Estudos de Economia, vol. IV, n.º 1, Out.-Dez. 1983

ANÁLISE DA SENSIBILIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR QUANDO O PRIMAL ESTÁ NA FORMA ESTRUTURAL

C. Silva Ribeiro (*)

1) INTRODUÇÃO

Considere-se um par de problemas duais de Programação Linear, na forma estrutural:

	Primal	**Dual**
	$\text{Máx } z(x) = c^T x$	$\text{Mín } z(u) = \bar{b}_1^T \bar{u}_1 + \bar{b}_2^T \bar{u}_2 + \bar{b}_3^T \bar{u}_3$
$m_1 \rightarrow$	$Ex \leq \bar{b}_1$	$\bar{u}_1 \geq \bar{0}$
$m \quad m_2 \rightarrow$	$Fx = \bar{b}_2$	$\bar{u}_2$ livre
$m_3 \rightarrow$	$Gx \geq \bar{b}_3$	$\bar{u}_3 \leq \bar{0}$
$p \rightarrow$	$x \geq \bar{0}$	$E^T \bar{u}_1 + F^T \bar{u}_2 + G^T \bar{u}_3 \geq c$

onde: $x \varepsilon R^p$ — vector das variáveis primais estruturais (o espaço das soluções do primal é o espaço R^p); c — matriz $(px1)$ dos coeficientes da função objectivo; E — matriz $(m_1 xp)$ dos coeficientes das variáveis estruturais das restrições de tipo $\leqslant$; F — matriz $(m_2 xp)$ dos coeficientes das variáveis estruturais das restrições de tipo $=$; G — matriz $(m_3 xp)$ dos coeficientes das variáveis estruturais das restrições de tipo $\geqslant$; $\bar{b}_1 \geqslant \bar{0}$ — matriz $(m_1 x1)$ dos segundos membros das restrições de tipo $\leqslant$; $\bar{b}_2 \geqslant \bar{0}$ — matriz $(m_2 \times 1)$ dos segundos membros das restrições de tipo $=$; $\bar{b}_3 \geqslant \bar{0}$ — matriz $(m_3 x1)$ dos segundos membros das restrições de tipo $\geqslant$; $m = m_1 + m_2 + m_3$ (o espaço das restrições do primal é o espaço R^m); $\bar{u}_1 \varepsilon R^{m_1}$ — vector das variáveis duais estruturais associadas com as restrições de tipo $\leqslant$; $\bar{u}_2 \varepsilon R^{m_2}$ — vector das variáveis duais estruturais associadas com as restrições de tipo $=$; $\bar{u}_3 \varepsilon R^{m_3}$ — vector das variáveis duais estruturais associadas com as restrições tipo $\geqslant$.

(*) Professor auxiliar do Instituto Superior de Economia. Responsável pelas disciplinas de Microeconomia do Mestrado em Métodos Matemáticos para Economia e Gestão de Empresas e de Métodos Matemáticos I, do 1.º ano das licenciaturas.

Procedendo à estandardização do primal e do dual obtém-se:

Primal	**Dual**
$\text{Máx } z(x)=c^T x$	$\text{Mín } z(u)=\bar{b}_1^T\bar{u}_1+\bar{b}_2^T\bar{u}_2+\bar{b}_3^T\bar{u}_3$
$Ex+\bar{y}_1=\bar{b}_1$	$E^T\bar{u}_1+F^T\bar{u}_2+G^T\bar{u}_3-v=c$
$Fx=\bar{b}_2$	$\bar{u}_1\geq\bar{0},\ \bar{u}_2 \text{ livre},\ \bar{u}_3\leq\bar{0},\ v\geq\bar{0}$
$Gx-\bar{y}_3=\bar{b}_3$	
$x\geq\bar{0},\ \bar{y}_1\geq\bar{0},\ \bar{y}_3\geq\bar{0}$	

onde: $\bar{y}_1\varepsilon R^{m_1}$ — vector das variáveis primais auxiliares associadas com as restrições de tipo $\leqslant$; $\bar{y}_3\varepsilon R^{m_3}$ — vector das variáveis primais auxiliares associadas com as restrições de tipo $\geqslant$; $v\varepsilon R^p$ — vector das variáveis duais auxiliares.

Relembrem-se as relações de exclusão entre o primal e o dual:

$$x^T v=0;\ \bar{u}_1^T\bar{y}_1=0;\ \bar{u}_2^T\bar{y}_2=0 \text{ (com } \bar{y}_2=0);\ \bar{u}_3^T\bar{y}_3=0$$

2) VARIÁVEIS BÁSICAS E NÃO BÁSICAS

Supõe-se que se está numa dada iteração do simplex para a resolução do problema primal. Nesta iteração tem-se:

$\bar{x}_1\varepsilon R^{p_1}$ — vector das variáveis primais estruturais básicas;
$\bar{x}_2\varepsilon R^{p_2}$ — vector das variáveis primais estruturais não básicas;
$\bar{y}_{11}\varepsilon R^{m_{11}}$ — vector das variáveis primais auxiliares (das restrições de tipo $\leqslant$) não básicas;
$\bar{y}_{12}\varepsilon R^{m_{12}}$ — vector das variáveis primais auxiliares (das restrições de tipo $\leqslant$) básicas;
$\bar{y}_{31}\varepsilon R^{m_{31}}$ — vector das variáveis primais auxiliares (das restrições de tipo $\geqslant$) não básicas;
$\bar{y}_{32}\varepsilon R^{m_{32}}$ — vector das variáveis primais auxiliares (das restrições de tipo $\geqslant$) básicas;
$\bar{v}_1\varepsilon R^{p_1}$ — vector das variáveis duais auxiliares não básicas;
$\bar{v}_2\varepsilon R^{p_2}$ — vector das variáveis duais auxiliares básicas;
$\bar{u}_{11}\varepsilon R^{m_{11}}$ — vector das variáveis duais estruturais (associadas com as restrições de tipo $\leqslant$) básicas;
$\bar{u}_{12}\varepsilon R^{m_{12}}$ — vector das variáveis duais estruturais (associadas com as restrições de tipo $\leqslant$) não básicas;
$\bar{u}_{31}\varepsilon R^{m_{31}}$ — vector das variáveis duais estruturais (associadas com as restrições de tipo $\geqslant$) básicas;
$\bar{u}_{32}\varepsilon R^{m_{32}}$ — vector das variáveis duais estruturais (associadas com as restrições de tipo $\geqslant$) não básicas.

Tem-se: $p_1+p_2=p$; $m_{11}+m_{12}=m_1$; $m_{31}+m_{32}=m_3$.
As relações de exclusão garantem que:

$$\bar{x}_1^T\bar{v}_1=0;\ \bar{x}_2^T\bar{v}_2=0;\ \bar{u}_{11}^T\bar{y}_{11}=0;\ \bar{u}_{12}^T\bar{y}_{12}=0;\ \bar{u}_2^T\bar{y}_2=0\ (\bar{y}_2=\bar{0});\ \bar{u}_{31}^T\bar{y}_{31}=0;\ \bar{u}_{32}^T\bar{y}_{32}=0.$$

Como o número de variáveis primais básicas é igual ao número de restrições tem-se:

$$p_1+m_{12}+m_{32}=m \quad \text{ou} \quad p_1+(m_1-m_{11})+(m_3-m_{31})=m_1+m_2+m_3$$

e portanto $$\boxed{p_1=m_{11}+m_2+m_{31}}$$

isto é, *em qualquer iteração do simplex, o número de variáveis primais estruturais básicas é igual ao número de restrições saturadas*

$$(\bar{y}_{11}=0,\ \bar{y}_2=0,\ \bar{y}_{31}=0)\ (*)$$

As decomposições dos vectores x, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_3$, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_3$ e v

$$x=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}\to p_1\\ \to p_2\end{matrix};\quad \bar{y}_1=\begin{bmatrix}\bar{y}_{11}\\ \bar{y}_{12}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to m_{11}\\ \to m_{12}\end{matrix};\quad \bar{y}_3=\begin{bmatrix}\bar{y}_{31}\\ \bar{y}_{32}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to m_{31}\\ \to m_{32}\end{matrix};\quad \bar{u}_1=\begin{bmatrix}\bar{u}_{11}\\ \bar{u}_{12}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to m_{11}\\ \to m_{12}\end{matrix};$$

