Geometria Numa Escola de Arquitectos

Luís Mateus, Arquitecto
Assistente da F.A.U.T.L.
lmmateus@fa.utl.pt

Geometria numa Escola de Arquitectos foi o título dado a uma comunicação efectuada em 29 de Abril de 2005 integrada no seminário sobre Investigação em Arquitectura que decorreu na Faculdade de Arquitectura da UTL.

O conteúdo desta apresentação, sobre o qual incide o artigo, consistiu na apresentação da investigação efectuada no âmbito da preparação a apresentação das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica.

Assim Sendo, a Estrutura do Artigo Divide-se em Duas Partes.

Na primeira parte faz-se um resumo orientado do Trabalho de Síntese e na segunda parte apresentam-se alguns elementos do Relatório de Aula.

1ª Parte - Trabalho de Síntese

A escolha de qualquer tema de investigação deve ser, em primeiro lugar, fruto de um interesse afectivo.

Para além disto, deve haver a convicção de que o território da investigação é suficientemente fértil para que se produzam resultados.

Estes dois factores foram a força motriz que me levou a produzir este trabalho.[1]

Sistema Axonométrico de Representação - História, Teoria e Prática

História

Efectuar um percurso pela história da Axonometria corresponde, em primeiro lugar, a olhar para a história das representações gráficas. Neste olhar procuram descobrir-se nas representações as características, ou a tendência para as características, que hoje se identificam como sendo da representação axonométrica. Estre estas encontram-se, a representação das três dimensões, a preservação do paralelismo e a preservação da proporção direccional.

Pode falar-se em duas tradições quando se aborda o tema da representação axonométrica.

Uma é a tradição Ocidental, em que está presente um preconceito óptico da visão, que culminou com a descoberta das regras da perspectiva linear no sec. XV.

1 A versão integral dos documentos relativos às PAPCC pode ser consultada da biblioteca da Faculdade de Arquitectura da UTL.

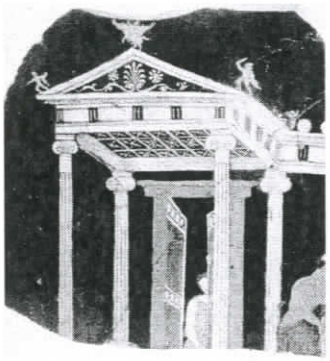

Fig. 1 Fragmento de Cerâmica (sec. IV a.C.)

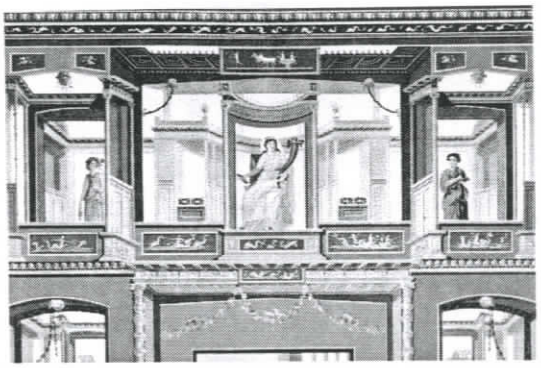

Fig. 2 Excerto de Pintura mura (Pompeia

A outra é a tradição Oriental, sino-japonesa, em que invariavelmente se adoptou, sobretudo na pintura, um tipo de representação que hoje podemos apelidar de axonométrica.

Fig. 3 Pintura chinesa (sec. X)

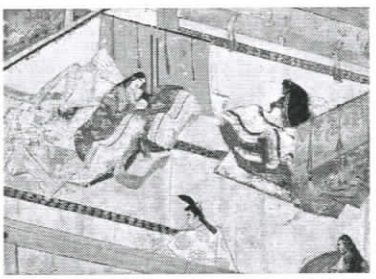

Fig. 4 Pintura Japonesa (sec. XIV)

A partir do sec. XV muitos foram os caminhos que conduziram à axonometria. Estes relacionam-se com a Arquitectura Civil, a Arquitectura Militar, a Matemática e Geometria, e o desenho de máquinas.

Na Arquitectura Civil, no sec. XV, os textos de referência sobre a Arquitectura são de Vitruvio, Alberti e, presumivelmente, de Rafael.[2] Perante estes foi sendo colocado o problema da representação sintética do edifício.

