Universidade de Lisboa

Raciocínio geométrico dos alunos do 7.º ano em tarefas de exploração na unidade Quadriláteros

Helena da Costa Guimarães

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Dr.ª Leonor Santos e coorientado pela Professora Dr.ª Isabel Simão

2015

Resumo

O presente trabalho de cariz investigativo insere-se no âmbito da Geometria, tópico matemático de inquestionável importância na matemática escolar. Com este estudo pretendo descrever o raciocínio geométrico dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa, no subtópico "Quadriláteros", recorrendo a tarefas de exploração. De acordo com o objetivo do estudo e por forma a focar os seus pontos principais, formulei as seguintes subquestões: a) Que tipo de definições usam preferencialmente os alunos? A que tipo de classificações recorrem? Que dificuldades evidenciam? b) Como é que os alunos formulam as suas conjeturas? Qual o papel da dimensão visual nesse processo? Que dificuldades evidenciam?

A metodologia segue um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa. Para a recolha de dados foram utilizados diferentes instrumentos: observação de aulas (acompanhada de registo áudio), recolha das produções dos alunos resultantes da realização de tarefas de exploração, e entrevistas aos pares de alunos selecionados. Todos os alunos estiveram assim envolvidos nas tarefas propostas, no entanto para uma análise mais aprofundada selecionaram-se dois pares de alunos.

Os resultados obtidos revelam que os alunos construíram essencialmente definições não económicas dos quadriláteros, demonstrando que têm alguma dificuldade em discernir propriedades essenciais e não essenciais. Além disso, foi notável a influência das representações visuais na identificação e classificação dos quadriláteros, e denotou-se uma preferência pela utilização da classificação por partição em detrimento da classificação hierárquica. Todavia, com a aprendizagem dos quadriláteros, os alunos passaram a identificar as suas propriedades e a estabelecer relações entre elas. Conclui-se também que para o processo de conjeturar, os alunos basearam-se na observação e manipulação de materiais, tendo a visualização assumido também um papel muito importante.

Palavras-chave: raciocínio geométrico, visualização, definição e classificação, formulação de conjeturas, estudo de quadriláteros.

Abstract

The investigative nature of this work falls within the scope of geometry, mathematical topic of unquestionable importance in the process of learning mathematics. This study intend to describe the geometric reasoning of students in a class of 7th grade, of EB 2,3 Fernando Pessoa School, in the subtopic "Quadrilaterals", using exploration tasks. According to the study's objective and in order to focus on its main points, the following sub-questions were formulated: a) What types of definitions do students preferably use? What types of classifications do they use? What difficulties do they show? b) How do students formulate their conjectures? What is the role of the visual dimension in this process? What difficulties do they show?

The methodology follows an interpretative paradigm and a qualitative approach. For the data collection different instruments were used: classroom observation (accompanied by audio recording), collection of the students results produced during the exploration tasks and interviews with selected student pairs. All students were highly involved in the proposed tasks, however for further analysis we selected only two pairs of students.

The results show that students tend to build long definitions of quadrilaterals, demonstrating that they have some difficulty in discerning essential and non-essential properties. Moreover, it was remarkable the influence of visual representations in the identification and classification of quadrilaterals, and is denoted a preference for the use of the partitional classification at the expense of hierarchical classification. However, with the learning of quadrilaterals, students began to identify their properties and to establish relationships between them. It's also a conclusion that for the process of conjecture, students rely on observation and manipulation of materials, having visualization also played a very important role.

Keywords: geometric reasoning, visualization, definition and classification, conjecture formulation, quadrilaterals study.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Leonor Santos pela orientação rigorosa, pelas suas valiosas sugestões e comentários, pela sua disponibilidade nas várias fases e pelo encorajamento durante a realização do trabalho.

À Professora Doutora Isabel Simão queria agradecer a sua orientação científica, sobretudo na concretização dos conceitos matemáticos, e a sua disponibilidade.

Agradeço também à Professora Doutora Cláudia Torres pelo seu apoio durante todo este processo, por me ter dado a oportunidade de acompanhar as suas aulas e o seu trabalho enquanto professora, fornecendo-me um leque de aprendizagens ricas, e pela sua amizade. Queria ainda agradecer à direção da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa e toda a sua comunidade por me terem recebido bem e, claro, aos alunos da turma 7.º2.ª pela sua participação no presente estudo.

Para a minha colega de estágio, um especial agradecimento, pela sua grande ajuda e atenção, pela sua amizade e companhia em todas as fases.

Por fim agradeço à minha família e aos meus amigos que estão sempre comigo e com os quais partilhei esta experiência, incentivando-me nos vários momentos.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de anexos

Capítulo 1

Introdução

O primeiro capítulo deste estudo identifica os objetivos e as questões do trabalho de cariz investigativo sobre a prática letiva desenvolvida no âmbito da subunidade didática lecionada. Apresento, ainda, as motivações pessoais que justificam as principais opções tomadas.

Objetivo e questões

O trabalho de cariz investigativo que se realizou sobre a prática letiva teve como objetivo descrever o raciocínio geométrico dos alunos de uma turma de 7.º ano de escolaridade, da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa, na subunidade "Quadriláteros", recorrendo a tarefas de exploração.

De forma a aprofundar a temática, tentando focar os pontos importantes do estudo, formulei as seguintes subquestões:

a) Que tipo de definições usam preferencialmente os alunos? A que tipo de classificações recorrem? Que dificuldades evidenciam?

b) Como é que os alunos formulam as suas conjeturas? Qual o papel da dimensão visual nesse processo? Que dificuldades evidenciam?

A intervenção letiva foi desenvolvida durante o 2.º período, ao longo de duas semanas, correspondente ao período de lecionação da subunidade em estudo, sobre os quadriláteros. Esta subunidade trata, essencialmente, de dois assuntos relacionados com a classificação e as propriedades dos lados, dos ângulos e das diagonais de quadriláteros e as suas áreas.

Motivações

A subunidade didática lecionada insere-se no âmbito do domínio da geometria, cuja importância tem sido expressa em diversos documentos curriculares, tanto nacionais, como internacionais, tomando um lugar de destaque no ensino. Mesmo o programa de Matemática atual (ME, 2013) parece destacar esse domínio, pois apresenta um volume amplo de conteúdos geométricos.

Todavia, penso que alguns professores continuam a deixar para segundo plano o ensino da geometria, dado que eles próprios não se sentem à vontade nesse domínio. Alguns autores referem mesmo que os futuros professores poderão não ser capazes de fomentar um ensino rico em geometria, uma vez que não apresentam conhecimentos científicos suficientes e adequados para lecionar os respetivos conteúdos programáticos (Menezes *et al*., 2014). Na verdade, ao longo de toda a minha formação escolar e académica, senti que a geometria ocupou um lugar menos privilegiado em comparação com outras áreas da Matemática, nomeadamente a álgebra e a aritmética. Esta situação gerou em mim uma desmotivação e falta de interesse no seu estudo, provocando uma lacuna ao nível dos meus conhecimentos geométricos. Com a formação inicial de professores, tenho vindo a ultrapassar essas dificuldades e a reconhecer a importância do ensino da geometria, por forma a sentir-me mais segura durante a lecionação dos respetivos conteúdos.

Deste modo, a intervenção letiva que se realizou no âmbito dos "Quadriláteros" surgiu como uma oportunidade para ultrapassar alguns obstáculos e poder desenvolver outras competências no domínio da geometria. Esses aspetos compreendem a minha primeira motivação para o desenvolvimento do presente trabalho.

A compreensão da forma como os alunos pensam e interpretam aquilo que elaboram também despoletou o meu interesse, o que me levou a sentir vontade de estudar o raciocínio geométrico dos alunos. Nesse sentido, penso que foi um grande desafio para mim, enquanto professora, dadas as características da turma, incluindo as dificuldades que os alunos apresentaram durante a aprendizagem dos quadriláteros, o seu nível de escolaridade e a complexidade dos assuntos geométricos.

Capítulo 2

Enquadramento Curricular e Didático

O objetivo do presente trabalho centra-se no estudo do raciocínio geométrico com recurso a tarefas exploratórias. Foi desenvolvido no âmbito da subunidade dos Quadriláteros, no 7.º ano de escolaridade.

Sendo o raciocínio geométrico um tema deste estudo, a partir da análise de diversas pesquisas realizadas em áreas próximas do tema em questão, apresento ao longo deste capítulo aspetos referentes a este tipo de raciocínio matemático. Em primeiro lugar, são feitas algumas considerações relativas à sua natureza; à visualização, que se encontra conectada à geometria; e aos objetos geométricos. Seguidamente, procuro saber que tipo de atividades promovem esse raciocínio, descrevendo os processos matemáticos mais relevantes, para que me auxilie na análise dos dados e nas conclusões. Por último, é feita uma breve descrição do modelo de van Hiele.

O raciocínio geométrico

A investigação desenvolvida no domínio da geometria tem enfatizado a importância deste tópico na matemática escolar, uma vez que a geometria "ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo" (NCTM, 1991, p. 133). Desta forma, "modelar, registar e participar em atividades e experiências a nível espacial" pode "ajudar os alunos a descobrir, visualizar e representar conceitos e propriedades das figuras geométricas da realidade" (NCTM, 2001, p. 1). Além de constituir uma área importante da matemática como objeto de estudo, é opinião geral que a geometria é uma ferramenta útil para outras áreas. Por exemplo, reconhece-se que existe uma conexão entre geometria e álgebra, já que os alunos têm oportunidade de representar geometricamente ideias algébricas e vice-versa (NCTM, 2000).

Dada a importância da geometria no ensino, torna-se necessário valorizar o raciocínio geométrico e clarificar o que se entende por este conceito. Assim, ao procurar elementos sobre esse raciocínio, verifico que existe uma multiplicidade de significados em seu redor. Por conseguinte, numa primeira abordagem, mencionarei algumas noções sobre a sua natureza tendo como suporte alguns autores e diferentes perspetivas.

O que é o raciocínio geométrico?

Segundo Batistta (2007, p. 843), o raciocínio geométrico "consiste, em primeiro lugar, na invenção e na utilização de sistemas conceptuais formais para investigar as formas e o espaço". Tomando como exemplo o caso dos triângulos e quadriláteros, este autor refere que os matemáticos aplicam um sistema conceptual baseado em propriedades para defini-los e analisar a sua tipologia. Este sistema utiliza conceitos como "medida de ângulo, medida de comprimento, congruência e paralelismo". Assim, definindo quadrado como "um quadrilátero com quatro ângulos retos e todos os lados com a mesma medida de comprimento" cria-se um conceito baseado numa propriedade ideal que, através de uma visão espacial, pode ajudar os alunos a raciocinar de forma mais precisa sobre essa classe especial de quadriláteros (Battista, 2007, p. 843).

Mariotti e Fischbein (1997, p. 220) também se referem a esse "aspeto conceptual", contudo interpretam o raciocínio geométrico como sendo uma "interação dialética" entre esse aspeto e o "aspeto figurativo". Na seção seguinte, aquando do estudo dos objetos geométricos, este assunto será analisado com maior profundidade.

Atentando sobre outros aspetos, Johnson-Wilder e Mason (2005, p. 111) consideram que "o propósito do raciocínio é justificar conjeturas, provar que os factos conjeturados são de facto sempre factos". Estes investigadores realçam assim a importância da demonstração na geometria, cuja ação pode ser desafiadora para os alunos. Para provar é necessário ter em conta que existem propriedades (invariantes) que se podem aplicar a diversos objetos geométricos, e que o raciocínio desenvolve-se apenas em propriedades estabelecidas e aceites (Johnson-Wilder & Mason, 2005).

Hershkowitz (1998, p. 29), ao comentar os trabalhos de Orly, constata que as principais funções do raciocínio são "compreender, explicar e convencer", reforçando de modo semelhante o papel do raciocínio dedutivo na aprendizagem da geometria. Segundo a mesma autora, o raciocínio visual constitui ainda um aspeto vital na educação matemática, incluindo na área da geometria.

Para Duval (1998), "provar" também constitui uma das funções do raciocínio geométrico, sendo que a "extensão do conhecimento" e a "explicação" são as restantes funções que assinala. Na sua análise, sob um ponto de vista cognitivo, Duval (1998, p. 45) especifica que qualquer processo que nos permite construir nova informação a partir de informação dada é um processo de raciocínio e, portanto, os diferentes tipos de processos "dependem da forma como a informação é apresentada" e "como a informação pode ser organizada". Além disso, distingue três processos cognitivos na geometria e apresenta outros processos associados ao raciocínio geométrico e suas interações: a "visualização" e a "construção".

Ao contrário das ideias apresentadas por alguns autores, Duval (1998) considera que a visualização se processa de modo independente do raciocínio, sendo que muitas vezes não auxilia o seu progresso. Dessa maneira, também parece existirem diferentes posições quanto ao papel da visualização na geometria, onde os investigadores atribuem termos diferentes para expressarem supostamente o mesmo sentido (Brunheira, 2014; Gutiérrez, 1996): raciocínio visual, raciocínio ou pensamento espacial, visualização espacial, etc. Ademais, a área da visualização é relevante em outras especialidades, além da psicologia e da matemática, como a engenharia, a arte, a medicina, a economia, a química, etc. (Gutiérrez, 1996).

Sob uma abordagem diferente e empregando um termo distinto, Battista (2007, p. 843), por exemplo, refere que o raciocínio espacial, estando subjacente em grande parte ao raciocínio geométrico, inclui: "construir e investigar imagens de modo a responder a questões sobre elas, transformar e operar sobre as imagens, e preservá-las ao serviço de outras operações mentais". Daqui resulta, que as imagens e os esquemas (ou outras representações) que se constroem mentalmente são fundamentais no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Ao admitir que a visualização é uma das componentes básicas da cognição, Gutiérrez (1996) define um panorama conceptual sobre a sua natureza, procurando unificar a terminologia e integrar as definições usadas por alguns autores em uma única rede. Assim, esse investigador considera que a visualização em matemática é um tipo de “atividade de raciocínio baseada na utilização de elementos visuais ou espaciais, quer físicos ou mentais, por forma a resolver problemas ou demonstrar propriedades”. Caracteriza ainda quatro elementos principais que integram a visualização: “imagens mentais” (o elemento mais básico), “representações externas”, “processos de visualização” e “capacidades de visualização” (Gutiérrez, 1996, p. 9).

Na realidade, os alunos “devem adquirir e melhorar um conjunto de capacidades de visualização” (Gutiérrez, 1996, p. 10), uma vez que são facilitadoras de uma aprendizagem em geometria e podem ser aprimoradas em sala de aula através de experiências geométricas (Matos & Gordo, 1993). Deste modo, tendo em conta o seu papel especial na geometria e, por sua vez, no desenvolvimento do raciocínio geométrico, anuncio sete capacidades relacionadas com a visualização:

> - *Coordenação visual motora*: capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;
> - *Memória visual*: capacidade de recordar objetos que já não estão visíveis.
> - *Percepção figura-fundo*: capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos.
> - *Constância perceptual*: capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos e contextos e texturas.
> - *Percepção da posição no espaço*: capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes.
> - *Percepção de relações espaciais*: capacidade de ver e imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprios ou em relação connosco.
> - *Discriminação visual*: capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objetos. (Matos & Gordo, 1993, p. 14)

Relativamente às representações visuais dos conceitos – as tais “representações externas” atrás mencionadas –, é de salientar que, segundo resultados de alguns estudos experimentais, a sua utilização auxilia, na maioria dos casos, os alunos na construção desses conceitos; no entanto, por vezes, constituem um entrave para os mesmos. Por essa razão, tem havido uma maior preocupação nas aulas de matemática, por parte dos professores, no uso de desenhos e diagramas (Gutiérrez, 1996).

Essas representações, que incluem “retratos, desenhos, diagramas, etc.” e que ajudam “a criar ou transformar as imagens mentais e a realizar raciocínio visual” (Gutiérrez, 1996, p. 10), devem pois ser utilizadas de modo diverso por forma a estabelecer ligações entre elas e contribuir para o progresso do raciocínio geométrico (Loureiro, 2009). Por exemplo, o quadrado pode ser visto e representado de diferentes maneiras, “como figura isolada ou ligada a outras”, servindo assim “raciocínios visuais diferentes” (Loureiro, 2009, p. 62).

Apesar das divergências que permanecem à volta desta espécie de raciocínio, atualmente assume-se que a visualização é mais do que um conjunto de capacidades e não se aplica apenas a objetos geométricos (Loureiro, 2009). Ainda que a visualização possa levar a erros, cujo entrave tem dificultado a sua valorização no currículo, Guzmán (citado em Janela, 2012) argumenta que o recurso a procedimentos mais formais também pode levar a erros, depreciando a afirmação anterior. Por outro lado, tal como verificámos anteriormente, de acordo com algumas opiniões, a visualização é essencial na demonstração rigorosa. Constata-se, assim, a importância deste processo no desenvolvimento do raciocínio geométrico e, de um modo geral, no raciocínio matemático.

Os objetos de análise geométrica

De modo a compreender melhor o raciocínio geométrico, torna-se importante conhecer a natureza dos objetos sobre os quais os alunos trabalham ou operam quando desenvolvem esse raciocínio. Na verdade, a geometria lida com um tipo particular de objetos, as figuras geométricas, que “podem ser consideradas entidades mentais duplas, nas quais participam dois aspetos: o figurativo e o conceptual” (Mariotti, 1992, pp. 9-10). Por exemplo, tendo em conta as definições e, portanto, considerando a dimensão conceptual, o quadrado é um subconjunto de paralelogramos; contudo, sob o ponto de vista figurativo e atentando sobre a imagem prototípica de um paralelogramo e os atributos relevantes (críticos) de um quadrado verificamos que as diferenças existentes tornam a aceitação da classe inclusiva uma tarefa penosa. Por influência dos protótipos, tal como nos diz a autora, os alunos revelam dificuldades em recorrer à classificação hierárquica dos quadriláteros. O aspeto figurativo associa-se, assim, à espacialidade (forma, posição e magnitude), enquanto o aspeto conceptual relaciona-se com “o abstrato e a natureza teórica que os conceitos geométricos partilham com todos os outros conceitos” (Mariotti & Fischbein, 1997, p. 220).

Mariotti (1992) acrescenta ainda que, no geral, os alunos constroem um conceito limitado a “figuras especiais”, que podem estar associadas a desenhos particulares encontrados nos manuais ou a desenhos ilustrativos que os professores tendem a providenciar, como suporte das suas explicações. Por conseguinte, a dimensão figurativa é implicitamente usada no processo de identificação, em lugar da definição.

De um modo semelhante, também Battista (2007) se refere a estes aspetos, pois ao citar Presmeg, observa que uma figura ou um diagrama corresponde, pela sua natureza, a um caso concreto. Contudo, para qualquer pensamento matemático, é necessário abstrair ou generalizar, sendo imprescindível a intervenção da dimensão conceptual.

Esse investigador menciona ainda que, frequentemente, os alunos atribuem características irrelevantes de um diagrama (ou de um desenho) a um conceito geométrico que se pretende representar e, em outras situações, retiram informação incorreta dos diagramas nas demonstrações. Por exemplo, os alunos podem assumir que os lados que se parecem estritamente paralelos num diagrama são de facto estritamente paralelos, ou também podem formular interpretações erróneas e considerar que paralelogramos obliquângulos são retângulos, por constituírem imagens de retângulos "torcidos" (Battista, 2007). Por essa razão e uma vez que existem essas dificuldades, muitas vezes provocadas pela incorreta interpretação de um desenho, alguns autores sugerem a utilização de falácias figurativas com o intuito de introduzir nos alunos a ideia de demonstração (Mariotti, 1992).

Contudo, é de realçar que os diagramas e os desenhos são fundamentais para a compreensão de ideias geométricas, sob dois propósitos: (a) para "representar classes de formas" e (b) para "representar relações geométricas" (Battista, 2007, p. 846). De acordo com Fischbein, as figuras geométricas também possuem simultaneamente ambas as dimensões e são designadas por "conceitos figurativos" (Mariotti, 1992). Daí que os seus estudos se tenham centrado na dinâmica do raciocínio geométrico pela interação entre os aspetos figurativo e conceptual e cujos resultados demonstram que uma boa funcionalidade da interação dialética entre esses componentes só funciona, se houver harmonia entre ambos. Infelizmente, essa interação é quebrada com regularidade e, temporariamente, cada uma das dimensões acaba por se automatizar (Mariotti & Fischbein, 1997).

A harmonia entre esses dois aspetos não é, pois, alcançada de forma espontânea, pelo que depende das intervenções didáticas onde o professor pode ter um papel crucial (Mariotti & Fischbein, 1997). Estes investigadores acreditam que esse papel é muito importante em discussões coletivas, à medida que se desenvolve o processo de definir e que se estabelecem classificações. O professor pode, assim, "promover uma atitude específica dos alunos" e "estimular a dialética entre o geral e o particular", de tal modo "que o aspeto 'teórico' pode ser explicitamente introduzido e os alunos poderão alcançar progressivamente um ponto de vista geométrico" (Mariotti & Fischbein, 1997, p. 246).

Os processos matemáticos inerentes ao raciocínio geométrico

Além de atender aos objetos geométricos, o trabalho em geometria deve, essencialmente, incidir sobre as ações que podem ser aplicadas nesses objetos, como "classificação, composição, decomposição, construção e transformação". Desse modo, os processos relacionados a essas ações merecem um "destaque especial ao longo de toda a aprendizagem" dos alunos (Loureiro, 2009, p. 63). Dada a sua importância, começo por abordar o processo de definir e classificar.

Definir é "um componente básico do conhecimento geométrico" (Mariotti, 2007, p. 219); a construção de definições é tão importante como qualquer outro processo e não deve ser esquecido no ensino da matemática (de Villers, 1998). No fundo, as definições "são ferramentas para a comunicação, para reorganizar conhecimento antigo e construir novo conhecimento através de demonstração" (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009, p. 189).

Alguns autores defendem que as definições devem ser desenvolvidas segundo uma abordagem reconstrutiva ou genética, ou seja, onde o conteúdo não é introduzido diretamente aos alunos e, portanto, não é apresentado como um produto final da atividade matemática. Este tipo de abordagem permite aos alunos "participar ativamente no desenvolvimento do conteúdo e dos processos matemáticos associados, como definir, axiomatizar, conjeturar e demonstrar" (de Villiers, Govender & Patterson, 2009, p. 190). De salientar, que esta abordagem não requer necessariamente uma aprendizagem por descoberta, bastando uma explicação reconstrutiva por parte do professor ou do manual (de Villers, 1998). De facto, o conhecimento da definição de um conceito não garante por si só a sua compreensão (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009). Como exemplo, esses autores afirmam que estudantes capazes de recitar a definição de um paralelogramo podem não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos. Caso essa situação ocorra, significa que as suas imagens mentais (do conceito) de um paralelogramo correspondem a um, em que os ângulos e os lados não podem ser todos geometricamente iguais.

A este respeito, Mariotti e Fischbein (1997) também assinalam a primordialidade da participação dos alunos no processo de definir e, como seria de esperar, refere que a construção de definições precisa simultaneamente da intervenção do nível figurativo e do nível conceptual. Em seguida, apresentarei, de forma sucinta, os principais passos que compõem esse processo dialético:

> - Observar;
> - Identificar as principais características;
> - Enunciar propriedades de acordo com essas características;
> - Voltar à observação, verificar a definição considerando as diferenças figurativas, e assim por diante… (Mariotti & Fischbein, 1997, pp. 226-227)

Desta forma, podemos constatar que a elaboração de definições consiste num processo duplo, partindo do particular para o geral, e do geral para o particular (ou seja, remete para a intervenção de um raciocínio indutivo e dedutivo). Sem dúvida que essa dualidade constitui a particularidade da atividade de definir no campo da geometria.

Outro aspeto que merece atenção são os tipos de definições. Na realidade, podem existir diferentes definições (corretas) para um dado conceito e, nesse sentido, é importante que os alunos percebam que podem ter alguma liberdade nessa escolha (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009). As definições podem ser corretas ou incorretas, sendo que as primeiras contêm condições (propriedades) necessárias e suficientes para definir aquilo que se pretende. Por exemplo, "um retângulo é um quadrilátero com lados opostos estritamente paralelos e com um ângulo interno igual a 90 graus". Esta propriedade traduz uma condição necessária, porque pode ser aplicada a qualquer retângulo e traduz uma condição suficiente, uma vez que qualquer figura construída segundo esse modelo será um retângulo (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009).

Pelo contrário, se uma definição contém propriedades insuficientes ou desnecessárias, então é uma definição incorreta. Ao definirmos o papagaio como "um quadrilátero com diagonais perpendiculares", estamos a usar uma definição incorreta pois, apesar de ser uma condição necessária, não constitui uma condição suficiente para papagaios – existem outros quadriláteros com as mesmas propriedades (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009). Neste caso, também é uma definição incompleta, pelo que basta apresentar um contraexemplo de modo a refutá-la. Uma das dificuldades comumente manifestadas pelos alunos é a apresentação de contraexemplos corretos (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Por essa razão, é imprescindível que os alunos comparem e diferenciem contraexemplos antes de serem envolvidos na construção formal de definições (NCTM, 2001).

A economia das definições também constitui uma importante vantagem, distinguindo-se, assim, definições económicas de definições não económicas. Uma definição económica tem "um conjunto mínimo de propriedades necessárias e suficientes, isto é, não tem nenhuma informação supérflua" (de Villiers, Govender, & Patterson, 2009, p. 196).

Por outro lado, uma definição não económica contém propriedades redundantes. A título de exemplo, apresento a seguinte definição não económica de um papagaio: "é um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos congruentes e um par de ângulos opostos congruentes". Nesta situação, os alunos precisam de reconhecer qual a condição que pode ser abandonada. Se optarem por excluir "dois pares de lados consecutivos congruentes", obtém uma definição incorreta uma vez que é possível construir um quadrilátero não papagaio com "um par de ângulos opostos congruentes". Deste modo, os alunos podem facilmente concluir, pela congruência de triângulos (obtidos através da divisão do papagaio segundo o seu eixo de simetria), que a primeira condição referida implica logicamente a segunda, logo esta última pode ser rejeitada (de Villiers, Govender & Patterson, 2009).

Relativamente ao processo de classificar, Mariotti e Fischbein (1997, p. 243) declaram que corresponde ao reconhecimento de "uma equivalência entre objetos similares, mas diferentes ao nível figurativo, no sentido de generalizar". Tal como acontece na definição, também nesta atividade intervêm os dois tipos de raciocínio, dedutivo e indutivo. Ademais, existe uma relação mútua entre classificar e definir:

> A classificação de qualquer conjunto de conceitos envolve, implícita ou explicitamente, definir os conceitos implicados, ao passo que a definição de conceitos envolve, de certa maneira, automaticamente a sua classificação. (De Villiers, Govender, & Patterson, 2009, p. 194)

Por exemplo, ao definir um paralelogramo como "um quadrilátero com pelo menos um par de lados opostos estritamente paralelos" implica classificar hierarquicamente um paralelogramo como um trapézio – nesta classificação os conceitos mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais. No entanto, ao excluir os paralelogramos dos trapézios – classificação por partição, onde os vários subconjuntos de conceitos são disjuntos uns dos outros –, é preciso definir trapézio como "um quadrilátero com apenas um par de lados opostos estritamente paralelos" (de Villiers, 1994, p.12). Deste modo, é possível distinguir definições hierárquicas (inclusivas) de definições por partição (exclusivas).

Em síntese, apresento de seguida um esquema que sumariza dos diferentes tipos de definições atrás referidas (figura 1):

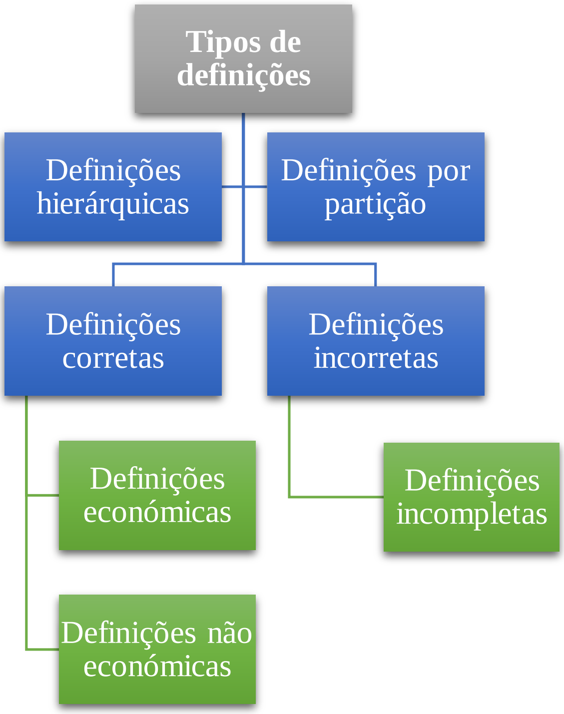


Figura 1 – Síntese dos tipos de definições dos quadriláteros

Comparando esses tipos de definições (figura 2), há autores que consideram a definição hierárquica mais vantajosa, sobretudo quando é dada oportunidade aos alunos para construírem as definições dos quadriláteros (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). De entre as vantagens apontadas, destaco a "economia nas definições e na formulação de teoremas" – sendo esta uma das maiores utilidades da classificação hierárquica – e a "simplificação da sistematização dedutiva" (de Villers, 1994, p. 15). Tomando como exemplo a classificação (definição) de um losango como um papagaio, verifica-se que todos os teoremas demonstrados para este último, podem ser diretamente aplicados aos losangos (ou aos quadrados). Além disso, as definições inclusivas também fornecem uma "perspetiva global útil", permitindo a coesão e a retenção das relações entre os conceitos (de Villers, 1994, p. 16).

Embora as definições por partição sejam em geral extensas porque incluem propriedades adicionais para assegurar a exclusão de casos especiais, não significa que sejam matematicamente incorretas ou inaceitáveis, tal como acreditam muitos professores. Por essa razão, esses acabam por impor a classificação hierárquica e as suas definições aos alunos. Logo, é essencial clarificar que as definições exclusivas (corretas) também são aplicáveis na matemática, sendo por vezes "úteis e necessárias para distinguir claramente os conceitos" (de Villers, 1994, p. 12).