$$\bar{u}_3=\begin{bmatrix}\bar{u}_{31}\\ \bar{u}_{32}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to m_{31}\\ \to m_{32}\end{matrix};\quad v=\begin{bmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{v}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}\to p_1\\ \to p_2\end{matrix}$$

induz a seguinte decomposição das matrizes E, F, G, c, $\bar{b}_1$ e $\bar{b}_3$:

$$\bar{E}=\begin{array}{c}\begin{matrix}p_1 & p_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}m_{11}\\ m_{12}\end{matrix};\quad F=\begin{array}{c}\begin{matrix}p_1 & p_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}F_1 & F_2\end{bmatrix}\end{array}\ m_2;\quad G=\begin{array}{c}\begin{matrix}p_1 & p_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}m_{31}\\ m_{32}\end{matrix};$$

$$c=\begin{bmatrix}\bar{c}_1\\ \bar{c}_2\end{bmatrix}\begin{matrix}p_1\\ p_2\end{matrix};\quad \bar{b}_1=\begin{bmatrix}\bar{b}_{11}\\ \bar{b}_{12}\end{bmatrix}\begin{matrix}m_{11}\\ m_{12}\end{matrix};\quad \bar{b}_3=\begin{bmatrix}\bar{b}_{31}\\ \bar{b}_{32}\end{bmatrix}\begin{matrix}m_{31}\\ m_{32}\end{matrix}$$

(*) Em termos do dual tem-se a seguinte conclusão equivalente: o número de variáveis duais auxiliares não básicas ($\bar{v}_1$) é igual ao número de variáveis duais estruturais básicas ($\bar{u}_{11}$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_{31}$).

A partir destas decomposições os problemas primal e dual podem escrever-se da seguinte maneira:

Primal

$$\text{Máx } z(x) = \bar{c}_1^T \bar{x}_1 + \bar{c}_2^T \bar{x}_2$$

$$\begin{array}{llllll}
E_{11}\bar{x}_1 + E_{12}\bar{x}_2 + \bar{y}_{11} & & & & & = \bar{b}_{11} \\
F_1 \bar{x}_1 + F_2 \bar{x}_2 & & & & & = \bar{b}_2 \\
G_{11}\bar{x}_1 + G_{12}\bar{x}_2 & -\bar{y}_{31} & & & & = \bar{b}_{31} \\
E_{21}\bar{x}_1 + E_{22}\bar{x}_2 & & +\bar{y}_{12} & & & = \bar{b}_{12} \\
G_{21}\bar{x}_1 + G_{22}\bar{x}_2 & & & -\bar{y}_{32} & & = \bar{b}_{32}
\end{array}$$

$$\bar{x}_1 \geq \bar{0};\ \bar{x}_2 = \bar{0};\ \bar{y}_{11} = \bar{0};\ \bar{y}_{31} = \bar{0};\ \bar{y}_{12} \geq \bar{0};\ \bar{y}_{32} \geq \bar{0}.$$

Dual

$$\text{Mín } z(u) = \bar{b}_{11}^T \bar{u}_{11} + \bar{b}_2^T \bar{u}_2 + \bar{b}_{31}^T \bar{u}_{31} + \bar{b}_{12}^T \bar{u}_{12} + \bar{b}_{32}^T \bar{u}_{32}$$

$$\begin{array}{ll}
E_{11}^T \bar{u}_{11} + F_1^T \bar{u}_2 + G_{11}^T \bar{u}_{31} + E_{21}^T \bar{u}_{12} + G_{21}^T \bar{u}_{32} - \bar{v}_1 & = \bar{c}_1 \\
E_{12}^T \bar{u}_{11} + \bar{F}_2^T \bar{u}_2 + G_{12}^T \bar{u}_{31} + E_{22}^T \bar{u}_{12} + G_{22}^T \bar{u}_{32} \quad - \bar{v}_2 & = \bar{c}_2
\end{array}$$

$$\bar{u}_{11} \gtrless \bar{0};\ \bar{u}_2 \gtrless \bar{0};\ \bar{u}_{31} \gtrless \bar{0};\ \bar{u}_{12} = \bar{0};\ \bar{u}_{32} = \bar{0};\ \bar{v}_1 = \bar{0};\ \bar{v}_2 \gtrless \bar{0}.$$

Fazendo:

$$B_1 = \begin{array}{c} p_1 \\ \begin{bmatrix} E_{11} \\ F_1 \\ G_{11} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m_{11} \\ m_2 \\ m_{31} \end{array};\quad B_2 = \begin{array}{c} p_2 \\ \begin{bmatrix} E_{12} \\ F_2 \\ G_{12} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} m_{11} \\ m_2 \\ m_{31} \end{array};\quad y_{(1)} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_2 \\ -\bar{y}_{31} \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_{11} \\ m_2 \\ m_{31} \end{array};\quad b_{(1)} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_{31} \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_{11} \\ m_2 \\ m_{31} \end{array};$$

$$u_{(1)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_{31} \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_{11} \\ m_2 \\ m_{31} \end{array}$$

Tem-se:

Primal

$$\text{Máx } z(x) = \bar{c}_1^T \bar{x}_1 + \bar{c}_2^T \bar{x}_2$$

$$\begin{aligned} B_1\bar{x}_1 + B_2\bar{x}_2 + y_{(1)} \qquad\qquad &= b_{(1)} \\ E_{21}\bar{x}_1 + E_{22}\bar{x}_2 \qquad + \bar{y}_{12} \qquad &= \bar{b}_{12} \\ G_{21}\bar{x}_1 + G_{22}\bar{x}_2 \qquad\qquad - \bar{y}_{32} &= \bar{b}_{32} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_1 \geq \bar{0};\ \bar{x}_2 = \bar{0};\ y_{(1)} = \bar{0};\ \bar{y}_{12} \geq \bar{0};\ \bar{y}_{32} \geq \bar{0}.$$

Dual

$$\text{Mín } z(u) = b_{(1)}^T u_{(1)} + \bar{b}_{12}^T \bar{u}_{12} + \bar{b}_{32}^T \bar{u}_{32}$$

$$\begin{aligned} B_1^T u_{(1)} + E_{21}^T \bar{u}_{12} + G_{21}^T \bar{u}_{32} - \bar{v}_1 \qquad &= \bar{c}_1 \\ B_2^T u_{(1)} + E_{22}^T \bar{u}_{12} + G_{22}^T \bar{u}_{32} \qquad - \bar{v}_2 &= \bar{c}_2 \end{aligned}$$

$$u_{(1)} \gtrless \bar{0};\ \bar{u}_{12} = \bar{0};\ \bar{u}_{32} = \bar{0};\ \bar{v}_1 = \bar{0};\ \bar{v}_2 \gtrless \bar{0}.$$

Nesta iteração do simplex têm-se as seguintes soluções básicas:

$\bar{x}_1 = B_1^{-1} b_{(1)} \geq \bar{0}$	$\bar{v}_1 = \bar{0}$
$\bar{x}_2 = \bar{0}$	$\bar{v}_2 = B_2^T (B_1^{-1})^T \bar{c}_1 - \bar{c}_2 \gtrless \bar{0}$
$y_{(1)} = \bar{0}$	$u_{(1)} = (B_1^{-1})^T \bar{c}_1 < \bar{0}$
$\bar{y}_{12} = \bar{b}_{12} - E_{21} B_1^{-1} b_{(1)} \geq \bar{0}$	$\bar{u}_{12} = \bar{0}$
$\bar{y}_{32} = G_{21} B_1^{-1} b_{(1)} - \bar{b}_{32} \geq \bar{0}$	$\bar{u}_{32} = \bar{0}$
$z(x) = \bar{c}_1^T B_1^{-1} b_{(1)}$	$z(u) = b_{(1)}^T (B_1^{-1})^T \bar{c}_1$

Verifica-se que $z(x) = z(u)$. As variáveis básicas do primal são $\bar{x}_1$, $\bar{y}_{12}$ e $\bar{y}_{32}$. A matriz da base é:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} p_1 & m_{12} & m_{32} \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ E_{21} & I & 0 \\ G_{21} & 0 & -I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_1 = m_{11} + m_2 + m_{31} \\ m_{12} \\ m_{32} \end{array}$$

A respectiva inversa é:

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & 0 \\ -E_{21}B_1^{-1} & I & 0 \\ G_{21}B_1^{-1} & 0 & -I \end{bmatrix}$$

Verifica-se que para inverter a matriz da base, basta inverter a matriz B_1, que corresponde às restrições saturadas e às variáveis estruturais básicas.