As primeiras respostas gráficas a este problema surgiram com um tipo de desenho que se pode designar por proto-axonométrico.[3] Na verdade tratam-se de perspectivas em que o ponto de fuga se afasta cada vez mais do centro da folha e o observador "sobe" em relação ao objecto afastando-se. O resultado são "quase" axonometrias cavaleiras. Este tipo de desenhos surge sobretudo em Tratados de Arquitectura.

Em todo o caso, na Arquitectura Civil sempre houve grande resistência à adopção deste tipo de representação, fruto de um caracter do desenho arquitectónico que se pretendia mais analítico.

2 Yves Alain-Bois, *"Avatars de l'axonométrie"*, p. 131 (vide bibliografia)

3 *Op. Cit.* (1), p. 132 (vide bibliografia)

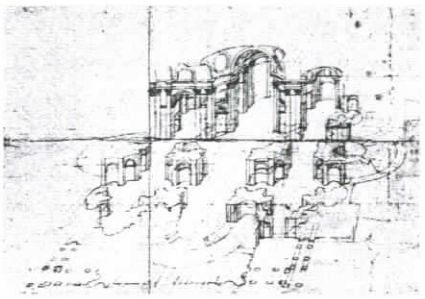

Fig. 5 Projecto de S. Pedro em Roma, de Baldassre Peruzzi (1530)

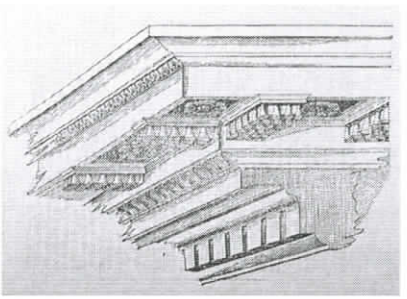

Fig. 6 *Architecture*, de Philibert de L'Orme (1567)

A Arquitectura Militar, a partir de meados do sec. XVI, deixou de constituir um sub-capítulo nos tratados de Arquitectura e passou a ter uma literatura própria. Neste contexto, surge um tipo de representação que virá, mais tarde, a designar-se por Perspectiva Militar. Este tipo de representação é adoptado nos Tratados de Arquitectura Militar em claro confronto com a Perspectiva Linear de ponto de fuga. O caracter sintético deste tipo de desenhos torna-os úteis para os soldados que sobre eles podem efectuar medições e cálculos sobre as trajectórias de projectéis.

Com a proliferação das guerras religiosas, no sec. XVII, a escrita das obras sobre a arquitectura militar fica na mão dos Jesuítas. O conhecimento que estes têm da axonometria terá sido trazido para a Europa pelos missionários que regressavam do Oriente, em particular da China.[4]

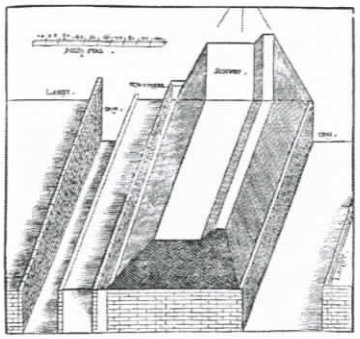

Fig. 7 *Della Fortificazione delle Citá* de G. Maggi e J. Castriotto, (Veneza 1564)

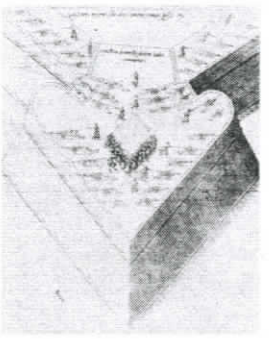

Fig. 8 *On Millitary Architecture* de F. Marchi, (Brescia 1599)

Também, nos Tratados de Matemática e Geometria é recorrente um tipo de representação que se pode apelidar de Axonométrica, dadas as suas características. Este tipo de desenhos serve, em geral, para enunciar e ilustrar alguns teoremas de Geometria no Espaço, ou para ilustrar determinados princípios operativos.