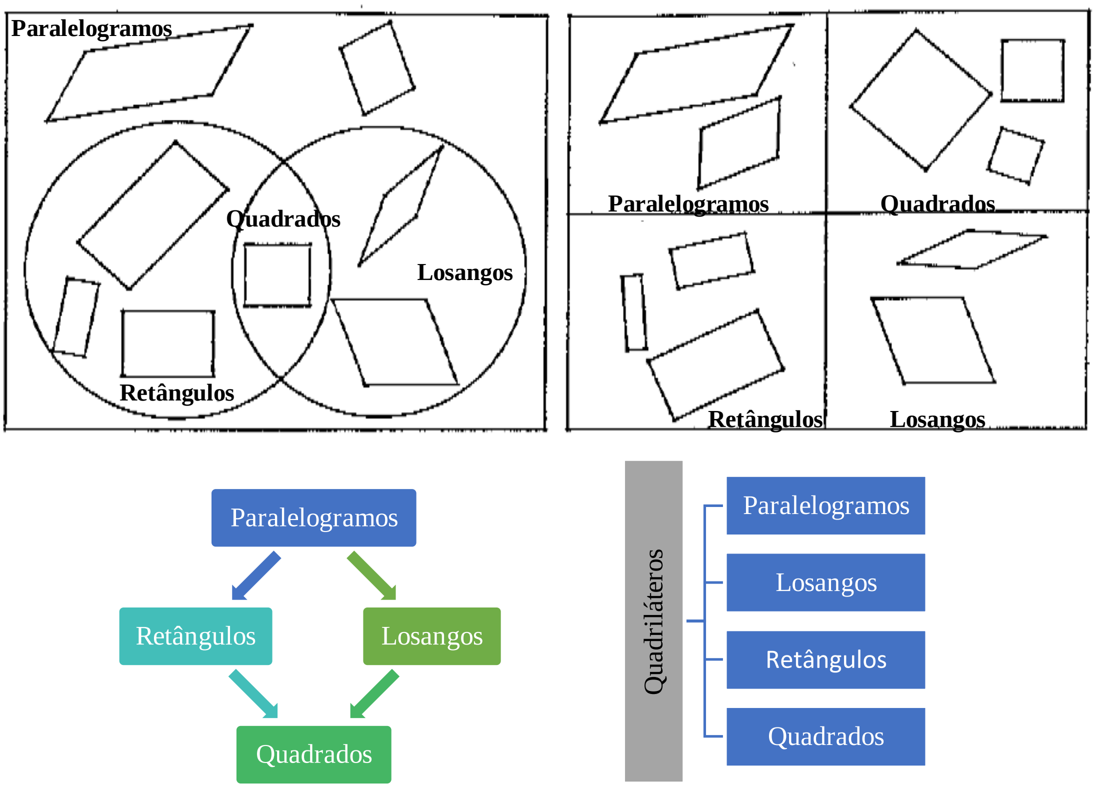


Figura 2 – Classificação hierárquica (grupo da esquerda) e classificação por partição (grupo da direita). (Adaptado de de Villers, 1994)

Para além de definir e classificar, existem outros elementos chave no raciocínio geométrico. Martin, Carter, Forster, Howe, Kader, Kepner et al. (2009) propõem-nos os seguintes:

> - *Conjeturar sobre objetos geométricos*. Analisar configurações e raciocinar indutivamente sobre relações para formular conjeturas.
> - *Construir e validar argumentos geométricos*. Desenvolver e avaliar argumentos dedutivos (tanto formais como informais) sobre figuras e as suas propriedades que ajudam a dar sentido a situações geométricas.

> - *Usar múltiplas abordagens geométricas.* Analisar situações matemáticas, utilizando transformações, abordagens sintéticas e sistemas de coordenadas.
> - *Estabelecer conexões geométricas e modelar*. Usar ideias geométricas, incluindo a visualização espacial, em outras áreas da Matemática, outras disciplinas e em situações do mundo real. (Martin et al., 2009, p. 55-56).

De entre os elementos acima descritos destaco os processos conjeturar e demonstrar, pois são essenciais para a compreensão da geometria.

Conjeturar é um "hábito de raciocínio fundamental para o questionamento em matemática" e a geometria constitui-se como um contexto favorável para esse desenvolvimento, através de "uma abundância de relações geométricas visuais ou mensuráveis intrigantes e, muitas vezes, surpreendentes" (Martin et al., 2009, p. 56).

Deste modo, com recursos apropriados e num contexto de aprendizagem cooperativa, os alunos podem formular e explorar conjeturas sobre ideias geométricas, descobrindo (por exemplo) se uma determinada configuração existe ou não. Os mesmos autores afirmam que:

> O processo de procurar e fazer conjeturas dá aos alunos a oportunidade de se tornarem imersos em, e aprofundarem a compreensão das relações matemáticas envolvidas, bem como estimular a sua capacidade para validá-los. Ao fazer conjeturas sobre situações novas, os alunos também aprendem a aplicar matemática, uma habilidade altamente desejável no nosso mundo que se encontra em rápida mudança. (Martin et al., 2009, p. 56)

Partilhando as mesmas ideias, Hershkowitz (1998, p. 31) considera que os alunos, ao formularem conjeturas através de experiências e de um processo indutivo "ampliam o seu conhecimento geométrico acerca de formas e relações", bem como "o seu 'vocabulário' de formas legítimas de raciocínio".

A título de exemplo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 33) mencionam ainda que as conjeturas podem ser elaboradas "por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjeturas".

Além disso, a realização de testes das conjeturas também representa um dos principais processos de uma investigação geométrica, onde o professor pode ser um bom apoio para os alunos, desafiando-os a verificar a sua conjetura. Ocasionalmente esse processo funde-se com a própria fase de conjeturar, quando os alunos encontram logo em seguida contraexemplos que refutam as suas descobertas. Os alunos devem ainda reconhecer que a observação de um número elevado de casos (e, portanto, a realização de sucessivos testes) permite elaborar conjeturas mais credíveis (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

Sendo a formulação e o teste de conjeturas os primeiros passos torna-se necessário proceder, posteriormente, à sua justificação e demonstração. A geometria tem sido indicada, por vários autores e ao longo de várias gerações, como um campo favorável para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. No entanto, além do produto (a demonstração escrita), tem-se vindo a considerar que o processo de demonstrar é igualmente importante e, como tal, é imprescindível a criação de ambientes de aprendizagem que ajudem os alunos a sentirem necessidade de explicar as suas ideias (Hershkowitz, 1998).

De facto, os alunos em geral não percebem a utilidade de justificar ou provar as suas conjeturas, bem como o seu caracter provisório, transformando diretamente as conjeturas em conclusões. Por essa razão, os professores devem insistir no desenvolvimento deste processo, levando os alunos a interiorizarem a conveniência de justificarem as suas afirmações (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

Do mesmo modo que sugere Orly (citado por Hershkowitz, 1998), os alunos também devem sentir necessidade de convencer os seus pares e, para esse efeito, os professores têm de criar situações onde os próprios, em grande grupo, possam avaliar o "nível de convicção" das justificações e, assim, escolher os argumentos que consideram mais adequados para convencer. Dessa forma, além do raciocínio dedutivo se ter tornado num veículo para compreender e explicar a razão pela qual as conjeturas descobertas indutivamente são verdadeiras, permite ainda convencer os alunos da validade dessas conjeturas (Hershkowitz, 1998).

Hershkowitz (1998, p. 33) assinala ainda que, de acordo com alguns investigadores, o raciocínio indutivo associado à formulação de conjeturas "oferece os argumentos" para a posterior construção de provas matemáticas.

No que diz respeito à influência da visualização nesse processo, atualmente parece haver duas posições opostas: de um lado, alguns autores consideram as representações visuais simplesmente como uma ajuda ou um complemento da demonstração; por outro lado, os estudiosos do raciocínio visual defendem o seu papel central na demonstração (Brunheira, 2014). De assinalar que o contexto geométrico visual foi, durante décadas, negligenciado no ensino do raciocínio dedutivo (Hershkowitz, 1998).

Contrariamente ao que sugere Duval, que distingue os processos visuais dos processos de raciocínio (tal como acima se referiu), Hershkowitz (1998) considera que a visualização (ou o raciocínio visual) integra vários aspetos atribuídos a outros tipos de raciocínio, incluindo aspetos analíticos e a demonstração. Dessa forma, de acordo com a mesma autora o raciocínio visual não tem de funcionar obrigatoriamente como um preliminar para esses tipos de raciocínio, destacando assim o seu papel na demonstração. É aqui que encontramos a especificidade do processo de demonstrar, na sua dimensão visual (Brunheira, 2013).

Outro aspeto a apontar, relaciona-se com o desenvolvimento de ambientes de geometria dinâmica, cuja tecnologia atual permite um enorme apoio na verificação de conjeturas, na sua validação e explicação, realçando tanto esses processos como a dimensão visual dos objetos geométricos (Brunheira, 2013).

Em síntese, os processos matemáticos destacados neste capítulo, associados ao raciocínio em geometria e transversais a outros domínios matemáticos – definir, classificar, conjeturar, testar e demonstrar – constituem uma variedade de ações que os alunos devem utilizar para comunicar uns com os outros e para explicar o que observam, o que descobrem, o que estão a pensar e o que concluem, não só aos colegas, mas também a si próprios (Hershkowitz, 1998). Foi esta abordagem pedagógica (construtivista) que se teve em conta durante a intervenção letiva e foram esses os processos que se pretendeu que os alunos desenvolvessem durante a resolução de tarefas exploratórias, estando em consonância com os objetivos de aprendizagem visados na unidade didática em estudo.

Modelo de van Hiele

Com vista a obter uma descrição mais detalhada do raciocínio geométrico dos alunos da turma em questão, tive interesse em verificar os seus níveis de evolução de raciocínio atendendo à teoria de van Hiele.

Esse modelo foi desenvolvido pelo casal Dina van Hiele-Geldolf e Pierre van Hiele, em meados dos anos 50, no âmbito de uma investigação, enquanto professores de uma escola holandesa. Os seus trabalhos centraram-se nos níveis de raciocínio geométrico dos alunos e no papel do ensino e do professor no auxílio à passagem de um nível para outro, mais avançado. Assim, os elementos principais do modelo de van Hiele são: (i) a teoria dos níveis de raciocínio e (ii) as fases de aprendizagem, que constituem a sua proposta didática para a sequência de atividades de ensino-aprendizagem nas aulas (Braga, 1991).

Segundo as “Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar” (NCTM, 2001), este modelo introduz ideias e abordagens significativas e apropriadas aos alunos dos 2.º e 3.º ciclos de escolaridade. Na realidade, os níveis de raciocínio descrevem diferentes tipos de raciocínio geométrico dos alunos ao longo de toda a sua formação matemática, que vão desde o raciocínio intuitivo das crianças na escola de infância, abordagens indutivas e qualitativas, até ao raciocínio mais formal, abstrato e dedutivo dos estudantes da Faculdade de Ciências (Braga, 1991). No fundo, cada um desses níveis “descreve a forma como os alunos compreendem os conceitos geométricos” (Poças, Aires, & Campos, 2013).

Seguidamente, apresento os níveis do modelo de van Hiele que descrevem os comportamentos dos alunos no que diz respeito ao raciocínio geométrico:

> Nível 1 – Visual (o aluno avalia uma figura pela sua aparência);
> Nível 2 – Análise (o aluno observa os elementos que constituem as figuras e descobre propriedades de um grupo de figuras);
> Nível 3 – Dedução informal (o aluno inter-relaciona propriedades previamente descobertas de forma lógica);
> Nível 4 – Dedução (o aluno demonstra teoremas de forma dedutiva);
> Nível 5 – Rigor (o aluno estabelece teoremas em diferentes sistemas de postulados). (Adaptado de NCTM, 2001)

De assinalar que, inicialmente, os níveis foram enumerados de 0 a 4 pelo casal van Hiele e, só mais tarde, alguns autores descreveram a evolução do pensamento geométrico partindo de uma outra numeração, de 1 a 5, sendo esta a adotada no presente trabalho. Esta abordagem permitiu a introdução de um pré-nível 0, designado por pré-visualização (Poças, Aires, & Campos, 2013).

Como os níveis são sequenciais e hierárquicos, só os alunos com experiências anteriores de raciocínio a níveis inferiores (ou seja, aqueles que compreenderam todos os conceitos a este nível) é que alcançam os níveis seguintes. Em geral, a aquisição destes níveis está mais relacionada com a experiência e com o ensino do que propriamente com a idade, constituindo um processo de aprendizagem para o aluno. Este modelo contrasta, assim, com a teoria de Piaget, pois van Hiele considera a sua abordagem como um processo de maturação (NCTM, 2001).

Em seguida, enumero as fases de aprendizagem que têm como objetivo favorecer a passagem de um nível de raciocínio para outro nível mais avançado, oferecendo assim um plano de aula para o ensino da geometria:

(1) Colocação de questões;
(2) Orientação direcionada;
(3) Explicitação;
(4) Orientação livre;
(5) Integração. (NCTM, 2001)

De uma forma resumida, verifica-se que na primeira fase, os alunos discutem, colocando questões, sobre um tópico a desenvolver; na segunda fase, o material é fornecido e os alunos exploram conjuntos de atividades sequenciais; na terceira fase, através da condução de discussões na turma, pretende-se que os alunos se apropriem de uma linguagem geométrica pertinente; na quarta fase, proporciona-se aos alunos, diversos materiais com diferentes funções e o professor dá instruções que conduzem a diferentes formas de atuação por parte dos alunos. Por último, a quinta fase convida os alunos a refletirem sobre as suas próprias ações em fases anteriores, procedendo, assim, a uma revisão do que aprenderam (Braga, 1991; NCTM, 2001). Nesta fase, os alunos atingem um novo domínio do conhecimento, no qual "os objetos e as suas relações são unificadas e assimiladas" (NCTM, 2001, p. 8).

Tendo em conta os processos matemáticos descritos anteriormente e centrando nos níveis 1, 2 e 3 do modelo de van Hiele, os quais correspondem, em geral, aos alunos dos 2.º e 3.º ciclos (NCTM, 2001), apresento um quadro resumo que caracteriza essa relação (quadro 1) e proponho uma descrição sintética para cada um desses níveis, com base nos estudos de Villiers (1998) e de Poças, Aires, e Campos (2013).

No nível "visualização" (nível 1), as formas e figuras diferenciam-se pela sua aparência global – frequentemente por comparação com um protótipo – e, como tal, os alunos fundamentam-se na perceção, e não no raciocínio. Os quadriláteros ou outras figuras são apenas descritos pelas suas propriedades visuais, através de uma linguagem informal.

No nível "análise" (nível 2), os alunos já são capazes de reconhecer e descrever as figuras através das suas propriedades, por observação, medição, desenho e modelação, no entanto não estabelecem relações entre elas. Por um lado utilizam uma linguagem formal e simbólica; por outro lado, formulam definições não económicas, e não compreendem a necessidade de demonstrar conjeturas. Nestes dois primeiros níveis, as definições construídas tendem a ser exclusivas (classificação por partição), o que significa que os alunos não recorrem à classificação hierárquica.

Quadro 1 – Relação entre os processos matemáticos subjacentes ao raciocínio geométrico e os três primeiros níveis do modelo de van Hiele

	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
Reconhecimento	Atributos físicos	Propriedades matemáticas	(adquirido)
Uso de definições	----	Somente definições com estrutura simples	Qualquer definição
Formulação de definições	Lista de propriedades físicas	Lista de propriedades matemáticas	Conjunto necessário e suficiente de propriedades
Classificação	Baseada exclusivamente em atributos físicos	Baseada exclusivamente em atributos matemáticos	Inclusivas, exclusivas, ….
Demonstração	----	Verificação com exemplos	Provas lógicas informais

(Material cedido em sala de aula por Polo, 2014)

Por último, considerando o nível "dedução informal" (nível 3), os alunos começam a estabelecer relações entre propriedades e entre figuras e a utilizar uma linguagem de natureza dedutiva ainda que informal. Deste modo, apresentam argumentos (informais) para justificarem o seu raciocínio e procuram generalizações e contraexemplos. Além disso, os alunos já são capazes de construir definições corretas, económicas e hierárquicas, compreendendo a inclusão de classes.

Capítulo 3

Unidade de ensino

Neste capítulo, apresento inicialmente as características da escola e da turma em estudo. De seguida, faço uma abordagem aos assuntos fundamentais presentes na subunidade didática lecionada (quadriláteros) e ao seu enquadramento no programa de Matemática em vigor e apresento os conceitos e as propriedades matemáticos envolventes.

Dedico a seção seguinte à exposição e justificação das estratégias de ensino concebidas ao longo da intervenção letiva, bem como dos recursos utilizados, de acordo com a subunidade didática referida e as características dos alunos que fazem parte da turma em estudo. Além disso, apresento a planificação dessa subunidade, juntamente com os objetivos das fichas de trabalho que foram propostas aos alunos.

Por último, descrevo sumariamente as aulas lecionadas, apresentando os objetivos cumpridos e os desvios efetuados tendo em conta os planos de aula elaborados.

Contexto escolar

Caracterização da escola

A Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa insere-se no Agrupamento de Escolas Fenando Pessoa (corresponde à sede desse agrupamento), localizando-se no espaço denominado Lisboa Oriental, na região dos Olivais Sul. Este agrupamento é um Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP), cujo projeto visa atenuar os problemas sociais dos territórios que as respetivas escolas servem. Além da escola em estudo, o agrupamento é constituído por mais três estabelecimentos de educação e ensino.

Consultando o seu projeto educativo (2012), verifico que a Escola de Fernando Pessoa iniciou a sua atividade letiva no ano de 1973 e concentra atualmente um total de 790 alunos (dados relativos ao ano letivo de 2012/ 2013). Esta instituição alberga apenas alunos dos 2.º e 3.º ciclos e inclui sete pavilhões, onde funcionam as salas de aulas, as salas de professores, a sala de informática, o gimnodesportivo, os serviços administrativos e da direção, a reprografia/papelaria, a biblioteca, o bufete, o refeitório, etc. Estes pavilhões encontram-se espalhados ao longo de um terreno com declive acentuado, trazendo alguns obstáculos na comunicação entre os elementos da comunidade escolar e na vigilância do recinto. Ademais, é frequente ocorrerem acidentes devido à configuração do terreno em conciliação com a agitação própria dos alunos.

Um aspeto curioso relativamente à população escolar reside no facto de haver um número elevado de elementos do sexo masculino. Além disso, a maioria dos alunos com idade superior à média por ano/ ciclo – cuja percentagem não é muito relevante – estão integrados em percursos alternativos (Percursos Curriculares Alternativos - PCA e Programa Integrado de Educação e Formação - PIEF).

Em termos de caracterização socioeconómica e familiar, a população da região é heterogénea, integrando famílias de diferentes estratos sociais e com qualificações escolares e atividades profissionais distintas. Destaca-se a existência de um número relevante de pais desempregados ou abrangidos por apoios sociais e de algumas famílias de países africanos e países do leste. Esta heterogeneidade pode ser explicada pela história da região. Na verdade, nas primeiras décadas do século XX, a atividade predominante dessa zona de Lisboa era a industrial, atraindo assim a classe do operariado. Contudo, com o avançar dos tempos, essa atividade foi perdendo relevo, e notou-se um maior crescimento de residências, albergando população com funções ligadas ao comércio e serviços. Já no início dos anos 60, o bairro foi reconstruído e trouxe novos residentes, pertencentes a estratos sociais mais baixos. Posteriormente, uma série de construções e acontecimentos revolucionaram a região, como a instalação do aeroporto da Portela e a realização da Exposição Internacional de Lisboa de 1998, assegurando uma maior diversidade de vias de comunicação e expandindo o comércio e a cultura. Decorrente deste último evento surgiu então uma população mais jovem e qualificada, que contrasta com o perfil dos residentes acima descritos.

Caracterização da turma

A turma em estudo é uma turma de 7.º ano, constituída por 30 alunos, sendo 13 raparigas e 17 rapazes. No que diz respeito à idade, os alunos, maioritariamente, têm entre 12 e 13 anos (Quadro 2). Esta turma resultou da junção de várias turmas de 6.º ano da Escola Fernando Pessoa, e integra um aluno repetente, três alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE) e um aluno com problemas de absentismo.

Quadro 2 - Idades dos alunos da turma de 7.º 2.ª, sobre a qual se incidiu o estudo

Idades	N.º de alunos
10 - 11	7 (23%)
12 - 13	22 (73%)
14 - 15	1 (3%)

Além disso, existe um número significativo de alunos com problemas socioeconómicos, alguns dos quais beneficiam de apoios sociais (30%). Infelizmente, notou-se que alguns alunos chegaram ao final do 1.º período sem material para trabalhar, nomeadamente, o manual escolar.

Em termos de "aproveitamento", a maioria dos alunos teve resultados muito baixos no 1.º período, com uma percentagem aproximadamente igual a 43% de níveis inferiores a 3 (figura 3). De acordo com a professora titular, o trabalho que os alunos desenvolveram nos anos anteriores "não foi suficiente para a aquisição de aprendizagens básicas" – de facto, os seus resultados escolares relativos ao 6.º ano foram pouco satisfatórios –, "nem houve lugar a aprendizagens significativas", sendo estes os aspetos que estão na origem das dificuldades reveladas por estes alunos. No entanto, a professora reconhece que existe um "pequeno grupo de alunos com aprendizagens anteriores sólidas e com hábitos de trabalho já adquiridos".

É importante referir que, segundo a mesma, há "conteúdos matemáticos associados às Metas Curriculares que são demasiado abstratos" para a maioria dos alunos do 7.º ano, mas sobretudo para estes alunos que precisavam de "ganhar maturidade matemática para conseguir alcançar as metas".

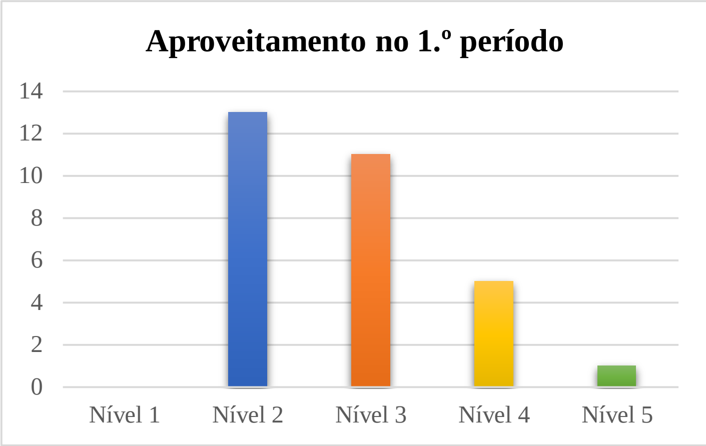


Figura 3 - Aproveitamento no 2.º período dos alunos da turma 7.º2.ª

O número elevado de resultados inferiores ao nível 3 manteve-se nos 2.º e 3.º períodos, registando-se uma ligeira melhoria relativamente ao 1.º período (figuras 4 e 5). Não obstante, esses resultados demonstram que ainda há um longo caminho a percorrer com esta turma.

Pela observação das aulas, também verifiquei que alguns alunos manifestaram dificuldades em trabalhar autonomamente e, por conseguinte, não realizaram, na maioria das vezes, os trabalhos de casa. Este é um dos aspetos que precisa, ainda, de ser muito desenvolvido por estes alunos. No entanto, de um modo geral, ao longo do ano letivo foi-se registando uma melhoria nos seus hábitos de trabalho, uma vez que um número significativo de alunos começava já o seu trabalho sozinho, mesmo sentindo dificuldades durante a realização das tarefas. No início do 1.º período, quando lhes era apresentada uma tarefa matemática, a maioria permanecia à espera da sua resolução.

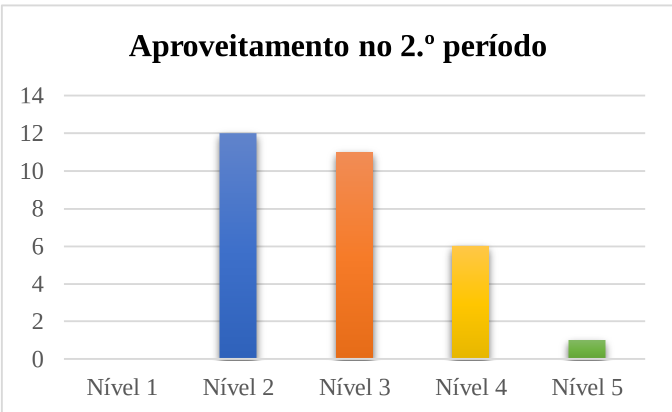


Figura 4 – Aproveitamento no 2.º período dos alunos da turma 7.º2.ª

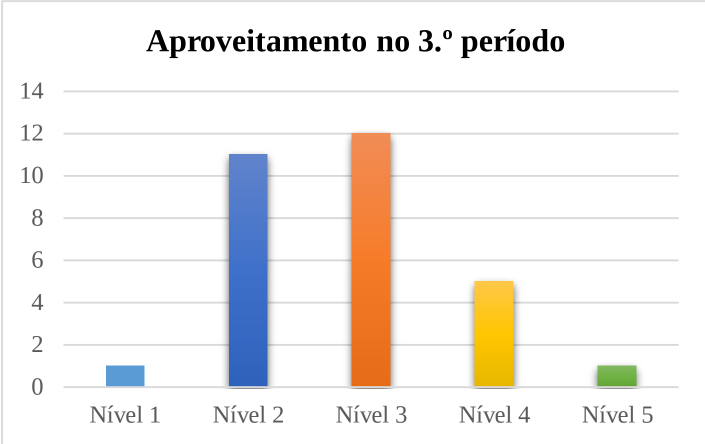


Figura 5 – Notas dos alunos da turma 7.º2.ª relativas ao 3.º período

Tal como a professora titular refere, no que respeita à sua relação com a matemática "há um grupo de alunos que mostra gostar de matemática", pois revelou querer participar sempre nas aulas. Porém, uma grande percentagem "já não investe na disciplina", devido aos "sucessivos anos de insucesso". Por essa razão, alguns alunos não participavam nas aulas, "desligando-se" do trabalho que se realizava em sala de aula. Na verdade, esses alunos foram "o alvo a estimular", pois só dessa forma podiam aprender e, nesse sentido, alguns deles revelaram melhorias.

Quanto ao comportamento geral da turma, apesar da presença de alguns alunos perturbadores e muito agitados, a turma melhorou no decorrer da atividade letiva. É preciso notar que dois alunos apresentaram problemas de integração na turma, os quais foram acompanhados pelo SPO (Serviço de Psicologia e Orientação) e a diretora de turma realizou um trabalho a pares com a colaboração do GAAF (Gabinete de apoio ao aluno e à família).

Ancoragem da unidade didática no programa

A intervenção letiva desenvolveu-se no âmbito da unidade didática "Figuras Geométricas" do domínio "Geometria e Medida", no 7.º ano de escolaridade, com incidência nos "Quadriláteros" e na "Área de Quadriláteros". Tive como base os objetivos de aprendizagem estabelecidos à luz do Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico (ME, 2013).

Segundo esse programa, um dos objetivos centrais do ensino é "potenciar e aprofundar a compreensão", através de "uma complexa rede de regras, procedimentos, factos, conceitos e relações" que vão sendo gradualmente apreendidos, com o intuito de "melhorar a qualidade da aprendizagem da Matemática no nosso país" (ME, 2013, p. 1). Apesar de esse programa não contemplar ou explicitar orientações metodológicas numa seção dedicada à Geometria – pois, de acordo com os seus autores, as escolas e os professores é que devem escolher as metodologias e os recursos mais adequados aos seus alunos –, encontram-se diretrizes mais concisas nas Metas Curriculares. Este documento foi elaborado numa fase anterior ao Programa (em 2012), e tem como base os conteúdos temáticos expressos no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007). Assim, para além dos objetivos gerais, as metas apresentam descritores mais específicos que indicam desempenhos fundamentais que os alunos deverão alcançar.

Previamente na unidade "Figuras Geométricas" e, portanto, antes da introdução dos quadriláteros, os alunos estudaram os polígonos (seus elementos e definição de polígonos convexos e côncavos) e a soma dos ângulos internos e externos de um polígono. A meu ver, a aprendizagem desses conteúdos foi importante para o estudo dos quadriláteros, criando uma oportunidade aos alunos para reverem conceitos (relacionados, por exemplo, com triângulos e ângulos) que poderiam estar esquecidos ou pouco consolidados. Sobre os quadriláteros, teve-se em vista, sobretudo, a sua classificação, as propriedades das diagonais e a determinação das suas áreas. De um modo mais preciso, apresento, no quadro 3, os conteúdos e as respetivas metas referentes às subunidades dos quadriláteros, preconizadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013).

De assinalar que durante a prática letiva, em que se debruçou o estudo, foi desenvolvida toda a subunidade "Quadriláteros" porém, no âmbito da subunidade "Área de Quadriláteros", apenas foram abordadas as áreas do paralelogramo e do papagaio. Dessa forma, optei por incluir a área do paralelogramo, cujo conteúdo, segundo o programa atual (ME, 2013), encontra-se inserido no 5.º ano de escolaridade. No entanto, como a turma em estudo contactava pela primeira vez com o novo programa, considerei que a sua inclusão poderia constituir uma boa introdução à subunidade referida e uma revisão da fórmula para a área de paralelogramos.

Quadro 3 – Apresentação das subunidades didáticas, incluindo os seus conteúdos e objetivos específicos

Subunidades	Conteúdos	Metas Curriculares
Quadriláteros	Classificação de quadriláteros	• Identificar um “papagaio” e reconhecer que um losango é um papagaio. • Identificar “trapézio” e justificar que um paralelogramo é um trapézio. • Identificar um “trapézio isósceles”, um “trapézio escaleno” e um “trapézio retângulo”. • Demonstrar que todo o trapézio com bases iguais é um paralelogramo.
	Propriedades das diagonais de um quadrilátero	• Reconhecer as propriedades das diagonais de um quadrilátero. • Caracterizar um paralelogramo através das diagonais. • Caracterizar retângulos e losangos através das diagonais. • Reconhecer as propriedades das diagonais de um papagaio.
Áreas de Quadriláteros	Área do papagaio e do losango	• Provar a área de um papagaio (e, em particular, de um losango).
	Área do trapézio	• Identificar a “altura” de um trapézio. • Reconhecer a área de um trapézio.

No 2.º ciclo, a abordagem à unidade foi feita pelo programa antigo (ME, 2007) e permitiu o estudo de alguns tópicos relacionados com retas, semirretas e segmentos de reta; ângulos (amplitude e medição); polígonos (propriedades e classificação); círculo, circunferência e construção.

Alguns desses conteúdos foram, ainda, retomados pelos alunos no 7.º ano com a unidade “Paralelismo, congruência e semelhança” e vão ser, mais tarde, explorados em outras unidades dos 8.º e 9.º anos – “Vetores, translações e isometrias” e “Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência”, respetivamente.