As variáveis básicas do dual são $\bar{v}_2$ e $u_{(1)}$. A matriz da base é:

$$D=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -I & B_2^T \\ 0 & B_1^T \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_2 \\ p_1 \end{array} \end{array}$$

A respectiva inversa é:

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} -I & B_2^T(B_1^{-1})^T \\ 0 & (B_1^{-1})^T \end{bmatrix}$$

3) RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Consideram-se as seguintes relações obtidas directamente dos problemas primal e dual:

$$\text{(I)} \quad B_1\bar{x}_1+B_2\bar{x}_2+y_{(1)}=b_{(1)} \qquad \text{(V)} \quad B_1^Tu_{(1)}+E_{21}^T\bar{u}_{12}+G_{21}^T\bar{u}_{32}-\bar{v}_1=\bar{c}_1$$

$$\text{(II)} \quad E_{21}\bar{x}_1+E_{22}\bar{x}_2+\bar{y}_{12}=\bar{b}_{12} \qquad \text{(VI)} \quad B_2^Tu_{(1)}+E_{22}^T\bar{u}_{12}+G_{22}^T\bar{u}_{32}-\bar{v}_2=\bar{c}_2$$

$$\text{(III)} \quad G_{21}\bar{x}_1+G_{22}\bar{x}_2-\bar{y}_{32}=\bar{b}_{32} \qquad \text{(VII)} \quad z(u)=b_{(1)}^Tu_{(1)}+\bar{b}_{12}^T\bar{u}_{12}+\bar{b}_{32}^T\bar{u}_{32}$$

$$\text{(IV)} \quad z(x)=\bar{c}_1^T\bar{x}_1+\bar{c}_2^T\bar{x}_2$$

A relação (I) dá directamente a expressão das variáveis primais estruturais básicas em função das variáveis primais não básicas:

$$\text{(VIII)} \quad \bar{x}_1=\underbrace{B_1^{-1}b_{(1)}}_{1}-\underbrace{B_1^{-1}B_2}_{7}\bar{x}_2-\underbrace{B_1^{-1}}_{8}y_{(1)}$$

Substituindo (VIII) em (II) e (III) obtêm-se as expressões das variáveis primais auxiliares básicas em função das variáveis primais não básicas:

$$\text{(IX)} \qquad \bar{y}_{12} = \underbrace{(\bar{b}_{12} - E_{21}B_1^{-1}b_{(1)})}_{2} + \underbrace{(E_{21}B_1^{-1}B_2 - E_{22})}_{9}\bar{x}_2 + \underbrace{E_{21}B_1^{-1}}_{11}y_{(1)}$$

$$\text{(X)} \qquad \bar{y}_{32} = \underbrace{(G_{21}B_1^{-1}b_{(1)} - \bar{b}_{32})}_{3} + \underbrace{(G_{22} - G_{21}B_1^{-1}B_2)}_{10}\bar{x}_2 - \underbrace{G_{21}B_1^{-1}}_{12}y_{(1)}$$

Substituindo (VIII) em (IV) tem-se a expressão da função objectivo do primal em função das variáveis primais não básicas:

$$\text{(XI)} \qquad z(x) = \underbrace{\bar{c}_1^T B_1^{-1} b_{(1)}}_{4} + \underbrace{(\bar{c}_2^T - \bar{c}_1^T B_1^{-1} B_2)}_{6}\bar{x}_2 - \underbrace{\bar{c}_1^T B_1^{-1}}_{5} y_{(1)}$$

A relação (V) dá directamente a expressão das variáveis duais estruturais básicas em função das variáveis duais não básicas:

$$\text{(XII)} \qquad u_{(1)} = \underbrace{(B_1^{-1})^T \bar{c}_1}_{5} - \underbrace{(B_1^{-1})^T E_{21}^T}_{11}\bar{u}_{12} - \underbrace{(B_1^{-1})^T G_{21}^T}_{12}\bar{u}_{32} + \underbrace{(B_1^{-1})^T}_{8}\bar{v}_1$$

Substituindo-se (XII) em (VI) obtém-se a expressão das variáveis duais auxiliares básicas em função das variáveis duais não básicas:

$$\text{(XIII)} \qquad \bar{v}_2 = -\underbrace{(\bar{c}_2 - B_2^T (B_1^{-1})^T \bar{c}_1)}_{6} - \underbrace{(B_2^T (B_1^{-1})^T E_{21}^T - E_{22}^T)}_{9}\bar{u}_{12}$$

$$- \underbrace{(B_2^T (B_1^{-1})^T G_{21}^T - G_{22}^T)}_{10}\bar{u}_{32} + \underbrace{B_2^T (B_1^{-1})^T}_{7}\bar{v}_1$$

Substituindo-se (XII) em (VII) tem-se a expressão da função objectivo do dual em função das variáveis duais não básicas:

$$
\text{(XIV)} \qquad z(u) = \underbrace{b_{(1)}^{T}(B_{1}^{-1})^{T}\bar{c}_{1}}_{4} + \underbrace{(\bar{b}_{12}^{T} - b_{(1)}^{T}(B_{1}^{-1})^{T}E_{21}^{T})}_{2}\bar{u}_{12}
$$

$$
+ \underbrace{(\bar{b}_{32}^{T} - b_{(1)}^{T}(B_{1}^{-1})^{T}G_{21}^{T})}_{3}\bar{u}_{32} + \underbrace{b_{(1)}^{T}(B_{1}^{-1})}_{1}{}^{T}\bar{v}_{1}
$$

Note-se que os coeficientes marginais das variáveis não básicas nas expressões (VIII) a (XIV) reproduzem-se em dualidade reflectindo as relações de exclusão. Assim:

1 — O valor de $\bar{x}_1$ aparece como coeficiente (transposto) de $\bar{v}_1$ na expressão de *z(u);*

2 — O valor de $\bar{y}_{12}$ aparece como coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{12}$ na expressão de *z(u);*

3 — O valor de $\bar{y}_{32}$ aparece como o simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{32}$ na expressão de *z(u);*

4 — Os valores de *z(x)* e *z(u)* são iguais;

5 — O valor de $u_{(1)}$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $y_{(1)}$ em *z(x);*

6 — O valor de $\bar{v}_2$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{x}_2$ em *z(x);*

7 — O coeficiente de $\bar{x}_2$ na expressão de $\bar{x}_1$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{v}_1$ na expressão de $\bar{v}_2$;

8 — O coeficiente de $y_{(1)}$ na expressão de $\bar{x}_1$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{v}_1$ na expressão de $u_{(1)}$;

9 — O coeficiente de $\bar{x}_2$ na expressão de $\bar{y}_{12}$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{12}$ na expressão de $\bar{v}_2$;

10 — O coeficiente de $\bar{x}_2$ na expressão de $\bar{y}_{32}$ é igual ao coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{32}$ na expressão de $\bar{v}_2$;

11 — O coeficiente de $y_{(1)}$ na expressão de $\bar{y}_{12}$ é igual ao simétrico do coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{12}$ na expressão de $u_{(1)}$;

12 — O coeficiente de $y_{(1)}$ na expressão de $\bar{y}_{32}$, é igual ao coeficiente (transposto) de $\bar{u}_{32}$ na expressão de $u_{(1)}$.

