ISSN 0871-2573

Duração de Macaulay: fórmulas simplificadas de cálculo

por
João Silva Ferreira

Working Paper nº 202
Julho 1993

João da Silva Ferreira (*)

Duração de Macaulay: fórmulas simplificadas de cálculo

1.1. Introdução

O conceito de duração foi formulado e utilizado por Macaulay [1] com um objectivo completamente diferente daquele em que o conceito é usado, actualmente, pelos gestores de portfólios de obrigações e, também, na teoria financeira.

Na verdade, como pormenorizadamente explica Macaulay na publicação acima referida, o objectivo que o autor tinha em vista era desenvolver uma medida padrão, capaz de exprimir de uma forma adequada, o prazo médio de diferimento do pagamento de um empréstimo. Para esta finalidade, o prazo de maturidade, entendido como a data do último pagamento de um empréstimo, não apresenta, evidentemente, características apropriadas, visto o último pagamento poder representar tanto a totalidade, como uma parcela ínfima dos pagamentos totais relativos ao reembolso de um empréstimo. A este propósito, transcreve-se textualmente uma frase utilizada por Macaulay: "duração é a realidade de que a maturidade é apenas um factor".

Não deixa de ser interessante referir ainda que o conceito de duração, finalmente adoptado por Macaulay, não foi obtido dedutivamente a partir de qualquer modelo teórico base, assentando antes numa justificação de caracter pragmático e em considerações de natureza intuitiva.

Presentemente, a duração é predominantemente utilizada como medida de risco das obrigações de cupão fixo relativamente às variações das taxas de juro ("basis risk"). Foi Hicks [2] quem usou pela primeira vez o conceito de duração nesta perspectiva, embora designado-o de outro modo. A expressão utilizada por Hicks para designar a duração é a de "elasticidade do valor do capital em relação ao factor de desconto", o que não é de surpreender, visto este conceito ter sido formulado por este autor com desconhecimento dos trabalhos de investigação efectuados por Macaulay.

Na gestão de portfólios de obrigações de cupão fixo, o conceito de duração, também, pode ser usado como um prazo. Nesta acepção, porém, o conteúdo que lhe é atribuído é muito diferente do que foi imaginado por Macaulay. De facto, a duração não é vista como um prazo médio de diferimento dos pagamentos de uma obrigação (empréstimo), mas como o prazo ao fim do qual os efeitos opostos sobre o preço da obrigação e sobre o valor acumulado dos cupões recebidos, provocados por uma única alteração paralela na estrutura intertemporal horizontal das taxas de juro, imediatamente após a compra da obrigação, se compensam.

Neste sentido, uma obrigação de cupão diferente de zero comporta-se como uma obrigação de cupão zero com um prazo de maturidade igual à duração daquela obrigação, isto é, o valor acumulado para um período igual à duração da obrigação de cupão fixo diferente de zero não é afectado pela alteração das taxas de juro. A duração de uma obrigação ou de um portfólio indica, assim, o prazo de investimento que permite imunizar o valor acumulado, relativamente àquele tipo de variações na estrutura intertemporal das taxas de juro.

Deve-se a Samuelson [3] a primeira utilização da duração como técnica de imunização. Contudo, a consagração do termo imunização fica a dever-se a Redington [4], que estabeleceu as condições necessárias e suficientes para que um portfólio de obrigações de cupão fixo diferente de zero permitisse assegurar o financiamento de pagamentos futuros obrigatórios, com valor actual igual ao do portfólio de obrigações, quando se verificasse uma alteração paralela da estrutura intertemporal horizontal das taxas de juro. Porém, o uso da duração como técnica para imunizar o valor acumulado de um portfólio de obrigações, relativamente às variações taxas de juro, nos termos do parágrafo anterior, é mais recente e resultou do trabalho conjunto de Fisher e Weil [5].

