Fractais na Arquitectura

Susana Rosado-Ganhão
Professora Auxiliar
srosado@fa.utl.pt

Resumo

Uma forma de inovar na simplicidade, em Arquitectura, é usar a geometria dos fractais.
Uma técnica simples de iterativamente chegar a formas fantásticas e muito agradáveis de integrar no desenho de uma obra de arte: sejam edifícios, pontes, jardins, e outros.
Vamos abordar o conceito essencial da geometria dos fractais e analisar exemplos da sua aplicação em edifícios e cidades.
Para isso faz-se uma introdução ao tema pelos primórdios da geometria fractal referindo exemplos como o Conjunto de Cantor (de 1880), e o Triângulo de Sierpinski (de 1915).
Percorrem-se as propriedades dos fractais e as potencialidades desta geometria e analisam-se exemplos de estudos que demonstram que as cidades, e as urbanizações em geral, apresentam características que podem ser explicadas, cientificamente, pela geometria fractal, fazendo-se um paralelo entre as propriedades dos fractais e as dos padrões urbanos, que são idênticas.
As maiores potencialidades desta geometria, em termos arquitectónicos, surge a partir do momento em que é possível gerar computacionalmente fractais (em 1975), cujas formas têm uma beleza incontornável (neste trabalho apresentamos algumas).
Através da criatividade e da compreensão da lógica iterativa desta geometria podem-se obter formas aplicáveis a variadíssimos temas da Arquitectura.

Palavras-chave: fractais, geometria fractal, lógica iterativa.

1. Introdução

> *"As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa e os relâmpagos não viajam em linha recta".*
>
> Benoît Mandelbrot

A geometria fractal surgiu nos anos 70 do séc. XX, pela mão de Mandelbrot.
Surgiu como uma intenção de descrever diversos fenómenos na natureza onde não pode ser utilizada a geometria tradicional: nuvens não são esferas; montanhas não são cones continentes não são círculos; nem o raio viaja em linha recta.

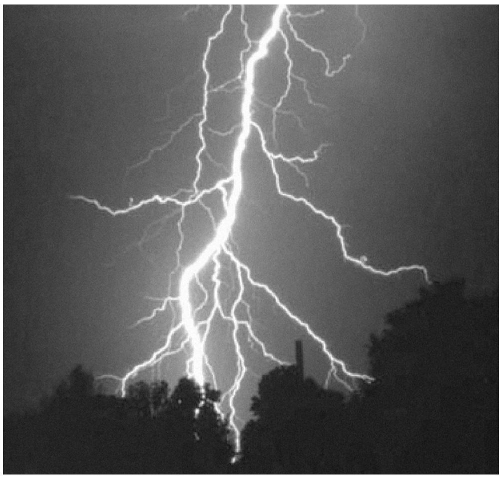

Fig.1 Foto de um relâmpago.

Fig.2 Foto de uma nuvem.

Ainda antes disso, na segunda metade do séc. XIX, surgiram estudos de "objectos" hoje tidos como fractais. Estes são agora considerados fractais clássicos, como é o caso do Conjunto de Cantor, do matemático alemão Georg Cantor em 1833, e do Triângulo de Sierpinski, do matemático polaco Waclaw Sierpinski em 1915.

A beleza artística visual que podemos obter computacionalmente reproduzindo um fractal era inexistente no séc. XIX, pois todos os cálculos tinham que ser efectuados manualmente e isso obrigava a que se despendesse muito tempo, sem grandes resultados gráficos.

Estes resultados gráficos começaram a surgir das mãos de Benoît Mandelbrot, a partir de 1957, com a ajuda dos meios computacionais que tinha ao seu dispor na IBM, onde trabalhava.
Partindo do estudo de séries temporais relacionadas com preços, a sua investigação evoluiu para um problema relacionado com o ruído das linhas telefónicas que interligavam os computadores – assunto de importância para os técnicos da multinacional. O ruído devia-se ao eventual desaparecimento de um fragmento de sinal, uma vez que a informação se transmitia por impulsos eléctricos. Inspirado no Conjunto de Cantor, Mandelbrot propôs, então, um modelo demonstrando que não era possível eliminar os ruídos, mas estabelecer um controlo destes através de oportunas estratégias de redundância.