Os cálculos inerentes às expressões (VIII) a (XIV) vão ser apresentados num quadro. Para isso, deverão apresentar-se os problemas primal e dual da seguinte maneira:

Primal

$$
\begin{array}{l}
\text{Máx } z(x) \\
\begin{array}{lllll}
B_2\bar{x}_2+I\bar{y}_{(1)}+B_1\bar{x}_1 & & & & =b_{(1)} \\
E_{22}\bar{x}_2 & +E_{21}\bar{x}_1+I\bar{y}_{12} & & & =\bar{b}_{12} \\
G_{22}\bar{x}_2 & +G_{21}\bar{x}_1 & -I\bar{y}_{32} & & =\bar{b}_{32} \\
-\bar{c}_2^{T}\bar{x}_2 & -\bar{c}_1^{T}\bar{x}_1 & & +z(x)=0 &
\end{array} \\
\bar{x}_2=\bar{0};\ y_{(1)}=\bar{0};\ \bar{x}_1\geq\bar{0};\ \bar{y}_{12}\geq\bar{0};\ \bar{y}_{32}\geq\bar{0};\ z(x)\text{ livre}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{l}
\text{Mín } z(u) \\
\begin{array}{llll}
-z(u) & +b_{(1)}^{T}u_{(1)} & +\bar{b}_{12}^{T}\bar{u}_{12}+\bar{b}_{32}^{T}\bar{u}_{32}=0 \\
 -I\bar{v}_2+ & B_2^{T}u_{(1)} & +E_{22}^{T}\bar{u}_{12}+G_{22}^{T}\bar{u}_{32}=\bar{c}_2 \\
 & B_1^{T}u_{(1)}-I\bar{v}_1 & +E_{21}^{T}\bar{u}_{12}+G_{21}^{T}\bar{u}_{32}=\bar{c}_1
\end{array} \\
z(u)\text{ livre};\ \bar{v}_2\geqslant\bar{0};\ u_{(1)}\geqslant\bar{0};\ \bar{v}_1=\bar{0};\ \bar{u}_{12}=\bar{0};\ \bar{u}_{32}=\bar{0}.
\end{array}
$$

Considerando uma abordagem do tipo «forma revista do simplex» tem-se respectivamente:

$$
\hat{B}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m} & \overset{1}{\uparrow} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
B_1 & 0 & 0 & \bar{0} \\
E_{21} & I & 0 & \bar{0} \\
G_{21} & 0 & -I & \bar{0} \\
\hline
-\bar{c}_1^{T} & \bar{0}^{T} & \bar{0}^{T} & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ m \\ \\ \rightarrow 1 \end{array}
\end{array}
\qquad
\hat{B}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|c}
B_1^{-1} & 0 & 0 & \bar{0} \\
-E_{21}B_1^{-1} & I & 0 & \bar{0} \\
G_{21}B_1^{-1} & 0 & -I & \bar{0} \\
\hline
\bar{c}_1^{T}B_1^{-1} & \bar{0}^{T} & \bar{0}^{T} & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\hat{D}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overset{1}{\uparrow} & \overbrace{\qquad\qquad}^{p} \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc}
-1 & \bar{0}^{T} & b_{(1)}^{T} \\
\hline
\bar{0} & -I & B_2^{T} \\
\bar{0} & 0 & B_1^{T}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} p \end{array}
\end{array}
\qquad
\hat{D}^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc}
-1 & \bar{0}^{T} & b_{(1)}^{T}(B_1^{-1})^{T} \\
\hline
\bar{0} & -I & B_2^{T}(B_1^{-1})^{T} \\
\bar{0} & 0 & (B_1^{-1})^{T}
\end{array}\right]
$$

Os problemas primal e dual podem resumir-se no seguinte quadro:

A)

$z(u)$	$\bar{v}_2$	$u_{(1)}$	$\bar{v}_1$	$\bar{u}_{12}$	$\bar{u}_{32}$		
-1	$\bar{0}^T$	$b_{(1)}^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{b}_{12}^T$	$\bar{b}_{32}^T$	0	1
$\bar{0}$	$-I$	B_2^T	0	E_{22}^T	G_{22}^T	$\bar{c}_2$	p_2 (p)
$\bar{0}$	0	B_1^T	$-I$	E_{21}^T	G_{21}^T	$\bar{c}_1$	p_1 (p)
$b_{(1)}$	B_2	I	B_1	0	0	$\bar{0}$	p_1 (m)
$\bar{b}_{12}$	E_{22}	0	E_{21}	I	0	$\bar{0}$	m_{12} (m)
$\bar{b}_{32}$	G_{22}	0	G_{21}	0	$-I$	$\bar{0}$	m_{32} (m)
0	$-\bar{c}_2^T$	$\bar{0}^T$	$-\bar{c}_1^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	1	1
	$\bar{x}_2$	$y_{(1)}$	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}_{32}$	$z(x)$	
1	p_2 (p)	p_1 (p)	p_1 (m)	m_{12} (m)	m_{32} (m)	1	

O quadro constitui uma matriz quadrada de ordem $m+p+2$. No canto inferior direito encontra-se a matriz $\hat{B}$ (matriz da base do primal) e no canto superior esquerdo tem-se a matriz $\hat{D}$ (matriz da base do dual).

Construa-se a seguir um quadro com o mesmo formato do quadro *A*) onde no canto inferior direito se coloca a matriz $\hat{B}^{-1}$ e no canto superior esquerdo se tem a matriz $\hat{D}^{-1}$. O resto do quadro é composto por zeros. Assim:

B)

$z(u)$	$\bar{v}_2$	$u_{(1)}$	$\bar{v}_1$	$\bar{u}_{12}$	$\bar{u}_{32}$	
-1	$\bar{0}^T$	$b_{(1)}^T(B_1^{-1})^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	0
$\bar{0}$	$-I$	$B_2^T(B_1^{-1})^T$	0	0	0	$\bar{0}$
$\bar{0}$	0	$(B_1^{-1})^T$	0	0	0	$\bar{0}$
$\bar{0}$	0	0	B^{-1}	0	0	$\bar{0}$
$\bar{0}$	0	0	$-E_{21}B_1^{-1}$	I	0	$\bar{0}$
$\bar{0}$	0	0	$G_{21}B_1^{-1}$	0	$-I$	$\bar{0}$
0	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{c}_1^T B_1^{-1}$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	1
	$\bar{x}_2$	$y_{(1)}$	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}_{32}$	$z(x)$

As expressões (VIII) a (XIV) obtêm-se premultiplicando o quadro *A*) pelo quadro *B*), obtendo-se o quadro *C*):

C)

$z(u)$	$\bar{v}_2$	$u_{(1)}$	$\bar{v}_1$	$\bar{u}_{12}$	$\bar{u}_{32}$	
1	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	$-b_{(1)}^T(B_1^{-1})^T$	$-\bar{b}_{12}^T+b_{(1)}^T(B_1^{-1})^TE_{21}^T$	$-\bar{b}_{32}^T+b_{(1)}^T(B_1^{-1})^TG_{21}^T$	$b_{(1)}^T(B_1^{-1})^T\bar{c}_1^T$
$\bar{0}$	I	0	$-B_2^T(B_1^{-1})^T$	$-E_{22}^T+B_2^T(B_1^{-1})^TE_{21}^T$	$-G_{22}^T+B_2^T(B_1^{-1})^TG_{21}^T$	$-\bar{c}_2+B_2^T(B_1^{-1})^T\bar{c}_1$
$\bar{0}$	0	I	$-(B_1^{-1})^T$	$(B_1^{-1})^TE_{21}^T$	$(B_1^{-1})^TG_{21}^T$	$(B_1^{-1})^T\bar{c}_1$
$B_1^{-1}b_{(1)}$	$B_1^{-1}B_2$	B_1^{-1}	I	0	0	$\bar{0}$
$\bar{b}_{12}-E_{21}B_1^{-1}b_{(1)}$	$-E_{21}B_1^{-1}B_2+E_{22}$	$-E_{21}B_1^{-1}$	0	I	0	$\bar{0}$
$G_{21}B_1^{-1}b_{(1)}-\bar{b}_{32}$	$G_{21}B_1^{-1}B_2-G_{22}$	$G_{21}B_1^{-1}$	0	0	I	$\bar{0}$
$\bar{c}_1^TB_1^{-1}b_{(1)}$	$\bar{c}_1^TB_1^{-1}B_2-\bar{c}_2^T$	$\bar{c}_1^TB_1^{-1}$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	$\bar{0}^T$	1
	$\bar{x}_2$	$y_{(1)}$	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}'_{32}$	$z(x)$

4) ANÁLISE DA SENSIBILIDADE

Estão criadas as condições para proceder à análise da sensibilidade do par de problemas duais e interpretá-la à luz da Análise de Actividades.

Em primeiro lugar, vão estudar-se as *variações das variáveis objectivo* — *z(x)* e *z(u)* — devido a *variações dos segundos membros* e das *variáveis não básicas.*

Das expressões (XI) e (XII) conclui-se que:

$$\text{(1)} \quad \boxed{\frac{\delta z(x)}{\delta b_{(1)}} = (B_1^{-1})^T \bar{c}_1 = u_{(1)}}$$

Naturalmente que:

$$\frac{\delta z(x)}{\delta \bar{b}_{12}} = \bar{0} = \bar{u}_{12} \quad ; \quad \frac{\delta z(x)}{\delta \bar{b}_{32}} = \bar{0} = \bar{u}_{32}.$$

Daqui se *conclui* que as variáveis duais estruturais $u_{(1)}$, $\bar{u}_{12}$ e $\bar{u}_{32}$ medem, na iteração considerada, a sensibilidade da variável-objectivo *z(x)* em relação às variações dos segundos membros. Em termos de Análise de Actividades são preços duais ou preços sombra.

