais em derivadas parciais deu lugar a métodos originais e também a livros que várias gerações de físicos manusearam. O que é notável é que, perante tudo isso, o próprio Riemann nos diga que a sua "principal ocupação" era uma nova concepção dos fenómenos físicos, uma teoria unificada das forças fundamentais, inspirada não só nas obras de grandes físicos matemáticos, mas também na de Herbart.

Outro fragmento manuscrito de Riemann, resgatado pelos editores das suas obras completas, é explícito a este respeito:

> O autor é herbartiano em epistemologia e psicologia (Metodologia e Eidologia), ainda que em geral não possa adoptar a filosofia natural de Herbart nem as disciplinas metafísicas a ela ligadas (Ontologia e Sinecologia).

Como salientou o historiador da matemática Erhard Scholz, a parte da filosofia de Herbart a que Riemann disse aderir constitui propriamente uma teoria do conhecimento[5]. De facto, os seus fragmentos filosóficos incluem um ensaio sobre psicologia e outro sobre epistemologia que replicam claramente a exposições herbartianas. Dedicaremos, pois, espaço, a uma discussão das ideais principais de Herbart, na medida em que ajudam a iluminar as posições filosóficas, científicas ou matemáticas de Riemann.

Riemann e a filosofia de Herbart

O que primeiro convém dizer é que, por volta de 1850, vivia-se na Alemanha o declínio da tradição idealista, perante uma crescente difusão do positivismo e, sobretudo, a época dourada do mecanicismo. Mas quando se fala de idealismo, acontece o mesmo que com tantos outros conceitos filosóficos: aparece-nos sob uma forma bastante ambígua, dada a diversidade de posições que foram qualificadas com esse termo. Normalmente identificamos o "idealismo alemão" com nomes como os de Hegel, Fichte e Schelling, com o postulado da unidade do real e do racional no Espírito absoluto, e também com o postulado de um desdobrar dialéctico dos fenómenos. Ideias que conheceram muita notoriedade nos países de língua alemã no primeiro terço do séc. XIX, com impacto considerável mesmo entre os cientistas[6], mas que logo foram caindo em desgraça. Pois bem, "idealismo crítico" é o nome que tradicionalmente se aplica às doutrinas de Kant, doutrinas que convém distinguir com clareza das anteriores, entre outras razões porque (estas sim) gozaram frequentemente do crédito dos cientistas.

Johann Friedrich Herbart foi aluno do filósofo idealista Fichte, porém, já pelo final dos seus estudos, tinha desenvolvido uma crítica ao seu mestre. Em resposta à tendência idealista da filosofia alemã do momento, sempre fez questão de definir-se como *realista*. A sua renúncia a Fichte supôs um regresso a Kant, que será para ele

---

[5] E. Scholz, 'Herbart's Influence on B. Riemann', *Historia Mathematica* 9 (1982), 413–40.

[6] Um dos casos mais famosos é o de Oersted, que descobriu o efeito electromagnético produzido por uma corrente eléctrica sobre uma agulha magnetizada (1821).

um estímulo constante, ainda que de modo essencialmente crítico. Herbart foi quem ocupou, em 1809, a cátedra de Königsberg que Kant havia deixado vazia por ocasião da sua morte; em 1833 mudou-se para Göttingen, onde leccionou até à sua morte em 1841. Pois bem, este autor negou radicalmente a existência de qualquer fonte de conhecimento *a priori* e, portanto, a concepção kantiana das categorias do entendimento e das formas da intuição. A propósito das categorias, dizia:

> a quantidade de erros cometidos acerca das substâncias e das forças demonstra facticamente que os correspondentes conceitos não estão fixos e determinados no espírito humano, que não são, em absoluto, categorias ou conceitos inatos, mas sim produtos mutáveis de uma reflexão estimulada pela experiência e alterada por todo o tipo de opiniões.[7]

Sobre as famosas formas do espaço e do tempo, escreveu palavras tão duras como as seguintes:

> acrescentar um par de recipientes vazios infinitos nos quais os sentidos devem verter as suas sensações, sem qualquer justificação sobre a configuração e ordenação, foi uma hipótese completamente superficial, carecida de conteúdo e inapropriada.[8]

Em linha com o seu realismo e anti-apriorismo, Herbart tentou encontrar uma nova e interessante teoria do conhecimento: talvez, pela primeira vez num filósofo, aparece uma orientação coerente com o enfoque experimental e hipotético-dedutivo das ciências naturais, em consonância com a metodologia que começava a consolidar-se na consciência dos cientistas.

De facto, as ideias epistemológicas de Herbart desenvolveram-se sob a influência de um bom conhecimento da ciência do momento, a qual o marcou profundamente. No início da sua carreira, período em que exprime pontos de vista mais convincentes para Riemann, efectuou um estudo detalhado do cálculo infinitesimal e da mecânica. Na sua obra mais importante e original, da qual tomámos as anteriores citações, *Die Psychologie als Wissenschaft, neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik* [1825, 1826],[9] Herbart elaborou uma psicologia matemática segundo o modelo da física newtoniana: uma "mecânica do espírito", dividida em 'estática' e 'dinâmica'. Considera-se o dito trabalho como um precedente imediato e influente da psicologia científica, e os temas que sugere parecem, por demais, kantianos. Convém dizer que Herbart é também especialmente

---

[7] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 198.
[8] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 1 (1825), 428.
[9] *A psicologia como ciência, fundada na experiência, na metafísica e na matemática*, in Herbart, *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vols. 5 e 6.

recordado na história da educação, sendo por muitos considerado como o pai da pedagogia.

Por outro lado, as propostas filosóficas de Herbart parecem dever muitas sugestões, quanto ao seu conteúdo, a Leibniz, o que me parece importante, já que desta maneira se converteu numa ponte entre as especulações leibnizianas e as de Riemann. Poderia dizer-se que, se Kant é uma referência constante, porém, frequentemente um "pólo negativo", Leibniz oferece-lhe sugestões pontuais, mas converte-se num "pólo positivo". A influência leibniziana deixa-se ver, antes de mais, na ontologia: Herbart defendeu uma versão da monadologia, ainda que as suas mónadas "tenham janelas", isto é, se inter-relacionem[10]. Mas a presença de Leibniz deixa-se sentir também na concepção herbartiana do espaço, nas suas importantes teorias psicológicas, etc. Também Riemann frequentemente consultou as obras de Leibniz e a sua correspondência, que começavam nesta época a ter boas edições, e entre os seus manuscritos encontram-se várias páginas com excertos de Leibniz. Conforme veremos, não é difícil encontrar importantes paralelismos entre os dois autores. Para Herbart todo o conhecimento se origina na *experiência*, e não há nenhuma fonte de conhecimento *a priori*; mas a sua posição não é empirista. A experiência não oferece só dados sensoriais brutos, mas também uma multiplicidade de *relações* entre os elementos sensoriais, relações que são tão objectivas e dadas como as simples sensações. Assim, pode dizer-se que na experiência tanto se nos oferece uma matéria como um conjunto de formas, e estas nada têm de subjectivo; e aqui está um dos profundos motivos da crítica citada à teoria kantiana das formas espacial e temporal.

Todavia, mais distante do empirismo está a ideia de que possuímos uma capacidade específica de *reflexão*, que é fundamental e que se orienta para propor conceitos da realidade adequados. Onde Herbart diz "reflexão" [Nachdenken] poderia dizer-se também "meditação", ou inclusivamente teorização: é, literalmente, um pensamento que vem por detrás [nach] da experiência, que constrói sobre ela, a reorganiza e a interpreta. Os fruto da reflexão são conceitos que vão além do dado, de modo que o entendimento humano tem um papel claramente activo e criativo no conhecimento. Isto, sem implicar apriorismo, deixa-nos longe do empirismo. Pode dizer-se que experiência e reflexão equivalem aos dois aspectos fundamentais da metodologia hipotético-dedutiva.

---

[10] Nisto distancia-se de Leibniz, cujas mónadas não interagem, "não têm janelas", antes desenvolvem a sua actividade de acordo com um princípio interno, e só se realizam em coordenação, devido à harmonia pré-estabelecida [Leibniz 1714, §7]. A diferença entre ambos os autores tem como efeito, justamente, evitar o racionalismo leibniziano.

A reflexão é catalisada pelas contradições da experiência e acontece que, para Herbart, a experiência, tal como nos aparece, está carregada de contradições; o esforço reflexivo tende a eliminá-las, já que a realidade não pode ser contraditória. Uma coisa, com as suas propriedades, aparece como algo de contraditório, porque a coisa não é mais que a soma das propriedades, porém a coisa é unidade, enquanto as propriedades são múltiplas. A noção de eu é ainda mais paradoxal: a unidade da consciência dá-se na multiplicidade das representações, mas o efeito potencia-se pelo facto de que entre estas está a representação do eu (representação de um representar que remete para outras representações, e assim até ao infinito). Muitas outras noções, como as de espaço, tempo, causalidade e mudança, dão lugar a múltiplas contradições e aporias, exigindo um tratamento propriamente filosófico ou, como diz Herbart, metafísico.

Herbart tinha satisfatoriamente demonstrado – segundo Riemann – que as noções mais básicas do nosso conhecimento do mundo, a começar pela própria ideia de *objecto* com existência autónoma, não são senão conceitos aos quais somos naturalmente conduzidos quando reflectimos sobre as contradições da experiência:

> Herbart forneceu a prova de que também aqueles conceitos que servem à concepção do mundo, e cuja formação não podemos seguir nem na história, nem no nosso próprio desenvolvimento, já que nos são transmitidos irreflectidamente com a linguagem, todos eles, na medida em que são algo mais que puras formas de ligação das representações sensoriais simples, podem ser deduzidos dessa fonte; e, como tal, não precisam ser deduzidos de uma constituição especial da alma humana, anterior a toda a experiência (como as categoriais, segundo Kant).

O matemático tentou mostrar que o mesmo sucede com noções capitais como a de causalidade, ou a de continuidade. Mas continuemos com Herbart, com o que ele chama *metafísica*, uma verdadeira ciência a cujas partes Herbart dá nomes bastante curiosos: Metodologia, Ontologia, Sinecologia e Eidologia; estes nomes são os que Riemann usou para especificar onde concordava com o filósofo e onde não concordava.

A *Metodologia* mostra como se devem modificar os conceitos tomados da experiência para reduzir as dificuldades. Entre os princípios da Metodologia está o de "integração dos conceitos": perante o problema de atribuir um elemento que não pode ser simplesmente atribuído, e muito menos suprimido, ele tem de ser atribuído sob forma de multiplicidade ou variedade [Mannigfaltigkeit]. Isto é, quando tens que adicionar um elemento que entra em contradição com os anteriores, divide e vencerás. Nesta linha de raciocínio, a identidade com contradição de duas coisas supera-se considerando que cada uma está composta de elementos mais simples. Um tal caminho, que Herbart considera inevitável, conduz, em seu entender, aos elementos últimos da realidade: a multiplicidade "dos reais" [Realen], que são a espécie de mónadas da sua *Ontologia*. Estes entes não devem ser identificados com átomos materiais, mas sim pensados como átomos metafísicos: tal como as mónadas de Leibniz são imateriais e essencialmente activos. De qualquer modo, as contradições aparentes resolvem-se nas *relações entre seres* simples.

Ora, Riemann indicou com clareza que repudiava as ideias ontológicas de Herbart e, com efeito, não se encontram nos seus fragmentos filosóficos quaisquer referências aos "reais" nem às mónadas. Num dos fragmentos intitulados "Sobre epistemologia", de facto dirige uma crítica central à ontologia de Herbart, ao dizer que se um agente tende para a sua autopreservação, então não pode ser um ente, mas antes um estado ou uma relação. Um ente, portanto, não admite variações de grau, não admite alterações perante as quais poderia reagir, preservando-se; para que sejam possíveis desvios, deve tratar-se de um estado ou de uma relação. Mas se isto estiver correcto, então o carácter substantivo dos "reais" de Herbart é contradito pelos atributos centrais que o mesmo autor lhe imputa. De qualquer modo, como veremos adiante, permanecem resíduos leibnizianos e herbartianos nas especulações de Riemann sobre psicologia e sobre Natureza física. Riemann preservou a noção de certos "agentes" que tendem à sua autopreservação, que estão por detrás dos fenómenos de causalidade e que, além disso, entende serem estados. Estados de alguma coisa, claro, mas à pergunta metafísica capital de qual seja este (ou estes) ente(s), cujos estados são os "agentes", os seus fragmentos filosóficos não dão resposta.