O conceito de duração, tal como foi formulado por Macaulay, sofre de uma limitação teórica fundamental, pois assume uma estrutura intertemporal horizontal das taxas de juro e variações paralelas da mesma, o que reduz de uma maneira drástica o seu interesse como medida de risco das taxas de juro das obrigações de cupão fixo ("basis risk"), como é demonstrado por Cox, Ingersol e Ross [6].

Como técnica de imunização, porém, os testes realizados por vários investigadores, tais como, Schawrtz e Brennan [7] e Schaffer e Nelson [8], mostram que a duração de Macaulay produz resultados tão satisfatórios como procedimentos teòricamente mais sofisticados.

O principal objectivo deste trabalho é o de apresentar uma nova fórmula simplificada para o cálculo da duração de Macaulay, expressões (8) e (9), bem como mostrar o seu interesse para uma compreensão intuitiva de várias propriedades da duração de Macaulay. Simultâneamente, aproveita-se para mostrar como outras formúlas simplificadas podem ser derivadas, quer a partir do conceito de duração como prazo médio, na acepção de Macaulay, quer como elasticidade, na acepção de Hicks.

Considerando, ainda, que existe uma reduzida familiaridade de muitos profissionais financeiros portugueses com o conceito de duração e as suas propriedades, enunciam-se, em anexo, as propriedades da duração sob a forma de teoremas, visto poderem ser demonstrados matematicamente [9].

1.2 - Cálculo da duração de Macaulay

1.2.1 - Fórmulas dedutíveis a partir da duração como prazo médio

Embora os argumentos usados não implicassem que a estrutura intertemporal das taxas de juro era horizontal, foi este tipo de estrutura de taxas de juro que Macaulay veio a adoptar ao definir algébricamente o conceito de duração, tomando como constante a taxa efectiva ("yield to maturity") de juro, para todas as datas de reembolso (pagamento de juros) parcial dos encargos do empréstimo.

Representar-se-à por

$R =$ a 1+i, sendo i a taxa efectiva ("yield to maturity")do empréstimo, que se considera igual à taxa de juro "spot" correspondente a cada um dos pagamentos parcelares do empréstimo;

$C =$ ao pagamento parcial periódico do empréstimo,isto é, no caso das obrigações o cupão, em que a taxa de cupão das obrigações é igual a r.

$F =$ ao montante do reembolso do capital, ou seja, o valor nominal, no caso das obrigações;

$n =$ ao prazo de maturidade

$D_M =$ duração de Macaulay

$D_{par} =$ duração de Macaulay de uma obrigação ao par

$D_p =$ duração de Macaulay de uma obrigação perpétua

$D_o =$ duração de Macaulay de uma obrigação de cupão zero

$P =$ ao preço de uma obrigação ou valor actual de um empréstimo

A duração de uma obrigação de cupão fixo (empréstimo), tal como foi definida por Macaulay, é dada pela expressão

(1) $$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C.t}{R^t} + \frac{n.F}{R^n}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C}{R^t} + \frac{F}{R^n}}$$

Como o somatório do numerador é igual ao valor actual de uma renda certa, inteira, temporária e imediata, com n termos normais, variáveis em progressão aritmética de razão 1, sendo o primeiro igual a C, tem-se, como se sabe do cálculo financeiro

(2) $$(Ra)_{\overline{n}|} = \frac{R.\left[\frac{C}{i}\left(1-\frac{1}{R^n}\right)\right] - n\,\frac{C}{R^n}}{i}$$

Por outro lado, o somatório do denominador de (1) é o valor actual de uma renda certa, inteira, temporária e imediata, com n termos normais e iguais a C, cujo valor é dado por

(3) $$a_{\overline{n}|} = \frac{C}{i}\left(1-\frac{1}{R^n}\right)$$

Substituindo as expressões (2) e (3) em (1) e somando e subtraindo ao numerador $\frac{R}{i} \cdot \frac{F}{R^n}$. Através de simples rearranjos algébricos obtém-se para D_M a expressão seguinte:

$$(4) \qquad D_M = \frac{1+i}{i} - \frac{(1+i) \cdot F + n \cdot (C - F.i)}{C \cdot (R^n - 1) + F \cdot i}$$