No domínio do estudo das Sombras verificou-se que o passo destas à Axonometria corresponde a "iluminar a sombra e perceber que se trata de uma representação."[5]

4 cf. Jan Krikke, *"Axonometry: a matter of perspective"*, p.1 (vide bibliografia)

5 Massimo Scolari, *"Elements for a History of Axonometry"*, nota 14 (vide bibliografia)

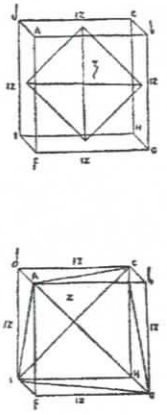

Fig.9 Divina Proportione de Luca Pacioli (Veneza 1509)

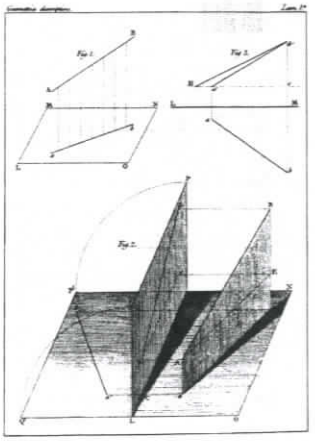

Fig.10 *Géometrie Descriptive* de Gaspard Monge (1798)

No contexto do desenho industrial, de máquinas, também pode ser traçada uma origem da representação axonométrica. Com efeito, é deste contexto que surgem os maiores desenvolvimentos nesta área.

Aqui os desenhos surgem, em geral, com o objectivo de constituir informação para a produção de um qualquer engenho ou engrenagem que deve ser construida pelos operários nas fábricas. Este tipo de desenho deve ser fácil de ler e sintético.

Com este espírito, William Farish[6] publicou em 1822 um trabalho intitulado "On isometrical Perspective"[7] de objectivos claramente práticos.

Neste texto, Farish não dá explicações sobre o seu método alegando que para operários seriam impossíveis de seguir e para matemáticos seriam supérfluas.

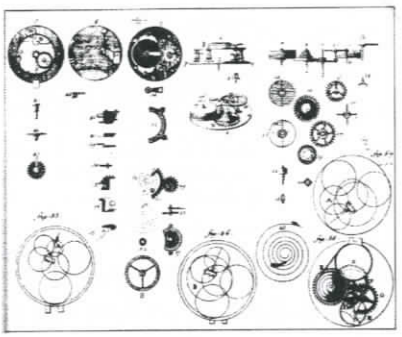

Fig.11 Prancha de um tratado de relojoaria (1741)

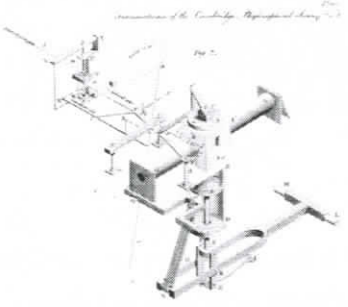

Fig.12 Segunda figura do tratado de William Farish

Rapidamente o trabalho de Farish chamou a atenção da comunidade matemática e, durante o sec. XIX, são dados grandes avanços na teoria da Axonometria, sobretudo pela comunidade matemática Anglo-Saxónica.

6 William Farish (1759-1837) - Professor de Física na Universidade de Cambridge

7 Em Novembro de 1819 foi inaugurada em Cambridge a "Philosophical Society". Em 1822 é publicado o primeiro volume das "Transactions", o qual abre com o texto de Farish que nessa altura presidia.

Destacam-se os matemáticos Julius Weisbach, que generaliza o método de Farish à axonometria ortogonal, e Oscar Schlomilch, que deduz a maior parte dos teoremas sobre a axonometria ortogonal.

Em 1853 é formulado, por Karl Wilhelm Pohlke, o que vem a ser conhecido como o teorema fundamental da axonometria: "um quadrângulo plano O'X'Y'Z' pode sempre tormar-se por projecção paralela de três segmentos OX, OY e OZ iguais, com um ponto O comum, e dois a dois ortogonais."[8]

No início do sec. XX assiste-se a um novo fôlego dado à representação axonométrica através de movimentos artísticos como o Suprematismo, em que se destaca o pintor russo El Lissitzzky, e como o Neo-Plasticismo, em que se destaca, por exemplo, o arquitecto Theo Van Doesburg.

