

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



**Avaliação de diferentes *downside betas* no mercado bolsista
europeu**

Catarina Marques Graça

Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Trabalho de Projeto orientado por:
Prof.^a Doutora Raquel João Fonseca

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de expressar a minha profunda gratidão aos meus pais, que sempre foram o meu maior apoio e exemplo, e que nunca mediram esforços para me ajudar a chegar até aqui. Estiveram sempre ao meu lado com amor, apoio incondicional e encorajamento constante em todas as etapas da minha vida acadêmica.

Um agradecimento muito especial à Professora Doutora Raquel João Fonseca, a minha orientadora, pela oportunidade concedida para desenvolver este projeto. Agradeço toda a sua dedicação, disponibilidade, orientação e confiança demonstrada ao longo de todo o processo da realização deste trabalho de projeto.

Agradeço também aos meus professores e a todos aqueles que, de alguma forma, fizeram parte do meu percurso acadêmico, partilhando conhecimento, experiências e ensinamentos que me acompanharão para a vida.

Aos meus amigos e família, pela amizade, compreensão e boa disposição, mesmo nos momentos mais difíceis.

Resumo

Este projeto avalia a aplicabilidade do modelo *Downside Capital Asset Pricing* no mercado bolsista europeu, comparando três metodologias distintas para estimar o risco sistemático propostas por Hogan e Warren (1974), Harlow e Rao (1989) e Estrada (2000). O estudo parte da premissa de que os investidores são mais sensíveis a perdas do que a ganhos, o que justifica a utilização de métricas de risco assimétricas, como o *downside beta*, em vez do beta tradicional do CAPM.

O trabalho analisa uma carteira diversificada de 20 empresas europeias, representativas de diversos setores e países, utilizando dados mensais de retornos entre julho de 2007 e setembro de 2024. A metodologia divide-se em duas etapas principais, a estimação dos *downside betas* para cada ativo, utilizando as três abordagens metodológicas, e a validação do modelo através de regressões transversais adaptadas de Fama e MacBeth (1973) e da construção da *Security Market Line*.

Os resultados revelam que a maioria dos ativos apresentam distribuições assimétricas de retornos, com predominância de caudas negativas, o que sustenta a relevância teórica do D-CAPM. Na estimação dos *downside betas*, a metodologia de Estrada destacou-se por apresentar todos os coeficientes estatisticamente significativos, enquanto as abordagens de Hogan e Warren e Harlow e Rao mostraram limitações para alguns ativos. Contudo, na validação empírica, nenhuma das três metodologias conseguiu estabelecer uma relação robusta e significativa entre o *downside beta* e os retornos esperados, embora a abordagem de Estrada tenha demonstrado um desempenho ligeiramente melhor.

Em conclusão, o estudo evidencia que, embora o D-CAPM ofereça vantagens teóricas ao incorporar a aversão ao risco de queda, a sua aplicação prática no mercado europeu apresenta limitações significativas. A metodologia de Estrada surge como a mais promissora, sugerindo que futuras pesquisas poderiam explorar adaptações setoriais ou a inclusão de fatores adicionais para melhorar a sua capacidade explicativa.

Palavras chave: Downside CAPM, Risco sistemático, Downside beta, Mercado europeu, Precificação de ativos

Abstract

This project evaluates the applicability of the Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM) in the European stock market by comparing three distinct methodologies for estimating systematic risk, as proposed by Hogan and Warren (1974), Harlow and Rao (1989), and Estrada (2000). The study is based on the premise that investors are more sensitive to losses than to gains, which justifies the use of asymmetric risk measures, such as downside beta, instead of the traditional CAPM beta.

The research analyzes a diversified portfolio of 20 European companies, representing various sectors and countries, using monthly return data from July 2007 to September 2024. The methodology is divided into two main stages: estimating downside betas for each asset using the three approaches, and validating the model through cross-sectional regressions adapted from Fama and MacBeth (1973), along with the construction of the Security Market Line.

Results show that most assets exhibit asymmetric return distributions, with a predominance of negative tails, supporting the theoretical relevance of the D-CAPM. In the downside beta estimation, Estrada's methodology stood out by producing statistically significant coefficients for all assets, while the approaches by Hogan and Warren and Harlow and Rao showed limitations in some cases. However, in the empirical validation, none of the three methods established a strong and significant relationship between downside beta and expected returns, although Estrada's approach showed slightly better performance.

In conclusion, the study highlights that while the D-CAPM offers theoretical advantages by incorporating downside risk aversion, its practical application in the European market shows significant limitations. Estrada's methodology appears to be the most promising, suggesting that future research could explore sector-specific adaptations or the inclusion of additional factors to improve its explanatory power.

Keywords: Downside CAPM, Systematic risk, Downside beta, European market, Asset pricing

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xv
1 Introdução	1
2 Revisão de Literatura	3
2.1 Teoria da Carteira de Markowitz e a Hipótese de Mercado Eficiente	3
2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)	6
2.2.1 Medida de Risco - Coeficiente Beta	8
2.2.2 Linhas de Mercado: <i>Capital Market Line</i> e <i>Security Market Line</i>	10
2.2.3 Limitações e Modificações ao modelo CAPM	13
2.3 Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)	14
2.3.1 Medida de Risco - Coeficiente <i>Downside Beta</i>	15
3 Metodologia de Investigação	18
3.1 Objeto de estudo, recolha e tratamento de dados	18
3.2 Metodologia do modelo D-CAPM	23
3.2.1 Estimação do risco sistemático <i>Downside beta</i>	24
3.2.2 Validação do modelo	26
3.2.2.1 Análise de Resíduos	29
4 Resultados Obtidos	31
4.1 Caracterização do Índice Euro STOXX50	31
4.2 Estimação do risco <i>Downside beta</i>	32
4.3 Validação do modelo D-CAPM	38

ÍNDICE

4.3.1	Análise de resíduos dos modelos estimados	46
5	Conclusão	49
	Anexos	53
A		55
B		57
C		59
D		65

Lista de Figuras

2.1	Fronteira de Eficiência.	5
2.2	Tipos de risco.	8
2.3	<i>Capital Market Line</i> (CML).	11
2.4	<i>Security Market Line</i> (SML).	12
4.1	Evolução dos retornos mensais do índice de mercado EURO STOXX50.	31
4.2	Distribuição dos prémios de risco dos ativos VOW3.DE, EDPLS e NOVO-B.CO a título de exemplo.	33
4.3	Reta de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Hogan e Warren. . .	40
4.4	Reta de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Harlow e Rao. . . .	42
4.5	Reta de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Estrada.	44

Lista de Tabelas

2.1	Comparação da medida de risco <i>downside beta</i> para as três abordagens metodológicas. . .	17
3.1	Alocação Setorial da Carteira.	21
3.2	Interpretação do coeficiente <i>downside beta</i>	25
3.3	Hipóteses do teste <i>t-student</i>	27
4.1	Análise da distribuição do prémio de risco.	33
4.2	Resultados obtidos da estimativa do <i>downside beta</i> , estatística de teste e coeficiente de determinação dos ativos individuais para as três metodologias em estudo.	35
4.3	Classificação do <i>downside beta</i> de acordo com o método Hogan e Warren.	36
4.4	Classificação do <i>downside beta</i> de acordo com o método Harrow e Rao.	36
4.5	Classificação do <i>downside beta</i> de acordo com o método Estrada.	36
4.6	Resultados da validação do modelo D-CAPM de acordo com a abordagem adaptada de Fama e MacBeth para as três metodologias em estudo.	38
4.7	Resultados da regressão SML para a metodologia de Hogan e Warren.	39
4.8	Resultados da validação da SML para a metodologia de Hogan e Warren.	40
4.9	Resultados da regressão SML para a metodologia de Harrow e Rao.	41
4.10	Resultados da validação da SML para a metodologia de Harlow e Rao.	41
4.11	Resultados da regressão SML para a metodologia de Estrada.	43
4.12	Resultados da validação da SML para a metodologia de Estrada.	43
4.13	Erros de previsão por abordagem metodológica (RMSE e MSE).	44

Lista de Abreviaturas e Siglas

AEX Amsterdam Exchange Index

APT Arbitrage Pricing Theory

CAC Cotation Assistée en Continu

CAPM Capital Asset Pricing Model

CML Capital Market Line

D-CAPM Downside Capital Asset Pricing Model

DAX Deutscher Aktienindex

ERP Enterprise Resource Planning

FTSE MIB Financial Times Stock Exchange Milano Italia Borsa

HME Hipótese de Mercado Eficiente

IBEX Iberia Index

MSE Mean Square Error

PSI Portuguese Stock Index

RMSE Root Mean Squared Error

SML Security Market Line

Capítulo 1

Introdução

A precificação de ativos constitui um pilar central na teoria financeira, permitindo aos investidores quantificar a relação entre o risco e o retorno esperado nos seus investimentos. Em períodos de instabilidade económica, como crises financeiras ou choques macroeconómicos, a incerteza sobre o futuro leva os investidores a adotarem uma postura mais conservadora e avessa ao risco. Durante esse período, torna-se essencial a utilização de metodologias mais robustas e sofisticadas para avaliar o risco de forma a garantir que os ativos detidos ou adquiridos estão corretamente precificados. A precisão na estimativa do valor dos ativos é crucial para evitar perdas significativas e maximizar os retornos num ambiente de mercado altamente volátil, ajudando na tomada de decisões informadas e permitindo uma gestão eficiente das carteiras de investimento.

Os modelos de precificação de ativos baseiam-se na premissa de que os investidores são avessos ao risco e, por isso, exigem uma compensação adicional, denominada prémio de risco, ao investir em ativos mais arriscados. O retorno esperado de um ativo deve ser suficientemente elevado para justificar os riscos associados, como por exemplo as oscilações nos preços e as incertezas macroeconómicas.

Um dos modelos mais conhecidos e amplamente aplicados na teoria financeira é o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), que estabelece uma relação linear entre o retorno esperado de um ativo e o retorno esperado do mercado. O CAPM parte do pressuposto de que o risco relevante de um ativo se resume ao seu comportamento em relação ao mercado como um todo, sendo esse risco sistemático quantificado pelo beta.

No entanto, uma das principais limitações do modelo é o fato de considerar apenas o risco sistemático, ignorando outros fatores que podem influenciar a precificação dos ativos, nomeadamente o risco de queda, que reflete a aversão dos investidores a perdas. Tradicionalmente, o risco é mensurado pelo coeficiente beta, que representa a sensibilidade de um ativo em relação ao mercado. No entanto, os modelos clássicos, como o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), consideram apenas o risco sistemático assumindo que as oscilações positivas e negativas dos ativos impactam os investidores da mesma forma. Essa abordagem simplificada ignora um aspeto fundamental do comportamento dos investidores, a aversão ao risco de queda.

Para colmatar essa limitação, o *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM) foi desenvolvido, introduzindo uma forma alternativa de medir o risco ao considerar apenas as variações negativas dos retornos dos ativos e dos retornos do mercado. Este modelo parte do pressuposto de que os investidores são mais sensíveis às perdas do que aos ganhos, tornando-se particularmente relevante para a avaliação de ativos em mercados sujeitos a choques negativos. No entanto, a implementação do D-CAPM exige

1. INTRODUÇÃO

uma escolha criteriosa do método de estimação do beta, visto que diferentes abordagens podem resultar em estimativas distintas da sensibilidade do ativo ao risco de queda.

Este estudo tem como principal objetivo analisar a aplicabilidade do D-CAPM no mercado bolsista europeu, investigando qual das três metodologias de estimação do beta, propostas por Hogan e Warren, Harlow e Rao e Estrada, apresenta melhor desempenho na explicação dos retornos dos ativos. Para isso, os coeficientes denominados *downside betas* serão estimados e posteriormente validados, permitindo avaliar a sua robustez e capacidade preditiva. Ao invés de comparar diretamente o D-CAPM com o CAPM, o foco deste trabalho será identificar qual das abordagens de estimação do *downside beta* dentro do modelo D-CAPM oferece estimativas mais precisas e economicamente relevantes para a precificação dos ativos.

O presente estudo está estruturado em cinco capítulos. Inicialmente, esta introdução apresenta a contextualização do tema, a relevância da investigação, os objetivos do trabalho e a estrutura do documento.

No segundo capítulo, procede-se à revisão da literatura, onde são abordados os conceitos fundamentais que sustentam a análise. Primeiramente, explora-se a Teoria da Carteira de Markowitz e a Hipótese de Mercado Eficiente, que servem como base para os modelos de precificação de ativos. Em seguida, são discutidas as características do CAPM, incluindo a definição do coeficiente beta, as linhas de mercado e as limitações do modelo. Por fim, é introduzido o modelo D-CAPM, onde se destaca as suas modificações em relação ao CAPM, a importância do risco de queda na avaliação dos ativos, bem como a forma como são definidos os *downside betas*.

O terceiro capítulo descreve a metodologia de investigação, apresentando o processo de recolha e tratamento de dados, bem como a abordagem utilizada para a implementação do modelo D-CAPM. São também discutidos os pressupostos do modelo e os métodos estatísticos aplicados à estimação e validação dos *downside betas*, assegurando que a análise empírica é conduzida de forma rigorosa.

No quarto capítulo, são apresentados e discutidos os resultados da análise empírica, onde se avaliam as estimativas dos diferentes *downside betas* e se verifica qual das metodologias oferece maior robustez na explicação dos retornos dos ativos.

Finalmente, no quinto capítulo, são sintetizadas as principais conclusões do estudo, discutindo-se as suas implicações para a precificação de ativos e sugerindo-se possíveis direções para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

Este capítulo tem como objetivo apresentar e discutir as principais contribuições teóricas e empíricas relacionadas com a precificação de ativos financeiros, com ênfase nos modelos *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) e *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM).

Desta forma, pretende-se fornecer uma base para a compreensão dos avanços e limitações do CAPM, bem como o surgimento de uma abordagem alternativa, o modelo D-CAPM, que visa responder aos desafios contemporâneos nos mercados financeiros.

Este trabalho de projeto parte do modelo CAPM, sendo este considerado o modelo de referência, explorando os seus pressupostos, aplicações e as críticas que motivaram o desenvolvimento de extensões como o D-CAPM. Em particular, este estudo foca-se na implementação e avaliação do modelo D-CAPM utilizando três medidas de risco distintas, mais conhecida por *downside beta*, propostas por Hogan et al. (1974), Harlow et al. (1989) e, por fim, por Estrada (2000).

Cada um desses modelos é fundamentado em pressupostos específicos sobre o risco de perda e a aversão dos investidores ao mesmo, permitindo uma análise mais abrangente e comparativa do modelo em relação à medida de risco mais adequada.

2.1 Teoria da Carteira de Markowitz e a Hipótese de Mercado Eficiente

A gestão de carteiras de investimento é um dos pilares fundamentais da moderna teoria financeira. A decisão de investimento tradicionalmente baseava-se em análises individuais de ativos, centrando-se apenas em retornos esperados, sem considerar a relação entre o risco e o retorno de uma carteira como um todo.

Em 1952, Markowitz (1952) introduziu a Teoria da Carteira através de um artigo denominado '*Portfolio Selection*'. Essa teoria demonstra que, ao invés de se investir em um único ativo, a diversificação pode reduzir consideravelmente o risco total da carteira ao combinar ativos cujos retornos estão negativamente correlacionados.

A eficácia da diversificação depende da correlação entre os ativos, pois quanto menor a correlação, maior o potencial de redução do risco. Ativos com uma correlação negativa apresentam movimentos opostos nos retornos, ajudando a compensar perdas, enquanto ativos com correlação positiva tendem a mover-se na mesma direção, reduzindo a eficácia da diversificação.

Este princípio fundamental permite que o risco não sistemático seja reduzido, enquanto o investidor

2. REVISÃO DE LITERATURA

procura maximizar o retorno esperado considerando um nível de risco aceitável. Por meio da diversificação, o investidor procura otimizar a relação entre o risco e o retorno esperado. Neste contexto, a teoria desenvolvida por Harry Markowitz apresenta uma metodologia pioneira para a gestão eficiente de investimentos.

No centro da teoria encontra-se o modelo de média-variância, uma formulação matemática focada na construção de carteiras ótimas de ativos financeiros. A abordagem proposta por Harry Markowitz considera os seguintes pressupostos:

- Os investidores são racionais e avessos ao risco, procurando maximizar o retorno esperado para um nível específico de risco ou minimizar o risco para um retorno esperado;
- As decisões de investimento baseiam-se exclusivamente no retorno esperado e no risco da carteira, sendo este último medido pelo desvio padrão ou pela variância dos retornos;
- O horizonte de investimento é único e definido para um período específico de tempo, dentro do qual são tomadas todas as decisões de alocação de ativos.

Este modelo visa a otimização da relação risco-retorno, identificando combinações eficientes de ativos que se alinhem às preferências dos investidores. Considerando n ativos disponíveis no mercado para investir, o retorno esperado da carteira de investimento é dado pela média ponderada dos retornos dos ativos individuais, dado por,

$$E_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (2.1)$$

em que :

- E_p : Retorno esperado da carteira;
- n : Número de ativos na carteira;
- w_i : Peso, em percentagem, do ativo i ;
- μ_i : Retorno esperado do ativo i .

e, o risco é medido através da variância ou desvio-padrão dos retornos dos ativos que compõem a carteira, dado por,

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

em que :

- σ_p^2 : Variância da carteira;
- σ_{ij} : Covariância entre o ativo i e j .

Neste contexto, a variância de uma carteira é a soma das variâncias individuais dos ativos e a covariância entre pares de ativos, ponderada pelo peso de cada ativo na carteira. A covariância mede como os

2.1 Teoria da Carteira de Markowitz e a Hipótese de Mercado Eficiente

retornos de dois ativos se comportam conjuntamente, sendo que ativos com correlação baixa ou negativa têm maior impacto na redução do risco total da carteira.

A construção de uma carteira ideal depende do perfil de risco do investidor, sendo que, a escolha dos ativos está diretamente relacionada com o nível de risco que o investidor está disposto a assumir para alcançar um retorno esperado específico.

Investidores com um perfil conservador priorizam a minimização da exposição ao risco, enquanto aqueles com um perfil arrojado demonstram maior disposição para aceitar níveis mais elevados de volatilidade em busca de retornos potencialmente superiores.

Para auxiliar os investidores na escolha de carteiras que se alinhem aos seus perfis de risco e objetivos de retorno, surge o conceito da Fronteira de Eficiência, uma das principais contribuições da Teoria da Carteira de Markowitz.

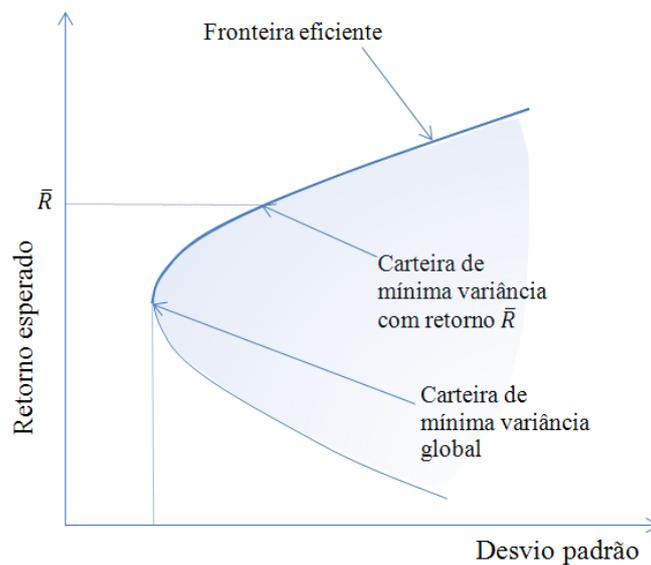


Figura 2.1: Fronteira de Eficiência.

A Fronteira de Eficiência representa o conjunto de todas as carteiras de investimento que oferecem o melhor retorno possível para um determinado nível de risco. As carteiras localizadas na Fronteira de Eficiência representam as combinações ideais de ativos, otimizando o equilíbrio entre risco e retorno de acordo com as preferências do investidor. Em contrapartida, carteiras que se encontram fora dessa fronteira são consideradas ineficientes, pois apresentam um risco excessivo para o retorno esperado ou um retorno abaixo do possível para o mesmo nível de risco.

A partir desta base teórica, surge a Hipótese de Mercado Eficiente (HME), introduzida por Fama (1970) no artigo "*Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*", sendo também considerado um dos pilares fundamentais da teoria financeira moderna.

Eugene Fama define um mercado eficiente como aquele em que os preços dos ativos refletem toda a informação disponível de forma rápida e precisa. Por outras palavras, em um mercado eficiente, não há possibilidade de obter retornos consistentemente acima da média do mercado através da análise de informações públicas, pois qualquer nova informação relevante já estará incorporada nos preços dos ativos. Um dos pressupostos fundamentais dessa hipótese é que nenhum investidor isolado tem a capacidade de influenciar significativamente os preços de mercado, uma vez que estes são determinados pela interação coletiva de inúmeros participantes racionais.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O autor classifica a eficiência dos mercados financeiros em três formas distintas, de acordo com o grau de incorporação da informação nos preços dos ativos:

- **Eficiência na forma fraca:** Sugere que os preços dos ativos refletem toda a informação histórica dos preços. Isso implica que técnicas de análise técnica, baseadas em padrões históricos, são ineficazes na geração de retornos excedentes ajustados ao risco;
- **Eficiência na forma semiforte:** Sustenta que os preços dos ativos incorporam não só os dados históricos, mas também toda a informação pública disponível, como demonstrações financeiras, anúncios de resultados, fusões e aquisições, e até mesmo expectativas macroeconômicas;
- **Eficiência na forma forte:** Postula que os preços refletem toda a informação relevante, incluindo dados públicos e informações privilegiadas ou de caráter privado.

A contribuição de Markowitz na economia vai além da construção de carteiras ótimas de investimento. Ao integrar os conceitos de risco e retorno numa estrutura matemática rigorosa, o seu trabalho redefiniu a forma como os investidores avaliam e tomam as suas decisões financeiras. A Teoria da Carteira, juntamente com a Hipótese do Mercado Eficiente, estabeleceram as bases para o desenvolvimento de modelos financeiros mais avançados, como o CAPM, além de fundamentar a compreensão dos mercados financeiros modernos. Enquanto a Teoria da Carteira forneceu a estrutura para a otimização do portfólio, a HME trouxe uma compreensão essencial sobre a precificação dos ativos e a incorporação da informação nos preços de mercado. Essas abordagens, em conjunto, não só revolucionaram a gestão de investimentos, mas também evidenciaram a relevância da diversificação e da análise quantitativa de ativos financeiros para promover a eficiência e a estabilidade econômica.

2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Uma das questões mais debatidas na teoria financeira é como o risco de um investimento influencia o seu retorno esperado. Conforme discutido anteriormente, a Teoria da Carteira de Harry Markowitz (1952) e a Hipótese do Mercado Eficiente de Eugene Fama (1970) estabeleceram as bases fundamentais para o desenvolvimento de modelos financeiros mais avançados, sendo o CAPM um dos mais influentes. Esses pilares trouxeram consigo pressupostos essenciais que sustentam a formulação do modelo em causa.

A Teoria da Carteira introduziu a premissa de que os ativos são infinitamente divisíveis, permitindo que os investidores possam construir carteiras perfeitamente ajustadas às suas preferências de risco e retorno. Por sua vez, a Hipótese do Mercado Eficiente postulou que nenhum investidor individual tem a capacidade de influenciar os preços de mercado, uma vez que toda informação disponível é incorporada nos preços de forma imediata e precisa.

Além dessas premissas fundamentais, o CAPM baseia-se em um conjunto adicional de pressupostos que garantem sua aplicabilidade teórica. Ao longo do tempo, diversos estudos, tais como os de Sharpe (1964), Lintner (1975) e Mossin (1966), contribuíram para a formulação dessas premissas, consolidando a base teórica do modelo. De acordo com Elton et al. (2009), os pressupostos do CAPM podem ser enunciados da seguinte forma:

- **Inexistência de custos de transação** - Assume que não há qualquer custo associado à compra e

2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

venda de ativos. Deste modo, os investidores podem realocar os seus portfólios de forma eficiente, sob condições de eficiência de mercado.

- **Ausência de impostos** - Assume a inexistência de tributações sobre os rendimentos dos investimentos, o investidor é indiferente à forma como recebe o retorno do investimento, seja através de dividendos ou mais-valias.
- **Decisões baseadas em média e variância** - Os investidores tomam decisões de investimentos exclusivamente com base na média esperada dos retornos e na variância como medida de risco. Esta premissa deriva do modelo de Média-Variância de Markowitz (1952).
- **Vendas a descoberto permitidas** - Assume que os investidores podem realizar vendas a descoberto de qualquer quantidade de ativos, permitindo uma maior flexibilidade na composição do portfólio e na gestão do risco.
- **Possibilidade de Empréstimos e Financiamentos Ilimitados à Taxa Livre de Risco** - Os investidores podem emprestar e pedir emprestado qualquer montante a uma taxa de juro livre de risco, permitindo que os investidores ajustem a sua exposição ao risco através de combinações de ativos arriscados e não arriscados.
- **Expectativas Homogéneas** - Pressupõe-se que todos os investidores partilham expectativas idênticas em relação aos retornos esperados, à variância dos retornos e às correlações entre os ativos.
- **Horizonte Temporal Único** - Assume-se que todos os investidores avaliam os seus portfólios considerando um horizonte de investimento idêntico.
- **Todos os Ativos São Comercializáveis** - Pressupõe-se que todos os ativos, incluindo o capital humano, podem ser comprados e vendidos livremente no mercado, assegurando que todos os fatores produtivos sejam considerados na alocação ótima de recursos.

Fundamentado na Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1952), o CAPM parte da premissa que os investidores são avessos ao risco e procuram maximizar os retornos ajustados ao risco, através da diversificação das suas carteiras de investimento.

Entre diversos modelos desenvolvidos que abordam a relação entre o risco e o retorno de um ativo, destaca-se aquele introduzido por Sharpe (1964), complementado pelos trabalhos de Lintner (1975) e Mossin (1966) (na década de 60), um dos modelos mais influentes na teoria financeira, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).

O modelo estabelece uma relação linear entre o retorno esperado de um ativo e o retorno esperado do mercado, sendo essa relação ponderada pelo coeficiente beta, denominado medida de risco. Desta forma, a fórmula do modelo é dada por:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f) \quad (2.3)$$

em que :

- $E(r_i)$: Retorno esperado exigido para o ativo i ;
- r_f : Taxa de juro livre de risco;

2. REVISÃO DE LITERATURA

- $E(r_m)$: Retorno esperado do mercado;
- β_i : Risco sistemático do ativo i em relação ao mercado.

2.2.1 Medida de Risco - Coeficiente Beta

O risco é um fator determinante para a formulação do CAPM e no comportamento dos investidores aquando da tomada de decisão de investimento. No âmbito deste modelo, o risco total de um investimento pode ser composto por duas partes, Figura 2.2, o risco não sistemático, específico de cada ativo que pode ser reduzido através da diversificação da carteira, e, o risco sistemático, inerente ao mercado, que afeta todos os ativos como um todo, sendo este o foco principal do modelo para determinar o retorno esperado.

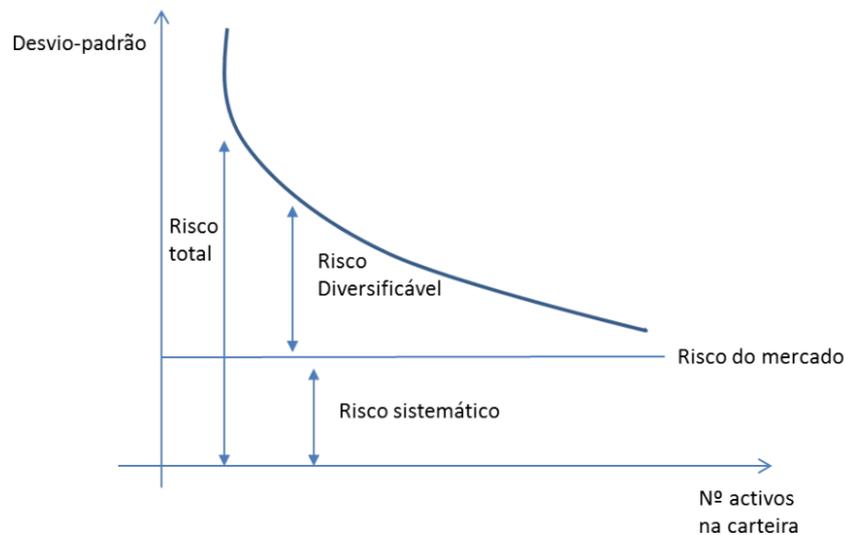


Figura 2.2: Tipos de risco.

O risco não sistemático, também chamado de risco diversificável, está relacionado com eventos únicos de uma empresa, como mudanças na gestão, processos judiciais ou interrupções operacionais. Como já foi referido, este tipo de risco pode ser reduzido ou até eliminado ao combinar diferentes ativos através de uma carteira diversificada.

Por outro lado, o risco sistemático ou não diversificável, resulta de fatores macroeconómicos, como recessões, alterações nas taxas de juro ou inflação, afetando todos os ativos no mercado de forma generalizada. Este tipo de risco não pode ser eliminado por meio da diversificação e, por isso, é o único risco pelo qual os investidores são compensados.

No CAPM, o risco sistemático é medido pelo coeficiente beta, que representa a sensibilidade de um ativo face a variações da rentabilidade do mercado, dado por:

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad (2.4)$$

em que

- $Cov(r_i, r_m)$: Covariância entre o retorno do ativo i e o retorno de mercado;
- $Var(r_m)$: Variância da rentabilidade da carteira de mercado.

2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

O coeficiente beta é diretamente influenciado pela covariância entre o retorno do ativo i e o retorno do mercado. Quanto maior for essa covariância, maior será o valor do coeficiente e, conseqüentemente, maior será o risco sistemático associado ao mesmo. Os valores do coeficiente beta e as suas interpretações podem ser resumidos da seguinte forma:

- $\beta = 0$, o risco sistemático do ativo é nulo, indicando que o risco associado pode ser completamente eliminado pela diversificação ao incluí-lo na carteira de mercado, ou seja, este beta está associado a ativos cuja rentabilidade é igual à taxa de juro sem risco. Uma variação de 1% no retorno do mercado não altera o retorno esperado do ativo;
- $\beta < 0$, reflete uma correlação negativa entre o retorno do ativo e o retorno de mercado, o que implica que o ativo reduz o risco da carteira quando adicionado, pois apresenta retornos opostos aos do mercado. Neste caso, os investidores podem aceitar um retorno inferior devido à redução do risco total da carteira;
- $0 < \beta < 1$, o ativo possui um risco sistemático menor que o do mercado. Neste cenário, uma variação de 1% no retorno do mercado resulta num movimento proporcional inferior a 1% no retorno do ativo, indicando menor volatilidade em relação ao mercado;
- $\beta = 1$, o ativo apresenta um risco sistemático equivalente ao do mercado. Uma variação de 1% no retorno do mercado resulta em uma variação de 1% no retorno do ativo. Nesse caso, o ativo acompanha perfeitamente os movimentos do mercado;
- $\beta > 1$, o ativo é mais volátil e apresenta risco sistemático superior ao do mercado. Isso significa que uma variação de 1% no retorno do mercado resulta em um movimento superior a 1% no retorno do ativo, amplificando os movimentos do mercado.

O conceito de prémio de risco está estreitamente ligado ao coeficiente beta, pois ambos desempenham papéis cruciais na determinação do retorno esperado de um ativo. O prémio de risco do mercado representa o retorno adicional exigido pelos investidores como compensação pelo risco de mercado, sendo calculado como a diferença entre o retorno esperado do mercado e a taxa juro livre de risco.

Neste contexto, o coeficiente beta traduz a exposição relativa de um ativo ao risco de mercado, ajustando o prémio de risco do mercado para estimar o retorno esperado do ativo. A relação pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i(E(r_m) - r_f) \quad (2.5)$$

em que

- $E(r_i) - r_f$: Prémio de risco do ativo i , ou seja, o retorno esperado do ativo acima da taxa livre de risco.
- $E(r_m) - r_f$: Prémio de risco do mercado, que reflete o retorno adicional esperado do mercado em relação à taxa livre de risco.

A medida de risco referida ajusta o prémio de risco do mercado para refletir o risco sistemático específico de cada ativo. Ativos com um beta superior a 1 possuem um prémio de risco maior, indicando maior exposição ao risco de mercado e, conseqüentemente, um retorno esperado superior. Por outro

2. REVISÃO DE LITERATURA

lado, ativos com um beta inferior a 1 apresentam um prêmio de risco reduzido, refletindo uma menor exposição ao risco de mercado e retornos esperados mais conservadores.

Embora o beta seja amplamente utilizado devido à sua simplicidade e à base teórica consistente, tem sido alvo de críticas consideráveis no âmbito acadêmico e prático. Uma das limitações principais é a suposição de que o risco sistemático, capturado por este coeficiente, é o único fator relevante para determinar a rentabilidade do ativo. Estudos empíricos demonstram que outros fatores, como a dimensão das empresas, Banz (1981), e a relação entre o valor contábilístico e o valor de mercado das ações, Fama e French (1992), também podem ter um impacto significativo nos retornos, desafiando a adequação do beta como única medida de risco.