Todas as orientações e propostas curriculares apresentadas nas Normas (NCTM, 2000) também foram tidas em consideração durante a lecionação das aulas, indo ao encontro dos objetivos de aprendizagem visados no programa atual e dos objetivos do presente trabalho de cariz investigativo. Segundo o NCTM (2000), os alunos nos anos de escolaridade 6-8 devem, durante a aprendizagem da geometria, analisar características e propriedades de duas e três dimensões de formas geométricas e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas. Essas normas sugerem, como exemplo, o estudo minucioso de um tipo especial de formas, os quadriláteros. A partir de atividades como construções de paralelogramos e medições dos comprimentos dos seus lados e das amplitudes dos seus ângulos internos, os alunos devem gerar definições corretas e reconhecer as principais relações entre os elementos dos paralelogramos. Além disso, o professor também pode solicitar aos alunos para desenhar as diagonais dos vários quadriláteros, cujo resultado pode ser muito rico, permitindo a construção de outras definições. Nestes anos de escolaridade, prevê-se ainda que os alunos ampliem as suas capacidades de raciocínio lógico, através da formulação de inferências e de deduções de problemas geométricos (NCTM, 1991). O estudo da geometria deve então centrar-se "na investigação e utilização de ideias geométricas e de relações, em vez da memorização de definições e fórmulas" (NCTM, 1991, p. 133).

Outra sugestão metodológica apontada relaciona-se com o estímulo da comunicação escrita e oral, que só funciona num contexto de aprendizagem cooperativa, onde o professor coloca questões e ajuda os alunos a estabelecer relações entre os conceitos, procedimentos e abordagens. É também destacado que os alunos devem analisar exemplos e contraexemplos e apresentar outras situações numa fase prévia à construção da definição (oral ou escrita) de um conceito (NCTM, 2001).

As investigações que trabalham com medidas, nomeadamente as áreas, são igualmente apontadas como oportunidades para os alunos poderem desenvolver e avaliar conjeturas (NCTM, 2000) e proporcionam uma ligação com elementos da aritmética – números decimais e fracionários, proporções e percentagens (NCTM, 1991). Deste modo, considerou-se relevante para o presente projeto, a lecionação da subunidade "Área de Quadriláteros", pois os alunos poderiam estabelecer conexões com outros conteúdos já aprendidos, como os números racionais, as funções e as equações (conteúdos referentes ao 7.º ano de escolaridade).

Conceitos e propriedades matemáticos relativos à unidade

Tal como já foi acima referido, o presente estudo incidiu sobre a subunidade didática dos quadriláteros, em particular a sua classificação e o cálculo das suas áreas.

Assim, nesta seção apresento os conceitos geométricos e propriedades estudados ao longo da intervenção letiva, no âmbito dessa subunidade, e outros, que não foram abordados explicitamente nas aulas, mas que também se encontram fortemente ligados ao tema. As definições desses conceitos e respetiva explicitação fundamentam-se, principalmente, no “Compêndio da Geometria” de Amorim (1943).

Quadriláteros, propriedades e sua classificação

De acordo com a ordem crescente de complexidade dos polígonos, o **quadrilátero** segue-se ao triângulo, correspondendo ao polígono de quatro lados. De entre os quadriláteros (planos) podemos, ainda, considerar quadriláteros simples ou estrelados (quando dois lados de um quadrilátero se cruzam); os simples podem ser convexos ou côncavos.

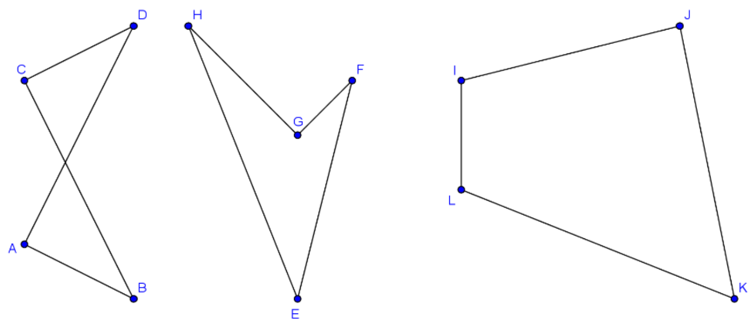


Figura 6 - Quadrilátero estrelado, côncavo e convexo, respetivamente

Neste ano de escolaridade, os alunos estudaram essencialmente os **quadriláteros convexos**, onde os ângulos internos e os lados estão dois a dois em oposição, ângulo com ângulo, e lado com lado. Designa-se por quadrilátero convexo aquele em que qualquer segmento de reta que une dois pontos do quadrilátero está nele contido e por quadrilátero côncavo no caso contrário.

Nos quadriláteros convexos podemos distinguir vários elementos: quatro ângulos internos; quatro ângulos externos; quatro lados e duas diagonais. Chama-se **diagonal** a qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

A **soma dos ângulos internos** de um quadrilátero é um ângulo giro, pelo que a soma das respetivas medidas de amplitude é 360º (teorema).

Os quadriláteros mais importantes dividem-se em duas espécies: trapézios e paralelogramos. Os **trapézios** têm pelo menos dois lados estritamente paralelos. Aqueles trapézios que têm os lados estritamente paralelos dois a dois designam-se por **paralelogramos**.

Os lados estritamente paralelos de um trapézio chamam-se **bases**. Também podemos distinguir a base menor (b) e a base maior (B), se existirem. Na família dos trapézios salienta-se ainda o trapézio retângulo, o trapézio isósceles e o trapézio escaleno (figura 7).

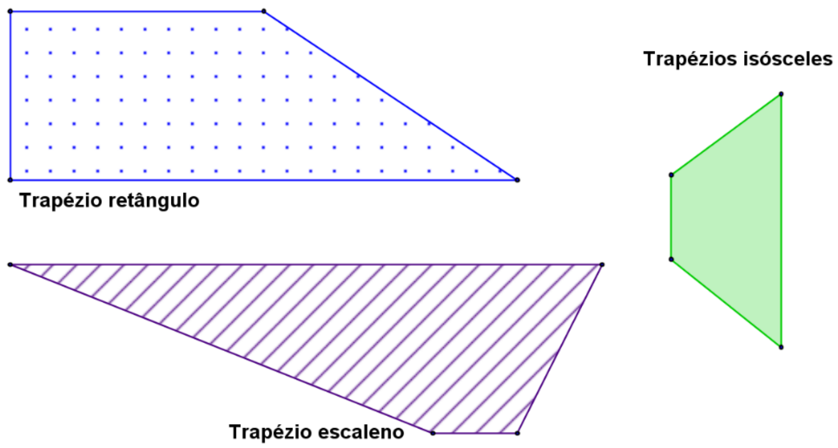


Figura 7 - Representação dos trapézios retângulo, isósceles e escaleno

O **trapézio retângulo** tem um lado perpendicular aos dois lados que lhe são contíguos.

O **trapézio isósceles** é aquele em que os lados opostos não estritamente paralelos são geometricamente iguais.

Pelo contrário, o **trapézio escaleno** é aquele em que os dois lados não estritamente paralelos são geometricamente diferentes.

Atentando sobre a família dos paralelogramos, podemos distinguir os retângulos e os losangos. O **retângulo** tem todos os ângulos geometricamente iguais e, portanto, retos. Esta definição inclui o quadrado que é o retângulo de lados geometricamente iguais.

O **losango** é o paralelogramo com os quatro lados geometricamente iguais. Deste modo, o quadrado também é um caso particular do losango, com os quatro ângulos geometricamente iguais.

Fora dos quadriláteros mencionados, falta apontarmos o papagaio que também tem propriedades notáveis, desempenhando, por exemplo, um papel importante no estudo da cristalografia. O **papagai**o (figura 8) é caracterizado pelo facto de ter geometricamente iguais, entre si, dois pares de lados consecutivos. Podemos, assim, concluir que os losangos são papagaios (incluindo o quadrado).

Às diagonais do papagaio chamamos diagonal maior (D) e diagonal menor (d). As diagonais são perpendiculares e apenas a diagonal menor é bissetada pela diagonal maior.

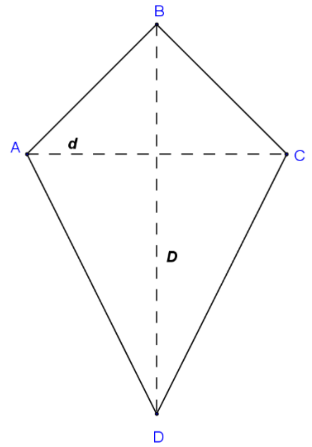


Figura 8 - Representação de um papagaio

Vamos agora analisar algumas propriedades dos paralelogramos, no que respeita às características dos ângulos, dos lados e das diagonais.

Propriedades dos paralelogramos

Os ângulos opostos de um paralelogramo são geometricamente iguais (teorema). De modo semelhante, também podemos verificar o recíproco do precedente, ou seja, se os lados opostos de um quadrilátero forem geometricamente iguais, os lados são estritamente paralelos.

Os lados opostos de um paralelogramo são geometricamente iguais (teorema). Reciprocamente, o quadrilátero que tem os lados opostos geometricamente iguais, dois a dois, é um paralelogramo.

As diagonais do paralelogramo cortam-se pelo meio, ou sejam, bissetam-se (teorema). Assim, todo o quadrilátero cujas diagonais se bissetam é um paralelogramo (recíproco do precedente).

Os retângulos e os losangos, como paralelogramos que são, gozam de todas as propriedades dos paralelogramos. No entanto, por possuírem características específicas, gozam ainda de outras propriedades que lhe são peculiares.

Um paralelogramo é um retângulo quando (e apenas quando) as diagonais são geometricamente iguais (teorema e recíproco).

Um paralelogramo é um losango quando (e apenas quando) as diagonais são perpendiculares (teorema e recíproco).

O quadrado, por ter os ângulos geometricamente iguais goza das propriedades do retângulo; por ter os lados geometricamente iguais goza de todas as propriedades do losango. As diagonais do quadrado são, pois, geometricamente iguais, bissetam-se uma à outra e são perpendiculares. Reciprocamente: os quadriláteros cujas diagonais são geometricamente iguais e se bissetam, em ângulo reto, são quadrados.

Áreas de quadriláteros

Chama-se **área**, à medida de grandeza de uma superfície qualquer. É do nosso conhecimento, que podemos ter duas superfícies com a mesma área, mas sem terem a mesma forma, ou duas figuras podem ter a mesma forma, sem terem a mesma área. Assim, duas figuras que têm a mesma área, sem terem a mesma forma, dizem-se **equivalentes**.

A **área do retângulo** é igual ao produto da medida da base pela medida da altura (teorema): $b \times h$.

Assim, podemos deduzir que a **medida do quadrado** é igual ao quadrado da medida do lado (corolário): l^2.

Todo o paralelogramo é equivalente a um retângulo da mesma base e da mesma altura (figura 5). Logo, a **área do paralelogramo** é igual ao produto da medida da base pela da altura (teorema): $b \times h$. Além disso, qualquer paralelogramo se pode decompor em dois triângulos congruentes, com a mesma base e a mesma altura que ele (figura 9).

Relativamente ao trapézio (propriamente dito), podemos verificar que o segmento de reta que une os meios dos lados não paralelos de um trapézio é estritamente paralelo às bases, e a sua medida é igual à semissoma da medida das bases (teorema). Um trapézio é, pois, equivalente a um retângulo que tem a mesma altura e cuja medida de base é igual à semissoma das medidas das bases do trapézio (teorema). Podemos então concluir que a **área do trapézio** é igual à medida da semissoma das bases multiplicada pela da altura (teorema): $\frac{B+b}{2} \times h$.

Um papagaio, por sua vez, pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos (geometricamente iguais dois a dois), e a partir de transformações isométricas, podemos obter um retângulo equivalente (figura 9), cuja medida de comprimento é igual à medida da diagonal maior (D) e cuja altura é metade da medida de comprimento da diagonal menor (d). Assim, a **área do papagaio** é igual ao produto da medida da diagonal maior pela metade da medida da diagonal menor: $D \times \frac{d}{2}$.

Como o losango é um papagaio, a **área do losango** também se determina do mesmo modo. Nessa linha de pensamento, dado que o quadrado é um losango e um paralelogramo, podemos utilizar para o seu cálculo de área, as mesmas fórmulas utilizadas para o cálculo da área do losango ou do paralelogramo.

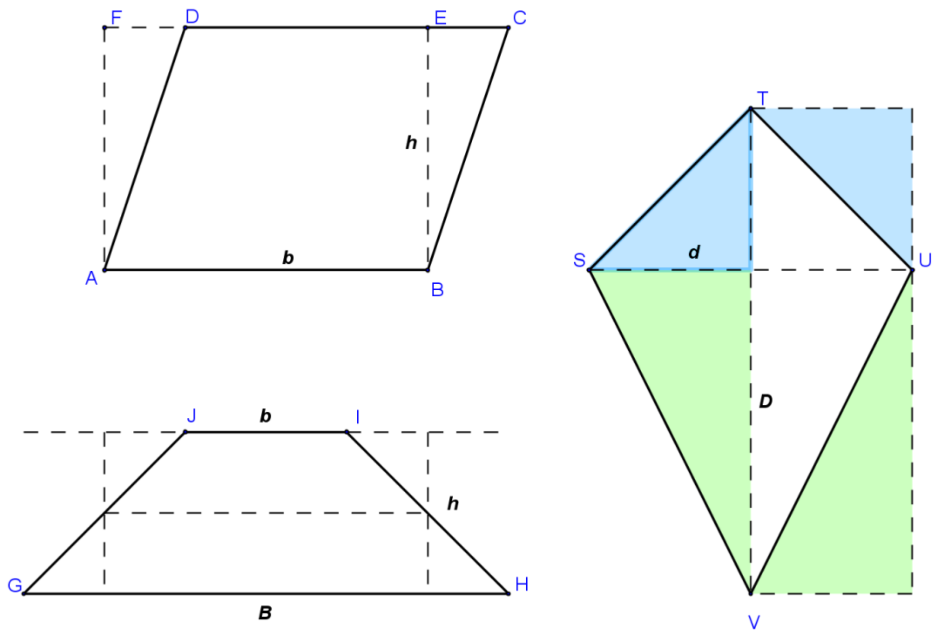


Figura 9 - Relação entre as áreas de quadriláteros e a área do retângulo formado a partir dos mesmos

Estratégias de ensino-aprendizagem

"Uma das prioridades é estabelecer uma atmosfera na sala de aula que encoraje os alunos a explorar e investigar problemas de geometria, a colocar questões, a recorrer ao pensamento divergente e ao raciocínio lógico para desenvolver argumentos irrefutáveis e convincentes" (NCTM, 2001, p. 8). Desta forma, durante a minha intervenção letiva e tendo em conta o objetivo de estudo, procurei utilizar estratégias de ensino-aprendizagem exploratório, assente na resolução de tarefas, essencialmente, de caráter exploratório. Tal como refere Ponte (2005, p. 12), a característica principal desse tipo de ensino "é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem".

Considerando essa abordagem, as aulas centraram-se no trabalho realizado pelos alunos e os momentos de discussão, posteriores à realização de uma dada tarefa, assumiram um papel fundamental. No fundo, ao longo da minha intervenção letiva, as aulas estruturaram-se (no geral) em quatro fases: (i) apresentação da tarefa; (ii) trabalho autónomo dos alunos; (iii) discussão coletiva (iv) e sistematização dos conceitos.

De facto, são essas as fases que caracterizam uma aula exploratória típica. A primeira fase, a apresentação da tarefa à turma, é um momento decisivo para o desenvolvimento do trabalho dos alunos, dado que é fundamental que os mesmos compreendam o contexto e os objetivos da tarefa e se sintam envolvidos para assumir o desafio da sua resolução (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Assim, dadas as características da turma em questão, esta fase tornou-se essencial, pois tive o cuidado de assegurar-me que os alunos entendiam o que era pretendido fazer e que recursos deveriam utilizar.

Já no momento em que os alunos trabalham de forma autónoma, o professor deve ter em conta uma série de aspetos: orientar os alunos mas não em demasia, deixando-os utilizar as suas próprias estratégias; em vez de validar a correção das resoluções feitas pelos alunos, deve colocar-lhes questões com o intuito de os fazer refletir sobre os seus erros ou respostas; e escolher e ordenar, de forma cuidada, essas resoluções (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Na verdade, "as técnicas de fazer perguntas do professor e a linguagem que utiliza ao dirigir o pensamento dos alunos são críticas para o desenvolvimento da compreensão das relações em geometria" (NCTM, 1991, p. 134).

Esta fase, durante a intervenção letiva, foi sempre um pouco esgotante, dado que os alunos faziam muitas solicitações às professoras (a mim e à professora titular). Assim, tendo em conta o pouco ritmo de trabalho revelado por alguns pares, as diversas estratégias de ensino aplicadas nesse momento – como a orientação da sua atividade e a colocação de perguntas com o propósito de os auxiliar a ultrapassar as dificuldades – foram de uma grande utilidade para que o trabalho dos alunos evoluísse de modo produtivo. Ademais, à medida que ia acompanhando o trabalho dos grupos, as mesmas estratégias conduziram-me à interrupção da aula quando verificava que os alunos sentiam a mesma dúvida e à organização prévia da discussão da tarefa, selecionando os alunos que poderiam apresentar e discutir as suas resoluções.

A discussão da tarefa é, sem dúvida, uma fase crucial de oportunidade de aprendizagem matemática para todos os alunos (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014), onde a exposição e o confronto das suas resoluções no quadro, a apresentação das suas justificações e a troca de opiniões conduzem ao desenvolvimento da comunicação e do pensamento matemático.

Ao longo das aulas lecionadas, a gestão da discussão também foi uma função muito difícil. Tentei assumir um papel de moderadora, gerindo as intervenções dos alunos e orientando o respetivo conteúdo – tal como é descrito o papel de um professor nesses momentos de discussão (Ponte, 2005) – porém, quando surgiam vários obstáculos, recorria ao questionamento, adquirindo um papel mais central, por forma a conduzir os alunos ao objetivo pretendido. Independentemente dessa situação, muitos alunos serviram-se deste momento para participar, mostrando as suas aprendizagens efetuadas com a realização das tarefas e outros alunos, com maiores dificuldades, aproveitaram-no para esclarecer as suas dúvidas ou desbloquear o seu raciocínio. Daí que esta fase se tenha tornado fundamental para os alunos, promovendo capacidades de comunicação, argumentação e raciocínio.

Por último, a sistematização também merece especial atenção, pois tanto permite o foco de ideias matemáticas ou procedimentos relativos à exploração da tarefa como evidencia ligações com aprendizagens anteriores (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2014). Este momento não se desenvolveu ao longo de todas as aulas lecionadas, mas quando teve lugar, permitiu reforçar algumas ideias discutidas ou abriu caminho para a definição de novas propriedades sobre os quadriláteros.

É importante salientar que se privilegiou o método de trabalho a pares, uma vez que apresenta múltiplas vantagens, onde a troca de ideias e o esclarecimento de dúvidas entre os alunos são algumas delas. A meu ver, através desse método e de uma boa orientação do professor, os alunos tornam-se mais autónomos, responsáveis e motivados, ultrapassando mais facilmente as suas dificuldades. Apesar de este método não ter sido uma prática frequente nas aulas lecionadas pela professora titular, pareceu-me que essa seria a melhor maneira de os alunos resolverem as tarefas propostas, devido à sua natureza exploratória e às dificuldades que a turma habitualmente apresentava.

Tal como já foi referido, considerando a problemática do estudo, procurei que os alunos alcançassem os objetivos visados através de tarefas de exploração. Esse tipo de tarefas são relativamente abertas e fáceis. A partir da sua realização, espera-se que os alunos descubram uma metodologia própria para resolver uma dada questão, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa (Ponte, 2005). Assim, a partir das tarefas de cunho exploratório, os alunos tiveram oportunidade para construir as suas próprias definições relativamente aos quadriláteros e alargar as suas capacidades de raciocínio indutivo e dedutivo.

Os alunos também tiveram ocasião para resolver outro tipo de tarefas (com menor expressão), nomeadamente a resolução de exercícios e a resolução de problemas, possibilitando uma diversidade de experiências matemáticas. A necessidade da diversificação de tarefas deve-se ao facto de cada um desses tipos desempenhar um papel importante para alcançar os diferentes objetivos curriculares (Ponte, 2005).

Planificação da unidade de ensino

As subunidades de ensino referentes aos quadriláteros foram lecionadas durante 2 tempos de 45 minutos e 4 tempos de 90 minutos, ou seja, ao longo de seis aulas. As primeiras cinco aulas tiveram lugar no 2.º período (entre os dias 2 e 11 de Março) e a última aula decorreu já no início do 3.º período (10 de abril).

Na verdade, as últimas semanas de aulas do 2.º período foram destinadas à realização de atividades extracurriculares que decorreram na escola, não havendo, por isso, condições propícias para a continuação do estudo de caráter investigativo. Sem embargo, todos os conteúdos relativos aos quadriláteros foram abordados durante o 2.º período e, portanto, não prejudicou o respetivo trabalho e a última aula lecionada serviu, essencialmente, para retomar e consolidar conceitos já aprendidos.

A planificação para esta sequência de aulas foi elaborada tendo em conta a planificação a médio e longo prazo da professora titular da turma, os objetivos preconizados no programa de Matemática atual (ME, 2013), e as características dos alunos (quadro 4).

Quadro 4 – Planificação das subunidades dos quadriláteros e respetiva calendarização das aulas

Data	Fichas de trabalho/ Tarefas	Conteúdos	Objetivos específicos
2 de março (45 minutos) 2.ª feira 10h50 **4 de março** (90 minutos) 4.ª feira 8h15	De volta dos quadriláteros…	Classificação de quadriláteros.	Metas GM7.2 - Investigar propriedades relativas aos lados e aos ângulos dos quadriláteros; - Reconhecer as características específicas dos trapézios isósceles, retângulo e escaleno, do paralelogramo obliquângulo, do quadrado, do retângulo, do losango e do papagaio; - Estabelecer hierarquias entre os quadriláteros, atendendo às suas características. Reconhecer, por exemplo, o quadrado como caso particular do losango e do retângulo.
6 de março (90 minutos) 6.ª feira 8h15	Investigando as diagonais dos quadriláteros	Propriedades das diagonais de um quadrilátero.	Metas GM7.2 - Investigar propriedades relativas às diagonais dos quadriláteros; - Caracterizar paralelogramos e trapézios (não paralelogramos) através das diagonais.
9 de março (45 minutos) 2.ª feira 10h50	Elaborando demonstrações		Meta GM7.2.24; Meta GM7.3.1. - Formular, testar e demonstrar conjeturas. - Compreender o significado de demonstração e conjetura. - Identificar elementos de um trapézio. - Utilizar critérios de igualdade de triângulos e relações entre ângulos na elaboração de demonstrações.
11 de março (90 minutos) 4.ª feira 8h15	Áreas de quadriláteros	Áreas de quadriláteros (paralelogramo e papagaio).	Metas GM7.8 - Relacionar a área de um retângulo com a área de um paralelogramo e relacionar a área de um retângulo com a área de um papagaio; - Reconhecer a altura e a base de um paralelogramo e a diagonal maior e a menor de um papagaio. - Deduzir a fórmula da área de um paralelogramo e de um papagaio.
10 de abril (90 minutos) 6.ª feira 8h15	Descobrindo polígonos/ Comparar áreas	Polígonos. Classificação e áreas de quadriláteros.	Metas GM7.3 - Utilizar propriedades de polígonos e classificá-los. - Expressar processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito. - Identificar base e altura de um triângulo e de um paralelogramo. - Relacionar e calcular medidas de áreas de quadriláteros e triângulos. - Formular e testar conjeturas.

No que respeita à planificação das aulas, dado que as tarefas propostas tinham um carácter exploratório optei por elaborar planos de aula mais detalhados (anexo I), integrando uma série de elementos: objetivos, recursos, metodologia de trabalho, atividades do aluno e da professora, avaliação, etc. Afinal, segundo alguns autores, "é necessário que o professor disponha de um fio condutor para a acção que vai desenvolver e de uma previsão para os resultados dessa acção" (Abrantes, 1985).

Assim, nesses planos, descrevi possíveis estratégias de resolução de tarefa, antecipei dificuldades dos alunos e, em paralelo, previ as minhas ações, incidindo sobre o modo como poderia ajudar os alunos a ultrapassar esses obstáculos e sobre o tipo de sugestões que poderia fornecer ou questões que poderia colocar para promover as suas aprendizagens matemáticas. Também aqui tive em consideração as capacidades reveladas pelos alunos bem como a dinâmica das aulas de matemática. Nesse sentido, foi muito importante a assistência das aulas no período prévio à minha intervenção letiva, pois permitiu perceber as dificuldades da turma, o seu envolvimento na realização das tarefas, a estrutura das aulas, etc.

Apesar de ter constituído um processo demorado, penso que essa preparação mais cuidada das aulas contribuiu realmente para o meu trabalho enquanto professora, orientando-me melhor para a tomada de decisões no decorrer das aulas. Além disso, esses planos de aula – com novas adaptações, sugestões ou alterações – podem ser usados como futura referência em outras turmas, sendo essa uma das vantagens apontadas da planificação (Abrantes, 1985).

As fichas de trabalho

Ao longo da sequência de aulas foram propostas cinco fichas de trabalho (quadro 4), e para a sua construção tive duas grandes preocupações: atender ao objetivo do presente estudo e procurar que os alunos explorassem situações que permitissem a aquisição de conhecimento relativo às subunidades dos quadriláteros.

A maior parte das fichas de trabalho têm um cunho exploratório e foram selecionadas/ adaptadas do manual de Matemática ou recorrendo a outras fontes. Além disso, as fichas foram trabalhadas pelos alunos a pares (salvo exceções), em sala de aula. Assim, na seção seguinte, apresento uma breve descrição das fichas, incluindo os objetivos, os conteúdos implícitos e os materiais utilizados.

Ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…"

O conjunto de tarefas de natureza exploratória presente na ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…" (anexo VI) pretende introduzir o estudo da classificação de quadriláteros e suas propriedades.

A primeira questão remete para o preenchimento de uma tabela que diz respeito à exploração e identificação de características relativas aos ângulos internos e lados dos quadriláteros, com base na observação e medição (de amplitudes de ângulos internos, comprimentos dos lados, etc.).

Os quadriláteros a estudar – trapézios isósceles, retângulo e escaleno; paralelogramo obliquângulo; quadrado; retângulo; losango; e papagaio – encontram-se desenhados e identificados na própria ficha de trabalho e são de grandes dimensões para facilitar as medições necessárias à resolução da tarefa. A colocação propositada dos nomes dos quadriláteros na ficha serve ainda para evitar entraves na sua identificação.

É preciso ter em conta que esta ficha destina-se ao uso de papel e lápis, com o recurso a instrumentos de desenho (régua, esquadro, transferidor) e, portanto, esperava-se um dispêndio de tempo elevado, sobretudo com a realização das medições.

O preenchimento da tabela conduz a uma classificação dos quadriláteros por partição. No seguimento dessa atividade, são colocadas aos alunos questões com vista à identificação de semelhanças e diferenças entre os diversos quadriláteros.

A segunda questão da ficha de trabalho já encaminha os alunos para uma classificação hierárquica, sendo necessário o preenchimento do diagrama de Venn com os nomes dos quadriláteros estudados na primeira questão. O registo escrito da justificação relativa ao preenchimento desse diagrama e às ligações estabelecidas entre os quadriláteros tem um propósito duplo: desenvolver a comunicação dos alunos e oferecer ao professor a oportunidade de aceder ao seu raciocínio (geométrico).

A realização desta ficha de trabalho permite, assim, que os alunos construam as suas próprias definições relativas aos quadriláteros e que tomem contacto, pela primeira vez, com a classificação hierárquica, sendo a utilização deste tipo de classificação a mais vantajosa (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Além disso, os alunos têm oportunidade para rever uma série de procedimentos e conceitos relacionados à geometria, como a medição de ângulos, a identificação dos tipos de ângulos, a escrita das notações das entidades geométricas, a posição relativa das retas, o significado de diagramas de Venn,…

Anexado à ficha de trabalho, também se encontra um quadro de apoio para os alunos com maiores dificuldades. Este quadro apresenta um conjunto de propriedades que ajuda os alunos a caracterizar os quadriláteros, a encontrar relações entre eles e a defini-los.

Ficha de trabalho "Investigando as diagonais dos quadriláteros"

Para o estudo das propriedades das diagonais dos quadriláteros foi elaborada uma ficha de trabalho de cunho exploratório, cuja estrutura é semelhante à anterior. Desse modo, a ficha de trabalho "Investigando as diagonais dos quadriláteros" (anexo VII) remete para o preenchimento de uma tabela, conduzindo os alunos à construção das diagonais de vários quadriláteros (com a ajuda de uma régua), à medição do seu comprimento, à análise da forma como se intersetam (ou seja, se as diagonais se bissetam ou não) e à existência ou não de perpendicularidade. Esta tarefa permite assim a revisão do conceito de diagonal de um polígono.

Os quadriláteros em questão apresentam-se na própria folha da ficha, mais propriamente numa malha quadriculada (geoplano), enumerados por numeração romana e cujos vértices estão identificados por letras maiúsculas.

De notar, que também aqui foi criado um quadro de apoio por forma a auxiliar os alunos com maiores dificuldades na caracterização das diagonais dos quadriláteros, apresentando os seus critérios de classificação.

Além da caracterização dos paralelogramos e dos trapézios (não paralelogramos) através das propriedades das diagonais, esperava-se que os alunos mobilizassem os conhecimentos adquiridos com a concretização da ficha de trabalho anterior, identificando e classificando cada um dos quadriláteros fornecidos. Em adição a partir da sua resolução, pretendia-se que os alunos fossem capazes de concluir/ sintetizar (com a orientação do professor) algumas propriedades das diagonais que são próprias de todos os paralelogramos, ou dos retângulos, ou ainda dos losangos.

Dessa forma, as produções dos alunos resultantes da realização da ficha e as discussões entre os mesmos que eventualmente surgissem à volta do respetivo trabalho foram considerados dados importantes para o presente estudo investigativo.

Ficha de trabalho “Elaborando demonstrações”

A ficha de trabalho “Elaborando demonstrações” (anexo VIII) é composta por uma tarefa mais fechada, e tem como objetivo principal provar a seguinte propriedade: “Todo o trapézio com bases geometricamente iguais é um paralelogramo”. Apesar de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, tão valorizado na área da geometria por diversos autores, a ficha tinha por objetivo principal ajudar à consecução dos objetivos preconizados no programa de Matemática atual (ME, 2013).