A análise de uma expressão para a duração muito semelhante a (4) permitiu a Macaulay enunciar várias propriedades da duração, referidas em anexo sob a forma de teoremas. O segundo termo da expressão anterior pode ainda simplificar-se, dividindo o numerador e o denominador por F, donde se obtém

$$D_M = \frac{1+i}{i} - \frac{(1+i) + n \cdot (r - i)}{r \cdot (R^n - 1) + i}$$

A expressão (4) e a expressão equivalente anterior são muito mais fáceis de calcular do que (1).

A partir de (4) obtém-se, imediatamente, para obrigações ao par, isto é, para obrigações em que i = r, sendo r a taxa anual do cupão, que a duração de Macaulay é igual ao factor de actualização de uma renda certa, unitária, normal e temporária (FJAR) $_{\overline{n|}}$, multiplicado por (1+i). De facto, como para a obrigação ao par, C = F.i, a expressão (4) transforma-se em

(5) $$D_{par} = \frac{(1+i)}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{R_n}\right)$$

$$= (1+i) \cdot (FJAR)_{\overline{n|}}$$

Quando se trata de uma obrigação de taxa de cupão fixo anual r e o pagamento do cupão é efectuado em **m** subperíodos anuais, a duração, referida ao período anual, tem como equivalente de (4) a expressão seguinte:

(5) $$D_M = \frac{1}{i} + \frac{1}{m} - \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right) + n \cdot (r - i)}{r \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n.m} - 1\right] + i}$$

A utilização de (5) para o cálculo da duração apenas dá resultados correctos quando falta um número inteiro de períodos anuais para o fim do prazo de maturidade. Quando isso não se verifica, como para um período é válida a aproximação linear da duração, pois, neste caso, a duração é igual a um (teorema 1), o que implica que por cada dia que passa, após o último pagamento parcial do cupão, a duração também se reduz de um dia. Representando por p o valor do cociente do número de dias que faltam para o pagamento do próximo cupão pelo número de dias do ano, por N o número de pagamentos que falta efectuar, tem-se

(6) $$D_M = \frac{1}{i} + p - \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right) + \frac{N}{m} \cdot (r - i)}{r \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{N} - 1\right] + i}$$

A expressão (4) pode ser transformada em outras expressões equivalentes, que se revelam úteis na demonstração dos teoremas sobre a duração, assim como para simplificar o cálculo da duração de Macaulay.

Na verdade, a expressão (4) é equivalente a

$$(7) \qquad D_M = \frac{1+i}{i} - \frac{(1+i) . F - n . (F . i - F . r)}{i . \left\{ \frac{C}{i} . \left[1 - \frac{1}{R^n} \right] + \frac{F}{R^n} \right\} . R^n}$$

Como a expressão comprendida na chaveta é igual ao preço da obrigação, tem-se

$$(8) \qquad D_M = \frac{1+i}{i} - \frac{F}{P . R^n} . \left[\frac{1+i}{i} - n . \frac{i-r}{i} \right]$$

F/R^n é igual ao preço de uma obrigação de cupão zero e prazo de maturidade n, que se vai representar por Po. Por outro lado, (1+i)/i é igual (como se verá mais adiante) à duração de uma obrigação perpétua de cupão C quando a taxa de actualização é canstante e igual a i, que se representa por Dp; (i-r)/i é o valor actual de uma renda perpétua, imediata, termo constante igual à diferença entre a taxa efectiva da obrigação e a taxa de cupão, representada por $(i-r).a_\infty$; finalmente, n é igual, como se mostra mais à frente, à duração de uma obrigação de cupão zero e prazo de maturidade igual a n, que se representará por Do.