Além disso, o coeficiente beta assume uma relação linear entre os retornos dos ativos e o mercado, o que pode não capturar adequadamente os riscos em cenários de mercado adversos ou extremos. Como observado por Estrada (2002), o beta tradicional ignora as assimetrias nos retornos e a aversão dos investidores ao *downside risk*, ou seja, ao risco de quedas significativas nos retornos. Essa 'lacuna' torna-o uma medida menos robusta para captar o comportamento real do risco, especialmente em mercados caracterizados por alta volatilidade ou crises financeiras. Estas limitações abriram espaço para o desenvolvimento e aplicação de métricas alternativas que considerem esses aspectos negligenciados pelo beta.

2.2.2 Linhas de Mercado: *Capital Market Line* e *Security Market Line*

Para aprofundar a compreensão dos mecanismos que regem a relação entre risco e retorno nos mercados financeiros, torna-se essencial explorar as representações gráficas derivadas dos fundamentos teóricos da Teoria Moderna do Portefólio e do Modelo de Precificação de Ativos, o CAPM.

A fronteira eficiente, derivada da Teoria da Carteira, representa o conjunto de carteiras ótimas que maximizam o retorno esperado para um dado nível de risco ou, que minimizam o risco para um dado nível de retorno esperado.

Contudo, a análise da fronteira eficiente, por si só, não oferece *insights* detalhados sobre a relação risco-retorno de ativos individuais em relação ao mercado como um todo. Nesse contexto, a *Capital Market Line* (CML) e a *Security Market Line* (SML) emergem como ferramentas analíticas de fundamental importância.

A *Capital Market Line* (CML) surge como uma extensão direta da Teoria da Carteira de Markowitz e, fundamenta-se no pressuposto de que um ativo livre de risco está disponível no mercado, permitindo que os investidores aloquem recursos tanto em ativos de risco quanto nesse ativo livre de risco, a uma taxa de juro constante. Assim, a CML estabelece a representação gráfica da relação linear existente entre o retorno esperado de uma carteira $E(r_p)$ e seu respetivo desvio padrão σ_p . A equação da CML é dada por:

$$E(r_p) = r_f + \left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \right) \sigma_p \quad (2.6)$$

em que

- $E(r_p)$: Retorno esperado da carteira p ;
- r_f : Retorno do ativo sem risco;

2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- $E(r_m)$: Retorno esperado da carteira de mercado m ;
- σ_m : Desvio padrão do retorno da carteira de mercado m ;
- σ_p : Desvio padrão da carteira p .

A figura 2.3 ilustra as diversas combinações possíveis entre ativos de risco e ativos sem risco.

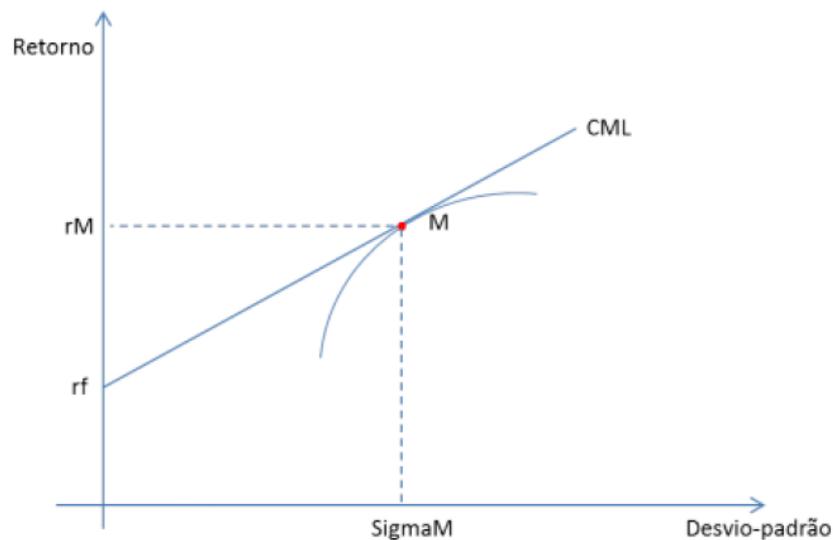


Figura 2.3: *Capital Market Line (CML)*.

O ponto M destaca-se como a carteira ótima que integra tanto ativos de risco quanto ativos sem risco, conhecida também como portefólio de mercado. O segmento de reta que se estende do ponto correspondente à taxa de juro sem risco r_f até ao ponto M abrange todas as combinações possíveis desses dois tipos de ativos. Para as carteiras localizadas à direita do ponto M, estas só podem ser alcançadas se o investidor captar recursos adicionais a uma taxa de juro sem risco e, em seguida, aplicar esses fundos na carteira M, aumentando assim a exposição ao risco.

A ordenada na origem da CML corresponde à taxa de juro sem risco r_f , o que significa investir exclusivamente em um ativo sem risco garantindo ao investidor esse retorno. Este ato pode ser interpretado como o investidor fornecer um financiamento ao mercado, recebendo, em troca, a taxa de juro sem risco.

O declive da CML representa o *trade-off* entre o retorno esperado e o risco assumido, funcionando como uma 'recompensa' que o investidor recebe por cada unidade adicional de risco. Quanto mais íngreme for a inclinação da reta, maior será o risco da carteira e consequentemente, maior será o retorno esperado para o acréscimo de risco.

A seleção de uma carteira eficiente ao longo da CML está diretamente ligada ao nível de aversão ao risco do investidor. Aqueles que possuem maior aversão ao risco preferem carteiras situadas à esquerda do ponto M, onde a proporção de ativos sem risco é maior e, consequentemente, o risco total é menor. Em contrapartida, investidores que procuram maiores retornos, e estão dispostos a assumir um risco adicional, optarão por carteiras localizadas à direita de M, aproveitando a possibilidade de alavancagem.

Em contraste com a CML, a *Security Market Line (SML)* é uma representação gráfica do CAPM que descreve a relação entre o risco sistemático dos ativos, medido pelo coeficiente beta, e o retorno

2. REVISÃO DE LITERATURA

esperado. O princípio subjacente à SML é que somente o risco não diversificável, aquele que afeta todos os ativos do mercado, deve ser remunerado. Assim, a SML é expressa pela seguinte equação:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i [E(r_m) - r_f] \quad (2.7)$$

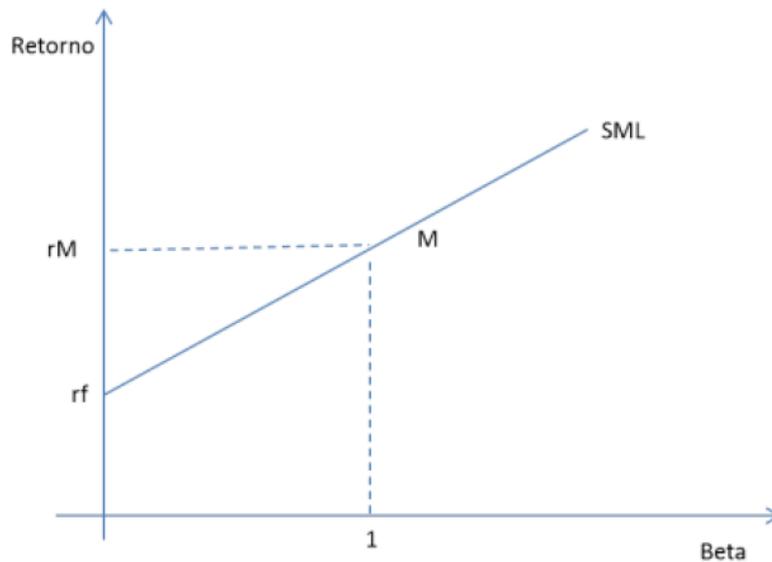


Figura 2.4: Security Market Line (SML).

A ordenada na origem da reta, r_f , representa a rentabilidade do ativo livre de risco, isto é, o retorno esperado de uma carteira ou ativo cujo coeficiente beta é nulo, implicando a ausência de exposição ao risco sistemático. Quando $\beta = 1$, a rentabilidade esperada do investimento torna-se equivalente ao retorno esperado da carteira de mercado ($E(r_i) = r_m$), refletindo uma exposição proporcional ao risco de mercado. Em condições de equilíbrio, qualquer ativo ou carteira, eficiente ou não, posiciona-se ao longo da SML, evidenciando a relação linear entre risco sistemático e retorno esperado.

O declive da reta SML ($E(r_m) - r_f$) é positivo, refletindo que o retorno esperado da carteira de mercado $E(r_m)$ excede a taxa livre de risco r_f . Como a carteira de mercado envolve exposição ao risco, é natural que sua rentabilidade esperada supere a de um ativo sem risco. Assim, observa-se uma relação direta entre o retorno esperado de um título e seu coeficiente beta, evidenciando que, quanto maior for o retorno esperado da carteira de mercado ($E(r_m)$), mais acentuado será o declive da SML, ver figura 2.4.

A posição de um ativo em relação à SML permite avaliar se este se encontra corretamente precificado, indicando possíveis discrepâncias entre o retorno esperado e o risco assumido.

Quando um ativo se encontra acima da SML, considera-se subavaliado, pois oferece um retorno esperado superior ao que seria apropriado para o risco sistemático associado. Esta situação torna o ativo uma opção atrativa para investidores, dado que apresenta um retorno potencial mais elevado do que o exigido pelo mercado, sendo assim uma boa oportunidade de compra.

Por outro lado, se um ativo se posiciona abaixo da SML, é classificado como sobreavaliado. Neste caso, o retorno esperado é inferior ao adequado para o nível de risco assumido, oferecendo uma oportunidade menos vantajosa para investimento. Esta condição sugere que o mercado atribuiu um valor excessivo ao ativo, sem oferecer uma compensação de retorno proporcional, o que pode representar uma boa oportunidade de venda.

2.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Finalmente, quando um ativo se encontra exatamente sobre a SML, considera-se corretamente precificado. Nesta posição, o retorno esperado está perfeitamente alinhado ao risco sistemático, refletindo as expectativas do mercado em situação de equilíbrio. Assim, a SML fornece um importante referencial para investidores e analistas ao avaliar a viabilidade de investimentos, auxiliando na tomada de decisões fundamentadas com base na relação entre risco e retorno.

A *Capital Market Line* (CML) e a *Security Market Line* (SML) são conceitos fundamentais para a análise de risco e retorno, porém apresentam diferenças importantes. A CML refere-se exclusivamente a carteiras eficientes, compostas por combinações ótimas de ativos com e sem risco, onde o risco total é medido pelo desvio-padrão. Apenas portfólios eficientes encontram-se sobre essa linha, ativos ou carteiras ineficientes posicionam-se abaixo dela.

Por outro lado, a SML é válida tanto para portfólios eficientes quanto para ineficientes, desde que exista uma situação de equilíbrio de mercado. Essa linha relaciona o retorno esperado ao risco sistemático, medido pelo coeficiente beta, abrangendo todos os ativos e carteiras.

A principal conexão entre as duas linhas de mercado reside na carteira de mercado, um ponto comum a ambas, onde o risco total coincide com o risco sistemático. Enquanto a CML mede o *trade-off* entre retorno e risco total, a SML concentra-se na relação entre retorno e risco não diversificável. Assim, ambas oferecem visões complementares para compreender e avaliar decisões de investimento.

2.2.3 Limitações e Modificações ao modelo CAPM

Ao longo das últimas décadas, diversos estudos têm questionado a validade empírica do modelo *Capital Asset Pricing Model*. Apesar de seu impacto histórico e relevância na teoria financeira, o CAPM demonstra limitações para explicar toda a complexidade dos mercados financeiros modernos, impulsionando o surgimento de abordagens alternativas mais robustas e adaptadas às realidades econômicas e comportamentais dos investidores.

Black (1972) desafiou a premissa de que os investidores têm acesso ilimitado a um ativo livre de risco, propondo um modelo alternativo. O modelo de Black, conhecido como modelo de dois fatores, substituiu a taxa livre de risco por um ativo hipotético com beta igual a zero. Neste contexto, a rentabilidade de um ativo é determinada não só pela sua relação com o mercado, mas também pela rentabilidade esperada de um portfólio de mercado eficiente e pela rentabilidade do ativo hipotético.

Uma das premissas fundamentais do CAPM, conforme descrito Sharpe (1964), é que todos os investidores compartilham das mesmas expectativas sobre o mercado. Por outras palavras, supõe-se que os agentes econômicos possuem informações homogêneas e um horizonte de investimento comum. Essa suposição, no entanto, é frequentemente refutada pela dinâmica dos mercados financeiros, caracterizada por uma grande diversidade de investidores com diferentes níveis de informação, preferências de risco e objetivos de investimento.

Para superar essas limitações, surgem extensões ao modelo CAPM, como o *Arbitrage Pricing Theory* (APT), desenvolvido por Ross (1976). O APT adota uma abordagem mais abrangente ao introduzir uma série de fatores de natureza setorial ou macroeconômica que impactam a rentabilidade esperada. Este modelo considera a heterogeneidade das informações e preferências dos investidores, assim como a complexidade dos mercados financeiros.

Uma crítica central ao CAPM está na premissa de que o coeficiente beta é o único determinante do risco sistemático de um ativo. Estudos como os de Fama e French (1992) evidenciaram que fatores

2. REVISÃO DE LITERATURA

adicionais, como a dimensão da empresa e a relação entre o valor contabilístico e o valor de mercado (*book-to-market*), também exercem influência significativa na rentabilidade esperada. Essa constatação deu origem a modelos multifatoriais, como o modelo de Três Fatores de Fama e French, que incorpora esses elementos proporcionando uma abordagem mais abrangente. Posteriormente, Fama e French ampliaram seu modelo para incluir cinco e seis fatores, integrando variáveis como rentabilidade e investimento, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos mecanismos subjacentes à precificação dos ativos.

Uma limitação particularmente crítica do CAPM é sua incapacidade de capturar a assimetria inerente aos retornos dos ativos. A premissa de linearidade implícita no modelo revela-se inadequada para modelar o comportamento dos retornos em mercados altamente voláteis, como durante crises financeiras, nos quais os investidores demonstram uma aversão pronunciada a perdas.

Em resposta a essa limitação, foram desenvolvidos modelos que consideram a aversão ao risco de queda, mais conhecido como *downside risk*. Estrada (2002) introduziu o modelo *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM), que substitui o beta tradicional, utilizado para medir a sensibilidade de um ativo em relação aos retornos gerais do mercado, pelo *downside beta*. Essa métrica mais refinada quantifica a sensibilidade de um ativo exclusivamente em relação aos retornos negativos do mercado, oferecendo uma perspectiva mais precisa e alinhada à realidade de cenários de alta volatilidade e aversão a perdas.

Assim, ao reconhecer e abordar as limitações do modelo CAPM, o desenvolvimento de abordagens alternativas tem contribuído para uma compreensão mais sofisticada e abrangente dos fatores que influenciam a precificação de ativos financeiros.

2.3 Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)

O desenvolvimento do modelo *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM) está intrinsecamente ligado às limitações observadas no modelo CAPM tradicional, especialmente no que diz respeito à sua incapacidade de capturar a aversão assimétrica dos investidores a perdas. O modelo em estudo surge como resposta às limitações apresentadas e à necessidade de abordar questões específicas relacionadas ao risco, e introduz uma abordagem que reflete mais fielmente o comportamento observado nos mercados financeiros, especialmente em períodos de crise.

O modelo CAPM baseia-se na teoria da média-variância de Markowitz e assume que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal, implicando uma avaliação simétrica do risco, onde variações positivas e negativas impactam os investidores da mesma forma.

No entanto, evidências empíricas demonstram que os investidores apresentam maior aversão a perdas do que preferência por ganhos equivalentes, um fenômeno descrito na Teoria da Perspectiva desenvolvida por Kahneman et al. (2013).

Uma das principais críticas ao CAPM reside no uso da variância como medida de risco, uma vez que esta incorpora tanto oscilações positivas quanto negativas. No entanto, em mercados reais, geralmente os investidores tendem a preocupar-se mais com quedas nos retornos do que com ganhos acima da média, tornando a variância uma métrica menos adequada para capturar o risco real.

Markowitz reconhece que, embora a variância seja uma medida tradicional de risco, esta apresenta limitações, especialmente quando os retornos dos ativos apresentam distribuições assimétricas. Nestes casos, o autor sugere o uso de uma medida de *downside risk*, utilizando a semivariância como a medida

2.3 Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)

mais apropriada de risco, focando-se exclusivamente nas variações negativas dos retornos, alinhando-se melhor às preocupações dos investidores em minimizar as perdas.

A primeira formalização do conceito de risco de queda remonta a Roy (1952), com a introdução do conceito *Safety-First*. Este princípio parte da premissa de que os investidores priorizam a proteção contra perdas catastróficas, em detrimento da maximização de retornos. Em vez de avaliar o risco de forma simétrica, como é o caso do CAPM, Roy propõe que a gestão de ativos deveria centrar-se na minimização da probabilidade de retornos caírem abaixo de um determinado nível crítico, conhecido como limiar de segurança.

Esta abordagem desafiou diversas teorias predominantes ao colocar o *downside risk* como uma métrica mais apropriada para decisões financeiras, especialmente em contextos de elevada volatilidade. A partir do conceito inovador *Safety-First*, avanços subsequentes procuraram incorporar o risco de queda, mais conhecido como *downside risk*, como uma métrica relevante em modelos formais de precificação de ativos financeiros.

2.3.1 Medida de Risco - Coeficiente *Downside Beta*

O primeiro avanço significativo foi dado por Hogan et al. (1974), que propuseram um modelo alternativo no qual a variância é substituída pela semivariância como métrica de risco. A adoção desta medida de risco assenta na premissa de que os investidores não avaliam o risco de forma simétrica. Ao considerar apenas as oscilações negativas dos retornos, a semivariância configura-se como uma medida mais representativa do risco efetivo enfrentado pelos agentes económicos.

Esta medida estatística avalia a dispersão de retornos negativos em relação a um valor referência, usualmente a média ou um retorno-alvo, permitindo uma análise mais focada nas perdas. Como tal, a medida de risco baseada na semivariância pode ser expressa da seguinte forma:

$$S^2 = E [\min(r_x - T, 0)^2] \quad (2.8)$$

em que

- S^2 : Semivariância;
- r_x : Retorno do portefólio x ;
- T : Ponto arbitrário, *benchmark*, que define o limite de perdas.

A aplicação da semivariância deverá seguir os seguintes critérios metodológicos:

$$r_x - T = \begin{cases} r_x - T, & \text{se } r_x - T \leq 0 \\ 0, & \text{se } r_x - T > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Partindo da aplicação da semivariância, Hogan et al. (1974) introduziram um modelo de precificação de ativos que considera uma medida de risco ajustada, o *downside beta*, em oposição ao tradicional modelo baseado na variância total. A sua principal inovação foi a formulação de uma medida de risco que reflete exclusivamente o impacto das variações negativas dos retornos dos ativos em relação à taxa livre de risco, conforme a seguinte equação:

2. REVISÃO DE LITERATURA

$$\beta_{HW}^D = \frac{E[(r_i - r_f) \min(r_m - r_f, 0)]}{E[\min(r_m - r_f, 0)]^2} \quad (2.10)$$

O numerador representa a co-semivariância entre os retornos do ativo e os retornos negativos abaixo da taxa de juro livre de risco, enquanto o denominador representa a semivariância das perdas do mercado em relação à taxa de juro livre de risco.

Posteriormente, Harlow et al. (1989) ampliaram a discussão ao redefinir o valor de referência do *downside risk*. Embora o modelo de Hogan e Warren já tivesse corrigido a simetria na avaliação do risco, Harlow e Rao observaram que utilizar a taxa livre de risco como ponto de referência pode ser limitado em alguns contextos. Na prática, os investidores tendem a comparar o desempenho dos seus ativos com o retorno médio do mercado, em vez de um valor fixo como a taxa de juro livre de risco.

Assim, Harlow et al. (1989) propuseram uma modificação ao *downside risk* em que o ponto de referência é substituído pela média dos retornos do mercado. Esta abordagem alinha-se ao comportamento observado em mercados reais, em que os investidores avaliam os seus ativos em relação às expectativas médias do mercado.

O modelo introduzido por Harlow e Rao reforçou a importância de métricas ajustáveis e contextuais, destacando a flexibilidade do risco de queda como uma ferramenta analítica. Com essa modificação, o beta passa a capturar de forma mais fiel a sensibilidade dos ativos em relação às oscilações negativas, considerando a média dos retornos de mercado como ponto de comparação. Desta forma, a medida de risco pode ser dada como:

$$\beta_{HR}^D = \frac{E[(r_i - \mu_i) \min(r_m - \mu_m, 0)]}{E[\min(r_m - \mu_m, 0)]^2} \quad (2.11)$$

O numerador representa a co-semivariância entre os retornos abaixo da média do ativo e as perdas de mercado, enquanto o denominador representa a semivariância dos retornos de mercado.

Posteriormente ao trabalho de Harlow et al. (1989), Estrada (2000) consolidou e ampliou as contribuições teóricas referentes ao risco assimétrico, introduzindo avanços significativos na aplicação do modelo *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM). Estrada enfatizou a necessidade de uma abordagem metodologicamente mais robusta para medir o risco de queda, especialmente em mercados emergentes, onde a volatilidade é frequentemente mais acentuada e os agentes económicos tendem a demonstrar uma sensibilidade mais pronunciada a perdas do que a ganhos.

A proposta de Estrada distinguiu-se por abordar a limitação dos modelos anteriores ao incorporar uma medida sistemática focada exclusivamente nas flutuações negativas dos retornos. A abordagem tradicional, ainda que já utilizasse a semivariância como métrica para avaliar riscos assimétricos, apresentava limitações ao considerar desvios em relação a valores fixos. O autor propôs uma inovação ao definir um *downside beta* que captura exclusivamente as oscilações negativas tanto do ativo quanto do mercado em relação às suas médias históricas.

A formulação matemática proposta para o *downside beta* por Estrada é a seguinte:

$$\beta_E^D = \frac{E[\min(r_i - \mu_i, 0) \min(r_m - \mu_m, 0)]}{E[\min(r_m - \mu_m, 0)]^2} \quad (2.12)$$

Nesta expressão, r_i e r_m representam os retornos do ativo e do mercado, enquanto μ_i e μ_m cor-

2.3 Downside Capital Asset Pricing Model (D-CAPM)

respondem às suas médias respectivamente. A função *min* assegura que apenas os desvios negativos sejam considerados, excluindo qualquer contribuição positiva nos cálculos. Desta forma, o numerador representa a co-semivariância entre os retornos negativos dos ativos e os retornos negativos do mercado, enquanto o denominador representa a semivariância dos retornos negativos do mercado.

Ao adotar este modelo de precificação de ativos financeiros, Estrada reforçou a importância de uma análise ajustada ao *downside risk*, alinhando-se ao princípio estabelecido por Harlow e Rao de que os investidores são mais sensíveis às perdas do que às flutuações positivas nos retornos.

Estrada também estudou a relação entre o *downside beta* e o retorno esperado dos ativos, evidenciando que, ao contrário do beta tradicional do CAPM, que assume uma distribuição simétrica dos retornos, o *downside beta* capta melhor os padrões comportamentais dos investidores, que são avessos ao risco de perda.

A tabela 2.1 sintetiza as principais diferenças entre as metodologias de Hogan e Warren, Harlow e Rao e Estrada para estimar o *downside beta*, com ênfase nos parâmetros de referência (*benchmarks*) e na interpretação do risco.

Abordagem	Hogan e Warren	Harlow e Rao	Estrada
Foco da Medida	Retornos negativos abaixo da taxa livre de risco (r_f).	Retornos negativos abaixo da média do mercado (μ_m).	Retornos negativos abaixo da média do ativo e do mercado (μ_i, μ_m).
Benchmark	Taxa livre de risco (r_f).	Média dos retornos do mercado (μ_m).	Média dos retornos do ativo e do mercado (μ_i, μ_m).
Interpretação	Mede a sensibilidade do ativo a retornos de mercado abaixo de r_f .	Mede a sensibilidade do ativo a retornos de mercado abaixo da média (μ_m).	Mede a covariância entre retornos negativos do ativo e do mercado em relação às suas médias (μ_i, μ_m).

Tabela 2.1: Comparação da medida de risco *downside beta* para as três abordagens metodológicas.

O modelo D-CAPM apresenta uma formulação da equação de precificação de ativos mais ajustada ao comportamento do mercado, sendo expressa como:

$$E(r_i) - r_f = \beta_i^D (E(r_m) - r_f) \quad (2.13)$$

Este modelo representa uma evolução significativa em relação ao CAPM tradicional, ao reconhecer explicitamente que o risco relevante para os investidores é aquele associado a retornos negativos. Dessa forma, o D-CAPM surge como uma alternativa mais eficaz para a precificação de ativos, especialmente em mercados caracterizados por elevada volatilidade e assimetrias nos retornos.

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

Neste capítulo será apresentado o objeto de estudo, os procedimentos adotados para a recolha de dados e o seu posterior tratamento, fundamentais para a implementação do modelo *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM) no mercado bolsista europeu.

Posteriormente, descreve-se detalhadamente a abordagem metodológica utilizada para a implementação, estimação e avaliação do modelo em estudo com três diferentes estimativas do coeficiente *downside beta*: Hogan e Warren, Harlow e Rao, e Estrada. A metodologia foca-se no processo de regressão linear, na avaliação da significância estatística dos coeficientes e na escolha de métricas de desempenho.

3.1 Objeto de estudo, recolha e tratamento de dados

O presente estudo, como referido anteriormente, tem como objetivo a aplicação do modelo D-CAPM no mercado bolsista europeu. Para isso, foi elaborada uma carteira composta por 20 empresas europeias, selecionadas através de parâmetros de diversificação geográficos e setoriais.

A seleção dos ativos abrange empresas de diversas regiões da Europa, incluindo Portugal, Alemanha, França, Espanha, Itália, Suíça, Dinamarca e Países Baixos e inclui diversos setores de atividade, tais como energia e sustentabilidade, tecnologia e inovação, consumo e bens de luxo, indústria e transportes e, por fim, finanças e banca, oferecendo um panorama representativo do mercado europeu.

A diversificação da amostra é uma prática comum em estudos de precificação de ativos, permitindo reduzir o risco sistemático e capturar de forma mais eficaz as dinâmicas do mercado como um todo. A heterogeneidade da carteira também possibilita testar a aplicabilidade do modelo D-CAPM em diferentes contextos, aumentando a validade externa dos resultados.

Posto isto, as 20 empresas selecionadas para a execução deste estudo são as seguintes:

1. **EDP**: A Energias de Portugal, S.A. é uma das maiores empresas de energia da Europa, cujo negócio principal é a produção, distribuição e comercialização de eletricidade, bem como a exploração de gás natural. Destaca-se pelo forte investimento em energias renováveis, nomeadamente na energia eólica e solar. A empresa está cotada na Euronext Lisboa e integra o índice PSI-20.
2. **JMT**: A Jerónimo Martins, SGPS, S.A. é uma multinacional portuguesa especializada em distribuição alimentar e retalho. Com operações em Portugal, Polónia e Colômbia, opera marcas como Pingo Doce, Recheio, Biedronka e Ara. Está cotada na Euronext Lisboa e faz parte do índice PSI-20.

3.1 Objeto de estudo, recolha e tratamento de dados

3. **COR:** A Corticeira Amorim é a maior produtora mundial de produtos de cortiça, com uma longa tradição no mercado. Atua em áreas como rolhas, revestimentos e materiais de isolamento. Fundada em 1870, e sediada em Mozelos, Portugal, pertencente ao PSI-20, está cotada na Euronext Lisboa e é líder global no seu setor.
4. **ASML:** A ASML Holding N.V. é uma corporação holandesa que lidera globalmente na produção de equipamentos de litografia para a indústria de semicondutores. As suas tecnologias avançadas são essenciais para a fabricação de *chips*. Está cotada na Euronext Amsterdam e faz parte do índice AEX.
5. **SAP:** A SAP SE é uma multinacional alemã líder no desenvolvimento de *software* empresarial e soluções de gestão integrada (ERP). Fundada em 1972, fornece soluções tecnológicas para empresas em todo o mundo. A empresa está cotada na Bolsa de Valores de Frankfurt e integra o índice DAX.
6. **VOW3:** A Volkswagen AG é uma das maiores fabricantes de automóveis do mundo, produzindo veículos sob marcas como VW, Audi, Porsche, SEAT e Skoda. A empresa alemã está cotada na Bolsa de Frankfurt e no índice DAX.
7. **MC:** A LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton é o maior conglomerado de bens de luxo do mundo, com marcas icónicas nos setores de moda, joalheria, bebidas e perfumes, como Louis Vuitton, Dior e Moët & Chandon. Está cotada na Euronext Paris e integra o índice CAC 40.
8. **TTE:** A TotalEnergies SE é uma empresa francesa de energia, presente nos setores de petróleo, gás natural e energias renováveis. Está comprometida com a transição energética e está cotada na Euronext Paris, integrando o índice CAC 40.
9. **BNP:** O BNP Paribas é um dos maiores grupos bancários da Europa, com uma forte presença internacional. Oferece serviços financeiros que incluem banca comercial, gestão de ativos e investimentos. Está cotado na Euronext Paris e faz parte do índice CAC 40.
10. **SIE:** A Siemens AG é uma empresa multinacional alemã líder em engenharia e tecnologia, com operações em áreas como automação, eletrificação e digitalização. Foi fundada em 1847, está cotada na Bolsa de Frankfurt e integra o índice DAX.
11. **HEIA:** A Heineken N.V. é uma das maiores cervejeiras do mundo, conhecida pela sua cerveja homónima e outras marcas globais. Fundada em 1864, está cotada na Euronext Amsterdam e integra o índice AEX.
12. **ENEL:** A Enel S.p.A. é uma multinacional italiana de energia, líder em eletricidade e gás natural. Com um foco crescente em energias renováveis, está cotada na Bolsa de Valores de Milão e integra o índice FTSE MIB.
13. **RMS:** A Hermès International é uma empresa francesa de bens de luxo, conhecida pela sua qualidade e exclusividade em produtos como malas, cintos e lenços. Foi fundada em 1837 e está cotada na Euronext Paris, integrando o índice CAC 40.
14. **ITX:** A Inditex é uma das maiores retalhistas de moda do mundo, mais conhecida por marcas como Zara, Massimo Dutti e Pull&Bear. Fundada em 1985, está cotada na Bolsa de Madrid e faz parte do índice IBEX 35.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

15. **IBE:** A Iberdrola é uma empresa espanhola líder no setor de energias renováveis, especialmente em energia eólica e solar. É uma das maiores fornecedoras de eletricidade no continente Europeu e está cotada na Bolsa de Madrid.
16. **NESN:** A Nestlé S.A. é uma multinacional suíça líder em alimentos e bebidas, com marcas icónicas como Nescafé, KitKat e Purina. Fundada em 1866, está cotada na SIX Swiss Exchange.
17. **NOVO-B:** A Novo Nordisk A/S é uma multinacional dinamarquesa que se concentra no desenvolvimento de medicamentos para diabetes e outras doenças crónicas. Está cotada na Bolsa de Valores de Copenhaga.
18. **ADS:** A Adidas AG é uma das principais e maiores marcas de artigos desportivos do mundo que produz calçado, vestuário e equipamentos. Fundada em 1949, está cotada na Bolsa de Frankfurt e integra o índice DAX.
19. **AM:** A Airbus SE é uma das maiores fabricantes de aeronaves comerciais e militares do mundo. Sediada na Europa, está cotada na Euronext Paris e integra o índice CAC 40.
20. **CA:** O Crédit Agricole S.A. é um dos maiores grupos bancários da Europa, com operações na banca de retalho, investimentos e seguros. Está cotado na Euronext Paris e integra o índice CAC 40.

A seleção dos ativos foi orientada por uma estratégia de diversificação, com o objetivo de equilibrar o retorno e o risco, assegurando uma exposição eficiente aos diferentes segmentos da economia europeia. Os critérios essenciais para a construção da carteira foram os seguintes:

- **Diversificação Setorial:** A carteira apresenta uma estrutura que minimiza a exposição ao risco específico de setores. Para isso, os ativos foram distribuídos entre indústrias tradicionais, como energia e utilidades (*utilities*), e setores de elevado crescimento, como tecnologia e luxo, maximizando a resiliência e o potencial de valorização.
- **Distribuição Geográfica:** Embora a seleção compreenda exclusivamente empresas europeias, os ativos foram distribuídos estrategicamente por mercados robustos, com uma maior concentração em países como Alemanha, França e Países Baixos, reconhecidos pela estabilidade económica e liderança em setores estratégicos.
- **Exposição ao Ciclo Económico:** A diversificação setorial foi planeada para mitigar o impacto das oscilações económicas. A inclusão de setores defensivos, como consumo básico e saúde, oferece proteção durante períodos de recessão, enquanto os setores de luxo, tecnologia e indústria proporcionam potencial de crescimento em fases de expansão económica.

A distribuição detalhada da carteira por setores é apresentada na Tabela 3.1, que ilustra a ponderação estratégica de cada segmento e os motivos subjacentes à sua inclusão.

3.1 Objeto de estudo, recolha e tratamento de dados

Tabela 3.1: Alocação Setorial da Carteira.

Setor	%	Motivo da Alocação
Energia e Utilidades	25%	Resiliência e geração consistente de dividendos.
Tecnologia	15%	Crescimento impulsionado pela inovação digital.
Luxo e Consumo Discricionário	20%	Expansão da classe média global.
Retalho e Consumo Básico	15%	Estabilidade em bens essenciais.
Saúde e Farmacêutica	10%	Expansão contínua em biotecnologia.
Bancário e Financeiro	5%	Setor com forte liquidez.
Indústria e Aeroespacial	10%	Crescimento em engenharia avançada.
Consumo e Bebidas	5%	Foco em marcas globais.