Tendo em conta o elevado desafio matemático da tarefa, o nível de escolaridade e as características da turma em questão, esta tarefa foi pensada para ser realizada em grande grupo (com a turma toda), a partir da orientação do professor.

Em primeiro lugar esperava-se que os alunos compreendessem a propriedade referida e verificassem a sua veracidade, tendo como suporte o *software Geogebra* (recurso do professor) que, por sua vez, facilitaria a criação de construções.

A demonstração era organizada num quadro de duas colunas (existente na ficha), onde numa das colunas estavam registados os vários passos. Assim, os alunos deveriam completar a outra coluna com a justificação de cada um dos passos apontados.

Através da sua resolução, pretendia-se ainda que os alunos compreendessem o significado de conjetura e demonstração, identificassem os elementos de um trapézio e utilizassem relações entre ângulos e critérios de congruência de triângulos durante a elaboração da prova.

Ficha de trabalho “Áreas de quadriláteros”

Esta ficha de trabalho (anexo IX) pretendia que os alunos deduzissem a fórmula que permite calcular a área de um paralelogramo e de um papagaio. Dessa forma, a ficha foi composta por duas tarefas exploratórias e recorria a construções feitas em papel.

Na primeira tarefa, os alunos deviam, a partir da construção de um retângulo e da sua posterior decomposição, obter um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura que o retângulo. Já na segunda tarefa, pretendia-se que os alunos elaborassem um papagaio, decompusessem-no em três peças e construíssem, com as mesmas peças, um retângulo. Assim, esperava-se que a concretização de ambas as tarefas desenvolvesse nos alunos a intuição para o facto da área do paralelogramo e do papagaio poderem ser obtidas através da área do retângulo.

A construção dos quadriláteros envolvia a identificação das suas propriedades e o estabelecimento das relações entre a área de um retângulo e a área de um paralelogramo (ou de um papagaio) permitia o reconhecimento dos elementos dos quadriláteros, e possibilitaria a revisão das fórmulas das áreas de outros polígonos, como a do retângulo e a do triângulo.

Tendo em consideração o objetivo do presente trabalho investigativo, esta ficha de trabalho procurava, sobretudo, dar a conhecer o modo como os alunos formulam as suas conjeturas, as suas dificuldades e o papel da visualização nesse processo.

Para a construção do retângulo e do papagaio era importante a utilização, por parte dos alunos, de material de desenho (como lápis, régua e tesoura), e durante a discussão coletiva, poderia ser pertinente o professor recorrer a modelos de grandes dimensões (dos mesmos quadriláteros), por forma a mostrar aos alunos o procedimento a realizar durante cada uma das tarefas.

Ficha de trabalho "Descobrindo polígonos" e "Comparar áreas"

A última ficha de trabalho foi criada com o intuito de os alunos aplicarem e ampliarem os seus conhecimentos sobre as propriedades, a classificação e as áreas dos quadriláteros e reverem conceitos relativos a outros polígonos (triângulos, pentágonos, hexágonos, octógonos, …).

Cada uma das partes da ficha de trabalho expõe uma tarefa exploratória, com objetivos específicos distintos. Contudo, para a realização de ambas as tarefas, esperava-se que os alunos formulassem e testassem conjeturas, contribuindo dessa forma para o estudo investigativo.

A partir da tarefa "Descobrindo polígonos" (anexo X), os alunos tiveram oportunidade de trabalhar com materiais manipuláveis, ou seja, com quadrados em acetato de cores e tamanhos diferentes. Através da manipulação desses quadrados em acetato, os alunos deviam procurar quais os polígonos que conseguissem gerar por sobreposição de dois quadrados, classificando-os e descrevendo-os e aqueles que não poderiam obter por sobreposição.

Desse modo, os alunos deviam produzir um registro escrito com as suas descobertas, indicando o nome dos polígonos e apresentando o respetivo esboço e os argumentos que justificassem a razão da sua escolha. Por conseguinte, a tarefa poderia proporcionar aos alunos a possibilidade de poderem desenvolver a sua comunicação matemática e oferecer ao professor a viabilidade de verificar as aprendizagens realizadas pelos alunos sobre os quadriláteros e quais os tipos de definições que os alunos usam preferencialmente. A análise deste último ponto permite responder a uma das questões de investigação.

O material de desenho também poderia fazer parte dos recursos utilizados pelos alunos, pelo que pode auxiliar a identificação das propriedades dos polígonos e a construção dos esboços dos polígonos gerados por sobreposição de dois quadrados.

Dado o número elevado de descobertas que se pode concretizar, foi prevista a entrega (aos alunos) da resolução da tarefa com os esboços dos vários polígonos formados por interseção de dois quadrados em acetato, as descrições do modo como são obtidos e a explicitação das suas características.

A segunda parte da ficha trabalha, essencialmente, o cálculo de áreas de paralelogramos e de triângulos, e é composta por duas questões. A primeira questão envolve a identificação dos elementos do paralelogramo e do triângulo, a aplicação das fórmulas das suas áreas e a compreensão de que a região sombreada e a região não colorida têm a mesma medida de área. A segunda questão, mais aberta, permite a formulação de uma conjetura sobre o que acontece à área da região colorida quando se desloca um ponto (E) ao longo de uma das bases do paralelogramo.

Para a discussão da primeira parte, foi prevista a possibilidade de o professor recorrer ao retroprojetor, facilitando a apresentação dos alunos relativamente ao seu trabalho realizado e, para a discussão da segunda parte, o *software Geogebra*, desenvolvendo a justificação para a conjetura formulada.

Recursos

Os recursos utilizados ao longo das aulas sobre os quadriláteros, como suporte às fichas de trabalho propostas aos alunos, foram: manual de Matemática adotado na escola, material de desenho e de medição, materiais manipuláveis, geoplano (reproduzido em papel) e o *Geogebra*. Este último recurso mencionado foi apenas utilizado por mim, durante as minhas funções de professora.

Sempre que foi necessário e oportuno, procurei então que os alunos utilizassem o seu manual – fosse para apoiar a sua atividade na aula, ou para resolver tarefas matemáticas –, devido à sua fácil acessibilidade e forte familiaridade dos alunos com o recurso. No que diz respeito aos restantes materiais, tentei seguir as indicações metodológicas das Normas (NCTM, 1991; 2000), privilegiando assim o uso de materiais manipuláveis.

Na verdade, as Normas (NCTM, 1991; 2000) apelam para o uso de objetos (como o geoplano), materiais manipuláveis e o recurso de *softwares* de geometria dinâmica com o intuito de criar formas de duas dimensões. Em particular, a utilização do geoplano oferece momentos de aprendizagem relevantes para os alunos, dado que permite a exploração de relações, a descoberta de padrões, a formulação de conjeturas e a participação num processo cooperativo (NCTM, 2001).

Apesar de se realçar a importância do recurso de *softwares* de geometria dinâmica, como o *Geogebra*, a escola em questão dispõe apenas de uma sala de computadores, inviabilizando, assim, a realização de atividades (por parte dos alunos) que envolvessem a sua utilização. No entanto, dado que cada sala de aula contém um computador, foi possível recorrer ao *Geogebra* e projetar o *écran* do computador para que todos os alunos pudessem visualizar. Este recurso foi utilizado em diversas situações, quando considerei conveniente e apropriado para acompanhar a discussão coletiva de uma dada tarefa.

Síntese das aulas

Dada a imprevisibilidade das situações num contexto em sala de aula, houve necessidade de realizar reajustamentos e/ou alterações às planificações originais, à medida que decorriam as aulas lecionadas. Assim, as planificações de aula apresentadas em anexo não correspondem aos planos elaborados inicialmente.

De seguida apresento uma descrição sumária das aulas realizadas, explicitando em que medida os objetivos previstos foram alcançados, e identificando as aprendizagens realizadas e as principais dificuldades sentidas pelos alunos. Em alguns casos, posso ainda apontar aspetos que considero que devem ser alterados na planificação.

É preciso ter em conta que algumas fichas de trabalho propostas foram trabalhadas em mais do que uma aula.

Aula do dia 2 de março

A primeira aula tinha como propósito o início do estudo dos quadriláteros, a partir da exploração das suas propriedades relativas aos lados e aos ângulos. Para tal foi prevista a realização da primeira questão da ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…". Assim, através da medição do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos internos dos quadriláteros fornecidos na folha da ficha, era pedido aos alunos que identificassem essas propriedades e registassem as observações na respetiva tabela.

O início da aula decorreu tal como planeado: após a escrita do sumário no quadro, distribuí a ficha de trabalho e o material de desenho e, de imediato, informei os alunos que iriam trabalhar a pares, deveriam escrever a caneta na folha da tarefa e apresentar as respostas e os seus raciocínios por escrito, incluindo os raciocínios abandonados e os erros (estes últimos deveriam ser colocados entre parêntesis).

Dado que era uma aula de 45 minutos e, por conseguinte, estava com algum receio do pouco tempo que dispunha, orientei os alunos para o objetivo da tarefa, escrevendo no quadro os critérios que os alunos deveriam atender para descrever as propriedades dos quadriláteros, nomeadamente a medida de comprimento dos lados; o paralelismo/ não paralelismo dos lados opostos e a medida de amplitude dos seus ângulos internos.

Quando acompanhei o trabalho autónomo dos alunos, apercebi-me que os termos "paralelismo" e "lados opostos" geraram alguma confusão, uma vez que os alunos não compreenderam o seu significado. Além disso, alguns alunos apresentaram dificuldades na utilização das notações das entidades geométricas e na medição de ângulos. Esta última dificuldade prendeu-se com o manuseamento incorreto dos transferidores. Desse modo, foi necessário clarificar as dúvidas e auxiliar os alunos a ultrapassarem os seus problemas, colocando questões ou fazendo sugestões, tal como previsto no plano de aula.

Não obstante, a resolução da primeira questão correu bastante bem: os alunos envolveram-se na tarefa e o método de trabalho escolhido (a pares) foi bem aceite, dado que a maioria dos grupos trabalhou bem, partilhando ideias e opiniões. O bom ritmo de trabalho deveu-se ao apoio proporcionado pela professora titular e pela minha colega de estágio, que também circularam pelas mesas de modo a esclarecer dúvidas.

Apesar do bom trabalho revelado pela maioria da turma, houve elementos perturbadores na sala de aula, causadores de algum barulho. Essa situação terá contribuído para que um grupo significativo de alunos não fosse capaz de completar (na totalidade) a primeira questão da tarefa.

No final da aula, recolhi o material de desenho e as fichas de trabalho, cuja análise foi essencial para a discussão coletiva da aula seguinte.

Aula do dia 4 de março

Esta aula prosseguiu com o estudo dos quadriláteros e com a realização da ficha de trabalho iniciada na aula anterior. Assim, o seu objetivo principal consistia na discussão em grande grupo sobre as características específicas dos trapézios, dos paralelogramos e do papagaio (identificadas na aula anterior pelo preenchimento da tabela) e as hierarquias entre esses quadriláteros.

Comecei a aula retomando alguns pontos, como o significado de "lados opostos" e de "lados paralelos". Apesar de ter recorrido a alguns esboços para auxiliar a compreensão desses termos, os alunos ao longo da aula continuaram a apresentar dúvidas relativamente aos mesmos.

Dado que a maioria dos alunos não tinha terminado a primeira questão da ficha de trabalho, decidi atribuir mais tempo para a sua conclusão. Durante esse período, observei que os alunos não se mostraram entusiasmados, revelando inclusive dificuldades na sua realização – contrariamente ao que tinha acontecido na aula anterior – e, por conseguinte, não avançaram de forma significativa na resolução da tarefa.

Posteriormente, um aluno foi ao quadro apresentar a sua resolução. A discussão coletiva prolongou-se mais do que esperado: além do tempo excessivo gasto por esse aluno no preenchimento da tabela no quadro branco, a própria discussão foi um pouco exaustiva, uma vez que incluiu a descrição das propriedades dos vários quadriláteros. Consequentemente, os alunos dispersaram-se, tornaram-se irrequietos e não participaram de forma desejável. Penso que poderia ter gerido essa discussão de modo diferente e preenchido com a ajuda dos alunos parte da tabela, poupando, assim, algum tempo.

De seguida, discuti com a turma a resolução das restantes alíneas da primeira questão, que conduziu à construção das definições de “paralelogramo” e de “trapézio” e à conclusão que o quadrado tem características comuns ao retângulo e ao losango. Dado que já tínhamos perdido algum tempo, decidi gerir esse momento, questionando os alunos sobre as suas respostas. No final, escrevi no quadro as definições desses conceitos.

No seguimento da discussão apercebi-me que não iria ter tempo para discutir a segunda questão da ficha de trabalho e, por isso, os restantes 15 minutos da aula foram dedicados apenas à sua realização. Nessa pergunta, os alunos tinham de completar o diagrama de Venn, agrupando os quadriláteros em diferentes famílias. Tal como previsto, esta situação gerou muitas dificuldades. Mesmo com a explicação do diagrama e do que se pretendia com a tarefa e com o conhecimento das definições de “paralelogramo” e de “trapézio”, tornou-se muito difícil para estes alunos a utilização de uma classificação inclusiva dos quadriláteros. Assim, o plano elaborado para esta aula não foi totalmente cumprido durante a sua execução e, portanto, não foi possível atingir todos os objetivos definidos.

De referenciar que nesta aula também não foi utilizada a linguagem mais correta, tendo-se referido “lados iguais” em vez de “lados geometricamente iguais” e “lados paralelos” em vez de “lados estritamente paralelos”. Essa falta de rigor foi alterada nas restantes aulas.

Aula do dia 6 de março

A presente aula foi concebida com o propósito principal de identificar as propriedades das diagonais de um quadrilátero. Para o efeito, estava previsto a realização da ficha de trabalho “Investigando as diagonais dos quadriláteros”, onde era proposto aos alunos a construção das diagonais dos vários quadriláteros apresentados no geoplano (reproduzido na folha da ficha), a sua classificação e o preenchimento de uma tabela, tendo em conta a medida de comprimento das diagonais, a forma como se intersetam e a existência de perpendicularidade.

Para não perder tempo com questões técnicas, preparei antecipadamente a aula, ligando o computador que iria utilizar para projetar os quadriláteros construídos no geoplano – através da última aula, apercebi-me que esta estratégia poderia ajudar para a identificação dos quadriláteros durante a discussão coletiva –, dividi o quadro em duas partes e desenhei a tabela que iria ser preenchida no momento da discussão.

Dado que os objetivos propostos da aula anterior não foram totalmente concretizados, comecei a presente aula com a discussão da segunda questão da ficha de trabalho “De volta dos quadriláteros…”. Aqui, surgiram algumas questões interessantes por parte dos alunos sobre o quadrado ser um caso particular do losango e do retângulo. Por exemplo, a Catarina questionou a professora titular para confirmar se o quadrado era de facto um retângulo, e justificou a sua questão com a apresentação da definição do retângulo. O Lourenço, por seu turno, não compreendeu a pergunta feita pela colega, respondendo que o quadrado não poderia ser um retângulo, pois este tem algo que o primeiro não tem, medidas de comprimento diferentes.

Após a distribuição das fichas de trabalho sobre as diagonais, fiz uma pequena introdução ao geoplano, mostrando um modelo e questionando os alunos sobre o seu conhecimento. A maioria estava já familiarizada com esse objeto, tendo sido trabalhado na escolaridade primária.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, foi evidente a manifestação de dificuldades na compreensão do conceito de diagonal de polígonos. Os próprios “pontos” da malha quadriculada do geoplano criaram confusão nos alunos, os quais traçaram linhas entre pontos que não correspondiam a vértices de quadriláteros.

Quando esses aspetos foram esclarecidos, outros obstáculos surgiram, nomeadamente no preenchimento da tabela. Para desbloquear essa situação, apresentei um exemplo no quadro relativo ao quadrado, levando a turma a compreender qual o foco do estudo das diagonais de um quadrilátero. Ao motivar o trabalho dos alunos, estes acabaram por preencher a tabela sem grandes dificuldades.

No momento da discussão coletiva, um par de alunos (selecionado) foi ao quadro preencher a tabela, tal como planeado. Os colegas intervieram, concordando ou contrapondo o que estava escrito no quadro. Nesta fase, surgiram discussões importantes, sobretudo no que diz respeito à classificação dos quadriláteros. Por exemplo, um grupo de alunos caracterizou (incorretamente) o papagaio como sendo um quadrilátero com um ângulo interno reto (tal como a representação do papagaio da ficha de trabalho anterior). Já outros alunos foram capazes de identificar e reconhecer corretamente os quadriláteros fornecidos nas fichas. Tornou-se assim numa boa oportunidade para identificar as aprendizagens realizadas pelos alunos em aulas anteriores.

A turma esteva particularmente agitada e desatenta, e alguns alunos demonstraram um comportamento desapropriado dentro da sala de aula.

Consequentemente tive necessidade de fazer várias chamadas de atenção e repetir informações. Todavia, os objetivos estabelecidos para esta aula foram cumpridos.

Aula do dia 9 de março

Iniciei a aula com a escrita do sumário no quadro e a revisão da definição de "trapézio" e dos seus elementos. A ficha de trabalho prevista para a aula – "Elaborando demonstrações" – tinha como objetivo provar que todo o trapézio de bases geometricamente iguais é um paralelogramo.

Desse modo, questionei os alunos, tal como planeado, sobre que quadrilátero poderíamos obter ao considerar um trapézio com bases geometricamente iguais. Era suposto verificarmos a conjetura com o auxílio do *Geogebra*, no entanto a ocorrência de problemas técnicos impediram a sua utilização. Como alternativa, sugeri aos alunos que experimentassem no papel, para que fossem capazes de conjeturar que, de facto, geravam um paralelogramo sempre que construíam um trapézio de bases geometricamente iguais (fosse esse um quadrado, um retângulo, um losango, ou um paralelogramo obliquângulo). Todas as ideias desenvolvidas pelos alunos foram assim discutidas em grande grupo e com a minha orientação.

Posteriormente, levei a turma a compreender a necessidade e a importância de justificar a veracidade da conjetura formulada e, nesse seguimento, distribuí a ficha de trabalho referida para dar início à demonstração organizada em duas colunas.

Dado que dispúnhamos de pouco tempo – pois era uma aula muito curta, de 45 minutos –, não foi possível explorar de forma apropriada o significado de "conjetura" e a função verificativa da demonstração, sendo esse um dos objetivos específicos definidos da ficha.

O nível de abstração da tarefa era realmente alto, mas alguns alunos foram capazes de colaborar e apresentar argumentos que justificassem os vários passos descritos na coluna da esquerda. Por outro lado, tal como se esperava, a maioria da turma apresentou muitas dificuldades durante a elaboração da demonstração (mesmo com o meu apoio), incluindo a mobilização de conhecimentos prévios, como conteúdos relacionados com as relações entre ângulos e os critérios de congruência de triângulos. Esses obstáculos foram, provavelmente, a origem da dispersão e do barulho produzido por alguns alunos, ocorrendo, por isso, algumas interrupções no decorrer da aula. Não obstante, houve momentos propícios para desenvolver a comunicação oral;

rever propriedades e conceitos geométricos, e clarificar questões que já tinham sido colocadas em aulas anteriores.

Na minha opinião, dadas as características dos alunos, os mesmos não tiveram tempo e maturidade suficiente para alcançar alguns objetivos estabelecidos no plano, no entanto a realização da ficha de trabalho em grupo constituiu uma abordagem inicial para o desenvolvimento da argumentação matemática.

Aula do dia 11 de março

A aula começou como de costume, com o sumário escrito no quadro e a distribuição da ficha de trabalho "Áreas de quadriláteros", referente à primeira parte. Recordei algumas recomendações, já apresentadas aos alunos em aulas anteriores.

Esta aula teve como intuito principal, deduzir a fórmula da área de um paralelogramo e de um papagaio, tendo como base uma tarefa de exploração. Logo no início do trabalho autónomo verifiquei que os alunos não estiveram atentos à leitura do enunciado e nem se preocuparam em reler a tarefa para descobrirem como teriam de proceder para formarem um paralelogramo a partir da decomposição de um retângulo. Além disso, surgiram obstáculos na composição do paralelogramo através das peças X e Y: alguns pares sobrepunham ambas as peças, não obtendo, dessa forma, um paralelogramo, evidenciando dificuldades nas capacidades de visualização.

A maioria dos grupos reconheceu que as medidas de área do retângulo e do paralelogramo formado eram iguais, mas não foi capaz de escrever uma fórmula que permitisse calcular a área do paralelogramo. Assim, quando iniciei a discussão coletiva, mais tarde do que previsto, a maioria dos alunos ainda não tinha realizado essa questão. De assinalar que um dos pares de alunos destacou-se pela positiva porque escreveu corretamente a fórmula da área do paralelogramo.

Esse momento não decorreu totalmente como planeado, pois a discussão da última alínea foi gerida por mim, onde procurei incentivar à exposição de ideias. Os alunos também revelaram dificuldades em como traçar a altura de um paralelogramo, relativamente a uma base. Apesar de ter questionado os alunos por que se obtinha um paralelogramo, esta situação não foi justificada de forma apropriada, dado que também não foi delineada na planificação. Verifico agora que teria sido pertinente discutir esses aspetos com os alunos, assim como mostrar por que se obtém um retângulo com a decomposição do papagaio (segunda questão).

Após a distribuição da segunda parte da ficha de trabalho, os alunos deitaram mãos ao trabalho e começaram por desenhar o papagaio, percebendo já o que tinham para fazer. Por não considerarem as suas propriedades de forma correta, muitos deles revelaram dificuldades na sua construção e consequentemente foi necessário recordá-las, em especial no que dizia respeito às suas diagonais (perpendicularidade e a forma como se intersetam). Também surgiram problemas na construção do retângulo, após o recorte das três peças do papagaio. Embora os alunos soubessem identificar um retângulo, houve casos em que a construção final não correspondeu a esse quadrilátero.

Durante a discussão coletiva, recorri a um modelo (de grandes dimensões) em cartolina (construído previamente) para apoiar a apresentação dos alunos relativa à resolução das primeiras alíneas. Mais uma vez, a maioria da turma revelou dificuldades na compreensão da fórmula da área do papagaio e, por isso, acabei por gerir a discussão desta última questão, tentando explicar por que o comprimento e a largura do retângulo formado correspondiam, respetivamente, à diagonal maior e à metade da diagonal menor do papagaio.

No final da aula, constatei que alguns alunos continuaram com dúvidas o que me levou a concluir que, se tivesse indicado os vértices no modelo de cartolina em todas as peças recortadas, talvez pudesse tê-los auxiliado a estabelecer uma relação entre os elementos do retângulo e as diagonais do papagaio. Não obstante as dificuldades sentidas pelos alunos, esta aula foi importante para o desenvolvimento das suas capacidades de visualização.

Tal como previsto, distribuí um quadro com a síntese de todas as propriedades dos quadriláteros (ângulos, lados e diagonais) estudadas até à data (anexo IX).

Aula do dia 10 de abril

Como a matéria relativa aos quadriláteros já tinha sido lecionada no final do 2.º período, o objetivo desta última aula, com a realização de duas tarefas de exploração, prendia-se com a aplicação e a ampliação de conceitos sobre as propriedades e as áreas de quadriláteros e de outros polígonos. Assim, pretendia que os alunos mobilizassem conhecimentos já adquiridos em anos anteriores e revistos este ano letivo sobre a classificação de triângulos e de polígonos, e pretendia verificar as aprendizagens realizadas sobre os quadriláteros.

Os recursos a utilizar na aula eram diversos, de maneira que preparei antecipadamente a sala de aula, procurando posicionar o retroprojetor no local certo, ligar o computador para a utilização do *software Geogebra* e reunir material de desenho (réguas e transferidores) para a realização da primeira tarefa. De referenciar que nesta tarefa, os alunos utilizaram materiais manipuláveis. Penso que a atitude dos alunos perante esse material foi muito positiva, uma vez que se demonstraram interessados e entusiasmados.

Os alunos compreenderam que era necessário identificar e descrever os polígonos que podiam obter com a sobreposição de dois quadrados, no entanto demoraram algum tempo a resolver a tarefa e a organizar os seus registos. Assim, inicialmente preocuparam-se mais em manipular os quadrados e só, mais tarde, iniciaram os seus registos escritos. Esta situação foi mais ou menos previsível, pois o ritmo de trabalho da turma tem sido constante. Contudo, a maioria dos alunos trabalhou muito bem a pares. Na verdade, ao apresentarem apenas uma folha de registo, conduziu-os a uma maior cooperação e partilha de ideias e de processos.

Dado que a tarefa era de cariz investigativa, considerei importante apoiar os alunos durante o seu trabalho autónomo, chamando-lhes a atenção para vários aspetos. As principais dificuldades manifestadas pelos alunos relacionaram-se, sobretudo, com as produções escritas, pois alguns grupos não sabiam como justificar determinadas características dos polígonos obtidos ou o que se pretendia com essas explicações.

Após 30 minutos de trabalho autónomo, iniciei a discussão coletiva, mesmo depois de ter verificado que alguns alunos ainda não tinham terminado totalmente os seus registos. No entanto, como era a última aula, pretendia concretizar os seus objetivos e, consequentemente, não atrasar a realização e a discussão de ambas as tarefas. Admito que, se tivesse atribuído mais tempo ao trabalho autónomo, obteria possivelmente mais resultados e conclusões por parte dos alunos.

Ao longo dessa discussão, tal como planeado, os alunos mostraram as suas descobertas com os quadrados de acetato de cor e com o auxílio do retroprojetor. Além dos triângulos, a discussão incidiu na descoberta dos quadriláteros, com o intuito de rever as suas propriedades. Por falta de tempo, não discutimos a obtenção de polígonos com 5, 6 e 7 lados e terminámos este momento com a exploração do polígono de 8 lados.

A segunda tarefa foi distribuída e rapidamente os alunos começaram a trabalhar. Alguns grupos manifestaram dificuldades na determinação da área da região colorida (primeira questão), mas com o meu auxílio e colocando questões, os alunos acabaram por compreender como poderiam calcular a área pretendida, recorrendo a outro processo. A segunda questão também correu bem.

A discussão desta tarefa decorreu tal como previsto na planificação, sendo que dois alunos (em simultâneo) foram ao quadro apresentar as suas resoluções, relativamente a cada questão. De forma a contribuir para a compreensão da última questão, acedi ao *software GeoGebra*. Contudo, ao deslocar o ponto E sobre a base do paralelogramo, não mostrei os valores das áreas do triângulo e da região sombreada, não contribuindo realmente para a demonstração da conjetura formulada.

Sem embargo, de um modo geral, penso que a aula se desenrolou muito bem, refletindo a sua boa planificação e os alunos alcançaram os objetivos definidos. No final da aula, foi dado aos alunos a resolução da primeira tarefa, mostrando os esboços dos vários polígonos formados por sobreposição de dois quadrados.

Capítulo 4

Métodos e Procedimentos de recolha de dados

Nesta seção, indico e justifico os métodos e procedimentos definidos para a recolha de dados. Com efeito, apresento inicialmente a metodologia utilizada no trabalho de cariz investigativo, a qual segue um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa. Em seguida, caracterizo os participantes envolvidos no estudo, exponho os critérios de seleção e descrevo e fundamento os instrumentos utilizados na recolha dos dados e os procedimentos adotados na sua análise.

Opções Metodológicas

A metodologia de investigação relaciona-se, entre outros aspetos, com os objetivos específicos do estudo, a forma como o investigador interage com o meio onde decorre o trabalho investigativo e a natureza dos dados. Assim, tendo em consideração o objetivo do presente trabalho e as questões de investigação formuladas, e o facto da recolha de dados (de carácter descritivo) e da observação das ações dos participantes (alunos da turma 7.º 2.ª) terem ocorrido no seu ambiente natural (na sala de aula de Matemática), havendo um especial interesse pelo ponto de vista dos intervenientes, optei por um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), existem cinco características que definem a investigação qualitativa e que vão ao encontro das opções metodológicas adotadas neste trabalho:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
2. A investigação qualitativa é descritiva. (…) Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. (…) Para um investigador qualitativo que planeie elaborar uma teoria sobre o seu objecto de estudo, a direcção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar de tempo com os sujeitos.
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (…) Por outras palavras, os investigadores qualitativos preocupam-se com aquilo que se designa por *perspetivas participantes*. (Bogdan & Biklen, 1994, pp. 47-51)

Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994, p. 39) também afirmam que "no contexto do paradigma interpretativo, o objeto de análise é formulado em termos de *ação*", revelando a importância de se compreender as ações e os significados atribuídos pelo ator e por aqueles que se relacionam com ele (mais do que as causas). Portanto, este tipo de paradigma pressupõe uma proximidade entre o investigador e os participantes (Gauthier, 1987, citado por Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 1994).

Outro aspeto a ter em conta relaciona-se com o meu papel duplo durante o trabalho de cariz investigativo: além de observadora participante, como investigadora, também assumi o papel de professora, responsável pela lecionação das aulas. Nesse sentido, foi importante a decisão de utilizar diversos métodos de recolha de dados, não prejudicando as minhas funções na investigação e na lecionação.

Participantes

No decorrer deste trabalho de cariz investigativo participaram os alunos da turma 7.º 2.ª da Escola EB 2,3 de Fernando Pessoa, maximizando o que poderia aprender (Stake, 2007). A caracterização da turma é apresentada no capítulo 3.

Uma vez que o período de intervenção letiva foi muito curto e atentando no objetivo de estudo, tornava-se impossível considerar todos os indivíduos da turma para uma análise mais aprofundada. Daí que tenha selecionado alguns alunos para uma análise dos dados mais detalhada.

Assim, tendo em conta a observação em sala de aula – decorrente de aulas onde pude contactar com os alunos – e as suas produções, selecionei dois pares de alunos (casos), cujos diálogos foram registados por via áudio (no decorrer da intervenção letiva), privilegiando os seguintes critérios: (i) heterogeneidade nos processos matemáticos associados ao raciocínio geométrico; (ii) facilidade de comunicação.

De salientar que essa observação por registo áudio ofereceu a oportunidade de captar discussões desenvolvidas por outros alunos, tanto no trabalho autónomo como nas discussões coletivas.

De seguida, apresento os grupos de alunos selecionados e algumas das suas características.

Mateus e Jorge

Ambos os alunos pareciam gostar muito da disciplina de Matemática, dado que participavam em quase todas as aulas e realizavam as tarefas propostas com um bom ritmo de trabalho e com entusiasmo. Deste modo, apresentavam boas classificações na disciplina, especialmente o Mateus, que tinha melhores resultados nos testes e mostrava ter um bom raciocínio e aptidão para desenvolver vários processos matemáticos.