Voltando a Herbart, a chamada *Sinecologia* é, nem mais nem menos, uma teoria do contínuo, que tinha como objectivo clarificar e justificar as noções que envolvem a ideia de continuidade: espaço, tempo, número e matéria. No entender de Herbart, o conceito de continuidade exige um tratamento metafísico porque é contraditório: a continuidade supõe a existência de partes infinitesimais unidas e separadas ao mesmo tempo. A este respeito, devem recordar-se as confusas discussões sobre a "metafísica do cálculo", que eram habituais no início do séc. XIX, e para as quais porém Gauss contribui com ideias muito interessantes (e, talvez, um pouco herbartianas). Vale a pena indicar também que a noção de continuidade é central para a especulação filosófica leibniziana, e que o próprio Kant tinha posto em relevo as dificuldades e contradições relacionadas com os conceitos de espaço, tempo e matéria.[11] Não é por acaso que Riemann elabora a sua própria lista de "Antinomias", na qual de novo figura a contraposição entre contínuo e discreto.

[11] 'Antinomias da razão pura' [Kant 1787, 432-595], especialmente [454-489].

Herbart considerava que os conceitos que envolvem a ideia de continuidade têm de ser compreendidos no contexto de uma teoria geral sobre a construção de "formas seriais contínuas" [continuierliche Reihenformen], da qual dá uma explicação que poderia chamar-se psicológica. Como pode deduzir-se do texto acima citado, Riemann rejeitou os pormenores da teoria herbartiana da continuidade. Não obstante, parece que recolheu algumas características muito gerais do enfoque herbartiano, o que é consonante com o parecer de vários autores, segundo os quais a Sinecologia de Herbart teria tido influência sobre as suas teorias geométricas[12]. Retornaremos a este assunto mais tarde.

Chegamos, finalmente, à *Eidologia*, a base metafísica das teorias psicológicas de Herbart, a qual inclui uma rebuscada teoria do eu. O conceito de eu não é de todo simples, mas sim um dos conceitos mais ricos e, aparentemente, mais contraditórios de todo o conhecimento humano; isto basta, em seu entender, para tornar ridícula a pretensão de Fichte de tomá-lo como ponto de partida absoluto para a metafísica. Por outro lado, os "reais" de Herbart são interactivos, actuam uns sobre os outros modificando o seu estado e dando lugar a reacções de autopreservação; estas reacções de autopreservação são precisamente a origem das suas percepções ou representações[13]; é que, tal como as mónadas, os reais são essencialmente perceptivos ou representativos. A psicologia toma da metafísica a ideia de que a alma é um real: um ente rigorosamente simples, que inicialmente não tem representações, mas cujas autopreservações, perante as múltiplas perturbações causadas por outros entes, produzem actos de representação. A alma, na sua qualidade simples, é para nós desconhecida, já que não pode ser nem sujeito, nem objecto da consciência; só em relação com todas as suas representações a alma se torna sujeito da consciência, unidade indivisa porém sumamente activa. Assim fica claro que não existe nada de contraditório na multiplicidade de representações que o eu possui.

Herbart afirma que, quando diversas representações se apresentam de uma só vez, entram necessariamente em relações. Se só se apresentasse uma, ela permaneceria ilimitadamente, já que cada uma tende a perpetuar-se (uma espécie de lei de inércia); ao apresentarem-se várias, entram em luta e há um complicado jogo de relações. A psicologia de Herbart estuda estas relações entre as representações, como se opõem entre si ou se "emaranham" umas com as outras, como inclusivamente podem fundir-se entre si. Presta cuidadosa atenção às circunstâncias dessas inter-relações e à possibilidade de as registar por meio de leis matemáticas; Herbart, não

[12] Por exemplo, Russell, *An essay on the foundations of geometry* (1897, reimpresso em Nova Iorque, Dover, 1956), e Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* (Dordrecht, Reidel, 1984), 107–108.
[13] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 295. Ver também vol. 1 (1825), 190.

por acaso (como Kant), dava grande importância à elaboração matemática das hipóteses científicas. É a partir daqui, e não na fundamentação ontológica, que Riemann adere às suas teses. De acordo com Herbart, as representações mais intensas podem fazer desaparecer outras sob o umbral da consciência, ainda que isso não as elimine, pois podem ressurgir (sobretudo se vem à consciência uma outra representação relacionada com elas). Pela primeira vez, um estudioso sério destes assuntos desenvolve em detalhe a ideia de um psiquismo subconsciente[14].

Em tudo o que até aqui foi dito, falámos abundantemente de *relações*. O que existe, tanto na realidade última postulada pela metafísica, como nos nossos conteúdos mentais, são sobretudo relações e produtos de relações. Herbart chega a dizer que o conhecimento é, acima de tudo, conhecimento de relações, e atribui-se-lhe a frase "Vivemos entre relações, e de nada mais precisamos". Esta concepção apenas é já suficiente para dar conta da originalidade e "modernidade" do filósofo. Igualmente nova é, na sua psicologia, a oposição frontal à velha distinção das "faculdades" do entendimento, ou do espírito, que ainda está tão presente em Kant. Com isto, como com muitas outras das suas contribuições, Herbart abre caminho ao surgimento de uma psicologia científica.

Como se viu anteriormente, a concepção que Herbart tem da filosofia não é a de um saber sobrenatural, distante das ciências, e ainda menos a de uma simples serva das ciências. A relação entre os distintos saberes é muito mais rica, íntima e interactiva, como se pode ler num dos seus primeiros livros, que Riemann atentamente estudou:

> Aquela filosofia que nos ocupa não se encontra, em absoluto, fora dos restantes saberes, mas forma-se *neles* e *com* eles, como uma sua parte inseparável; tem com eles uma relação totalmente *imanente.*

Não menos interessante é que, em seu entender, a ciência mais próxima da filosofia é a matemática:

> A característica da nossa ciência [filosofia] é a de tomar os conceitos como seus objectos. Pelo contrário, as restantes disciplinas estão absortas na concepção daquilo que, ou está dado, ou podia estar. Inclusivamente a matemática (pois do saber histórico não é preciso falar), tal como se tem estado a considerar, imagina as suas fórmulas abstractas, sempre enquanto fórmulas de casos possíveis, e com prazer simboliza as suas funções mediante o comportamento de curvas, que só o espaço torna possível, a fim de regressar com meios mais poderosos para as dominar. A este respeito formal – e apenas a este respeito – pode ser separada da filosofia. Tratada filosoficamente, converte-se ela própria numa parte da filosofia que, para as

[14] Ideia que, não obstante, tinha sido exposta com toda a clareza por Leibniz na sua *Monadologia* [1714], §6, etc.

> suas próprias necessidades, deveria criar uma teoria das grandezas se já não existisse alguma. [Herbart 1807, 275]

Scholz apoia-se neste texto para sustentar que um dos efeitos que Herbart teve sobre Riemann foi precisamente o de o impulsionar para algo como um tratamento "filosófico" da matemática, estimulando a sua abordagem conceptual e abstracta do assunto[15]. Herbart aconselhava a que toda a disciplina madura se edificasse logicamente em torno de um conceito básico e central; Riemann dedicou-se, com efeito, à procura de conceitos básicos como, por exemplo, o de variedade, em função dos quais fosse possível reestruturar e reorganizar a sua disciplina.

Teoria do Conhecimento

A teoria do conhecimento defendida por Riemann é um desenvolvimento da Metodologia herbartiana, a qual, conforme vimos, expunha o modo como a reflexão modifica os conceitos a fim de os adequar a uma explicação sem contradições do dado na experiência. As ideias de Riemann a esse respeito aparecem registadas em vários fragmentos: o primeiro é um texto a propósito da obra de Fechner, *Zend-Avesta*, que deve ter sido escrito por volta de 1852, e reflecte um ponto de vista ainda imaturo, pois apresenta uma concepção indutivista. Mais tarde, Riemann tornou-se partidário declarado do método hipotético-dedutivo, enfatizando constantemente os elementos hipotéticos e conjecturais nas nossas teorias. Tal encontra-se tanto nos fragmentos intitulados "Sobre epistemologia", como no seu último escrito (1866), contendo reflexões metodológicas a propósito da fisiologia[16]. Centrar-nos-emos aqui nos fragmentos sobre epistemologia que se encontram entre os mais interessantes na sua obra filosófica e que são, em particular, muito importantes para adequadamente compreender a sua famosa lição sobre geometria. Mas a teoria do conhecimento de Riemann também inclui elementos de ressonância kantiana, como é o caso da sua lista de quatro "Antinomias" que comentaremos no final desta secção.

A ciência natural, diz-nos Riemann, é o esforço de conceber a natureza mediante *conceitos* precisos. As teorias científicas são "sistemas conceptuais", tecidos sobre conceitos. Tais sistemas não são meros registos de dados da observação: Riemann está muito distante do positivismo clássico, tão em voga naquele tempo, com a sua tendência para aceitar uma metodologia indutivista. Todo o nosso

---

[15] "Herbart's Influence on B. Riemann", *op. cit.* [1982], 428.

[16] Neste texto, "Sobre os métodos a empregar na fisiologia dos órgãos sensoriais mais delicados", o leitor encontrará precisões ulteriores sobre o método hipotético-dedutivo, críticas às considerações teleológicas e analógicas que eram então frequentes e às quais não tinha sido alheio o próprio Riemann na sua juventude, bem como uma interessante elaborações dos métodos clássicos de *análise* e de *síntese*.

conhecimento começa na experiência, porém esta – de acordo com Herbart – não oferece apenas *dados* brutos, mas também *formas* nas quais esses dados se estruturam, e *relações* entre os dados. Além disso, a mente humana não se limita a um papel passivo de receptor, de *tabula rasa*, mas é de carácter essencialmente activo, tal como o exprime a ideia herbartiana de reflexão. Assim, corrigindo Kant, Riemann escreve:

> Devemos, como é claro, adoptar as relações causais da experiência; porém, não devemos por isso renunciar a corrigir e a complementar a nossa concepção destes factos da experiência mediante a reflexão.

Como tal, todos os conceitos que empregamos surgiram da experiência e da reflexão, sem que haja nenhuma ideia inata, nenhum elemento *a priori*. Em particular, nem o espaço nem o tempo são anteriores ao dado, e menos ainda as "categorias" (conceitos do entendimento) kantianas.

Dito de outro modo, os sistemas teóricos da ciência contêm sempre *hipóteses*, entendendo-se esta palavra não no sentido newtoniano (o célebre "Hypotheses non fingo" ["Não finjo hipóteses"] que Riemann cita), mas sim no sentido moderno. Hipóteses são "tudo o que o pensamento acrescenta aos fenómenos" ou, em termos herbartianos, o que não aparece imediatamente dado na experiência, mas sim o que é acrescentado pela reflexão. Como se vê, o enfoque metodológico preferido por Riemann é *hipotético-dedutivo*, coerentemente com os ensinamentos de Herbart e também de Weber. Julgamos a correcção de uma teoria, considerando o que a mesma prediz como necessário, ou pelo menos como provável; estas predições são comparadas com o observado e, frequentemente, sucede dar-se um fenómeno que contradiz as predições ou que pelo menos parece improvável à luz da teoria. Todas as mudanças teóricas na história da ciência, diz Riemann, são um resultado deste tipo de inadequações, as quais motivam a procura de uma nova teoria, mais correcta.

