Estudos de Economia, vol. I, n.º 3, Mai.-Ago. 1981

UMA NOTA SOBRE A SEGUNDA CONDIÇÃO DE ERDMANN-WEIERSTRASS DO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

Gregório Luiz (*)

A aplicação clássica do cálculo das variações é, na teoria da produção, para determinação do plano de produção de um ou mais bens num certo horizonte temporal. Mais recentemente, os métodos de cálculo das variações têm sido aplicados na teoria do crescimento óptimo.

O presente artigo não se destina a examinar as aplicações do cálculo das variações à economia, mas apenas contestar uma condição clássica da teoria, que é habitualmente apresentada como condição necessária de extremo. Veremos que a referida condição apenas se pode considerar como condição necessária para o caso dos extremos fortes, não o sendo no caso dos extremos fracos. Para o efeito, utilizaremos um exemplo em que a condição de Erdmann-Weierstrass não se verifica, e não obstante estamos em presença de um extremo. Também com um exemplo conveniente veremos onde falham as demonstrações habitualmente apresentadas quando referidas ao caso dos extremos fracos.

1 — **Introdução**

A) Seja $F(x, y, y')$ uma função nas três variáveis x, y e y' contínua e com derivadas parciais contínuas até à 3.ª ordem em certo aberto A e considere-se a funcional

$$\phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

Como domínio desta funcional considera-se a classe $\mathcal{F}$ das funções $y(x)$ nas seguintes condições:

a) Contínuas em $[a, b]$ e com derivada contínua em todos os pontos desse intervalo, excepto, quando muito, num número finito de pontos interiores, em cada um dos quais, no entanto, existem finitos os limites laterais $y'(x + 0)$ e $y'(x - 0)$;

b) Tais que o conjunto dos pontos (x, y, y'), com $a \leq x \leq b$, $y = y(x)$ e $y' = y'(x \pm 0)$, esteja contido no aberto A onde a função $F(x, y, y')$ tem as propriedades acima referidas.

(*) Assistente do Instituto Superior de Economia de Métodos Matemáticos e de Estatística. Responsável pelas cadeiras de Métodos Matemáticos I e Métodos Matemáticos II.

Representaremos por $\emptyset_0(y)$ a restrição de $\emptyset(y)$ à subclasse $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ formada pelas funções cujos gráficos têm extremidades nos pontos fixos (a, a_0) e (b, b_0):

$$\mathcal{F}_0 = \{y : y \in \mathcal{F},\ y(a) = a_0 \text{ e } y(b) = b_0\}$$

B) A determinação dos extremantes relativos de $\emptyset_0(y)$ é um problema clássico de cálculo das variações e encontra-se exaustivamente estudado em diversas obras. Em todos os livros se encontra a seguinte condição necessária para que certa $y_0 \in \mathcal{F}_0$ seja extremante de $\emptyset_0(y)$: sendo c um ponto de interior do intervalo $[a, b]$ onde $y_0'(c+0) \neq y_0'(c-0)$ e sendo y_0 extremante de $\emptyset_0(y)$, tem-se:

$$F[c, y_0(c), y_0'(c+0)] - y_0'(c+0)\,{}_0F_{y'}[c, y_0(c), y_0'(c+0)] =$$

$$= F[c, y_0(c), y_0'(c-0)] - y_0'(c-0)\,{}_0F_{y'}[c, y_0(c), y_0'(c-0)]$$

Esta condição é designada por alguns autores por segunda condição de Erdmann-Weierstrass.

C) O nosso *objectivo* é mostrar que a condição referida em *B*) não é de facto necessária para a existência de extremo fraco, sendo apenas necessária para a existência de extremo forte, questão que nunca vimos esclarecida em lado nenhum; os autores que consultámos, e que vão indicados no final desta nota, limitam-se a apresentar a condição necessária referida juntamente com outras condições necessárias de extremo fraco, o que leva o leitor menos atento a considerá-la também como uma condição necessária de extremo fraco.

