Estudos de Economia, vol. I, n.º 2, Jan./Abr. 1981.

VARIAÇÃO DE COEFICIENTES DA PROCURA FINAL

João Ferreira do Amaral (*)

1 — Neste trabalho, tomando como base o modelo de Leontief, pretende-se obter um resultado acerca do sinal da variação dos coeficientes que representam o peso dos fornecimentos destinados à procura final na produção de cada sector de uma economia de n sectores produtivos, onde se não considera explicitamente a evolução dos preços.

2 — Consideremos então o conjunto de equações de recursos/utilizações para cada sector i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i$$

X_i = produção do sector i
X_{ij} = produção do sector i *utilizada pelo sector* j
Y_i = produção do sector i destinada à procura final

Definido o coeficiente técnico a_{ij} pela igualdade $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ e o coeficiente da procura final b_i por $b_i = \frac{Y_i}{X_i}$ obtemos as n igualdades

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + b_i X_i$$

ou, em notação matricial

1)
$$X = AX + \hat{B}X$$

onde

$X_{(n \times 1)}$ = vector da produção
$A_{(n \times n)} = \{a_{ij}\}$
$\hat{B}_{(n \times n)} = \{\delta_{ij} b_i\}$
δ_{ij} de Kronecker

(*) Técnico superior principal do Departamento Central de Planeamento e assistente convidado do ISE. Agradeço ao Prof. Miguel Beleza os úteis comentários feitos a uma versão inicial deste trabalho. Todos os erros porventura existentes são, porém, da minha inteira responsabilidade.

tem-se de 1)

2) $$(I - A - \hat{B})\, X = O$$

Para que esta equação tenha uma solução não nula para X é necessário que

$$|I - A - \hat{B}| = O$$

Introduzamos agora a seguinte condição:

> CONDIÇÃO — Num dado período, a estrutura produtiva caracterizada pelas matrizes A e $\hat{B}$ só permite a produção de um determinado vector X ou de qualquer outro em que as proporções sectoriais se mantenham, isto é, o vector X numa escala diferente; a escala depende da dotação de factores primários.

Esta condição é admissível se atendermos a que nenhuma razão existe para se considerar que, num dado período, a produção realizada se obtém por acaso entre muitas produções possíveis. De hipótese a condição transforma-se em teorema demonstrável se admitirmos que a matriz $A + \hat{B}$ é indecomponível [1].

Sendo hipótese ou teorema, aquela condição interessa-nos, principalmente, pelo que diz respeito à constância dos coeficientes de $\hat{B}$.

Desta forma, as soluções da equação 2) são do tipo $X = \lambda X^*$ com λ qualquer e, então, a característica de $I - A - \hat{B}$, $r(I - A - \hat{B})$, vem igual a $n - 1$. Com efeito, por um conhecido teorema da algebra linear sabe-se que, se a matriz C for de ordem n se tem $n = r\,(C) + N(C)$ onde $N(C)$ é a dimensão da variedade linear de todos os X tais que $CX = O$. Como no nosso caso $N(I - A - \hat{B}) = 1$, tem-se $r(I - A - \hat{B}) = n - 1$.

Se $r(I - A - \hat{B}) = n - 1$ e, portanto, todas as soluções de 2) são do tipo $X = \lambda \overset{*}{X}$ isto significa que, se A e $\hat{B}$ se mantiverem constantes ao longo de uma série de períodos, então o crescimento da produção, a existir, (o que sucede no caso de, a partir de um vector X_0^* no período O se obter para o período t um vector $X_t = \lambda^t X_0^*$ com λ 1) será idêntico para todos os sectores da economia.

Como é fácil de constatar este tipo de crescimento nunca se verificou no passado histórico. Diversos sectores têm, em geral, ritmos de crescimento diferentes, o que significa que uma pelo menos das matrizes A ou $\hat{B}$ se altera ao longo do tempo.

---

[1] Com o lema 2, ver mais adiante, o maior valor próprio de $A + \hat{B}$ é a unidade. Este valor próprio tem multiplicidade 1 por ser $A + \hat{B}$ indecomponível e, portanto, $I - A - \hat{B}$ tem o valor próprio O com multiplicidade 1, pelo que a característica de $I - A - \hat{B}$ é $n - 1$.

Poderemos, assim distinguir dois tipos «puros» de crescimento:

1) Crescimento associado a alterações dos coeficientes técnicos por inovações tecnológicas e que se traduzem na variação da matriz A.
2) Crescimento associado à alterações das proporções em que os diversos sectores fornecem para a procura final e que se traduzem na variação de $\hat{B}$.

Iremos considerar seguidamente alguns aspectos relacionados com este segundo tipo de crescimento.

3 — Sejam, no momento t, as equações

$$\sum_{j=1}^{n} a^*_{ij} x_j(t) - b_i(t)\, x_i(t) = O \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

onde, por a^*_{ij} se designam os coeficientes $\delta_{ij} - a_{ij}$ derivando em ordem a t vem:

$$\sum_{j=1}^{n} a^*_{ij} x'_j(t) - b_i(t) K'_i(t) = b'_i(t)\, x_i(t)$$

ou, se todos os $X_i(t)$ forem diferentes de O

3)

$$\Sigma\, a^*_{ij} \frac{x'_j(t)}{x_j(t)} \cdot \frac{x_j(t)}{x_i(t)} - b_i(t) \frac{x'_i(t)}{x_i(t)} = b'_{i\,(t)}$$

$$[I - A^{**} - \hat{B}(t)]\, Z(t) = DB(t)$$

onde

$$I - A^{**}_{nxn} = \left\{ (\delta_{ij} - a_{ij}) \frac{x_j(t)}{x_i(t)} \right\}$$

$$Z(t)_{n\times 1} = \left\{ \frac{x'_i(t)}{x_i(t)} \right\} - DB(t)_{n\times 1} = \left\{ b'_i(t) \right\}$$

Podemos agora provar o seguinte teorema:

TEOREMA. — Sendo indecomponível a matriz A as variações $b'_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ não nulas não podem ser todas do mesmo sinal.