Assim, a duração de uma obrigação de prazo de maturidade n e taxa de cupão r, quando a estrutura intertemporal das taxas de juro é constante e igual a i, será dada por

$$(9) \qquad D_M = D_p - \frac{P_o}{P} \cdot [\, D_p - D_o \cdot (i-r).a_\infty \,]$$

As expressões equivalentes (8) e (9) têm a vantagem de permitir calcular fàcil e ràpidamente a duração de Macaulay, conhecido o preço e a taxa de juro efectiva ("yield to maturity") da obrigação, proporcionando ainda uma visão intuituiva de vários dos teoremas relativos à duração de Macaulay, referidos em anexo.

A expressão (9) ajuda a comprender melhor o significado do resultado do cálculo da duração de uma obrigação temporária e de cupão diferente de zero , na medida em que mostra que a duração de uma obrigação qualquer de cupão diferente de zero, se obtem a partir da duração de uma obrigação perpétua, que é ajustada de uma quantidade que depende da duração da obrigação perpétua e da duração de uma obrigação de cupão zero com maturidade igual à da obrigação de cupão diferente de zero.

Por sua vez, a expressão (8) permite obter uma compreensão intuitiva da validade dos teoremas 3, 4 e 5, que não é possível conseguir de outro modo.

De facto, o teorema 3, relativo à duração de uma obrigação perpétua, torna-se evidente tendo em atenção que o segundo termo do segundo membro de (8) tende para zero quando o prazo de maturidade tende para infinito. Isso implica que a duração de uma obrigação perpétua é igual a (1+i)/i.

De igual modo, o teorema 4 torna-se evidente, atendendo a que para uma obrigação ao par ou acima do par $i \leq r$, o segundo termo do segundo membro de (8) assume sempre, nesse caso, um valor positivo. Na verdade, como esse termo decresce monotónicamente e tende para zero, quando n tende para infinito, a duração de uma obrigação ao par ou acima do par cresce monotónicamente e tende para $(1+i)/i$ quando n tende para infinito.

Igualmente, para o teorema 5, tomando em atenção que para obrigações abaixo do par ($i > r$) e para prazos de maturidade relativamente pequenos, isto é, para $n < (1+i)/(i-r)$, o segundo termo de (8) é positivo e decrescente quando o prazo de maturidade cresce, sendo igual a zero quando $n=(1+i)/(i-r)$ e passando a assumir um valor negativo para $n > (1+i)/(i-r)$, o que vai implicar que a duração de uma obrigação abaixo do par seja crescente com o prazo de maturidade até atingir o valor $(i+1)/i$, o que se verifica quando $n=(1+i)/(i-r)$; a duração continua a crescer para maturidades superiores a este valor de n, pois o segundo termo do segundo membro torna-se, então, negativo. Contudo, à medida que n continua a crescer, o segundo termo do segundo membro da expressão (8) atinge um mínimo (negativo), pois a influência do factor $1/R^n$ torna-se dominante, convergindo, em seguida, para zero quando n tende para infinito. Por conseguinte, a duração de uma obrigação abaixo do par tende para $(i+1)/i$, quando a maturidade tende para infinito, mas por valores que lhe são superiores.

Com base nas considerações anteriores, pode concluir-se que sendo a duração uma função contínua em n, a duração de uma obrigação abaixo do par tem um máximo que é maior do que $(i+1)/i$, para $(i+1)/(i-r) < n < \infty$, tendendo para $(i+1)/i$ quando n tende para infinito, por valores que lhe são superiores.