Uma peculiaridade da concepção riemanniana, muito específica do seu tempo, é a que a melhoria, ou o refinamento, dos sistemas conceptuais se guia sempre por um *princípio de economia*, um princípio do *mínimo*. Procuramos sempre que a nova teoria se mantenha tão próxima quanto possível da anterior, introduzindo o menor número possível de alterações, com o menor alcance. Não devemos estranhar que Riemann não seja um popperiano, não só no aspecto recém-referido, mas também na ideia implícita de que as sucessivas correcções teóricas progridem em direcção a um sistema conceptual que poderá chamar-se, de pleno direito, verdadeiro[17]. A diferença – de qualquer modo não tão grande – entre Riemann e Popper dá-nos um claro indício

[17] Popper enfatiza o carácter puramente *conjectural* do conhecimento científico até um ponto que outros filósofos consideram exagerado.

do enorme impacto que tiveram, na nossa imagem do conhecimento, as grandes revoluções conceptuais da física nos inícios do séc. XX. E acontece que mudanças como as que conduziram ao conceito de espaço-tempo, a uma alteração de doutrinas básicas sobre a mecânica e a gravitação, ou ao abandonar das ideias clássicas de determinismo e causalidade ao nível quântico, não encaixam assim tão bem numa concepção tão "gradualista" como a esboçada por Riemann. De qualquer modo, ao considerar as propostas deste autor em física vê-se que foi seguramente o pensador do século XIX mais aberto ao tipo de inovações que logo se impunham.

Boa parte dos fragmentos sobre epistemologia de Riemann dedica-se à análise da origem de dois conceitos verdadeiramente fundamentais da ciência do seu tempo: continuidade e causalidade. Já citámos a crítica de Riemann à ideia kantiana de postular o esquema causa-efeito como uma "categoria" ou conceito do entendimento. A doutrina kantiana das categorias garante, é certo, que tais conceitos têm aplicação *necessária* no nosso conhecimento empírico, porém fá-lo a um preço muito elevado, já que *nada* nos dizem sobre como são as coisas em si. As categorias só são objectivas no sentido fraco de "intersubjectivas": impõem-se necessariamente a todos os sujeitos com uma constituição semelhante à nossa, mas não há qualquer garantia de que sejam válidas no que respeita às coisas em si. Pelo contrário, a doutrina de Riemann e Herbart pretende garantir uma *objectividade* muito maior: há uma conexão directa entre os dados, formas e relações que nos são dadas na experiência, e os conceitos que empregamos.

Herbart tinha demonstrado que o conceito de "coisa com existência autónoma" (isto é, de ente ou objecto permanente) surge por reflexão sobre o dado, sobre a notável regularidade e constância nas nossas percepções. Segundo Riemann, isto é da maior importância:

> Esta prova da sua origem na concepção do dado, através da observação sensorial, é para nós importante, *pois só através dela pode ser constatada a sua significação, de uma maneira satisfatória, para a ciência natural*.

Seguindo essa mesma linha, Riemann propõe-se mostrar como "os conceitos básicos da matemática e da física" surgem também por refinamento e melhoria gradual das ideias mais simples que dão conta do dado. É interessante alertar para que estes conceitos básicos são (tirando o de objecto autónomo) os de variação contínua e de causalidade. Sem dúvida que Riemann está a sugerir que o conceito de *continuidade* é a base do conhecimento matemático, e o de *causalidade* a base da teoria física. A matemática seria muito mais bem compreendida em relação com a geometria, a topologia e a análise, do que como uma simples ciência dos números; e a concepção riemanniana da física seria tipicamente "clássica", anterior à grande revolução quântica do séc. XX (não podia ser de outro modo).

Como surgem estes conceitos básicos? Uma vez adoptado o conceito de objecto, embatemos na experiência da mudança, pois esta contradiz a ideia de existência autónoma. Procurando manter a ideia de objecto inalterada, tanto quanto for possível, a nossa reflexão leva-nos a entender as mudanças como variações contínuas. Mas o objecto teria permanecido imutável se não tivesse sobrevindo uma outra coisa, e aqui se encontra a origem da ideia de causa. Não entraremos em detalhes acerca dos restantes comentários que Riemann tece em torno da causalidade, ainda que se deva chamar a atenção do leitor para o facto de que se pensam as causas como sempre estando ligadas a algum agente. Isso parece uma reminiscência da concepção leibniziana das mónadas, ou da herbartiana dos "reais", ainda que – conforme vimos – Riemann recuse esta última. Na verdade, Riemann deixa cautelosamente envolto em mistério quais poderiam ser os componentes últimos do mundo, os elementos substantivos mais simples cujas relações desdobram todos os fenómenos encontrados à superfície das aparências.

Como noutros casos, por exemplo o do próprio Popper, a metodologia hipotético-dedutiva de Riemann apoia-se na noção de *verdade*. Esta noção é entendida na versão clássica de correspondência com os factos, que Aristóteles já expusera:

> I. Quando é que a nossa concepção do mundo é verdadeira?
> "Quando a ligação entre as nossas representações corresponde com a ligação entre as coisas."…
> II. Como se deve estabelecer a ligação entre as coisas?
> "A partir das ligações entre as aparências."

Mas mesmo a este nível Riemann consegue introduzir reflexões inovadoras que não deixaram de ter as suas correspondências no séc. XX. Concretamente, na veia herbartiana, o matemático indica que a correspondência interessante não se dá entre elementos simples dos nossos sistemas conceptuais e elementos simples da realidade, mas sim entre as respectivas *relações*. As relações entre os elementos da nossa representação do mundo devem reflectir fielmente as relações entre as coisas. As explicações de Riemann a este respeito recordam muito a famosa "teoria figurativa" do pensamento e da linguagem proposta por Wittgenstein no início do seu *Tractatus*. As semelhanças incluem a terminologia muito riemanniana de "Bild" e "Abbildung", e as reflexões sobre o grau de "fineza" da representação. Seria muito interessante saber se Wittgenstein, além do mais por estar influenciado pelo físico Hertz, também leu com cuidado as obras de Riemann.

A reflexão sobre a noção de verdade, e sobre o papel que têm as relações ou ligações entre as aparências como critério-chave de verdade, conduz Riemann a ensaiar uma justificação do papel privilegiado que têm as relações *quantitativas* na ciência. Com Demócrito e os pensadores do séc. XVII, começando por Galileu, Riemann traça a distinção entre qualidades sensoriais – cor, timbre e tom, odor, sabor – e relações quantitativas (o que, no séc. XVII se chamavam "qualidades primárias"). As primeiras não existem como tais fora de nós, ainda que existam correlatos das diferenças de intensidade ou de qualidade, e das relações quantitativas. Daí que as relações quantitativas tenham uma relevância especial como fundamento último dos critérios que aplicamos para ajuizar sobre a verdade das teorias:

> Da reflexão sobre a conexão observada entre estas relações quantitativas deve resultar o conhecimento da conexão entre as coisas.

Torna-se claro que o papel da matemática na ciência é, segundo Riemann, essencial.

Do que temos vindo a dizer sobre as teorias de Riemann acerca do conhecimento humano poderia passar a ideia de uma concepção profundamente optimista, que se imaginaria um desenvolvimento gradual da ciência em direcção à plena verdade. Tal ideia é imediatamente corrigida quando se atenta no seu fragmento intitulado "Antinomias", que passamos a comentar. Para começar, é muito curioso que Riemann tenha escrito este texto, cujo referente não pode ser outro senão as famosas contradições, ou "conflitos dialécticos" da razão pura que Kant expôs e analisou ao longo de cem páginas da sua *Crítica da Razão Pura*[18]. Diz muito da sua confiança e da sua ousadia como pensador que Riemann tenha tido coragem para emendar o plano de uma das secções mais amplamente admiradas e respeitadas da grande obra kantiana.

Uma *antinomia* não é outra coisa senão uma antítese inevitável, um par de proposições contraditórias tais que cada uma delas é dedutível a partir de princípios da razão. Como tal, Riemann pensa que aos conceitos que empregamos para defrontar a experiência (tanto a do mundo externo como a dos nossos fenómenos internos, mentais) subjazem antíteses e contraposições inevitáveis. Por isso dizíamos que o fragmento em questão mostra que a sua concepção não é, em absoluto, optimista. Pois bem, o pormenor destas antinomias não coincide com o das expostas por Kant, como menos ainda estão ambos os autores de acordo na sua maneira de entender as relações entre a tese e a antítese de cada antinomia. Tão significativas como a semelhança

[18] Concretamente, no capítulo II do Livro I, Segunda Parte, Divisão Segunda; a referência que acabamos de dar é significativa do estilo exageradamente sistematizante de Kant, que se reflecte tantas vezes no conteúdo da sua filosofia.

exterior do trabalho de ambos são as divergências que Riemann introduz em relação ao filósofo de Königsberg.

A primeira antinomia de Kant tem a ver com as noções de espaço e tempo: à tese de que o mundo tem um limite espacial e um início temporal, contrapõe-se a antítese de que o mundo é *infinito* em ambos os sentidos. A contraposição entre finitude e infinitude aparece, na tabela riemanniana, não como uma antinomia particular, mas sim no próprio título: todas as teses de Riemann teriam que haver com o "Finito, representável", e todas as antíteses com o "Infinito", com "sistemas conceptuais que se situam na fronteira do representável" (na prática, em alguns casos é problemático compreender em que consiste essa relação, como acontece sobretudo com a antítese de II, e talvez com a de IV). O título da tabela de Riemann, e os seus comentários sobre a relação geral entre tese e antítese, revestem-se de especial interesse como fonte para conhecer algumas das suas concepções sobre os fundamentos da matemática. Já dissemos que as teses designam sempre algo "finito", enquanto as antíteses apresentam algo "infinito". Concretamente, ele diz,

> Os sistemas conceptuais da antítese são precisamente conceitos determinados mediante predicados negativos, porém não são representáveis positivamente.

Isto é algo que a tradição teológica sempre tinha dito do conceito de Deus enquanto ser absoluto e providente; mas Riemann está a afirmar que tãopouco podemos representar de modo positivo os conceitos, centrais em matemática, do infinito e do contínuo (nem, também, as ideias de alma e da determinação voluntária do futuro). E continua,

> Justamente por isso, porque é impossível uma representação precisa e completa desses sistemas conceptuais, são inacessíveis à investigação directa e à construção mediante a nossa reflexão. Mas podem ser considerados como situados nas fronteiras do representável, ou seja, pode construir-se um sistema conceptual situado dentro do representável que se transforma no sistema dado por pura variação das relações de grandeza. Se não considerarmos as relações de grandeza, o sistema conceptual permanece invariante, em última análise, até ao limite. Mas no próprio limite, alguns dos conceitos co-relativos do sistema – precisamente aqueles que permitem a ligação entre outros conceitos – perdem a sua representatibilidade.

Diferentemente do que sucede em Kant, a tese e antítese de cada antinomia riemanniana guardam entre si uma relação interna, diríamos quase que orgânica. O modelo desta relação é dado pelo método de *limites* que se emprega para fundamentar a análise infinitesimal e que Riemann associa, já não com Cauchy ou com d'Alembert, mas sim com o próprio Newton. Embora os conceitos da antítese não sejam representáveis enquanto tais, estão bem determinados, e para cada um deles é possível construir um sistema conceptual finito que, "por pura variação das relações de magnitude", dá-nos, no limite, o sistema da antítese. Tal estabelece a aceitabilidade dos conceitos manuseados na antítese, mas não elimina a antinomia: o mundo pode ser, ou discreto, ou contínuo; ou Deus é intemporal, ou labora no tempo; e assim nos demais casos. Se agora nos perguntarmos se Riemann opta por alguma das alternativas, em meu entender a situação é a contrária: as antinomias apresentam-se com toda a seriedade, e Riemann aparece-nos (como veremos, e com o devido respeito) como o asno de Buridan[β].

Não podemos entrar nos detalhes das antinomias, porque uma discussão pormenorizada levar-nos-ia demasiado longe; porém convém pelo menos citá-las e cotejá-las com as de Kant. A primeira antinomia de Riemann é a contraposição entre a tese de que espaço e tempo são discretos (a pressuposição de "elementos espaciais e temporais finitos"), e a antítese de que ambos são contínuos (a pressuposição do "contínuo"). Tal poderia corresponder, em certa medida, com a segunda antinomia de Kant, ainda que as diferenças de detalhe sejam importantes[19]. Mas o mais interessante é que essa primeira antinomia de Riemann tem um reflexo directo na famosa lição sobre geometria: nela se mantém até ao fim a dúvida sobre se a realidade subjacente às nossas representações espaciais é discreta ou contínua.