As variações de *z(x)* relativamente às variações das *variáveis auxiliares não básicas* são:

$$\text{(2)} \quad \boxed{\frac{\delta z(x)}{\delta y_{(1)}} = -(B_1^{-1})^T \bar{c}_1 = -u_{(1)}}$$

Assim, a introdução de uma variável auxiliar $y_{(1)}$ na base faz variar a função objectivo de $-u_{(1)}$; esta variação pode ser positiva, negativa ou nula, não só porque se pode não estar no óptimo mas também porque as variáveis que compõem o vector $u_{(1)}$ estão sujeitas a diferentes tipos de restrições de sinal. As componentes negativas indicam possíveis variáveis a introduzir na base na iteração seguinte e medem o ganho desta introdução por unidade, isto é, indicam uma «perda de ganho».

Das expressões (XI) e (XIII) vê-se que as variações de *z(x)* relativamente às variações das *variáveis estruturais não básicas* são:

$$\text{(3)} \quad \boxed{\frac{\delta z(x)}{\delta \bar{x}_2} = \bar{c}_2 - B_2^T (B_1^{-1})^T \bar{c}_1 = -\bar{v}_2}$$

Deste modo, a introdução de uma variável estrutural $\bar{x}_2$ na base fará variar a função objectivo de $-\bar{v}_2$; esta variação pode ser positiva ou negativa, uma vez que é só no óptimo que todas as componentes de $\bar{v}_2$ são não negativas. As componentes negativas de $\bar{v}_2$ indicam possíveis variáveis a introduzir na base na iteração seguinte e medem o ganho desta introdução por unidade; as componentes positivas de $\bar{v}_2$ indicam as variáveis a manter fora da base e medem o *custo de oportunidade* que se verificaria com a sua introdução.

De forma análoga, a partir de (XIV), (VIII), (IX) e (X) se têm as expressões das variações de *z(u)*:

$$\text{(4)} \quad \boxed{\frac{\delta z(u)}{\delta \bar{c}_1} = B_1^{-1} b_{(1)} = \bar{x}_1} \qquad \frac{\delta z(u)}{\delta \bar{c}_2} = \bar{0} = \bar{x}_2$$

$$\text{(5)} \quad \boxed{\frac{\delta z(u)}{\delta \bar{u}_{12}} = \bar{b}_{12} - E_{21} B_1^{-1} b_{(1)} = \bar{y}_{12}} \qquad \text{(6)} \quad \boxed{\frac{\delta z(u)}{\delta \bar{u}_{32}} = \bar{b}_{32} - G_{21} B_1^{-1} b_{(1)} = -\bar{y}_{32}}$$

$$\text{(7)} \quad \boxed{\frac{\delta z(u)}{\delta \bar{v}_1} = B_1^{-1} b_{(1)} = \bar{x}_1}$$

É evidente que:

$$\frac{\delta z(x)}{\delta \bar{c}_1} = \bar{x}_1 = B_1^{-1} b_{(1)} \; ; \qquad \frac{\delta z(x)}{\delta \bar{c}_2} = \bar{x}_2 = \bar{0} \; ;$$

$$\frac{\delta z(u)}{\delta b_{(1)}} = u_{(1)} = (B_1^{-1})^T \bar{c}_1 \; ;$$

$$\frac{\delta z(u)}{\delta \bar{b}_{12}} = \bar{u}_{12} = \bar{0} \; ; \qquad \frac{\delta z(u)}{\delta \bar{b}_{32}} = \bar{u}_{32} = \bar{0} \; .$$

Em segundo lugar, vão analisar-se as *variações das variáveis básicas* (estruturais e auxiliares) em relação às *variações dos segundos membros.*

Atendendo a (VIII), (IX) e (X) tem-se imediatamente:

$$\text{(8)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{x}_1}{\delta b_{(1)}} = B_1^{-1}} \qquad \frac{\delta \bar{x}_1}{\delta \bar{b}_{12}} = 0 \qquad \frac{\delta \bar{x}_1}{\delta \bar{b}_{32}} = 0$$

$$(9) \qquad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta b_{(1)}} = -E_{21}B_1^{-1}} \qquad \frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta \bar{b}_{12}} = I \qquad \frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta \bar{b}_{32}} = 0 \quad .$$

$$(10) \qquad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta b_{(1)}} = G_{21}B_1^{-1}} \qquad \frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta \bar{b}_{12}} = 0 \qquad \frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta \bar{b}_{32}} = -I$$

De forma análoga de (XII) e (XIII) obtém-se:

$$\frac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{c}_2} = -I \qquad (11) \qquad \boxed{\frac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{c}_1} = B_2^T(B_1^{-1})^T}$$

$$\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{c}_2} = 0 \qquad (12) \qquad \boxed{\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{c}_1} = (B_1^{-1})^T}$$

Conhecidas todas estas relações é fácil reconhecer que as derivadas parciais das variáveis primais básicas — $\bar{x}_1$, $\bar{y}_{12}$, $\bar{y}_{32}$, $z(x)$ — em relação aos segundos membros não são mais que as expressões dos blocos da matriz $\hat{B}^{-1}$. Evidentemente que existem relações semelhantes no problema dual: as derivadas parciais das variáveis duais básicas — $z(u)$, $\bar{v}_2$, $u_{(1)}$ — em relação aos segundos membros são as expressões dos blocos da matriz $\hat{D}^{-1}$. Assim:

$$\begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 & 0 & \bar{0} \\ -E_{21}B_1^{-1} & I & 0 & \bar{0} \\ G_{21}B_1^{-1} & 0 & -I & \bar{0} \\ \bar{c}_1^T B_1^{-1} & \bar{0}^T & \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \bar{x}_1}{\delta b_{(1)}} & \frac{\delta \bar{x}_1}{\delta \bar{b}_{12}} & \frac{\delta \bar{x}_1}{\delta \bar{b}_{32}} & \bar{0} \\ \frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta b_{(1)}} & \frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta \bar{b}_{12}} & \frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta \bar{b}_{32}} & \bar{0} \\ \frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta b_{(1)}} & \frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta \bar{b}_{12}} & \frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta \bar{b}_{32}} & \bar{0} \\ \left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_{(1)}}\right]^T & \left[\frac{\delta z(x)}{\delta \bar{b}_{12}}\right]^T & \left[\frac{\delta z(x)}{\delta \bar{b}_{32}}\right]^T & 1 \end{bmatrix} = \hat{B}^{-1}$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & \bar{0}^T & b_{(1)}^T (B_1^{-1})^T \\ \bar{0} & -I & B_2^T (B_1^{-1})^T \\ \bar{0} & 0 & (B_1^{-1})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \left[\dfrac{\delta z(u)}{\delta \bar{c}_2}\right]^T & \left[\dfrac{\delta z(u)}{\delta \bar{c}_1}\right]^T \\ \bar{0} & \dfrac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{c}_2} & \dfrac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{c}_1} \\ \bar{0} & \dfrac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{c}_2} & \dfrac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{c}_1} \end{bmatrix} = \hat{D}^{-1}
$$

Em terceiro lugar, vão apresentar-se as *variações das variáveis básicas* em relação às *variáveis não básicas*.

A partir de (VIII), (IX) e (X) obtém-se:

$$\text{(13)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{x}_1}{\delta \bar{x}_2} = -B_1^{-1} B_2} \qquad \text{(14)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{x}_1}{\delta y_{(1)}} = -B_1^{-1}}$$

$$\text{(15)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta \bar{x}_2} = E_{21} B_1^{-1} B_2 - E_{22}} \qquad \text{(16)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{12}}{\delta y_{(1)}} = E_{21} B_1^{-1}}$$

$$\text{(17)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta \bar{x}_2} = G_{22} - G_{21} B_1^{-1} B_2} \qquad \text{(18)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{y}_{32}}{\delta y_{(1)}} = -G_{21} B_1^{-1}}$$

Estas expressões medem as variações das variáveis básicas, $\bar{x}_1$, $\bar{y}_{12}$, $\bar{y}_{32}$, em relação às variáveis não básicas, $\bar{x}_2$, $y_{(1)}$. São *taxas de substituição* das primeiras pelas segundas; são os «equivalentes potenciais» ou «combinações equivalentes» em variáveis básicas das variáveis não básicas.