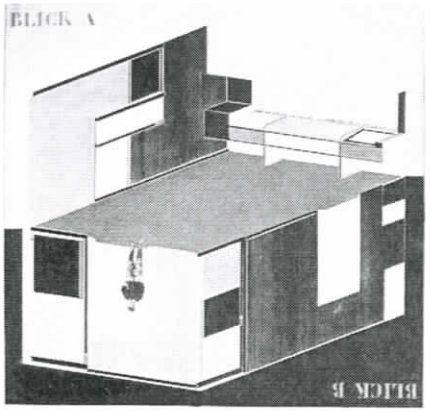

Fig.13 Desenho para o Abstract Cabinet, de El Lissitzky

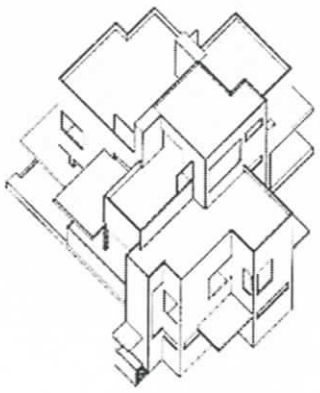

Fig.14 Desenho para uma casa particula, de Theo Van Doesburg

No final do séc. XX as aplicações mais significativas da teoria da axonometria surgem por via da implementação do desenho assistido por computador em que, sobretudo nos softwares de modelação tridimensional, o interface pode passar por uma representação axonométrica.

Teoria

O sistema axonométrico de representação tem por base operativa a projecção cilíndrica de um referencial tri-ortogonal sobre um plano qualquer.

A Teoria da Axonometria é o estudo das propriedades geométricas que podem ser deduzidas desta operação de projecção.

Dado que o espaço de um artigo é reduzido para expor o todo de uma teoria, se é que é possível falar nestes termos, apenas farei referência a dois casos que selecciono e apresento por serem mais significativos. Deixo para quem se interessar pelo tema a leitura do trabalho na sua versão integral e a análise dos cálculos dado que aqui apenas serão apresentados os resultados.

8 Gino Loria, ***Storia della Geometria Descrittiva***, p. 429

O primeiro caso, pode ser enunciado como se segue:

Dado um referencial tri-ortogonal e conhecidas as intersecções dos seus eixos com o plano de projecção, qual é o lugar geométrico da projecção da origem do referencial de tal modo que os coeficientes (razão entre a projecção de uma medida e a medida) nas projecções dos eixos sejam iguais dois a dois ou iguais os três?

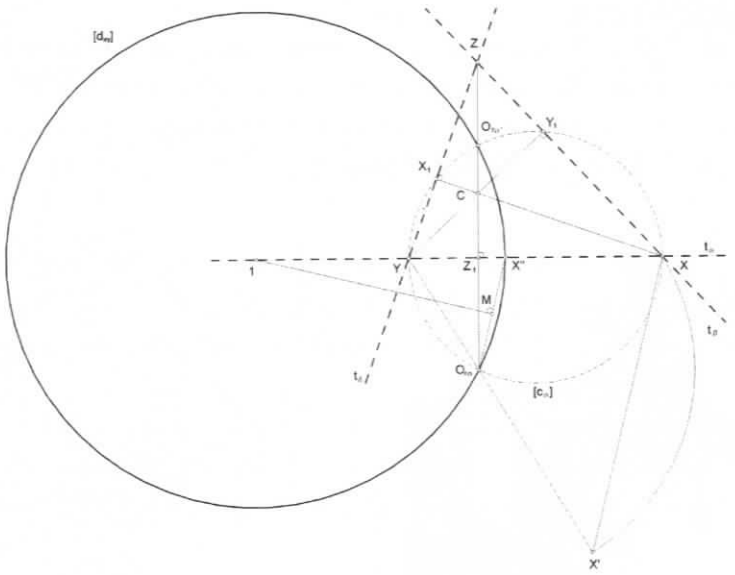

Fig.15

Sejam X, Y e Z (fig. 15) os pontos de intersecção dos eixos de um referencial tri-ortogonal com o plano de projecção.

Verifica-se que, para que os coeficientes sejam iguais nas projecções de dois eixos, por exemplo nas projecções dos eixos coordenados x e y, o lugar geométrico da projecção da origem do referencial deverá ser uma circunferência, de centro sobre a recta de intersecção do plano x.y com o plano de projecção, cuja construção pode ser efectuada como consta na figura 15.