A partir da expressão (4) podem obter-se outras expressões equivalentes que têm sido utilizadas na demonstração de teoremas sobre a duração de Macaulay ou para obter fórmulas simplicadas para o seu cálculo. Tem-se, assim:

$$(10) \qquad D_M = \frac{(1+i) \cdot \frac{C}{i^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{R^n}\right] + n \cdot \frac{F - \frac{C}{i}}{R^n}}{\frac{C}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^n}\right) + \frac{F}{R^n}}$$

Fazendo $a = \frac{1 - \frac{1}{R^n}}{i}$ e $v^n = 1/R^n$ obtém-se

$$(11) \qquad D_M = \frac{(1+i) \cdot a \cdot r + n \cdot (i - r) \cdot v^n}{r + (i - r) \cdot v^n}$$

Dividindo os dois membros da expressão anterior por n e fazendo $\alpha = [(1+i).a/n]$ obtém-se

$$(12) \qquad \frac{D_M}{n} = \frac{\alpha \cdot r + (i - r) \cdot v^n}{r + (i - r) \cdot v^n}$$

As expressões (11) e (12) foram utilizadas por G. Hawawini [9] na demonstração de alguns teoremas sobre a duração de Macaulay. Especìficamente, a expressão (12) é usada para demontrar os teoremas 1 e 2 , visto que o seu segundo membro é sempre menor ou igual a um, sendo igual a um apenas quando r=0 ou n=1.

A partir da expressão (10), tomando em consideração que o seu denominador é igual ao preço da obrigação P, tem-se

$$(13) \qquad D_M = (1+i) \cdot \frac{C}{i} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{R^n}\right)}{P \cdot i} + n \cdot \frac{(F \cdot i - C)}{P \cdot i \cdot R^n}$$

Ora, utilizando os resultados obtidos em (5) tem-se

$$(14) \qquad D_M = \frac{C \cdot D_{par}}{P \cdot i} + n \cdot \frac{F - \frac{C}{i}}{P \cdot R^n}$$

Por outro lado, o preço de uma obrigação de cupão fixo pode obter-se a partir da diferença do valor actual de duas rendas perpétuas, uma imediata e outra diferida, de termo constante e igual a C, isto é

$$(15) \qquad P = \frac{C}{i} + \frac{F}{R^n} - \frac{C}{i \cdot R^n}$$

donde se obtém

$$(16) \qquad P - \frac{C}{i} = \frac{F - \frac{C}{i}}{R^n}$$

Por conseguinte, este resultado permite a transformação de (14) em

(17) $$D_M = \frac{C \cdot D_{par}}{P \cdot i} + n \cdot \left(1 - \frac{C}{P \cdot i}\right)$$

donde resulta, considerando que o n é igual à duração (D_o) de uma obrigação de cupão zero e maturidade n

(18) $$D_M = D_o - \frac{C}{P \cdot i} \cdot (D_o - D_{par})$$

Como C/P é a taxa de rendibilidade aparente c, tem-se

(19) $$D_M = D_o - \frac{c}{i} \cdot (D_o - D_{par})$$

Esta expressão permite obter o cálculo da duração de uma forma simplificada, tendo sido deduzida por Caks, Lane, Greenleaf e Joules [10].

Note-se, a semelhança entre as expressões (9) e (19). As diferenças entre as duas fórmulas resultam fundamentalmente de na primeira se considerar uma obrigação de cupão fixo como um portfólio formado por uma obrigação perpétua e por uma obrigação de cupão zero, enquanto que na segunda se considera que uma obrigação de cupão fixo é um portfólio de uma obrigação de cupão zero e de uma obrigação ao par.

1.2.2 - Fórmulas dedutíveis directamente a partir da duração como elasticidade

Como se referiu, o conceito de duração foi redescoberto por Hicks, que o utilizou como sendo a elasticidade do valor do capital em relação ao factor desconto $v=1/(1+i)$, embora frisando que esta elasticidade pode ser adequadamente considerada como um prazo médio do "cash flow", visto ser " o prazo médio de diferimento dos vários pagamentos em relação ao momento actual, quando os tempos de diferimento são ponderados pelo valor actualizado dos pagamentos".