Numa leitura superficial, a segunda antinomia de Riemann assemelha-se à terceira de Kant (ambas têm que haver com o conceito de liberdade), e a terceira de Riemann à quarta de Kant (as duas se referem ao conceito de Deus). Mas quando as analisamos com atenção, vemos que a correspondência não se mantém: o famoso filósofo entende por liberdade a faculdade de iniciar um estado em sentido absoluto, enquanto Riemann esclarece que por liberdade entende não o conceito kantiano, mas sim o mais aristotélico poder de decidir entre duas ou mais possibilidades dadas. Isto parece-lhe uma ideia perfeitamente representável, "finita", já que a "liberdade é facilmente compatível com a legalidade rigorosa do curso da natureza": basta pensar que o mecanicismo psíquico "adopta, no seu desenvolvimento a particularidade" de tornar o livre arbítrio "necessário". Ao passo que o conceito de determinismo (e, em concreto, a determinação do futuro através das nossas acções) parece-lhe estar no limite do representável. Enquanto que à antinomia de Deus, Kant contrapõe a

[β] O paradoxo do asno de Buridan é um paradoxo descrito por Aristóteles, no seu tratado *De Caelo* (295b 32); posteriormente, o paradoxo foi atribuído ao filósofo Jean Buridan (1300-1358), a fim de caricaturar o seu determinismo moral: o cão, ao qual Aristóteles punha o problema de optar entre duas apetitosas refeições, é substituído por um asno que, desfalecendo de fome e de sede, deve optar entre um monte de feno e um balde de água. (N. T.)

[19] A segunda antinomia de Kant consiste na afirmação e na negação de que o mundo é composto por elementos ou substancias simples; tal vai além de simples enunciados sobre o espaço e o tempo, excepto se tivermos uma concepção muito sofisticada deles, como parece ter sido o caso de Riemann.

afirmação e a negação de um ser necessário, Riemann contrapõe a ideia de um Deus que opera no tempo governando o mundo (como a sua alma), à de um Deus intemporal, pessoal, omnisciente, omnipotente, sumamente bom (Providência).

A última antinomia de Riemann não tem correlato em Kant. Nela se considera representável ou "finita" a ideia de imortalidade, cuja antítese é o conceito de alma, entendida como "uma coisa em si inteligível que é a base da nossa aparência temporal, dotada de liberdade transcendental, maldade radical e carácter inteligível". Esta concepção não é tão paradoxal como parece à primeira vista a quem foi educado numa cultura marcada pelo cristianismo. É de destacar que, nos escritos sobre psicologia, Riemann fala constantemente de almas, mas esclarece também que a dinâmica das representações torna desnecessário o pressuposto de uma alma como substância ou coisa em si.

II. Riemann Matemático: Topologia e Geometria

Et his principiis via sternitur ad majora.
[E com estes princípios abre-se caminho para coisas mais elevadas.][20]

É bem sabido que a geometria de Riemann se inscreve num dos capítulos mais famosos da história da matemática, o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, e que constituiu um preparativo essencial para a teoria relativista da gravitação. Pode dizer-se, usando uma expressão famosa, que aqui nos encontramos com três gigantes, uns aos ombros dos outros: Riemann às costas de Gauss, Einstein às costas de Riemann. A propósito deste fio de ideias, Einstein escrevia precisamente em 1922:

> Os conhecimentos matemáticos que possibilitaram o estabelecimento da teoria da relatividade geral, temos de os agradecer às investigações geométricas de Gauss e de Riemann. O primeiro investigou, na sua teoria das superfícies, as propriedades métricas de uma superfície imersa num espaço euclidiano tridimensional, e mostrou que estas podem ser descritas mediante conceitos que só guardam relação com a própria superfície, e não com a imersão [no espaço]… Riemann estendeu a linha de pensamento gaussiana aos contínuos de qualquer número de dimensões, e previu o significado físico desta generalização da geometria de Euclides com visão profética… as leis naturais só adoptam a sua forma lógica mais satisfatória quando são expressas como leis do contínuo quadrimensional espácio-temporal.

[20] Frase de Newton, no final de um trabalho seu sobre a quadratura de curvas (integração), que Riemann empregou como título de um trabalho onde desenvolvia e aplicava aspectos analíticos da sua geometria diferencial: "Commentatio mathematica", *Werke,* 391.

Assim, não parece estranho que a lição de Riemann sobre geometria, um texto de apenas quinze páginas, tenha adquirido uma aura lendária.

O leitor do famoso texto deve ser advertido, e tal é logo indicado ao início da introdução. Para evitar o emprego de formalismo matemático, a sua exposição parecerá inevitavelmente vaga e difusa aos leitores de formação matemática. Isto é agravado pelo facto de que Riemann não tornou – nem estava em condições de o fazer – explícitos todos os pressupostos dos seus conceitos, especialmente da sua ideia de variedade (que, no espaço de duas páginas, passa de uma referência a conjuntos em geral, a designar variedades diferenciáveis). Riemann faz livre uso de uma linguagem de estilo filosófico, que pode ser difícil para o leitor contemporâneo, ainda que seja muito precisa; é importante associar a cada termo o significado que Riemann define, e não um qualquer sentido comum na linguagem quotidiana. Dificuldades especiais colocam os termos "determinação", "variedade" e "grandeza". Além disso, o efeito de estranheza vê-se aumentado pelas importantes mudanças que se deram na configuração da matemática desde então. Vale a pena, apesar de todos estes obstáculos, levar a cabo a leitura? Leitores como Dedekind e Weyl indicaram a lição como uma autêntica obra-prima no que diz respeito à exposição, e eu creio também que a resposta é, indiscutivelmente, sim. Mas o leitor deverá saber que ser-lhe-á útil ter alguma ajuda.

A geometria não-euclidiana antes de Riemann

Pode dizer-se que durante o século XIX a geometria perdeu a sua posição de paradigma matemático em favor da análise, elaborada sobre uma base aritmética rigorosa. E, não obstante, disse-se que esse século foi a "idade heróica da geometria", graças à enorme variedade de novidades e desenvolvimentos introduzidos. Aprofundou-se a compreensão das propriedades geométricas, com a qual se transitou da clássica geometria métrica para as geometrias afim e projectiva; iniciou-se o desenvolvimento da topologia, que daria lugar a um dos ramos mais específicos da matemática do séc. XX; desenvolveram-se enormemente a geometria algébrica e a geometria diferencial, etc. O estudo da *geometria projectiva* foi o principal tema de trabalho desde princípios do século, servindo como grande campo de inovação e experimentação; entre muitas outras coisas, conduziu aos primeiros esforços "modernos" de fundamentação axiomática rigorosa, e a uma reorganização do conhecimento geométrico, da perspectiva dos grupos de transformações (o célebre "programa de Erlangen" de Klein). Não obstante, a contribuição mais famosa do século são as *geometrias não-euclidianas*, o que sem dúvida se deve ao alcance que

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

esta inovação teve para a compreensão da natureza da matemática. A este nível filosófico e metodológico, as geometrias não-euclidianas desempenharam um papel capital e revolucionário.

O trabalho de Riemann inscreve-se neste campo e chega, pois, associado aos nomes de Lobatchevski e Bolyai, ainda que se tenha que dizer que foi incomparavelmente mais profundo que os trabalhos destes. A motivação de Lobatchevski e Bolyai foi o velho problema das paralelas, tema predilecto dos apaixonados da matemática, desde a antiguidade. Já que o axioma das paralelas de Euclides é muito mais complexo, e inclusivamente diferente em carácter, dos seus restantes axiomas, não seria possível deduzi-lo de postulados simples? Ao longo de 2.000 anos de tentativas infrutíferas, chegou-se a suspeitar que a resposta não só era negativa, como inclusivamente que era logicamente possível desenvolver geometrias baseadas em axiomas contrários. Os primeiros a estabelecer rigorosamente uma geometria baseada num axioma não-euclidiano (por um ponto exterior a uma recta *r* passa *mais de uma* recta paralela a *r*) foram Lobatchevski e Bolyai, que publicaram por volta de 1830. O logro era impressionante do ponto de vista conceptual, lógico e filosófico, mas em termos matemáticos aproximava-se muito do modelo euclidiano[21].

Lobatchevski e Bolyai estabeleceram equações para a geometria não-euclidiana tridimensional que os levaram a pensar que não havia nisso qualquer contradição. Nestas fórmulas figurava uma constante K da qual dependia o comportamento das figuras geométricas, mas no momento carente de interpretação; K podia variar continuamente, e a geometria euclidiana aparecia como um caso degenerado da geometria de Lobatchevski-Bolyai ($K = 0$). Estes autores acreditaram pois que tinham encontrado a forma mais geral de tratar a geometria, e o segundo chamava-a “ciência absoluta do espaço”. Mas há que dizer que com Riemann se alcançou um ponto de vista muito superior, em relação com o problema do espaço; as geometrias de Lobatchevski-Bolyai configuravam-se, por sua vez, como casos muito especiais e particulares.

De qualquer modo, bastaram as contribuições destes predecessores para que tivesse lugar uma mudança revolucionária na concepção do espaço. Até aquele momento, pensava-se que havia plena identidade entre o espaço real e o espaço euclidiano. Acreditava-se que a geometria de Euclides era a única possibilidade conceptual para a mente humana e, mais ainda, que esse espaço conceptualmente necessário e evidente era idêntico ao espaço real. (Não é de estranhar que o

[21] Também Gauss, na sua obra inédita, tinha desenvolvido a geometria hiperbólica. A principal novidade, chave para tornar possível um desenvolvimento completo, foi a introdução do tratamento analítico baseado nas funções trigonométricas hiperbólicas. O leitor pode consultar, entre outras obras, a de J. Gray, *Ideias do espaço* (Madrid, Mondadori, 1992).

apriorismo e o racionalismo tenham sempre procurado no matemática o seu refúgio mais seguro.) Ora, ao constatar-se a possibilidade lógica de toda uma gama de geometrias de Lobatchevski-Bolyai, expunha-se a possibilidade lógica de que o espaço real, físico, fosse não-euclidiano. Gauss, Lobatchevski, Bolyai e Riemann aceitaram plenamente esta possibilidade; reflectindo sobre o assunto, Gauss escrevia ao seu amigo, o astrónomo Bessel, em 1830:

> De acordo com a minha mais íntima convicção, a posição da teoria do espaço no que respeita ao nosso conhecimento a priori é muito distinta da da pura teoria das grandezas: o nosso conhecimento dela distancia-se completamente dessa convicção total da sua necessidade (ou seja, também da sua verdade absoluta) que é própria da última; devemos admitir com humildade que, se o número é puramente um produto do nosso espírito, o espaço também tem uma realidade fora do nosso espírito, e que não podemos prescrever as suas leis completamente *a priori*.[22]

Para tomar outro exemplo, Lobatchevski anunciou em 1826, quando já estava em posse das suas novas ideias geométricas, uma "prova rigorosa do teorema das paralelas"; não se tratava de uma prova matemática, mas sim empírica: tinha medido os ângulos da paralaxe de Sírio e de outras duas estrelas, constatando que a sua soma era muito próxima de 180º[23]. Esta mudança de perspectiva marcou uma transformação de grande alcance na compreensão da matemática: os objectos matemáticos não estão restringidos ao real, mas sim, por assim dizer, superam-no na direcção do possível.

De qualquer modo, as ideias expostas por Lobatchevski e Bolyai entre 1830 e 1840 foram apenas objecto de atenção; nem no caso de Riemann temos sequer qualquer indício de que as conhecesse. Só nos anos de 1860, por ocasião da publicação da correspondência de Gauss, começou uma discussão aberta em torno das geometrias não-euclidianas. Entretanto, Riemann tinha dado a sua conferência em 1854, e logrou obter a aprovação entusiástica de Gauss, mas nunca publicou a obra, seguramente porque esperava um dia escrever um tratado rigoroso e detalhado. Com a sua morte, Dedekind editou-a nas memórias da Academia das Ciências de Göttingen (1868); uma jovem testemunha do momento relatava, anos mais tarde:

> Esta conferência provocou uma tremenda impressão ao ser publicada… Pois Riemann não só tinha levado a cabo profundíssimas investigações matemáticas…

[22] Gauss, *Werke*, vol. 8, 201. A própria teoria dos números reais acabaria por perder também a aura de necessidade e de verdade absoluta que então Gauss lhe conferia.

