

UMA APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES DE CONJUNTO CONVEXAS

*João Ferreira do Amaral**

Consideremos uma situação comum em política económica; uma função de custos $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variáveis, sobre as quais o decididor não tem uma capacidade de controle total e que podem tomar valores em um conjunto $X \in R^n$. Se as variáveis forem instáveis, isto é, se não adoptarem uma vez por todas um certo valor, mas estiverem sujeitas a pequenas variações ao redor de um certo valor base, o decididor poderá estar interessado em dois tipos de avaliação:

- Qual o custo que tem de suportar para cada ponto de X , o que se limitará, no fundo, a calcular os valores de f .
- Supondo que cada ponto de X é um valor que as variáveis podem tomar, qual o acréscimo de custo que ele acabará por suportar se as variáveis flutuarem em pequenas variações ao redor de cada um dos pontos de X .

Seja um exemplo: Um decididor de política económica em Portugal terá de contar, como elementos importantes do seu custo, com o nível da taxa de juro internacional (i) e com o preço do petróleo (p).

Para programar a sua política futura poderá admitir, com razoável certeza, que i e p poderão tomar valores num certo subconjunto de R^2 . Se admitir como mais provável um certo ponto (i^*, p^*) desse conjunto, poderá calcular o custo que terá de suportar nesse ponto. Mas, como provavelmente a sua previsão estará sujeita a erro, deverá também avaliar qual o custo máximo que terá de suportar se, afinal, i e p flutuarem numa vizinhança de i^* e p^* . Como, porém, não conhecerá a dimensão dessa vizinhança, o mais que poderá obter é uma avaliação infinitesimal referente ao ponto (i^*, p^*) .

É para resolver problemas como estes e talvez outros mais gerais que poderá ter interesse a utilização de uma derivada que vamos desenvolver neste artigo e que tem como base um conceito já anteriormente introduzido⁽¹⁾ — o de função de conjunto convexa. Já quando se publicou esse artigo se admitia a possibilidade de que a teoria das funções de conjunto fosse utilizada mais directamente na análise das funções de ponto, como o presente artigo poderá exemplificar.

Note-se, finalmente, que para a introdução de uma topologia não se utiliza o conceito de distância, mas sim uma certa função de conjunto.

*Técnico do Departamento Central de Planeamento e assistente convidado do ISE.

⁽¹⁾ Albuquerque et al. (1969).

1 — Caracterização do espaço

Considere-se um espaço de vizinhanças, ou seja, um conjunto fundamental 1 onde para cada elemento $x \in 1$ se encontra atribuída uma família de vizinhanças $\mathcal{F}_x$ a satisfazer as seguintes condições:

$$i) F_x^\alpha, F_x^\beta \in \mathcal{F}_x \Rightarrow F_x^\alpha \subset F_x^\beta \text{ ou } F_x^\beta \subset F_x^\alpha$$

$$ii) \{x\} \notin \mathcal{F}_x$$

$$iii) 1 = \sum_{\alpha} F_x^\alpha \text{ para cada } x \in 1$$

iv) Encontra-se definida, numa classe $\mathcal{C} \subset 2^1$ uma função real de conjunto $\Gamma(X)$ a satisfazer

$$a) \text{ Para cada } x \in 1, 0, \{x\} \in \mathcal{C}; \mathcal{F}_x \subset \mathcal{C};$$

$$b) \text{ Para cada } x \in 1, \text{ a cada número real } \alpha \in (0, +\infty) \text{ corresponde um e um só conjunto } F_x^\alpha \in \mathcal{F}_x \text{ tal que } \Gamma(F_x^\alpha) = \alpha;$$

$$c) \Gamma(X) = 0 \text{ se e só se } \text{Card}(X) \leq 1;$$

$$d) X, Y \in \mathcal{C} \quad X \subset Y \Rightarrow \Gamma(X) \leq \Gamma(Y).$$

Com estas condições obtemos imediatamente o seguinte:

TEOREMA 1: Para cada $x \in 1$ existe uma correspondência biunívoca

$$\mathcal{F}_x \xleftrightarrow{\theta_x} (0, +\infty) \text{ a satisfazer}$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \theta_x(\alpha) \subset \theta_x(\beta) \quad \theta_x(\alpha), \theta_x(\beta) \in \mathcal{F}_x$$

Dem: Com efeito, a cada $X \in \mathcal{F}_x$ corresponde, por a), c) e d) de iv), $\Gamma(X) \in (0, +\infty)$ e inversamente, por b) de iv). Se $\theta_x(\alpha) \subset \theta_x(\beta)$ então, por d) $\Gamma[\theta_x(\alpha)] \leq \Gamma[\theta_x(\beta)]$ ou seja, $\alpha \leq \beta$. Inversamente, se $\alpha < \beta$ não poderá ser $\theta_x(\alpha) \supset \theta_x(\beta)$ pois, neste caso, por d) $\Gamma[\theta_x(\alpha)] \geq \Gamma[\theta_x(\beta)]$. Então, por i), $\theta_x(\alpha) \subset \theta_x(\beta)$. Se $\alpha = \beta$, $\theta_x(\alpha) = \theta_x(\beta)$ e o teorema está demonstrado.

Com este teorema prova-se também o seguinte:

TEOREMA 2: Para cada $x \in 1$, a cada sucessão monótona de números reais positivos $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ a tender para $\alpha \geq 0$ é possível fazer corresponder uma sucessão monótona não crescente de conjuntos $F_x^{\alpha_n} \in \mathcal{F}_x$. Estendendo $\mathcal{C}$ de uma forma conveniente a $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} + \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é a classe de todos os conjuntos $\mathcal{D}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} F_x^{\alpha_n}$ de todas as sucessões não crescentes de $\mathcal{F}_x$ correspondentes a sucessões de números nas condições anteriores, tem-se $\Gamma(\lim_{n \rightarrow \infty} F_x^{\alpha_n}) = \alpha$.

Dem: Se $\alpha > 0$, pelo teorema anterior, para cada sucessão de números nas condições da hipótese existe uma sucessão não crescente de conjuntos de $\mathcal{F}_x$ que lhe corresponde. Ainda pelo teorema anterior existe $F_x^\alpha \in \mathcal{F}_x$ tal que $\Gamma(F_x^\alpha) = \alpha$, com $F_x^\alpha \subset F_x^{\alpha_n}$ qualquer que seja n . Então,

$$F_x^\alpha \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$$

Provemos agora que não existe nenhum $F_x \in \mathcal{F}_x$ com $F_x^\alpha \neq F_x \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$ tal que $F_x^\alpha \subset F_x \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$. De facto, se existisse F_x nestas condições, pelo teorema anterior existiria $\alpha^* \in (0, +\infty)$ tal que $\Gamma(F_x) = \alpha^*$, $\alpha^* > \alpha$, $\alpha^* < \alpha_n$ para qualquer n , o que é absurdo por definição de limite de uma sucessão de números. Então, para cada sucessão numerável de conjuntos $F_x^{\alpha_n}$ (sucessão não crescente) define-se, de uma forma inequívoca, um conjunto $F_x^\alpha \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$.

Desta maneira, a forma «conveniente» de estender a classe $\mathcal{C}$ será a de pôr, por definição, $\Gamma\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}\right) = \Gamma(F_x^\alpha) = \alpha$, o que prova o teorema. Se $\alpha = 0$, a demonstração é idêntica, só que, em vez de um conjunto $F_x^\alpha \in \mathcal{F}_x$ teremos o conjunto $\{x\} \in \mathcal{C}$.

Uma condição bastante forte, mas que se revelará necessária para o prosseguimento da análise é a seguinte condição v):

$$v) \bigcap_{\alpha} F_x^\alpha = \{x\} \text{ para cada } x \in 1.$$

Com esta condição v) poderemos demonstrar o seguinte:

TEOREMA 3: Para cada $x \in 1$ é possível construir sucessões monótonas não crescentes de conjuntos de $\mathcal{F}_x$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_x^{\alpha_n} = \{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$.