De forma análoga, de (XII) e (XIII) tem-se:

$$\text{(19)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{v}_1} = B_2^T (B_1^{-1})^T} \; ; \qquad \text{(20)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{u}_{12}} = -(B_2^T (B_1^{-1})^T E_{21}^T - E_{22}^T)}$$

$$\text{(21)} \quad \boxed{\frac{\delta \bar{v}_2}{\delta \bar{u}_{32}} = -(B_2^T (B_1^{-1})^T G_{21}^T - G_{22}^T)}$$

(22) $\boxed{\dfrac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{v}_1} = (B_1^{-1})^T}$; (23) $\boxed{\dfrac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{u}_{12}} = -(B_1^{-1})^T E_{21}^T}$;

(24) $\boxed{\dfrac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar{u}_{32}} = -(B_1^{-1})^T G_{21}^T}$

Conhecidas estas relações é fácil de ver que as derivadas parciais das variáveis básicas (estruturais, auxiliares, objectivo) em relação às variáveis não básicas constituem os blocos do quadro *C*). Assim, obtém-se o quadro *D*).

D)

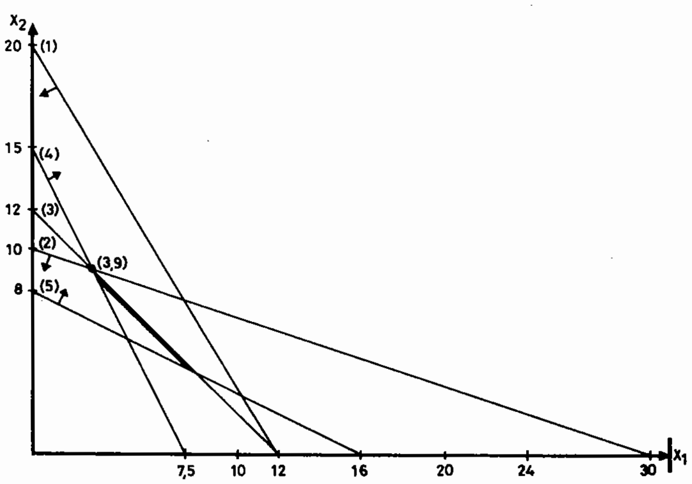
	$\bar v_2$	$u_{(1)}$	$\bar v_1$	$\bar u_{12}$	$\bar u_{32}$	
$z(x)$						
			$-\left[\frac{\delta z(u)}{\delta \bar v_1}\right]^T = -\left[\frac{\delta z(u)}{\delta \bar c_1}\right]^T$	$-\left[\frac{\delta z(u)}{\delta \bar u_{12}}\right]^T$	$-\left[\frac{\delta z(u)}{\delta \bar u_{32}}\right]^T$	$z(u)$
			$-\frac{\delta \bar v_2}{\delta \bar v_1} = -\frac{\delta \bar v_2}{\delta \bar c_1}$	$-\frac{\delta \bar v_2}{\delta \bar u_{12}}$	$-\frac{\delta \bar v_2}{\delta \bar u_{32}}$	$-\frac{\delta z(x)}{\delta \bar x_2}$
			$-\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar v_1} = -\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar c_1}$	$-\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar u_{12}}$	$-\frac{\delta u_{(1)}}{\delta \bar u_{32}}$	$-\frac{\delta z(x)}{\delta y_{(1)}} = \frac{\delta z(x)}{\delta b_{(1)}}$
$\frac{\delta z(u)}{\delta \bar v_1} = \frac{\delta z(u)}{\delta \bar c_1}$	$-\frac{\delta \bar x_1}{\delta \bar x_2}$	$-\frac{\delta \bar x_1}{\delta y_{(1)}} = \frac{\delta \bar x_1}{\delta b_{(1)}}$				
$\frac{\delta z(u)}{\delta \bar u_{12}}$	$-\frac{\delta \bar y_{12}}{\delta \bar x_2}$	$-\frac{\delta \bar y_{12}}{\delta y_{(1)}} = \frac{\delta \bar y_{12}}{\delta b_{(1)}}$				
$-\frac{\delta z(u)}{\delta \bar u_{32}}$	$-\frac{\delta \bar y_{32}}{\delta \bar x_2}$	$-\frac{\delta \bar y_{32}}{\delta y_{(1)}} = \frac{\delta \bar y_{32}}{\delta b_{(1)}}$				
$z(x)$	$-\left[\frac{\delta z(x)}{\delta \bar x_2}\right]^T$	$-\left[\frac{\delta z(x)}{\delta y_{(1)}}\right]^T = \left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_{(1)}}\right]^T$				
	$\bar x_2$	$y_{(1)}$	$\bar x_1$	$\bar y_{12}$	$\bar y_{32}$	$z(x)$

5) EXEMPLO NUMÉRICO

Considere-se o seguinte par de problemas duais de Programação Linear, na forma estrutural:

	Primal	**Dual**
	$\text{Máx } z(x)= x_1+2x_2$	$\text{Mín } z(u)=60u_1+30u_2+12u_3+15u_4+16u_5$
(1)	$5x_1+3x_2\leq 60$	$u_1\geq 0$
(2)	$x_1+3x_2\leq 30$	$u_2\geq 0$
(3)	$x_1+x_2= 12$	u_3 livre
(4)	$2x_1+x_2\geq 15$	$u_4\leq 0$
(5)	$x_1+2x_2\geq 16$	$u_5\leq 0$
	$x_1\geq 0$	$5u_1+u_2+u_3+2u_4+u_5\geq 1$
	$x_2\geq 0$	$3u_1+3u_2+u_3+u_4+2u_5\geq 2$

Na figura encontra-se a representação geométrica do problema primal no espaço das soluções. O óptimo encontra-se no ponto de coordenadas $x_1=3$ e $x_2=9$. Verifica-se degenerescência do primal, uma vez que três restrições se intersectam no ponto (3,9): são as restrições (2), (3) e (4). Em consequência, há duas soluções óptimas básicas do dual.



Estandardizando os problemas primal e dual, obtém-se:

Primal

$$
\begin{aligned}
\text{Máx } z(x) &= x_1+2x_2 \\
5x_1+3x_2+y_1 & \qquad\qquad\quad =60 \\
x_1+3x_2 \quad +y_2 & \qquad\qquad\quad =30 \\
x_1+x_2 & \qquad\qquad\quad =12 \\
2x_1+x_2 & \qquad -y_4 \quad =15 \\
x_1+2x_2 & \qquad\qquad -y_5=16 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, & \\
y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0. &
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\text{Mín } z(u) &= 60u_1+30u_2+12u_3+15u_4+16u_5 \\
5u_1+u_2+u_3+2u_4+u_5-v_1 & \quad =1 \\
3u_1+3u_2+u_3+u_4+2u_5 \quad -v_2 & =2 \\
u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \text{ livre},\ u_4 \leq 0,\ u_5 \leq 0, & \\
v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0. &
\end{aligned}
$$

Tem-se evidentemente:

$$
x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \bar{y}_1=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\ \bar{y}_3=\begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix},\ \bar{u}_1=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},\ \bar{u}_2=\begin{bmatrix} u_3 \end{bmatrix},\ \bar{u}_3=\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix},
$$

$$
v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \bar{b}_1=\begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{b}_2=\begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix},\ \bar{b}_3=\begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix},
$$

$p=2,\ m=5,\ m_1=2,\ m_2=1,\ m_3=2.$

Quer fazendo uma análise gráfica, quer utilizando o algoritmo do simplex têm-se as soluções óptimas (*a*) e (*b*), no verso.