Em termos de trabalho em grupo, os alunos também tinham uma boa comunicação oral e escrita, pelo que eram capazes de justificar as suas ideias e resoluções.

O Mateus, por sua vez, não considerava a disciplina de Matemática difícil e era um aluno muito curioso, seguro de si e confiante nas suas capacidades. Já o Jorge demonstrava alguma insegurança e incerteza no que fazia, permitindo, às vezes, que o Mateus fosse o líder do grupo. Contudo, o Jorge tinha uma maturidade que o diferenciava dos restantes alunos, era um bom comunicador e as suas incertezas, muitas vezes, acabavam por desencadear discussões ricas com o seu colega.

Este grupo foi, ainda, sujeito a duas entrevistas com base em tarefas matemáticas.

Andreia e Lourenço

Este par de alunos destacou-se, principalmente, pela sua comunicação. O Lourenço revelava um desempenho médio-fraco na disciplina de Matemática e a

Andreia apresentava resultados mais baixos nos testes e maiores dificuldades de aprendizagem. Como resultado, a Andreia solicitava habitualmente o seu colega, questionando-o sobre a atividade matemática que realizavam nas aulas com o intuito de tentar ultrapassar as suas dificuldades. Esse questionamento acabou por tornar o Lourenço um bom comunicador, pois, pacientemente, explicava e comunicava as suas resoluções e descobertas à Andreia.

É importante notar que a turma, em geral, apresentava um "aproveitamento" fraco e, por essa razão, de entre esses alunos, foram escolhidos aqueles que revelaram ser melhores comunicadores.

De facto, a Andreia, era uma daquelas alunas que já não investia na Matemática por achar que não tinha capacidades. O Lourenço, por seu lado, também manifestava dificuldades durante a realização das fichas de trabalho, no entanto era um aluno preocupado e participativo nas aulas, e gostava de esclarecer as suas dúvidas com a professora.

Apesar disso, através dos registos áudio, apercebi-me que eles não reuniram informação muito relevante tendo em conta as questões de investigação, pois os alunos demonstraram muita insegurança relativamente aos seus conhecimentos geométricos, impedindo que avançassem na concretização das tarefas e desenvolvessem ideias e métodos interessantes.

Na realidade, durante a intervenção letiva, ambos os alunos solicitaram várias vezes a professora para compreenderem o que era pretendido com as tarefas propostas e para esclarecerem as suas dúvidas. Por essa razão, a entrevista não foi realizada com esee grupo de alunos e, como alternativa, decidi entrevistar a Marta e o Alberto, que revelaram melhores resultados ao longo das aulas sobre os quadriláteros.

Marta e Alberto

Tal como se mencionou na seção anterior, estes alunos foram selecionados para efeitos de entrevista, que se desenrolou após a intervenção letiva. Na realidade, algumas das suas produções escritas decorrentes da realização de tarefas sobre os quadriláteros destacaram-se dos demais, sobretudo no que dizia respeito aos processos inerentes ao raciocínio geométrico desenvolvidos pelo respetivo par.

A Marta, em particular, era uma aluna pouco participativa nas aulas, mas mostrava-se predisposta e empenhada na resolução das tarefas propostas, auxiliando, sempre que necessário, o seu colega. De facto, esta aluna revelava potencial e apresentava uma boa capacidade na expressão oral, sendo notável quando explicava as suas respostas ou quando colocava questões pertinentes relativas às tarefas. A aluna tinha, assim, um "aproveitamento" mediano na disciplina de Matemática, correspondente ao nível 3.

O Alberto, por sua vez, apresentava um desempenho mais fraco, e sentia muitas dificuldades nos vários domínios da Matemática. No entanto, era um aluno esforçado e mostrava-se curioso durante o trabalho autónomo, solicitando muitas vezes a ajuda da sua colega para o esclarecimento das dúvidas e do significado de alguns conceitos geométricos.

Embora a Marta conseguisse motivá-lo para a realização das tarefas matemáticas, o Alberto era um aluno que, por vezes, se distraía com facilidade e apresentava um ritmo de trabalho reduzido. Não obstante, este aluno mostrou desde logo um grande interesse e entusiasmo em participar no estudo.

Recolha de dados

Este passo do trabalho investigativo tem a ver com a forma e os meios que foram utilizados para a recolha dos dados. A qualidade informativa dos dados depende, em parte, da qualidade dos instrumentos usados nessa recolha e, portanto, reconhece-se a importância que os instrumentos têm neste tipo de trabalhos de cariz investigativo (Almeida & Freire, 2008).

Ademais, o uso de diversas fontes de evidência é privilegiado numa investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Daí que tenham sido utilizados diferentes instrumentos de recolha de dados: observação de aulas, recolha documental, e entrevistas aos pares selecionados.

Em seguida apresento uma breve descrição de cada um desses instrumentos utilizados para a recolha de dados.

Observação

A observação de aulas (observação participante) é, claramente, um método de recolha de dados essencial para um trabalho de investigação, tal como é apontado por vários investigadores. De facto, as “observações conduzem o investigador a uma maior compreensão do caso” (Stake, 1995, p. 77).

Assim, considerei a minha observação e os registos das aulas, os quais contribuíram para alcançar as respostas às questões de estudo formuladas. Por conseguinte, após cada aula, tentei sempre registar a minha observação enquanto ela ainda estava fresca, tal como é pressuposto um investigador proceder nessas ocasiões (Bogdan & Biklen, 1994; Stake, 1995). Esses registos incluíram descrições dos alunos, das atividades realizadas e do contexto, diálogos, dificuldades, reflexões, etc.

Em adição, a minha colega de estágio também fez o registo das aulas (observação direta), seguindo um guião (anexo XI), com o intuito de focar a sua atenção para os aspetos mais relevantes do estudo. Este procedimento foi muito útil, aumentando “a confiabilidade da evidência observacional” (Yin, 2010, p. 137). Na minha opinião, o uso desses registos foi particularmente vantajoso no sentido em que foi possível aplicar-me no papel de professora.

A observação de aulas foi apoiada por gravações áudio – os gravadores foram colocados nas carteiras de dois pares de alunos selecionados – e numa das aulas, onde os alunos utilizaram materiais manipuláveis, recorreu-se ao equipamento de vídeo. Esses registos foram muito importantes para a análise dos dados, captando episódios significativos entre os alunos e alunos/ professora, mas em especial entre os alunos selecionados.

Recolha documental

Este instrumento refere-se à recolha das produções dos alunos resultantes da realização de tarefas de exploração. Através deste método, foi possível perceber (essencialmente) que tipo de definições e de classificações recorreram os alunos para construírem os conceitos geométricos e que dificuldades evidenciaram ao longo dessas atividades.

Entrevista

As entrevistas, com registo vídeo e áudio, constituem um outro importante instrumento, permitindo obter uma ideia sobre a forma como os alunos interpretam o assunto a ser estudado (Bogdan & Biklen, 1994).

Além disso, segundo os mesmos autores, as entrevistas de grupos podem levar o investigador "para o mundo dos sujeitos", uma vez que vários sujeitos juntos sentem-se mais à vontade para conversar sobre um dado tema, estimulando-se uns aos outros (Bogdan & Biklen, 1994, p. 138).

Os entrevistados foram os pares de alunos Mateus-Jorge e Marta-Alberto e as entrevistas (acompanhadas por um guião – anexo XII) tiveram como base a realização de quatro tarefas de exploração, por forma a obter uma visão mais aprofundada dos processos de raciocínio geométrico desenvolvidos pelos alunos, bem como das suas dificuldades.

As entrevistas foram realizadas no 3.º período, em dois momentos distintos, após a intervenção letiva, sendo que em cada um desses momentos foram propostas duas tarefas de exploração e, somente no segundo momento, foram utilizados gravadores áudio.

A razão da realização de uma segunda entrevista deveu-se a problemas técnicos com a câmara de vídeo ocorrentes nas primeiras seções, conduzindo à perda dos respetivos registos. Não obstante, as notas de campo produzidas durante e depois dessas seções, e as produções dos alunos possibilitaram a recolha de informação útil e pertinente para o estudo. Além disso, após o conhecimento da perda dos dados via vídeo, foram colocadas questões aos respetivos alunos sobre os seus registos escritos produzidos durante a primeira entrevista. Este momento foi gravado em áudio.

É importante referir que, dado que foi pedida autorização aos encarregados de educação para recolha de dados logo no início do ano letivo, as questões de ordem ética foram salvaguardadas e, desse modo, foi possível assegurar o consentimento para que os alunos participassem no presente trabalho de cariz investigativo. Além disso, solicitei a autorização aos encarregados de educação dos alunos selecionados (anexo XIV) para a sua participação em entrevistas, cujo pedido foi escrito na caderneta do respetivo aluno. Por forma a respeitar algumas exigências éticas, também foram escolhidos nomes fictícios, assegurando assim o anonimato dos alunos da turma sobre a qual se incidiu o estudo.

Análise de dados

A análise dos dados, nos termos de Bogdan e Biklen (1994, p. 205) corresponde ao "processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais" e tem "o objetivo de aumentar a sua própria compreensão" dos dados (em relação ao investigador) e permite-lhe "apresentar aos outros aquilo que encontrou". Sendo uma das últimas fases da investigação, esta é aquela que "permite compreender tudo isto" (Stake, 2007).

A análise referente a este trabalho foi realizada durante a recolha dos dados, no entanto foi mais pronunciada após a sua recolha, sendo essa abordagem a mais aconselhada para o investigador inexperiente (Bogdan & Biklen, 1994). De facto, as "dificuldades no estabelecimento da relação e no acesso ao campo de investigação consomem demasiado tempo ao investigador inexperiente, para que ele possa envolver-se activamente na análise" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 206), sobretudo se assumir um papel duplo, como investigador e professor.

Os dados recolhidos e tratados para a análise e interpretação compreenderam os registos de aula, as produções dos alunos resultantes da realização de tarefas exploratórias sobre os quadriláteros (propostas em sala de aula e nas entrevistas) e as transcrições das gravações áudio (que acompanharam as aulas) e das entrevistas.

Por forma a obter uma informação mais esclarecedora dos dados, esta etapa seguiu uma análise de conteúdo, tendo por base categorias que surgiram no quadro de referência teórico, e indo ao encontro das questões de investigação. Do mesmo modo que referem Bogdan e Biklen (1994) as "categorias constituem um meio de classificar os dados descritivos" recolhidos.

Assim, no quadro que se segue apresento as categorias (e subcategorias) fundamentadas em termos teóricos (de Villiers, Govender & Patterson, 2009):

Quadro 5 – Categorias e subcategorias de análise

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. Tipos de definições de quadriláteros</td><td rowspan="2">Definições corretas</td><td>Definições económicas</td></tr>
<tr><td>Definições não económicas</td></tr>
<tr><td>Definições incorretas</td><td>Definições incompletas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Tipos de classificação</td><td colspan="2">Classificação por partição (exclusiva)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Classificação hierárquica (inclusiva)</td></tr>
</table>

Capítulo 5

Apresentação e Análise de Dados

Este capítulo consiste na apresentação e interpretação do trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da realização de três fichas de trabalho e uma tarefa de natureza exploratória: (a) De volta dos quadriláteros…; (b) Investigando as diagonais dos quadriláteros: (c) Áreas de quadriláteros; (d) Descobrindo polígonos. Em adição, analiso os trabalhos de dois pares de alunos durante a realização de entrevistas, assentes em duas tarefas: (e) Explorando quadriláteros e pontos médios; (f) Descobrindo quadriláteros; e exploro algumas resoluções de alunos relativas a uma questão da ficha de avaliação global.

Por forma a obter uma análise mais credível, recorro, em paralelo, às gravações de áudio e de vídeo, aos registos da minha colega de estágio e à observação direta dos alunos em sala de aula. Na análise de cada ficha de trabalho ou tarefa, a organização dos dados é feita de acordo com os enfoques que são apontados nas questões de investigação.

No final de cada subcapítulo apresento ainda uma pequena síntese, destacando os pontos essenciais decorrentes da apreciação e interpretação dos dados.

Ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…"

A primeira ficha de trabalho requeria que os alunos explorassem as propriedades dos quadriláteros, através da medição do comprimento dos seus lados e da amplitude dos seus ângulos internos. Apesar de introduzir o estudo dos quadriláteros, a realização desta ficha tinha como intuito perceber que definições usam os alunos para caracterizar os quadriláteros, a que classificações recorrem e que dificuldades evidenciam nessas atividades.

Para a sua resolução, os alunos tinham que, numa primeira fase, registar as medições e descrever, com base nas mesmas, as propriedades dos quadriláteros. O preenchimento da respetiva tabela traduzia-se numa classificação por partição, dando a conhecer aos alunos algumas características desses polígonos. Porém, com o avançar da resolução da ficha, pretendia que os alunos recorressem a uma classificação inclusiva (ou hierárquica), ou seja, que considerassem, por exemplo, que um paralelogramo é um trapézio.

Identificação das propriedades dos quadriláteros e sua classificação

Ao acompanhar o trabalho autónomo na realização da primeira questão, associada ao registo, na tabela, das propriedades dos quadriláteros, verifiquei que uma boa parte dos pares (8 em 14 pares) anotou exclusivamente as medições, sem retirar conclusões decorrentes das observações feitas. A resolução da Diana constitui um desses exemplos, centrando-se numa lista de medições e, consequentemente, em descrições muito incompletas (figura 10).

Mesmo depois de ter explicado o objetivo da tarefa, os alunos continuaram a restringir-se às características de cada exemplo de quadrilátero fornecido na ficha. Esta situação acabou por afetar a identificação de propriedades corretas dos quadriláteros, e a resolução das restantes alíneas, onde lhes era solicitado a identificação de propriedades comuns dos trapézios e dos paralelogramos. Além disso, também limitou a construção de definições.

Trapézio escaleno	tem um lado com 3,7, um lado com 5,2, um lado com 7,6 cm e um lado com 10,7. Tem tambem um ângulo com 96°, um ângulo com 125°, um ângulo com 75° e um ângulo com 42°
Papagaio	O papagaio têm dois lados com 5 cm e outros dois lados com 9,5. Tem um ângulo com 44°, dois ângulos com 114° e um outro com 90°.

Figura 10 – Parte da resolução da Diana relativo ao preenchimento da tabela

Ainda que a tendência espontânea de grande parte dos alunos tenha sido uma enumeração de todas as medições efetuadas, Gonçalo (figura 11) demonstrou ser capaz de utilizar uma linguagem simbólica. Essa tentativa também se manifestou em outros pares de alunos, tendo grande parte deles revelado dificuldades na escrita da notação de entidades geométricas, como, de segmentos de reta e seus comprimentos, e de medidas de amplitude de ângulos. Assim, com esta tarefa também pretendia recordar e clarificar essa notação e simbologia, bem como a utilização de uma linguagem mais formal, dado que houve casos de alunos que identificaram "lados paralelos" como "linhas paralelas" e "lados oblíquos" como "lados agudos".

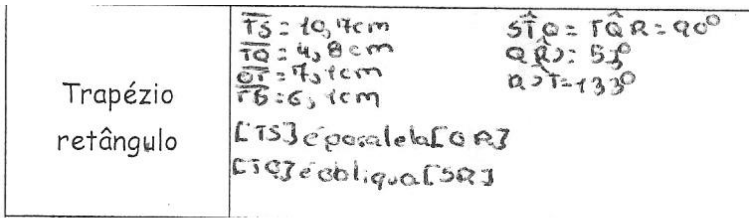


Figura 11 – Excerto da resolução do Gustavo, relativo à primeira questão

No que diz respeito à medição dos ângulos, verifiquei que os alunos apresentaram muitas dificuldades, resultante do incorreto manuseamento dos transferidores. De facto, os alunos registaram medições erróneas porque fizeram uma leitura incorreta da escala dos transferidores. De realçar, que estes apresentam, em geral, uma escala de 0º a 180º em ambos os sentidos:

> **Alberto**: Vê-se pela linha de baixo ou de cima? (…) Então se for na linha de baixo mede 110º, se for na linha de cima mede 70º.
> **Marta**: O que é que achas? Um ângulo agudo não pode ter mais de 90º, ou seja, tem que ser a linha de cima!

Esta situação, que ocorreu com outros grupos, mostra como é importante os alunos fazerem observações acompanhadas de um raciocínio crítico, permitindo-lhes o reconhecimento de erros. Segue-se uma conversa entre duas alunas, onde a Matilde também questionou a colega após a medição dos ângulos internos do losango (propriamente dito):

> **Matilde**: Estes ângulos são todos 130º?
> **Catarina**: Claro que não, estes dois são agudos, não podem ser 130º!

Mais tarde, a Catarina reformulou a sua resposta e referiu, pouco convicta, que esses ângulos eram geometricamente iguais porque os lados também o eram, evocando uma propriedade conhecida dos triângulos que relaciona os ângulos com os lados. Suponho que esta aluna também tenha encontrado dificuldades ao medir os ângulos internos do losango e, por isso, tentou arranjar argumentos que justificassem as medições obtidas. Apesar do raciocínio estar errado, a Catarina procurou relacionar os conhecimentos que já tinha sobre os triângulos com os quadriláteros.

Houve, contudo, grupos de alunos que compreenderam o que era pretendido com a tabela, sintetizando e explorando corretamente as propriedades dos quadriláteros (figura 12), como é o caso da Catarina.

Pela sua resolução, verificamos ainda que esta aluna recorreu a propriedades redundantes para a caracterização dos quadriláteros. Por exemplo, atentando nas características descritas relativamente aos ângulos internos do trapézio retângulo, Catarina identificou “um par de ângulos retos", tal como se pretendia, e “um ângulo agudo e outro obtuso”, sendo esta última informação supérflua.

De modo semelhante, a Susana registou características desnecessárias, uma vez que considerou a medida de amplitude dos ângulos externos, cujo conteúdo tinha sido trabalhado na aula anterior. Embora tenha mobilizado conhecimentos prévios, Susana não foi capaz de compreender que esse atributo não era essencial, pois todos os quadriláteros têm a mesma medida de amplitude dos ângulos externos.

Paralelogramo obliquângulo	Dois lados iguais e dois diferentes. Os lados opostos são iguais (paralelos) os ângulos opostos são iguais.
Trapézio isósceles	Apenas dois lados iguais Dois ângulos iguais, (dois pares) adjacentes
Trapézio retângulo	Os lados todos diferentes. ~~Dois~~ par~~es~~ de ângulos retos iguais Um Um ângulo agudo e outro obtuso.

Figura 12 - Parte da resolução da Catarina relativa ao preenchimento da tabela

Outro aspeto evidente relaciona-se com o fato de alguns pares não terem identificado as propriedades relacionadas com o paralelismo/ não paralelismo dos lados opostos dos quadriláteros (figuras 10 e 12), registando apenas as características dos lados e dos ângulos. De salientar que durante esse momento, a turma foi sempre orientada, conhecendo os critérios de classificação dos quadriláteros, por forma a ajudar o preenchimento da tabela. Desse modo, a origem deste comportamento pode estar associada à falta de compreensão do significado do termo "paralelismo", tendo sido necessário interromper o trabalho para clarificá-lo:

> **Marta:** Para serem paralelas não precisam de ter o mesmo comprimento, pois não?
> **Colega de estágio:** Não. O que significa serem paralelas?
> **Alberto:** Não se encontram, nunca se cruzam.

Ainda assim, alguns alunos revelaram dificuldades em encontrar lados estritamente paralelos em determinados quadriláteros. Por exemplo, o Carlos reconheceu o paralelismo dos lados opostos no retângulo, mas não conseguiu visualizar o mesmo no losango (propriamente dito). Este aluno mostrou que precisava de desenvolver mais as suas capacidades espaciais. Ao prolongar esses lados, os alunos parecem conseguir visualizar melhor o paralelismo, demonstrando que esse conceito que os alunos possuem está mais associado a retas do que a segmentos de reta, tal como observaram Pereira e Serrazina (2013) no seu estudo.

Face às dificuldades sentidas pelos alunos ao longo da realização da primeira questão limitando a identificação de características dos quadriláteros, verifico que a maioria da turma está posicionada no nível 2 de van Hiele. Como alguns alunos recorreram, sobretudo, a medições, enquanto outros foram capazes de descrever os quadriláteros em termos das suas propriedades e de utilizar uma linguagem mais formal e simbólica, posso afirmar que os seus conhecimentos correspondem a fases diferentes de desenvolvimento do nível 2 de van Hiele. De atentar que a atividade que foi desenvolvida por esses últimos alunos é a mais consistente com este nível de raciocínio geométrico.

Apesar de ser em número muito reduzido, houve respostas dadas pelos alunos com descrições muito incompletas, baseadas unicamente em propriedades técnicas (medição), e com uma linguagem informal, cujos conhecimentos correspondem ao exigido no nível 1 de van Hiele.

Classificação hierárquica

Tal como já foi referido anteriormente, o preenchimento da tabela refletia uma classificação por partição, no entanto a Marta destacou-se por classificar hierarquicamente o trapézio retângulo como um trapézio escaleno (figura 13), conforme podemos observar pelo excerto da sua resolução. Deste modo, verificamos que esta aluna foi capaz de estabelecer relações entre quadriláteros e de justificar o seu raciocínio, mostrando conhecimentos correspondentes ao nível 3 de van Hiele.

Trapézio retângulo	É um trapézio escaleno, pois todos os lados têm uma medida de comprimento diferente. Tem dois ângulos com a mesma medida de amplitude. QR são paralelos a $\overline{TS}$.

Figura 13 – Parte da resolução da Marta relativa ao preenchimento da tabela

Já a segunda questão da ficha pretendia, em especial, trabalhar a classificação hierárquica, pelo que era solicitado aos alunos o preenchimento do diagrama de Venn com os nomes dos quadriláteros estudados. Durante o respetivo trabalho autónomo foi visível a manifestação de dificuldades por grande parte dos alunos em recorrer a esse tipo de classificação. Este cenário era expetável visto que se encontravam no início do estudo das propriedades e das relações entre os quadriláteros.

A Marta, porém, distinguiu-se novamente pela positiva, revelando compreender o objetivo da tarefa e a lógica da inclusão, dado que explicou ao seu par que era necessário atentar nas definições de paralelogramo e de trapézio e verificar quais os quadriláteros que satisfaziam as suas propriedades. Por outro lado, acabou por incluir o quadrado no conjunto dos trapézios não paralelogramos, mostrando como esse tipo de classificação pode ser complexo para os alunos.

Além disso, reparei que muitos pares não compreenderam o próprio diagrama, ou seja, não compreenderam que as semelhanças entre os conjuntos eram representadas pelas suas partes sobrepostas. A resolução da Susana, por exemplo, retrata essa situação: apesar de apresentar uma justificação correta, colocou o "papagaio" num dos conjuntos interiores à família dos paralelogramos, como se esse fosse um conjunto disjunto (figura 14). Esta turma já tinha trabalhado, no tema das funções, com este tipo de representação e, por essa razão, achei que seria a melhor forma de organizar e classificar inclusivamente os quadriláteros. A meu ver, essa escolha perturbou o desenvolvimento de definições hierárquicas.

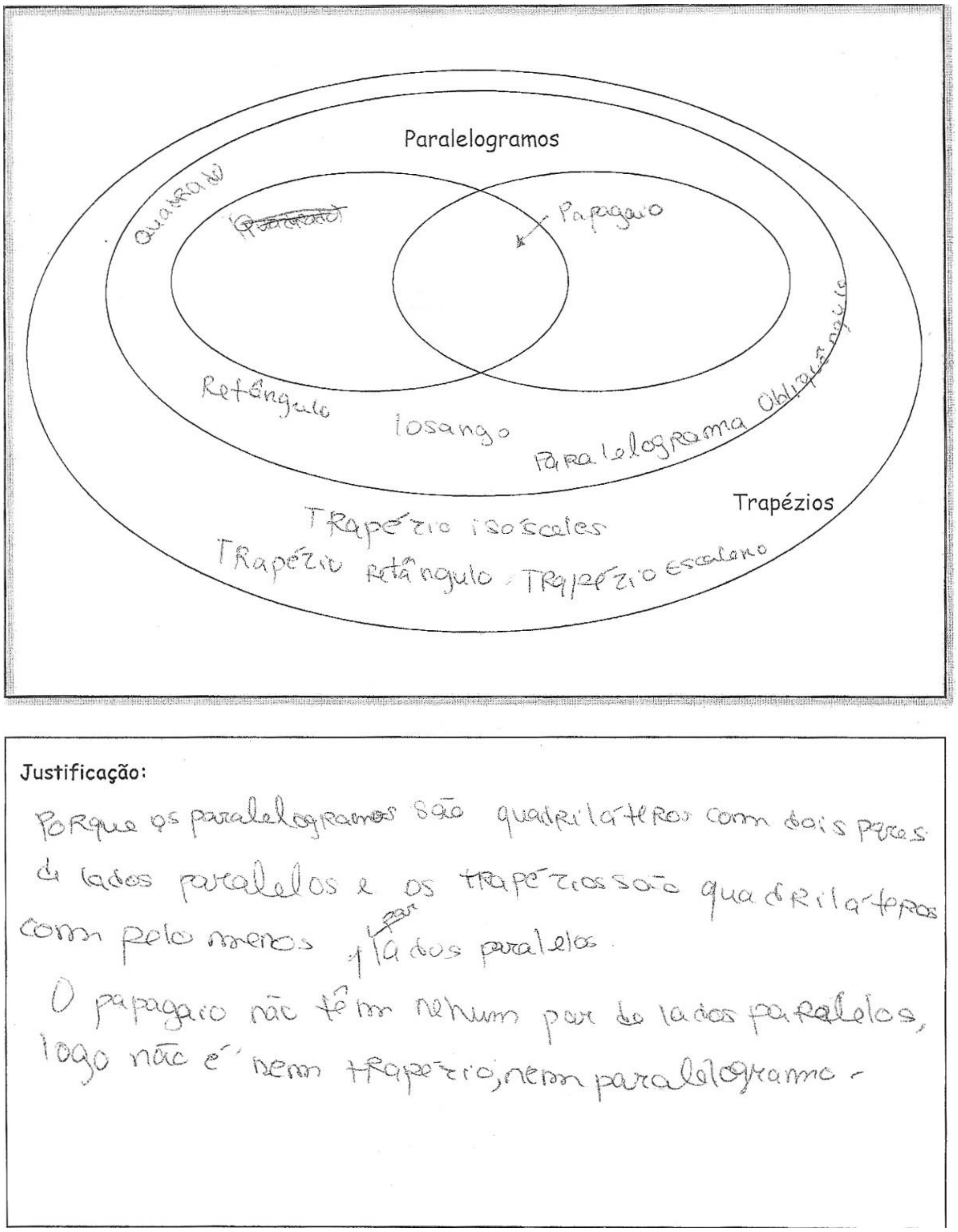


Figura 14 – Excerto da resolução da Susana referente à segunda questão da ficha de trabalho

No geral, os alunos compreenderam que os paralelogramos são trapézios, mas resistiram em aceitar que o quadrado é um caso particular do retângulo e do losango. Através do excerto do diálogo entre a Catarina e o Lourenço, notou-se que a aluna compreendeu porque o quadrado é um retângulo, centrando-se na definição deste último; já o Lourenço, não reconheceu essa classificação inclusiva do quadrado:

> **Catarina**: Professora, o quadrado é um retângulo?
> **Professora Titular**: O que é que achas?
> **Lourenço**: O quadrado é um retângulo?!
> **Catarina**: É, tem os ângulos retos e iguais.
> **Lourenço**: O retângulo tem as medidas diferentes.
> **Catarina**: O que é que define um retângulo?
> **Lourenço**: Tem quatro ângulos retos.
> **Catarina**: Então e o que é que define um quadrado? Lados todos iguais e ângulos retos.
> **Lourenço**: Então já tem uma coisa que o retângulo não tem, portanto não é um retângulo! (…) Em relação aos ângulos é igual ao retângulo, mas se contarmos com tudo, o quadrado não é um retângulo.

Em síntese, de um modo geral, os alunos identificaram as propriedades com base na medida de comprimento dos lados e na medida de amplitude dos ângulos, fazendo uma lista de medições. Ademais, alguns grupos mencionaram atributos desnecessários e propriedades (incorretas) considerando conhecimentos prévios. Em contrapartida, houve pares de alunos que se destacaram pelo modo positivo como compreenderam o objetivo da tarefa e responderam às várias alíneas, percorrendo um caminho mais adequado para a classificação.

Ficha de trabalho "Investigando as diagonais dos quadriláteros"

Através da segunda ficha de trabalho pretendia que os alunos continuassem o estudo dos quadriláteros, em particular as propriedades das suas diagonais. Com esse propósito, foi solicitado aos alunos a classificação dos quadriláteros apresentados no geoplano e identificados por números romanos, a construção das suas diagonais e a análise da medida de comprimento das diagonais, da forma como se intersetam e da existência de perpendicularidade. O registo das respostas foi feito numa tabela que se encontrava na ficha.

Uma vez que era necessário classificar cada um dos quadriláteros fornecidos com base nas propriedades dos ângulos e dos lados, a realização da tarefa e respetiva discussão coletiva tornaram-se momentos oportunos para avaliar as aprendizagens dos alunos e verificar que tipos de definições e classificações utilizaram. Nesse sentido, ocorreram conversas ricas e interessantes no seio da turma (e comigo, como professora) que poderão ajudar a responder a algumas questões de investigação.

Definição e classificação dos quadriláteros

Durante a discussão em grande grupo, na qual teve lugar a apresentação e o confronto de respostas, verifiquei que uma parte significativa dos alunos foi capaz de reconhecer, definir e classificar corretamente os quadriláteros. Apesar das dificuldades sentidas pelos discentes em aulas anteriores, nesta tarefa foi notória (pelas resoluções e observação direta dos alunos em aula) a melhoria da compreensão da definição e classificação dos quadriláteros, incluindo a inclusão da classe hierárquica.

Por exemplo, relativamente à definição dos quadriláteros, alguns alunos foram capazes de tirar conclusões corretas das definições e distinguir atributos essenciais e não essenciais, como é o caso do Mateus:

> **Professora estagiária:** Porque é que o polígono *VII* é um trapézio isósceles?
> **Gustavo:** Os ângulos têm a mesma medida de amplitude.
> **Professora estagiária:** Todos?
> **Gustavo:** Não…
> (…)
> **Paulo:** Tem um par de lados paralelos.
> **Professora estagiária:** Mas isso faz dele um trapézio, porque é que é isósceles?
> (…)
> **Gustavo:** O ângulo *ABY* é igual ao ângulo *BYZ*…
> **Mateus:** Não tem nada a ver! Stora, eu sei porquê, é porque o lado *[YZ]* e *[BA]* têm o mesmo comprimento. [Mateus refere-se aos lados não paralelos do trapézio.]
> **Gustavo:** Mas os ângulos também.