Os preços das ações utilizados neste estudo foram obtidos através da plataforma *Yahoo Finance*, uma fonte amplamente conhecida pela sua fiabilidade e acessibilidade para séries históricas de preços de ações. A série temporal recolhida abrange o período de julho de 2007 a setembro de 2024, totalizando 206 observações mensais para cada empresa.

A decisão de utilizar preços mensais, em vez de preços diários, prende-se com o facto destes captarem tendências de longo prazo e reduzirem a volatilidade associada a flutuações diárias, tornando os resultados menos suscetíveis a ruídos de curto prazo. Adicionalmente, a adoção de dados mensais está alinhada com a prática comum em estudos sobre modelos de precificação de ativos financeiros, alinhando este trabalho com a literatura existente.

Após a recolha dos preços de ações, os retornos mensais foram calculados com base na seguinte fórmula:

$$r_t^i = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i}{P_{t-1}^i} \quad (3.1)$$

onde

- r_t^i representa o retorno da ação i no período t ;
- P_t^i é o preço da ação i no final do período t ;
- P_{t-1}^i é o preço da ação i no final do período anterior.

A amostra foi segmentada em dois subperíodos distintos, o período de desenvolvimento compreendido entre julho de 2007 a julho de 2020, e o período de validação de agosto de 2020 a setembro de 2024.

O período de desenvolvimento é utilizado para estimar o parâmetro do modelo D-CAPM, o coeficiente *downside beta*, efetuando o seu cálculo com base em dados históricos. O período de validação é utilizado para testar a performance do modelo em dados fora da amostra, verificando a sua capacidade de generalização e previsão em cenários não utilizados no processo de ajuste.

A escolha destas datas incluiu períodos de diferentes condições de mercado, como a crise financeira de 2008, a crise da dívida soberana europeia, a pandemia de COVID-19, o anúncio do aumento das taxas

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

de juro pelo Banco Central Europeu e períodos de recuperação económica, proporcionando uma análise mais abrangente do comportamento do modelo sob diferentes regimes de mercado.

Uma das suposições fundamentais dos modelos CAPM e D-CAPM é a existência de uma taxa de juro livre de risco, à qual os investidores podem financiar-se ou obter financiamento sem exposição a riscos de crédito ou de mercado. Esta taxa é essencial para o cálculo dos prémios de risco de mercado e do ativo e, para a estimativa dos *downside betas*.

No contexto do presente trabalho, optou-se por utilizar a taxa Euribor a 1 mês como aproximação para a taxa livre de risco. Esta escolha deve-se ao facto de os dados utilizados na análise serem mensais, tornando coerente a utilização de uma taxa de referência que reflete variações económicas no mesmo horizonte temporal.

A taxa Euribor é amplamente reconhecida como uma taxa base para operações financeiras na Zona Euro, servindo de referência para empréstimos, contratos financeiros e outros produtos bancários de curto prazo. A Euribor (*Euro Interbank Offered Rate*) representa a média das taxas de juro aplicadas em empréstimos interbancários entre bancos europeus de elevada reputação, com prazos que variam de uma semana a doze meses. Desde a sua criação em 1999, com a introdução da moeda única, tem sido um indicador central para a definição de taxas de juro na Zona Euro.

A escolha da utilização da taxa Euribor a 1 mês reflete não apenas a necessidade de compatibilidade com a frequência dos dados, mas também a sua capacidade de captar variações económicas de curto prazo, fornecendo uma base sólida e coerente para a aplicação do D-CAPM no mercado bolsista europeu. No entanto, como a Euribor é expressa numa base anual, foi necessário convertê-la para uma taxa mensal efetiva.

$$(1 + i_{anual}) = (1 + i_{mensal})^{12} \quad (3.2)$$

resolvendo em ordem a i_{mensal}

$$i_{mensal} = \sqrt[12]{1 + i_{anual}} - 1 = (1 + i_{anual})^{\frac{1}{12}} - 1 \quad (3.3)$$

Assim, obtêm-se

$$r_{f, mensal} = (1 + r_{f, anual})^{\frac{1}{12}} - 1 \quad (3.4)$$

onde:

- $r_{f, anual}$ representa a taxa Euribor 1M anual, em formato decimal;
- $r_{f, mensal}$ representa a taxa mensal efetiva correspondente, em formato decimal.

Esta transformação assegura que a taxa utilizada no modelo reflete corretamente a periodicidade mensal das análises realizadas, garantindo uma melhor adequação aos dados e uma correta estimação dos prémios de risco dos ativos.

Para representar o mercado europeu, utilizou-se como *proxy* da carteira de mercado o índice **EURO STOXX 50**, composto pelas 50 maiores empresas da zona euro. Apesar de algumas empresas selecionadas para compôr a carteira em estudo não pertencerem a este índice, a sua utilização prende-se pelo facto de este ser amplamente considerado um referencial do desempenho do mercado europeu.

3.2 Metodologia do modelo D-CAPM

A inclusão de empresas que não pertencem ao índice de mercado escolhido permite analisar se o modelo D-CAPM é eficaz na precificação de ativos que não estão diretamente correlacionados com o mercado de referência, proporcionando *insights* adicionais sobre a sua aplicabilidade em cenários diversificados.

Após a recolha dos preços de mercado, os retornos mensais foram calculados com base na seguinte fórmula:

$$r_t^m = \frac{P_t^m - P_{t-1}^m}{P_{t-1}^m} \quad (3.5)$$

onde

- r_t^m representa o retorno do mercado no período t ;
- P_t^m é o preço de mercado no final do período t ;
- P_{t-1}^m é o preço de mercado no final do período anterior.

Com base nos retornos dos ativos e nos retornos de mercado, determinam-se os prémios de risco dos ativos, definidos como a diferença entre o retorno do ativo e a taxa de juro sem risco,

$$Pr_{it} = r_t^i - r_f \quad (3.6)$$

e o prémio de risco do mercado, obtido de forma análoga,

$$Pr_{mt} = r_t^m - r_f \quad (3.7)$$

Neste contexto, é essencial proceder a uma análise detalhada da distribuição dos prémios de risco dos ativos, uma vez que a sua caracterização estatística permitirá compreender a presença de assimetrias e desvios da normalidade, fatores que influenciam a adequação do modelo de precificação de ativo em estudo.

3.2 Metodologia do modelo D-CAPM

Este subcapítulo apresenta a formulação do modelo *Downside Capital Asset Pricing Model* (D-CAPM), que será implementado para a realização dos testes empíricos no mercado bolsista europeu. O D-CAPM surge como uma extensão do tradicional *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), diferenciando-se por considerar apenas a volatilidade negativa, *downside beta*, na avaliação do risco dos ativos.

A metodologia adotada para a implementação do modelo em estudo baseia-se na abordagem proposta por Rutkowska-Ziarko et al. (2022), que segue o método clássico desenvolvido por Fama e MacBeth (1973). O método de estimação em duas etapas proposto é uma abordagem amplamente utilizada para testar a relação entre o risco e o retorno nos mercados financeiros. Esta abordagem consiste, primeiramente, na estimação dos coeficientes de sensibilidade ao risco, seguida pela realização de regressões transversais periódicas para analisar a relação entre o risco e o retorno.

A principal vantagem desta abordagem é que a média temporal dos coeficientes das regressões transversais permite obter estimativas robustas, mitigando o impacto de eventuais flutuações de curto prazo,

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

proporcionando uma avaliação consistente da relação entre o *downside beta* e os retornos esperados no mercado em estudo.

Na presente análise, aplica-se uma versão adaptada desta metodologia, ajustando-a à especificidade dos dados utilizados. Em vez de formar portfólios, como originalmente feito por Fama e MacBeth (1973) e seguido por Rutkowska-Ziarko et al. (2022), analisam-se individualmente 20 ativos. Esta abordagem justifica-se pelo número reduzido de ativos na amostra, o que limita a construção de portfólios suficientemente diversificados, bem como pela necessidade de preservar a heterogeneidade dos ativos, evitando possíveis efeitos de agregação que poderiam mascarar diferenças individuais na relação entre o *downside risk* e o retorno.

3.2.1 Estimação do risco sistemático *Downside beta*

Na primeira etapa procede-se à estimação dos β_i^D , *downside beta*, considerando o período de desenvolvimento, para cada empresa do portfólio em análise, através de regressões lineares entre o prémio de risco do ativo e prémio de risco do mercado, considerando os retornos negativos, tanto do mercado como do ativo, em relação a um *benchmark*.

Para o modelo D-CAPM, a ideia é semelhante à do CAPM tradicional, porém com a diferença de que o foco recai sobre os retornos negativos. De acordo com Fama e French (1992), o valor esperado das rendibilidades em excesso de um ativo é inteiramente explicado pelo seu prémio de risco de mercado, o que implica que o coeficiente alfa da regressão da série temporal deve ser igual a zero.

Ressalta-se que as três abordagens apresentadas diferem na forma como se define a medida de risco e na escolha do *benchmark* adotado. De seguida, detalha-se cada uma dessas formulações.

- De acordo com a formulação de Hogan et al. (1974):

A formulação de Hogan e Warren parte da premissa de que o risco sistemático deve ser avaliado com base na covariância entre os retornos do ativo e as perdas do mercado, isto é, os períodos em que o retorno de mercado é inferior à taxa livre de risco. Assim, o *downside beta* é definido como:

$$\beta_{HW}^D = \frac{E[(r_i - r_f) \text{Min}(r_m - r_f, 0)]}{E[\text{Min}(r_m - r_f, 0)]^2} \quad (3.8)$$

A equação correspondente pode ser expressa da seguinte forma:

$$r_i - r_f = \text{Min}(r_m - r_f, 0) \times \beta_{HW}^D + \epsilon_{it} \quad (3.9)$$

Ou, de forma equivalente:

$$Pr_{it} = \text{Min}(Pr_{mt}, 0) \times \beta_{HW}^D + \epsilon_{it} \quad (3.10)$$

- De acordo com a formulação de Harlow et al. (1989):

A abordagem de Harlow e Rao expande o conceito de *downside risk* ao utilizar a média do retorno do mercado μ_m como *benchmark*, em vez da taxa livre de risco. Ou seja, considera-se que o risco relevante ocorre quando os retornos do mercado ficam abaixo da sua média histórica. A estimativa do *downside beta* é dada por:

$$\beta_{HR}^D = \frac{E[(r_i - \mu_i) \text{Min}(r_m - \mu_m, 0)]}{E[\text{Min}(r_m - \mu_m, 0)]^2} \quad (3.11)$$

A relação associada é formulada como:

$$r_i - \mu_i = \text{Min}(r_m - \mu_m, 0) \times \beta_{HR}^D + \varepsilon_{it} \quad (3.12)$$

Ou, alternativamente:

$$Pr_{it} - \overline{Pr_{it}} = \text{Min}(Pr_{mt} - \overline{Pr_{mt}}, 0) \times \beta_{HR}^D + \varepsilon_{it} \quad (3.13)$$

- De acordo com a formulação de Estrada (2000):

A metodologia proposta por Estrada segue uma abordagem semelhante à de Harlow e Rao, mas aplica a métrica de *downside risk* diretamente aos retornos do ativo e do mercado, considerando apenas as quedas em relação ao seu *benchmark*. Assim, o *downside beta* é definido como:

$$\beta_E^D = \frac{E[\text{Min}(r_i - \mu_i, 0) \text{Min}(r_m - \mu_m, 0)]}{E[\text{Min}(r_m - \mu_m, 0)]^2} \quad (3.14)$$

A equação correspondente é dada por:

$$\text{Min}(r_i - \mu_i, 0) = \text{Min}(r_m - \mu_m, 0) \times \beta_E^D + \varepsilon_{it} \quad (3.15)$$

Ou, de forma alternativa:

$$\text{Min}(Pr_{it} - \overline{Pr_{it}}, 0) = \text{Min}(Pr_{mt} - \overline{Pr_{mt}}, 0) \times \beta_E^D + \varepsilon_{it} \quad (3.16)$$

Nesta etapa, os dados históricos, do período de desenvolvimento, de retornos mensais das 20 empresas selecionadas e do índice EURO STOXX 50 são utilizados para estimar, através de uma reta que passa pela origem, as três variantes propostas de *downside beta*.

Após a estimativa dos *downside betas* através das regressões lineares, procede-se à classificação das empresas com base nos valores obtidos, de acordo com a Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Interpretação do coeficiente *downside beta*.

Coeficiente β^D	Perfil do Ativo
$\beta^D > 1$	Ativo Agressivo
$\beta^D \cong 1$	Ativo Moderado
$\beta^D < 1$	Ativo Conservador

Esta categorização é fundamental para identificar diferentes níveis de exposição ao risco sistemático em mercados adversos, permitindo agrupar os ativos em três categorias diferentes, conforme detalhado no capítulo 2.2.1, onde foram explicados os intervalos e implicações dos valores de beta no comportamento dos ativos em relação ao mercado.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Após a estimação dos *downside betas* e a sua respetiva classificação, realiza-se uma análise de significância para avaliar a relevância estatística de cada estimativa. Para isso, será utilizado o teste *t-student*, que permite verificar se as estimativas são significativamente diferentes de zero. Este teste será conduzido com base na comparação entre o prémio de risco do mercado e o prémio de risco do ativo.

Para testar as hipóteses $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta \neq 0$ utiliza-se a estatística de teste, que é calculada como

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \quad (3.17)$$

Além disso, será calculado o valor crítico de t , que servirá como referência para determinar a significância estatística dos *downside betas*. Calcula-se então o valor crítico de acordo com:

$$t_{critico} = t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)} \quad (3.18)$$

A regra de decisão é definida da seguinte forma:

- Se $|t| \geq t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)}$, rejeita-se H_0 , ou seja, $\hat{\beta}$ é estatisticamente significativo, indicando a existência de uma relação relevante entre o prémio de risco do mercado e o prémio de risco do ativo. Alternativamente, rejeita-se H_0 se *p-value* for inferior a α ;
- Se $|t| < t_{(\frac{\alpha}{2}; n-1)}$, não se rejeita H_0 , o que sugere que $\hat{\beta}$ não é estatisticamente significativo e que a relação entre o prémio de risco do mercado e o prémio de risco do ativo não é suficientemente forte para ser considerada relevante.

Este procedimento assegura que as variáveis utilizadas no modelo possuem uma relação significativa com o prémio de risco do ativo e o prémio de risco do mercado, aumentando a confiança na qualidade das estimativas obtidas.

3.2.2 Validação do modelo

Após a estimação dos *downside betas* na primeira etapa da análise, torna-se essencial validar a sua capacidade explicativa na relação entre o risco e o retorno dos ativos. Para tal, nesta segunda etapa, a validação do modelo D-CAPM é conduzida através de duas etapas complementares.

A primeira etapa segue a metodologia proposta por Fama e MacBeth (1973), baseada em regressões transversais periódicas ao longo do período de validação. Este procedimento permite estimar a relação entre risco e retorno ao longo do tempo, verificando se os *downside betas* explicam a variação dos retornos dos ativos. Para tal, são realizadas regressões transversais mensais, mais precisamente 50 regressões, para cada mês t , de acordo com a seguinte especificação:

$$r_{i,t} - r_f = \lambda_{0,t} + \lambda_{1,t} \beta_i^D + \varepsilon_{i,t} \quad (3.19)$$

onde

- $r_{i,t} - r_f$ representa o prémio de risco do ativo i no mês t ;
- β_i^D corresponde ao *downside beta* estimado do ativo i , previamente estimado na primeira etapa do modelo D-CAPM;

3.2 Metodologia do modelo D-CAPM

- $\lambda_{0,t}$ é o coeficiente independente da regressão no mês t , captando os retornos não explicados pelo risco sistemático;
- $\lambda_{1,t}$ representa o coeficiente da relação entre risco e retorno para o período t ;
- $\varepsilon_{i,t}$ é o termo de erro da regressão.

Esta análise é conduzida separadamente para os três *downside betas* considerados, propostos por Hogan et al. (1974), Harlow et al. (1989) e, por último, por Estrada (2000). Para cada uma dessas definições de beta, repetem-se as regressões transversais para todos os meses do período de validação, resultando em três conjuntos distintos de coeficientes $\lambda_{0,t}$ e $\lambda_{1,t}$.

Após a execução das regressões transversais ao longo do período de validação, obtêm-se séries temporais dos coeficientes $\lambda_{0,t}$ e $\lambda_{1,t}$, cuja significância estatística é analisada através de um teste t . As médias dos coeficientes são estimadas como:

$$\bar{\lambda}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_{0,t} \quad e \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_{1,t} \quad (3.20)$$

onde T corresponde ao número total de meses no período de validação.

As hipóteses do teste t para avaliar a significância dos coeficientes são definidas de acordo com a tabela 3.3:

Tabela 3.3: Hipóteses do teste t -student.

Medida de Risco	Hipótese Nula	Hipótese Alternativa
Termo independente	$H_0: \bar{\lambda}_0 = 0$	$H_1: \bar{\lambda}_0 \neq 0$
β^D	$H_0: \bar{\lambda}_1 = 0$	$H_1: \bar{\lambda}_1 > 0$

A rejeição da hipótese nula, H_0 , para $\bar{\lambda}_1$ indicaria evidências estatísticas que o *downside beta* tem poder explicativo sobre os retornos dos ativos, validando empiricamente o modelo D-CAPM. Caso contrário, conclui-se que a relação entre o *downside risk* e retorno pode não ser estatisticamente significativa no contexto analisado.

A estatística t é dada por:

$$t(\bar{\lambda}_j) = \frac{\bar{\lambda}_j}{s_j/\sqrt{T}} \quad (3.21)$$

Em que s_j representa o desvio-padrão da serie temporal dos coeficientes λ_j e T o número de períodos da análise. A aplicação desta abordagem para os três betas permite comparar o poder explicativo de cada um e avaliar qual métrica de *downside risk* apresenta maior aderência aos retornos dos ativos ao longo do tempo.

A segunda etapa de validação baseia-se na construção da *Security Market Line* (SML), que representa a relação teórica entre risco sistemático e a diferença entre as médias dos retornos do ativo e a taxa de juro sem risco. Para isto, efetua-se uma regressão linear que tem como variável independente os coeficientes estimados na primeira etapa de estimação e, como variável dependente o prémio esperado do risco da ação.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

No entanto, a validação empírica do modelo através das regressões transversais mensais e da construção da Security Market Line (SML) revela uma equivalência fundamental entre ambas as abordagens. Esta convergência metodológica ocorre pois o processo de cálculo das médias dos coeficientes das regressões transversais mensais produz resultados idênticos à estimação pela regressão linear com todos os dados agrupados. A demonstração analítica presente no Anexo A comprova que a agregação dos coeficientes λ_0 e λ_1 obtidos nas sucessivas regressões transversais, replicam numericamente os parâmetros que seriam obtidos numa regressão linear entre os *downside betas* estimados na primeira etapa e os prémios de risco médios dos ativos.

Desta forma, a linha do mercado de títulos de risco é ajustada da seguinte forma:

$$\overline{r_{i,t}} - \overline{r_f} = \overline{\lambda_0} + \overline{\lambda_1} \beta^D + \varepsilon_{i,t} \quad (3.22)$$

A consistência entre os fundamentos teóricos e empíricos implica que o teste deve alcançar os seguintes resultados:

- O termo de interseção com o eixo das ordenadas ($\overline{\lambda_0}$) não deve ser significativamente diferente de zero;
- A inclinação da SML deve ser equivalente ao prémio de risco do índice de mercado, ou seja, $\overline{\lambda_1} = \overline{r_{mt}} - \overline{r_{ft}}$;
- A nova regressão linear deve apresentar um coeficiente de correlação relativamente elevado;
- A relação deve manter-se linear em função do *downside beta*;
- A taxa de retorno do mercado deve ser superior à do ativo sem risco, dado que investir no mercado implica um nível de risco mais elevado do que um investimento isento de risco.

Primeiramente, a *Security Market Line* (SML) é estimada através de uma regressão linear, onde os retornos excedentes dos ativos são explicados pelo beta. Uma vez obtida a equação estimada, procede-se à validação dos diferentes critérios.

Para verificar se a interseção com o eixo dos Y's ($\overline{\lambda_0}$) não é significativamente diferente de zero, realiza-se um teste *t* sobre o coeficiente da regressão, avaliando se o seu *p-value* é suficientemente elevado ou se o intervalo de confiança inclui o valor zero. Este teste é efetuado de acordo com a tabela 3.3

A validação da inclinação da SML consiste em comparar o coeficiente $\overline{\lambda_1}$ estimado com o prémio de risco do mercado. Para isso, testa-se a hipótese nula de que ambos são iguais, recorrendo a um teste *t*, cujas hipóteses de testes são:

$$H_0 : \overline{\lambda_1} = (\overline{r_{mt}} - \overline{r_{ft}}) \quad \text{vs} \quad H_1 : \overline{\lambda_1} \neq (\overline{r_{mt}} - \overline{r_{ft}})$$

A qualidade do ajustamento do modelo é analisada pelo coeficiente de determinação (R^2), que indica a proporção da variabilidade dos retornos explicada pelo *downside beta*. Um valor relativamente elevado sugere que o modelo se ajusta bem aos dados.

Para garantir que a relação entre o coeficiente *downside beta* e os retornos é linear, são analisados gráficos de dispersão, que permite identificar especificações incorretas na regressão. Por fim, a estimativa

3.2 Metodologia do modelo D-CAPM

do modelo D-CAPM para um período prolongado deve refletir que o retorno médio do mercado supera a taxa sem risco. Esta condição é testada comparando as médias dos retornos através de um teste t , verificando se a diferença entre ambos é estatisticamente significativa:

$$H_0 : \bar{r}_{mt} \leq \bar{r}_{ft} \quad \text{vs} \quad H_1 : \bar{r}_{mt} > \bar{r}_{ft}$$

Para complementar a análise da SML, foram elaborados gráficos de linhas que comparam os retornos reais dos ativos com os retornos estimados pelo modelo D-CAPM para cada uma das três metodologias. Desta forma, é possível avaliar a qualidade do ajuste do modelo, fornecendo uma visualização clara da proximidade entre os valores reais e estimados ao longo do tempo.

Por fim, para avaliar a capacidade preditiva dos modelos estimados, são calculadas as métricas da raiz do erro quadrático médio (RMSE) e o erro quadrático médio (MSE).

O RMSE (*Root Mean Square Error*) fornece uma perspectiva global sobre a magnitude do erro, expressa na mesma unidade dos retornos originais. Sendo sempre um valor positivo, quanto mais próximo de zero, melhor a precisão do modelo. A sua formulação é dada por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{i,t} - \hat{r}_{i,t})^2} \quad (3.23)$$

onde $r_{i,t}$ representa o retorno observado do ativo i no período t , $\hat{r}_{i,t}$ corresponde ao retorno estimado pelo modelo e N o número total de observações do período de validação.

De forma complementar, calcula-se também o MSE (*Mean Square Error*), quantifica a média dos quadrados dos erros, penalizando mais severamente os erros de maior magnitude. Tal como o RMSE, valores mais próximos de zero indicam maior precisão. A sua formulação é:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{i,t} - \hat{r}_{i,t})^2 \quad (3.24)$$

3.2.2.1 Análise de Resíduos

A validação dos resíduos é um procedimento essencial para garantir que os pressupostos do modelo de regressão linear estão a ser verificados. No modelo de regressão linear $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$ (para $i = 1, 2, \dots, n$), os erros ε_i devem satisfazer as condições de Gauss-Markov, isto é, tal que

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & E(\varepsilon_i) = 0; \\ \text{(ii)} \quad & \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \text{ para } i = 1, \dots, n; \\ \text{(iii)} \quad & \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \text{ se } i \neq j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para um modelo linear ser considerado adequado, os resíduos devem apresentar média próxima de zero, variância constante ao longo de todas as observações e ausência de autocorrelação. Por vezes, para além destas, para a inferência estatística, exige-se ainda que os erros sejam independentes e sigam uma distribuição normal $N(0, \sigma^2)$.

Os resíduos ε_i calculados por da seguinte forma,

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}^D x_i) \quad (3.26)$$

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

O pressuposto da normalidade dos resíduos pode ser verificada através de um histograma da probabilidade normal complementando com o teste de Shapiro-Wilk. No histograma, espera-se uma distribuição aproximadamente simétrica e em forma de sino. O teste de Shapiro-Wilk testa as seguintes hipóteses,

H_0 : Os resíduos seguem uma distribuição normal

vs

H_1 : Os resíduos não seguem uma distribuição normal.

Os pressupostos de média nula, variância constante e independência dos erros podem ser verificados graficamente através de um gráfico de resíduos versus valores estimados.

Os resíduos devem distribuir-se de forma aleatória em torno da reta que corresponde ao resíduo zero e formar uma mancha de largura uniforme. Visualizando estas características, os pressupostos estão a ser verificados. Quando os resíduos não se comportam de forma aleatória, ou seja, seguem um padrão, a condição de independência não é satisfeita. Se a dispersão dos resíduos aumentar ou diminuir com os valores das variáveis independentes ou com os valores estimados, deve ser colocada em causa a hipótese da variância constante, evidenciando a existência de heterocedasticidade.

Através da análise visual dos gráficos de resíduos, as violações dos pressupostos do modelo nem sempre são fáceis de detetar, podendo estas ocorrer mesmo quando os gráficos aparentam um padrão aceitável ou não revelam anomalias evidentes. Neste sentido, para verificar a ausência de autocorrelação é usualmente efetuado o teste de Durbin-Watson. Valores da estatística de teste próximos de 2 indicam ausência de autocorrelação, enquanto valores significativamente diferentes podem apontar para uma correlação sequencial dos resíduos, o que sugere um problema no modelo estimado.

O teste de Durbin-Watson testa as seguintes hipóteses,

$H_0: \rho = 0$ Os resíduos não estão correlacionados

vs

$H_1: \rho \neq 0$ Os resíduos estão correlacionados

Sendo a estatística de teste,

$$\frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (3.27)$$

Embora a análise gráfica dos resíduos seja fundamental para uma avaliação inicial dos pressupostos do modelo de regressão, a sua interpretação pode ser subjetiva. Por este motivo, complementa-se com testes estatísticos formais, que oferecem uma avaliação quantitativa e objetiva.

Por fim, os *boxplots* podem ser uma ferramenta gráfica valiosa, especialmente para a detecção de *outliers* nos resíduos, além de fornecerem uma verificação adicional de pressupostos como a média nula e a dispersão dos dados. Através de um *boxplot*, é possível identificar visualmente os pontos que se encontram fora dos limites superior e inferior da caixa, os quais são considerados valores atípicos. A presença de *outliers* pode indicar que os dados não se ajustam adequadamente à distribuição esperada ou que existem influências externas que afetam a regressão. Assim, a análise de *outliers* por meio de *boxplots* oferece uma maneira rápida e eficaz de identificar observações problemáticas que podem comprometer a qualidade do modelo de regressão.

Capítulo 4

Resultados Obtidos

Neste capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos por meio da aplicação da metodologia detalhada no capítulo anterior.

4.1 Caracterização do Índice Euro STOXX50

O EURO STOXX 50 é um dos principais índices do mercado de ações europeu, formado pelas 50 maiores empresas da Zona Euro tendo em conta a sua capitalização de mercado e liquidez. Abrangendo uma vasta gama de setores e economias na região, este índice é frequentemente utilizado como referência para a avaliação do desempenho do mercado europeu e para a modelação financeira do risco e retorno dos investimentos.

Desta forma, a sua caracterização é importante para este trabalho pois oferece uma base consistente para a implementação e verificação do modelo D-CAPM no contexto do mercado bolsista europeu.

A figura 4.1 ilustra a evolução dos retornos mensais do índice EURO STOXX 50 no período de 08/2007 a 08/2020, que corresponde ao período de estimação dos coeficientes *downside beta* para o modelo em estudo.

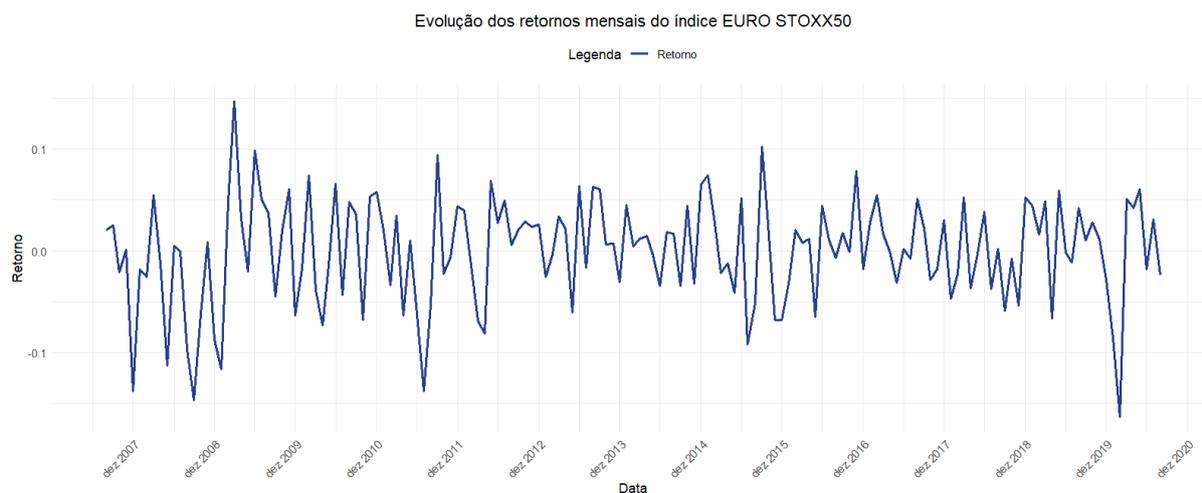


Figura 4.1: Evolução dos retornos mensais do índice de mercado EURO STOXX50.

Analisando a série temporal, verificam-se oscilações significativas nos retornos, refletindo períodos de grande instabilidade financeira e recuperação.

4. RESULTADOS OBTIDOS

É possível identificar quatro períodos no gráfico acima. A crise financeira global de 2008-2009 é marcada por uma queda acentuada nos retornos começando em setembro de 2008, atingindo valores negativos. Esse período foi causado pela crise do *subprime* desencadeada pela falência do banco de investimentos norte-americano Lehman Brothers. Em efeito dominó, outras grandes instituições financeiras entraram também em colapso, gerando uma crise de liquidez sem precedentes com impacto nos mercados globais, incluindo o europeu. Após a queda abrupta, observa-se uma recuperação irregular ao longo de 2009.

Entre 2011 e 2012, a crise da dívida soberana europeia desencadeou novos episódios de volatilidade nos mercados. Nesse período, os retornos do índice EURO STOXX 50 apresentam oscilações frequentes, caracterizadas por descidas acentuadas seguidas por picos de recuperação. Estas oscilações revelam a instabilidade gerada pelos problemas fiscais em países da zona do euro que registaram dificuldades para refinarçar as suas dívidas públicas.

Em 2015, verifica-se um pico alto seguido por uma queda forte. Esse movimento está associado à crise dos mercados emergentes, em especial na China, que afetou negativamente os mercados globais. A instabilidade foi intensificada pela desvalorização inesperada do yuan e pela fuga de capitais das economias emergentes, o que aumentou a aversão ao risco entre os investidores.

No início de 2020, ocorreu um dos períodos mais turbulentos da história recente dos mercados financeiros, com a pandemia da COVID-19 que desencadeou um choque global sem precedentes. Na figura 4.1, este evento traduz-se por uma queda extremamente acentuada nos retornos no início do ano 2020, a maior queda do período analisado. Logo depois, destaca-se uma recuperação brusca.

4.2 Estimação do risco *Downside beta*

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos na estimação do risco sistemático, por meio da análise dos três *downside betas*. Antes de prosseguir para essa etapa, foi realizada uma análise da distribuição dos prêmios de risco dos 20 ativos que compõem a amostra deste estudo. Esta análise é necessária para compreender o comportamento dos retornos dos ativos e, ao mesmo tempo, permite identificar a presença de assimetrias na distribuição, uma vez que o modelo D-CAPM utiliza os retornos negativos de forma diferenciada, capturando a assimetria no comportamento dos retornos.

Como tal, para avaliar a adequação do modelo D-CAPM, comparou-se a média com a mediana dos prêmios de risco de forma a identificar possíveis assimetrias na distribuição. Além disso, foi calculado o coeficiente de assimetria (*Skewness*) para quantificar objetivamente o grau de assimetria presente.

Quando a distribuição apresenta uma assimetria negativa, isto é, uma média menor do que a mediana, isso sugere que os retornos apresentam caudas mais longas para o lado negativo, conferindo ainda mais relevância para o uso do modelo em estudo. Em contrapartida, se a distribuição for aproximadamente simétrica, a diferença entre o modelo tradicional e o D-CAPM poderá ser menos pronunciada.

A tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos da análise da distribuição dos prêmios de risco.

Os resultados empíricos obtidos, apresentados no Anexo B em conjunto com os gráficos da distribuição dos mesmos, revelaram padrões distintos entre os ativos analisados.

O coeficiente de assimetria (*Skewness*) foi utilizado para identificar a distribuição dos prêmios de risco dos ativos, distinguindo entre assimetrias negativa e positiva, bem como distribuições aproximadamente simétricas. Uma assimetria negativa indica uma cauda mais longa à esquerda, refletindo maior frequência de retornos negativos extremos, enquanto uma assimetria positiva corresponde a uma cauda

4.2 Estimação do risco *Downside beta*

mais longa à direita, associada a retornos positivos extremos. Considerou-se uma distribuição aproximadamente simétrica quando o valor do coeficiente de assimetria era próximo de zero.

Tabela 4.1: Análise da distribuição do prêmio de risco.