[23] A soma dos ângulos de um triângulo, na geometria Lobatchevski-Bolyai, é menor que 180º, e será tanto mais pequena quanto maior for a área do triângulo (daí a conveniência de trabalhar com triângulos astronómicos).

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

> bem como, constantemente, a questão da natureza interna da nossa ideia de espaço, e tinha abordado o tema da aplicabilidade das suas ideias à explicação natural.[24]

O tratamento de Riemann acarretava uma abordagem totalmente nova à questão, baseada na geometria diferencial. Procurarei aqui oferecer uma introdução elementar ao tema, deixando ao próprio Riemann a tarefa de dar explicações detalhadas; mas, antes de mais nada, temos de falar de uma importante contribuição de Gauss.

A geometria diferencial das superfícies de Gauss

Nas geometrias de Lobatchevski-Bolyai surge toda uma série de resultados pouco familiares: os ângulos de um triângulo somam menos que dois rectos; não há triângulos semelhantes de área diferente; existe uma medida absoluta de comprimento (a altura máxima de um triângulo rectângulo isósceles); e inclusivamente existem rectas assimptóticas, isto é, rectas que se aproximam cada vez mais, porém sem que nunca se cortem. Inicialmente, tudo isto fazia pensar que tais geometrias deviam encerrar alguma contradição; e o último resultado paradoxal que mencionei fazia pensar que o que faltava, para poder demonstrar fidedignamente a "verdade" da geometria euclidiana, era uma boa definição de *recta*. Parecia claro que alguma coisa está mal se temos rectas assimptóticas e os demais paradoxos podem ser relacionados com esta situação anómala. Pois bem, o que é, de facto, uma recta? A pergunta era mais complicada do que podia parecer à primeira vista, e quanto mais vasta e cuidadosa foi a reflexão sobre este tema, mais obscura se tornava a suposta necessidade da geometria euclidiana. Herón de Alexandria tinha dito que uma linha recta é uma linha estendida ao máximo; mais precisamente, uma recta distingue-se das curvas que lhe são próximas por possuir um comprimento mínimo. Porém, isto está contudo muito longe de nos levar de volta a Euclides.

Em 1828, foi publicado um famoso trabalho de Gauss que deu origem à geometria diferencial moderna, mas que também pode ser colocado em relação com o problema da natureza das rectas. O seu título era "Disquisitiones generales circa superficies curvas", e nele abria-se caminho ao estudo da geometria das superfícies de um ponto de vista *intrínseco*; para isso, Gauss definia o conceito de *medida de curvatura* da superfície em cada ponto. O objectivo dessa memória era introduzir um "novo ponto de vista" a respeito das superfícies curvas:

---

[24] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin, Springer, 1926), 173.

> Se não se consideram as superfícies como contornos de corpos, mas como corpos dos quais uma das dimensões é infinitamente pequena, e também se se consideram flexíveis, mas não extensíveis,

então somos levados a considerar as propriedades "absolutas" que contudo se conservam ao deformar as superfícies sem as rasgar, esticar, ou dobrar.[25] Entre elas está precisamente a medida da curvatura em cada ponto, mas também as considerações relativas a figuras construídas sobre a superfície (ângulos que formam, a sua área, etc.), assim como as considerações relativas às linhas mínimas ou geodésicas sobre a superfície. É notável como o trabalho de Gauss explicitamente aborda as propriedades "infinitesimais" das superfícies; não é fácil traduzir os seus desenvolvimentos numa linguagem livre dessa ideia.

Suponhamos uma qualquer superfície no espaço; a nível local, em redor de um ponto P, as superfícies só podem (salvo em casos anómalos) ter a forma de um barrete, ou de uma sela de montar; além disso, por P passam duas curvas distintas da superfície, que definem as *curvaturas principais*: são as curvas que têm maior ou menor curvatura entre todas as que passam por P. Gauss definiu rigorosamente a curvatura K da superfície em P (de um modo que não precisarei aqui), obtendo como resultado que K é igual ao produto das curvaturas principais k^1 e k^2 em P. Convencionou-se que a curvatura é positiva se a superfície tem forma de barrete, e negativa no caso da sela de montar; um plano euclidiano (e as superfícies que podem deformar-se até coincidir com um plano, por exemplo, uma superfície cilíndrica) tem curvatura zero em todos os seus pontos. A curvatura gaussiana K permite dar um sentido à constante arbitrária em que repousavam os trabalhos de Lobatchevski e Bolyai, pelo menos no caso bidimensional (o próprio Riemann obterá a medida de curvatura para 3 ou n dimensões). A geometria plana de Lobatchevski-Bolyai é caracterizada por uma medida de curvatura constante em todos os pontos, que pode ser negativa, ou até 0, em cujo caso o plano é euclidiano.

O mais importante, não obstante, é que Gauss demonstrava rigorosamente que o conceito de curvatura é *intrínseco*: apenas depende das características internas da superfície, e não da posição desta relativamente ao espaço envolvente. O resultado pareceu a Gauss tão importante que o denominou "teorema egregium"[26]. Para clarificar o que significa, suponhamos que curvamos e deformamos a superfície à vontade, mas sempre sem alterar os comprimentos das curvas que contém; tais transformações *isométricas* respeitam as distâncias intrínsecas entre os seus pontos (distâncias médias ao longo de curvas na superfícies). Ora bem, o teorema egregium

[25] Gauss, "Disquisitiones generales circa superficies curvas" [1828], *Werke*, vol. 4, §13.

[26] Gauss, *op. cit.* [1828], §12 ["Teorema egregium" significa literalmente "teorema notável". N.T.].

diz que a curvatura gaussiana K é invariante sob transformações isométricas. É fácil ver – comprove-o o leitor com uma folha de papel – que uma superfície plana finita se pode transformar, desse modo, num cilindro, ou também num cone sem a sua cúspide. O resultado de Gauss implica, pois, que a geometria intrínseca do plano é a mesma que a geometria intrínseca num cilindro ou num cone[27]. As rectas do plano transformam-se, sob a transformação isométrica, nas chamadas *geodésicas* das outras superfícies. Denomina-se geodésica a curva que determina a distância mais curta entre dois pontos *sobre* uma dada superfície (e não no espaço tridimensional envolvente).

Se aplicarmos estes resultados ao problema da natureza das rectas, encontramo-nos de face com uma grande dificuldade. Nenhuma condição que possamos exprimir em termos da geometria do plano nos permitirá caracterizar a linha recta, porque essa mesma condição (intrínseca) aplica-se às geodésicas das superfícies que são suas imagens sob deformação isométrica. Extrapolando para o caso das três dimensões, como podemos saber se o que chamamos "rectas" no nosso espaço não são na verdade geodésicas de um certo tipo? Do mesmo modo, como podemos saber que os nossos "planos" não são superfícies curvas? Tudo indica que Gauss estava muito consciente destes problemas; numa carta desse período escreve que o tema da sua memória

> conduz a um plano impredizível. Esta investigação está profundamente inter-relacionada com muito mais, eu diria com a metafísica do espaço, e acho difícil livrar-me das consequências disso.[28]

Com a morte de Gauss, o seu colega, o professor Sartorius von Waltershausen dava testemunho de conversas em que Gauss tinha dito que a tridimensionalidade podia ser uma limitação das nossas mentes, e onde comparava os homens com planilandeses[γ]:

> Podemos imaginar, disse ele, uma espécie de seres que apenas têm consciências de duas dimensões; talvez os que estão sobre nós nos contemplem de forma semelhante, e [Gauss] tinha deixado de lado certo número de problemas, continuou

[27] Riemann faz referência aos resultados de Gauss que vimos até agora no parágrafo II, 3ª secção da sua lição.

[28] Gauss, *Werke*, vol. 12, 8. Gauss também via relações com a "metafísica dos números imaginários", já que estes se ligam inevitavelmente com as variedades bidimensionais.

[γ] Referência aos habitantes da "Planilândia", figuras geométricas bidimensionais que protagonizam o Romance de Edwin Abbott, *Flatland*, publicado em 1884.

> a dizer na brincadeira, que pensou que poderia tratar geometricamente mais tarde, em circunstâncias mais favoráveis.[29]

Diversas afirmações de Gauss sugerem que via uma relação clara entre o artigo sobre superfícies curvas e a geometria não-euclidiana, e que o seu estudo lhe confirmava a ideia de que o espaço real bem poderia ser não-euclidiano. Há que ressalvar que na dita memória enfatizava resultados sobre a soma angular em triângulos formados por geodésicos que estão ligados a resultados típicos das geometrias não-euclidianas. Pelo final do trabalho expunha o seguinte resultado que, para simplificar, darei para superfícies de curvatura K constante. Suponhamos que é dado um triângulo cujos lados são geodésicos na superfície, cujos ângulos sejam α, β, γ, e cuja área ou conteúdo da superfície seja σ; então, a diferença entre a soma dos seus ângulos com π (dois rectos) será

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=K\,\sigma.$$[30]

Voltamos exactamente a encontrar o resultado um tanto paradoxal que tinham obtido Lobatchevski e Bolyai (e o próprio Gauss) nas suas geometrias: a soma angular de um triângulo nelas distancia-se da soma euclidiana em proporção com a sua área (e com a constante K). É importante também saber que, no mesmo período, Gauss estudou com detalhe a pseudo-esfera, superfície de curvatura constante negativa, gerada por rotação de uma tractriz sobre o seu eixo. A pseudo-esfera oferece um modelo natural (ainda que parcial) da geometria de Lobatchevski-Bolyai para o caso das duas dimensões, e como tal seria estudada mais tarde por Beltrami.

Para colocar a questão de outra forma, o anteriormente dito sugere uma assimetria fundamental entre os elementos geométricos de duas e três dimensões que costumamos considerar. Porquanto Euclides aceitasse que as superfícies possam adoptar múltiplas configurações e estar curvadas de múltiplas maneiras, ele e os seus seguidores postulam um espaço muito especial e característico. Riemann notou todas estas implicações no trabalho de Gauss, e usou-o como base para elaborar uma noção de espaço que tem o grau de generalidade justo e necessário para completamente eliminar essa discrepância. O conceito requerido é o das que hoje chamamos *variedades riemannianas*. Justifica-se mencionar neste ponto que, para o final da sua vida, Gauss parecia ter estado obcecado com o tema dos espaços n-dimensionais, para os quais empregava o termo de "variedades"[31].

---

[29] Citado por Bottazzini, "Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann", in Poggi e Bossi, eds., *Romanticism in science* (Dordrecht, Kluwer, 1994), 20.

[30] Gauss, *op. cit.* [1828], §27. Também resultava que o excesso da soma angular de um triângulo formado por geodésicas sobre dois rectos é igual à curvatura total do triângulo (§20).

[31] Num curso de 1850/51 falava delas, estendendo-lhes a métrica euclidiana a nível global; isto sugere, de passagem, que talvez não tenha ido tão longe quanto Riemann nas suas especulações (Bottazzini in *op. cit.* [1994]).

As "Hipóteses" de Riemann

O que Riemann primeiro nos diz na sua famosa lição é que, para analisar em profundidade a inter-relação entre os princípios básicos da geometria, é preciso desenvolver um conceito geral que abranja a ideia de espaço. Noutros termos, se queremos melhor compreender as pressuposições que esconde a habitual ideia de espaço euclidiano, é preciso olhá-la de um ponto de vista mais abstracto. O ponto de partida é de inspiração herbartiana, adornada com as tendências características do próprio Riemann. O autor localiza o conceito requerido, muito acertadamente, na ideia de *variedade n-dimensional*, um conceito essencialmente topológico: o espaço euclidiano resultará como uma variedade tridimensional à qual se impôs uma métrica muito particular. Como veremos, as variedades *riemannianas* são variedades *n*-dimensionais dotadas de uma métrica euclidiana *a nível local*. Mas Riemann destaca, empregando geometria diferencial inspirada em Gauss, que uma mesma variedade riemanniana pode dar lugar a muito diversas métricas *globais*. Tudo isto servirá, no final de contas, não só para compreender melhor as ideias básicas da geometria, como também para tornar possíveis novas concepções geométricas na exploração física do universo, o que para Riemann era muito mais importante.