Foi assim sendo desenvolvida uma geometria fractal sistemática, incluindo o seu aspecto gráfico, produzida por Benoît Mandelbrot, praticamente sozinho durante dez anos.
A partir de 1975 foi possível desenhar fractais com recurso a computadores. Os métodos desenvolvidos foram aplicados à criação de imagens e de galáxias para filmes como a saga *Star Trek* (Barnsley et al, 1988).

O cientista Benoît Mandelbrot, com o seu vasto trabalho e a sua criatividade, introduziu o conceito de geometria fractal e, com a publicação de variadíssimos artigos que lidam com a geometria de fenómenos observados em vários campos da ciência, gerou um interesse crescente sobre este assunto, que se foi alastrando. Esta geometria fomenta a interdisciplinaridade, sendo exemplo disso os livros de Mandelbrot que discutem temas como a frequência de palavras num texto, economia, turbulência, árvores, rios, pulmões, linhas de água, entre outros assuntos relacionados com conceitos geométricos.

Na actualidade, o nosso Prémio Nobel da Literatura, José Saramago, também usou um conceito fractal numa das suas obras, e por sinal sem se aperceber de tal proeza:

> *"Tal como o sr. Jourdain de Molière fazia prosa sem o saber, houve um momento na minha vida em que, sem me ter apercebido do fenómeno, me encontrei metido em algo tão misterioso como a geometria fractal, da qual, escusado seria dizê-lo, ignorava tudo. Foi isso pelo ano de 99, quando um geómetra espanhol, Juan Manuel Garcia-Ruiz, me escreveu a pedir a minha atenção para um exemplo de geometria fractal presente no meu livro Todos os Nomes. Indicava-me a passagem em questão, a qual reza assim: "Observado desde o ar… parece uma árvore tombada, com um tronco curto e grosso, constituído pelo núcleo central de sepulturas, de donde arrancam quatro poderosas ramas, contíguas no seu nascimento, mas que depois, em bifurcações sucessivas, se estendem até perder-se de vista, formando… uma frondosa copa em que a vida e a morte se confundem". Não pensei em mudar de ofício, mas todos os meus amigos notaram que havia uma convicção nova no meu espírito, uma espécie de encontro na estrada de Damasco.*
>
> *Durante aqueles dias ombreei com os melhores geómetras do mundo, nada mais, nada menos. Aquilo a que eles haviam chegado à custa de muito estudo, alcançara-o eu graças a um golpe de intuição científica, do qual, falando fracamente, apesar do tempo que passou, ainda não me recompus. Dez anos depois, acabo de sentir a mesma emoção na figura de um livro intitulado Armonía Fractal – De Doñana a las marismas de que Juan Manuel é autor, juntamente com o seu colega Héctor Garrido. As ilustrações são, em muitos casos extraordinárias, os textos de uma precisão científica nada incompatível com a beleza das formas e dos conceitos. Comprem-no e regalem-se. É uma autoridade quem o recomenda…"*[1]

1 In "O Caderno de Saramago" (http://caderno.josesaramago.org/2009/03/31/geometria-fractal/)

2. “Definindo” fractal

Os conceitos da filosofia e da geometria euclidiana foram durante séculos considerados como os melhores descritores do mundo em que vivemos. No entanto, foram aplicadas à modelação de certos fenómenos do universo descobertas de outras geometrias não-euclidianas. O mesmo sucedeu com a geometria fractal, que pode ser aplicada a um quase sem número de objectos e fenómenos naturais, de fenómenos sociais, e ser ainda usada como fonte de inspiração para vários tipos de arte e, de mão dada com a Teoria do Caos, permitir a modelação e o estudo de movimentos ou fenómenos aparentemente totalmente aleatórios (Alves, 2007).