Ativo	Média	Mediana	Skewness	Ativo	Média	Mediana	Skewness
EDPLS	0.00702	0.00241	0.03821	SIE.DE	0.00712	0.00922	-0.62019
JMT.LS	0.01254	0.01255	-0.52226	ENEL.MI	0.00759	0.00799	-0.15834
COR.LS	0.01706	0.01397	0.10653	RMS.PA	0.01787	0.01649	0.13175
ASML.AS	0.01885	0.01928	-0.26603	ITX.MC	0.01324	0.00825	0.86362
SAP.DE	0.01074	0.00961	-0.08536	IBE.MC	0.00601	0.00670	-0.19825
VOW3.DE	0.01109	0.01029	-0.68144	NESN.S	0.00732	0.00596	-0.1536
MC.PA	0.01370	0.01939	-0.10064	NOVO-B.CO	0.02961	0.00733	3.52721
TTE.PA	0.00230	0.00565	0.06742	ADS.DE	0.01522	0.01557	-0.41821
BNP.PA	0.00366	0.01255	-0.37730	AM.PA	0.00285	0.00321	0.51663
HEIA.AS	0.00599	0.00866	-0.45685	CA.PA	-0.00415	-0.00197	-0.25421

Verifica-se que a maioria dos ativos apresenta um coeficiente de assimetria negativo, confirmando a prevalência de distribuições com caudas mais longas à esquerda, como por exemplo os ativos VOW3.DE, SIE.DE, HEIA.AS e JMT.LS, com valores de coeficiente de assimetria -0,682, -0,620, -0,457 e -0,522, respectivamente, que indicam uma frequência maior de retornos negativos extremos. Destaca-se o caso excepcional do NOVO-B.CO, com assimetria extremamente positiva (3,52721), indicando uma distribuição com cauda direita anormalmente longa e frequência elevada de retornos positivos extremos. Em contraste, ITX.MC e AM.PA, de valores 0,864 e 0,517, respectivamente ilustram assimetria positiva moderada, enquanto EDPLS e SAP.DE 0,038 e -0,085, respectivamente apresentam distribuições quase simétricas.

Estes resultados são visíveis nos histogramas abaixo, Figura 4.2, que apresentam três casos representativos. A distribuição com assimetria positiva extrema do ativo NOVO-B.CO, com uma cauda alongada à direita, uma distribuição quase simétrica, do ativo EDPLS, e um caso de assimetria negativa, do ativo VOW3.DE, com uma cauda alongada à esquerda. Os demais histogramas, incluindo os restantes casos mencionados anteriormente, encontram-se disponíveis no Anexo B1.

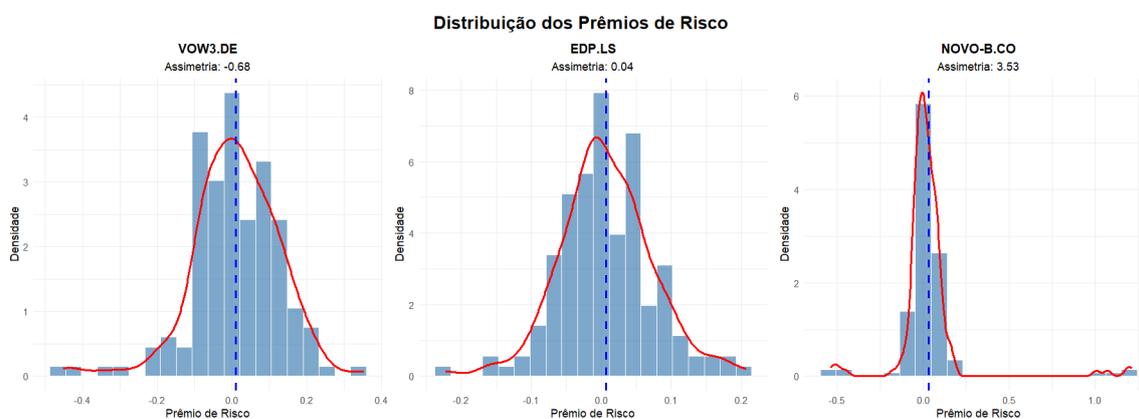


Figura 4.2: Distribuição dos prêmios de risco dos ativos VOW3.DE, EDPLS e NOVO-B.CO a título de exemplo.

4. RESULTADOS OBTIDOS

Para complementar esta análise, recorreu-se ao teste de Shapiro-Wilk, apresentado no Anexo B2 que avalia formalmente a normalidade das distribuições. Os resultados confirmaram que a grande maioria dos ativos rejeita a hipótese de normalidade pois verifica-se um *p-value* inferior a 0,05, alinhando-se com os padrões de assimetria identificados.

Casos como o NOVO-B.CO (*p-value* ≈ 0) e o ativo ITX.MC (*p-value* = 3,65E-06) destacam-se pela forte não-normalidade, consistente com os seus elevados valores de Skewness.

Em contraste, ativos como TTE.PA e ENEL.MI, com valores de *p-value* de 0,8233 e 0,8052, respetivamente, e cujos coeficientes de assimetria sugerem distribuições próximas da normal, não apresentaram evidências estatísticas contra a normalidade.

Esta dualidade reforça a heterogeneidade do mercado estudado e justifica a adoção do modelo D-CAPM, que, ao contrário do CAPM tradicional, não assume normalidade na distribuição dos retornos e incorpora explicitamente a volatilidade negativa.

Adicionalmente, a comparação entre a média e a mediana dos prémios de risco revela discrepâncias relevantes para alguns ativos. Este é o caso do ativo BNP.PA, em que a média é 0.00366, significativamente inferior à mediana de 0.01255, indicando que a distribuição é negativamente enviesada, com alguns retornos extremamente baixos a “puxar” a média para baixo. O padrão oposto observa-se no ativo NOVO-B.CO, onde a média de 0.02961 é cerca de quatro vezes superior à mediana 0.00733, refletindo uma assimetria positiva extrema.

A análise conjunta dos coeficientes de assimetria, dos histogramas e dos testes de normalidade Shapiro-Wilk permitiram concluir que os prémios de risco dos ativos analisados seguem, na sua maioria, distribuições não-normais e assimétricas, com predominância de caudas negativas. Estes resultados sustentam a inadequação do CAPM clássico e a pertinência do D-CAPM, particularmente em contextos de maior aversão ao risco, onde a captura de perdas extremas é crucial.

Os poucos casos de distribuições simétricas e próximas da normalidade, como por exemplo o ativo TTE.PA, sugerem que, embora o D-CAPM seja geralmente preferível, a escolha do modelo pode depender das características específicas de cada ativo.

Em suma, a análise empírica confirma que os prémios de risco dos ativos estudados não seguem uma distribuição normal e apresentam assimetrias significativas, justificando a adoção do modelo D-CAPM na estimação do risco sistemático.

Após a análise da distribuição dos prémios de risco dos 20 ativos, inicia-se a etapa de estimação dos *downside betas*. Neste processo de estimação foram utilizados os retornos mensais no período compreendido entre agosto de 2007 a julho de 2020, totalizando assim 156 observações das rentabilidades mensais.

Foram realizadas regressões lineares sem termo independente para cada uma das metodologias de cálculo dos três *downside betas*, estimando o risco sistemático dos ativos. Além dos coeficientes β^D , foram obtidos os valores da estatística de teste *t* e do coeficiente de determinação R^2 .

Note-se que, em regressões sem o termo independente, o coeficiente R^2 perde o seu significado convencional de proporção de variância explicada. Optou-se, ainda assim, por reportar o seu valor para fins comparativos, embora a análise de qualidade do ajuste se tenha focado principalmente na significância estatística dos coeficientes (teste *t*). Os resultados apresentam-se na tabela 4.2.

4.2 Estimação do risco *Downside beta*

Tabela 4.2: Resultados obtidos da estimativa do *downside beta*, estatística de teste e coeficiente de determinação dos ativos individuais para as três metodologias em estudo.

Ativo	Método Hogan e Warren			Método Harlow e Rao			Método Estrada		
	β^D	<i>t</i> -stat	R^2	β^D	<i>t</i> -stat	R^2	β^D	<i>t</i> -stat	R^2
EDP.LS	0.1633	1.2320	0.0097	0.2598	1.9605	0.0242	0.4527	5.2592	0.1514
JMT.LS	0.3939	2.5012	0.0388	0.5640	3.6592	0.0795	0.7004	7.0437	0.2425
COR.LS	0.4792	2.8328	0.0492	0.7111	4.3767	0.1100	0.8373	9.3373	0.3600
ASML.AS	0.5225	3.2647	0.0643	0.7771	5.1565	0.1464	0.8573	9.2964	0.3580
SAP.DE	0.6107	5.1751	0.1473	0.7608	6.7943	0.2295	0.8165	14.1236	0.5627
VOW3.DE	1.2832	6.1073	0.1940	1.4434	7.0268	0.2416	1.5002	12.4595	0.5004
MC.PA	0.6823	5.1828	0.1477	0.8711	7.0693	0.2438	0.9071	13.5817	0.5434
TTE.PA	0.6677	6.7920	0.2294	0.7051	7.1858	0.2499	0.7549	13.6814	0.5470
BNP.PA	1.3359	7.9291	0.2886	1.3997	8.3330	0.3094	1.4579	15.7744	0.6162
SIE.DE	1.0229	8.0529	0.2950	1.1297	9.2175	0.3541	1.1508	17.8256	0.6721
HEIA.AS	0.6224	5.9782	0.1874	0.7111	7.0184	0.2412	0.7591	13.2954	0.5328
ENEL.MI	0.8093	6.6295	0.2209	0.9206	7.8074	0.2823	0.9411	15.5048	0.6080
RMS.PA	0.2395	1.4591	0.0135	0.4787	3.0147	0.0554	0.8047	8.7935	0.3328
ITX.MC	0.4677	3.2893	0.0652	0.6481	4.7333	0.1263	0.7793	10.7287	0.4261
IBE.MC	0.7034	5.5227	0.1644	0.7916	6.3153	0.2047	0.8547	11.8933	0.4771
NESN.S	0.1759	2.3609	0.0347	0.2765	3.8402	0.0869	0.3350	7.9763	0.2910
NOVO-B.CO	0.4239	1.0301	0.0068	0.8253	2.0210	0.0257	1.1571	6.8192	0.2308
ADS.DE	0.6971	4.6526	0.1225	0.9076	6.4237	0.2102	1.0125	13.6853	0.5472
AM.PA	0.5867	4.1837	0.1015	0.6328	4.4953	0.1153	0.7949	9.7593	0.3806
CA.PA	0.7371	5.6131	0.1689	0.6903	5.1274	0.1450	0.7737	9.0905	0.3477

A análise comparativa destes resultados permite avaliar como diferentes metodologias de cálculo do β^D influenciam a classificação dos ativos. Desta forma, os ativos são caracterizados segundo três abordagens distintas, Hogan e Warren, Harlow e Rao, e Estrada, identificando padrões de distribuição, analisando divergências e destacando diferenças significativas que possam influenciar a avaliação do risco.

Desta forma, analisam-se e caracterizam-se os ativos como conservador, neutro e agressivo quando $\beta^D < 1$, $\beta^D \cong 1$ e $\beta^D > 1$, respetivamente, de acordo com as três metodologias propostas.

4. RESULTADOS OBTIDOS

Tabela 4.3: Classificação do *downside beta* de acordo com o método Hogan e Warren.

$\beta^D < 1$	$\beta^D > 1$
EDP.LS	VOW3.DE
JMT.LS	BNP.PA
COR.LS	SIE.DE
ASML.AS	
SAP.DE	
MC.PA	
TTE.PA	
HEIA.AS	
ENEL.MI	
RMS.PA	
ITX.MC	
IBE.MC	
NESN.S	
NOVO-B.CO	
ADS.DE	
AM.PA	
CA.PA	

Tabela 4.4: Classificação do *downside beta* de acordo com o método Harrow e Rao.

$\beta^D < 1$	$\beta^D > 1$
EDP.LS	VOW3.DE
JMT.LS	BNP.PA
COR.LS	SIE.DE
ASML.AS	
SAP.DE	
MC.PA	
TTE.PA	
HEIA.AS	
ENEL.MI	
RMS.PA	
ITX.MC	
IBE.MC	
NESN.S	
NOVO-B.CO	
ADS.DE	
AM.PA	
CA.PA	

Tabela 4.5: Classificação do *downside beta* de acordo com o método Estrada.

$\beta^D < 1$	$\beta^D > 1$
EDP.LS	VOW3.DE
JMT.LS	BNP.PA
COR.LS	SIE.DE
ASML.AS	NOVO-B.CO
SAP.DE	ADS.DE
MC.PA	
TTE.PA	
HEIA.AS	
ENEL.MI	
RMS.PA	
ITX.MC	
IBE.MC	
NESN.S	
AM.PA	
CA.PA	

De acordo com o método de Hogan e Warren, tabela 4.3, a maioria dos ativos são classificados como conservadores, atribuindo a classificação de ativo agressivo a apenas três ativos. Isto sugere que esta abordagem é mais conservadora na forma como mede o risco de queda, resultando em valores de beta mais baixos e, conseqüentemente, uma menor sensibilidade dos ativos em relação aos retornos negativos do mercado.

O método de Harlow e Rao apresenta um resultado semelhante ao de Hogan e Warren, pois mantém as mesmas classificações, de acordo com a tabela 4.4. Os mesmos três ativos são classificados como agressivos, assim como os ativos conservadores, o que implica que, apesar de a metodologia ser diferente na estimativa do *downside beta*, os seus resultados não diferem substancialmente dos da metodologia anterior.

Por outro lado, o método de Estrada, tabela 4.5, apresenta uma abordagem menos conservadora. Embora ainda classifique a maioria dos ativos como conservadores, já atribui a classificação de ativo agressivo a cinco ativos, ao invés de apenas três. O facto de este método identificar mais ativos como agressivos sugere que este capta uma maior sensibilidade ao *downside risk*, em comparação com as outras duas metodologias.

Uma tendência clara que se observa ao longo dos três métodos é que, de Hogan e Warren para Harlow e Rao, e posteriormente para Estrada, os valores do beta aumentam progressivamente, como se pode verificar na tabela 4.2. No entanto, esse aumento não altera a classificação dos ativos, indicando que, apesar das variações nos valores numéricos, a estrutura geral de risco entre os métodos é relativamente

consistente.

Contudo, existem certos casos que não seguem essa tendência, sendo o caso mais notável do ativo NOVO-B.CO. Nos métodos de Hogan e Warren e Harlow e Rao, este ativo é classificado como conservador, com valores de beta 0.4239 e 0.8253, respetivamente. No entanto, no método de Estrada, o seu beta aumenta substancialmente para 1.1571, atribuindo-lhe a classificação de ativo agressivo. Esta mudança sugere que a abordagem de Estrada considera que o ativo NOVO-B.CO apresenta uma exposição ao *downside risk* mais elevada do que os outros métodos, podendo captar dinâmicas de risco que poderiam não ser evidenciadas nas metodologias anteriores.

Outra situação semelhante, embora não tão extrema, é a do ativo ADS.DE. Este ativo é classificado como conservador nas metodologias de Hogan e Warren e Harlow e Rao, mas no método de Estrada passa a ser um ativo agressivo. No entanto, ao contrário do que acontece com o NOVO-B.CO, a variação dos valores do beta não é tão significativa.

Adicionalmente, um aspeto notável na caracterização dos ativos pelas três metodologias é a ausência de qualquer ativo classificado como moderado. Em todas as abordagens, os ativos foram enquadrados exclusivamente como conservadores ou agressivos, o que sugere que, independentemente da metodologia utilizada, existe uma evidente polarização na forma como o risco é distribuído.

A ausência de uma categoria intermediária pode indicar que os ativos analisados possuem uma exposição ao *downside risk* suficientemente marcada para serem agrupados nas extremidades da classificação. Contudo, a falta de uma categoria neutra pode limitar a análise do risco, pois simplifica a classificação dos ativos, dividindo-os apenas em conservadores ou agressivos. Isso pode ignorar ativos com um comportamento de risco mais equilibrado, não capturando *nuances* no risco sistemático. Adicionalmente, isto reforça a ideia de que as metodologias utilizadas captam variações no risco sistemático de forma consistente, ainda que com diferenças na magnitude dos valores de beta estimados.

Em resumo, a classificação dos ativos é, na maioria dos casos, consistente entre os três métodos, apesar do aumento gradual nos valores do coeficiente de risco de queda. O caso dos ativos NOVO-B.CO e ADS.DE representa uma exceção relevante e evidencia o facto de que a escolha da metodologia pode ter um impacto significativo na perceção do risco para certos ativos.

Segue-se a análise da significância dos coeficientes estimados, com base no teste *t-student*, para avaliar a relação entre o prémio de risco do mercado e o prémio de risco do ativo. O valor crítico de *t*, calculado através da equação 3.18, é 1.9754 e será comparado com os valores *t-stat* da Tabela 4.2. Esta comparação permite identificar quais os coeficientes β^D estimados, nas três metodologias, que são estatisticamente significativos a um nível de confiança de 95%.

No método de Hogan e Warren, observa-se que, das 20 empresas analisadas, 17 apresentam valores *t* superiores ao valor crítico de 1.9754, indicando que o coeficiente β^D é estatisticamente diferente de zero. Por outro lado, ativos como EDP.LS, RMS.PA e NOVO-B.CO, cujos valores da estatística de teste são 1.2320, 1.4591 e 1.0301, respetivamente, apresentam valores inferiores ao critério de significância. Isto significa que, para um nível de significância de 5%, existe evidência estatística para não rejeitar a hipótese nula de que o coeficiente é estatisticamente igual a zero. Deste modo, para estes ativos, não há evidência suficiente para afirmar que existe uma relação linear significativa entre o prémio de risco de mercado e o prémio de risco do ativo, sugerindo que o método pode ter limitações para algumas ações.

Em relação ao método de Harlow e Rao, verifica-se que 19 dos 20 ativos analisados apresentam valores de *t* superiores ao valor crítico, indicando que os coeficientes estimados são estatisticamente significativos ao nível de confiança de 95%. Este resultado sugere que o método de Harlow e Rao gera

4. RESULTADOS OBTIDOS

coeficientes estatisticamente significativos para a grande maioria dos ativos analisados, demonstrando uma relação linear relevante entre o prêmio de risco do mercado e o prêmio de risco do ativo.

Em contraste, o método de Estrada, apresenta os valores de t mais elevados entre as três metodologias analisadas. Verifica-se que todos os ativos apresentam valores superiores a 1.9754, pelo que, todas as estimativas de *downside beta* são estatisticamente diferentes de zero, evidenciando uma relação linear significativa entre o prêmio de risco de mercado e o prêmio de risco do ativo. Isto sugere que esta metodologia gera coeficientes β^D significativos, indicando uma maior capacidade de explicar a relação entre risco e retorno.

A análise das estatísticas de teste t revela diferenças consideráveis na robustez dos coeficientes estimados. O método de Hogan e Warren possui um número significativo de coeficientes que são estatisticamente significativos, ainda que alguns ativos se encontrem fora do critério de aceitação. Por outro lado, o método de Harlow e Rao apresenta um desempenho sólido, com apenas um ativo fora do critério de significância. A abordagem de Estrada, destaca-se amplamente, com todos os coeficientes estatisticamente significativos ao nível de confiança de 95%, demonstrando a sua eficácia na estimação dos *downside betas*.

4.3 Validação do modelo D-CAPM

Enquanto o capítulo anterior focou-se na análise da estimação dos *downside betas* através de três metodologias distintas, este capítulo dedica-se à análise das regressões transversais, seguindo a abordagem adaptada de Fama e MacBeth, mencionada no capítulo 3.2.2, e da construção da SML. O objetivo principal é testar se o risco sistemático, medido pelo *downside beta*, apresenta uma relação estatisticamente significativa com os prémios de risco dos ativos no período de validação.

A análise centra-se nos coeficientes das regressões, na sua significância estatística e no poder explicativo do modelo, com base nos resultados apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Resultados da validação do modelo D-CAPM de acordo com a abordagem adaptada de Fama e MacBeth para as três metodologias em estudo.

Coeficiente	Média	t -Stat	p -value	R^2
Modelo: $R_{it} = \lambda_{0t} + \lambda_{1t} \hat{\beta}_i^{HW} + e_{it}$				0.0993
λ_{0t}	0.010383	1.7583	0.08495	
λ_{1t}	0.001113	0.1045	0.45860	
Modelo: $R_{it} = \lambda_{0t} + \lambda_{1t} \hat{\beta}_i^{HR} + e_{it}$				0.0892
λ_{0t}	0.007729	1.2875	0.2040	
λ_{1t}	0.004329	0.42462	0.3365	
Modelo: $R_{it} = \lambda_{0t} + \lambda_{1t} \hat{\beta}_i^E + e_{it}$				0.0631
λ_{0t}	0.002061	0.32473	0.7468	
λ_{1t}	0.010227	1.0668	0.1456	

A análise dos resultados da validação do modelo D-CAPM revela conclusões importantes sobre o desempenho das três abordagens.

4.3 Validação do modelo D-CAPM

Em todos os modelos, verifica-se que o coeficiente λ_0 é estatisticamente diferente de zero, com *p-values* superiores ao nível de significância de 5%, não se rejeitando a hipótese nula. Este resultado é consistente com as expectativas teóricas do modelo D-CAPM, que prevê que o termo independente deveria ser zero.

No entanto, os resultados para o coeficiente de risco λ_1 , que representa o prémio de risco de mercado, não são satisfatórios. Em nenhum dos três modelos este coeficiente é estatisticamente significativo, com valores de *p-value* de 0,4586 para Hogan e Warren, 0,3365 para Harlow e Rao, e 0,1456 para Estrada, todos claramente acima do limiar de significância de 0,05. Isto indica que, para este conjunto de dados e período de validação, não existe evidência estatística de que o prémio de risco do mercado seja significativamente positivo. Desta forma, pode-se afirmar que o *downside beta* não explica significativamente os retornos esperados, ou seja, não existe uma relação linear entre os coeficientes *downside betas* e o prémio de risco do ativo.

Quanto ao poder explicativo dos modelos, medido pelo coeficiente de determinação R^2 , os valores são relativamente baixos em todos os casos. O modelo de Hogan e Warren apresenta o melhor desempenho com um R^2 de 9,93%, seguido pelo de Harlow e Rao com 8,92%, e finalmente o de Estrada com apenas 6,31%. Estes valores sugerem que os modelos explicam apenas uma pequena fração da variação nos retornos dos ativos. Embora o modelo de Estrada apresente o maior valor para o coeficiente λ_1 (0,0102), o seu baixo R^2 e a falta de significância estatística deste coeficiente limitam a sua utilidade prática.

De forma geral, os resultados indicam que, no contexto deste estudo e para o mercado europeu no período analisado, o modelo D-CAPM não consegue estabelecer uma relação estatisticamente robusta entre o risco medido pelo *downside beta* e os retornos esperados.

A segunda etapa de validação do D-CAPM focou-se na construção da *Security Market Line* (SML), que estabelece a relação teórica entre o risco sistemático, medido pelo *downside beta*, e o prémio de risco do ativo. Para tal, foram estimadas regressões lineares conforme a equação 3.22, onde o prémio de risco das ações é explicado pelo *downside beta*. A consistência empírica do modelo foi avaliada com base em cinco pressupostos fundamentais, como mencionado no capítulo 3.2.2. Posto isto, procede-se à análise dos resultados das regressões realizadas e dos cinco pressupostos para as três metodologias em estudo. A tabela 4.7 revela os resultados da validação empírica do modelo D-CAPM, através da abordagem de Hogan e Warren.

Tabela 4.7: Resultados da regressão SML para a metodologia de Hogan e Warren.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	<i>t-stat</i>	<i>p-value</i>	R^2
$\bar{\lambda}_0$	0.010383	0.004908	2.115	0.0486	0.001404
$\bar{\lambda}_1$	0.001113	0.006996	0.159	0.8754	

Observa-se que o termo independente $\bar{\lambda}_0$ apresenta um valor estimado de 0,010383, estatisticamente significativo ao nível de significância de 5%. Este resultado contraria o pressuposto teórico de que o coeficiente referido não deveria diferir significativamente de zero, sugerindo a existência de um prémio de risco adicional que não é explicado pelo modelo. Por outro lado, verifica-se que o coeficiente $\bar{\lambda}_1$ não é significativo pois apresenta um *p-value* superior ao nível de significância utilizado de 5%, além do seu valor insignificante. Isto indica que, a abordagem baseada na taxa de juro livre de risco como *benchmark*, para a medida de risco sistemático, não consegue explicar adequadamente a variação dos retornos durante o período em estudo. O coeficiente de determinação, R^2 , apresenta um valor de 0,001404, o que

4. RESULTADOS OBTIDOS

indica que apenas cerca de 0,14% da variação do prêmio de risco pode ser explicada pelos *downside betas* considerados no modelo. Este valor muito próximo de zero evidencia uma fraca capacidade preditiva do modelo. De acordo com Ozili (2023), um R^2 tão reduzido sugere que o modelo não consegue captar adequadamente a relação entre o *downside beta* e o prêmio de risco, o que poderá refletir uma especificação inadequada ou limitações na *proxy* utilizada para o *downside risk*.

Tabela 4.8: Resultados da validação da SML para a metodologia de Hogan e Warren.

Pressuposto	Resultado
Inclinação ($\bar{\lambda}_1 = \bar{R}_m - \bar{R}_f$)	0.771368 (<i>p-value</i>)
Retorno mercado ($R_m > R_f$)	0.59
Linearidade	Análise gráfica 4.3

Pelos testes adicionais aos pressupostos teóricos, Tabela 4.8, não se rejeita a hipótese de que a inclinação equivale ao prêmio de risco histórico de mercado. Relembra-se que o próprio coeficiente estimado não se revelou significativo. A ausência de evidências estatísticas de que o retorno do mercado excede o ativo sem risco, uma vez que não se rejeita a hipótese nula, questiona um dos fundamentos básicos da teoria.

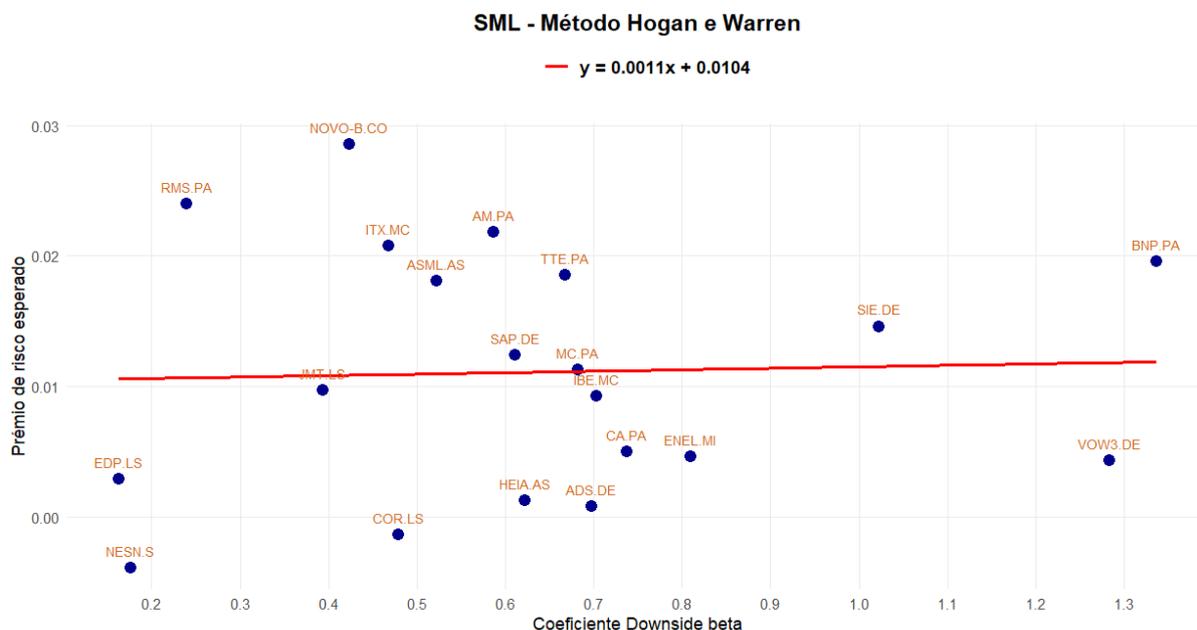


Figura 4.3: Reta de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Hogan e Warren.

A representação gráfica da Security Market Line (SML), estimada segundo o método de Hogan e Warren, é expressa pela equação $y = 0.0011x + 0.0104$, corrobora esta análise. A inclinação praticamente nula e estatisticamente não significativa da reta evidencia uma relação praticamente inexistente entre o prêmio de risco esperado dos ativos e os respectivos *downside betas*. A inclinação praticamente nula da reta de regressão, ainda que seja ligeira, contraria o princípio fundamental da teoria financeira que estabelece uma correlação positiva entre as duas variáveis, sugerindo possíveis ineficiências de mercado ou limitações na especificação do modelo utilizado. Esta análise primária sugere uma clara ausência da relação entre o risco e o retorno esperado.

4.3 Validação do modelo D-CAPM

Pela análise da figura 4.3 verifica-se que ativos defensivos apresentam retornos superiores aos esperados, enquanto os ativos com maior risco oferecem retornos abaixo do previsto.

Na faixa de valores de 0.5 a 0,9 do eixo das abcissas, observa-se uma concentração de ativos com comportamentos distintos. O ativo MC.PA encontra-se bem alinhado com a SML, indicando que os seus retornos estão próximos do esperado para o seu nível de risco. No entanto, verifica-se que vários ativos com baixo *downside beta*, como o NOVO-B.CO, RMS.PA e ITX.MC, posicionam-se significativamente acima da reta, sugerindo retornos superiores ao previsto, indicando uma subvalorização destes ativos.

Por outro lado, o ativo VOW3.DE, que apresenta uma maior exposição ao risco, situa-se abaixo da SML. Isso indica que o seu retorno esperado é inferior ao previsto pelo modelo, sugerindo uma sobreavaliação de mercado. Nestes casos, os investidores poderão optar por vender esses títulos, o que leva ao aumento da sua oferta no mercado, o que pode levar a uma correção do preço e a um consequente aumento do retorno esperado até que o equilíbrio seja atingido.

Em síntese, os resultados sugerem que a versão do D-CAPM com a abordagem testada acima apresenta limitações significativas na explicação da relação risco-retorno no mercado em estudo. A significância do termo independente e a não significância da inclinação, o reduzido e negativo poder explicativo do modelo e a distribuição dos pontos, indicam que a metodologia utilizada para o *downside risk*, isoladamente, não constitui uma medida suficiente para prever os retornos de ativos.

De seguida, na tabela 4.9, analisam-se os resultados obtidos para o método de Harlow e Rao.

Tabela 4.9: Resultados da regressão SML para a metodologia de Harlow e Rao.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	<i>t-stat</i>	<i>p-value</i>	R^2
$\bar{\lambda}_0$	0.007729	0.006003	1.287	0.214	0.01946
$\bar{\lambda}_1$	0.004330	0.007244	0.598	0.557	

O termo constante da regressão não se apresenta estatisticamente significativo, com um valor *p-value* de 0.214, pelo que não se rejeita a hipótese nula. Esta análise encontra-se de acordo com o princípio fundamental de que este deveria ser igual a zero.

O coeficiente $\bar{\lambda}_1$ de valor 0.004330 apresenta novamente um valor insignificante e mostra-se irrelevante estatisticamente com um valor de *p-value* de 0.557. O coeficiente de determinação indica que cerca de 1,95% do prémio de risco é explicado pelos *downside betas*, o que continua a evidenciar uma capacidade preditiva bastante limitada do modelo.

Tabela 4.10: Resultados da validação da SML para a metodologia de Harlow e Rao.

Pressuposto	Resultado
Inclinação ($\bar{\lambda}_1 = \bar{R}_m - \bar{R}_f$)	0.47541 (<i>p-value</i>)
Retorno mercado ($R_m > R_f$)	0.59
Linearidade	Análise gráfica 4.4

Pelos testes adicionais, tabela 4.10, verifica-se a não rejeição da hipótese de equivalência entre o coeficiente $\bar{\lambda}_1$ e o prémio de risco de mercado histórico. Contudo, esta perde significado perante a quase nulidade do coeficiente estimado e pela sua insignificância estatística. Da mesma forma, a ausência de evidências que suportem a superioridade dos retornos do mercado continua a minar um dos pilares

4. RESULTADOS OBTIDOS

fundamentais da teoria.