Atrevo-me a afirmar que, se tivesse escrito o texto em 1900, o título *Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta* teria a palavra "axioma" em lugar "hipóteses"; porém, em 1850, entendia-se por axioma não uma proposição básica de um sistema matemático, mas uma verdade certa e evidente. Na opinião de Riemann, os chamados "axiomas" da geometria euclidiana não têm esse carácter de certeza e evidência[32]: "como todos os factos, não são necessários, mas apenas de certeza empírica, eles são hipóteses". Ainda que, isso sim, dentro dos limites de erro das nossas observações, os princípios da geometria euclidiana tenham um grau de probabilidade muito alto. Porém, de qualquer modo, estes princípios podem ser analisados sob a forma de uma série de hipóteses cada vez mais restritivas, que nos levam das noções geométricas mais gerais até à concretização do espaço euclidiano. Esta ideia é a que guia a brilhante exposição de Riemann.

Formularemos as hipóteses de Riemann para o caso das 3 dimensões, antes de passar a explicá-las nos termos mais simples que nos forem possíveis. Trata-se de uma sequência de hipóteses cada vez mais restritivas; as principais são:

1. O espaço é uma variedade contínua a 3 dimensões (e, concretamente, uma variedade diferenciável);

[32] Assim como não o têm os "axiomas" de Newton.

2. As linhas dentro dessa variedade tridimensional são mensuráveis e comparáveis, isto é, cada segmento possui um comprimento que não depende da posição (não é afectada por um movimento na variedade);
3. O comprimento de um elemento, ou "porção infinitesimal" da linha pode exprimir-se por meio de uma forma diferencial quadrática definida positiva; isto determina a métrica na variedade e permite definir um conceito de *medida de curvatura* que generaliza a noção de Gauss;
4. Os sólidos podem mover-se livremente no espaço sem sofrer deformações métricas ou, como diz Riemann "distensões"; tal determina que a variedade tenha curvatura constante (que é igual a 0 no caso euclidiano).

Passemos pois a uma explicação sucinta, começando pelo que são a topologia e as variedades a *n* dimensões.

Topologia e variedades

A topologia é um ramo muito moderno e abstracto da matemática, que tem em Riemann um dos seus pais e fundadores[33]. A geometria de Euclides é métrica, trabalha sobre uma noção de distância entre pontos, definida pela fórmula que corresponde ao teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,,$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas cartesianas dos pontos do plano cuja distância estabelecemos. Outros tipos de geometria não prestam atenção às distâncias, como acontece com a projectiva que, não obstante, conserva noções como as de recta, cónica, colineação (dois pontos encontrarem-se na mesma linha). Generalizando ainda mais, pode prescindir-se das características tanto métricas como projectivas das figuras, para ficar apenas com as propriedades geométricas sumamente básicas. Isto acontece na topologia, onde se preserva a noção de contiguidade ou adjacência dos pontos, ou, dito de outro modo, a noção de *vizinhança* de um ponto, onde porém as figuras podem deformar-se à vontade, sempre – dito de maneira informal – que não se rasguem e que não juntemos dois pontos que estavam separados. As propriedades topológicas são invariantes sob aplicações contínuas cuja inversa também é contínua (aplicações bicontínuas). Entre estas propriedades está o número de buracos que a figura tem, e de aí a brincadeira habitual segundo a qual o topólogo pode chegar a

[33] Sobre este tema é recomendável a exposição de Guy Hirsch, "Topologie", in J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900* (Paris, Hermann, 1986).

confundir uma chávena de café com um donut (em terminologia matemática, um toro).

Riemann foi um dos primeiros a conceber a topologia como um ramo autónomo da matemática, de carácter fundamental. A mesma ideia tinha sido sugerida em alguns escritos de Gauss, e foi desenvolvida em certa extensão por outro dos seus alunos, Listing, professor de física em Göttingen e co-director do Seminário Físico-Matemático a que Riemann pertenceu. Num trabalho de 1849 sobre o teorema fundamental da álgebra dizia Gauss:

> Exporei a demonstração numa roupagem tomada da geometria de posição, pois aquela alcança deste modo a máxima intuitividade e simplicidade. Mas, em rigor, o autêntico conteúdo de toda a argumentação pertence a um domínio superior da teoria abstracta de grandezas, independente do domínio espacial, cujo objecto são as combinações entre grandezas ligadas segundo a continuidade – um domínio que até ao momento tem sido pouco cultivado, e nele não podemos sequer mover-nos sem uma linguagem tomada das figuras geométricas.[34]

Este é o texto que aponta mais claramente para a necessidade de um novo ramo da “teoria abstracta das grandezas”, que deve ocupar-se de questões topológicas. Riemann empregou “definições” da topologia que recordam bastante a de Gauss na secção II.1 da sua lição e na secção II da “Teoria das funções abelianas”. Aí diz que esta disciplina considera relações entre pontos e entre regiões de uma variedade, sem pressupor que possam introduzir-se considerações métricas. Neste último ponto, a total independência de considerações métricas, é o que fica mais claro nas deveras obscuras definições de Riemann.

Quanto a Listing, foi precisamente ele quem cunhou o termo “topologia” numa carta de 1836 e num trabalho de 1847 (*Vorstudien zur Topologie*, Göttingen). Riemann, por sua vez, falava de *analysis situs*, termo que etimologicamente quer dizer o mesmo, e que tinha um precedente ilustre em Leibniz (ainda que empregue noutro sentido; os matemáticos europeus, incluindo outra figura-chave como foi Poincaré, continuaram a falar de “analysis situs” até ao primeiro terço do séc. XX). As contribuições mais importantes de Listing estão relacionadas com a demonstração rigorosa do teorema de Euler sobre os poliedros e sua generalização. Ainda que a sua obra não tenha tido grande influência em Riemann, não há dúvida de que deve ter estimulado o seu trabalho neste campo. O nosso autor introduziu novidades essenciais em topologia combinatória, relacionadas com as propriedades topológicas de superfícies e variedades, e demonstrou muito claramente o préstimo que esta disciplina podia ter para a análise e para a própria geometria diferencial.

[34] Gauss, *Werke*, vol. 3, 79.

Riemann diz-nos, numa nota à sua lição, que a secção I desta estabelece os pré-requisitos para as contribuições para a topologia. Efectivamente, na sua primeira secção expõe considerações muito amplas, esboçando inclusivamente um programa do estudo geral da "analysis situs", que parece ter estimulado também os estudiosos de topologia de conjuntos[35]. De qualquer modo, na lição limitou-se a esboçar as ideias imprescindíveis para as considerações geométricas que queria desenvolver: variedade, dimensão e parametrização.

O conceito de *variedade* é, segundo Riemann, o ponto de partida adequado para a topologia e em geral para todos os ramos da teoria das grandezas. O nosso autor parece ter chegado a este novo conceito reflectindo sobre as "superfícies de Riemann", novos objectos geométricos que tinha introduzido na teoria das funções. Estas superfícies colocaram o problema de não poderem ocorrer no espaço tridimensional, mas apenas em espaços com um maior número de dimensões. (Neste aspecto é notável que, segundo o seu mestre Schmalfuss, as "abstracções" de Riemann "sobre as dimensões espaciais" remontem ao seu primeiro ano como estudante universitário, 1846-47.) Por outro lado, havia que justificar a legitimidade da sua introdução, particularmente no contexto da análise, então submetida a exigências bastante rígidas no tocante ao rigor. Surgiam pois problemas fundacionais, que Riemann considera num fragmento sobre variedades e geometria. Lendo esse texto, é bastante plausível que a tentativa de Riemann para fundamentar as suas novas ideias sobre superfícies tenha sido o que o levou ao conceito de variedade[36]. Se assim é, o matemático havia prefigurado, também aqui o desenvolvimento contemporâneo da questão.

Inicialmente, Riemann considerava só variedades contínuas, as quais, de facto, são o contexto natural para a topologia e para as aplicações que dela fazia o nosso autor. Num fragmento de 1852 ou 1853, escrevia:

> Se entre um conjunto [Menge] de determinações distintas de um objecto [Gegenstand] variável é possível uma transição contínua de cada uma para qualquer outra, então a totalidade daquelas constitui uma variedade extensa contínua; cada uma delas chama-se um ponto da variedade.[37]

---

[35] Veja-se o meu livro *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993) ou o artigo "Traditional Logic and the Early History of Sets", *Archive for History of Exact Sciences*, 50 (1996).

[36] Há que dizer que Gauss tinha justificado a introdução dos números complexos através da existência de "variedades a duas dimensões" (§6.2; *Werke*, vol. 2, 176), e tal deu a Riemann uma pista. A relação é semelhante à que existe entre o plano complexo de Gauss e as superfícies de Riemann.

[37] Editado in Scholz, "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", *Archive for History of Exact Sciences*, 27 (1982), 222. A datação é também de Scholz. Uma definição similar, escrita ao que parece algo depois, encontra-se no princípio do fragmento sobre variedades e geometria.

Aqui encontramos já a característica linguagem de "determinações" [Bestimmungsweisen], porém não como referente a um "conceito geral", como na lição, mas sim em ligação com um "objecto variável", por exemplo um corpo que pode ser aquecido ou arrefecido. O ponto de vista mais geral, e no parecer de Riemann o mais preciso, exprimido em termos de conceitos, é uma novidade da lição inaugural, como também são as referências ocasionais a variedades discretas. Em qualquer caso, as considerações geométricas de Riemann referem-se a variedades contínuas, que além disso se supõem (tacitamente) diferenciáveis. A este respeito, o leitor pode ler os esclarecimentos de Weyl nas suas Erläuterungen, na edição do texto de Riemann.

O nosso matemático lembrou também que o conceito de *dimensão* de um espaço – ou, em geral, de uma variedade – é, na essência, uma noção topológica, desenvolvendo as suas ideias a esse respeito nas secções I.2 e I.3. Para esclarecer a noção de dimensão, recorre à imagem de uma *geração* sucessiva; no essencial, a ideia é que o movimento de um ponto engendra uma variedade unidimensional, o movimento desta uma variedade bidimensional, o movimento de um espaço tridimensional engendra uma variedade a 4 dimensões, e assim sucessivamente. Este tipo de análise da dimensionalidade em termos de um processo de geração "mecânico" tem precedentes muito antigos, para o caso de uma figura ou um corpo (Aristóteles, Próclo, Oresme). A novidade essencial em Riemann é que se superam as barreiras tradicionalmente impostas, segundo as quais é impossível ir além da terceira dimensão. Esta posição tradicional encontra-se ainda em Herbart, e o leitor deve ter em conta o atrevimento que revestia, em 1854, introduzir directamente n dimensões, sem prevenir nem vacilar.

Mas a ideia-chave nesta parte da lição é que é possível determinar a posição de um ponto numa variedade n-dimensional introduzindo coordenadas ou, como se diz em terminologia matemática, mediante uma parametrização. (Riemann não esclarece os pormenores do tema, em particular a questão de se a parametrização é para toda a variedade, ou se só vale a nível local; à luz do seu restante trabalho, só resta entendê-la como uma parametrização *local*.) O autor afirma, sem o demonstrar, que para estabelecer a posição de um ponto na variedade n-dimensional requerem-se, precisamente, n parâmetros ou coordenadas. Isto constitui a chave do seu conceito de dimensão, mas contribuições posteriores mostrariam que esta ideia, intuitivamente correcta, necessitava de precisões bastante sofisticadas.

Cantor demonstrou (1878) que os pontos de uma variedade n-dimensional podem determinar-se mediante uma só coordenada, se bem que a aplicação que estabeleceu era descontínua. Mais tarde, Peano (1890) deu um famoso exemplo de curva que enche uma área plana, ou seja, uma função *contínua* de um segmento num quadrado. Tudo isto, além de exigir clarificações a propósito da ideia de curva, conduziu a conjecturar que a definição de dimensão dada por Riemann pressupõe aplicações bicontínuas. Nestes termos, o que Riemann estabelece é que, se há uma aplicação biunívoca e bicontínua entre uma variedade dada e o espaço euclidiano n-dimensional $|^n$, então a variedade também tem n dimensões. Este é o teorema de invariância da dimensão, demonstrado por Brouwer em 1911.