A duração entendida com elasticidade na acepção de de Hicks permite obter directamente a expressão (10) e, consequentemente, a expressão (4). Na verdade, representando o preço da obrigação por

$$P = \frac{C}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^n}\right) + \frac{F}{R^n}$$

Calculando a derivada dP/di e considerando que

$$\frac{dP}{dv} \cdot \frac{v}{P} = - \frac{dP}{di} \cdot \frac{(1+i)}{P}$$

tem-se

$$\frac{dP}{di} \cdot \frac{(1+i)}{P} = - \frac{(1+i)\frac{C}{i^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^n}\right) + \frac{n}{R^n} \cdot \left(F - \frac{C}{i}\right)}{\frac{C}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^n}\right) + \frac{F}{R^n}}$$

donde resulta que $\frac{dp}{dv} \cdot \frac{v}{p} = D_M$

O conceito de duração como elasticidade permite, ainda, calcular fàcilmente a duração de obrigações perpétuas de cupão constante C e de obrigações de cupão zero.

Na verdade, para uma obrigação de cupão zero, $P = F/R^n$, donde se obtém

$$\frac{dP}{di} \cdot \frac{(1+i)}{P} = -n \Rightarrow D_o = n$$

Por outro lado, para uma obrigação perpétua $P = C/i$, sendo

$$\frac{dP}{di} \cdot \frac{(1+i)}{P} = -\frac{(1+i)}{i} \Rightarrow D_p = \frac{1+i}{i}$$

A utilização que presentemente é feita do conceito de duração pelos gestores de portfólios de obrigações é, sobretudo, como medida da volatilidade do preço da obrigação em relação à taxa de juro, e não como prazo médio de diferimento dos pagamentos, na acepção de Macaulay.

Naquela perspectiva, a designação de duração é de certo modo pouco feliz, e mesmo susceptível de causar erros de interpretação, pois o sentido em que o conceito é usado não corresponde ao significado corrente do vocábulo. Além disso, quando na gestão de portfólios se considera a duração como um prazo, o conteudo que lhe é atribuido nada tem a ver com o de prazo médio de pagamentos, como se referiu. Existem mesmo situações em que o conceito de duração como prazo e o conceito de duração como elasticidade conduzem a valores diferentes para a duração, como seja o caso das obrigações de taxa de cupão flutuante [11].

Salienta-se, ainda, que o conceito de duração como elasticidade sofre, também, de algumas limitações, referidas por Hicks, pois depende do período de tempo que se toma como referência. A sensibilidade da duração à unidade de tempo escolhida resulta de o factor de desconto, em regime de capitalização composta, não ser linear em relação ao tempo.

ANEXO

Teoremas sobre a duração de Macaulay

A duração de Macauly tem várias propriedades, definidas em função dos vários parâmetros que integram a sua expressão algébrica, que se vão enunciar como teoremas, e cuja demonstração é relativamente fácil a partir das várias expressões acima referidas. O tipo de obrigações a que se aplicam os teoremas são as obrigações de taxa de cupão fixo, a menos que expressamente se mencione outro tipo de obrigações. Admite-se, também, que a estrutura intertemporal das taxas de juro é horizontal.

Teorema 1 - A duração de uma obrigação é igual ao seu prazo de maturidade se e só se a obrigação fôr de cupão zero ou se o prazo de maturidade fôr igúal a um.

Teorema 2 - Uma obrigação com prazo de maturidade n, com $1 < n < \infty$, tem uma duração menor do que o prazo de maturidade.

Teorema 3 - A duração de uma obrigação perpétua, isto é, $n = \infty$, é igual a $(1+i)/i$ qualquer seja a taxa de cupão r.

Corolário - A duração de uma obrigação tende para (1+i)/i quando o seu prazo de maturidade tende para infinito.

Teorema 4 - A duração de uma obrigação ao par ou acima do par cresce monotònicamente com o prazo de maturidade, e tende para (1+i)/i quando o prazo de maturidade n tende para infinito.