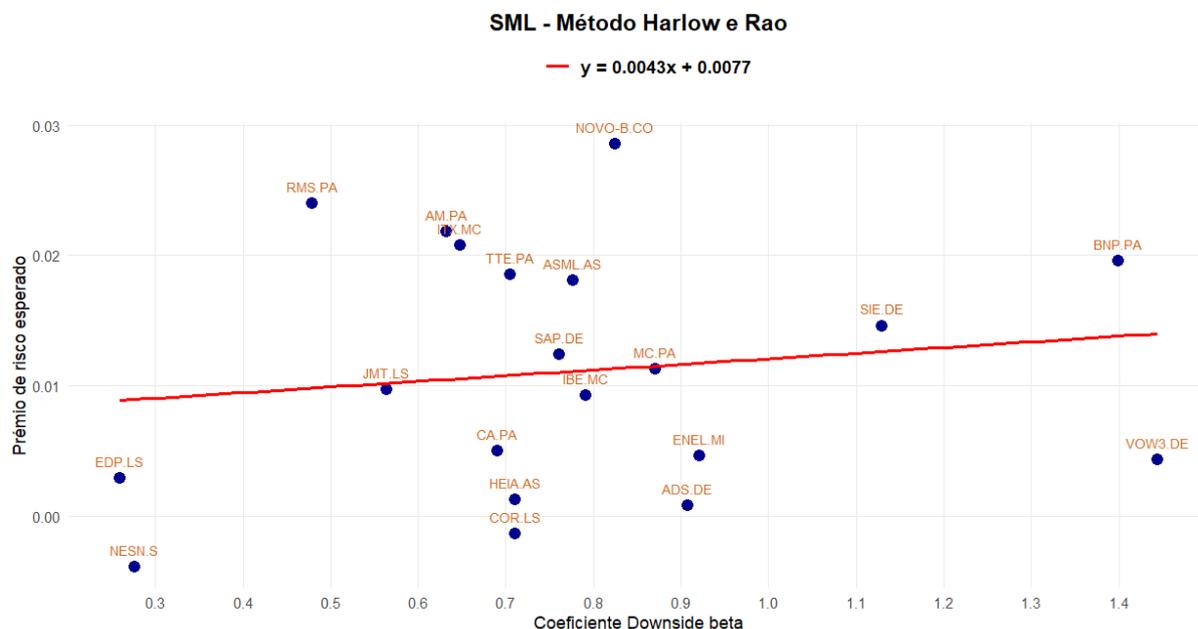


Figura 4.4: Retas de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Harlow e Rao.

A representação visual destes resultados através da reta $y = 0.0043x + 0.0077$ mostra uma ligeira inclinação positiva, acompanhada por uma dispersão dos ativos e uma distribuição aparentemente aleatória de valores, figura 4.4.

No entanto, alguns pontos destacam-se. Novamente, o ativo NOVO-B.CO, assim como o ativo RMS.PA, encontram-se substancialmente acima da SML, apresentando um retorno muito superior ao previsto pelo modelo, sugerindo uma possível subvalorização. Já o ativo agressivo VOW3.DE situa-se abaixo da SML, indicando um desempenho inferior ao previsto pelo modelo. Esta análise é análoga à efetuada na abordagem de Hogan e Warren, reforçando a ideia de que certos ativos exibem anomalias persistentes em diferentes especificações do modelo

Além disso, na região de valores entre 0.5 e 1, observa-se um comportamento misto. Alguns ativos, como AM.PA, TTE.PA, entre outros, estão subvalorizados pelo mercado, enquanto os ativos CA.PA, COR.LS e ADS.DE, apresentam retornos abaixo do esperado, sugerindo uma potencial sobrevalorização. Já os ativos JMT.LS e MC.PA, que se posicionam em cima da SML, apresentam retornos aproximadamente consistentes com as expectativas do D-CAPM, dado o seu nível de *downside risk*.

Os resultados da abordagem de Harlow e Rao trazem contribuições importantes para a discussão sobre a validade empírica do D-CAPM. A análise revela as mesmas limitações encontradas noutras versões do modelo, contudo, apresenta uma ligeira melhoria ao incorporar mais um ativo que se alinha com precisão à SML.

No entanto, esta melhoria não compensa as limitações encontradas neste modelo, como a insignificância estatística do coeficiente de risco e o negativo valor do coeficiente de determinação.

A aplicação da metodologia de Estrada oferece perspectivas distintas na avaliação da relação risco-retorno.

Conforme evidenciado na Tabela 4.11, o termo constante $\bar{\lambda}_0$ regista um valor de 0.002061, não apresentando significância estatística, o que está em conformidade com a expectativa teórica de um

4.3 Validação do modelo D-CAPM

Tabela 4.11: Resultados da regressão SML para a metodologia de Estrada.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	<i>t-stat</i>	<i>p-value</i>	R^2
$\bar{\lambda}_0$	0.002061	0.006940	0.297	0.77	0.09323
$\bar{\lambda}_1$	0.010227	0.007517	1.360	0.19	

termo independente não significativo. Este resultado é favorável, uma vez que elimina a anomalia de um prêmio sistemático não explicado na primeira abordagem do D-CAPM.

Quanto ao coeficiente $\bar{\lambda}_1$, o valor positivo de 0.010227, embora não atinja o limiar convencional de significância estatística de 5%, com um valor de *p-value* de 0.19, sugere uma tendência positiva entre o *downside beta* e os retornos esperados. O coeficiente de determinação, de valor 0,09323, indica que cerca de 9,32% da variação dos retornos é explicada pela medida de risco considerada. Embora ainda que baixo, este valor representa uma melhoria significativa em relação aos modelos anteriores, evidenciando um melhor desempenho da capacidade explicativa do modelo de Estrada.

Tabela 4.12: Resultados da validação da SML para a metodologia de Estrada.

Pressuposto	Resultado
Inclinação ($\bar{\lambda}_1 = \bar{R}_m - \bar{R}_f$)	0.15435 (<i>p-value</i>)
Retorno mercado ($R_m > R_f$)	0.59
Linearidade	Análise gráfica 4.5

Os testes complementares aos pressupostos teóricos, tabela 4.12, revelam que a hipótese de equivalência entre o coeficiente $\bar{\lambda}_1$ e o prêmio de risco de mercado histórico não pode ser rejeitada, *p-value* = 0.15435, embora esta conclusão deva ser interpretada com cautela face à marginal insignificância do próprio coeficiente estimado. A premissa fundamental dos retornos de mercado serem superiores aos do ativo sem risco continua sem encontrar suporte empírico.

A representação gráfica, descrita pela equação $y = 0.0102x + 0.0021$, mostra uma clara inclinação positiva, sugerindo a existência de uma relação direta, ainda que ténue, entre o risco e o retorno, figura 4.5. Contudo, a análise detalhada do gráfico revela uma dispersão considerável dos pontos em torno da linha de regressão.

Dois ativos que se destacam são o NESN.S e o EDPLS, ativos conservadores, que se encontram abaixo da reta, indicando a sua sobrevalorização pelo mercado. Mais uma vez, encontra-se uma dispersão significativa de ativos entre os valores 0.7 e 1 do eixo das abcissas. No caso do ativo VOW3.DE, o seu *downside beta* de 1.5, combinado com um retorno abaixo da SML, sugere também uma sobreavaliação, o que pode levar os investidores a considerar a venda do ativo.

Um aspeto relevante deste método é a presença de três ativos que se alinham quase perfeitamente com a reta de regressão, JMT.LS, MC.PA e SIE.DE. Este alinhamento indica que o modelo está a precificá-los de acordo com as expectativas do mercado, refletindo uma relação consistente entre risco e retorno. Esta característica contrasta com os métodos anteriores, pois apresenta mais ativos próximos da linha teórica, reforçando a eficácia do método de Estrada em capturar a dinâmica de mercado para certos ativos.

Em síntese, a metodologia de Estrada apresenta melhorias claras face às abordagens alternativas, nomeadamente ao eliminar o problema do termo independente significativo e ao estabelecer uma relação

4. RESULTADOS OBTIDOS

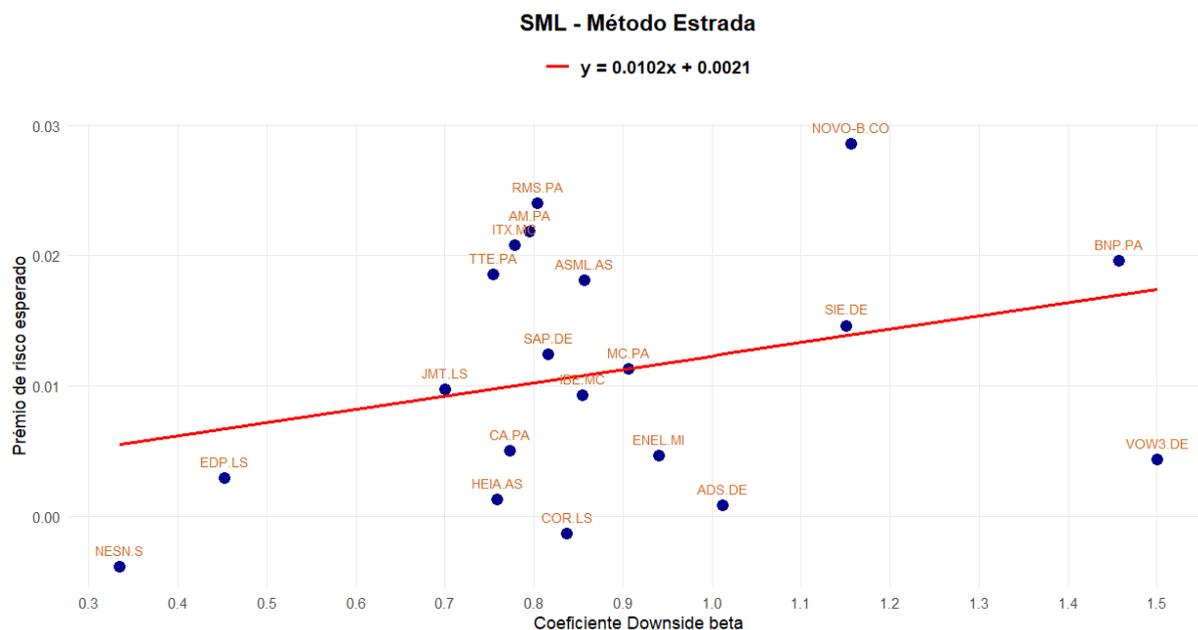


Figura 4.5: Retas de mercado de títulos (SML) obtida através da metodologia de Estrada.

positiva, ainda que fraca, entre risco e retorno.

Para complementar e concluir a avaliação empírica do modelo D-CAPM nas três abordagens metodológicas, procede-se a uma análise conjunta dos resultados, combinando a avaliação quantitativa dos erros de previsão com uma análise qualitativa dos gráficos de retornos reais versus estimados (Anexo C). Esta abordagem dupla permite não só quantificar as discrepâncias entre os valores previstos e observados, mas também identificar padrões temporais, tendências e eventuais falhas sistemáticas do modelo.

Para isto, recorre-se a duas métricas fundamentais, a *Root Mean Square Error* (RMSE) e a *Mean Square Error* (MSE), que permitem mensurar com precisão as discrepâncias entre os retornos previstos pelo modelo e os efetivamente observados no mercado.

Esta abordagem comparativa oferece uma perspectiva sobre o desempenho preditivo de cada especificação do D-CAPM ao nível individual de cada ativo.

Apresentam-se então, na tabela 4.13, os resultados obtidos das métricas mencionadas.

Tabela 4.13: Erros de previsão por abordagem metodológica (RMSE e MSE).

Ativo	Método Hogan e Warren		Método Harlow e Rao		Método Estrada	
	RMSE	MSE	RMSE	MSE	RMSE	MSE
EDP.LS	0.05873	0.00345	0.0608	0.0037	0.06574	0.00432
JMT.LS	0.07107	0.00505	0.0709	0.0050	0.07184	0.00516
COR.LS	0.04846	0.00235	0.0517	0.0027	0.05488	0.00301
ASMLAS	0.08477	0.00719	0.0793	0.0063	0.07784	0.00606
SAP.DE	0.06782	0.00460	0.0661	0.0044	0.06483	0.00420
VOWS.DE	0.07217	0.00521	0.0718	0.0052	0.07217	0.00521

Continua na próxima página

Tabela 4.13 – continuação da página anterior

Ativo	Método Hogan e Warren		Método Harlow e Rao		Método Estrada	
	RMSE	MSE	RMSE	MSE	RMSE	MSE
MC.PA	0.04990	0.00249	0.0457	0.0021	0.04556	0.00208
TTE.PA	0.07405	0.00548	0.0737	0.0054	0.07330	0.00537
BNP.PA	0.07426	0.00551	0.0741	0.0055	0.07401	0.00548
SIE.DE	0.05149	0.00265	0.0515	0.0027	0.05130	0.00263
HEIA.AS	0.05048	0.00255	0.0505	0.0025	0.05112	0.00261
ENEL.MI	0.04733	0.00224	0.0472	0.0022	0.04686	0.00220
RMS.PA	0.08230	0.00677	0.0784	0.0061	0.07560	0.00572
ITX.MC	0.07503	0.00563	0.0709	0.0050	0.06763	0.00457
IBE.MC	0.05125	0.00263	0.0519	0.0027	0.05216	0.00272
NESN.S	0.04052	0.00164	0.0390	0.0015	0.03921	0.00154
NOVO-B.CO	0.06692	0.00448	0.0717	0.0051	0.07906	0.00625
ADS.DE	0.08268	0.00684	0.0827	0.0068	0.08283	0.00686
AM.PA	0.08860	0.00785	0.0887	0.0079	0.08916	0.00795
CA.PA	0.05197	0.00270	0.0515	0.0027	0.05221	0.00273
Média	0.06449	0.0043655	0.063905	0.004275	0.0643655	0.0043335

A abordagem de Hogan e Warren apresenta erros de previsão com valores de RMSE variando entre 0.04052 e 0.08860, correspondendo aos ativos NESN.S e AM.PA, respectivamente, demonstrando uma clara variação setorial. Os ativos do setor de serviços públicos essenciais, como EDPLS e ENEL.MI, registam consistentemente menores erros, enquanto empresas cíclicas como AM.PA e ADS.DE apresentam as maiores discrepâncias entre valores previstos e observados. O MSE médio de 0.00437 nesta metodologia sugere uma precisão moderada global, mas com variações significativas entre diferentes setores de atividade. Esta conclusão é corroborada pelos gráficos (Anexo C1), onde se observa que os retornos estimados para ativos como NESN.S e ENEL.MI acompanham melhor os retornos reais, enquanto para os ativos AM.PA e ADS.DE existem discrepâncias, especialmente em períodos de maior volatilidade.

A especificação proposta por Harlow e Rao mostra ligeiras melhorias em relação à primeira abordagem. Embora se observa uma ligeira redução do valor das métricas, particularmente para ativos como ITX.MC e RMS.PA, em outros casos, como o ativo o NOVO-B.CO, os erros aumentam. Isto reflete-se pela média das métricas em análise que, apesar de serem ligeiramente inferiores às da metodologia anterior, não apresenta melhorias na precisão global do modelo. Os resultados mostram que as limitações persistem para os ativos cíclicos, como AM.PA e VOW3.DE, que continuam a apresentar maiores erros, enquanto os ativos estáveis, como EDPLS e NESN.S, mantêm uma boa aderência entre retornos previstos e reais. Os gráficos (Anexo C2) confirmam este padrão, revelando oscilações semelhantes às observadas na abordagem de Hogan e Warren, particularmente em momentos de maior volatilidade, onde o modelo tende a subestimar ou sobrestimar os retornos.

4. RESULTADOS OBTIDOS

A metodologia de Estrada apresenta melhorias significativas em alguns ativos, como por exemplo, para os ativos MC.PA e ITX.MC, mas um desempenho inferior noutros casos, particularmente no ativo NOVO-B.CO. Os valores médios das métricas situam-se entre os valores das outras duas abordagens, sugerindo que, embora esta metodologia apresente vantagens em determinados contextos, não existe uma dominância clara de qualquer das três abordagens em termos de precisão global das previsões. Os gráficos (Anexo C3) reforçam essa análise, mostrando que, para o ativo MC.PA, os retornos previstos são bastante próximos dos observados, em comparação com os outros métodos, enquanto para NOVO-B.CO há uma clara dificuldade em capturar a magnitude das variações, especialmente em picos de retorno negativo.

Embora as metodologias de Harlow e Rao e de Estrada demonstrem melhorias pontuais em certos ativos, nenhuma das três abordagens consegue superar consistentemente as limitações estruturais do modelo na previsão de retornos de ativos.

A análise conjunta efetuada acima revela que, para a maioria dos ativos em estudo, os três modelos apresentaram níveis de erro semelhantes, revelando uma convergência nas suas capacidades preditivas. Esta consistência revela um padrão, em que, os ativos estáveis, particularmente dos setor dos serviços públicos e bens de consumo essenciais, como EDPLS, ENEL.MI e NESN.S, apresentam menores erros de previsão e maior aderência entre retornos estimados e reais. Por outro lado, os ativos cíclicos, como AM.PA, ADS.DE e VOW3.DE, continuam a desafiar o modelo, com discrepâncias mais acentuadas, especialmente durante períodos de maior volatilidade.

4.3.1 Análise de resíduos dos modelos estimados

Apresentam-se os resultados da análise aos resíduos (Anexo D) a partir da avaliação da normalidade, homocedasticidade e independência dos resíduos, que constituem os pressupostos fundamentais para a validade do modelo de regressão aplicado.

A avaliação à normalidade dos resíduos realizou-se através de duas abordagens, pela análise gráfica, comparando a distribuição observada nos histogramas com a curva normal teórica e, pelo teste de Shapiro Wilk. Esta análise permite não só uma verificação visual dos padrões de distribuição, mas também uma confirmação quantitativa de que este pressuposto está a ser cumprido.

Os *boxplots* foram ainda analisados para detetar *outliers* nos resíduos. A presença de valores atípicos, identificados visualmente, pode indicar desvios à distribuição esperada ou influências externas, sendo relevante para a robustez do modelo.

Relativamente à homocedasticidade, a análise baseou-se na análise dos gráficos de resíduos versus valores ajustados, e, por fim, a independência dos resíduos foi verificada através do teste de Durbin-Watson, que permite avaliar a ausência de autocorrelação.

Para o método de Hogan e Warren, verificou-se que a maioria dos ativos apresenta resíduos com distribuição normal, conforme evidenciado pelos histogramas (Gráficos D1.1) e pelos valores de *p-value* superiores ao nível de significância de 5% (Tabela 1.2). Destacam-se alguns casos que apresentam desvios significativos da normalidade, sendo estes os ativos SAP.DE, VOW3.DE, TTE.PA e AM.PA que rejeitam a hipótese de normalidade. Outros casos, como por exemplo os ativos RMS.PA e IBE.MC, que embora não apresentem valores de *p-value* inferiores a 0,05, encontram-se próximos do limiar de significância.

Relativamente à homocedasticidade, em geral, verifica-se que os resíduos estão distribuídos de forma

4.3 Validação do modelo D-CAPM

aleatória em torno da linha do zero, sem padrões evidentes de heterocedasticidade (Gráficos D1.3). No entanto, casos como o do ativo SAP.DE, que parece apresentar uma dispersão crescente para valores ajustados mais elevados, sugerindo possível heterocedasticidade nos resíduos.

Os resultados ao teste de Durbin-Watson mostram que, para a maioria das empresas, o valor da estatística está próximo de 2, sugerindo que os resíduos não apresentam autocorrelação (Tabela 1.4). Contudo, ativos como EDP.LS e MC.PA apresentam valores de estatísticas ligeiramente inferiores de 1.7896 e 1.7671, respectivamente, o que pode sugerir uma fraca tendência à autocorrelação positiva, mas sem evidências estatísticas suficientemente fortes para comprometer a validade dos resultados.

A análise dos *boxplots*, Anexo D1.5, revela que 11 das 20 empresas apresentam *outliers* nos resíduos. O ativo IBE.MC é o que apresenta a maior quantidade de *outliers*. A presença desses valores atípicos pode indicar a existência de observações extremas que podem afetar a qualidade do modelo de regressão.

No método de Harlow e Rao, em relação à normalidade dos resíduos, verifica-se que a maioria dos ativos apresenta uma distribuição próxima da normal, conforme evidenciado pelos histogramas (Gráficos D2.1) e pelos valores de *p-value* superiores ao nível de significância de 5% (Tabela 2.2). No entanto, destacam-se alguns casos pelo seu baixo *p-value*, levando à rejeição da hipótese da normalidade, como são os casos dos ativos SAP.DE, VOW3.DE, TTE.PA e AM.PA, tal como verificado no método de Hogan e Warren.

Relativamente à homocedasticidade, verifica-se que, de um modo geral, os resíduos estão distribuídos de forma aleatória em torno da linha de zero, sem padrões evidentes de heterocedasticidade (Gráficos D2.3). No entanto, o ativo AM.PA, parece exibir uma dispersão assimétrica com maior concentração de resíduos negativos em valores intermediários, podendo indicar uma ligeira violação da homocedasticidade.

No que diz respeito à autocorrelação, os resultados do teste de Durbin-Watson revelam que, para a grande maioria das empresas, o valor da estatística situa-se próximo de 2 (Tabela 2.4). Novamente, os ativos EDP.LS e MC.PA, que apresentam estatísticas DW ligeiramente inferiores a 2 podem sugerir uma possível fraca tendência para autocorrelação positiva, embora os valores de *p-value* associados não permitam rejeitar a hipótese nula de ausência de autocorrelação. Por outro lado, SIE.DE, com uma estatística de 2.5112, mostra um valor acima de 2.5, mas sem significância estatística para autocorrelação negativa.

A análise dos *boxplots*, Anexo D2.5, revela que apenas 8 das 20 empresas não apresentam *outliers* nos resíduos. O ativo COR.LS é o que apresenta a maior quantidade de *outliers*.

Relativamente ao método de Estrada, no que diz respeito à normalidade, os dados indicam que a maioria dos ativos apresenta resíduos com distribuição normal, à exceção dos ativos SAP.DE, VOW3.DE, TTE.PA e AM.PA, que novamente, rejeitam a hipótese de normalidade (Gráficos D3.1 e Tabela 3.2).

Os resultados (Gráficos D3.3) revelam que, para a maioria dos ativos analisados, os pontos nos gráficos de dispersão distribuem-se de forma aleatória em torno da linha de zero, sem apresentar padrões claros de aumento ou diminuição da dispersão em função dos valores preditos. Este comportamento é característico de resíduos homocedásticos, onde a variância se mantém constante ao longo da distribuição. No entanto, alguns casos merecem atenção particular. Os ativos NOVO-B.CO e ITX.MC parecem apresentar uma ligeira tendência de maior dispersão nos extremos da distribuição, sugerindo possível heterocedasticidade.

A análise à autocorrelação mostra que a grande maioria dos ativos apresenta estatísticas próximas de 2, confirmando a ausência de autocorrelação nos resíduos (Tabela 3.4). Os casos relevantes, como os

4. RESULTADOS OBTIDOS

ativos EDPLS, MC.PA e SIE.DE, apresentam o mesmo comportamento das metodologias anteriores.

Por último, a análise dos *boxplots*, Anexo D3.5, revela que 14 das 20 empresas apresentam *outliers* nos resíduos. O ativo COR.LS, novamente, é o que apresenta a maior quantidade de *outliers*.

Em síntese, as três metodologias em estudo demonstram resultados satisfatórios em relação aos pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência dos resíduos para a maioria dos ativos analisados. Além disso, os casos em que esses pressupostos podem ser questionados ou até mesmo rejeitados são consistentes entre as três metodologias, afetando sempre os mesmos ativos.

Capítulo 5

Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo principal avaliar a aplicabilidade do *Downside Capital Asset Pricing Model* no mercado bolsista europeu, comparando três metodologias distintas para estimar o risco sistemático, propostas por Hogan e Warren, Harlow e Rao e Estrada.

O D-CAPM surge como uma evolução do modelo CAPM tradicional, incorporando a aversão dos investidores ao risco de queda, *downside risk*, uma dimensão crucial que o CAPM ignora ao assumir uma simetria na percepção do risco. A motivação para este estudo reside na necessidade de modelos mais robustos, capazes de capturar comportamentos assimétricos nos retornos dos ativos, particularmente em períodos de instabilidade financeira, como crises económicas ou choques de mercado.

Os resultados obtidos revelam que o desempenho preditivo do modelo em estudo varia significativamente consoante o tipo de ativo e a metodologia aplicada. Apesar de algumas abordagens apresentarem um melhor desempenho em determinados setores ou classes de ativos, nenhuma se revela consistentemente superior em todos os contextos. Embora o D-CAPM apresente vantagens teóricas significativas em relação ao modelo tradicional, a sua validade empírica no contexto do mercado europeu é limitada.

A análise da distribuição dos prémios de risco revelou que, embora a maioria dos ativos apresentasse assimetrias negativas, alguns casos exibiram distribuições próximas da normalidade, limitando a eficácia do modelo. Esta heterogeneidade sugere que o modelo baseado no risco de queda, embora seja teoricamente mais robusto para capturar comportamentos assimétricos, pode não ser uniformemente aplicável a todos os ativos, especialmente àqueles cujos retornos não demonstram assimetrias significativas. Essa limitação reforça a importância de adaptar a escolha do modelo às características específicas de cada ativo.

Aquando da estimação do coeficiente de risco sistemático *downside beta*, a maioria apresentava-se estatisticamente significativa, indicando uma possível relação linear entre o prémio de risco do ativo e o prémio de risco de mercado. Destaca-se a metodologia de Estrada, que apresentou todas as estimativas de beta significativas, ao contrário das abordagens de Hogan e Warren e Harlow e Rao, onde alguns ativos não alcançaram significância estatística. Essa consistência na metodologia de Estrada sugere uma maior robustez na captura do risco sistemático, embora não se traduza necessariamente em uma melhor explicação dos retornos esperados.

Através das regressões transversais adaptadas de Fama e MacBeth, verificou-se que, para as três metodologias, os coeficientes de risco não foram estatisticamente significativos. Além disso, o poder explicativo dos modelos, medido pelo coeficiente de determinação, foi relativamente baixo, indicando que o *downside beta* não consegue, por si só, explicar adequadamente os retornos esperados dos ativos.

5. CONCLUSÃO

Esses resultados sugerem que outras variáveis, não incluídas no modelo, podem desempenhar um papel relevante na determinação dos retornos.

Utilizando a *Security Market Line*, os métodos de Hogan e Warren e Harlow e Rao apresentaram resultados insatisfatórios, com coeficientes de risco não significativos e, em alguns casos, valores de coeficiente de determinação negativos. Estes resultados apontam para que essas metodologias não consigam estabelecer uma relação clara entre o risco sistemático e prêmios de risco dos ativos esperados. Por outro lado, mais uma vez, a abordagem de Estrada mostrou-se mais promissora, em relação às anteriores, com um termo independente não significativo e uma ligeira inclinação positiva da SML, embora ainda sem significância estatística. As métricas de erro utilizadas no estudo revelaram que, embora houvesse variações entre os ativos, nenhuma metodologia se destacou consistentemente como superior em termos de precisão preditiva. No entanto, a metodologia de Estrada demonstrou melhorias em alguns casos.

A análise dos resíduos confirmou que, apesar de alguns ativos apresentarem desvios em relação aos pressupostos de normalidade, homocedasticidade e independência, a maioria cumpriu esses critérios. Isso reforça a validade das estimativas obtidas, embora a presença de *outliers* e heterocedasticidade em certos ativos exija cautela na interpretação dos resultados.

Em síntese, o estudo demonstrou que o D-CAPM é um avanço em relação ao CAPM clássico, e, embora ofereça vantagens teóricas ao incorporar o *downside risk*, a sua aplicação prática no mercado europeu apresenta limitações significativas. A metodologia de Estrada destacou-se como a mais robusta entre as três avaliadas, embora nenhuma tenha conseguido estabelecer uma relação forte, inequívoca e estatisticamente significativa entre o risco sistemático e os retornos esperados.

Para superar as limitações identificadas, futuros trabalhos poderiam explorar o desenvolvimento de modelos setoriais, incorporando variáveis específicas de cada indústria que possam capturar riscos específicos, não considerados pelo *downside beta*. Além disso, a análise de subperíodos de crise poderia revelar se o D-CAPM ganha relevância em contextos de maior aversão ao risco. A utilização de dados de maior frequência, como por exemplo diários, poderia proporcionar uma medição mais precisa do *downside risk*, adotando ao mesmo tempo cuidados metodológicos para evitar a introdução de ruído. Adicionalmente, sugere-se que futuras investigações recorram à construção de portfólios, em vez da análise de ativos individuais. Esta abordagem permite reduzir o ruído idiossincrático, inerente a cada ativo isolado, focando a análise no risco sistemático. Além disso, os coeficientes betas estimados para portfólios tendem a ser mais estáveis e confiáveis, uma vez que a diversificação reduz a variância residual associada à regressão. Estas ideias poderão auxiliar no desenvolvimento de modelos mais sólidos e ajustados às especificidades do mercado europeu.

Bibliografia

- Banz, Rolf W (1981). “The relationship between return and market value of common stocks”. Em: *Journal of financial economics* 9.1, pp. 3–18.
- Black, Fischer (1972). “Capital market equilibrium with restricted borrowing”. Em: *The Journal of business* 45.3, pp. 444–455.
- Elton, Edwin J et al. (2009). *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons.
- Estrada, Javier (2000). “The cost of equity in emerging markets: a downside risk approach”. Em:
- Estrada, Javier (2002). “Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM”. Em: *Emerging Markets Review* 3.4, pp. 365–379.
- Estrada, Javier (2007). “Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing”. Em: *International Review of Economics & Finance* 16.2, pp. 169–185. ISSN: 1059-0560.
- Estrada, Javier (2008). “Mean-semivariance optimization: A heuristic approach”. Em: *Journal of Applied Finance (Formerly Financial Practice and Education)* 18.1.
- Fama, Eugene F (1970). “Efficient capital markets: A Review of Theory and Empirical Work”. Em: *Journal of finance* 25.2, pp. 383–417.
- Fama, Eugene F e Kenneth R French (1992). “The cross-section of expected stock returns”. Em: *the Journal of Finance* 47.2, pp. 427–465.
- Fama, Eugene F e James D MacBeth (1973). “Risk, return, and equilibrium: Empirical tests”. Em: *Journal of political economy* 81.3, pp. 607–636.
- Gouveia, Ângela Maria Fernandes (2021). “Verificação e Aplicação dos modelos CAPM e D-CAPM no mercado bolsista português”. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa (Portugal).
- Grootveld, Henk e Winfried Hallerbach (1999). “Variance vs downside risk: Is there really that much difference?” Em: *European Journal of operational research* 114.2, pp. 304–319.
- Harlow, W Van e Ramesh KS Rao (1989). “Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: Theory and evidence”. Em: *Journal of financial and quantitative analysis* 24.3, pp. 285–311.
- Hogan, William W e James M Warren (1974). “Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance”. Em: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9.1, pp. 1–11.
- Kahneman, Daniel e Amos Tversky (2013). “Prospect theory: An analysis of decision under risk”. Em: *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I*. World Scientific, pp. 99–127.
- Kazmi, Madiha et al. (2021). *Downside Beta and Downside Gamma: In Search for a Better Capital Asset Pricing Model*. *Risks* 9: 223.
- Lintner, John (1975). “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”. Em: *Stochastic optimization models in finance*. Elsevier, pp. 131–155.
- Markowitz, Harry M (1952). “Portfolio Selection”. Em: *The journal of finance* 7.1, pp. 77–91.

BIBLIOGRAFIA

- Mossin, Jan (1966). “Equilibrium in a capital asset market”. Em: *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 768–783.
- Mussa, Adriano, Pablo Rogers e José Roberto Securato (2009). “Modelos de retornos esperados no mercado brasileiro: testes empíricos utilizando metodologia preditiva”. Em: *Revista de Ciências da Administração*, pp. 192–216.
- Nurjannah, Don UA Galagedera e Robert Brooks (2012). “Conditional relation between systematic risk and returns in the conventional and downside frameworks: evidence from the Indonesian market”. Em: *Journal of Emerging Market Finance* 11.3, pp. 271–300.
- Ozili, Peterson K (2023). “The acceptable R-square in empirical modelling for social science research”. Em: *Social research methodology and publishing results: A guide to non-native English speakers*. IGI global, pp. 134–143.
- Paiva, Felipe Dias (2005). “Modelos de precificação de ativos financeiros de fator único: um teste empírico dos modelos CAPM e D-CAPM”. Em: *REGE Revista de Gestão* 12.2, pp. 49–65.
- Ross, Stephen A (1976). “The arbitrage theory of capital asset pricing”. Em: *Journal of Economic Theory* 13.3, pp. 341–360.
- Roy, Andrew Donald (1952). “Safety first and the holding of assets”. Em: *Econometrica: Journal of the econometric society*, pp. 431–449.
- Rutkowska-Ziarko, Anna et al. (2022). “Conventional and downside CAPM: The case of London stock exchange”. Em: *Global Finance Journal* 54, p. 100759.
- Sharpe, William F (1964). “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”. Em: *The journal of finance* 19.3, pp. 425–442.

Anexos

Anexo A

Construímos 50 regressões ($k = 1, \dots, 50$) em que a variável dependente Y corresponde a cada uma das rentabilidades para os 20 activos i e a variável independente X corresponde aos seus respectivos betas:

$$y_i^k = \hat{\alpha}_0^k + \hat{\alpha}_1^k x_i \quad (\text{A.1})$$

Para cada regressão linear k , a solução será:

$$\hat{\alpha}_1^k = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i^k - \bar{y}^k)}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha}_0^k = \bar{y}^k - \hat{\alpha}_1^k \bar{x}$$

Alternativamente, estimamos apenas uma regressão linear com a média das observações para cada activo i ao longo dos 50 meses (a variável independente é a mesma das 50 regressões anteriores):

$$z_i = \hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 x_i, \text{ em que } z_i = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} y_i^k, \forall i = 1, \dots, 20 \quad (\text{A.2})$$

Os coeficientes desta regressão são estimados através de:

A.