Tentaremos também mostrar onde falha a demonstração apresentada nos livros quando considerada como demonstração da necessidade da condição para o caso dos extremantes fracos.

2 — **Extremantes fracos e fortes**

A) Seja $\mathcal{D}(a, b)$ a classe das funções $y(x)$ nas seguintes condições: contínuas em $[a, b]$ e com derivada contínua em todos os pontos desse intervalo, excepto, quando muito, num número finito de pontos interiores, em cada um dos quais, no entanto, existem finitos os limites laterais $y'(x+0)$ e $y'(x-0)$. Considerando a adição de funções de $\mathcal{D}(a, b)$ e a multiplicação de funções dessa mesma classe por escalares de R, temos o espaço vectorial das funções da classe $\mathcal{D}(a, b)$.

Definiremos nesse espaço as duas seguintes normas:

$$\|y\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)|$$

$$\|y\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |y'(x)|$$

Claro que $\|y\|_1 < \varepsilon \Rightarrow \|y\|_0 < \varepsilon$

B) Se a função $y_0 \in \mathscr{F}_0$ for extremamente relativo de $\emptyset_0(y)$, quando a norma definida em $\mathscr{D}(a, b)$ for $\|.\|_0$, também é extremamente relativo se a norma definida for $\|.\|_1$. Com efeito, sendo $y_0 \in \mathscr{F}_0$ extremante relativo, por exemplo minimizante, quando se considera a norma $\|\cdot\|_0$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \in \mathscr{F}_0 \\ \|y - y_0\|_0 < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \emptyset_0(y) \geq \emptyset_0(y_0)$$

e então, quando se considera a norma $\|\cdot\|_1$, $y_0 \in \mathscr{F}_0$ é também minimizante

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \in \mathscr{F}_0 \\ \|y - y_0\|_1 < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0 \in \mathscr{F}_0 \\ \|y - y_0\|_0 < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \emptyset_0(y) \geq \emptyset_0(y_0)$$

Quando a norma considerada for $\|\cdot\|_0$, fala-se de extremantes fortes; quando for $\|\cdot\|_1$, fala-se de extremantes fracos. Como vimos acima, um extremante forte é também extremante fraco. A afirmação inversa não é verdadeira, conhecendo-se diversos exemplos de extremantes fracos que não são extremantes fortes.

3 — Exemplo de um extremante fraco para o qual não se verifica a segunda condição de Erdmann-Weierstrass

Seja $G(z)$ uma função variável z nas seguintes condições:

1) Contínua e com derivadas contínuas até à terceira ordem no intervalo $]-\infty, +\infty[$;
2) Com um mínimo relativo em $z = 1$ e outro em $z = 3$, sendo esses mínimos $G(1) = 0$ e $G(3) = 1$.

Com $G(z)$ nas condições indicadas, podemos afirmar que:

3) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que para $1 - \varepsilon < z < 1 + \varepsilon$ tem-se $G(z) \geq 0$ e para $3 - \varepsilon < z < 3 + \varepsilon$ tem-se $G(z) \geq 1$;
4) A derivada $G'(z)$ anula-se em $z = 1$ e em $z = 3$.

Considere-se agora a funcional

$$\emptyset(y)=\int_{-2}^{2} G(y') \, dx$$

cujo domínio é toda a classe $\mathcal{D}$ (— 2, 2). Considere-se a restrição $\emptyset_o(y)$ de $\emptyset(y)$ à subclasse $\mathcal{D}_o(-2,2)$ formada pelas funções de $\mathcal{D}$ (— 2,2) cujos gráficos têm extremidades em (— 2, — 2) e (2,6). Uma das funções da classe $\mathcal{D}_o(-2,2)$ é a seguinte:

$$y_o(x)=\begin{cases} x & (-2 \leqq x < 0) \\ 3x & (\leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