As obras criadas por mão humana servem-se maioritariamente da geometria euclidiana com formas como quadriláteros, paralelepípedos, cilindros, entre outros. Por outro lado, na natureza, as formas não são regulares: rochas, nuvens, árvores e plantas, relâmpagos, etc.

A geometria fractal fornece algoritmos para construção de formas idênticas às naturais e também ferramentas para o estudo das mesmas (Alves, 2007).

Uma definição simplista dos fractais é considerá-los como estruturas geométricas de configuração irregular, que se encontram na natureza e que podem ser criadas digitalmente, gerando imagens de grande complexidade por repetição, até ao infinito, de um algoritmo matemático, onde cada parte que as forma é uma cópia reduzida da forma total, ou seja, é uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo (Feder, 1988).

2.1. Propriedades dos fractais

Um objecto geométrico é tido como um fractal se possuir pelo menos algumas das seguintes características (Alves, 2007):

- Tem uma “estrutura fina”, i.e., contém detalhe a escala arbitrariamente pequena e quanto mais se amplia a sua imagem, mais detalhes é possível observar.

- É demasiado regular para poder descrever-se facilmente nos termos clássicos, quer em termos globais quer ao nível da sua geometria local, isto é, não se trata do lugar de pontos que satisfaz uma determinada condição nem dos pontos que representam o conjunto-solução de uma equação simples, sendo também complicado descrever o que se passa à volta de cada um dos seus pontos.

- Possui algum tipo de auto-semelhança (exacta, aproximada ou estatística), isto é, contém cópias de si próprio a várias escalas. Um fractal auto-semelhante ”puro” contém cópias de si próprio a escalas tão pequenas quanto se queira. Na natureza, o intervalo de escalas a que o fractal se representa dentro de si mesmo é limitado.

- Pode construir-se a partir de um processo muito simples e directo podendo eventualmente obter-se através de um procedimento recursivo que gera, em cada passo (iteração), uma melhor aproximação do fractal.

Um fractal pode ter todas estas características ou apenas algumas. Pode também apresentar outras não enumeradas aqui mas igualmente com interesse.

Em relação à auto-semelhança esta pode ser exacta, aproximada ou estatística. A primeira verifica-se quando o fractal é composto por reduções de si mesmo a várias escalas (é o caso do *Triângulo de Sierpinski*, [Fig.6]). Na auto-semelhança aproximada o fractal é composto por várias contracções de si mesmo. Como exemplo temos a folha do feto, apresentada na figura 3, onde cada contracção é constituída por cada sub-folha que constitui a folha do feto.

Fig.3 Pormenor das folhas de um feto.

Por sua vez, a auto-semelhança estatística verifica-se quando o fractal contiver dentro de si formas estatisticamente idênticas à sua forma global, a escalas tão pequenas quanto se queira. Por exemplo, o fractal que se obtém com o processo da *Curva de Koch* e fazendo, em cada passo uma escolha aleatória sobre qual o lado para o qual se constrói a nova saliência da curva – estes são designados por fractais aleatórios [Fig.4].

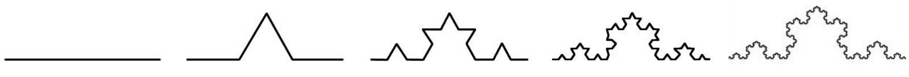

Fig.4 As primeira quatro iteradas para a construção da Curva de Koch (Alves, 2007)

Os fractais têm uma complexidade infinita, uma vez que o seu processo gerador é recursivo, tendo um número infinito de iterações.
Em relação à dimensão de um fractal, esta representa o grau de ocupação deste no espaço, que está relacionado com o seu grau de irregularidade.
A dimensão do fractal, ao contrário do que sucede na geometria euclideana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito, ela é uma quantidade fraccionária.