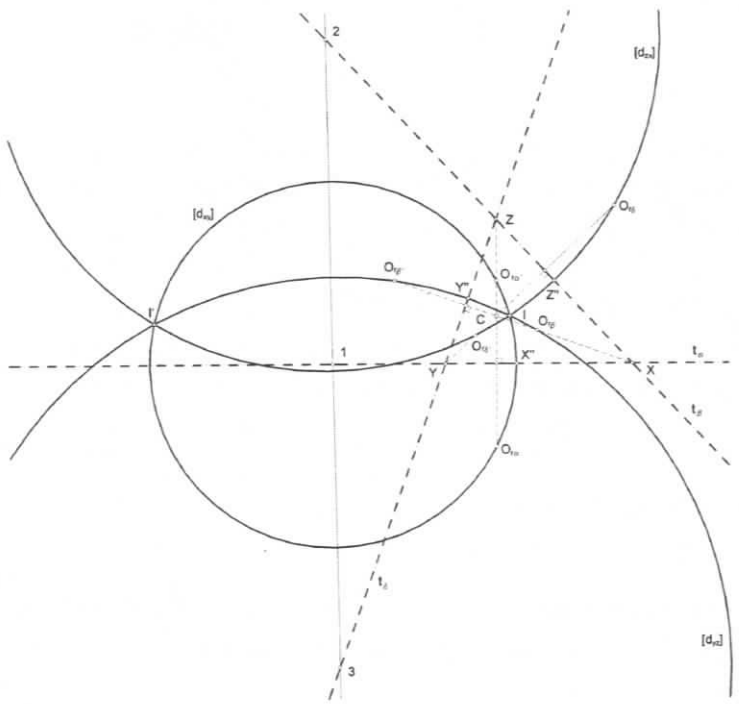

Fig.16

Verifica-se ainda que, para que sejam iguais os coeficientes nas projecções dos três eixos, a projecção da origem do referencial deverá ser um dos dois pontos comuns às três circunferências que são, cada uma, lugar geométrico da projecção da origem para que sejam iguais os coeficientes dois a dois (fig. 16).

Verifica-se, também, que os centros das três circunferências são colineares e que a recta que passa pelos dois pontos comuns às três circunferências contém o ortocentro do triângulo [XYZ] e é perpendicular à recta que contém os centros das três circunferências (fig. 16).

O segundo caso corresponde ao Teorema de Pohlke que já foi anteriormente enunciado (fig. 17).

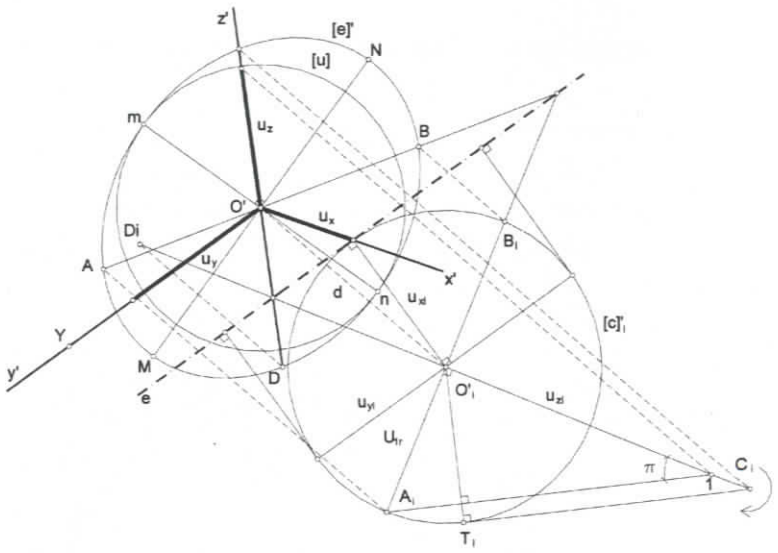

Fig.17

Dados os segmentos u_x, u_y e u_z como projecção de três segmentos U_x, U_y e U_z com origem comum, iguais e perpendiculares dois a dois, verifica-se o seguinte:

Cada par de segmentos, por exemplo u_x e u_y, pode ser considerado como semi-diâmetros conjugados de uma elipse que resulta da projecção de uma circunferência.

As três elipses que assim podem ser consideradas são projecções de circunferências de raios iguais, contidas numa superfície esférica em planos perpendiculares entre si.