Solução (*a*)

	PRIMAL		DUAL		
	$z(x)$	$z(x)=21$	$z(u)=21$	$z(u)$	
Variáveis básicas	$\bar{x}_1$ $(p_1=2)$	$x_1=3$ $x_2=9$	$v_1=0$ $v_2=0$	$\bar{v}_1$	Variáveis não básicas
Variáveis básicas	$\bar{y}_{12}$ $(m_{12}=2)$	$y_1=18$ $y_2=0$	$u_1=0$ $u_2=0$	$\bar{u}_{12}$	Variáveis não básicas
Variáveis básicas	$\bar{y}_{32}$ $(m_{32}=1)$	$y_5=5$	$u_5=0$	$\bar{u}_{32}$	Variáveis não básicas
Variáveis não básicas	$\bar{x}_2$ $(p_2=0)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\bar{v}_2$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_{11}$ $(m_{11}=0)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\bar{u}_{11}$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_2$ $(m_2=1)$	$y_3=0$	$u_3=3$	$\bar{u}_2$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_{31}$ $(m_{31}=1)$	$y_4=0$	$u_4=-1$	$\bar{u}_{31}$	Variáveis básicas

Solução (*b*)

	PRIMAL		DUAL		
	$z(x)$	$z(x)=21$	$z(u)=21$	$z(u)$	
Variáveis básicas	$\bar{x}_1$ $(p_1=2)$	$x_1=3$ $x_2=9$	$v_1=0$ $v_2=0$	$\bar{v}_1$	Variáveis não básicas
Variáveis básicas	$\bar{y}_{12}$ $(m_{12}=1)$	$y_1=18$	$u_1=0$	$\bar{u}_{11}$	Variáveis não básicas
Variáveis básicas	$\bar{y}_{32}$ $(m_{32}=2)$	$y_4=0$ $y_5=5$	$u_4=0$ $u_5=0$	$\bar{u}_{32}$	Variáveis não básicas
Variáveis não básicas	$\bar{x}_2$ $(p_2=0)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\bar{v}_2$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_{11}$ $(m_{11}=1)$	$y_2=0$	$u_2=1/2$	$\bar{u}_{11}$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_2$ $(m_2=1)$	$y_3=0$	$u_3=1/2$	$\bar{u}_2$	Variáveis básicas
Variáveis não básicas	$\bar{y}_{31}$ $(m_{31}=0)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\bar{u}_{31}$	Variáveis básicas

Vai reconstituir-se o quadro *C*) para cada uma das soluções óptimas encontradas.

Para a solução (*a*) tem-se:

$$\bar{c}_1=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad E_{21}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad F_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{12}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_2=\begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{31}=\begin{bmatrix} b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_{32}=\begin{bmatrix} b_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}, \quad B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_{(1)}=\begin{bmatrix} y_3 \\ -y_4 \end{bmatrix}, \quad b_{(1)}=\begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$u_{(1)}=\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad B_1^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

	z(u)	u_3	u_4	v_1	v_2	u_1	u_2	u_5		
	1	0	0	-3	-9	-18	0	5	21	z(u)
	0	1	0	1	-2	1	5	3	3	u_3
	0	0	1	-1	1	2	-2	-1	-1	u_4
(*a*) x_1	3	-1	1	1	0	0	0	0	0	
x_2	9	2	-1	0	1	0	0	0	0	
y_1	18	-1	-2	0	0	1	0	0	0	
y_2	0	-5	2	0	0	0	1	0	0	
y_5	5	3	-1	0	0	0	0	1	0	
z(x)	21	3	-1	0	0	0	0	0	1	
		y_3	$-y_4$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_5	z(x)	

Para a solução (*b*) obtém-se:

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_{11} = \begin{bmatrix} b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_{32} = \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_{(1)} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad b_{(1)} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$u_{(1)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(*b*)

	$z(u)$	u_2	u_3	v_1	v_2	u_1	u_4	u_5		
	1	0	0	-3	-9	-18	0	5	21	$z(u)$
	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	u_2
	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	u_3
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	0	0	0	
x_2	9	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	
y_1	18	1	-6	0	0	1	0	0	0	
y_4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	1	0	0	
y_5	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	0	
$z(x)$	21	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	
		y_2	y_3	x_1	x_2	y_1	y_4	y_5	$z(x)$	

As fórmulas (1) a (24) ou o quadro *D*) permitem, como se viu, efectuar a análise da sensibilidade de um par de problemas duais. Uma vez que, no exemplo em estudo, a solução óptima do primal é degenerada, os quadros (*a*) e (*b*) fornecem derivadas laterais. Com o objectivo de saber quais são as derivadas à esquerda e as derivadas à direita é necessário proceder a um estudo local.

Em primeiro lugar, vão estudar-se as variações das variáveis primais em relação aos segundos membros. Como as restrições (1) e (5) não se saturam pequenas variações de b_1 ou de b_5 não alteram a solução, excepto, os valores de y_1 e y_5 respectivamente. Tem-se então:

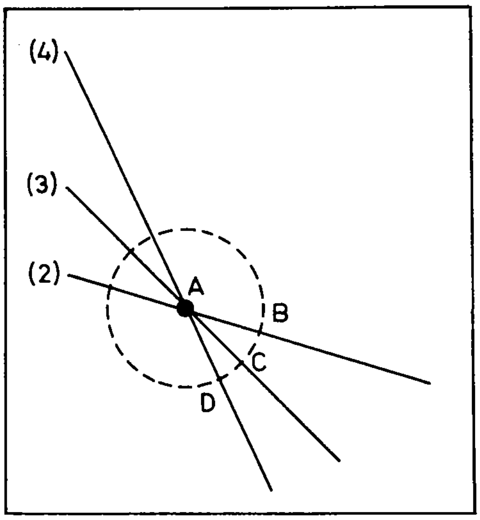
$$\frac{\delta z(x)}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta x_1}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta x_2}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_1}{\delta b_1} = 1 \; ;$$

$$\frac{\delta y_2}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_3}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_4}{\delta b_1} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_5}{\delta b_1} = 0 \; ;$$

$$\frac{\delta z(x)}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta x_1}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta x_2}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_1}{\delta b_5} = 0 \; ;$$

$$\frac{\delta y_2}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_3}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_4}{\delta b_5} = 0 \; ; \; \frac{\delta y_5}{\delta b_5} = -1 \; .$$

Como as restrições (2), (3) e (4) se saturam no ponto (3,9) as variações de b_2, b_3 e b_4 alteram a solução. Na figura está representada uma vizinhança do ponto A=(3,9), ponto de intersecção das restrições (2), (3) e (4). Quando b_2 cresce ($\Delta b_2 > 0$) a solução óptima permanece no ponto A; quando b_2 decresce ($\Delta b_2 < 0$) a solução óptima desloca-se ao longo do segmento orientado $\overrightarrow{AC}$.



Assim, tem-se:

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_2}\right]_d = 1 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_2}\right]_d = 0 \;.$$

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_2}\right]_e = \frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_2}\right]_e = -\frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_2}\right]_e = \frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_2}\right]_e = 1 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_2}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_2}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_2}\right]_e = -\frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_2}\right]_e = \frac{1}{2} \;.$$

As derivadas à direita relativamente às variáveis básicas encontram-se na parte inferior do quadro (*a*) na coluna correspondente a y_2; as derivadas à esquerda respectivas encontram-se na parte inferior do quadro (*b*) na coluna relativa a y_2.

Quando b_3 cresce ($\Delta b_3>0$) a solução óptima evolui ao longo do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Quando b_3 diminui ($\Delta b_3<0$) a solução óptima encontra-se no segmento $\overrightarrow{AD}$. A análise paramétrica mostra que:

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_3}\right]_d = \frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_3}\right]_d = \frac{3}{2} \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_3}\right]_d = -\frac{1}{2} \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_3}\right]_d = -6 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_3}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_3}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_3}\right]_d = \frac{5}{2} \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_3}\right]_d = \frac{1}{2} \;;$$

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_3}\right]_e = 3 \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_3}\right]_e = -1 \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_3}\right]_e = 2 \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_3}\right]_e = -1 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_3}\right]_e = -5 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_3}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_3}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_3}\right]_e = 3 \;.$$

As derivadas à direita e as derivadas à esquerda relativamente às variáveis básicas encontram-se, respectivamente, nas partes inferiores dos quadros (*b*) e (*a*) nas colunas correspondentes à variável y_3.