Por sua vez, o Gustavo definiu o trapézio isósceles considerando apenas as propriedades dos ângulos internos e não foi capaz de compreender que essa propriedade não era suficiente. Embora a discussão coletiva não tivesse evoluído nesse sentido, teria sido pertinente apresentar um contraexemplo por forma a refutar a definição formulada pelo Gustavo. Por exemplo, o retângulo tem os ângulos adjacentes à mesma base geometricamente iguais, tal como o trapézio isósceles. É curioso que, neste caso em particular, o Gustavo tenha revelado dificuldades na utilização de definições corretas, pois em outros momentos da aula (tal como vamos ver de seguida) o mesmo aluno trouxe contribuições positivas.

Assim, durante a discussão coletiva, surgiu um outro diálogo entre o Mateus e o Gustavo, mostrando que, relativamente aos retângulos e aos quadrados, ambos não tiveram dificuldades em formular definições corretas:

> **Professora estagiária:** Porque é que são retângulos?
> **Mateus:** Porque têm quatro ângulos retos.
> **Gustavo:** Mas assim também podia ser um quadrado!
> […]
> **Mateus:** E os lados têm comprimentos iguais, dois a dois.

Além disso, o seu discurso indicia que compreenderam que as propriedades necessárias para definir o quadrado estão incluídas nas propriedades necessárias do retângulo, sendo este ponto imprescindível na compreensão de uma classificação inclusiva.

Na mesma linha de pensamento, o Rodrigo, também evidenciou ser capaz de reconhecer os atributos essenciais de um losango e de um quadrado:

> **Professora estagiária**: O que é que define o losango?
> **Rodrigo**: Ter os quatro lados iguais.
> **Professora estagiária**: (…) Vamos analisar o quadrilátero identificado pelo número *IV*, tem os lados geometricamente iguais?
> **Turma**: Sim.
> **Rodrigo**: Mas não tem a mesma medida de ângulo, logo é um losango. [O Rodrigo refere-se ao losango propriamente dito.]
> **Professora estagiária**: Mas se tivesse a mesma medida de ângulo…
> **Rodrigo**: Seria um quadrado.

De salientar que, embora alguns alunos demonstrassem capacidades importantes para o desenvolvimento de classes inclusivas, a turma classificou os quadriláteros segundo uma lógica exclusiva, tal como a tabela sugeria.

Um outro aspeto que sobressaiu na classificação (definição) dos quadriláteros relaciona-se com o facto de alguns alunos terem usado as representações dos quadriláteros da primeira ficha de trabalho e estabelecido uma analogia com os polígonos representados no geoplano, recorrendo apenas ao aspeto visual. A título de exemplo, refere-se a classificação dos papagaios onde os alunos acabaram por considerar que o quadrilátero identificado pelo número romano *XI* (anexo VII) era um papagaio porque tinha um ângulo interno reto, tal como o papagaio representado na primeira ficha de trabalho. Na realidade, a introdução de papagaios com um ângulo interno de 90º não teve qualquer fim intencional, pelo que não previ que essa situação pudesse confundir os alunos. Embora o reconhecimento do quadrilátero *XI* por parte dos alunos estivesse correto, a justificação não foi obviamente adequada, demonstrando a influência da visualização na identificação das propriedades dos quadriláteros e na sua classificação. Somente quando os questionei se era necessário um papagaio apresentar um ângulo interno reto, é que surgiram as propriedades relacionadas com o não paralelismo dos lados opostos, a sua medida de comprimento e os ângulos.

Essas dificuldades também foram apontadas por Pereira e Serrazina (2013) na sua investigação realizada com alunos do 4.º ano de escolaridade, os quais identificaram as propriedades dos quadriláteros centrando-se em imagens prototípicas.

De modo semelhante, a Diana recorreu ao aspeto global e visual dos quadriláteros para classificá-los, comparando-os com as representações da primeira ficha de trabalho, conforme se verifica pelo seguinte excerto de diálogo:

Diana: A figura *XIII* é um trapézio isósceles?
Colega de estágio: Porque é que achas isso?
Diana: Porque é igual a este mas está virado ao contrário. [A aluna compara esse quadrilátero, que é realmente um trapézio isósceles, com outro fornecido na primeira ficha de trabalho.]
Colega de estágio: Mas pelas definições podemos garantir que é trapézio?
(…)
Colega de estágio: O que é preciso para ser trapézio?
Diana: Ter um par de lados paralelos.
Colega de estágio: E tem?
Diana: Não.
Colega de estágio: Porquê?
Diana: Porque não têm o mesmo comprimento.
Colega de estágio: Mas o que significa serem paralelos?

Esta aluna também revelou dificuldades na compreensão do conceito de paralelismo, mesmo depois da ocorrência de intervenções em aulas anteriores com o intuito de esclarecer o seu significado. Não obstante, a Diana foi capaz de formular uma definição correta relativamente ao trapézio. Ademais, a aluna revelou ter a capacidade de reconhecer o trapézio isósceles em diferentes posições, ou seja, mostrou possuir constância percetual, uma das capacidades relacionadas com a visualização espacial.

Um outro par de alunos (Andreia e Lourenço) também recorreu exclusivamente à visualização, manifestando dificuldades na identificação e classificação dos quadriláteros. Por conseguinte, os alunos acabaram por confundir um paralelogramo obliquângulo com um losango (propriamente dito) dada a sua forma mais ou menos similar.

No que diz respeito à classificação hierárquica, o Mateus mostrou compreender o seu papel, uma vez que tentou agrupar hierarquicamente as propriedades das diagonais dos diversos quadriláteros, através de um diagrama de Venn (de forma semelhante à tarefa anterior). Nesse momento, o aluno dirigiu-se ao seu colega e disse:

> **Mateus:** Vai aparecer lá assim: o quadrado vai estar no meio, o losango e o retângulo nos lados. O losango vai ficar "perpendiculares" com o quadrado e o retângulo com "os geometricamente iguais". E ambos se bissetam, por isso é que estão lá. (…)
> **Mateus:** Porque só os paralelogramos é que se bissetam! Vai ser igual ao outro. O diagrama de Venn é igualzinho. [Mateus refere-se ao diagrama da tarefa anterior; no entanto, ao pensar sobre o papagaio verifica que essa observação não é verdadeira.] (…)
> **Mateus:** Desta vez o papagaio pode ficar dentro, porque também tem as diagonais perpendiculares, mas não se bissetam e não são iguais.

De facto, o Mateus considerou a hipótese de poder vir a surgir um diagrama de Venn na ficha de trabalho (como segunda questão) e é interessante verificar a forma como elaborou as classes hierárquicas. Apesar da sua linguagem pouco formal, verificamos pelo seu discurso que esse diagrama teria duas regiões distintas: numa delas se encontrariam os quadriláteros com as diagonais perpendiculares, noutra, os quadriláteros com as diagonais geometricamente iguais, e o quadrado estaria incluído em ambas as regiões por conter essas duas propriedades. Além disso, verificou que todos eles poderiam estar incluídos num outro conjunto, dado que as suas diagonais se bissetam. Claramente que este aluno não teve dificuldades com a inclusão da classe hierárquica, pois definiu o quadrado, o losango e o retângulo como sendo paralelogramos e concluiu que só esses é que têm diagonais que se dividem ao meio. O Mateus apenas sentiu dificuldades ao classificar inclusivamente o papagaio tendo em conta as características das suas diagonais, mas reconheceu que o mesmo poderia estar no interior da região das diagonais perpendiculares, juntamente com o losango e o quadrado. Face ao seu raciocínio e aos argumentos apresentados para justificá-lo, o aluno evidenciou conhecimentos correspondentes ao nível 3 de van Hiele.

A integração de um diagrama de Venn, na ficha de trabalho, para classificar os quadriláteros de acordo com as características das diagonais não foi considerada dado o nível exigente da tarefa; contudo, uma possibilidade para a classificação dos paralelogramos através desse tipo de representação e que vai ao encontro do raciocínio do Mateus apresenta-se de seguida:

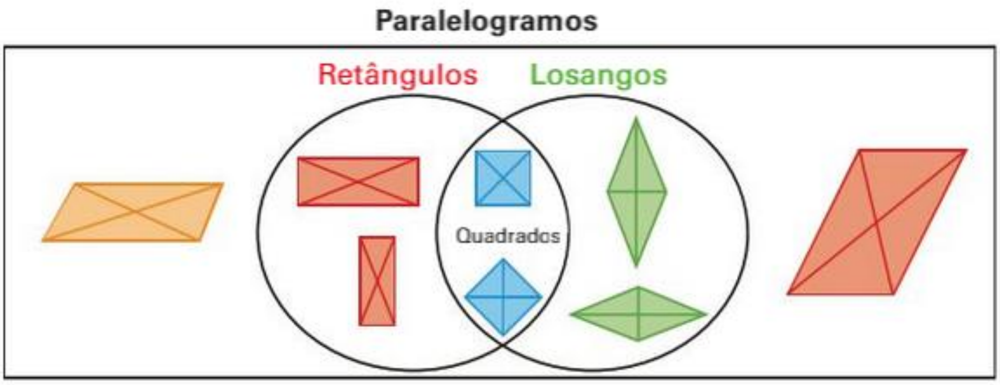


Figura 15 – Diagrama de Venn onde os paralelogramos foram agrupados tendo em conta as características das suas diagonais (Neves & Silva, 2013, p. 61)

Identificação das propriedades das diagonais dos quadriláteros

A partir da realização da ficha de trabalho, a maioria da turma conseguiu alcançar os objetivos propostos (à exceção de 5 pares de alunos), respeitante à identificação das propriedades das diagonais dos quadriláteros. Todavia, alguns alunos revelaram dificuldades em diferentes ocasiões.

Para o seu estudo, era fundamental que os pares construíssem as diagonais dos quadriláteros dispostos no geoplano. De modo inesperado, alguns alunos desenharam apenas uma diagonal em cada quadrilátero, influenciados por uma tarefa exploratória desenvolvida numa aula anterior, na qual era exigido a construção de diagonais de polígonos a partir de um único vértice.

Além disso, os pontos da malha quadriculada do geoplano foram confundidos com os vértices dos quadriláteros, ocorrendo casos em que os alunos traçaram linhas entre esses pontos para representar as diagonais (figura 16). A situação anterior indicia que a capacidade de perceção figura-fundo está pouco desenvolvida nestes alunos. Essa capacidade, associada à visualização espacial, corresponde à "capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos" (Matos & Gordo, 1993, p. 14). Deste modo, os alunos tiveram problemas ao isolar e destacar os quadriláteros na malha quadriculada do geoplano, prestando demasiada atenção aos pontos dessa malha.

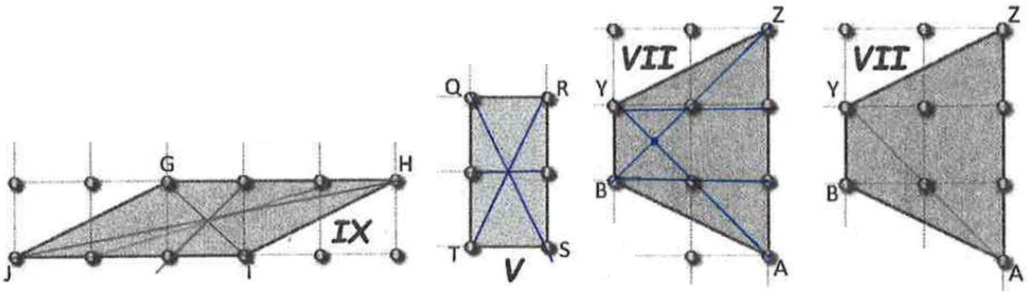


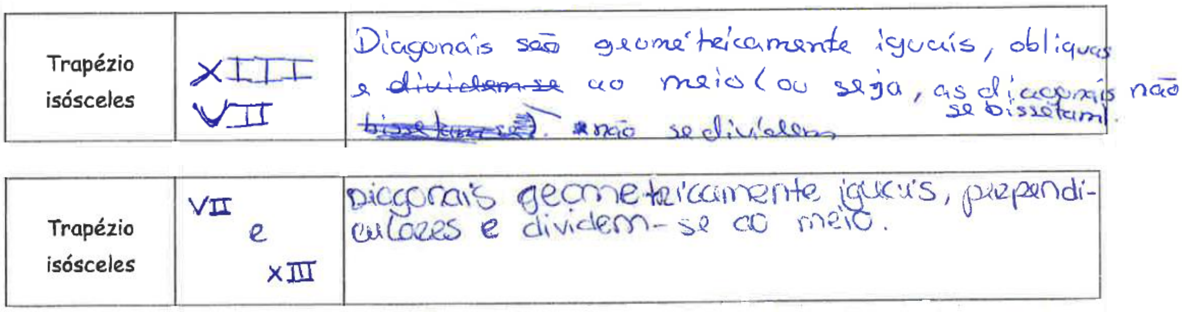
Figura 16 – Erros cometidos por alguns alunos na construção das diagonais dos quadriláteros

Surpreendentemente, alguns alunos acharam mesmo que a diagonal de um quadrilátero teria de apresentar uma direção oblíqua ou transversal, surgindo, por isso, obstáculos na construção das diagonais do losango *IV* (as quais apresentam uma direção horizontal e vertical).

Assim, o significado do conceito de diagonal foi abordado mais do que uma vez em sala de aula, tendo sido exposto aos alunos diversos exemplos. Embora a turma tivesse realizado uma tarefa que envolvesse diagonais, ficou claro que era um novo conceito para os alunos, explicando assim as suas dificuldades. Esta ficha teve pois um papel muito importante na aquisição de novas aprendizagens relativas aos quadriláteros e seus elementos, pelo que os próprios alunos (entrevistados) consideraram que esta foi uma das tarefas onde mais aprenderam:

> **Professora**: E em termos de aprendizagens, o que é que vocês aprenderam realmente com a realização das tarefas sobre os quadriláteros?
> **Mateus**: Aprendemos as diagonais, novas áreas de diferentes quadriláteros…
> **Professora**: Relativamente às diagonais, é o quê? Classificar as diagonais ou traçar as diagonais? Nunca tinham falado sobre isso?
> **Mateus**: Não.
> [O João também concorda com o Mateus.]
>
> **Marta**: Eu gostei daquela [aula] em que nós aprendemos a traçar as diagonais dos quadriláteros.
> **Professora**: Mas porquê?
> **Marta**: Porque aprendemos várias coisas sobre as diagonais!

Quanto à caracterização das diagonais, como era uma atividade de natureza exploratória, os alunos sentiram-se inicialmente um pouco perdidos, sem saber como preencher a tabela. Até o Mateus, que sempre revelou bom desempenho, supôs que era pretendido colocar o número de diagonais dos quadriláteros, reconhecendo mais tarde o seu erro. Com a minha ajuda e orientação durante o trabalho autónomo, dando a conhecer os focos de análise das propriedades das diagonais e um exemplo respeitante aos quadrados, os alunos acabaram por completar a tabela sem grandes dificuldades. Houve, porém, equívocos nas resoluções apresentadas por alguns pares, sobretudo no que concerne à utilização do termo "diagonais bissetadas" e à indicação da posição relativa das diagonais. Por exemplo, um erro comum refere-se ao trapézio isósceles, onde os alunos consideraram que as diagonais se dividiam ao meio (figura 17). Parece-me que a origem desse erro está relacionada com a congruência das respetivas diagonais.



Trapézio isósceles	XIII VII	Diagonais são geométricamente iguais, obliquas e ~~dividem-se~~ ao meio (ou seja, as diagonais não se bissetam ~~bissetam-se~~). *não se dividem

Trapézio isósceles	VII e XIII	Diagonais geometricamente iguais, perpendiculares e dividem-se ao meio.

Figura 17 – Parte das resoluções das alunas Diana (em cima) e Clara (em baixo), referente à caracterização das diagonais do trapézio isósceles

De forma sucinta, podemos observar que alguns alunos foram capazes de construir definições corretas e discernir quais são as propriedades necessárias para classificar um quadrilátero, demonstrando que adquiriram conhecimentos geométricos com a concretização da primeira ficha de trabalho. No entanto, houve muitos casos de alunos que reconheceram os quadriláteros pela sua aparência e aspeto visual e, só mais tarde, quando foram questionados sobre o assunto, é que recorreram às propriedades estudadas. Estes factos mostram, novamente, que a maioria da turma encontra-se no nível 2 de van Hiele. Em adição, alguns alunos evidenciaram que precisavam de desenvolver algumas capacidades relacionadas com a visualização espacial, sendo esta considerada por alguns autores como "facilitadora de uma aprendizagem da Geometria" (Matos & Gordo, 1993, p. 13).

Ficha de trabalho “Áreas de quadriláteros”

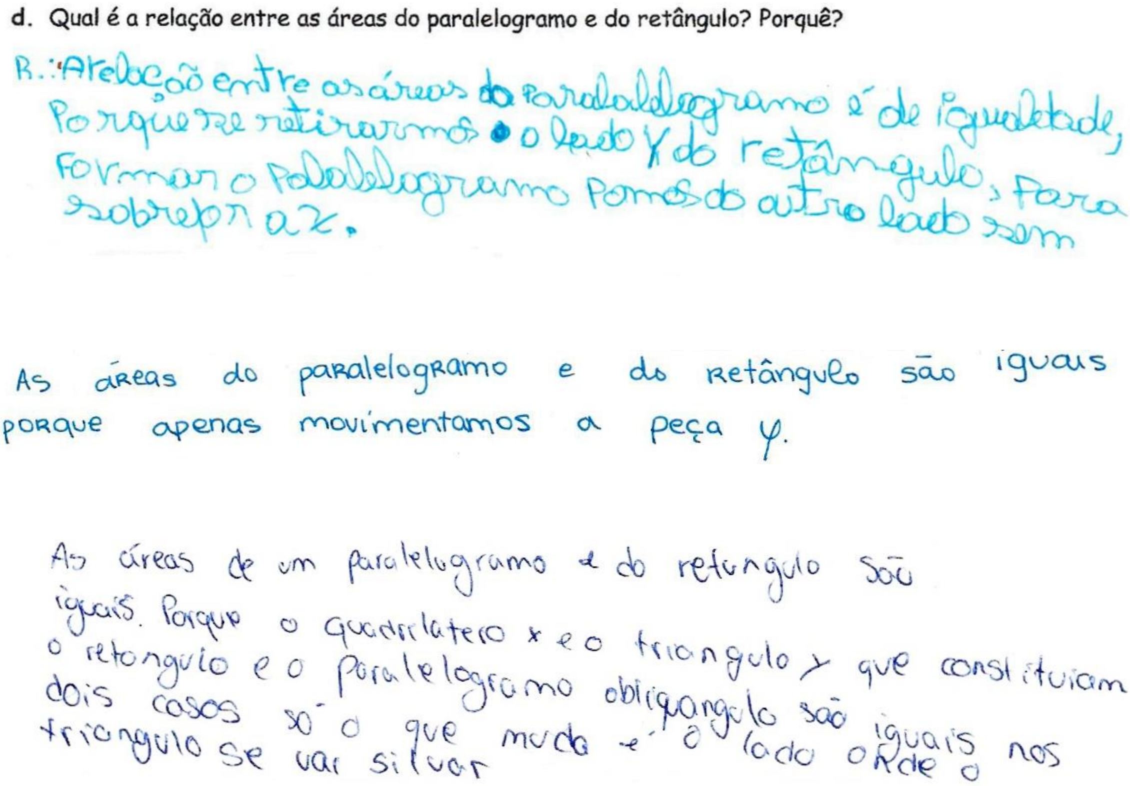
A presente ficha de trabalho é composta por tarefas exploratórias que tinham como objetivo principal investigar a forma de calcular a área de um paralelogramo e de um papagaio, a partir da sua relação com a área de um retângulo.

Assim, na primeira questão foi solicitado aos alunos a construção de um retângulo em papel quadriculado, a sua decomposição em duas peças, X e Y (anexo IX), e a obtenção de um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura que o retângulo. Posteriormente, pretendia que os alunos verificassem que a medida da área do paralelogramo obtido era equivalente ao retângulo inicial e, a partir dessa relação, conjeturassem a fórmula que permitisse calcular a área do paralelogramo. De modo semelhante, na segunda questão, os alunos tinham de desenhar e recortar um papagaio, decompô-lo em três peças (anexo IX) e construir, com as mesmas, um retângulo. Tal como acontecia na primeira questão, pretendia despertar nos alunos a intuição para o facto da área do papagaio poder ser obtida através da área do retângulo. Apesar das tarefas envolverem a identificação das propriedades de alguns quadriláteros, elas serviam, essencialmente, para conhecer o modo como os alunos formulam as suas conjeturas, a influência da visualização e as dificuldades inerentes a esse processo.

Formulação de conjeturas e o papel de visualização nesse processo

No que diz respeito à formulação de conjeturas para o cálculo da área do paralelogramo, os alunos manifestaram muitas dificuldades, por isso a maior parte (à exceção de dois pares de alunos) não foi capaz de escrever uma fórmula para a referida área e a sua discussão coletiva acabou por ser protagonizada por mim.

Apesar dos problemas que a turma teve, em geral, com essa alínea, um grande número de alunos (21 em 27 alunos) reconheceu que as medidas de área do paralelogramo e do retângulo original eram iguais e justificou corretamente essa relação. As seguintes resoluções ilustram bem essas observações (figura 18) e, além disso, evidenciam que os alunos compreendem o conceito de área. Por exemplo, o Jorge não só considerou, na sua justificação, que houve um simples rearranjo das peças X e Y (de forma semelhante às explicações dadas pelos alunos Marta e Dário), como acrescentou que nesse rearranjo não existiu sobreposição, reforçando a ideia de que as áreas do paralelogramo e do retângulo eram iguais. Assim, estes alunos compreenderam que a área do retângulo não se altera se for dividida e rearranjada.



d. Qual é a relação entre as áreas do paralelogramo e do retângulo? Porquê?

R.: A relação entre as áreas do paralalelogramo é de igualdade,
Porque se retirarmos o lado Y do retângulo,
Formar o Paralelogramo pomos do outro lado sem, Para
sobrepor a X.

As áreas do paralelogramo e do retângulo são iguais porque apenas movimentamos a peça Y.

As áreas de um paralelogramo e do retangulo são
iguais. Porque o quadrilatero X e o triangulo Y que constituiam
o retongulo e o Paralelogramo obliquangulo são
dois casos iguais nos
so o que muda é o lado onde o
triangulo se vai situar

Figura 18 – Parte das resoluções do Jorge, da Marta e do Dário, respetivamente, em relação à alínea d da primeira questão

Todavia, o Mateus destacou-se de modo positivo ao propor uma fórmula para a área do paralelogramo obtido (alínea e), uma vez que estabeleceu relações entre figuras geométricas que foram úteis para o seu cálculo. Essas relações emergiram da ideia de decompor o paralelogramo em dois triângulos geometricamente iguais e um retângulo, tal como se exemplifica na figura 19. De assinalar que esse retângulo foi obtido, destacando-se da peça *X*, um triângulo congruente à peça triangular *Y*. Deste modo, o aluno escreveu na sua ficha de trabalho a seguinte fórmula:

$$\frac{b\times h}{2}\times 2 + c\times l,$$

não especificando o significado das letras indicadas. Mais tarde, durante a sua explicação, Mateus conjeturou ainda que a fórmula do paralelogramo era igual à fórmula do retângulo e, por essa razão, eliminou o registo anterior e escreveu $c\times l$, sendo c e l, respetivamente, a base e a altura do paralelogramo. Apesar da existência de algumas incongruências, pois o aluno não identificou convenientemente os elementos do paralelogramo, o seu pensamento encontra-se correto:

> **Mateus**: Base vezes altura sobre dois que é a do retângulo, vezes dois porque dividimos assim em dois triângulos e depois a do retângulo. (…) [O primeiro retângulo a que o Mateus se refere é composto pelos dois triângulos geometricamente iguais a *Y*.]
> **Mateus**: Ou então podemos fazer só comprimento vezes altura. Porque supostamente o paralelogramo também pode ser obtido com a mesma área. [Comparativamente à área do retângulo.]

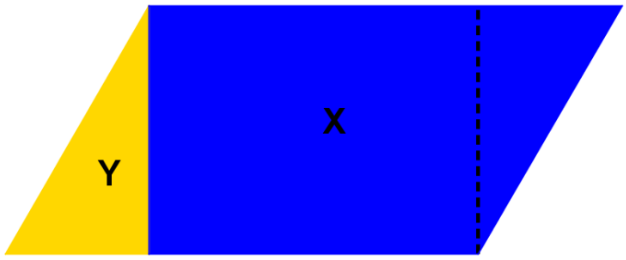


Figura 19 – Decomposição de um paralelogramo (composto pelas peças X e Y) em dois triângulos geometricamente iguais e um retângulo

Portanto, para formular conjeturas, o Mateus procurou relacionar os conhecimentos que já tinha sobre áreas – como a decomposição de polígonos para a determinação de áreas, associada à utilização de fórmulas – com o contexto da alínea. Essas relações que o aluno estabeleceu, ajudaram-no a descobrir uma fórmula para o cálculo da área do paralelogramo.

De forma similar, o Gustavo tirou partido dos seus conhecimentos prévios, dado que mostrou a intenção de decompor o paralelogramo nas próprias peças *X* e *Y*, e de determinar e adicionar as suas áreas. Possivelmente não concluiu o seu raciocínio por não ser capaz de calcular a medida de área da peça *X*.

Embora não o tivesse efetuado, o Lourenço também expressou a vontade de decompor o paralelogramo em triângulos, por forma a facilitar o cálculo da sua área:

> **Lourenço**: Uma forma é dividir em triângulos!
> **Andreia**: Dividir em triângulos? Isto aqui é um triângulo?! [O Lourenço tentou explicar o seu raciocínio à sua colega com as peças em papel.]

Por observação direta dos alunos em sala de aula, houve ainda indícios da adoção de estratégias aritméticas para chegar a uma conjetura, através da medição dos elementos do paralelogramo. No entanto não há registos escritos relevantes desse tipo de raciocínio, o que pode ser explicado pela falta de tempo para a sua concretização. Na verdade, a falta de concentração por parte dos alunos e as constantes questões sobre o que era pretendido fazer no início do trabalho autónomo, geraram perda desnecessária de tempo.

Tal como foi referido anteriormente, os alunos mostraram muitas dificuldades na escrita da fórmula para calcular a área do paralelogramo, pois não perceberam bem qual a resposta que era para dar. Penso que os alunos centraram-se demasiado em determinar a área do quadrilátero obtido, em lugar de escrever uma fórmula que conduzisse à área de qualquer paralelogramo. Apesar das várias intervenções por parte da professora, no decorrer do trabalho autónomo, procurando que os alunos descobrissem o que tinham de fazer, não houve tempo suficiente para ultrapassar esses bloqueios e para o surgimento de mais conjeturas.

Na tarefa relativa ao papagaio (segunda questão), os alunos continuaram a revelar dificuldades, apesar de se encontrarem mais orientados no trabalho. De forma análoga à primeira atividade, a maioria dos pares concluiu que o papagaio e o retângulo eram equivalentes. A facilidade com que os alunos chegaram a essa resposta (tanto nesta tarefa como na anterior) pode ser explicada pela utilização dos materiais manipuláveis (os polígonos em papel, recortados), pois tinham algo em concreto que os ajudasse a justificar o que afirmavam. Seguidamente apresento a resolução da Catarina que evidencia esse aspeto:

d. O que podes dizer quanto às áreas do papagaio e do retângulo formado? Porquê?

Podemos dizer que são iguais porque por mais que alteramos as partes do papagaio (os triângulos) a area é sempre a mesma.

Figura 20 – Parte da resolução da Catarina relativa à alínea d da segunda questão

Dessa forma, podemos verificar que a visualização assumiu um papel muito importante para a realização desta alínea, acompanhada pela observação e manipulação dos polígonos em papel. Interpretando as suas relações, os alunos conseguiram compreender, sem grandes dificuldades, a equivalência das medidas de áreas dos quadriláteros.

O Eduardo, por sua vez, ao procurar uma fórmula para a área do papagaio conseguiu estabelecer uma relação entre as suas diagonais, maior (D) e menor (d). Deste modo, apresentou a seguinte resposta:

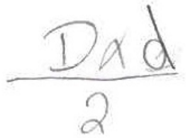


Figura 21 – Parte da resolução do Eduardo referente à alínea e da segunda questão

A resolução do Eduardo não especifica o significado das respetivas variáveis, à semelhança da resolução apresentada pelo Mateus na primeira questão. No entanto, quando a professora lhe solicitou uma explicação sobre o seu raciocínio, o aluno demonstrou compreender a correlação entre as diagonais do papagaio original e os elementos do retângulo formado. Infelizmente, na discussão coletiva, o Eduardo não foi capaz de explicar aos seus colegas o processo que desenvolveu para chegar à respetiva fórmula, mostrando dificuldades na comunicação oral. De salientar que este é um aluno com alguns problemas ao nível de comportamento, podendo também explicar a sua escassa participação durante esse momento.

Para estimular o processo de justificação, talvez tivesse sido pertinente sugerir aos alunos um registro escrito mais completo das suas respostas, onde pudessem explicitar as suas conjeturas. Embora constituísse um desafio para a turma, dadas as suas caraterísticas e o seu nível de escolaridade, penso que essa atividade poderia ter facilitado a comunicação durante a discussão coletiva.

Ainda que muitos alunos tenham sido capazes de construir o retângulo com as peças triangulares destacadas, essa construção não lhes concedeu a compreensão intuitiva, que se esperava, da fórmula para a área do papagaio. A situação presente mostra a complexidade desse tipo de tarefas e, mais uma vez, a necessidade de desenvolver, nesses alunos, as capacidades relacionadas com a visualização espacial, pois até com o retângulo formado, os mesmos não foram capazes de estabelecer uma correspondência entre os elementos desse retângulo e as diagonais do papagaio original.