3. Primórdios da geometria fractal

Um dos fractais clássicos surgiu em 1880 pelo matemático Georg Cantor - o Cojunto de Cantor. Este é construído a partir de um sistema de funções iteradas aplicado ao conjunto [0,1].

O processo iterativo, ilustrado na Figura 5, é aplicado nos seguintes passos:

- Define-se o intervalo $C_0=[0,1]$;
- No passo 1 retira-se o terço do meio do intervalo, ficando com o conjunto

$$C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$

- No passo 2 retira-se o terço do meio de cada um dos dois intervalos criados pelo passo 1, construindo-se o conjunto

$$C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$

- ...
- Na n-ésima iteração retira-se o terço do meio de cada um dos intervalos criados no passo (n-1)

O Conjunto de Cantor é definido como a intersecção dos conjuntos C_n construídos, .

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

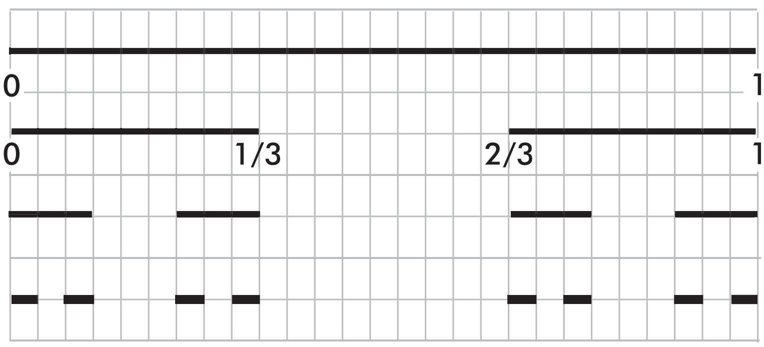

Fig.5 Esquematização da construção do Conjunto de Cantor

Note-se que a propriedade de auto-semelhança, característica dos fractais, neste caso é exacta: em qualquer das iterações, ou seja, em qualquer escala, cada parte que compõe o conjunto obtido é semelhante a uma das iterações anteriores.

Um outro exemplo de um fractal clássico é o Triângulo de Sierpinski (de 1915) **[Fig.6]** do matemático polaco Waclaw Sierpinski.

O seu processo de construção começa com um triângulo equilátero com uma

unidade de comprimento de lado. Calcula-se o ponto médio de cada um dos lados e unem-se estes pontos formando quatro novos triângulos equiláteros.
Na iterada seguinte, a cada um dos triângulos obtidos aplica-se o procedimento anterior: calculam-se os pontos médios dos lados, que serão unidos e formarão novos triângulos equiláteros. A figura geométrica final, ao fim de quatro iteradas, é apresentada na Figura 6.

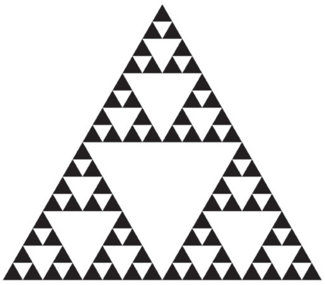

Fig.6 Triângulo de Sierpinski.

Optou-se por apresentar estes dois exemplos, relativamente simples, de fractais clássicos que deram origem ao desenvolvimento da geometria fractal.

4. Fractais na Arquitectura

A primeira ligação "oficial" estabelecida entre a Arquitectura e a geometria fractal deve-se a Mandelbrot.
Na década de 1990, pesquisadores como Batty e Longley (1994) e Frankhauser (1994) comprovaram que as cidades, e as urbanizações em geral, apresentam características que podem ser explicadas, cientificamente, pela geometria fractal.

Fig.7 Sun City - Arizona. Foto: Alex McLean

Nos seus trabalhos apresentam exemplos demonstrativos disso mesmo, que são apresentados nas figuras 7 e 8.