Provaremos seguidamente que $y_o(x)$ é um extremante (minimizante) fraco da funcional $\emptyset_o(y)$:

a) Em primeiro lugar, vejamos que $\emptyset_o(y_o)=2$. Com efeito

$$-2 \leqq x < 0 \Rightarrow y_o'(x)=1$$

$$0 < x \leqq 2 \Rightarrow y_o'(x)=3$$

pelo que

$$-2 \leqq x < 0 \Rightarrow G(y')=0$$

$$0 < x \leqq 2 \Rightarrow G(y')=1$$

e portanto

$$\emptyset_o(y_o)=\int_{-2}^{2} G(y') \, dx=2$$

b) Dada uma qualquer $y \in \mathcal{D}_o(-2,2)$ tal que $\|y-y_o\|_1 < \varepsilon$, em que ε é o referido em 3), vejamos que $\emptyset_o(y) \geqq \emptyset_o(y_o)=2$. Com efeito

$$\|y-y_o\|_1 < \varepsilon \Rightarrow |y'(x)-y_o'(x)| < \varepsilon$$

nos pontos $x \in [-2,2]$ onde ambas as derivadas existam (*), pelo que

$$|y'(x)-1| < \varepsilon \quad \text{para} \quad -2 \leqq x \leqq 0 \qquad (**)$$

$$|y'(x)-3| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 \leqq x \leqq 2$$

(*) Nos pontos onde não existam ambas as derivadas (pontos esses que são em número finito) tem-se $|y'(x+0)-y_o'(x+0)| < \varepsilon$ e $|y'(x-0)-y_o'(x-0)| < \varepsilon$.

(**) Excepto num número finito de pontos x onde as desigualdades se verificam substituindo $y'(x)$ por $y'(x+0)$ ou $y'(x-0)$.

A propriedade 3) da função $G(z)$ permite agora concluir que

$$\emptyset_0(y) = \int_{-2}^{2} G(y')\, dx \geqq \int_{-2}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} 1\, dx = 2 = \emptyset_0(y_0)$$

c) As alíneas anteriores permitem concluir que $y_0(x)$ é minimizante fraco de $\emptyset_0(y)$, como se pretendia provar.

Vejamos agora que para a $y_0(x)$, que provámos ser minimizante de $\emptyset_0(y)$, não se verifica a segunda condição de Erdmann-Weierstrass. O ponto c onde y_0 não tem derivada é $c=0$: nesse ponto, $y'_0(+0) = 3 \neq 1 = y'_0(-0)$. Ora,

$$G[y'_0(+0)] = G(3) = 1; \quad G[y'_0(-0)] = G(1) = 0$$

$$G'_{y'}[y'_0(+0)] = G'(3) = 0; \quad G'_{y'}[y'_0(-0)] = G'(1) = 0$$

pelo que é fácil constatar que não se verifica a segunda condição de Erdmann-Weierstrass.

4 — A necessidade da segunda condição de Erdmann-Weierstrass no caso dos extremantes fortes

A segunda condição de Erdmann-Weierstrass é necessária para que $y_0 \in \mathscr{F}_0$ seja extremante forte da funcional $\emptyset_0(y)$. Isso resulta imediatamente da condição necessária de Weierstrass para a existência de extremantes fortes e da primeira condição de Erdmann-Weierstrass, que a seguir se enunciam:

Condição necessária de Weierstrass

Sendo $y_0 \in \mathscr{F}_0$ um minimizante (maximizante) forte da funcional

$$\emptyset_0(y) = \int_a^b F(x,y,y')\, dx$$

tem-se:

$$E(x_1, y_1, z_1, Z_1) \geqq 0 \qquad (\leqq 0)$$

qualquer que seja o ponto (x_1, y_1, z_1, Z_1) tal que $y_1 = y_0(x_1)$, $z_1 = y'_0(x_1 \pm 0)$ e que $(x_1, y_1, Z_1) \in A$, em que

$$E(x_1, y_1, z_1, Z_1) = F(x_1, y_1, Z_1) - F(x_1, y_1, z_1) - (Z_1 - z_1) \cdot F'_{y'}(x_1, y_1, z_1)$$