O percurso percorrido pelos alunos no decorrer da realização da ficha de trabalho e as dificuldades manifestadas na apresentação de ideias para a área do paralelogramo e do papagaio descortinam um aspeto relevante: é necessário trabalhar mais com esta turma a elaboração de conjeturas, o teste, a procura de argumentos que justifiquem essas conjeturas, etc. Podemos ainda constatar que a utilização de material manipulável foi muito importante na realização dessas tarefas exploratórias, servindo como apoio na "obtenção de dados" e na "formulação de conjeturas" (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2006, p. 87).

Tarefa "Descobrindo polígonos"

A tarefa "Descobrindo polígonos" está inserida na última ficha de trabalho proposta à turma. O seu objetivo geral consistia na aplicação de conceitos já trabalhados sobre as propriedades dos quadriláteros e de outros polígonos, e na sua classificação. Cada grupo de alunos tinha à sua disposição material de desenho e três quadrados em acetato de cores diferentes (vermelho e verde): dois quadrados com o mesmo tamanho e um outro, mais pequeno.

Desta forma, foi proposto aos alunos a descoberta, a classificação e a descrição dos polígonos que conseguiam obter por sobreposição de dois quadrados de acetato em várias posições, bem como a procura de argumentos que justificavam não ser possível construir alguns polígonos. Para o efeito, os alunos tinham de registar por escrito todos esses aspetos, incluindo um esboço do polígono encontrado. A escrita dos resultados desenvolvia, assim, a comunicação matemática e proporcionava-me a sua análise posterior e verificação das aprendizagens adquiridas sobre os quadriláteros. De assinalar, que foi solicitado à turma um relatório por grupo, o que significa que os extratos selecionados neste estudo relativos à resolução da presente tarefa referem-se ao par de alunos.

A realização desta atividade constituía uma boa oportunidade para averiguar que definições usaram preferencialmente os alunos para classificarem os quadriláteros, de que modo formularam conjeturas e quais foram as dificuldades manifestadas ao longo desses processos.

Definição e classificação de quadriláteros

Uma vez que esta tarefa foi proposta na última aula, esperava que os alunos apresentassem definições de quadriláteros com significado, empregando um conjunto suficiente de propriedades e recorressem à classificação hierárquica. De facto, alguns alunos foram capazes de utilizar definições corretas e inclusivas, demonstrando que compreenderam o seu sentido e utilidade.

Por exemplo, os alunos Gustavo e Clara foram capazes de elaborar uma descrição correta dos quadriláteros (sem informação supérflua), não reconhecendo, porém, a inclusão dos quadrados na classe dos retângulos e dos losangos (figura 22). Qualquer das maneiras, o par focou-se nos atributos essenciais desses quadriláteros, como o paralelismo dos lados opostos e as propriedades dos seus lados e ângulos.

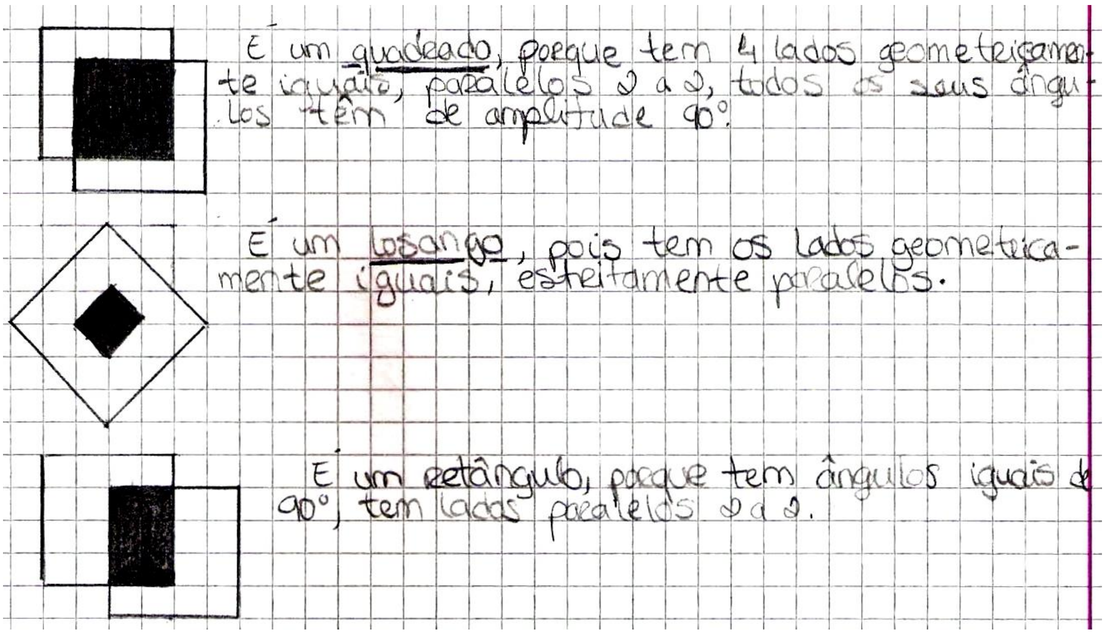


Figura 22 – Extrato do relatório respeitante aos quadriláteros obtidos pelo par Gustavo-Clara

De igual modo, os pares Diana-Maurício e Eduardo-Duarte conseguiram construir uma definição correta e económica para o trapézio retângulo, utilizando apenas medidas e características necessárias (figura 23). Ao referirem que o quadrilátero obtido por sobreposição tinha um par de lados estritamente paralelos e dois ângulos retos, os alunos garantiram que o mesmo fosse um trapézio retângulo.

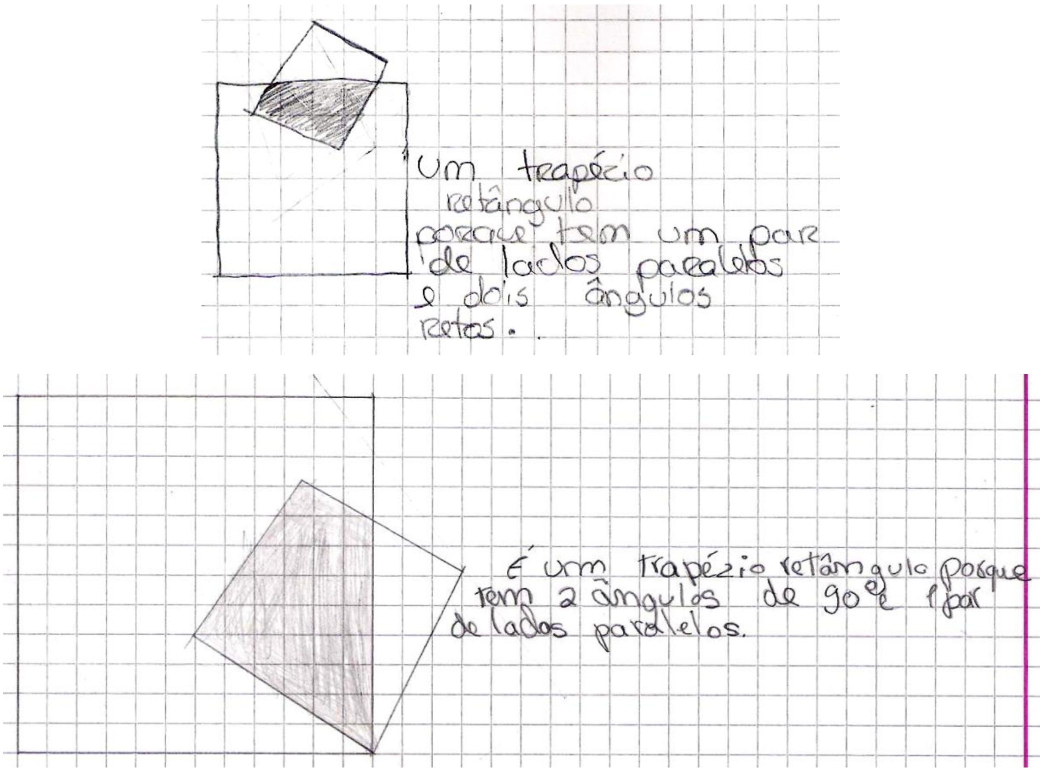


Figura 23 – Registos do trapézio retângulo, apresentadas pelos pares Diana-Maurício (em cima) e Eduardo-Duarte (em baixo)

Apesar disso, o primeiro par referido apresentou definições incompletas dos retângulos (incluindo o quadrado), revelando que ainda tem algumas dificuldades nesse campo:

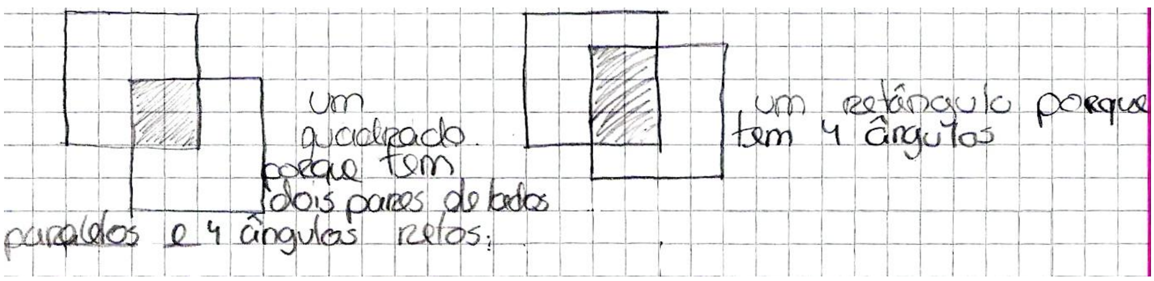


Figura 24 – Definições (incompletas) apresentadas pelo par Diana-Maurício

Houve ainda outros pares de alunos que exibiram nos seus relatórios uma lista de propriedades dos quadriláteros, cujas descrições apesar de estarem corretas, continham informação redundante (definições não económicas). Reparemos na resolução apresentada pelos alunos Luísa e Paulo, onde incluíram características adicionais (perímetro, área e volume, entre outros) para descreverem o retângulo e o quadrado:

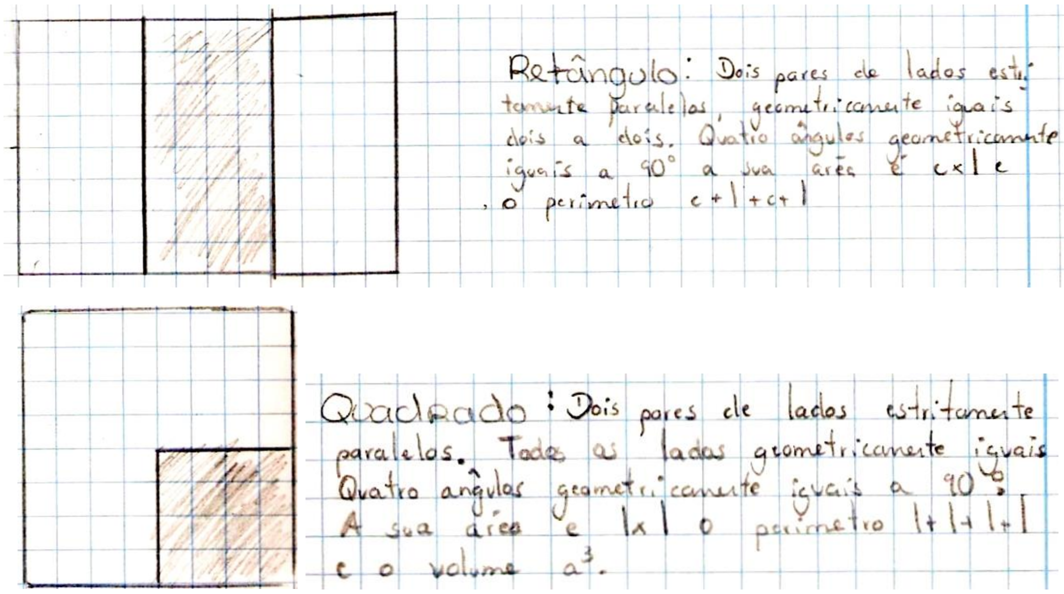


Figura 25 – Registos do par Luísa-Paulo dos retângulos obtidos por sobreposição

O par Beatriz-Rodrigo, por sua vez, utilizou todas as propriedades estudadas sobre os quadriláteros, nomeadamente os lados, os ângulos e as diagonais (figura 26). Embora tivessem mobilizado conhecimentos adquiridos em aulas anteriores, ambos os grupos não foram capazes de diferenciar atributos essenciais e não essenciais de um quadrilátero, sendo que essa situação ocorreu frequentemente no decorrer das aulas.

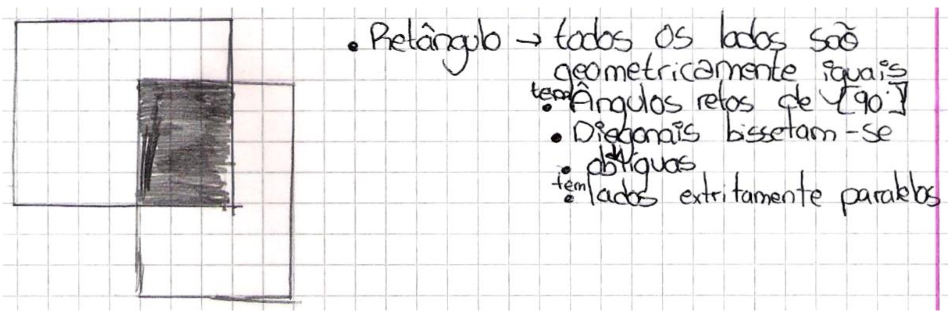


Figura 26 – Registo do retângulo propriamente dito, efetuado pelo par Beatriz-Rodrigo

De salientar que alguns grupos restringiram-se à realização de desenhos dos polígonos obtidos, não apresentando as suas propriedades ou argumentos que justificassem a sua classificação (pelo menos 4 em 14 pares de alunos não apresentaram quaisquer características dos polígonos). Denota-se, assim, dificuldades na escrita e na comunicação matemática.

Reconheço, também, que deveria ter atribuído mais tempo para a realização da tarefa, dando oportunidade aos alunos para responderem à segunda questão, relacionada com a descoberta de polígonos que não se poderia obter por sobreposição.

Relativamente à classificação hierárquica dos quadriláteros, o par Catarina-Sofia reconheceu esse tipo de classificação nos quadrados e losangos, como podemos observar pelo excerto do seu relatório, cuja interseção dos quadrados de acetato coincide com a área do quadrado menor (figura 27). No entanto, as alunas não apresentaram qualquer definição nem utilizaram argumentos para explicarem a razão da sua escolha.

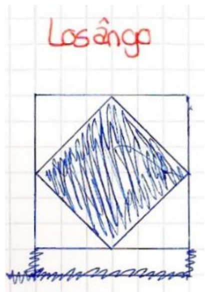


Figura 27 – Registo do losango obtido por interseção realizado pelo par Catarina-Sofia

Em contrapartida, o grupo Mateus-Jorge apresentou uma resolução mais completa, igualmente salientando que o quadrado é um caso particular do losango e justificando por que razão não conseguiu obter losangos propriamente ditos:

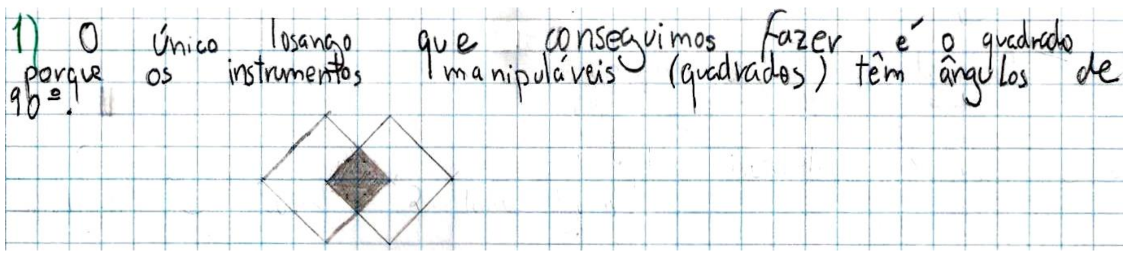


Figura 28 – Extrato da resposta do grupo Mateus-Jorge, relativo aos losangos

É interessante verificarmos que todos os pares desenharam o losango obtido numa posição habitual (diagonais horizontais e verticais), transmitindo a influência da visualização.

No decorrer dessa atividade, os alunos Mateus e Gustavo também conversaram sobre o assunto:

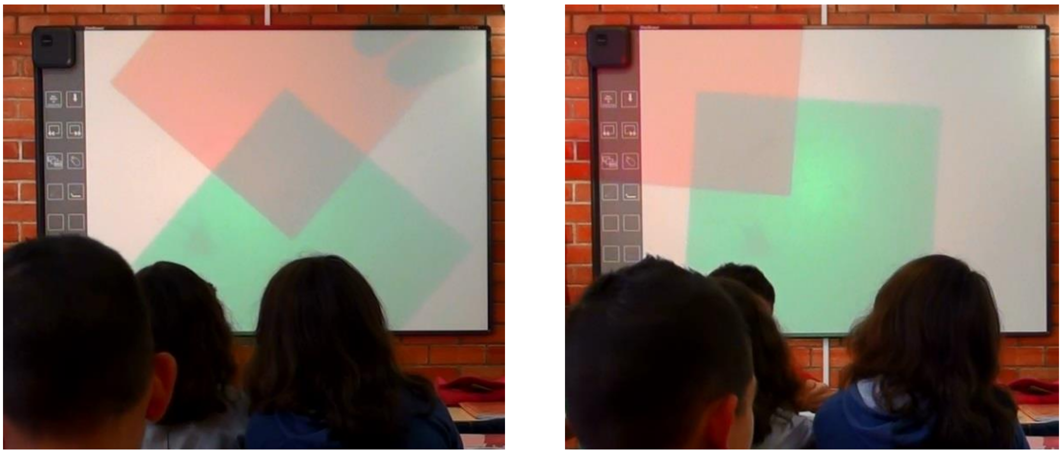
Mateus: Oh, não dá para fazer losangos, mesmo losangos!
Gustavo: Dá sim! Pois não!
Mateus: Dá para fazer quadrados, porque isto tem 90º. (…)
Mateus: Não dá para fazer losangos porque… Só dá para losangos que é os quadrados, o resto não dá porque isto aqui já tem 90º.
Gustavo: Então se não dá, não dá…

Através do diálogo, pudemos observar que o Mateus não teve qualquer problema em aceitar a inclusão da classe hierárquica, tal como já tinha evidenciado em outras tarefas. Pelo contrário, o Gustavo parece não seguir a lógica de inclusão do quadrado, sendo que esse aspeto também ficou patente pelos seus registos escritos (figura 22).

Além disso, num episódio vivido em sala de aula – no qual o Mateus apresentou o quadrado que obteve por sobreposição de dois quadrados de acetato, com o auxílio de um retroprojetor (figura 29) –, o Gustavo e outros alunos voltaram a manifestar dificuldades na compreensão de uma classificação inclusiva:

Professora: Que quadrilátero é este?
Mateus: É um quadrado. (…)
Catarina: Eu acho que também pode ser um losango.
[Alguns alunos concordam.]
Gustavo: Na forma que está, pode!
[Nesse momento, peço ao Mateus para rodar os quadrados de acetato, mantendo as suas posições. Ver figura 17b.]
Professora: Se eu tiver isto, deixa de ser um losango?
Alguns alunos: Não!
Gustavo: Depende do ponto de vista.
Jorge: Não, não deixa! (…)
Professora: O que é que define um losango?
Alguns alunos: Tem os lados geometricamente iguais.
Professora: O quadrado tem os lados geometricamente iguais?
Turma: Sim!
Professora: Então podemos dizer que todos os quadrados são losangos?
[Alguns alunos afirmam que sim, outros respondem que não.]
Professora: Os quadrados não têm os lados geometricamente iguais?
Turma: Sim!
Gustavo: Só não podemos dizer que todos os losangos são quadrados! (…)
Catarina: Os quadrados têm os ângulos todos retos, mas o losango não.
[Refere-se ao losango propriamente dito.]
Maurício: Tem ângulos obtusos. (…) E agudos também.

Inicialmente, o Gustavo valorizou sobretudo o aspeto visual, pois apenas reconheceu que o quadrado obtido por sobreposição podia ser um losango devido à sua forma e posição (figura 29a). Este aspeto salienta a influência do protótipo na imagem mental que o aluno formou sobre o losango. No entanto, a partir da troca de ideias que realizou com os seus colegas, o Gustavo acabou por aceitar a respetiva classificação inclusiva e concluir ainda que nem todos os losangos são quadrados.



Figuras 29a e 29b – Apresentação do quadrado obtido por interseção de dois quadrados de acetato

De facto, alguns alunos resistiram à aceitação do losango como representante de uma classe e à inclusão do quadrado, mesmo depois de reconhecerem que as propriedades essenciais do quadrado estão incluídas nas propriedades essenciais do losango. De modo oposto, no que diz respeito à classificação por partição, os alunos conseguiram, sem dificuldades, excluir os quadrados da extensão do conceito de losango (revelado nas últimas falas do diálogo).

Formulando, testando e justificando conjeturas

Atentando sobre as descobertas realizadas pelos alunos, decorrente da sobreposição parcial dos quadrados de acetato em várias posições, verifico que o balanço foi positivo. A manipulação dos materiais (quadrados de acetato com cores diferentes) foi crucial para a formulação de conjeturas e os alunos mostraram-se entusiasmados por trabalhar com esse tipo de materiais.

Alguns grupos começaram pela descoberta de triângulos e, por sugestão da professora, classificaram-nos quanto à medida de comprimento dos seus lados e quanto à medida de amplitude dos seus ângulos e justificaram a razão da sua escolha.

Por exemplo, o par Marta-Alberto conseguiu obter um triângulo retângulo escaleno por interseção de dois quadrados congruentes e fundamentar a sua descoberta através das propriedades do quadrado:

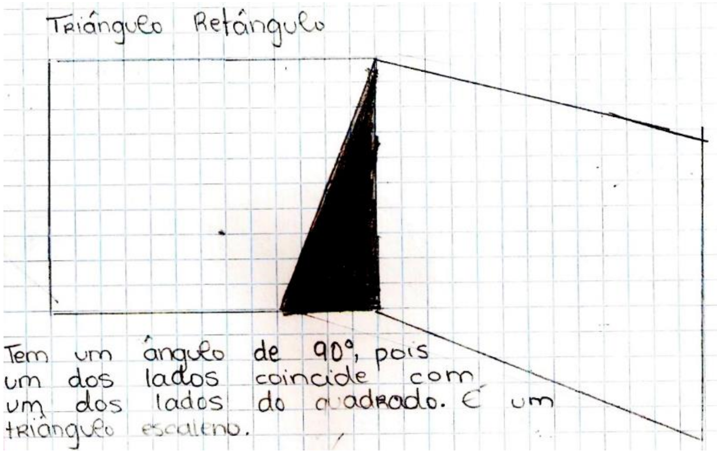


Figura 30 – Registo do triângulo retângulo (e escaleno) obtido pelo par Marta-Alberto

Apesar de justificarem corretamente a obtenção do triângulo retângulo os alunos não se aperceberam que, pela mesma razão, só podiam obter esse tipo de triângulos.

Além disso, os mesmos conjeturaram que também podiam gerar um triângulo retângulo equilátero (figura 31). Assim, apresento um diálogo estabelecido entre alunos e eu, como professora, durante o momento em que a Marta afirmou ter obtido um triângulo equilátero:

Professora: Toda a gente concorda?
Alguns alunos: Não!
Professora: O que é um triângulo equilátero?
Paulo: Tem os lados todos geometricamente iguais.
Professora: E tem os lados geometricamente iguais? [Refiro-me ao triângulo apresentado pela Marta. Ver figura 19.]
Paulo: Acho que não. (…)
Professora: Quando nós temos todos os lados geometricamente iguais, o que é que podemos dizer relativamente aos ângulos?
Rodrigo: São geometricamente iguais.
Mateus: Tem um ângulo de 90º, por isso os outros somados têm de ser 90º. Logo não são 90. Logo não são iguais. (…)
Professora: E nós aqui temos um triângulo retângulo. Então a minha questão é esta: alguém conseguiu encontrar triângulos não retângulos?
Alguns alunos: Não!
Gustavo: Não, porque o quadrado é sempre retângulo.

Mateus: Porque os quadrados têm um ângulo de 90º, se sobrepormos vamos ter sempre um ângulo de 90º.

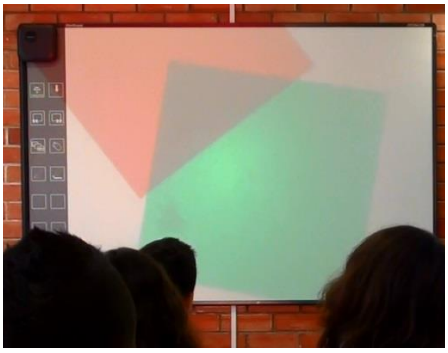


Figura 31 – Apresentação feita pela Marta do triângulo obtido por interseção de dois quadrados

Esse momento foi muito importante porque houve necessidade de testar a conjetura apresentada pela Marta, perante a não concordância dos seus colegas. Nessa fase, o Mateus foi capaz de expor argumentos que refutassem a obtenção de um triângulo equilátero por interseção parcial de dois quadrados, recorrendo às propriedades estudadas dos ângulos internos de um triângulo. Observemos que esse aluno não chegou a mencionar o facto de a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ser 180º, no entanto, pelo seu raciocínio, verificamos que essa propriedade está implicitamente presente, tendo em conta os cálculos efetuados.

A partir da discussão também foi possível refinar a conjetura e concluir a impossibilidade de obter triângulos não retângulos. Os alunos acabaram por validá-la e reparemos que o Gustavo utilizou a classificação hierárquica dos retângulos para justificar a razão pela qual só podiam obter triângulos retângulos.

Essas conjeturas foram somente alcançadas durante a discussão coletiva, o que demonstra que os alunos deveriam ter manipulado mais os quadrados de acetato em múltiplas posições. Na realidade, o seu trabalho consistiu sobretudo numa série de tentativas que os alunos davam por finalizadas assim que descobriam um determinado polígono. Por essa razão, a constatação de que conseguiam gerar um pentágono, por exemplo, decorria apenas de uma experiência particular. Esse aspeto pode explicar a ausência de respostas na segunda questão, uma vez que os alunos não se preocuparam em descobrir os polígonos que não podiam obter por sobreposição. Tal como foi acima referido, a falta de tempo para a concretização da tarefa também contribuiu para essa situação. Houve ainda casos de alunos que se restringiram às sugestões de polígonos dadas na folha da tarefa, limitando assim o número de descobertas.

Não obstante as dificuldades sentidas pelos alunos ao longo do trabalho autónomo, tanto nas explorações, como na produção do relatório escrito, a maioria foi capaz de descobrir diferentes polígonos.

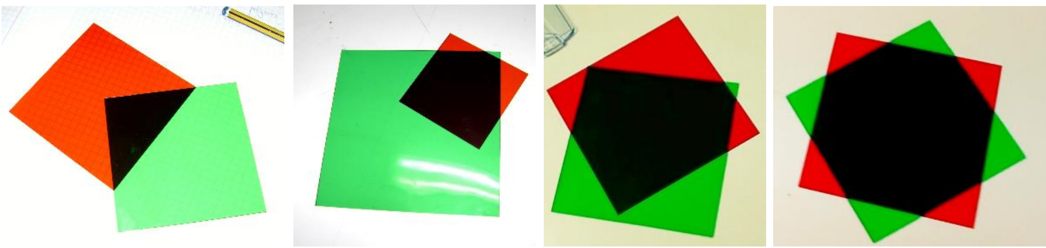


Figura 32 – Construção de polígonos usando os quadrados de acetato

O par Mateus-Jorge, por seu turno, conjeturou a obtenção de hexágonos e octógonos por interseção de dois quadrados com o mesmo tamanho, e justificou a sua (ir)regularidade, utilizando as propriedades dos polígonos:

Professora Titular: Porque é que é um hexágono?
Mateus: Porque tem 6 lados. (…)
Professora Titular: Porque é que vocês dizem que é um irregular?
Mateus: Porque não tem os lados todos iguais.
Professora Titular: Para além de não ter as medidas dos lados geometricamente iguais, que outra característica é que vocês podem afirmar? (…)
Jorge: Tem ângulos iguais.
Mateus: Tem os ângulos internos iguais quando é regular. (…)
Professora Titular: Então e o que é que vocês construíram aqui?
Jorge: O octógono.
Professora Titular: O octógono quê?
Mateus: Regular.
Professora Titular: Têm a certeza?
Mateus: Não, não é. Se acertássemos aí bem… Se aqui formassem triângulos isósceles… [Refere-se à parte não sobreposta; ver última imagem da figura 20.]
Professora Titular: E o que é que tinha de acontecer aos triângulos verdes e vermelhos, os que sobram, sem ser a mancha escura?
Mateus: Tinham de ser isósceles e todos iguais!

Na discussão em grande grupo, os alunos acabaram por concluir que o octógono era apenas gerado pela interseção de dois quadrados com a mesma dimensão.

Ou seja, os alunos não conseguiram obter um octógono por sobreposição de um quadrado de grande com um quadrado pequeno.

Outro aspeto saliente relaciona-se com facto de a tarefa ter evidenciado capacidades de alguns alunos com desempenho mais fraco. Por exemplo, a Luísa e o Paulo, considerados alunos mais fracos, foram os únicos a gerar um papagaio com os dois quadrados de acetato congruentes.

Figura 33 – Papagaio obtido pelo par Luísa-Paulo

Em adição, durante o trabalho autónomo, o Lourenço desvalorizou a descoberta realizada pela sua colega, também tida por mais fraca. Contudo, a Andreia não só conseguiu obter um octógono por sobreposição como tentou justificar a sua conjetura, usando uma linguagem informal:

Andreia: Se juntarmos os dois, se cada um tem quatro lados, vai dar os oito lados. É não é, stora?
Colega de estágio: Dois lados intersetam um, não é?

A meu ver, as observações apontadas mostram a importância da realização deste tipo de tarefas com a intervenção de materiais manipuláveis, conduzindo à motivação dos alunos e ao desenvolvimento de ideias para explorações. A Marta, ao ser entrevistada, também mostrou o mesmo agrado:

Marta: Também gostei daquela tarefa em que nós tínhamos quadrados de diferentes tamanhos,…

Na tarefa “Descobrindo polígonos” os alunos estiveram ativos a trabalhar, fizeram muitas descobertas e chegaram a várias conclusões. Contudo, de um modo geral, os alunos entregaram relatórios muito incompletos, manifestando dificuldades na escrita, na formulação de definições geométricas e de conjeturas, na apresentação de justificações, na utilização de uma linguagem informal, etc.