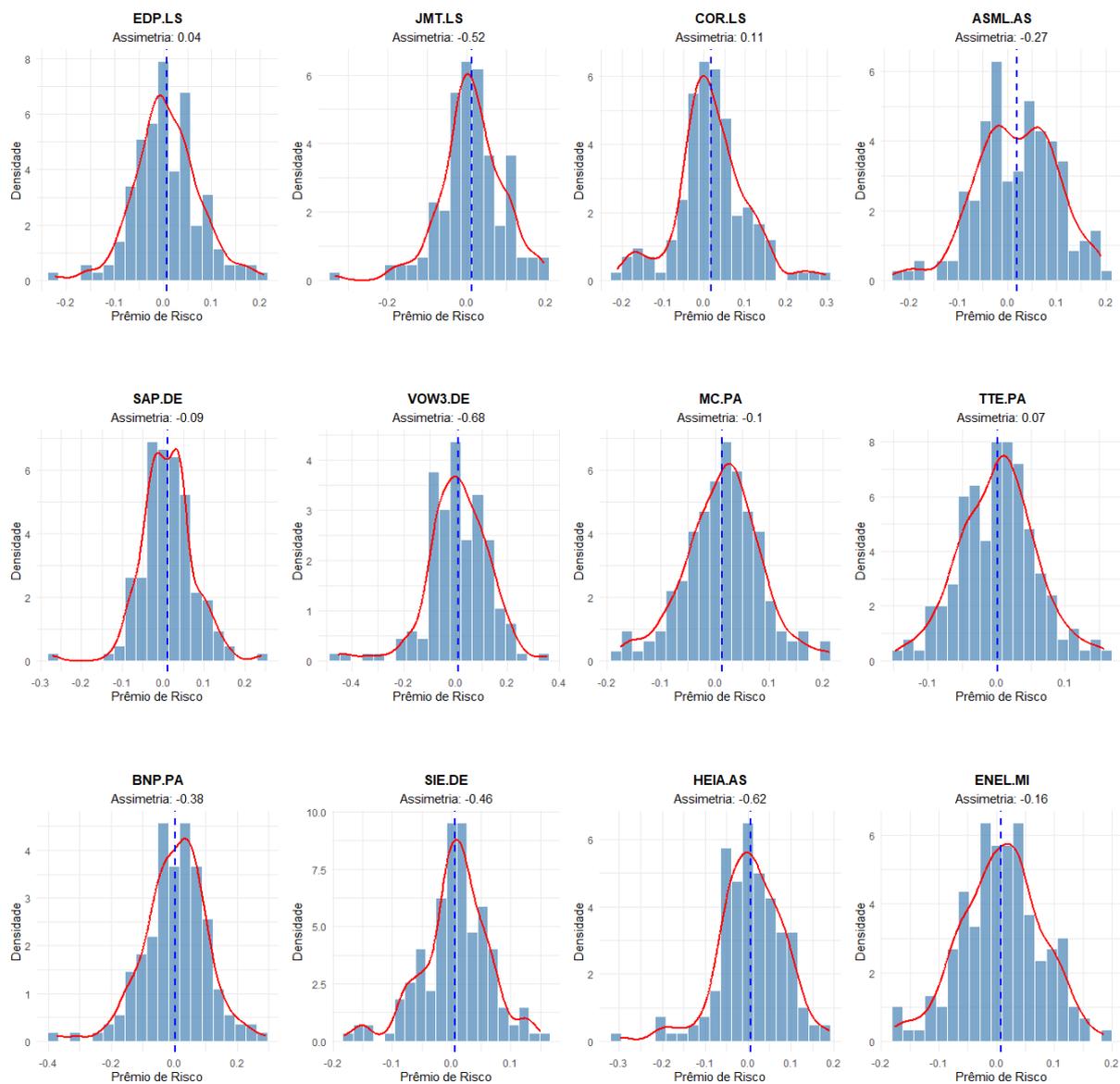
$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) \left(\frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} y_i^k - \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} y_i^k \right) \right)}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \left(\sum_{k=1}^{50} y_i^k - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{50} y_i^k \right) \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \left(\sum_{k=1}^{50} y_i^k - \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{20} \left(\sum_{i=1}^{20} y_i^k \right) \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \left(\sum_{k=1}^{50} y_i^k - \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{20} \left(\sum_{i=1}^{20} y_i^k \right) \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \left(\sum_{k=1}^{50} y_i^k - \sum_{k=1}^{50} \bar{y}^k \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} (y_i^k - \bar{y}^k)
\end{aligned}$$

Mostra-se que:

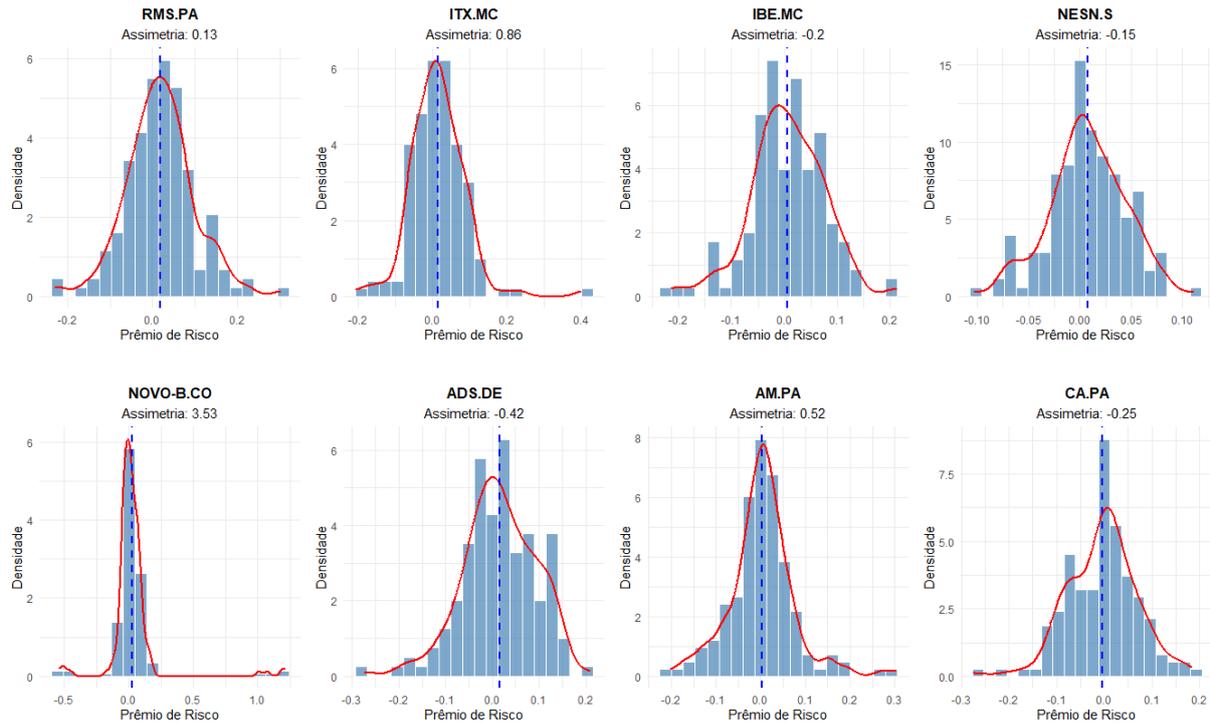
$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \tilde{\alpha}_1^k = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} \hat{\alpha}_1^k \\
&= \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i^k - \bar{y}^k)}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \times \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{50} (y_i^k - \bar{y}^k)
\end{aligned}$$

Anexo B

1. Histogramas da distribuição dos prêmios de risco dos 20 ativos:



B.

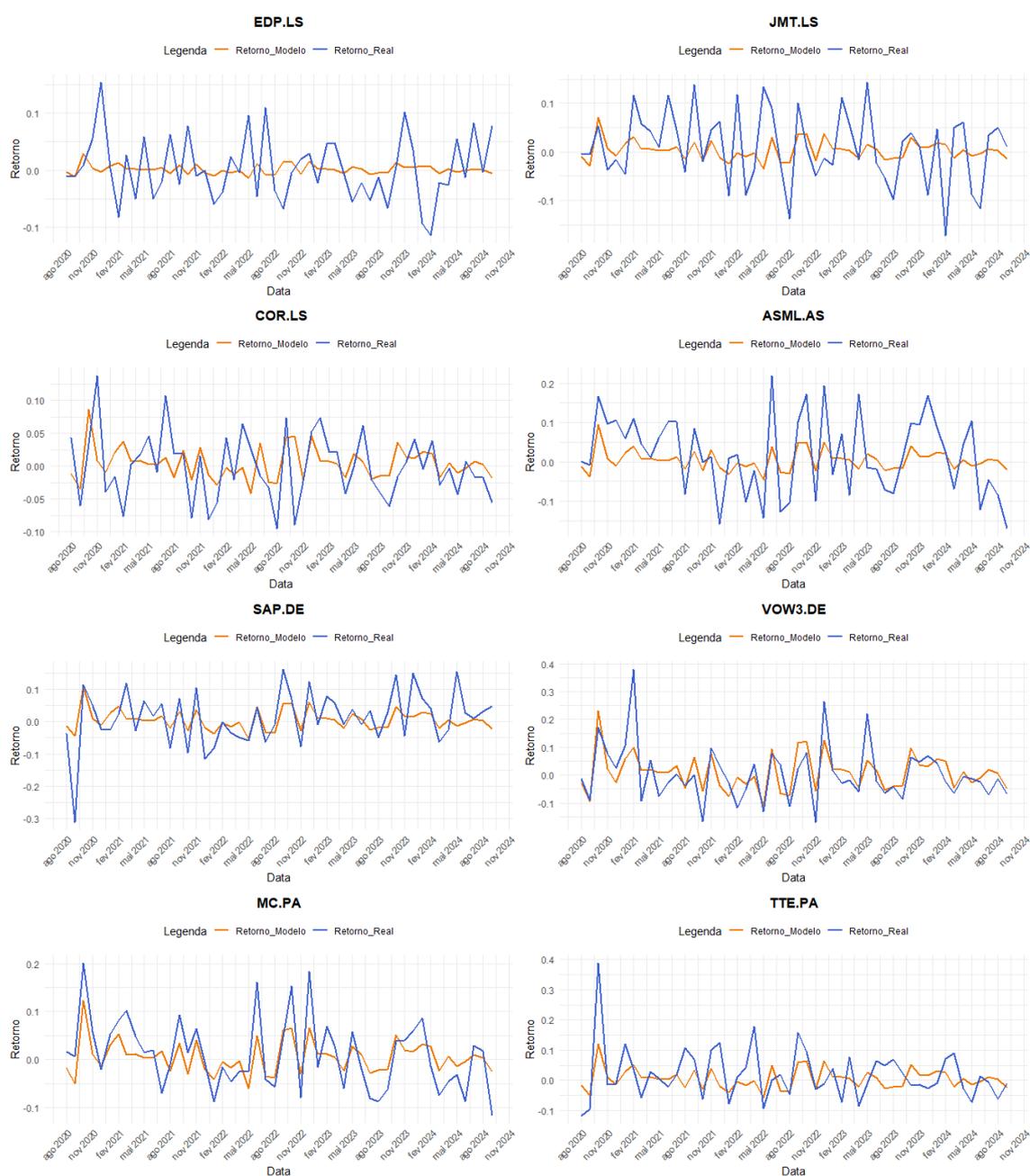


2. Teste Shapiro-Wilk para a distribuição dos prêmios de risco dos ativos:

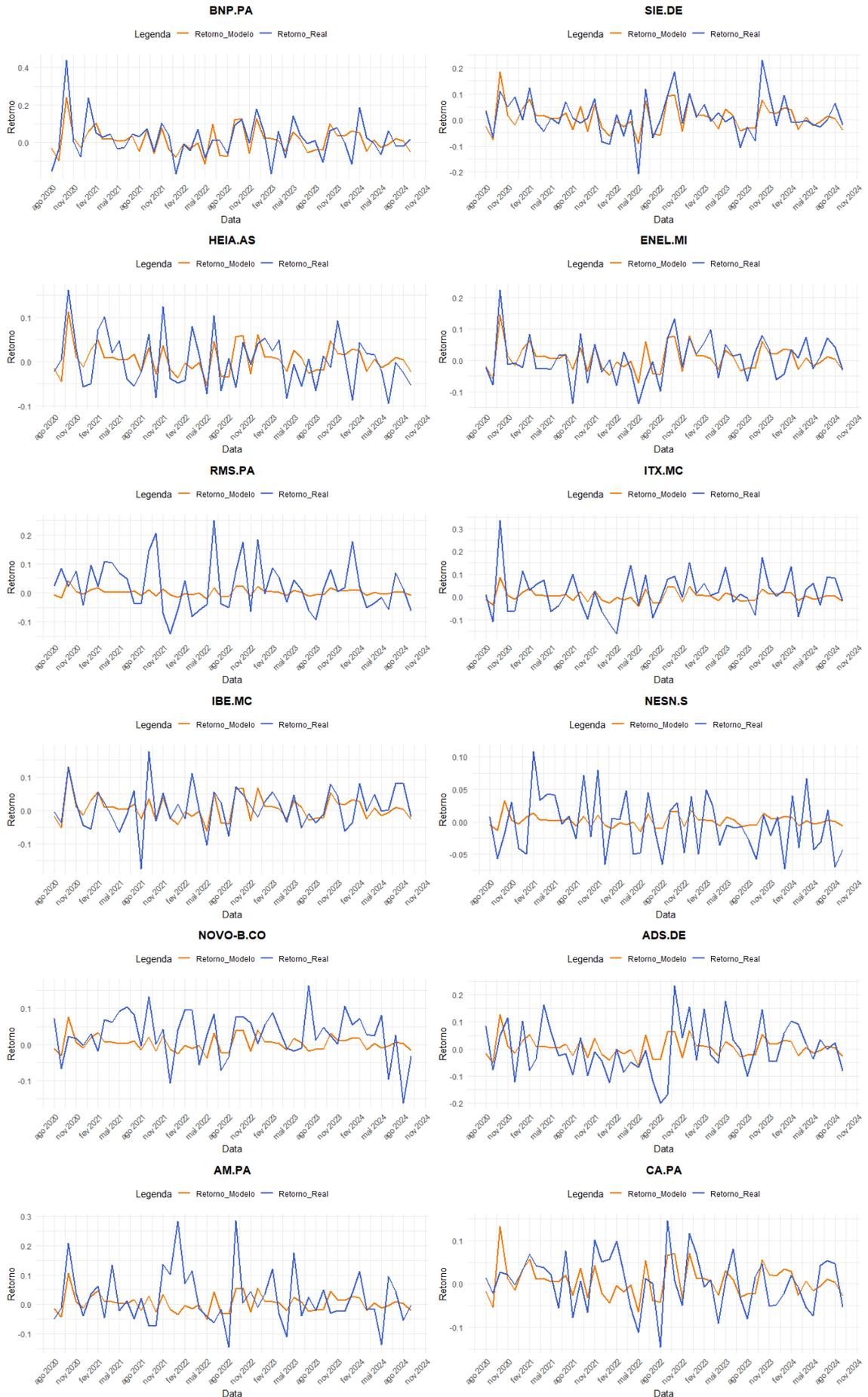
Ativo	Estatística W	<i>p-value</i>	Ativo	Estatística W	<i>p-value</i>
EDP.LS	0.98747	0.1756	HEIA.AS	0.9687	0.001296
JMT.LS	0.97183	0.002773	ENEL.MI	0.99431	0.8052
COR.LS	0.97223	0.003066	RMS.PA	0.98637	0.1305
ASML.AS	0.98709	0.1584	ITX.MC	0.94015	3.65E-06
SAP.DE	0.96879	0.001322	IBE.MC	0.98244	0.04457
VOW3.DE	0.95886	0.0001398	NESN.S	0.99227	0.5656
MC.PA	0.98981	0.3218	NOVO-B.CO	0.52354	2.20E-16
TTE.PA	0.99448	0.8233	ADS.DE	0.98265	0.04717
BNP.PA	0.98379	0.06452	AM.PA	0.94894	1.86E-05
SIE.DE	0.97365	0.004377	CA.PA	0.9863	0.1279

Anexo C

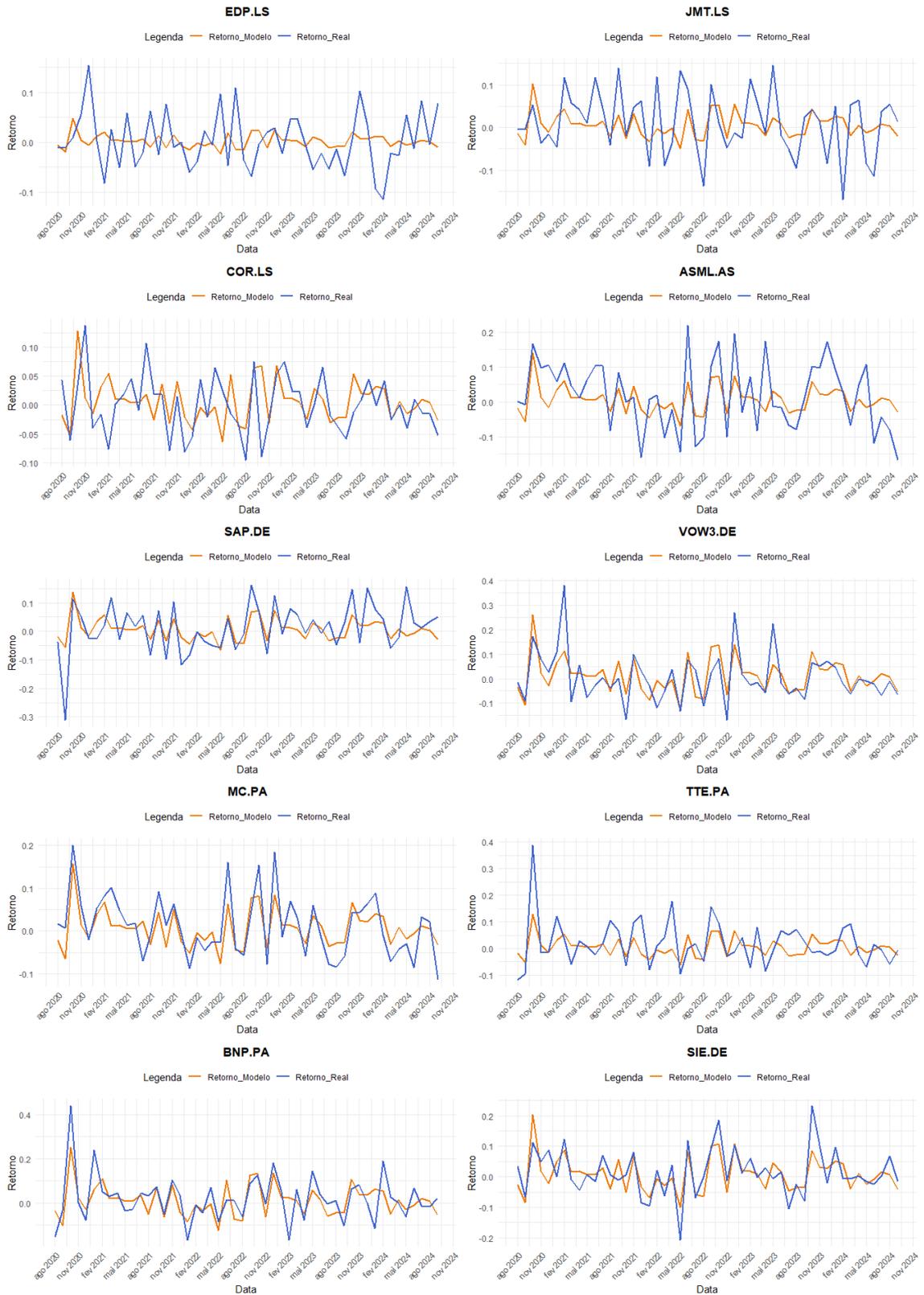
1. Gráficos da comparação entre o retorno real e o retorno do modelo para o método de Hogan e Warren:



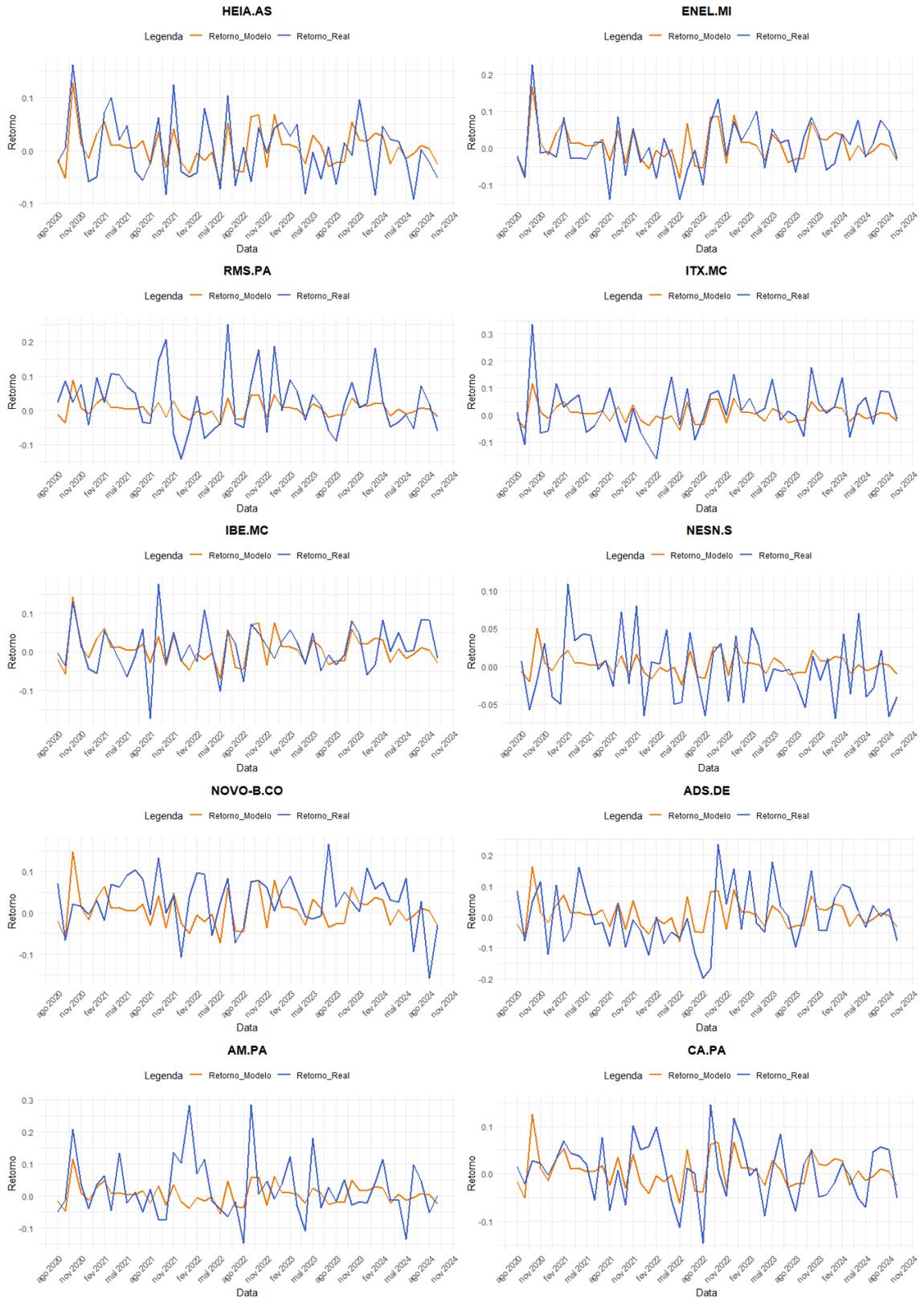
C.



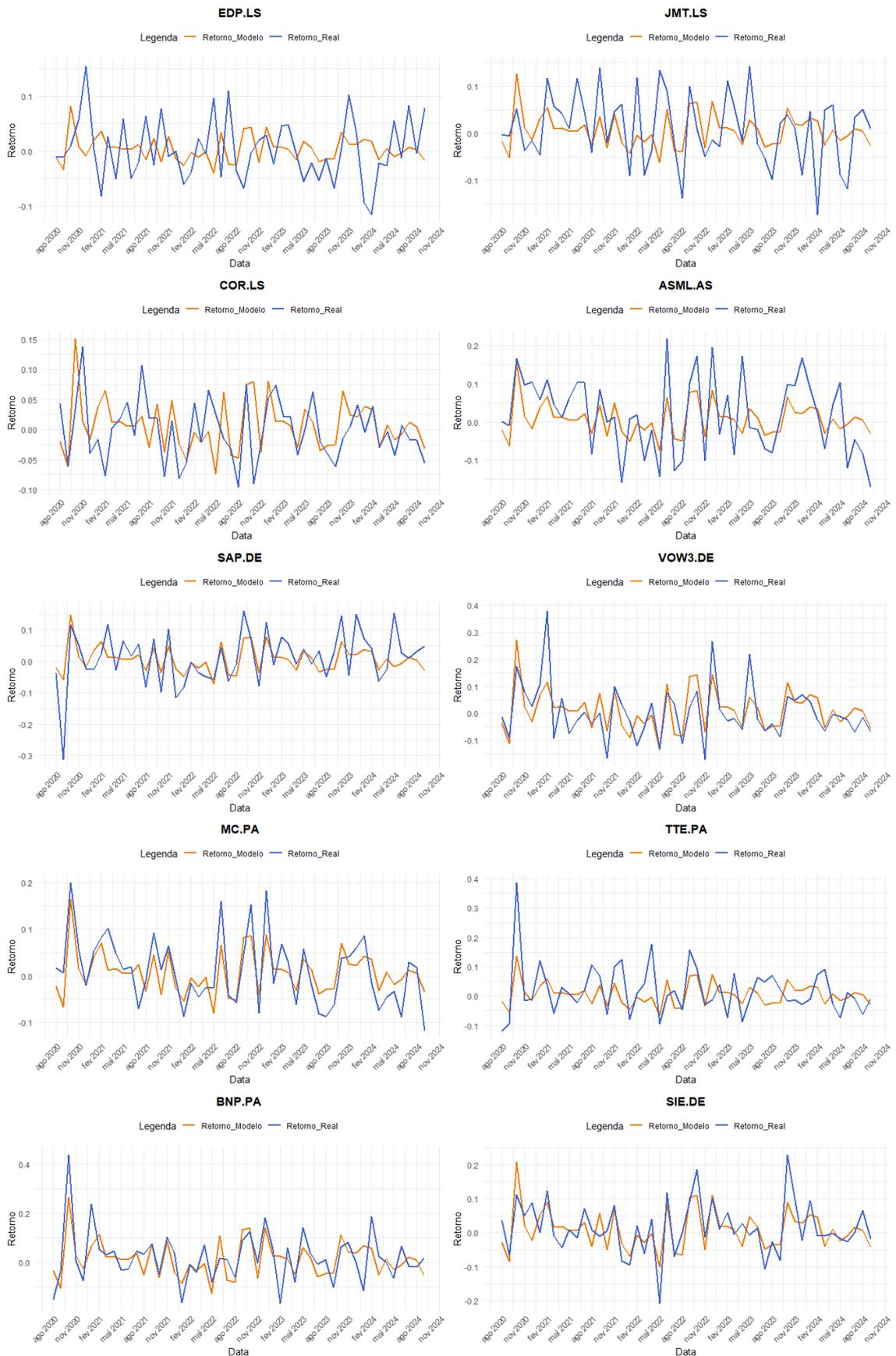
2. Gráficos da comparação entre o retorno real e o retorno do modelo para o método de Harlow e Rao:



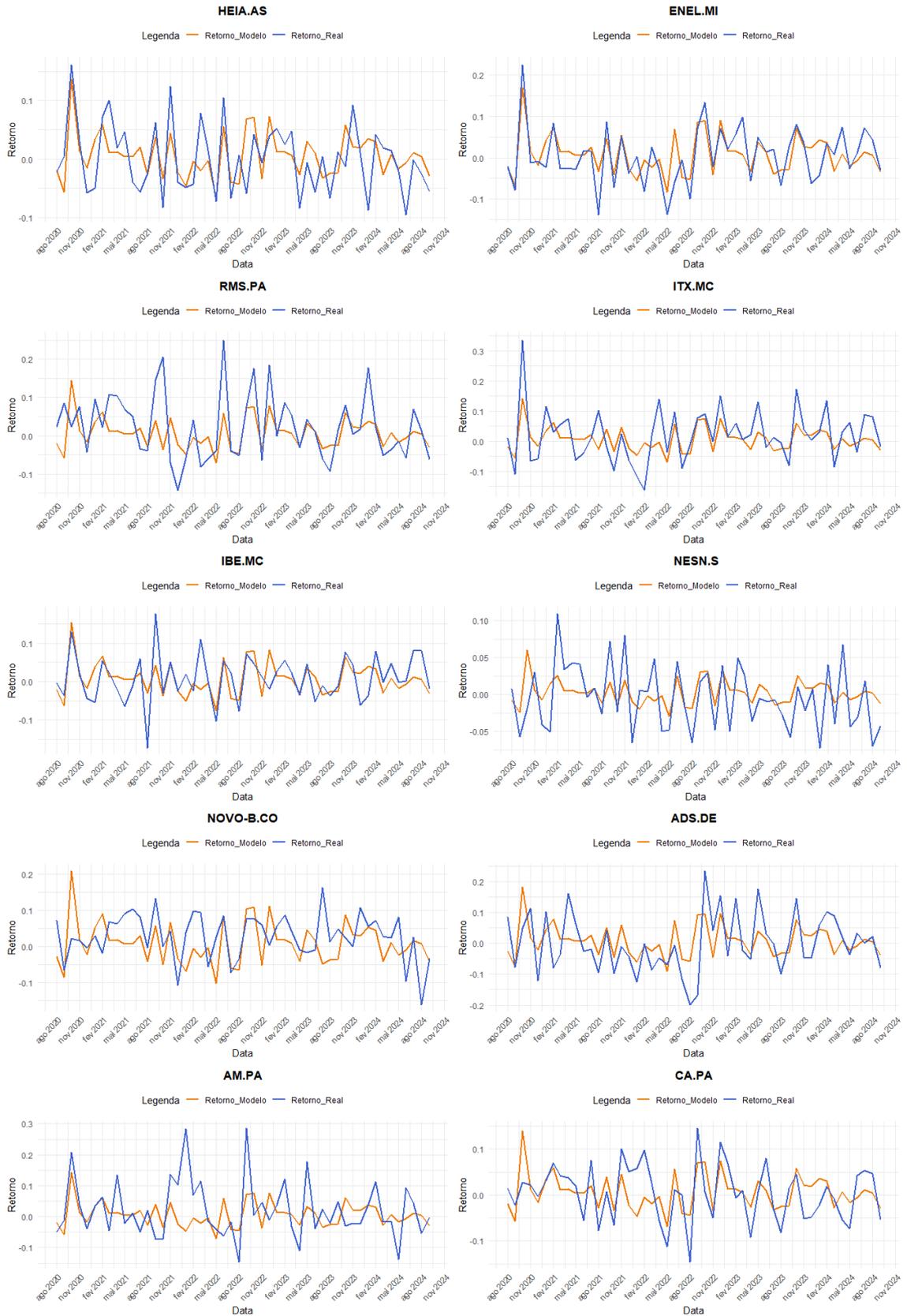
C.



3. Gráficos da comparação entre o retorno real e o retorno do modelo para o método de Estrada:



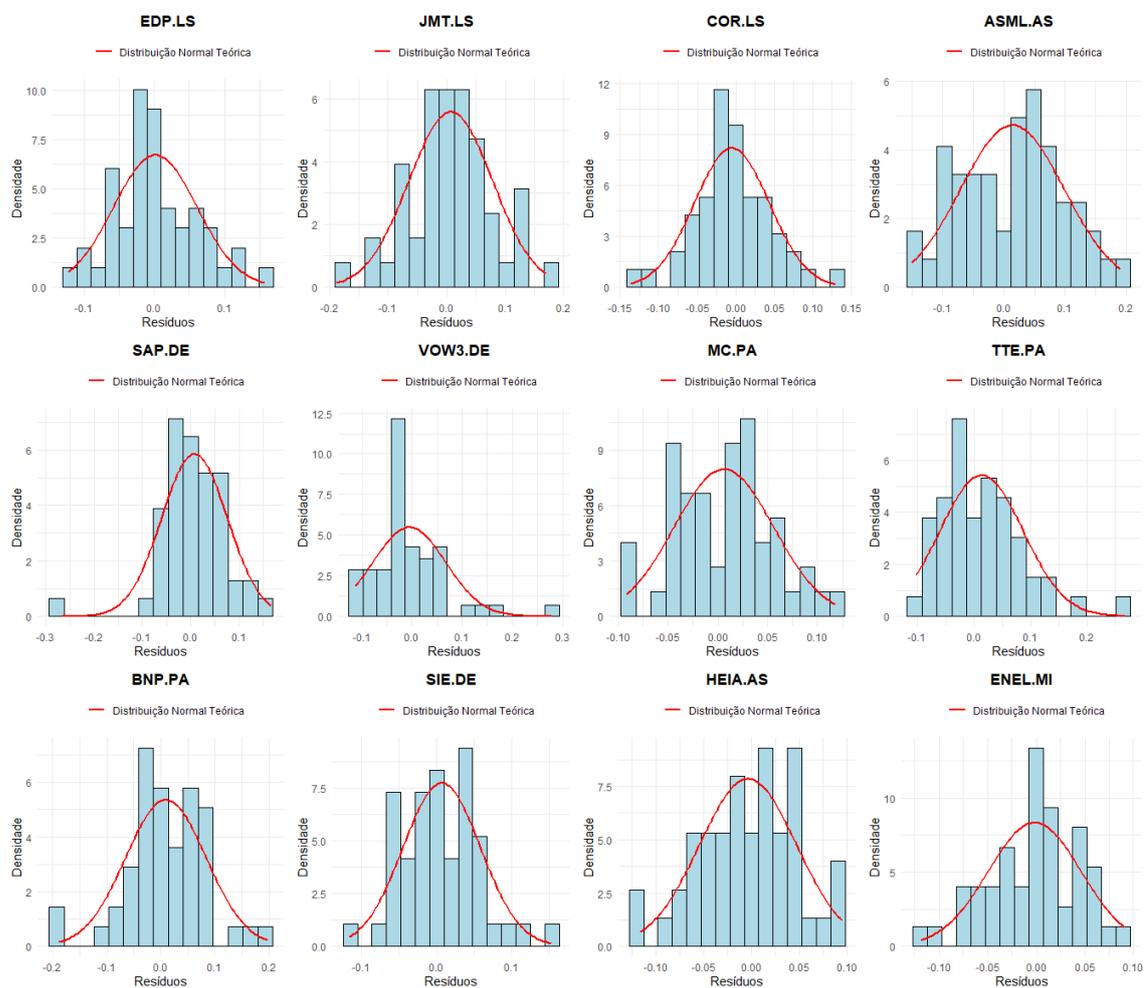
C.