Ainda que Riemann dispusesse de todo um conjunto de resultados sobre topologia de superfícies e de variedades *n*-dimensionais[38], nada disse sobre eles na lição. É natural, pois o anterior era suficiente para os propósitos limitados de uma investigação sobre a noção de espaço. A parametrização da variedade mediante coordenadas abre caminho à introdução das noções analíticas que permitiram o desenvolvimento da geometria diferencial. Do que se trata agora é de dotar a variedade de uma *métrica*: a variedade *n*-dimensional só tem características topológicas, pode dizer-se que é "informe"; a métrica permitirá passar a formas geométricas e a conceitos como os de distância e ângulo. A grande descoberta de Riemann foi que uma mesma base topológica admite múltiplas métricas distintas.

Conceitos básicos da geometria diferencial de Riemann

Para dar o novo passo de introduzir uma métrica, Riemann estabelece uma hipótese que parecer ser natural, porém, ao mesmo tempo, interessantemente débil: supõe que os segmentos podem deslocar-se pela variedade sem que o seu comprimento se veja afectado. Exigir isto é muito menos que exigir a livre mobilidade de corpos sólidos rígidos; enquanto o último pressuposto conduz necessariamente a variedades de curvatura constante, o primeiro dá lugar a variedades de curvatura variável.

Suponhamos que se trata de uma variedade tridimensional na qual introduzimos coordenadas locais x_1, x_2, x_3. Uma curva será determinada por um conjunto de pontos cujas coordenadas são dadas em função de um parâmetro t, na forma: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. A primeira questão, de carácter métrico, é como se pode determinar o comprimento da curva? Riemann expõe o tema na linguagem dos infinitesimais, pelo que o problema se traduz por encontrar uma expressão para o elemento linear ds, um segmento infinitesimal da curva. Ainda que Riemann esteja perfeitamente consciente de que há múltiplas respostas possíveis, vai reduzir as suas

[38] "Fragment aus der Analysis Situs", *Werke*, 479–82. Segundo Scholz, que conseguiu datar o original, este texto sobre topologia *n*-dimensional é de 1852/53, e portanto *anterior* à lição sobre geometria.

considerações ao caso mais simples. Se o elemento linear ds parte do ponto P, suponhamos que é possível introduzir coordenadas locais em P de tal modo que

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

onde dx_1, dx_2, dx_3 são as diferenças infinitesimais entre as coordenadas dos extremos P e Q do elemento linear. Chamaram-se, às variedades com esta característica, *riemannianas*; se compararmos a expressão anterior com a que mais acima demos para a distância euclidiana, veremos que é preciso dizer que as variedades riemannianas se comportam como as euclidianas a nível local. Não obstante, a nível global abre-se uma ampla gama de possibilidades.

A anterior expressão para ds só é válida na vizinhança do ponto P; para que ela seja aplicável noutro ponto R seria preciso introduzir novas coordenadas locais em R. Como tal, o problema seguinte é o de encontrar uma expressão geral para o elemento linear; na lição, Riemann só dá indicações gerais (ainda que precisas) a esse respeito, mas noutro trabalho de 1861 introduziu-a explicitamente[39]. Para que a variedade seja riemanniana deve satisfazer em todos os pontos

$$ds = \sqrt{\textstyle\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx_i\, dx_k} \text{ , ou seja, } ds^2 = \textstyle\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx_i\, dx_k,$$

onde os g_{ik} variam continuamente com a posição dentro da variedade, isto é, são funções contínuas das coordenadas x_1, x_2, …, x_n. À expressão da direita na segunda equação chama-se a *forma quadrática fundamental*, e diz-se que é uma forma quadrática definida positiva (já que $ds^2 > 0$ sempre, excepto se todos os dx_i forem zero). Assim, alcançámos o primeiro conceito fundamental introduzido por Riemann na secção II.1 da sua lição.

Dada a expressão geral para ds, torna-se fácil precisar o significado dos conceitos de comprimento de uma curva, ângulo entre duas curvas, área e volume, etc.; todas estas noções métricas dependem das funções g_{ik}. Por exemplo, a longitude l de uma curva será dada por uma integral definida ao longo da curva, $l = \int ds$. Também é possível encontrar agora os geodésicos, ou curvas de comprimento mínimo entre dois pontos, para uma variedade dada: trata-se de um problema de cálculo de variações, o qual conduz a uma equação diferencial que as geodésicas devem respeitar. Demonstra-se, por exemplo que, num pequeno domínio, cada dois pontos da variedade estão unidos por uma geodésica.

Vejamos um exemplo de forma quadrática fundamental. Depois da formulação da teoria de relatividade especial por Einstein (1905), o grande matemático Hermann Minkowski, que também trabalhava em Göttingen, indicou que estas ideias podiam

[39] Veja-se “Commentatio mathematica”, *Werke*, 401–04.

exprimir-se mediante a geometria diferencial. Introduziu assim o chamado universo de Minkowski, uma variedade espácio-temporal a 4 dimensões cujos pontos representam eventos, e cuja métrica é dada de forma geral por

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2}.$$

Como digo, esta é a expressão global e não apenas local para *ds*; pode ver-se que se trata de um espaço bastante simples, de curvatura constante e quase euclidiano. Se se introduz uma mudança de variáveis, com a variável temporal imaginária $x_4 = i\ c\ t$ (onde $i = \sqrt{-1}$), o tratamento formal do novo espaço é totalmente análogo ao de um espaço euclidiano quadrimensional. A condição de que *ds* seja invariante para sistemas de referência de Galileu, tem como consequência a validade das transformações de Lorentz, nas quais Einstein se baseou.

Riemann conclui a secção II.1 dizendo que, para poder abranger as "diferenças essenciais" entre todas as variedades representáveis mediante a forma quadrática fundamental, "é necessário eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos, o que será alcançado se escolhermos as grandezas variáveis de acordo com um princípio determinado". Assim são pois precisos novos conceitos que permitam determinar em abstracto a natureza de uma variedade dada, e Riemann localiza-os na ideia de *medida de curvatura*, generalização da curvatura de Gauss para superfícies. A medida de curvatura tem a função de exprimir até que ponto as propriedades geométricas da variedade se diferenciam das propriedades de um espaço euclidiano; torna-se uma medida da não-euclidianeidade da variedade.

Recorde-se que a curvatura gaussiana era um conceito intrínseco, que não implicava a ideia do espaço envolvente no qual podia estar imersa a superfície em questão. O mesmo se passa com a curvatura de Riemann, pelo que não há necessidade de pensar na variedade como se estivesse inserida noutra variedade a mais dimensões. A medida de curvatura define-se intrinsecamente, dentro da variedade dada, sobre a base da forma quadrática fundamental que exprime a sua métrica. Em cada ponto teremos curvaturas distintas para direcções à superfície distintas, ainda que, como Riemann estabelece, bastem $n = \frac{n-1}{2}$ valores em cada ponto para determinar totalmente a métrica. Assim, numa variedade bidimensional (uma superfície), basta dar uma medida de curvatura em cada ponto; numa variedade tridimensional, 3 curvaturas; numa quadrimensional como a de Minkowski–Einstein, 6 curvaturas; e assim sucessivamente.

Para definir a curvatura, Riemann considera dada num ponto *P* uma superfície lisa (uma subvariedade bidimensional) formada por geodésicos que passam pelo ponto; no caso a 3 dimensões, a direcção de um geodésico ficaria dada por dx_1, dx_2,

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

dx_3, a direcção de outra por dx'_1, dx'_2, dx'_3, e todos os demais geodésicos da superfície lisa são exprimidos na forma linear binária

$$dy_i = \lambda\, dx_i + \lambda'\, dx'_i \quad (\text{para } i = 1, 2, 3).$$

Fica assim definida uma direcção à superfície no ponto P, e trata-se de dar a curvatura da variedade nesse ponto e nessa direcção. Não entraremos em detalhes. Basta dizer – com vista a facilitar a compreensão do texto original – que Riemann considera uma certa expressão homogénea do segundo grau, a qual denominaremos Ω, e além disso, a área ou conteúdo da superfície Δ do triângulo infinitesimal de vértices (0,0,0), (x_1, x_2, x_3), (dx_1, dx_2, dx_3). O autor afirma que, se se define a curvatura em $P = (x_1, x_2, x_3)$, para a direcção estabelecida, como

$$K = -\frac{3}{4}\frac{\Omega}{\Delta^2}$$

obtém-se uma medida de curvatura a qual, no caso bidimensional, coincide exactamente com a curvatura de Gauss.

Assim, pois, a curvatura de Riemann para uma variedade tridimensional, num ponto P, pode ser vista como um conjunto de 3 valores, cada um dos quais será uma curvatura gaussiana para uma direcção à superfície em P. Estes valores da medida de curvatura são independentes entre si, e podem variar de um ponto para outro na variedade. Deste modo, vê-se com claridade que as variedades riemannianas são, em geral, de curvatura variável

Após a publicação da lição de Riemann, vários autores começaram a estudar os aspectos analíticos do seu trabalho, os invariantes diferenciais associados com a geometria riemanniana. Isto acabou por levar ao desenvolvimento, entre 1887 e 1901, do que viria a chamar-se o *cálculo tensorial*, às mãos dos matemáticos italianos Ricci e Levi-Civita. Os tensores, que facilitam a expressão de propriedades geométricas e leis físicas, converteram-se na ferramenta habitual para o tratamento da geometria diferencial riemanniana. Deste modo, a medida da curvatura costuma ser introduzida mediante o chamado *tensor de curvatura*.

O interesse pela geometria diferencial e o cálculo tensorial desencadeou-se após a publicação, em 1916, da teoria geral da relatividade de Einstein. O grande físico considerava um espaço-tempo de métrica riemanniana,

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1{}^2 + 2\, g_{12}\, dx_1\, dx_2 + \ldots + 2\, g_{34}\, dx_3\, dx_4 + g_{44}\, dx_4{}^2,$$

onde as funções métricas g_{ik} dependiam da presença de matéria nas distintas regiões do espaço. A curvatura em cada ponto, que é variável, exprimia-se por meio do chamado tensor de Ricci.

Aplicações geométricas

Com o que foi dito, analisámos as três primeiras hipóteses-chave de Riemann: a 1. levou-nos ao campo da topologia, ao conceito de variedade contínua *n*-dimensional; a 2. e a 3. introduziram-nos nas considerações métricas da geometria diferencial (expressão para o elemento linhear *ds* e definição de curvatura). Definidas assim as variedades riemannianas a *n* dimensões e de curvatura variável, Riemann tinha estabelecido um ponto de partido muitíssimo geral, a partir do qual contempla o caso particular do espaço euclidiano. Este espaço apresenta a peculiaridade de a curvatura ser igual em todos os pontos e em todas as direcções à superfície; de facto, a curvatura é sempre = 0. Como passo prévio a dar no seu estudo, era natural que considerasse o caso mais geral das variedades de curvatura constante.

A hipótese física que conduz às variedades de curvatura constante é a seguinte: que os sólidos rígidos possam mover-se livremente no espaço, sem sofrer deformações métricas (ou, como diz Riemann “distensões”). Esta hipótese estabelece uma certa homogeneidade do espaço, e é a forma mais simples de conceber os fenómenos da experiência comum, de modo que a geometria tinha sempre assumido que era esse o caso. Mas Riemann estava em condições de afirmar que tal pressuposto não conduz directamente ao espaço euclidiano, mas sim apenas a variedades de curvatura constante K = α, onde α será um número positivo ou negativo, ou zero. Sem entrar em demonstrações, Riemann afirmava, continuando, que nestas variedades a forma quadrática fundamental que exprime o elemento linear pode apresentar-se sob a forma:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \sqrt{(ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2)}$$

que dou aqui para o caso particular das 3 dimensões. O leitor notará que se os g_{ik} da expressão geral para a forma quadrática fundamental ficaram reduzidos a uma única função da posição que depende apenas do parâmetro α; além disso, no caso euclidiano teremos α = 0 e a expressão *ds* reduz-se efectivamente à função esperada.