Dem: Consideremos a sucessão não crescente de todos os $F_x^{\alpha_n}$ em que α_n percorre o conjunto dos números racionais de $(0, +\infty)$. Seja $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$ e suponhamos que existia $F_x^\alpha \in \mathcal{F}_x$ tal que $\{x\} \subset F_x^\alpha \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$, $\Gamma(F_x^\alpha) = \alpha$, $F_x^\alpha \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$. Então, pelo teorema 1 existiria um número real α tal que $0 < \alpha < \Gamma(F_x^{\alpha_n})$ para todos os α_n . Deste modo, encontraríamos racionais β , $0 < \beta < \alpha$, ou seja, existiriam conjuntos F_x^β com β racional tais que $F_x^\beta \subset F_x^\alpha$, $F_x^\beta \neq F_x^\alpha$, o que seria absurdo.

Então, não existe nenhum conjunto de $\mathcal{F}_x$ entre $\{x\}$ e $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n}$, isto é, para qualquer α real $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n} \subset F_x^\alpha$ ou seja, $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n} \subset \bigcap_{\alpha} F_x^\alpha$.

Como $x \in F_x^{\alpha_n}$ qualquer que seja α_n , pela condição v), $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_x^{\alpha_n}$ conforme se queria provar.

Podemos provar ainda o seguinte:

TEOREMA 4: Qualquer conjunto $X \in 2^1$ é coberto por uma cobertura numerável tirada de $\mathcal{F}_x$, para um qualquer x .

Dem: Provemos o teorema para $X = 1$. Pela condição *iii)* tem-se, para cada $x \in 1$, $1 = \sum_{\alpha} F_x^{\alpha}$. Então, para cada $y \in 1$ existe um $F_x^{\alpha_y}$ tal que $y \in F_x^{\alpha_y}$. Como Γ é definida em $\mathcal{F}_x$ tem-se $\Gamma(F_x^{\alpha_y}) = \alpha_y$ onde α_y é real. Então é possível encontrar um racional $r_y > \alpha_y$ e, pelo teorema 1, existe $F_x^{r_y}$ tal que $F_x^{r_y} \supset F_x^{\alpha_y}$ donde $y \in F_x^{r_y}$ conforme se queria provar.

2 — Continuidade e derivação

Consideremos um conjunto fundamental 1, espaço topológico a satisfazer $\lambda) \rightarrow \nu)$. Seja $X \in 1$ e $f: X \rightarrow R$ função real de ponto definida sobre o conjunto X , limitada, isto é, $-\infty < wf(X) \leq f(x) \leq Wf(X) < +\infty$ onde wf e Wf são, respectivamente, funções limite inferior e superior de Weierstrass da f sobre X .

DEFINIÇÃO: $f: X \rightarrow R$ é contínua no ponto $x \in X$ se e só se a cada vizinhança S_x^f de $f(x)$ corresponde uma vizinhança F_x de x tal que $f(F_x X) \subset S_x^f$ (ou seja, qualquer que seja $y \in F_x X$ se tem $f(y) \in S_x^f$)

TEOREMA 5: $f: X \rightarrow R$ é contínua no ponto $x \in X$ se e só se $\lim_{n \rightarrow \infty} Wf(F_x^n X) = \lim_{n \rightarrow \infty} wf(F_x^n X) = f(x)$ para qualquer sucessão monótona não crescente $\{F_x^n X\}$, $F_x^n \in \mathcal{F}_x$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_x^n X$

Dem: A condição é necessária.

Com efeito, por ser $f(x)$ contínua, para qualquer $\varepsilon/2 > 0$ existe uma vizinhança $F_x^{(\varepsilon/2)}$ tal que, qualquer que seja $y \in F_x^{(\varepsilon/2)} X$ se tem

$$f(x) - \varepsilon/2 < f(y) < f(x) + \varepsilon/2$$

$$Wf(F_x^{(\varepsilon/2)} X) \leq f(x) + \varepsilon/2$$

e, portanto

$$wf(F_x^{(\varepsilon/2)} X) \geq f(x) - \varepsilon/2$$

ou

$$Wf(F_x^{(\varepsilon/2)} X) - wf(F_x^{(\varepsilon/2)} X) \leq \varepsilon$$

Considere-se uma qualquer sucessão monótona $\{F_x^n X\}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} F_x^n X = \{x\}$.