Fig.8 Subúrbio Norte-Americano. Foto: Alex McLean

Um facto interessante é que as propriedades dos fractais são as mesmas dos padrões urbanos:

- não-homogeneidade,
- fragmentação,
- rugosidade,
- organização hierárquica interna,
- mesmo princípio de distribuição dos elementos em várias escalas,
- existência de *clusters* em cada escala,
- homogeneidade existente em casos restritos

Ainda no trabalho de Batty e Longley (1994) e Frankhauser (1994) é apresentada uma surpreendente proposta para a cidade de Zurique gerada a partir de um programa de computador com variantes fractais, considerando as construções existentes, Figura 9.
Só com uma minuciosa visão de pormenor se conseguirão descobrir os padrões iniciais geradores da expansão da cidade.

Fig.9 Proposta para Zurique a partir de um programa de computador com variantes fractais, considerando as construções existentes.

Um outro exemplo de fractais na Arquitectura é apresentado na Figura 10. O efeito da repetição da forma dá um efeito único ao edifício, que neste caso é uma Escola Judaica de Berlim.

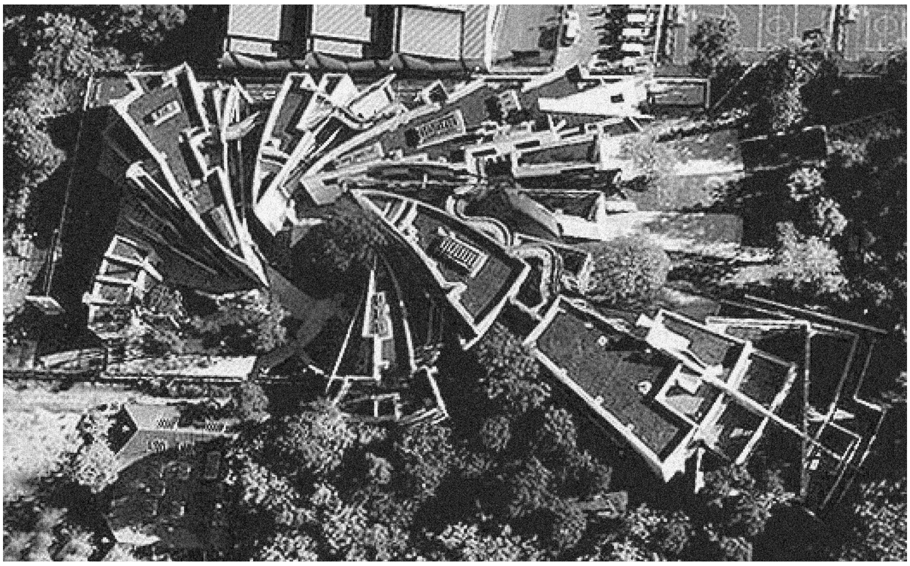

Fig.10 Escola Judaica de Berlim - Zvi Hecker

Também no Mosteiro da Batalha, numa das suas janelas, é notória a repetição do padrão dos arcos, a diferentes escalas. É impressionante como a simplicidade da repetição de uma mesma forma permite criar um efeito visual único.

Fig.11 Pormenor de uma das janelas do Mosteiro da Batalha (http://pt.wikipedia.org/wiki/Mosteiro_da_Batalha)

Para finalizar, apresenta-se na Figura 12, o Museu Guggenheim em Bilbao, um pormenor da sua arquitectura que foi gerado computacionalmente usando a geometria fractal. Novamente se constata que esta permite obter formas muito interessantes do ponto de vista arquitectónico e estético.