Primeira condição de Erdmann-Weierstrass

Sendo c um ponto interior do intervalo $[a,b]$, onde $y'_0(c+0) \neq y'_0(c-0)$ e sendo $y_0(x)$ extremante fraco de $\emptyset_0(y)$, tem-se:

$$F'_{y'}[c, y_0(c), y'_0(c+0)] = F'_{y'}[c, y_0(c), y'_0(c-0)]$$

Sendo $y_o(x)$ minimizante forte de $\emptyset_o(y)$ e sendo c um ponto tal que $y'_o(c+0)$ e $y'_o(c-0)$ sejam distintos, então, tomando $x_1=c$, $y_1=y_o(c)$, $z_1=$ $=y'_o(c+0)$ e $Z_1=y'_o(c-0)$, obtém-se:

$$0 \leqq F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)] - F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)] -$$
$$- [y'_o(c-0) - y'_o(c+0)].F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)]$$

e tomando $x_1=c$, $y_1=y_o(c)$, $z_1=$ $y'_o(c-o)$ e $Z_1=y'_o(c+0)$, obtém-se:

$$0 \leqq F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)] - F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)] -$$
$$- [y'_o(c+0) - y'_o(c-0)].\ F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)],$$

resultando ambas as desigualdades da condição necessária de Weierstrass.

Mas, como $y_o(x)$ é também minimizante fraco, a primeira condição de Erdmann-Weierstrass garante que

$$F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)] = F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)],$$

pelo que os dois valores não negativos obtidos pela aplicação da condição necessária de Weierstrass são simétricos um do outro, sendo, portanto, ambos nulos; resulta então:

$$F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)] - y'_o(c-0).\ F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c-0)] =$$
$$= F[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)] - y'_o c+0).\ F'_{y'}[c,\ y_o(c),\ y'_o(c+0)]$$

que é a segunda condição de Erdmann-Weierstrass.

5 — Onde falha a demonstração da necessidade da segunda condição de Erdmann-Weierstrass no caso dos extremantes fracos

As demonstrações da necessidade da segunda condição de Erdmann-Weierstrass apresentadas habitualmente têm por base uma mudança de variável e utilizam, mais ou menos disfarçadamente, uma propriedade que vamos enunciar seguidamente.

Sejam $\xi(t)$, $\xi_o(t)$, $\eta(t)$ e $\eta_o(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, funções nas seguintes condições:

1) $\xi(t)$ e $\xi_o(t)$ contínuas e com derivadas contínuas no intervalo $[t_1,\ t_2]$ e tais que $\xi'(t)$, $\xi'_o(t) > 0$ em todo o intervalo;
2) $\eta(t)$ e $\eta_o(t)$ pertencentes à classe $\mathcal{D}(t_1,\ t_2)$;
3) $\xi(t_1) = \xi_o(t_1) = a$ e $\xi(t_2) = \xi_o(t_2) = b$

Sejam $\xi^{-1}(x)$ e $\xi_0^{-1}(x)$, $a \leqq x \leqq b$, as inversas de $x = \xi(t)$ e $x = \xi_0(t)$, respectivamente, e façamos as composições

$$y(x) = \eta[\xi^{-1}(x)] \quad \text{e} \quad y_0(x) = \eta_0[\xi_0^{-1}(x)]$$

Dado $\delta > 0$, qualquer que ele seja, existe um $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\left.\begin{array}{l} \| \xi - \xi_0 \|_1 < \varepsilon \\ \| \eta - \eta_0 \|_1 < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \| y - y_0 \|_1 < \delta$$

Esta propriedade, que os autores ou não explicitam na demonstração ou apenas lhe dedicam uma ou duas linhas, é em geral falsa, como mostraremos através de um exemplo. Ela pode provar-se, sem grande dificuldade, com a hipótese adicional de que as funções η e η_0 têm derivadas contínuas em todo o intervalo $[t_1, t_2]$; pode também provar-se se considerarmos $\| y - y_0 \|_0$ em vez de $\| y - y_0 \|_1$, e é por isso que a demonstração habitualmente apresentada para a necessidade da segunda condição de Erdmann-Weierstrass apenas vale para o caso dos extremantes fortes.