No caso de α negativo, o que obtemos são precisamente as geometrias de Lobatchevski-Bolyai, pelo que leitor pode agora apreciar até que ponto ficam reduzidas a um caso particular dentro da geometria riemanniana. Na lição, Riemann não indicou esta relação explicitamente; os historiadores tendem a pensar que, ou não conhecia a obra desses predecessores, ou preferiu evitar alusões demasiado explícitas a um tema controverso[40]. O caso de α positivo leva a que, por vezes, se denominem (de forma equívoca) geometrias não-euclidianas de Riemann; mais adequado será chamá-las geometrias *elípticas*, reservando a expressão "riemannianas" para o caso mais geral que abrange também espaços de curvatura variável. Os nomes de geometria "hiperbólica" para a de Lobatchevsky-Bolyai, e geometria elíptica para o outro caso, foram propostos por Felix Klein; têm a sua origem na geometria projectiva, na maneira projectiva de alcançar ou definir essas duas situações não-euclidianas.

A ilustração que se costuma dar para essas geometrias está sugerida pelas considerações de Riemann no parágrafo II.5, ainda que seja mais concreta que elas. Um modelo euclidiano, definível dentro do espaço $|^3$, da geometria hiperbólica a duas dimensões é dado pela pseudo-esfera que estudaram Gauss e Beltrami; o seu único defeito é que não serve como modelo de todo o plano hiperbólico, mas sim apenas de uma parte do plano. Aqui é fácil ver como pode acontecer termos múltiplas paralelas a uma "recta" (geodésica) dada. O modelo da geometria elíptica é a geometria sobre a esfera, onde as geodésicas ou "rectas" são os círculos máximos. Também este modelo possui um defeito, fácil de corrigir: as "rectas" cortam-se em dois pontos; a solução é considerar idêntico cada par de pontos diametralmente opostos, ou, se se preferir, entender por "ponto" um diâmetro da esfera; agora, cada duas rectas cortam-se em apenas um "ponto", verificando-se todos os axiomas. O italiano Beltrami, que tinha discutido com Riemann durante a sua estadia naquele país, foi (em 1868), o primeiro matemático que explicitou estas ideias, incluindo também uma consequência interessante: se houvesse uma contradição na geometria elíptica (ou hiperbólica), ela poderia ser traduzida na geometria da esfera (pseudo-esfera) e, como tal, na geometria euclidiana tridimensional. Reciprocamente, supondo que a geometria de Euclides é consistente – não contraditória –, a geometria elíptica e a hiperbólica também têm de sê-lo. Foi o primeiro resultado de consistência relativa estabelecido explicitamente por um matemático.

Durante o séc. XIX apenas se consideraram os espaços de curvatura constante, enquanto que os espaços mais gerais de Riemann caíram no esquecimento, como algo aparentemente fantasioso. Já dissemos que a forma mais simples de conceber os fenómenos da nossa experiência, a que os geómetras tinham vindo a assumir, era pensar que os sólidos rígidos se movem livremente no espaço, sem se deformarem, nem esticar ou contrair. O grande fisiólogo e físico Helmholtz, que escreveu sobre estes assuntos na altura em que se publicou a lição de Riemann, seguiu esse caminho.

[40] Recorde-se de que estava a pronunciar a sua lição inaugural como *Privatdozent* ou, como dizemos hoje, professor assistente; não obstante, esta segunda explicação não convence muito, dada a radicalidade das suas restantes afirmações e do seu próprio ponto de partida.

Descartando a noção de linha, ou segmento unidimensional, como uma pura abstracção (e com ele descartando o axioma riemanniano da constância do comprimento para os segmentos), procurou uma base de tipo operacional sobre a qual estabelecer a geometria, e defendeu que a geometria pressupõe sempre o manuseamento de corpos rígidos (regras) e a sua livre mobilidade. O ponto de partida devia ser, pois, a constância das longitudes num sólido rígido e a consequência: só têm sentido os espaços de curvatura constante. Não obstante, este raciocínio distanciava-se do conhecimento de Riemann, pois fazia passar por "factos positivos" o que não são senão as nossas interpretações habituais dos factos (hipóteses). Não é por acaso que o artigo de Helmholtz se intitulou, numa clara réplica a Riemann: "Sobre os factos nos quais a geometria se funda"[41]. Einstein (que ocasionalmente também se inclinou para o operacionalismo, ainda que, como gostava de enfatizar, só de forma oportunista e não sistemática) acabaria por mostrar que mesmo do ponto de vista físico tem sentido ampliar a perspectiva e contemplar a possibilidade de espaços riemannianos no sentido mais geral.

Aplicações físicas

Como poderá saber-se se o espaço físico é euclidiano? Riemann explicita-o na secção III.1: basta comprovar que a soma dos ângulos de um triângulo é *em todo o lado* igual a 180º. Supondo a livre mobilidade dos sólidos rígidos (curvatura constante), basta pois comprová-lo no caso de um só triângulo, critério que já tinham usado Lobatchevski e Gauss. Para tal fim, empregavam-se as medições astronómicas de paralaxes e, como disse Riemann na secção III.3, delas segue-se que α parece efectivamente ser zero, ressalvando que a região do espaço acessível aos nossos telescópios seja, comparativamente, muito pequena.

Pois bem, Riemann encaminha-se para a física em dois passos, considerando primeiro a extensão de considerações geométricas à escala astronómica, e depois a sua extensão à escala atómica ou subatómica (ainda que naturalmente ele, como bom defensor do pleno contínuo, não empregue esta última expressão). A sua primeira e muito profunda indicação é a de que devemos ser cuidadosos e empregar a distinção capital entre propriedades topológicas (o que chama "relações de extensão") e propriedades métricas do espaço. Assim, quando julgamos que as rectas são infinitas, há na realidade duas propriedades envolvidas: a topológica é a pura ilimitação (que se encontra já na linha de uma circunferência), a métrica é o que propriamente se deveria

[41] "Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", *Nachrichten Königliche Gesellschaft der. Wiss. Göttingen* (1868), 193–227; in Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* vol. 2 (Leipzig, 1883).

chamar infinitude. Com esta observação, resolvia-se o paradoxo aparentemente irresolúvel escondido por detrás das geometrias elípticas, e abria-se caminho de novo em direcção à cosmologia, baseada na relatividade geral.

Não obstante, os problemas acerca do cosmos no seu conjunto pareciam a Riemann assuntos frívolos; recordemos a sua afirmação de que só no infinitamente pequeno, só para pontos no espaço e no tempo, podem encontrar-se as leis naturais verdadeiramente elementares. É um pensamento que guiou todo o trabalho de Riemann sobre física e física matemática, de acordo com o qual todo o essencial se joga nas hipóteses que podemos estabelecer e comprovar sobre a constituição infinitesimal do mundo. Riemann propõe-nos três considerações fundamentais[42]:

1. As confirmações empíricas que podemos realizar sobre a métrica no espaço baseiam-se no emprego de corpos sólidos e raios de luz, "conceitos empíricos" que perdem a sua validade no infinitamente pequeno;
2. A independência dos corpos com respeito à posição, a sua livre mobilidade sem deformações, continua a ser uma hipótese; basta negá-la para que o nosso conhecimento da geometria do mundo a escalas médias e grandes não tenha nenhuma implicação no muito pequeno;
3. Uma hipótese ainda mais básica é a que nos conduz à forma quadrática fundamental, mas esta não é mais que um tipo de métrica entre muitas outras.

Por tudo isto, continua, é concebível que as relações métricas no infinitamente pequeno não concordem com a geometria de Euclides; "e é-se de facto obrigado a aceitar isto enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples".

Mas o ousado pensador de Göttingen não se detém aqui: o parágrafo que se segue é um tesouro, o qual indica do modo mais claro a sua estatura intelectual. A questão da geometria à escala infinitesimal está intimamente ligada com o fundamento interno, físico, que poderia ter a métrica. Se a realidade que subjaz à nossa representação do espaço é discreta, tal pode ser já suficiente para determinar a questão. Pois bem, se a suposição do contínuo físico está correcta, "[devem] procurar[-se] os fundamentos das relações de medida fora dele, nas forças que […] actuam" sobre o espaço. Como é natural, Riemann tinha aqui em mente os problemas da unificação da luz, calor, electricidade, magnetismo e gravitação, que o obcecavam nas suas especulações físicas do momento. Weyl acreditou, no entusiasmo da recém-formulada relatividade geral, que essas proféticas e obscuras palavras ficavam por fim esclarecidas com a contribuição de Einstein. Hoje é possível prever que irão ainda

[42] O nosso autor deixou claro, numa nota de pé de página, que estava especialmente insatisfeito com as breves considerações da secção III.3 da sua lição; esta exigia "ser reformulada e desenvolvida".

mais além, e resta esperar que alguma contribuição do séc. XXI, relacionada com o problema da gravidade quântica, no-las faça ver a uma nova luz[43].

Falta dizer que, naturalmente, Riemann só pôde ter intuições de aspectos muito parciais: pouco sabia da noção contemporânea de campo, nada do espaço-tempo einsteiniano, nem (obviamente) da mecânica quântica. Se a sua frase continua a dar que pensar, isso deve-se sobretudo ao fascínio que pode exercer um aforismo, e à condensação de conotações e sugestões que pode encerrar.

Ainda que a física do séc. XX tenha dado a verdadeira medida do valor das ideias geométricas de Riemann, estas não tiveram que esperar tanto para encontrar aplicações físicas. A primeira, de carácter bem mais formal, deu-a o próprio Riemann no seu trabalho de 1861, conhecido como *Preisschrift* de Paris e dedicado a um tema aparentemente muito distante: a propagação do calor num corpo rígido homogéneo, com preservação de um sistema dado de isotermas[44]. O seu estudo do problema aplicava os métodos analíticos básicos da geometria diferencial, o que lhe deu ocasião para desenvolver – ainda que de um modo demasiado sucinto – as ideias relativas à forma quadrática fundamental e à medida de curvatura que indicámos. (Aí se encontram, entre outras coisas, o símbolo de quatro índices que pode ser interpretado como tensor de Riemann, e o que Einstein chamava a "condição de Riemann" para as funções g_{ik}.) Outra aplicação mais estrita foi o emprego de um espaço riemanniano tridimensional para representar as relações de proximidade entre as cores; Herbart equivocava-se ao pensar que bastavam duas dimensões[45]. Outras mais aplicações surgiram em campos como a mecânica, por exemplo o espaço de configuração de um sistema. Em geral, desde o passo decidido em direcção à abstracção que Riemann deu, o pensamento geométrico encontra aplicação nos mais diversos campos, por distantes que pareçam da ideia tradicional de espaço.

(Tradução de S. Varela Sousa)[δ]

[43] Como provavelmente o leitor sabe, o problema mais profundo que tem perante si a física é o de obter uma unificação entre a teoria relativista da gravitação e a teoria quântica; nisto trabalham os especialistas em gravidade quântica, guiados pela obra de Witten, na qual se empregam conceitos muito modernos de geometria e topologia.
[44] Riemann, "Commentatio mathematica", *Werke*, 391-404.
[45] Foi nesta direcção que Helmholtz trabalhou.
[δ] Tradução revista por Mário Bacelar Valente de Sousa, a quem o autor e o tradutor manifestam a sua gratidão.

Bibliografia

Bottazzini, Umberto, *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, New York, Springer, 1986.

Dunnington, G. W., *Carl Friedrich Gauss. Titan of science*, New York, 1955.

Ferreirós, J., *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854–1908*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma, 1993, caps. 3 e 10.

Grattan-Guiness, I., *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910*, Madrid, Alianza, 1984, caps. 3 e 4.

Gray, J., *Ideas de espacio*, Madrid, Mondadori, 1992, cap. 12. [Esta obra contém também uma introdução às teorias da relatividade.]

Harman, P. M., *Energía, fuerza y materia. La estructura conceptual de la física en el siglo XIX*, Madrid, Alianza;

Herbart, J. F., *La pedagogía general derivada del fin de la educación*, Madrid, La Lectura, 1914; Barcelona, Humanitas, 1983.

Laugwitz, D., D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Basel, Birkhäuser, 1998.

Maxwell, J. C., *Escritos científicos*, ed. J. M. Sánchez Ron, Madrid, CSIC, 1998;

Scholz, Erhard, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Basel, Birkhäuser,1980.

Torretti, Roberto, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Reidel, 1984.

Wiederkehr, K. H., *Wilhelm Weber. Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität*, Stuttgart, 1967.