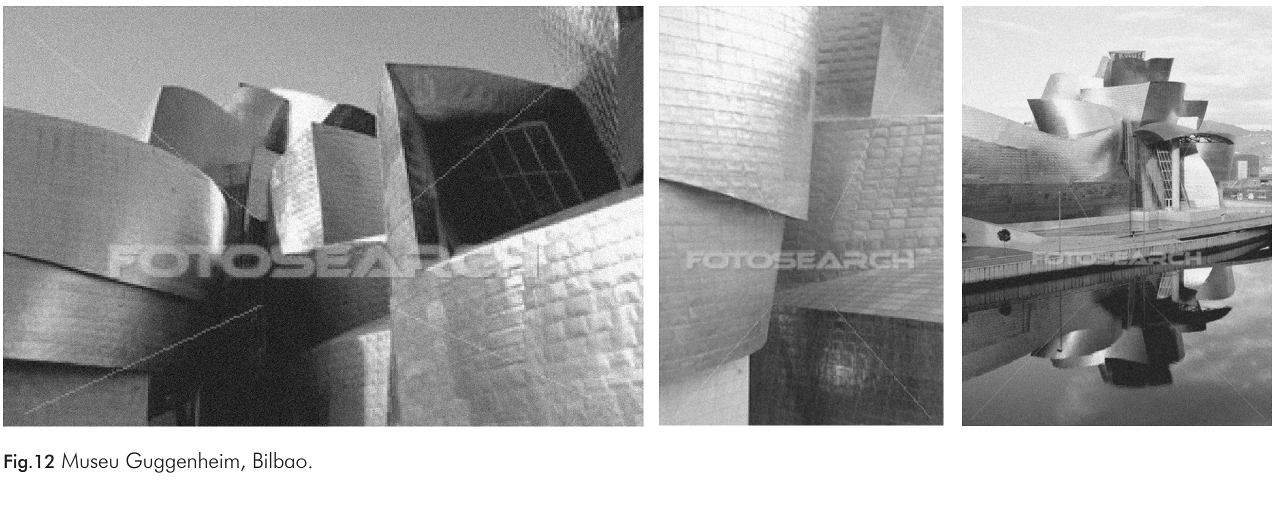

Fig.12 Museu Guggenheim, Bilbao.

Conclusão

A geometria fractal está patente em muitas formas e lugares, por vezes com aspectos bastante complexos, mas que podem ser criadas ou simuladas por processos matemáticos muito simples.

É claro que a geometria euclidiana continua e continuará a ser fundametal não só para a estruturação do raciocínio matemático, como para a modelação de inúmeros objectos e fenómenos.

Por outro lado, não basta que um determinado padrão se repita num objecto para que ele possa ser considerado um fractal.

Por exemplo, uma parede de tijolos não deverá ser considerada um fractal porque a repetição que se verifica diz respeito essencialmente a translações e não contracções. Deve haver alguma auto-semelhança num determinado objecto para que ele possa ser considerado um fractal e é necessário que essa auto-semelhança se repita por, pelo menos alguns níveis de escala.

A geometria fractal é uma nova linguagem para a interpretação das formas e dos padrões complexos da Natureza e tem contribuído para o evoluir da ciência ao fornecer ferramentas para descrever, modelar, analisar e medir o mundo revelando conexões espantosas deste com a Matemática.

Na Arquitectura, julgo que o seu contributo é inquestionável.

Bibliografia

ALVES, C.M.F.S.J. *Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário*. Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. *http://www.fractais.net/Tese.pdf*, 2007.

ALZOGARAY, I. “Geometria Fractal y arquitectura: um vínculo consistente?”, *Forma e Simetria: Arte e Ciência*, Congresso de Buenos Aires, 2007.

BARNSLEY; Michael F., DEVANAY, Robert L., FISHER, Yuval, MANDELBROT, Benoit B., McGUIRE, Michael, PEITGEN, Heinz-Otto, SAUPE, Dietmar, VOSS, Richard F. *The Science of fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988.

BATTY, M, LONGLEY , P. *Fractal Cities*. 1st edition. Londres: Academic Press. Frankhouser, P. (1994) *La fractalité des structures urbaines*. 1er edition. Paris: Anthropos-Economica, 1994

FEDER, Jens. *Fractals.* New York: Plenum Press, 1988.

FRANKHOUSER, P. *La fractalité des structures urbaines*. 1er edition. Paris: Anthropos-Economica, 1994