Passemos então a apresentar o exemplo que mostra que a propriedade acima referida é, em geral, falsa:

a) Considere-se a função $\xi_0(t) = t$ e a família de funções $\xi_0(t; \alpha) = t + \alpha(t^2 - 1)$, em que $-1 \leqq t \leqq 1$ e $0 < \alpha < 1/2$. Tomando uma qualquer das funções $\xi(t; \alpha)$ e $\xi_0(t)$, esse par de funções encontra-se nas condições supostas no enunciado da propriedade precedente: são contínuas e têm derivadas contínuas em $[-1, 1]$; $\xi_0'(t) = 1$ e $\xi(t; \alpha) = 1 + 2\alpha t$, pelo que, com $0 < \alpha < 1/2$, tem-se $\xi_0'(t)$, $\xi'(t; \alpha) > 0$ em $[-1, 1]$; finalmente $\xi_0(-1) = \xi(-1; \alpha) = -1$ e $\xi_0(1) = \xi(1; \alpha) = 1$;

b) Considere-se a função $\eta_0(t) = |t|, -1 \leqq t \leqq 1$, e suponha-se que a outra função $\eta(t)$ referida no enunciado da propriedade coincide com $\eta_0(t)$: $\eta(t) = |t|$. Nessas condições, as funções, $\eta(t)$ e $\eta_0(t)$ pertencem à classe $\mathscr{D}(-1, 1)$;

c) Notemos agora que, dado $\varepsilon > 0$, é possível fixar α suficientemente próximo de 0 de modo a conseguir-se uma função $\xi(t; \alpha)$ tal que $\| \xi - \xi_0 \|_1 < \varepsilon$.
Por outro lado, $\| \eta - \eta_0 \| = 0 < \varepsilon$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$;

d) Se a propriedade atrás enunciada fosse válida em geral, fixado $\delta = 1$, haveria um $\underline{\varepsilon}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \| \xi - \xi_0 \|_1 < \varepsilon \\ \| \eta - \eta_0 \|_1 < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \| y - y_0 \|_1 < 1$$

em que

$$y = y(x) = \left| \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha(\alpha + x)}}{2\alpha} \right| \text{ e } y_0 = y_0(x) = |x|$$

devendo notar-se que

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\,\alpha\,(\alpha + x)}}{2\,\alpha} \qquad \text{e} \qquad t = x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

são as inversas de $x = t + \alpha\,(t^2 - 1)$ e $x = t\;(-1 \leqq t \leqq 1)$.

Notando que $\| \eta - \eta_0 \|_1 = 0$ e que $\| \xi - \xi_0 \|_1 < \varepsilon$ desde que a função ξ seja obtida da família $\xi\;(t;\;\alpha)$, fixando α suficientemente próximo de 0, deveria ter-se $\| y - y_0 \|_1 < 1$ desde que escolhido α suficientemente próximo de 0. Então, com α nessas condições, deveria ter-se:

$$\operatorname*{Sup}_{-1 \leqq e \leqq 1} \left| y'(x) - y_0'(x) \right| < \| y - y_0 \| < 1$$

Mas, com $x = -\alpha$ tem-se:

$$\left| y'(-\alpha + 0) - y_0'(-\alpha + 0) \right| = 2 > 1$$

como se constata facilmente, pelo que não pode ter-se:

$$\operatorname*{Sup}_{-1 \leqq x \leqq 1} \left| y'(x) - y_0'(x) \right| < 1$$

OBRAS CONSULTADAS

1) BLISS, G. A. — *Lectures on the Calculus of Variations.*
2) AKHIEZER, N. I. — *The Calculus of Variations.*
3) GELFAND, I. M., & FOMIN, S. V. — *Calculus of Variations.*