Fazendo $\frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{1}{n}$ tem-se, para cada n uma vizinhança $F_x^{(1/n)}$ tal que

$0 \leq Wf(F_x^{(1/n)} X) - wf(F_x^{(1/n)} X) \leq \varepsilon_n$. Para cada n escolha-se $F_x^{a_n} \in \{F_x^n\}$ tal que $F_x^{a_n} \subset F_x^{(1/n)}$. Então, tem-se

$$0 \leq S_{a_n} = Wf(F_x^{a_n} X) - wf(F_x^{a_n} X) \leq \varepsilon_n$$

Como a sucessão $S_n = Wf(F_x^n X) - wf(F_x^n X)$ é monótona não crescente com n ($S_n \geq 0$) e como S_{a_n} é uma subsucessão de S_n o limite de S_{a_n} será também o de S_n . Como $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ $\lim S_{a_n} = \lim S_n = 0$. Então, qualquer que seja a sucessão $\{F_x^n X\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Wf(F_x^n X) = \lim_{n \rightarrow \infty} wf(F_x^n X) = f(x)$ por ser sempre $x \in F_x^n X$.

A condição é suficiente.

Com efeito, seja $\epsilon > 0$ qualquer. Existe $N = n(\epsilon)$ e uma sucessão $\{F_x^n X\}$ tais que $Wf(F_x^N X) - wf(F_x^N X) < \epsilon$ com $\{x\} \subset F_x^N X$, $F_x^N X \in \{F_x^n X\}$

Desta forma,

$$\begin{aligned} Wf(F_x^N X) &< \epsilon + wf(F_x^N X) \leq \epsilon + f(x) \\ - wf(F_x^N X) &< \epsilon - Wf(F_x^N X) \\ wf(F_x^N X) &> Wf(F_x^N X) - \epsilon \geq f(x) - \epsilon \end{aligned}$$

ou seja, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $N(\epsilon)$ tal que, para qualquer $y \in F_x^{N(\epsilon)} X$ se tem $f(x) - \epsilon < wf(F_x^N X) \leq f(y) \leq Wf(F_x^N X) < f(x) + \epsilon$, conforme se queria provar.

Com este teorema demonstrado podemos apresentar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Diz-se que $f: X \rightarrow R$, contínua em X tem derivada direita (esquerda) no ponto $x \in \text{Int}(X)$ se e só se existem os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Wf(F_x^n) - f(x)}{\Gamma(F_x^n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - wf(F_x^n)}{\Gamma(F_x^n)}$$

quando $\lim_{n \rightarrow \infty} F_x^n \rightarrow \{x\}$, $F_x^n \in \mathcal{F}_x$

Observações: Γ é definida como em iv); f é contínua em X se e só se for contínua em cada $x \in X$; a derivada calcula-se para cada $x \in \text{Int}(X)$, o que permite afirmar que existe uma ordem N tal que $m > N \Rightarrow F_x^m \subset X$ e é essa a razão de se ter posto $Wf(F_x^n)$ e não $Wf(F_x^n X)$; a derivada terá de ser idêntica qualquer que seja a sucessão de conjuntos de $\mathcal{F}_x$ não crescente, a tender para $\{x\}$.

Recordemos também, do artigo já citado, uma definição que vai ser utilizada:

DEFINIÇÃO: Sendo $\mathcal{C}$ uma cadeia de conjuntos, isto é, uma classe de conjuntos $C \in \mathcal{C}$ tais que $C_0, C_1 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_0 \subset C_1$ ou $C_1 \subset C_0$, diz-se que a função de conjunto λ definida sobre $\mathcal{C}$ é convexa (côncava) em relação à função de conjunto monótona crescente μ definida sobre $\mathcal{C}$ se e só se, com $C_0 \subset C_1$, $C_0, C_1 \in \mathcal{C}$ se tem

$$\frac{\lambda(C) - \lambda(C_0)}{\mu(C) - \mu(C_0)} \leq \frac{\lambda(C_1) - \lambda(C_0)}{\mu(C_1) - \mu(C_0)} \quad \frac{\lambda(C) - \lambda(C_0)}{\mu(C) - \mu(C_0)} \geq \frac{\lambda(C_1) - \lambda(C_0)}{\mu(C_1) - \mu(C_0)}$$

para qualquer $C \in \mathcal{C}$, $C_0 \subset C \subset C_1$.