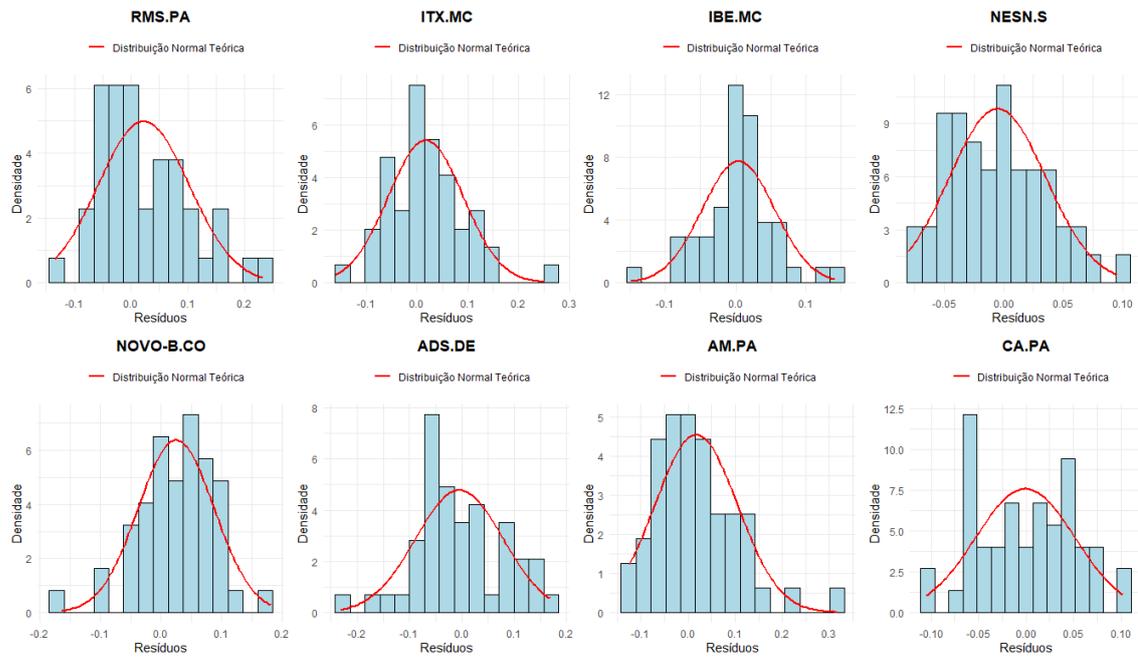
Anexo D

1. Análise de resíduos para o método de Hogan e Warren

1.1. Pressuposto da Normalidade: Histograma dos resíduos



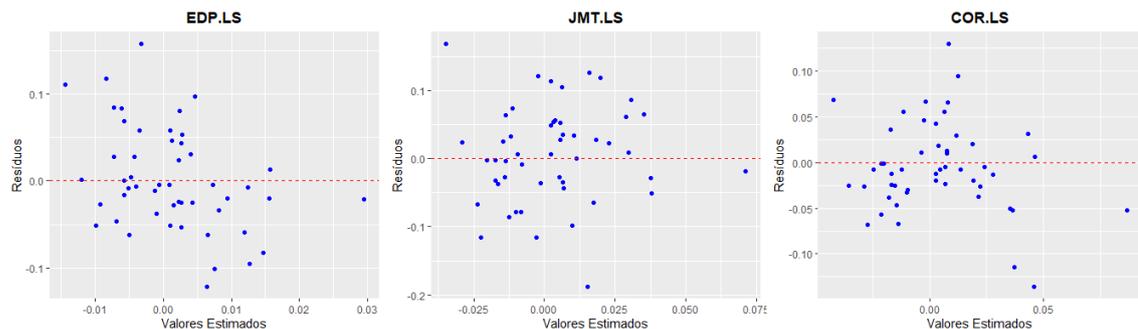
D.

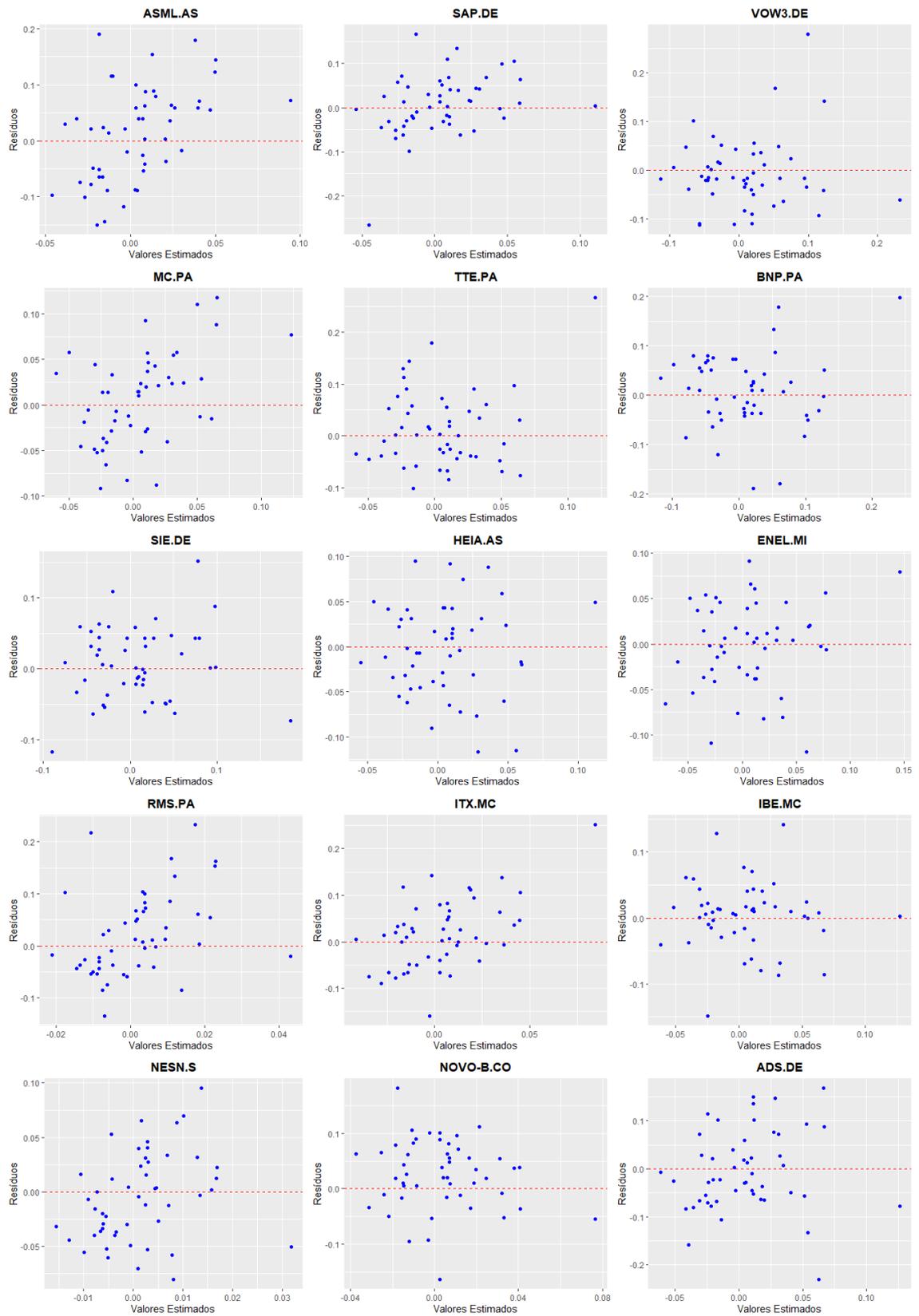


1.2. Pressuposto da Normalidade: Teste Shapiro-Wilk dos resíduos

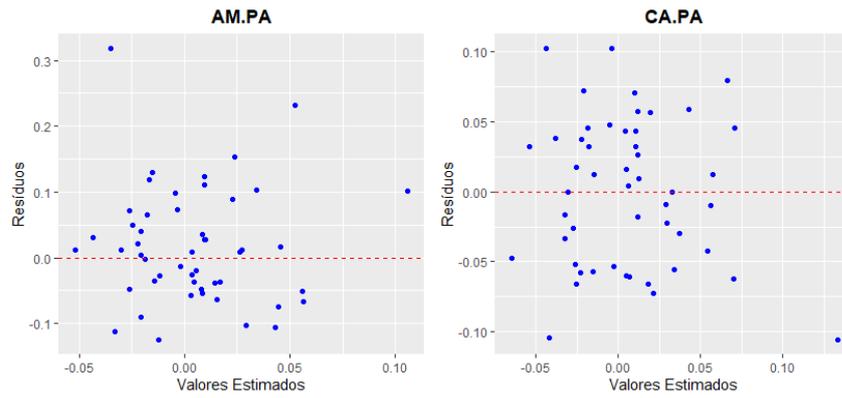
Ativo	Estatística W	p-value	Ativo	Estatística W	p-value
EDP.LS	0.9783545	0.484845503	HEIA.AS	0.9858968	0.809379058
JMT.LS	0.9922667	0.984498396	ENEL.MI	0.9800244	0.55299372
COR.LS	0.9756697	0.386922707	RMS.PA	0.9577751	0.071727989
ASML.AS	0.9808656	0.589001714	ITX.MC	0.9753606	0.376657278
SAP.DE	0.9277026	0.004528088	IBE.MC	0.9547126	0.053441221
VOW3.DE	0.8919692	0.000263691	NESN.S	0.9801519	0.558389572
MC.PA	0.9844436	0.747443991	NOVO-B.CO	0.9781121	0.475384801
TTE.PA	0.9324744	0.006863939	ADS.DE	0.9749643	0.363805503
BNP.PA	0.9678633	0.189209316	AM.PA	0.9424445	0.016851665
SIE.DE	0.9846057	0.754529734	CA.PA	0.9710931	0.256257788

1.3. Pressuposto da Homocedasticidade: Gráfico Resíduos versus Valores Estimados





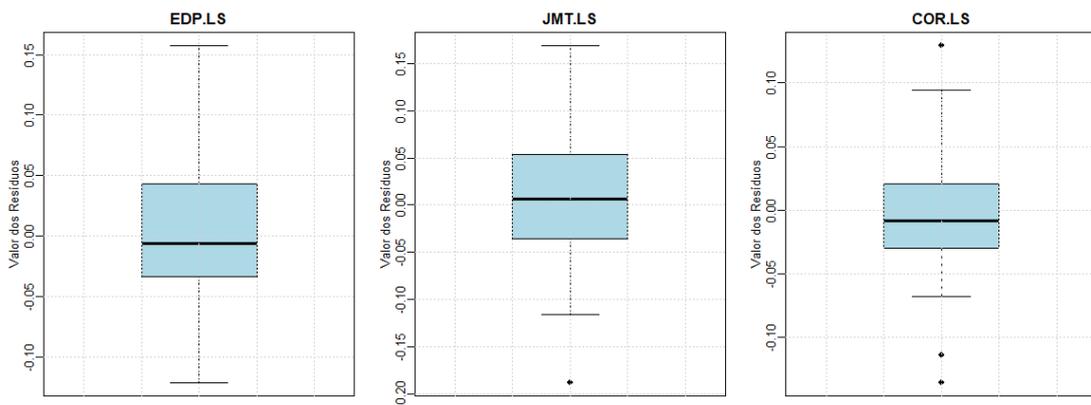
D.

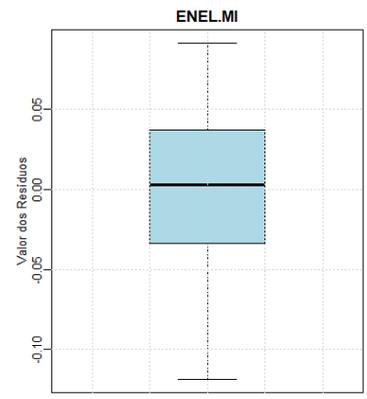
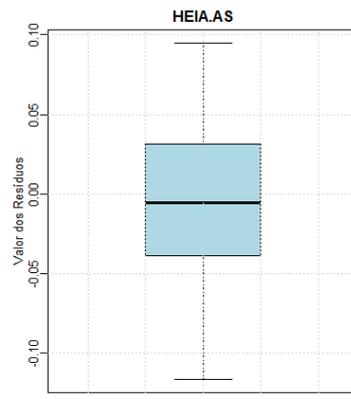
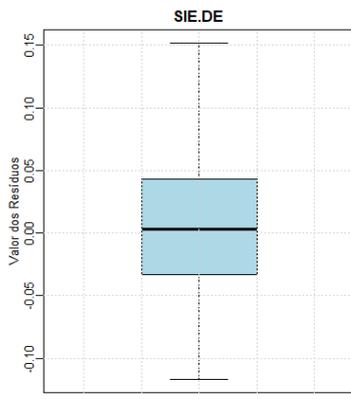
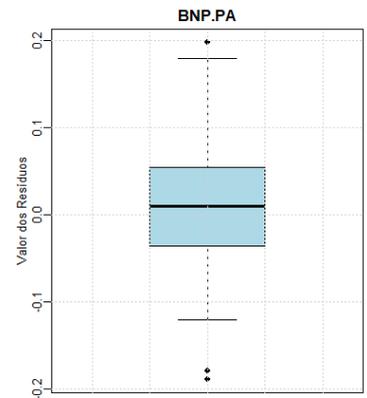
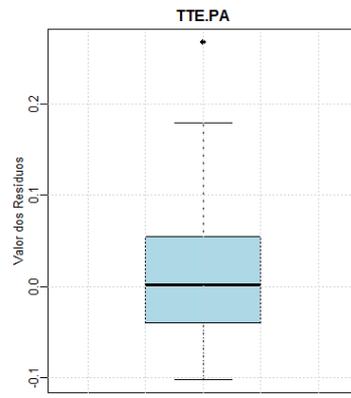
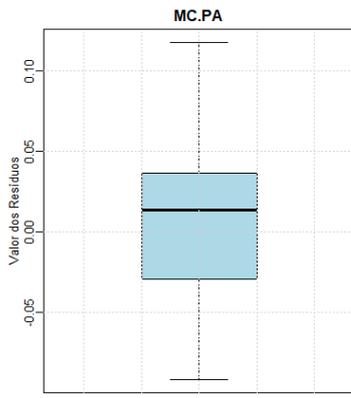
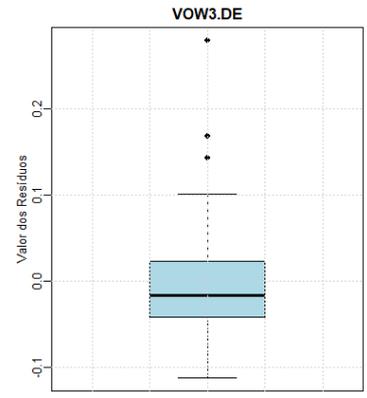
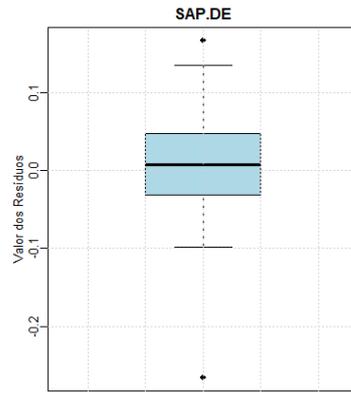
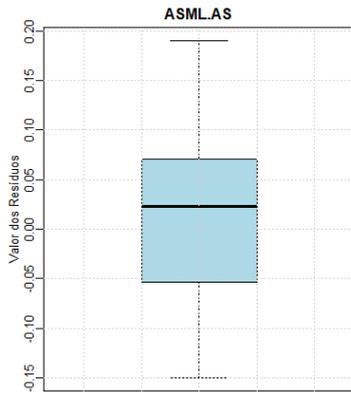


1.4. Pressuposto da Autocorrelação: Teste de Durbin-Watson

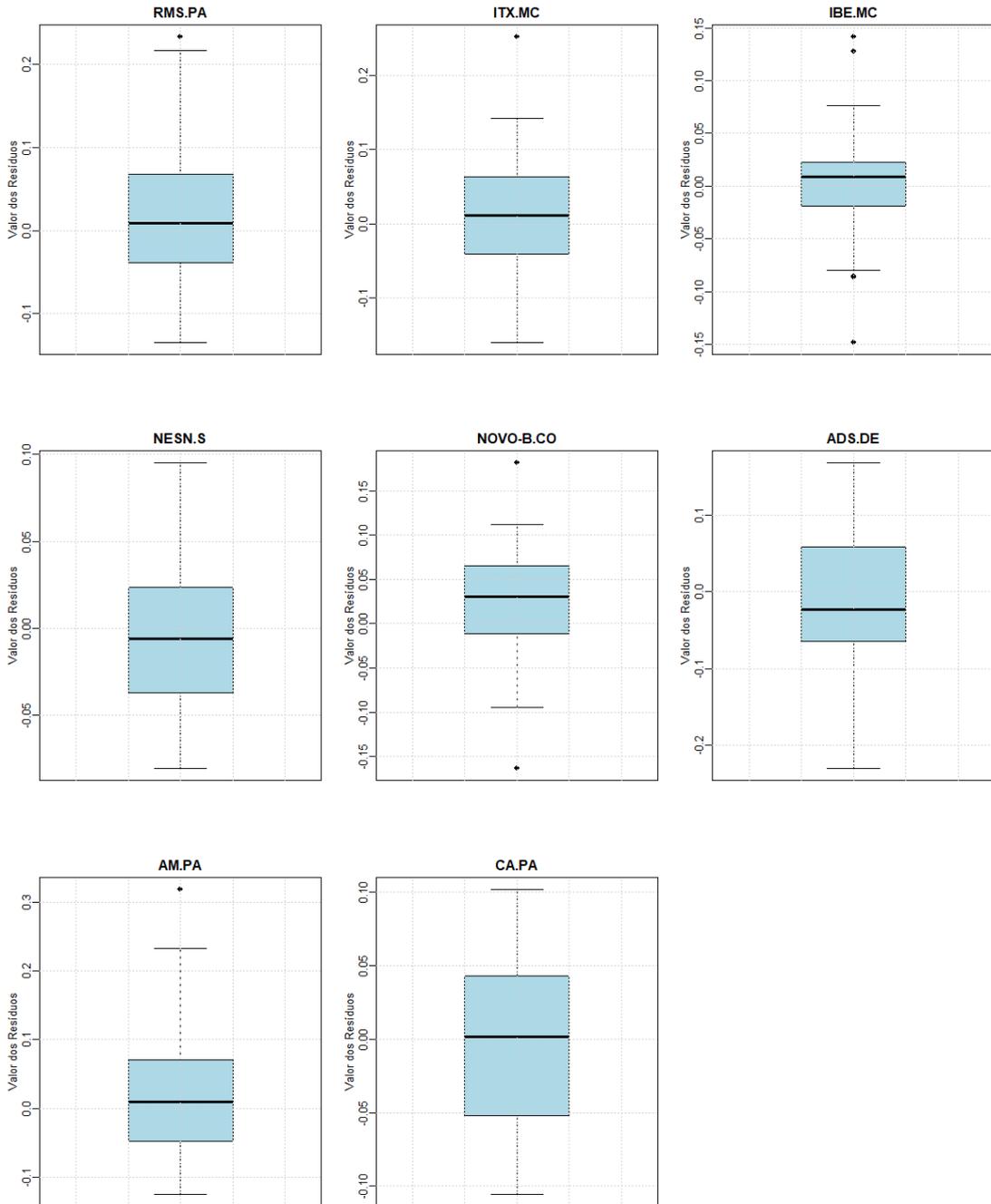
Empresa	Estatística DW	<i>p-value</i>	Empresa	Estatística DW	<i>p-value</i>
EDP.LS	1.789562	0.2344366	HEIA.AS	2.275272	0.8431333
JMT.LS	2.230386	0.8012819	ENEL.MI	2.08277	0.6253782
COR.LS	2.014786	0.5311245	RMS.PA	2.155918	0.7190528
ASML.AS	2.177159	0.7440298	ITX.MC	2.182534	0.7501661
SAP.DE	2.014972	0.5313863	IBE.MC	2.438466	0.9452901
VOW3.DE	2.182457	0.7500789	NESN.S	2.328205	0.884637
MC.PA	1.76711	0.2104416	NOVO-B.CO	1.941725	0.4279988
TTE.PA	1.972175	0.4707996	ADS.DE	1.946644	0.4348711
BNP.PA	2.368811	0.9108335	AM.PA	2.159642	0.723513
SIE.DE	2.519934	0.9714702	CA.PA	1.825907	0.276191

1.5. *Boxplot* dos Resíduos



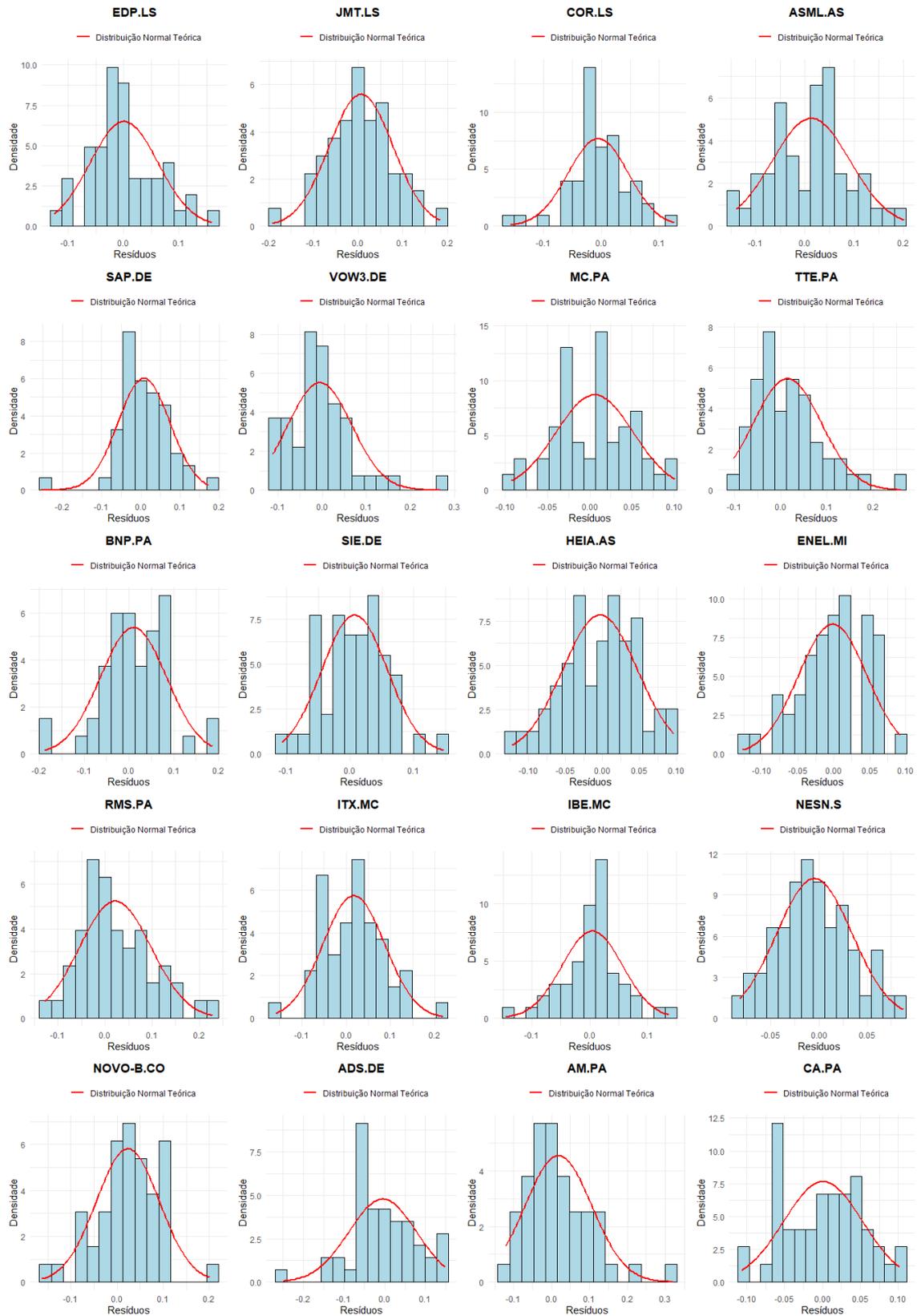


D.



2. Análise de resíduos para o método de Harlow e Rao

2.1. Pressuposto da Normalidade: Histograma dos resíduos

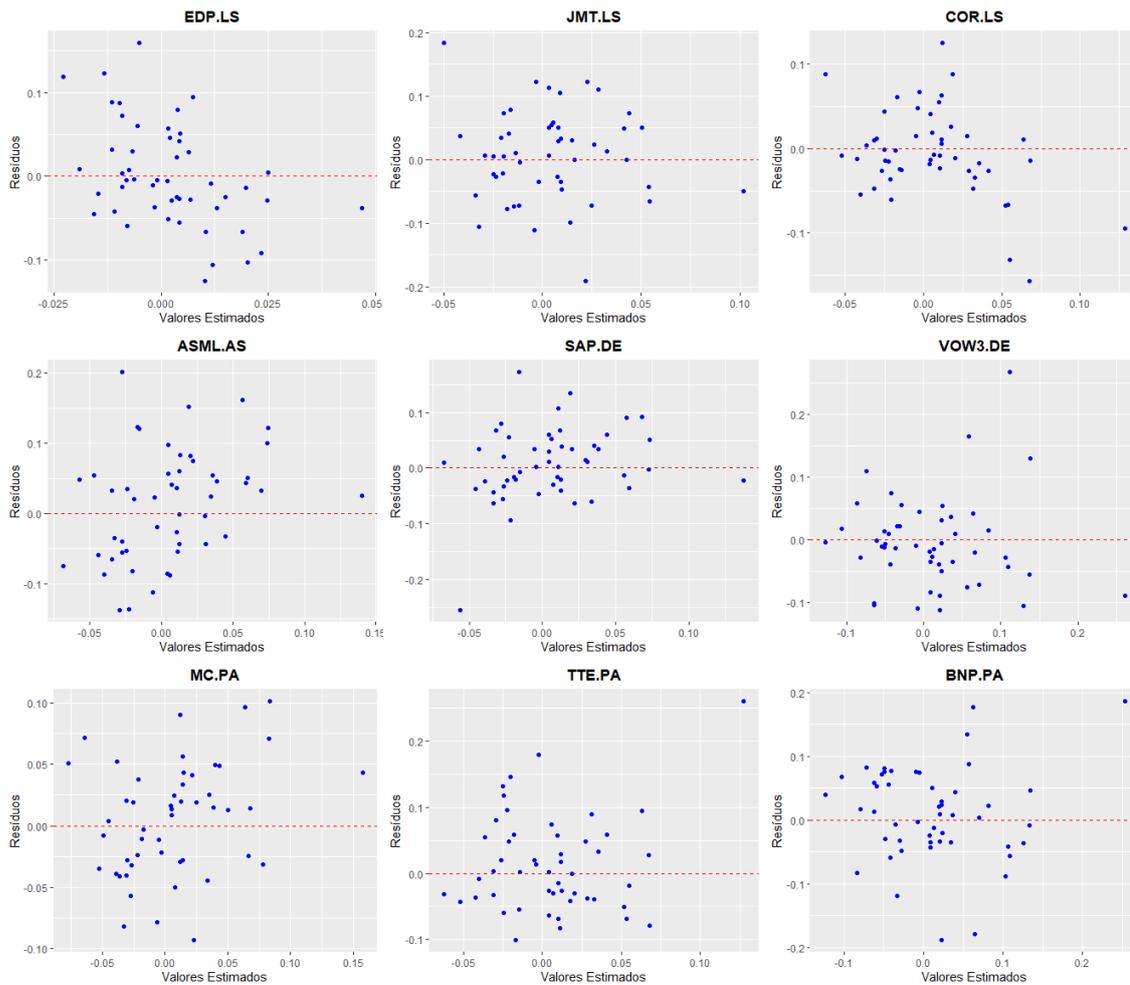


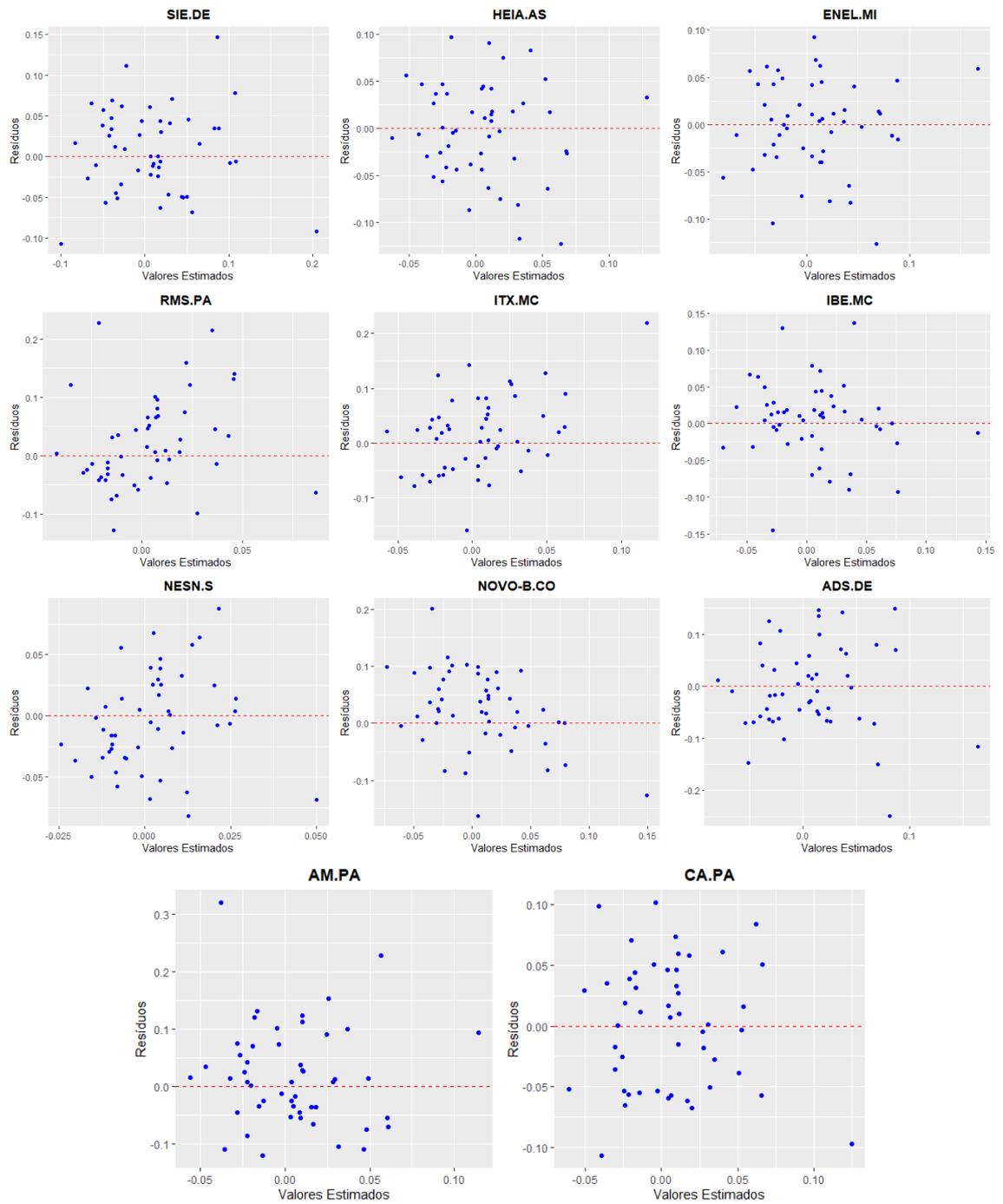
D.