A elipse que resulta da projecção da esfera deverá ser bi-tangente às três primeiras elipses consideradas e a sua relação eixo-maior / eixo-menor determina a direcção da projecção do referencial o que permite obter as orientações possíveis para os referenciais que podem conter U_x, U_y e U_z.

Este cálculo pode ser efectuado graficamente por meio de uma transformação afim, nos termos da figura 17.

Explorando a Teoria da Axonometria pode chegar-se a conclusões sobre as possibilidades de aplicação prática.

Prática

Pesem embora os diferentes modos de desenhar que nos são acessíveis hoje em dia e as várias valências do sistema axonométrico de representação, a principal vocação deste sistema é a de permitir representações de carácter perspéctico da volumetria dos objectos em que se privilegia "o que se conhece do objecto" em deterimento de "como se vê o objecto."

Numa representação axonométrica, o primeiro passo que deve ser dado é o da orientação do objecto relativamente ao referencial, o que é sempre um esforço mental.

Na etapa seguinte, deve ser escolhido "o bom ângulo" que resulta na disposição, na folha de desenho, da projecção do referencial. Aqui devem ser observados aspectos importantes da teoria. Que tipo de projecção? Que coeficientes? Qual o modo operativo?

Na representação propriamente dita é posta em evidência, de uma forma mais ou menos consciente, a teoria da afinidade e é através dela que se resolvem praticamente todos os problemas gráficos que podem surgir.

Na figura seguinte (fig. 18) dar-se-ão exemplos da representação de um cubo num sistema axonométrico em que um dos eixos coordenados é paralelo ao plano de projecção.

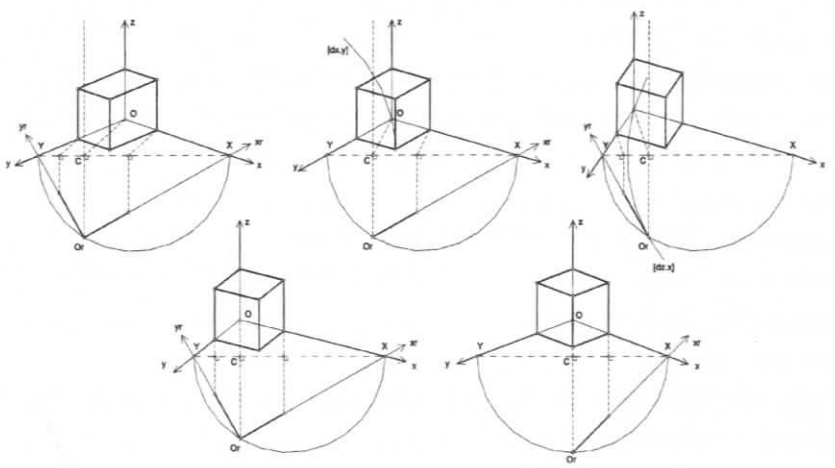

Fig. 18 – Na primeira linha tem-se trimetria oblíqua, dimetria oblíqua ($C_x=C_y\neq1$), dimetria oblíqua ($C_x=C_z=1$)
Na segunda linha foi considerada a direcção de projecção ortogonal ao traço do plano coordenado x.y no plano de projecção.

Este tipo de representação não é geralmente utilizada apesar da economia de traçados motivada pelo facto de que na projecção do eixo paralelo ao plano de projecção as medidas não sofrem qulquer alteração relativamente às do objecto representado.

2ª Parte - Relatório para uma aula prática

O exercício que se propõe no relatório é dirigido a alunos de licenciatura e tem como objectivo principal o entendimento de que as aplicações práticas da geometria, em geral, e da geometria descritiva, em particular, não são de carácter estático mas, apoiando-se num punhado de princípios rigorosos, podem ser as que convêm da forma que for mais pertinente.

Neste caso concreto pretende-se que os alunos "inventem" uma superfície a partir da definição dos seus elementos geradores. Tratando-se de uma superfície regrada empenada e considerando que, em geral, três directrizes (linhas e/ou superfícies) constituem condição necessária e suficiente para que esta fique definida, este é o ponto de partida.

Mais uma vez, sendo reduzido o espaço de um artigo para expor todo o conteúdo do relatório, far-se-á uma referência sumária apenas aos aspectos considerados mais relevantes sem considerar uma descrição técnica.