Podemos agora demonstrar o seguinte teorema sobre funções f contínuas sobre um conjunto X .

TEOREMA 6: Se Wf for convexa em relação a Γ sobre a cadeia de conjuntos $\mathcal{C} = \mathcal{F}_x + \{\{x\}\}$ então existe derivada direita de f em cada ponto $x \in \text{Int}(X)$ e essa derivada é independente da sucessão monótona de conjuntos de $\mathcal{C}$ utilizada para o seu cálculo.

Dem: Se Wf for convexa em relação a Γ , tem-se, para quaisquer $F_x^{m_1}, F_x^{m_2} \in \mathcal{C}$, $F_x^{m_2} \subset F_x^{m_1}$:

$$0 \leq \frac{Wf(F_x^{m_2}) - f(x)}{\Gamma(F_x^{m_2})} \leq \frac{Wf(F_x^{m_1}) - f(x)}{\Gamma(F_x^{m_1})}$$

por ser $\Gamma(\{x\}) = 0$, $Wf(\{x\}) = wf(\{x\}) = f(x)$.

Então, quando $m_i \rightarrow \infty$, obtemos uma sucessão monótona não crescente de números positivos que tem, portanto, limite e a primeira parte do teorema está demonstrada. Consideremos agora duas sucessões $\{F_x^{m_i}\}, \{G_x^{k_i}\} \subset \mathcal{C}$ a tenderem para $\{x\}$. Qualquer que seja $F_x^{m_s} \in \{F_x^{m_i}\}$ existe sempre $G_x^{k_r} \in \{G_x^{k_i}\}$ tal que $G_x^{k_r} \subset F_x^{m_s}$ e inversamente. Então, existem sempre conjuntos $F_x^{m_s}, G_x^{k_r}, G_x^{k_r}, F_x^{m_v}$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{Wf(G_x^{k_r}) - f(x)}{\Gamma(G_x^{k_r})} &\leq \frac{Wf(F_x^{m_s}) - f(x)}{\Gamma(F_x^{m_s})} \\ \frac{Wf(F_x^{m_v}) - f(x)}{\Gamma(F_x^{m_v})} &\leq \frac{Wf(G_x^{k_r}) - f(x)}{\Gamma(G_x^{k_r})} \end{aligned}$$

e, portanto existem conjuntos $F_x^m, G_x^k, F_x^{m+h}, G_x^{k+j}$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{Wf(G_x^{k+j}) - f(x)}{\Gamma(G_x^{k+j})} &\leq \frac{Wf(F_x^{m+h}) - f(x)}{\Gamma(F_x^{m+h})} \leq \\ &\leq \frac{Wf(G_x^k) - f(x)}{\Gamma(G_x^k)} \leq \frac{Wf(F_x^m) - f(x)}{\Gamma(F_x^m)} \end{aligned}$$

e as duas sucessões não poderão ter limites diferentes.

Teoremas semelhantes se poderiam demonstrar para a concavidade e a função wf . A convexidade representou aqui um papel importante e irá também permitir uma aplicação a R^n , como se verá a seguir.

3 — Aplicação a R^n

Seja um espaço R^n e tomemos como família de vizinhanças a família de esferas abertas de raio real positivo [que verifica as condições i) a v)] e para função f o diâmetro das esferas. Seja $X \in R^n$ conjunto compacto, convexo, não vazio. Demonstramos o seguinte teorema:

TEOREMA 7: Se $f(x)$, função real contínua definida sobre X for convexa, então $Wf(X)$ é função de conjunto convexa em relação a D sobre todas as cadeias de esferas de extremos $\{x\}$ e E_x , correspondentes a todos os $x \in \text{Int}(X)$. Por E_x se designa a maior esfera aberta de centro x contida em X e por D se designa a função de conjunto Diâmetro de esferas⁽²⁾.