Para demonstrar este teorema começaremos por demonstrar o seguinte lema:

LEMA 1. — O vector $DB(t)$ tem de obedecer à seguinte condição:

$$[DB(t)]^T y^* = O$$

onde y^* é uma solução não nula de

$$[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T y = O$$

e T indica transposição.

Dem. — Provemos primeiro que existe uma solução y^* (não nula) para $[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T y = O$. Com efeito, verifica-se facilmente que o determinante de $[I - A^{**} - \hat{B}(t)]$ é igual ao determinante de $[I - A - \hat{B}(t)]$ pois a multiplicação de cada elemento de $[I - A - \hat{B}(t)]$ por $\frac{x_j(t)}{x_i(t)}$ não altera os termos do determinante. Então, $[I - A^{**} - \hat{B}(t)] = O$ e, portanto, existe uma solução $y^* \neq O$ para $[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T y = O$. Transpondo ambos os membros de 3) vem

$$Z(t)^T [I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T = [D\, B(t)]^T$$

e multiplicando ambos os membros por y^*

$$O = [DB(t)]^T y^*$$

conforme se quereria provar.

Para se prosseguir a demonstração do teorema provaremos seguidamente um outro lema, que é um resultado imediato do teorema de Frobenius.

LEMA 2. — O maior valor próprio de $A^{**} + \hat{B}(t)$ é a unidade.

Dem. — Suponhamos que existia um valor próprio λ superior à unidade. Então

$$[A + \hat{B}(t)]X^* = \lambda X^* \lambda > 1$$

Como A é indecomponível (primitiva) (2) e não negativa e, portanto, também o é $A + \hat{B}(t)$, pelo teorema de Frobenius existe um vector próprio positivo associado ao maior valor próprio de $A + \hat{B}(t)$ e prova-se (3) que não existe outro vector próprio não negativo. Então, não existiria nenhum vector próprio não negativo associado ao valor próprio 1. Ou seja, não haveria nenhum vector X^* não negativo tal que $[A + \hat{B}(t)]X^* = X^*$ isto é, não haveria nenhum vector possível de produção, o qual seria absurdo. Desta forma, o maior valor próprio de $[A + \hat{B}(t)]$ é a unidade e, portanto, o maior valor próprio de $A^{**} + \hat{B}(t)$ e de $[A^{**} + \hat{B}(t)]^T$ é também a unidade pois, como é fácil de verificar estas matrizes têm os mesmos valores próprios de $A + \hat{B}(t)$.

---

(2) Para ser primitiva uma matriz indecomponível não negativa basta que pelo menos um elemento da sua diagonal principal seja positivo. Ver Woods (1978).

(3) Brody (1970), Woods (1978).

Com este resultado poderemos finalmente demonstrar o último lema:

LEMA 3. — As componentes das soluções y^* de $[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T y = O$ têm todas o mesmo sinal.

Dem. — Com efeito, $[A^{**} + \hat{B}(t)]^T$ é indecomponível e portanto, terá um vector próprio positivo associado ao seu maior valor próprio que, como vimos, é a unidade. Isto é, existirá y^* de componentes positivas tal que

$$[A^{**} + \hat{B}(t)]^T y^* = y^*$$

donde

$$[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T y^* = O$$

onde y^* tem todas as componentes positivas.

Por outro lado, verifica-se facilmente que a característica de $[I - A^{**} - \hat{B}(t)]^T$ é igual à de $[I - A - \hat{B}(t)]^T$ que, como vimos é $n-1$. Desta forma, todas as soluções de $[I - A^{**} - \hat{B}(t)^T y = O$ são da forma $\mu\ y^*$ com μ real, e, portanto, todas as componentes de y^* têm o mesmo sinal, conforme se queria provar.

Com o lema 1 e o lema 3 obtemos imediatamente o teorema que se pretendia demonstrar.

4 — Note-se, entretanto, que a condição do lema 1 não garante que todas as componentes de $Z(t)$ sejam não-negativas, ou seja, que não exista crescimento negativo da produção de algum sector.

Para assegurar que todos os sectores tenham crescimento positivo ou nulo basta escolher um $DB(t)$ tal que as relações $[I - A - \hat{B}(t)]^T y \geqslant O$ $DB(t)^T y < O$ não tenham nenhuma solução y. Este resultado é apenas a tradução, ao nosso caso, do teorema do hiperplano separador e pode ter interesse para os casos específicos da matriz A.

O resultado obtido no teorema pode ser útil para certos aspectos da planificação. Por exemplo, se considerarmos os coeficientes técnicos da matriz A como coeficientes nacionais e supondo tudo o resto constante o teorema permite afirmar não ser possível aumentar a percentagem da produção destinada à exportação simultaneamente em dois sectores a não ser à custa dessa proporção num terceiro sector.

REFERÊNCIAS

BOOT, J. C. G. — *Programmation quadratique*, Dunod, Paris, 1966.

BRODY, A. — *Proportions, prices and planning*, North-Holland, Amsterdam, London, 1970.

INTRILIGATOR, M. D. D. — *Mathematical optimization and economic theory*, Prentice-Hall, N. J., 1971.

PASINETTI, L. L. — *Lectures on the theory of production*, Macmillan, London, 1977.

WOODS, J. E. — *Mathematical economics*, Longman, New York, 1978.