2.2. Pressuposto da Normalidade: Teste Shapiro-Wilk dos resíduos

Ativo	Estatística W	p-value	Ativo	Estatística W	p-value
EDP.LS	0.9788149	0.503135501	HEIA.AS	0.987142	0.858307065
JMT.LS	0.9910376	0.967296305	ENEL.MI	0.9763049	0.408685089
COR.LS	0.9660531	0.159217757	RMS.PA	0.9624641	0.112755091
ASML.AS	0.9819198	0.63526607	ITX.MC	0.9818156	0.630654478
SAP.DE	0.929582	0.005328432	IBE.MC	0.9638403	0.128744603
VOW3.DE	0.9137527	0.001412401	NESN.S	0.9885492	0.906570849
MC.PA	0.9841993	0.736709371	NOVO-B.CO	0.9734814	0.318813711
TTE.PA	0.9362687	0.009616784	ADS.DE	0.9712585	0.260213937
BNP.PA	0.9703576	0.239315335	AM.PA	0.942855	0.017500792
SIE.DE	0.9884499	0.903458507	CA.PA	0.97087	0.25100775

2.3. Pressuposto da Homocedasticidade: Gráfico Resíduos versus Valores Estimados



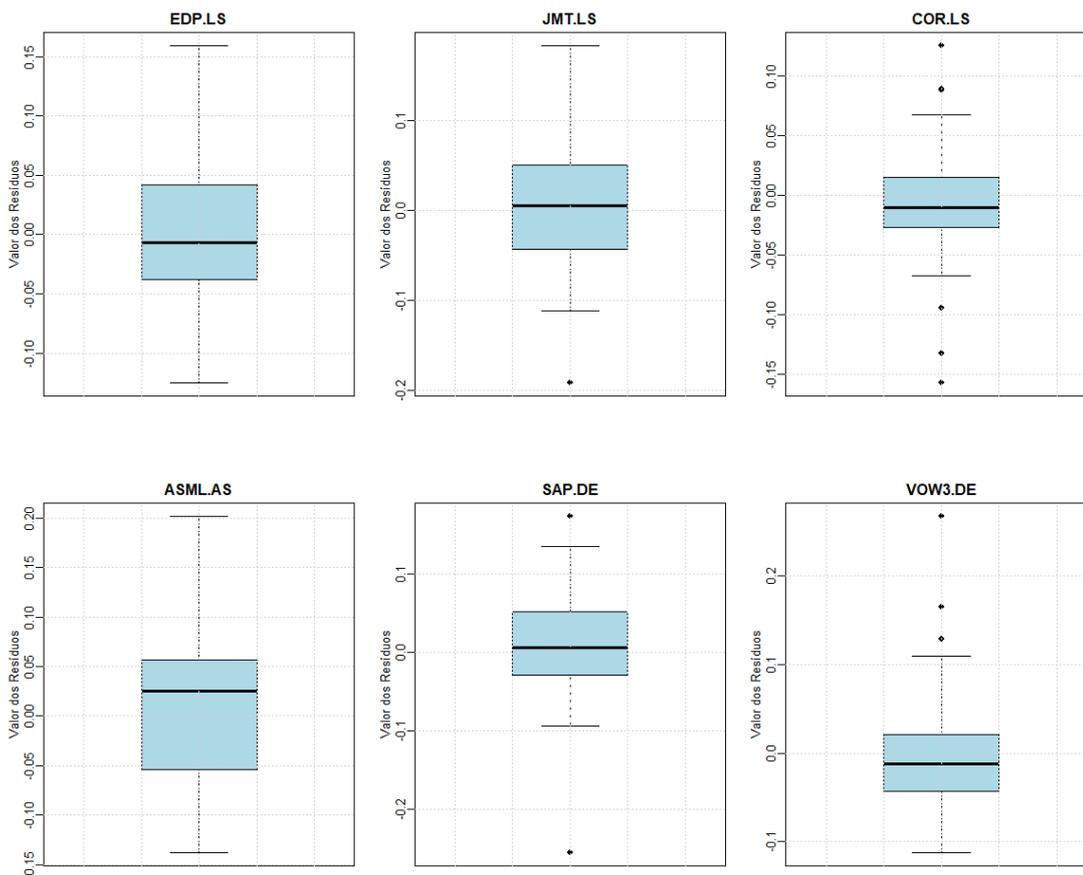


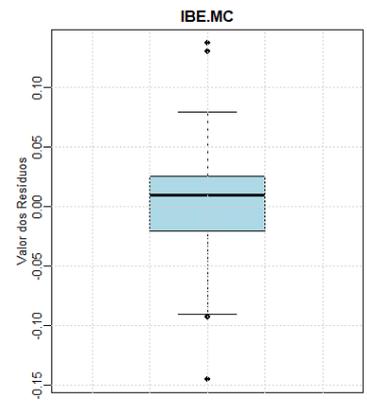
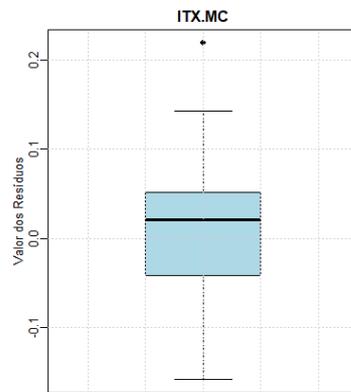
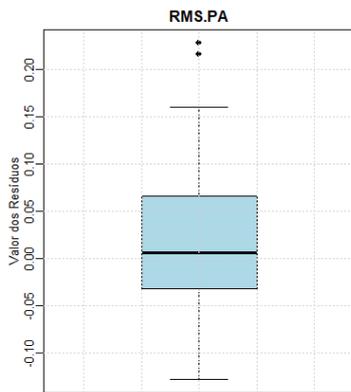
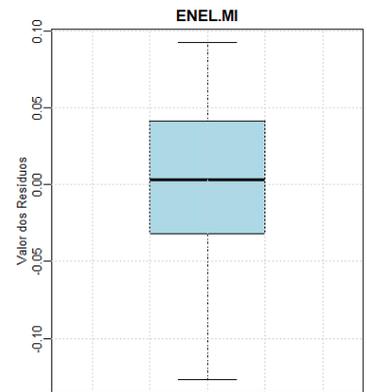
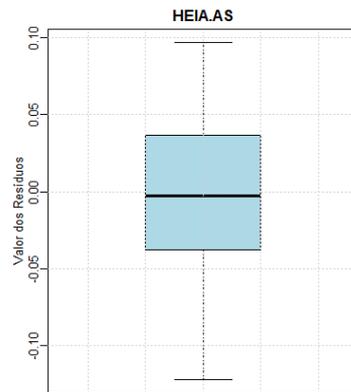
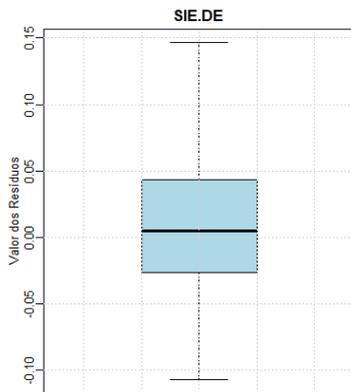
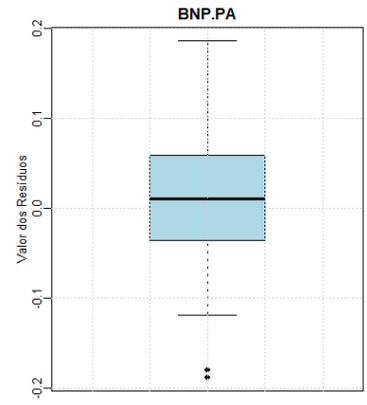
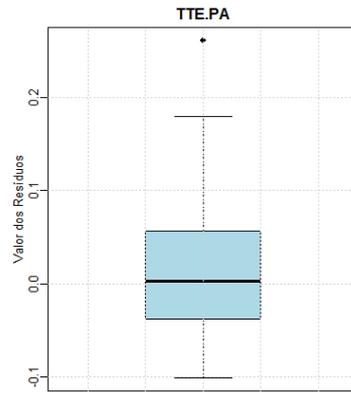
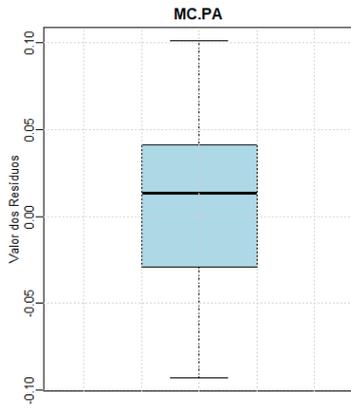
D.

2.4. Pressuposto da Autocorrelação: Teste de Durbin-Watson

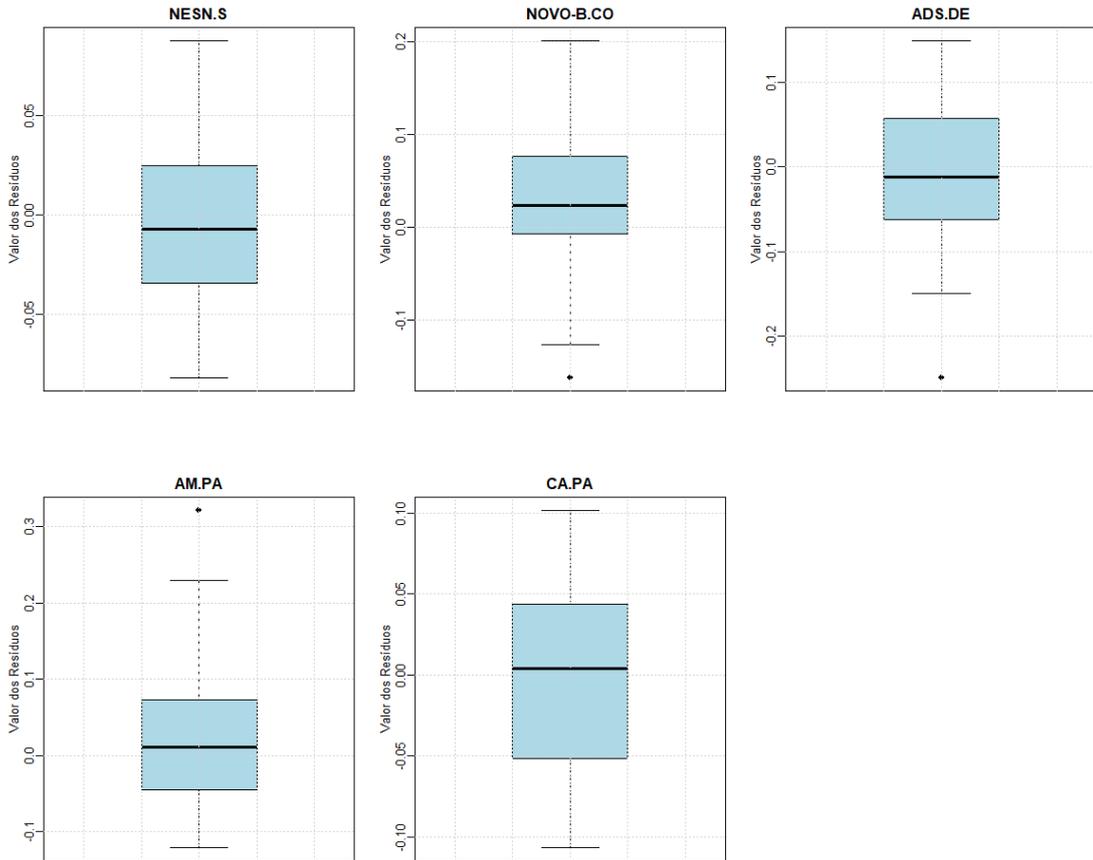
Empresa	Estatística DW	p-value	Empresa	Estatística DW	p-value
EDP.LS	1.789562	0.2344366	HEIA.AS	2.295591	0.8600694
JMT.LS	2.247451	0.8179068	ENEL.MI	2.049288	0.5795129
COR.LS	2.022884	0.5425498	RMS.PA	2.166272	0.7313702
ASML.AS	2.184582	0.7524838	ITX.MC	2.162604	0.7270364
SAP.DE	1.984988	0.488934	IBE.MC	2.426726	0.9403414
VOW3.DE	2.189022	0.7574705	NESN.S	2.363084	0.9074254
MC.PA	1.811266	0.258956	NOVO-B.CO	1.946505	0.4346765
TTE.PA	1.984342	0.4880183	ADS.DE	1.929541	0.4110694
BNP.PA	2.37412	0.9139112	AM.PA	2.16828	0.7337277
SIE.DE	2.511168	0.9692668	CA.PA	1.842116	0.2958837

2.5. *Boxplots* dos Resíduos



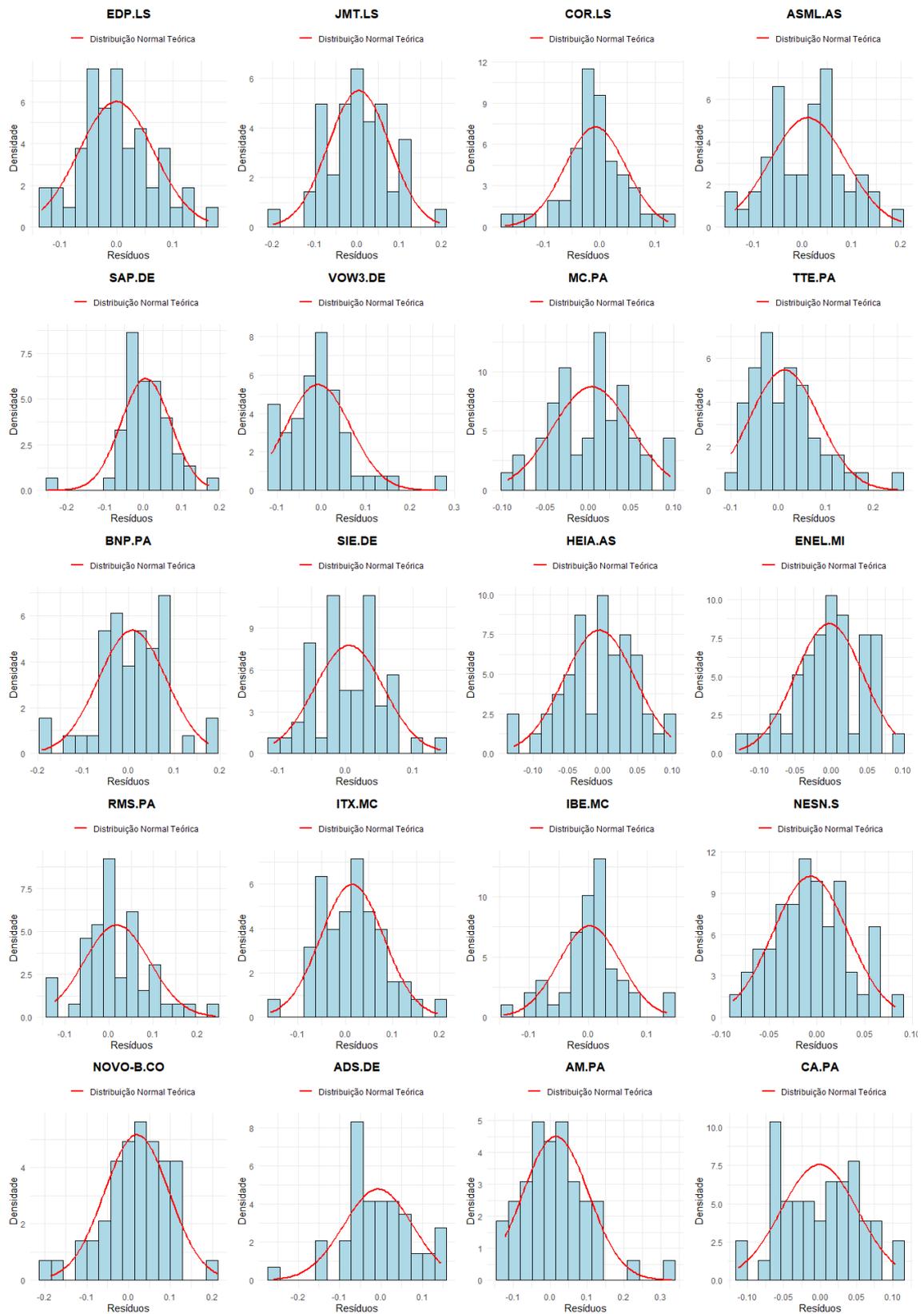


D.



3. Análise de resíduos para o método de Estrada

3.1. Pressuposto da Normalidade: Histograma dos resíduos

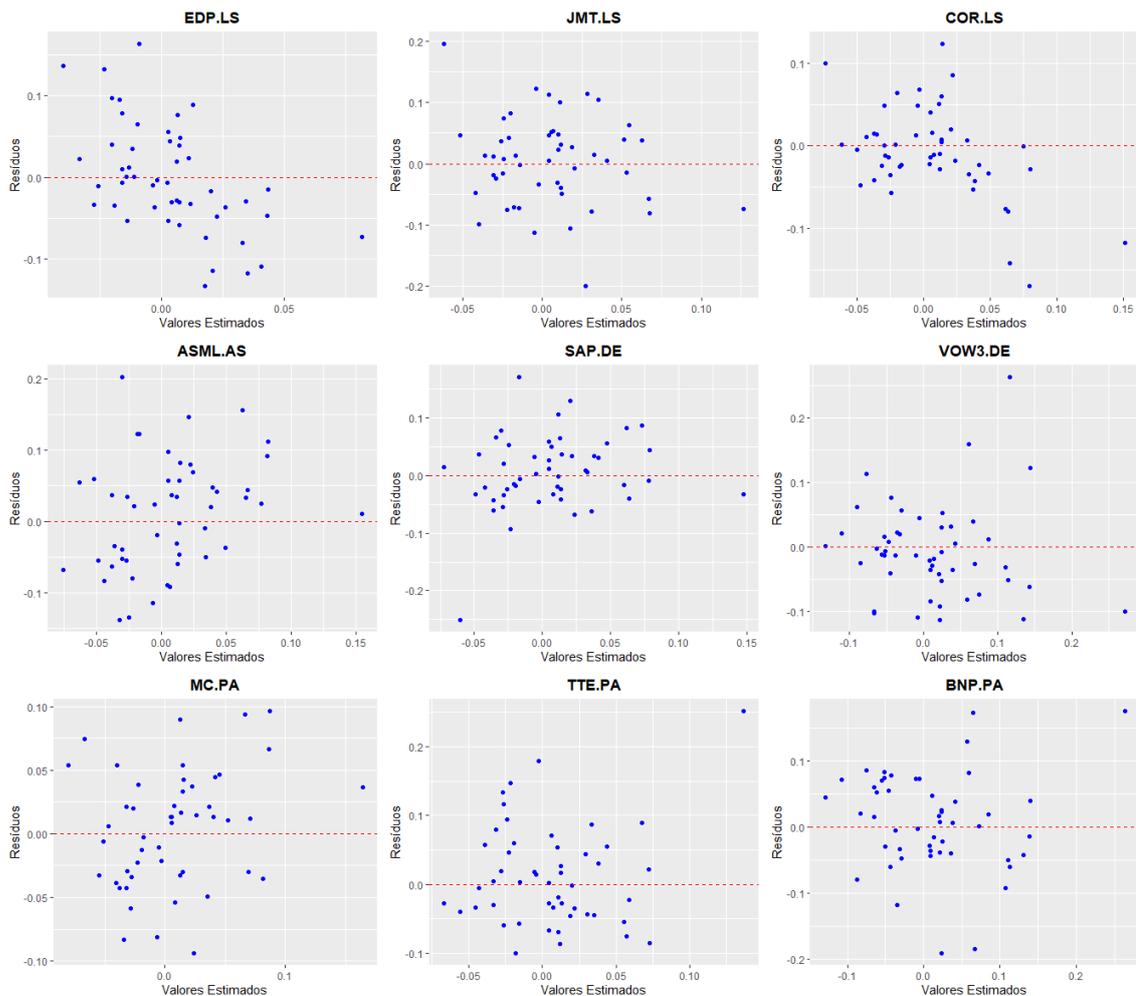


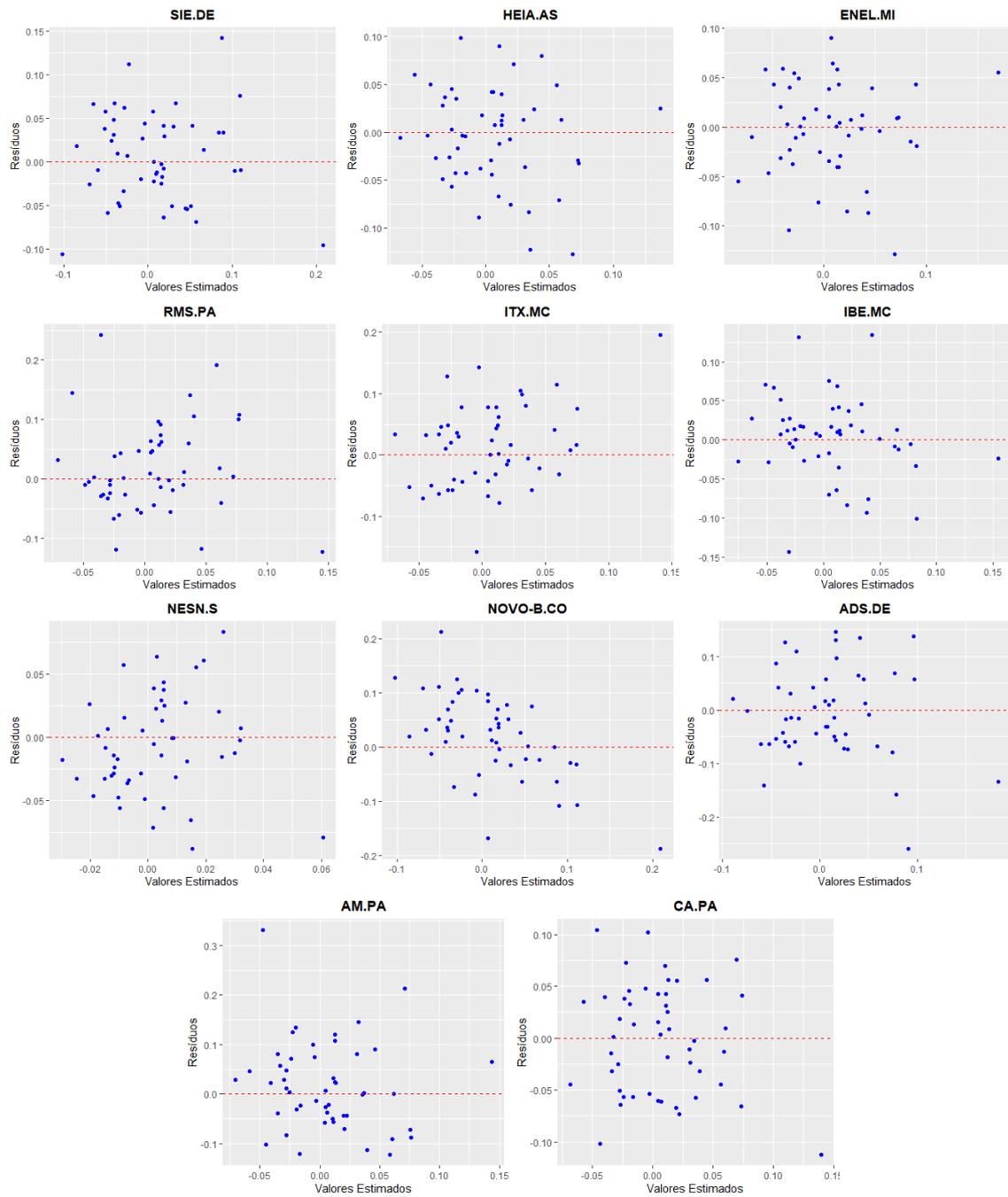
D.

3.2. Pressuposto da Normalidade: Teste Shapiro-Wilk dos resíduos

Ativo	Estatística W	p-value	Ativo	Estatística W	p-value
EDP.LS	0.980961	0.593145822	HEIA.AS	0.9876656	0.87726127
JMT.LS	0.9885333	0.906076942	ENEL.MI	0.9741315	0.337942552
COR.LS	0.9603432	0.09188667	RMS.PA	0.963907	0.129573014
ASML.AS	0.983656	0.712651024	ITX.MC	0.9844347	0.747052881
SAP.DE	0.9311516	0.006110792	IBE.MC	0.9620242	0.10807015
VOW3.DE	0.9202933	0.00241622	NESN.S	0.9905395	0.957926675
MC.PA	0.9828086	0.674847584	NOVO-B.CO	0.9787244	0.499506286
TTE.PA	0.9403959	0.013967743	ADS.DE	0.9705398	0.243415868
BNP.PA	0.9699311	0.229962111	AM.PA	0.9456617	0.022699697
SIE.DE	0.9864729	0.832618934	CA.PA	0.9742063	0.340201127

3.3. Pressuposto da Homocedasticidade: Gráfico Resíduos versus Valores Estimados



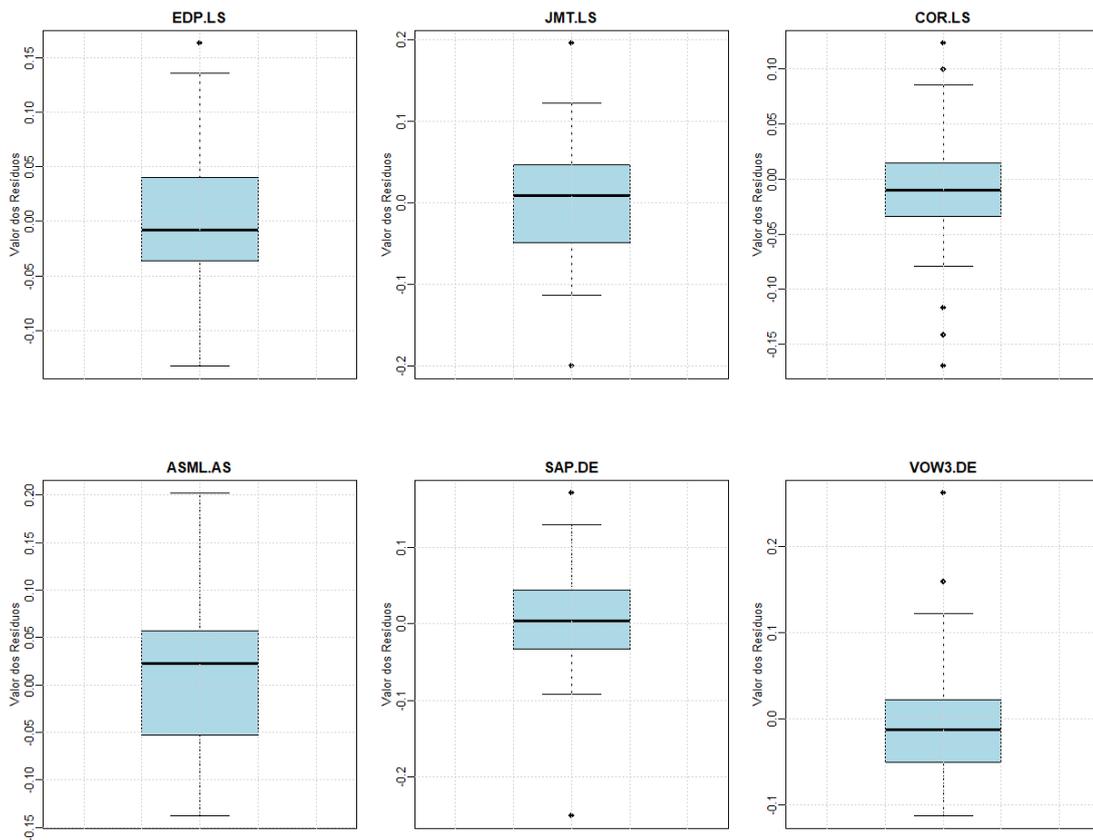


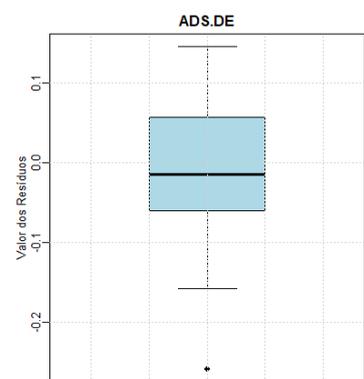
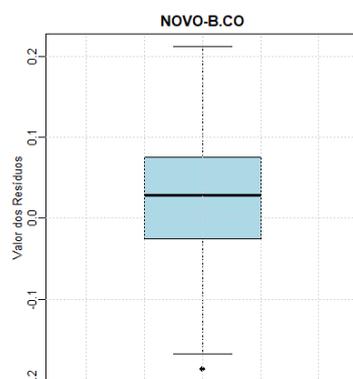
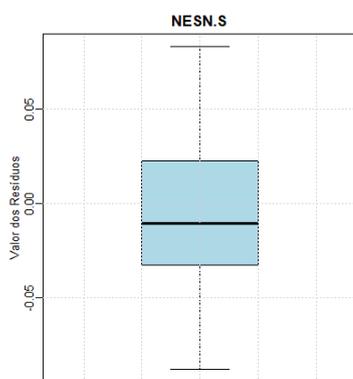
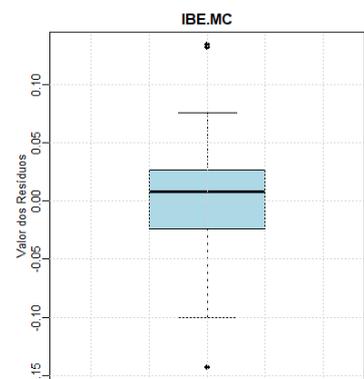
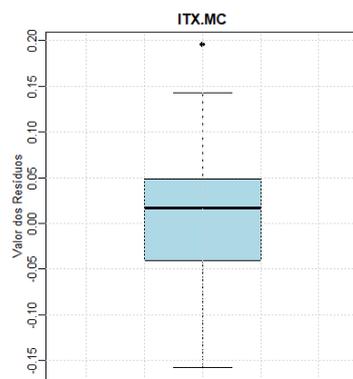
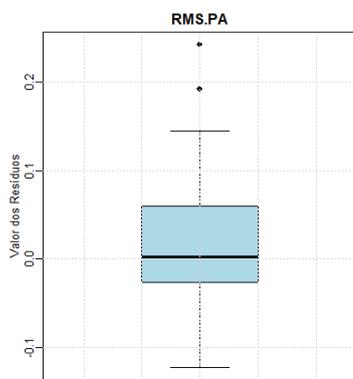
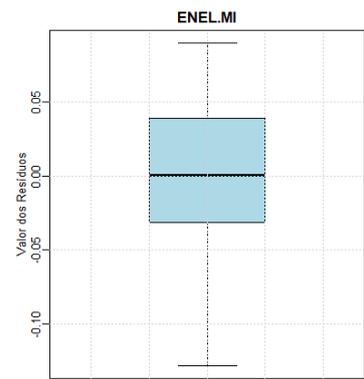
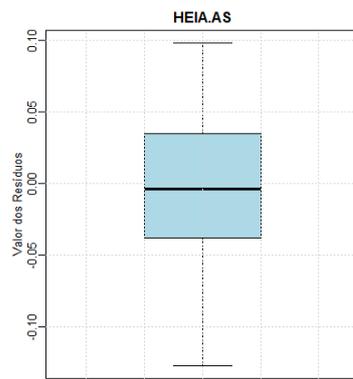
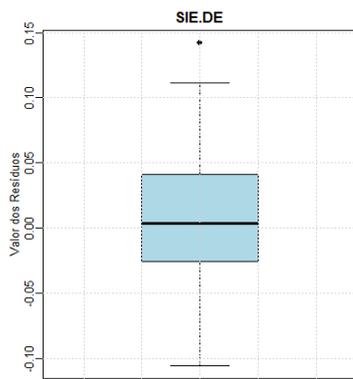
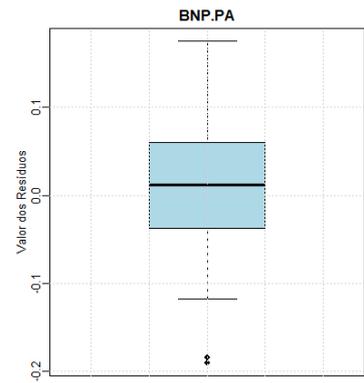
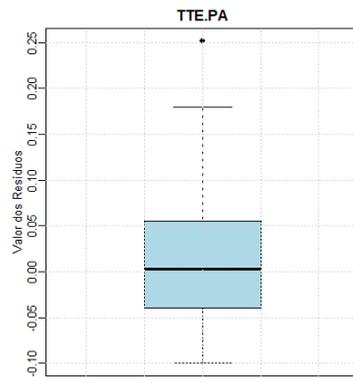
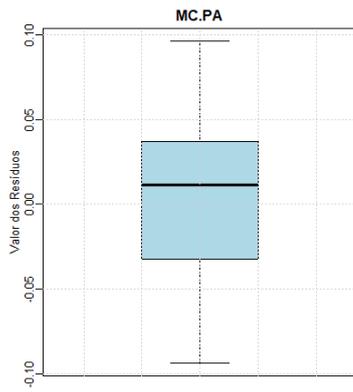
D.

3.4. Pressuposto da Autocorrelação - Teste de Durbin-Watson

Empresa	Estatística DW	<i>p-value</i>	Empresa	Estatística DW	<i>p-value</i>
EDP.LS	1.789562	0.2344366	HEIA.AS	2.275272	0.8431333
JMT.LS	2.230386	0.8012819	ENEL.MI	2.08277	0.6253782
COR.LS	2.014786	0.5311245	RMS.PA	2.155918	0.7190528
ASML.AS	2.177159	0.7440298	ITX.MC	2.182534	0.7501661
SAP.DE	2.014972	0.5313863	IBE.MC	2.438466	0.9452901
VOW3.DE	2.182457	0.7500789	NESN.S	2.328205	0.884637
MC.PA	1.76711	0.2104416	NOVO-B.CO	1.941725	0.4279988
TTE.PA	1.972175	0.4707996	ADS.DE	1.946644	0.4348711
BNP.PA	2.368811	0.9108335	AM.PA	2.159642	0.723513
SIE.DE	2.519934	0.9714702	CA.PA	1.825907	0.276191

3.5. *Boxplots* dos Resíduos





D.