Dem: Para cada $x \in \text{Int}(X)$ seja $\mathcal{C}_{\{x\} E_x}$ a cadeia de esferas abertas de extremos $\{x\}$ e E_x . Seja $E^* \in \mathcal{C}_{\{x\} E_x}$. Pretende-se demonstrar que, com f convexa e $E_x^* \subset E'_x$, $E'_x \in \mathcal{C}_{\{x\} E_x}$

$$\frac{Wf(E_x^*) - f(x)}{D(E_x^*)} \leq \frac{Wf(E'_x) - f(x)}{D(E'_x)}$$

Por ser $f(x)$ convexa, o ponto $x^* \in X$ tal que $f(x^*) = Wf(E_x^*)$ pertence à fronteira de E_x^* . Isto é, $x^* \in Fr(E_x^*) = \{Z : d(Zx) = \frac{D(E_x^*)}{2}\}$

Consideremos agora o segmento que passa por x^* com uma das extremidades x e a outra (y) pertencente a $Fr(E'_x)$. Por ser $f(x)$ convexa

$$f(x^*) \leq \mu f(x) + (1 - \mu) f(y) \quad x^* = \mu x + (1 - \mu) y \quad y \in Fr(E'_x)$$

ou, como $Wf(E_x^*) = f(x^*)$ e por ser $f(y) \leq Wf(E'_x)$

$$Wf(E_x^*) \leq \mu f(x) + (1 - \mu) Wf(E'_x)$$

como $d(x^*x) = \frac{D(E_x^*)}{2} = \|x^* - x\|$ e $d(yx) = \frac{D(E'_x)}{2} = \|y - x\|$

tem-se $\frac{D(E_x^*)}{2} = \|x^* - x\| = (1 - \mu) \|y - x\| = (1 - \mu) \frac{D(E'_x)}{2}$

donde $1 - \mu = \frac{D(E_x^*)}{D(E'_x)}, \quad \mu = 1 - \frac{D(E_x^*)}{D(E'_x)}$

Então,

$$Wf(E_x^*) \leq \left[1 - \frac{D(E_x^*)}{D(E'_x)}\right] f(x) + \frac{D(E_x^*)}{D(E'_x)} Wf(E'_x)$$

conforme se queria provar.

⁽²⁾ Note-se, porém, que o teorema só é demonstrável quando o conjunto C_0 da definição de convexidade é fixo e igual a $\{x\}$. Trata-se, pois, de uma convexidade mais restrita, mas que chega para os nossos propósitos.

Com este teorema podemos proceder ao cálculo da derivada num ponto interior de um conjunto do espaço R^2 .

Consideremos um conjunto Y , limitado, convexo, não vazio, de R^2 , $\text{Int}(Y) \neq \emptyset$.

Seja $E_{(x,y)}$ a maior esfera aberta de centro $(x, y) \in \text{Int}(Y)$. Se $f(x, y)$ for convexa sobre Y então, pelo teorema anterior, Wf é convexa sobre a cadeia $\mathcal{C}_{\{(x,y), E_{(x,y)}\}}$ e, portanto, pelo teorema 6 se $\Gamma = D$ com F_x família das esferas abertas, existe a derivada direita de f em todos os pontos $\text{Int}(Y)$.

Seja f , além de contínua, também função de derivadas parciais contínuas e limitadas em $\text{Int}(Y)$.

Sendo $f(x, y)$ convexa sobre Y , tem-se

$Wf[E_{(x,y)}^r] = f(x^*, y^*)$ onde $E_{(x,y)}^r$ é a esfera aberta de raio r e centro (x, y)
 $E_{(x,y)}^r \subset E_{(x,y)}$ e $(x^*, y^*) \in F_r(E_{(x,y)}^r)$, ou seja, $(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2 = r^2$

Para determinarmos (x^*, y^*) construa-se a Langrangeana

$$L(x^*, y^*) = f(x^*, y^*) - \lambda [(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2 - r^2]$$

derivando⁽³⁾,

$$\frac{\partial f}{\partial x^*} - 2\lambda(x^* - x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^*} - 2\lambda(y^* - y) = 0$$

$$(x^* - x)^2 + (y^* - y)^2 = r^2$$

que nos dão as condições necessárias de máximo para $(x, y) \in E_{(x,y)}^r$.