Quando b_4 cresce ($\Delta b_4 > 0$) a solução óptima desloca-se ao longo do segmento orientado $\overrightarrow{AC}$; quando b_4 decresce ($\Delta b_4 < 0$) a solução óptima permanece no ponto A. Obtém-se:

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_4}\right]_d = -1 \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_4}\right]_d = 1 \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_4}\right]_d = -1 \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_4}\right]_d = -2 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_4}\right]_d = 2 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_4}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_4}\right]_d = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_4}\right]_d = -1$$

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta x_1}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta x_2}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_1}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_3}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;;\; \left[\frac{\delta y_4}{\delta b_4}\right]_e = -1 \;;\; \left[\frac{\delta y_5}{\delta b_4}\right]_e = 0 \;.$$

As derivadas à direita em relação as variáveis básicas encontram-se na parte inferior do quadro (*a*), coluna $-y_4$; as derivadas à esquerda respecti vas estão no quadro (*b*), parte inferior, coluna y_4, mas têm o sinal trocado.

Em segundo lugar, vão analisar-se as variações das variáveis primais básicas em relação as variáveis primais não básicas, as quais são, no óptimo, variáveis auxiliares. Como os acréscimos (decréscimos) das variáveis auxiliares das restrições de tipo $\leqslant$ são equivalentes a decréscimos (acréscimos) dos respectivos segundos membros, as derivadas à direita (esquerda) em ordem aos segundos membros dão derivadas à esquerda (direita) em ordem às variáveis auxiliares. Do mesmo modo, os acréscimos (decréscimos) das variáveis auxiliares das restrições de tipo $\geqslant$ são equivalentes a acréscimos (decréscimos) dos respectivos segundos membros, as derivadas à direita (esquerda) em ordem aos segundos membros mantém-se à direita (esquerda) em ordem às variáveis auxiliares. Assim:

QUADRO (*a*)

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta y_3}\right]_d = -3 \; ; \; \left[\frac{\delta z(x)}{\delta y_4}\right]_d = -1$$

$$\left[\frac{\delta x_1}{\delta y_3}\right]_d = 1 \; ; \; \left[\frac{\delta x_1}{\delta y_4}\right]_d = 1$$

$$\left[\frac{\delta x_2}{\delta y_3}\right]_d = -2 \; ; \; \left[\frac{\delta x_2}{\delta y_4}\right]_d = -1$$

$$\left[\frac{\delta y_1}{\delta y_3}\right]_d = 1 \; ; \; \left[\frac{\delta y_1}{\delta y_4}\right]_d = -2$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta y_3}\right]_d = 5 \; ; \; \left[\frac{\delta y_2}{\delta y_4}\right]_d = 2$$

$$\left[\frac{\delta y_5}{\delta y_3}\right]_d = -3 \; ; \; \left[\frac{\delta y_5}{\delta y_4}\right]_d = -1$$

QUADRO (*b*)

$$\left[\frac{\delta z(x)}{\delta y_2}\right]_d = -\frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta z(x)}{\delta y_3}\right]_e = -\frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\delta x_1}{\delta y_2}\right]_d = \frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta x_1}{\delta y_3}\right]_e = -\frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{\delta x_2}{\delta y_2}\right]_d = -\frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta x_2}{\delta y_3}\right]_e = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\delta y_1}{\delta y_2}\right]_d = -1 \; ; \; \left[\frac{\delta y_1}{\delta y_3}\right]_e = 6$$

$$\left[\frac{\delta y_2}{\delta y_2}\right]_d = \frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta y_2}{\delta y_3}\right]_e = -\frac{5}{2}$$

$$\left[\frac{\delta y_5}{\delta y_2}\right]_d = -\frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta y_5}{\delta y_3}\right]_e = -\frac{1}{2}$$

Em terceiro lugar, vão apresentar-se as variações das variáveis duais em relação aos coeficientes da função objectivo. Tem-se:

$$\frac{\delta z(u)}{\delta c_1} = 3 \; ; \; \frac{\delta u_1}{\delta c_1} = 0 \; ; \; \left[\frac{\delta u_2}{\delta c_1}\right]_d = 0 \; ;$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta c_1}\right]_d = -1 \; ; \; \left[\frac{\delta u_4}{\delta c_1}\right]_d = 1 \; ; \; \frac{\delta u_5}{\delta c_1} = 0$$

$$\left[\frac{\delta u_2}{\delta c_1}\right]_e = -\frac{1}{2} ; \; \left[\frac{\delta u_3}{\delta c_1}\right]_e = \frac{3}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta u_4}{\delta c_1}\right]_e = 0$$

$$\frac{\delta z(u)}{\delta c_2} = 9 \; ; \; \frac{\delta u_1}{\delta c_2} = 0 \; ; \; \left[\frac{\delta u_2}{\delta c_2}\right]_d = 0 \; ;$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta c_2}\right]_d = 2 \; ; \; \left[\frac{\delta u_4}{\delta c_2}\right]_d = -1 \; ; \; \frac{\delta u_5}{\delta c_2} = 0$$

$$\left[\frac{\delta u_2}{\delta c_2}\right]_e = \frac{1}{2} \; ; \; \left[\frac{\delta u_3}{\delta c_2}\right]_e = -\frac{1}{2} ; \; \left[\frac{\delta u_4}{\delta c_2}\right]_e = 0$$

As derivadas à direita encontram-se no quadro (*a*) e as derivadas à esquerda encontram-se no quadro (*b*).

Finalmente, vão estudar-se as variações das variáveis duais básicas em relação às variáveis duais não básicas. Tem-se:

Quadro (*a*)

$$\frac{\delta z(u)}{\delta v_1} = 3 \ ; \ \frac{\delta z(u)}{\delta v_2} = 9 \ ;$$

$$\frac{\delta z(u)}{\delta u_1} = 18 \ ; \ \frac{\delta z(u)}{\delta u_2} = 0 \ ; \ \frac{\delta z(u)}{\delta u_5} = -5$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta v_1}\right]_d = -1 \ ; \ \left[\frac{\delta u_3}{\delta v_2}\right]_d = 2 \ ;$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta u_1}\right]_d = -1 \ ; \ \left[\frac{\delta u_3}{\delta u_2}\right]_d = -5 \ ; \ \left[\frac{\delta u_3}{\delta u_5}\right]_d = -3$$

$$\left[\frac{\delta u_4}{\delta v_1}\right]_d = 1 \ ; \ \left[\frac{\delta u_4}{\delta v_2}\right]_d = -1 \ ;$$

$$\left[\frac{\delta u_4}{\delta u_1}\right]_d = -2 \ ; \ \left[\frac{\delta u_4}{\delta u_2}\right]_d = 2 \ ; \ \left[\frac{\delta u_4}{\delta u_5}\right]_d = 1$$

Quadro (*b*)

$$\frac{\delta z(u)}{\delta v_1} = 3 \; ; \quad \frac{\delta z(u)}{\delta v_2} = 9 \; ;$$

$$\frac{\delta z(u)}{\delta u_1} = 18 \; ; \quad \frac{\delta z(u)}{\delta u_4} = 0 \; ; \quad \frac{\delta z(u)}{\delta u_5} = -5$$

$$\left[\frac{\delta u_2}{\delta v_1}\right]_e = -\frac{1}{2}; \quad \left[\frac{\delta u_2}{\delta v_2}\right]_e = \frac{1}{2} \; ;$$

$$\left[\frac{\delta u_2}{\delta u_1}\right]_e = 1 \; ; \quad \left[\frac{\delta u_2}{\delta u_4}\right]_e = \frac{1}{2} \; ; \quad \left[\frac{\delta u_2}{\delta u_5}\right]_e = -\frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta v_1}\right]_e = \frac{3}{2} \; ; \quad \left[\frac{\delta u_3}{\delta v_2}\right]_e = -\frac{1}{2};$$

$$\left[\frac{\delta u_3}{\delta u_1}\right]_e = -6 \; ; \quad \left[\frac{\delta u_3}{\delta u_4}\right]_e = -\frac{5}{2}; \quad \left[\frac{\delta u_3}{\delta u_5}\right]_e = -\frac{1}{2}$$

6) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DESPLAS, M. — *Analyse de Sensibilité en Programmation Linéaire,* Paris, Nanterre (policopiado), 1975.

GOLDSTEIN, E.; YOUDINE, D. — *Problèmes Particuliers de la Programmation Linéaire,* Moscou, MIR, 1973.

LACAZE, D. — *Théorie des Prix et Décentralisation des Décisions par Dualité,* Paris, CNRS, 1976.

VAN DE PANNE, C. — *Methods for Linear and Quadratic Programming,* Amsterdam, North-Holland, 1975.

(Janeiro de 1983)