Invenção e Representação de uma Superfície Regrada Empenada Definida por Três Directrizes

O relatório dividiu-se em duas partes, O Enquadramento da Aula, e, A Aula.

Na primeira parte trataram-se as questões que se prendem com a preparação e enquadramento do exercício a propôr aos alunos. Aqui, as palavras chave são: enquadrar; planificar, definir objectivos, definir conteúdos, aferir metodologias e estratégias pedagógicas, definir enunciados, seleccionar bibliografia específica, definir critérios de avaliação, fazer cronogramas, simular a resolução dos problemas.

Efectivamente, quando algum docente chega a uma sala de aula para leccionar durante duas horas, muito mais é o tempo que que está a montante desse momento. Ou não é assim?

Na segunda parte tratou-se da apresentação de um enunciado concreto e da simulação de resposta a esse enunciado.

O que de seguida (fig. 19) se apresenta é a síntese dessa simulação, sem referir quaisquer aspectos técnicos sobre a produção dos desenhos.

Trata-se de um exemplo em que o ponto de partida para a geração da superfície (porção de superfície) foi a definição de uma directriz recta, uma directriz cilíndrica e uma directriz esférica. Isto é, as geratrizes rectas da superfície são concorrentes com a directriz recta e tangentes às superfícies cilíndrica e esférica.

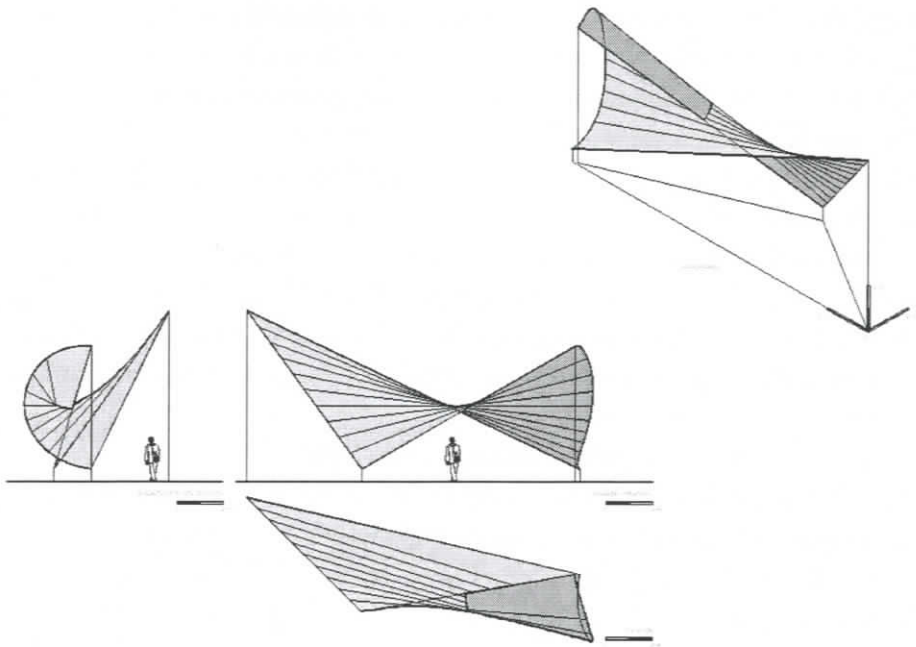

Fig.19 Possível resultado final de resposta ao exercício proposto.

Salienta-se, do processo de resolução do exercício, o último momento, em que o aluno deverá dar um significado aos desenhos, qua a princípio são mais ou menos abstractos, através da atribuição de uma escala que o remeta para uma representação de Arquitectura de Design, desde a escala da mão até à escala do edifício.

Poderá ser neste momento que se abra para o aluno, de alguma forma, a consciência para a importância da Geometria como universo de referências com utilidade prática ao nível da representação, mas, sobretudo, ao nível da concepção e estruturação de pensamento.