Corolário - A duração de uma obrigação ao par é igual ao valor actual de uma renda temporária, de termo igual a um e de prazo igual ao prazo de maturidade da obrigação (factor de actualização da renda) multiplicado por (1+i).

Teorema 5 - A duração de uma obrigação abaixo do par atinge o seu valor máximo (que é maior do que (1+i)/i), para um prazo de maturidade n finito, convergindo para (1+i)/i por valores superiores, quando n tende para infinito.

Teorema 6 - A duração de uma obrigação abaixo do par atinge o máximo para um prazo de maturidade que está directamente relacionado com a taxa de cupão r e inversamente relacionado com a taxa de juro efectiva i.

Teorema 7 - A diferença entre o prazo de maturidade e a duração de uma obrigação aumenta à medida que aumenta o prazo de maturidade.

Teorema 8 - A duração de uma obrigação varia inversamente ao nível da estrutura intertemporal horizontal das taxas de juro (taxa efectiva).

Teorema 9 - A duração de uma obrigação varia inversamente à taxa de cupão.

Teorema 10 - A duração de um portfólio de obrigações é igual à média ponderada das durações das obrigações que o compoêm, sendo o coeficiente de ponderação igual à percentagem do valor do portfólio investido em cada obrigação.

Teorema 11 - O valor acumulado por um portfólio (regime de juros compostos) de obrigações durante um prazo igual à sua duração, quando se verifica uma única variação paralela da estrutura horizontal das taxas de juro logo após a formação do portfólio, é pelo menos igual ao valor que teria sido acumulado, para o mesmo período, se não se tivesse verificado a alteração das taxas de juro.

Para as obrigações de taxa de cupão variável, em que que existe ajustamento instantâneo da taxa de cupão à nova taxa de juro, a estrutura intertemporal das taxas de juro é horizontal e se define a duração como elastidade do preço em relação à taxa de juro, em regime de capitalização contínua, pode enunciar-se o teorema [11] seguinte:

Teorema 12 - A duração de uma obrigação de cupão variável é igual a zero.

Bibliografia

[1] Macaulay, Frederick Robertson, The movements of interest rates, bond yields and stock prices in the United States since 1856, National Bureau of Economic Research, N.Y., 1938

[2] Hicks, J.R., Value and capital, Oxford University Press, 1939

[3] Samuelson, Paul A., The effect of interest rate increases on the banking sistem, American Ec. Review, vol XXXV, September, 1945

[4] Redington, F.M., Review of principles of life-office valuations, Journal of the Institute of Actuaries, vol. 78, 1952

[5] Fisher, L. e R.L. Weil, Coping with the risk of interest rate fluctuations: retturns to bondholders from naive and optimal strategies, J. of Business, Oct., 1971.

[6] Cox, John, Ingersoll, Jonathan E. e Stephen Ross, Duration and the measurement of basis risk, Journal of Busines, vol. 52, n.1, 1979.

[7] Brennan, M.J. e E. S. Schawrtz, Duration, bond pricing and portfólio management, in G.O.Bierwag, G.C.Kaufman and Alden Toevs, eds, Innovations in bond portfolio management: duration analysis and Imunization, JAI, 1983.

[8] Nelson, j. e S.M. Schaefer, The dynamics of the term structure and alternative portfolio Imunization strategies, in G.O.Bierwag, G.C.Kaufman and Alden Toevs, eds, Innovations in bond portfolio management: duration analysis and Imunization, JAI, 1983.

[9] Hawawini, Gabriel, On the relationship between Macaulay's bond duration and the term to maturity, Economics Lettters 16 (1984), pg 331-337

[10] Caks, John, William R. Lane, Robert W. Greenleaf e Reginald G. Joules, Journal of Financial Research, vol VII, no.3 , Fall 1985, pg 245- 248

[11] Morgan, George E., Floating rate Securities and imunization: some further results, J.F.Q.A., vol 21, n.1, March, 1986

(*) Prof. Associado da Faculdade de Economia da UNL