Eliminando-se λ obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y^*} - \frac{y^* - y}{x^* - x} \frac{\partial f}{\partial x^*} = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y^*} = \frac{y^* - y}{x^* - x} \frac{\partial f}{\partial x^*}$$

elevando ao quadrado e substituindo $(y^* - y)^2$ pelo seu valor, vem

$$(x^* - x)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 = [r^2 - (x^* - x)^2] \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2$$

donde

$$(x^* - x)^2 = \frac{r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2} \quad x^* = x \pm \frac{r \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}$$

⁽³⁾ $\frac{\partial f}{\partial x^*}$ e $\frac{\partial f}{\partial y^*}$ nunca se anulam conjuntamente, pois nesse caso $f(x, y)$ seria constante, por ser convexa. Por outro lado, admitimos $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ em (x, y)

$$(y - y^*)^2 = \frac{r^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2} \quad y^* = y \pm \frac{r \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}$$

e, portanto

$$wf(E'_{(x,y)}) = f \left[x \pm \frac{r \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}, y \pm \frac{r \left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}} \right]$$

dependendo o sinal dos argumentos da condição de segunda ordem de máximo. Verifica-se facilmente que os argumentos a tomar serão os obtidos com o sinal « + » e, portanto

$$wf(E'_{(x,y)}) = f \left[x + \frac{r \frac{\partial f}{\partial x^*}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}, y + \frac{r \frac{\partial f}{\partial y^*}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}} \right]$$

Com efeito, se $\frac{\partial f}{\partial x^*} > 0$ então $Wf(E'_{(x,y)}) = f(x^*, \cdot) \geq f(x, \cdot)$ se e só se $x^* \geq x$, o que apenas acontece no caso de ser

$$x^* = x + \frac{r \frac{\partial f}{\partial x^*}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x^*} < 0$ então $f(x^*, \cdot) \geq f(x, \cdot)$ se e só se $x^* \leq x$, o que apenas acontece no caso

$$x^* = x + \frac{r \frac{\partial f}{\partial x^*}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^*} \right)^2}}$$

da mesma forma para y .

Para calcularmos agora a derivada direita em (x, y) teremos, aplicando a definição, de calcular

$$f'_d(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Wf(E'_{(x,y)}) - f(x, y)}{2r}$$

ou seja,

$$2f'_d(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\delta f}{\delta x^*}}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x^*}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y^*}\right)^2}} \frac{f(x, y^*) - f(x, y)}{r \left(\frac{\delta f}{\delta x^*}\right)} +$$

$$+ \frac{\frac{\delta f}{\delta y^*}}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x^*}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y^*}\right)^2}} \frac{f(x, y^*) - f(x, y)}{r \left(\frac{\delta f}{\delta y^*}\right)} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x^*}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y^*}\right)^2}}$$

Como $\begin{matrix} x^* \rightarrow x \\ y^* \rightarrow y \end{matrix}$ quando $r \rightarrow 0$ e $\frac{\delta f}{\delta x}$ e $\frac{\delta f}{\delta y}$ são contínuas e limitadas, por hipótese, tem-se

$$2f'_d(x, y) = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}} + \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}$$

e obteremos uma expressão simples (generalizável sob certas condições para outras funções) que ilustra uma aplicação das funções de conjunto convexas.

JANEIRO 1982

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, J. — *Topologia*, AEISCEF, Lisboa, 1964.
 ALBUQUERQUE, J.; AMARAL, Ferreira do; RIBEIRO, Silva — «Classes convexas et fonctions d'ensemble convexas», *Economia e Finanças* (anais do ISCEF), vol. XXXVII, 1969, p. 155.
 MARLE, Charles-Michel — *Mesures et probabilités*, Hermann, Paris, 1974.