Bibliografia

AUBERT, Jean, "Axonometrie - Théorie, Art et Pratique des perspectives parallèles; Brève histoire orientée de l'axonométrie" Editions de La Villette, 1996.
BIREAUD, Annie, Os métodos pedagógicos no ensino superior" (Tradução do original "Les Métthodes Pédagogiques dans l'Enseignement Supérieur" por Irene Lima Mendes), Porto Editora, 1995.
BOIS, Yve-Alain, "Avatars de l'áxonométrie, Images et imaginaires d'architecture", Centre Pompidou, Paris, March 1984, pp. 129 a 134.
CONSIGLIERI, Victor, "A Morfologia da Arquitectura", 1920-1970, Vol.I, referência/ editorial Estampa, 2ª edição, 1995.
COSTA, Manuel Couceiro da, "Perspectiva e Arquitectura - Uma Expressão de Inteligência no Trabalho de Concepção", Dissertação de Doutoramento, Faculdade de Arquitectura da Universidade Técnica de Lisboa, 1992

DEFORGE, Yves, "Le Graphisme Technique - son histoire et son enseignement", Champ Vallon, 1981
FARISH, William, "On isometrical drawing", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 1, 1822
GELABERT, Lino Cabezas , "O Ensino do Desenho Técnico", boletim da aproged, nº 20, Março 2003
LORIA, Gino, "Storia della Geometria Descrittiva - dalle origini sino ai giorni nostri, Ulrico Hoepli" editore-libraio della Real Casa, Milão, 1921
PANOFSKY, Erwin, "A Perspectiva como Forma Simbólica" (Tradução do original "Die Perspektive als symbolische Form", 1927, por Elisabete Nunes) edições 70, 1993
PIJOAN, J. , "História da Arte", Publicações Alfa, 1989
PINHEIRO, Carlos da Silva, "Superfícies empenadas e projecções cotadas", edição da Faculdade de Arquitectura da Universidade Técnica de Lisboa
SCOLARI, MASSIMO, "Elements for a History of Axonometry", Architectural Design 55, 1985

Webgrafia

KRIKKE, Jan, "Axonometry: A Matter of Perspective", 2002, disponível em: http://www.computer.org/cga/cg2000/pdf/g4007.pdf
Krikke, Jan, "China, Japan and the Birth of Modernism:Eastern Aesthetics and the Reassertion of the Female Principle" , 2002, disponível em: http://home.uni-one.nl/olive.press/utapaper.htm

Fontes das Figuras

Fig.1 SCOLARI Massim, "Elementos for a History of axonometry".
Fig. 2 PIJOAN,J., " História da Arte", Vol 2, p. 251 (vide bibliografia)
Fig. 3 "China the beautiful", 2003, disponível em http://www.chinapage.com/paintinh/guhongzhong guhongzhong.html
Fig 4 Museu Nacional de Tóquio, 2003, disponível em: http://www.tnm.jp/en/servlet/Con?&pageId=2&processId=00&col_id=A12091&img_id=C0010639&ref=2&Q1=&Q2=&q3=&Q4=114171&Q5=&F106F2=
Fig. 5 BOIS, Yve-Alain, "Avatars de láxonométrie", p. 131 (vidé bibliografia)
Fig. 6 ANU, Australian National University, 2003, disponível em: http://rubens.anu.edu.au/htdocs/bytype/arch.sources/philibert/23869.JPG
Fig. 7 Op. Cit. (fig.1), p. 78
Fig. 8 Op. Cit (fig. 1), p. 77
Fig. 9 Op. Cit. (fig. 1), p. 74
Fg. 10 MONGE, Gaspard, " Geometria Descriptiva" prancha 1 (vide bibliogria)
Fig. 11 DEFORGE, Yves, "Le Graphisme Technique", p. 69 (vide bibliografia)
Fig. 12 FARISH, William, "On isometrical drawing", prancha 2 (vide bibliografia)

Fig. 13 "El Llssitsky", 2003, disponível em: http//www.getty.edu/research/conducting_research/digitized_collections/Lissitzky/8_architecture/index.html
Fig. 14 "Estudo axonométrico de uma casa partícula"r, 2003, disponível em: http://o2.epandemic.com/fernando.lisboa/Cronologias/_Tempos/_1922-1996/_1922_vanDoesburg/_1922_Vandoesburg.html
Fig. 15 Figura produzida pelo autor.
Fig. 16 Idem (fig. 15)
Fig. 17 Idem (fig. 15)
Fig. 18 Idem (fig. 15)
Fig. 19 Idem (fig.15)