Ainda assim, alguns pares demonstraram capacidades na construção de definições corretas, económicas e não económicas, sendo que estas últimas foram usadas de modo mais frequente. Houve, ainda, uma tendência para a utilização de definições por partição. Pelos registos escritos dos alunos e por observação direta em sala de aula, também foi percetível uma melhor compreensão do significado de uma classificação inclusiva.

Dessa forma, embora se tenham registado algumas evoluções no raciocínio geométrico dos alunos, as suas resoluções apresentadas nesta fase final do estudo demonstram que a maioria dos alunos continua a apresentar conhecimentos correspondentes ao nível 2 de van Hiele (em fases diferentes de desenvolvimento).

Sem dúvida que a exploração com os materiais manipuláveis auxiliou a formulação de conjeturas e os alunos utilizaram conhecimentos prévios sobre as propriedades dos polígonos para testá-las e justificá-las.

Tarefa "Explorando os quadriláteros e pontos médios"

Nesta tarefa (anexo XIII) os alunos foram desafiados a explorar que polígonos podiam obter ao unirem os pontos médios dos lados dos quadriláteros que têm diagonais perpendiculares. A atividade foi realizada no âmbito de entrevistas (individuais), por dois pares de alunos: Marta-Alberto e Mateus-Jorge. Apesar da ocorrência de problemas técnicos, nomeadamente com a câmara de vídeo, foi possível recuperar alguns dados, questionando posteriormente os alunos sobre as suas produções resultantes da realização da tarefa. Além das produções dos alunos, as notas de campo realizadas durante e logo após as entrevistas também foram muito úteis para a análise dos dados.

Esta exploração requeria a aplicação de conhecimentos sobre os quadriláteros e constituía uma oportunidade para aceder ao raciocínio geométrico dos alunos. Cada grupo tinha de construir os quadriláteros que identificavam com diagonais perpendiculares, numa malha quadriculada disposta na folha da tarefa; marcar e unir os pontos médios dos seus lados; e, por fim, escrever uma conjetura tendo em conta as suas observações e uma possível justificação para a mesma. Deste modo, a realização da tarefa visava diversos propósitos: identificação e classificação dos quadriláteros, reconhecimento e análise das suas propriedades e relações entre eles, exposição e explicitação de ideias matemáticas e de conjeturas, etc.

Construção e classificação dos quadriláteros

Quanto à construção dos quadriláteros (losangos e papagaio), o par Marta-Alberto revelou alguns problemas, atrasando a resolução da tarefa. Salienta-se que essa demora deveu-se sobretudo ao ritmo de trabalho do Alberto, o qual foi (quase) sempre orientado pela Marta. No entanto, mesmo essa aluna, que se destacou durante a realização de algumas atividades sobre os quadriláteros, sentiu dificuldades em desenhar um losango propriamente dito. O seu colega, motivado pelo questionamento da professora, acabou por desenvolver esse trabalho: esboçou, em primeiro lugar, as diagonais (perpendiculares e com medidas de comprimento diferentes) e, a partir daí, construiu o losango. Verificamos, assim, que a Marta não utilizou as propriedades do losango para a sua construção, apesar de as conhecer.

Tal como observei em aulas anteriores, outros alunos não tiveram a destreza de recorrer prontamente às características dos quadriláteros e só quando foram questionados sobre o assunto, é que efetuaram essa abordagem, auxiliando-os na resolução das fichas de trabalho. Parece-me que, neste caso, também a Marta se restringiu ao aspeto visual do losango, à imagem mental que reteve desse quadrilátero e, por essa razão, não foi capaz de construí-lo.

Em contrapartida, após a construção dos quadriláteros e a união dos pontos médios dos seus lados, a Marta e o Alberto classificaram, sem grandes dificuldades, os quadriláteros obtidos, afirmando que obtinham sempre “quadriláteros retângulos” (figura 34). De assinalar que os alunos constataram que obtinham um novo quadrado, unindo os pontos médios dos lados de um quadrado original.

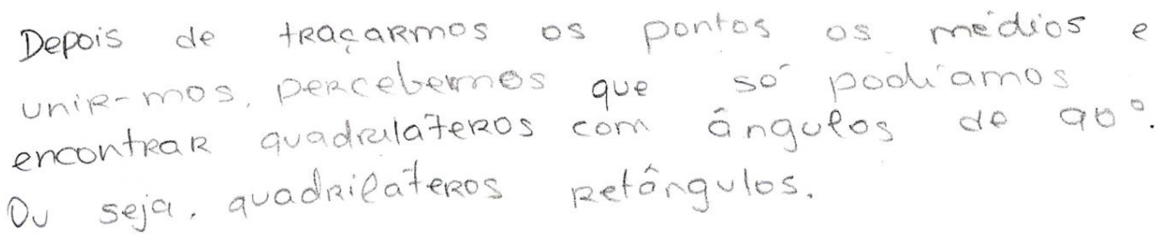

Depois de traçarmos os pontos os médios e
unir-mos, percebermos que só podíamos
encontrar quadrilateros com ângulos de 90°.
Ou seja, quadrilateros retângulos.

Figura 34 – Trabalho realizado pela Marta e pelo Alberto

Mais tarde, questionei os alunos sobre os seus registos escritos:

Professora: Então o quadrado é um retângulo? [Refiro-me ao quadrado que eles obtiveram após a união dos pontos médios.]
Marta: Sim.
Professora: E porquê?
Marta: Porque tem quatro ângulos de 90 º, e tem 2 paralelas…
Alberto: Tem 4 lados, é metade do retângulo.
Professora: "É metade de um retângulo", explica lá isso melhor.
Alberto: Tipo, se juntarmos um quadrado com um quadrado, fica um retângulo.

De facto, os alunos apresentaram uma classificação hierárquica de quadrados e de retângulos, porém identificaram diferentes argumentos. Enquanto a Marta justificou a partir das características essenciais do quadrado, o Alberto respondeu de acordo com o seu aspeto visual, tomando uma abordagem muito superficial. É curioso verificar que, desta vez, a aluna preocupou-se em recorrer às propriedades do quadrilátero, sugerindo que compreendeu que, para a sua classificação, é fundamental considerar as suas características.

Os alunos Mateus e Jorge também classificaram do mesmo modo, afirmando que o quadrado era um retângulo, embora não tivessem encontrado obstáculos na construção dos quadriláteros (figura 35).

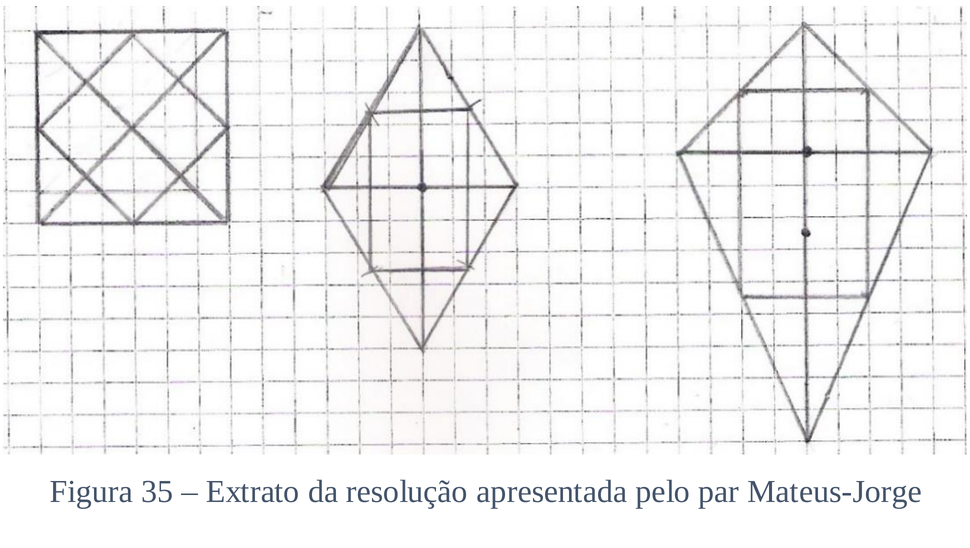


Figura 35 – Extrato da resolução apresentada pelo par Mateus-Jorge

O Jorge, no entanto, demonstrou algumas dificuldades em aceitar a inclusão do quadrado na classe dos retângulos, como podemos observar pelo diálogo que apresento em seguida:

Mateus: Obtemos sempre um retângulo.
Professora: Estás a dizer que o quadrado é um retângulo?
Mateus: Sim!
Professora: Porque…
Mateus: Tem os quatro ângulos todos iguais e os lados são perpendiculares, que é as regras do retângulo! (…)
Professora: Tu concordas com isso Jorge, que o quadrado é um retângulo?
Jorge: Um quadrado tem as regras de um retângulo, só que o retângulo tem os lados iguais dois a dois, e o quadrado tem os lados todos iguais.
Professora: E isso faz com que um quadrado não seja um retângulo?
Mateus: Não!
Professora: O que é que define um retângulo? (…)
Mateus: Os ângulos iguais…

Não obstante, notemos que o Jorge considerou que o quadrado possuía as "regras de um retângulo", designação dada pelo Mateus aos atributos essenciais do retângulo. O Mateus, por sua vez, mostrou muita segurança ao longo do trabalho desenvolvido e continuou a indicar um bom nível dos seus conhecimentos geométricos.

Formulando, testando e justificando conjeturas

Os dois pares de alunos apresentaram dúvidas no significado de "conjetura". Na realidade, este conceito já tinha sido abordado em uma aula anterior aquando da realização de uma demonstração geométrica. Dado que foi debatido uma única vez, é normal que os alunos não recordassem ou desconhecessem o seu significado. Além disso, na aula referida, não foi dada muita importância a esse aspeto, tendo-se avançado com a demonstração. No decorrer da entrevista, o termo "conjetura" foi então explicado e procurou-se que os alunos descobrissem o que era pretendido com a tarefa através de perguntas indiretas.

Analisando a resolução da Marta e do Alberto (figura 34), verificamos que o par foi capaz de formular uma conjetura a partir da observação dos esboços que construiu. Ao tentarem justificá-la, os alunos julgaram (erradamente) que poderia ter a ver com o facto de o retângulo possuir diagonais perpendiculares (caracterização incorreta):

Professora: Porque é que acham que isso acontece? Porque é que só obtiveram quadriláteros com ângulos internos de 90º?
[Silêncio.]

Professora: Veem alguma relação entre as características dos retângulos e as diagonais dos quadriláteros que vocês construíram inicialmente?
Alberto: O retângulo também tem diagonais perpendiculares, né? (…)
[Os alunos construíram um retângulo e desenharam as suas diagonais.]
Marta: São iguais às do quadrado.
Professora: São perpendiculares? O que é que são diagonais perpendiculares?
Marta: São diagonais que se cruzam num ponto…
Alberto: Então, mas estas também se cruzam!
Professora: E fazem um ângulo de quê?
Marta: De 90 º.
Professora: Estas diagonais fazem um ângulo de 90º?
Ambos: Não.

Desse modo, o Alberto desenhou um retângulo (propriamente dito) e as suas diagonais. Reparemos, através do diálogo, que os alunos manifestaram dificuldades na identificação da posição relativa das diagonais desse retângulo, ficando assim comprovado, mais uma vez, que a capacidade espacial (em especial a constância percetual) tem de ser mais trabalhada com esses alunos.

Ademais, o Alberto marcou e uniu os pontos médios dos lados do retângulo. No final dessa atividade, os alunos adquiriram um losango, o que os levou a concluir que só podiam obter novos retângulos a partir de quadriláteros com diagonais perpendiculares (excluindo assim o caso do retângulo propriamente dito). Notemos ainda que os alunos não sentiram necessidade de testar a sua conjetura; no entanto, após essa descoberta mostraram-se mais confiantes da sua resposta dada na folha da tarefa. Apesar da tentativa efetuada, o par em questão não conseguiu justificar a conjetura elaborada.

Os alunos Mateus e Jorge também não realizaram testes por forma a verificar a sua conjetura e, por isso, não analisaram mais casos, confinando-se a um único exemplo de cada quadrilátero com diagonais perpendiculares. Nesta fase, teria sido pertinente sugerir aos alunos a construção de mais losangos e papagaios para poderem chegar à generalização da conjetura e/ou a análise de outros quadriláteros. No entanto, dado o pouco tempo da entrevista, o par não foi estimulado para esse fim.

Ambos os alunos tentaram chegar a uma justificação, de forma diferenciável, incentivados pelo questionamento (efetuado após a entrevista devido aos problemas técnicos). Assim, apresento o seguinte diálogo que tive com esse grupo de alunos:

Professora: Porque é que obtém sempre retângulos?
Jorge: Por causa das diagonais.
Professora: O que é que tem?
Mateus: Eu acho que é por causa dos pontos intermédios, porque como isto aqui foi feito a partir dos pontos intermédios. (…)
Professora: Estavas a dizer [Jorge]] que achavas que tinha a ver com as diagonais…em que sentido? Como é que relacionas isso com as diagonais? As características dos retângulos com as diagonais?
Jorge: As diagonais aqui bissetam-se e também são geometricamente iguais, por isso os ângulos também acho que teriam de ficar iguais. [Refere-se ao caso do quadrado.]
Professora: E tu, Manel, achas que tinha alguma coisa a ver com as diagonais?
Mateus: Não. Porque nós formamos os retângulos a partir dos pontos intermédios dos lados e não a partir das diagonais.

Durante essa conversa, o Mateus deu uma explicação confusa ao procurar relacionar os pontos médios dos quadriláteros originais com as características do retângulo. O Jorge, por sua vez, explorou as relações entre dois quadriláteros por intermédio das propriedades das diagonais. Apesar de não apresentarem argumentos suficientes para justificarem a conjetura, os alunos tomaram uma direção certa. Mais tarde, ambos acabaram por concluir que a obtenção de quadriláteros com ângulos retos resultava da perpendicularidade das diagonais e que a congruência dos lados do novo quadrado relacionava-se com as propriedades do quadrado original, mobilizando assim conhecimentos prévios sobre os quadriláteros:

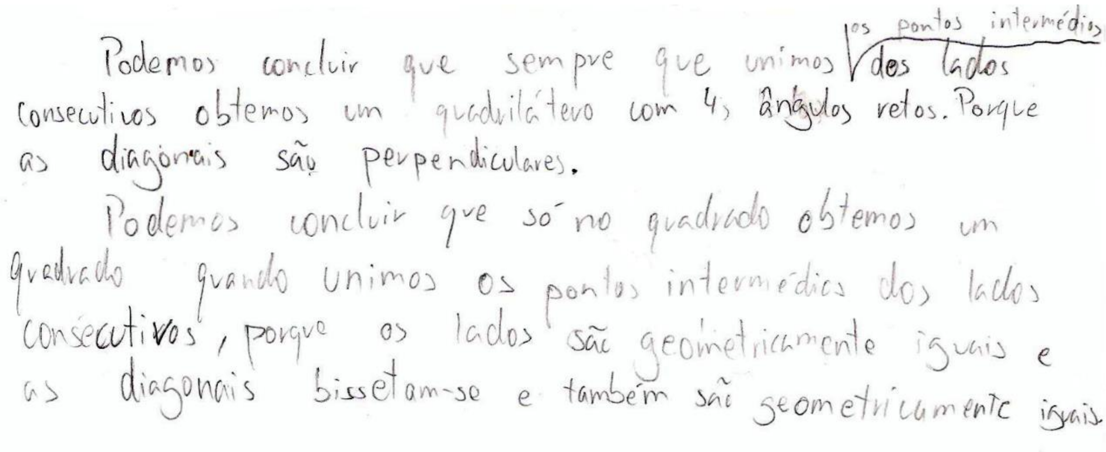

Podemos concluir que sempre que unimos os pontos intermédios dos lados consecutivos obtemos um quadrilátero com 4s ângulos retos. Porque as diagonais são perpendiculares.
Podemos concluir que só no quadrado obtemos um quadrado quando unimos os pontos intermédios dos lados consecutivos, porque os lados são geometricamente iguais e as diagonais bissetam-se e também são geometricamente iguais

Figura 36 – Resolução apresentada pelo par Mateus-Jorge

Ainda que o nível de escolaridade da turma em questão seja elementar e que as suas características tornem a elaboração de provas matemáticas uma atividade muito exigente, foi possível observar resultados positivos durante o processo de justificação. Esse aspeto mostra, tal como referem alguns autores, a possibilidade de interiorizar (progressivamente) nos alunos a justificação de conjeturas, tendo como base um raciocínio crível e os seus conhecimentos prévios (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2006).

No que diz respeito à dimensão visual, verifico que a sua função foi muito importante, tanto na formulação da conjetura como no processo de justificação. A meu ver a própria tarefa requeria o desenvolvimento do raciocínio visual, uma vez que os alunos tinham de construir quadriláteros, analisar as suas propriedades e relações entre eles e, com base nessa análise e observação, elaborar uma conjetura e justificá-la.

Apesar dos contratempos associados à recolha de material da entrevista, constatei alguns aspetos interessantes, também evidenciados em aulas anteriores. Por exemplo, quanto à classificação dos quadriláteros, tornou-se relevante a utilização de uma classificação inclusiva por parte dos alunos, demonstrando que reconheceram que "as regras do quadrado" estão incluídas nas "regras do retângulo". Também ficou assente que a construção de quadriláteros não é uma tarefa fácil para alguns alunos, mesmo quando eles sabem identificá-los e conhecem as suas propriedades.

Os entrevistados sentiram dificuldades em diferentes momentos ao longo da realização da tarefa, seja na construção dos quadriláteros, seja na fase de justificação, contudo os mesmos foram capazes de formular uma conjetura tendo como suporte a observação dos dados. Embora os pares não tivessem feito testes para verificar as suas conjeturas, um deles destacou-se por tentar justificar as suas afirmações.

Tarefa "Descobrindo os quadriláteros"

A tarefa "Descobrindo os quadriláteros" (anexo XIII), que se reveste de algum caráter exploratório, também foi concretizada no seio de uma entrevista (já no final do 3.º período) aos pares de alunos selecionados, Marta-Alberto e Mateus-Jorge. Os alunos foram encorajados a descobrir e a identificar os quadriláteros, a partir da análise de afirmações respeitantes às suas propriedades. Além disso, era pedido o registo escrito da justificação às respostas dadas pelos grupos, desenvolvendo a sua comunicação.

Deste modo, a realização da entrevista assente na presente atividade permitia uma visão mais aprofundada dos processos de definir e classificar desenvolvidos pelos alunos e das suas dificuldades sentidas ao longo desses processos. Constituía uma oportunidade para os grupos investigarem e compararem exemplos (e contraexemplos) de quadriláteros, até descobrirem os pretendidos. A atividade não apresenta figuras ou diagramas que suportem as afirmações e, portanto, os alunos podiam recorrer a esquemas ou construir quadriláteros, por forma a auxiliá-los e a apoiar as suas respostas.

É preciso salientar que as entrevistas decorreram sem qualquer problema técnico (ao contrário das primeiras sessões), possibilitando a recolha de dados por via áudio e vídeo.

Definição e classificação dos quadriláteros

Considerando a primeira afirmação enunciada na tarefa – "Não é um quadrado e tem os lados geometricamente iguais" –, os grupos de alunos tinham de fazer uso da partição para especificar que o quadrilátero pretendido era o losango não quadrado. Apesar de se prevalecer a utilização de uma classificação hierárquica, também já foi referido que a classificação por partição e as suas correspondentes definições podem ser essenciais para diferenciar nitidamente os conceitos (de Villers, 1994).De facto, durante a realização dessa alínea surgiram discussões relevantes entre os pares, que até fizeram emergir a classificação hierárquica dos losangos.

A Marta, por exemplo, reconheceu de imediato que se tratava de um losango (propriamente dito). No entanto, ao trocar ideias com o seu colega, mostrou ter problemas em aceitar a inclusão do quadrado na classe dos losangos.

O Alberto, por sua vez, não se convenceu da resposta dada pela Marta e, perante essas dificuldades reveladas, sugeri-lhe que representasse um esboço dos quadriláteros em questão, com o intuito de o auxiliar (figura 37).

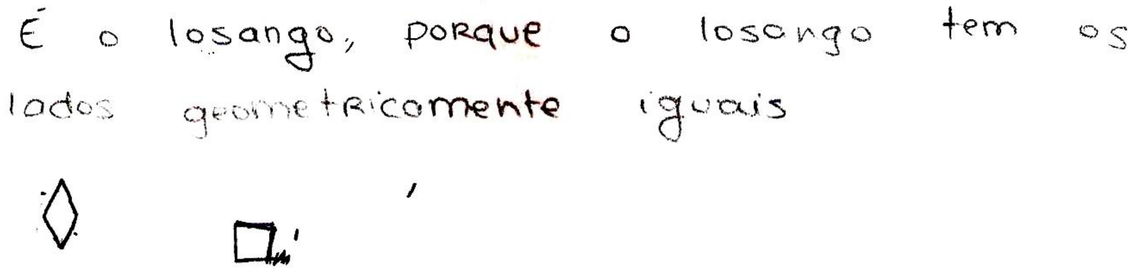


Figura 37 – Resolução apresentada pelo par Marta-Alberto à primeira afirmação

O excerto seguinte retrata assim o episódio durante esse momento da entrevista:

Marta: Pode ser um losango.
Professora: E porquê?
Marta: Porque o losango tem os lados geometricamente iguais.
Professora: Não concordas Alberto? [O Alberto não se mostrou seguro face à resposta da sua colega e acabou por desenhar uns esboços.] (…)
Professora: Esse losango é um quadrado? [Aponto para o losango propriamente dito construído pelo Alberto.]
Alberto: É.
Marta: Não, não tem ângulos retos.
Professora: E os lados são geometricamente iguais?
Marta: Sim. (…)
Professora: Eu posso dizer que o quadrado é um losango? [Aponto para o quadrado construído pelo Alberto.]
Alberto: Posso.
Marta: Eu acho que não.
Professora: Porquê?
[O Alberto pegou na folha e posicionou-a de forma a obter um “losango propriamente dito”, de acordo com a sua perspetiva.]
Professora: O que é que define um losango?
Marta: Os ângulos opostos têm a mesma amplitude e os lados são geometricamente iguais.
[Após ter explicitado a definição (hierárquica) de losango, voltei a questioná-los.]
Professora: O quadrado tem ou não os lados geometricamente iguais?
Alberto: Tem.
Professora: Então eu posso dizer que o quadrado é um losango?
Alberto: Pode.
Professora: Concordas, tendo esta definição?
Marta: Eu acho que não, por causa da amplitude dos ângulos.
Alberto: Mas pela definição, eu concordo.
Marta: Não, porque o quadrado tem os ângulos todos retos e o losango...
Alberto: Está bem, mas o quadrado tem os lados geometricamente iguais.

A partir do diálogo, observamos que a Marta não percebeu a lógica de uma classificação hierárquica de quadrados e de losangos, mesmo depois de lhe apresentar a correspondente definição de losango. Desse modo, a aluna preferiu valorizar características não essenciais do losango, como as características dos ângulos, e demonstrou falta de clareza na compreensão do papel das definições.

Curiosamente, tal como pudemos observar pela análise da tarefa “Explorando os quadriláteros e pontos médios”, a mesma aluna não teve problemas em incluir o quadrado na classe dos retângulos. Parece-me que essa contradição pode ser explicada pela semelhança das características visuais do quadrado e do retângulo, permitindo que a Marta aceitasse mais facilmente a inclusão da classe hierárquica dos retângulos, do que a dos losangos. Se assim for, então nesse caso a dimensão figurativa predomina sobre a dimensão conceptual, tal como Mariotti e Fischbein (1997) retratam no seu estudo, partindo de exemplos concretos decorrentes de uma experiência de ensino. De realçar que, mesmo com a predominância da componente figurativa, a Marta foi capaz de descrever o losango em termos das suas propriedades, usando uma linguagem adequada.

O Alberto, por seu turno, também revelou dificuldades a esse nível, pois apenas conseguiu identificar os quadriláteros pela sua aparência global e a sua posição habitual, tomando novamente uma atitude superficial. Em contrapartida, este aluno acabou por reconhecer que o quadrado é um losango, tendo em conta a definição (hierárquica) do losango.

De modo oposto, o par Mateus-Jorge resolveu rapidamente a primeira alínea, sem dificuldades (figura 38).

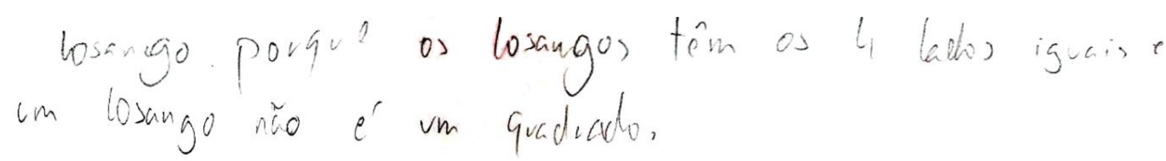

losango porque os losangos têm os 4 lados iguais e um losango não é um quadrado.

Figura 38 – Resolução do Mateus e do Jorge

O Mateus, em particular, demonstrou (novamente) compreender a relação ou lógica da classe inclusiva do losango, conforme podemos verificar pelo excerto seguinte:

Professora: Relativamente a essa parte que escreveste " um losango não é um quadrado"…
Mateus: O quadrado é que é um losango.
Professora: E porquê?
Mateus: Porque tem os quatro lados iguais.

A segunda afirmação apresentada na tarefa – "Não é um paralelogramo e tem um eixo de simetria" – conduzia os alunos à revisão da definição de paralelogramo e de simetria. Este último conteúdo foi abordado em anos anteriores e, durante a intervenção letiva, foi apenas retomado neste momento, levando os alunos a compreender que os quadriláteros também podem ser caracterizados pelo estudo dos eixos de simetria.

De seguida, apresento um excerto de diálogo estabelecido com o par de alunos Marta-Alberto sobre a resolução dessa alínea:

Alberto: O que é um eixo de simetria?
Marta: Tipo, se pusermos um eixo de simetria, de um lado tens uma coisa e do outro tens igual, mas só que… É como se fosse um espelho. Eu acho que aqui é um retângulo! (…)
Professora: Um retângulo não é um paralelogramo?
Alberto: O que é que define um paralelogramo?
Marta: Neste caso não é um paralelogramo obliquângulo, pois não? (…)
Professora: O que é que define um paralelogramo?
Alberto: Dois pares de lados iguais.
Marta: Dois pares de lados paralelos. (…)
Professora: E o retângulo tem dois pares de lados estritamente paralelos?
Ambos: Sim.
Marta: Eu acho que é o losango, porque se nós fizermos um eixo de simetria no losango…
Professora: E o losango não tem dois pares de lados estritamente paralelos?
André: Tem!
Marta: Não.
[O André aponta para o losango desenhado e explica à sua colega os lados que são estritamente paralelos.] (…)
Marta: Eu acho que aqui se calhar é o papagaio.
Alberto: O papagaio não tem lados paralelos. Então aqui não é um paralelogramo. (…)
Professora: E só tem um eixo de simetria?
Alberto: Sim. (…) Não.
Marta: Eu acho que só tem um, porque se traçar aqui, isto não fica…

Pelo início do episódio, podemos observar que o Alberto não conhecia o significado de "eixo de simetria" e, por essa razão, solicitou a ajuda da sua colega, sendo que essa situação foi recorrente ao longo das aulas lecionadas. Relativamente à Marta, verificamos que a aluna compreendeu o seu sentido, apesar de usar uma linguagem informal durante a sua explicação.

Mesmo revelando muitas dificuldades a Matemática, é interessante verificar que o Alberto questionou-se sobre a definição de paralelogramos, demonstrando que compreendeu realmente a importância das definições para a resolução deste tipo de tarefas. Já a Marta pareceu conhecer e diferenciar os significados de “paralelogramo” e de “paralelogramo obliquângulo”, ao contrário do seu colega.

Inicialmente, a aluna centrou-se somente nas propriedades de simetria, identificando os quadriláteros que contém eixos de simetria, como o retângulo e o losango. Através do questionamento, a Marta acabou por descobrir que o quadrilátero pretendido era o papagaio (figura 39), mas não explorou outras hipóteses. Apesar disso, ao longo deste processo, a aluna foi capaz de refutar as descobertas realizadas sempre que considerava a não existência de paralelismo. Deste modo, verifico que foi fundamental para a aluna a análise de vários casos para descobrir o quadrilátero correspondente.

No decorrer da discussão, o Alberto também chamou a atenção da Marta para o facto de o losango ter lados estritamente paralelos, indicando os respetivos pares de lados no desenho que esboçou na alínea anterior. De facto, a aluna considerou, numa primeira abordagem, que o losango não era um paralelogramo. Este aspeto intrigou-me, pois nesta altura pensava que os alunos já tinham ultrapassado esses obstáculos, em particular a Marta, que foi sempre revelando, durante a intervenção letiva, um desempenho razoável.

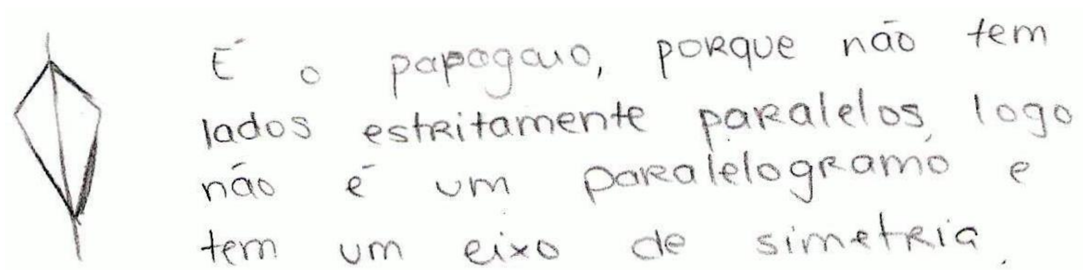


Figura 39 – Resposta dada pelo par Marta-Alberto à segunda afirmação

Embora a aluna apresentasse as suas ideias e justificações com pouca convicção, mostrou, no decorrer da resolução da tarefa, que tinha conhecimentos geométricos e liderou a resolução da alínea. O Alberto revelou muitas dificuldades, mas foi visível o seu interesse no respetivo trabalho.

Perante a segunda afirmação, o Mateus, por sua vez, fez logo uma referência ao trapézio isósceles e teve necessidade de fazer um desenho para apoiar a sua justificação (figura 40):

> **Mateus:** Porque…Posso desenhar, que é mais fácil? (…)
> **Professora**: E porque não é um paralelogramo? Tens que justificar isso.
> **Mateus**: Porque um paralelogramo tem dois pares de lados paralelos.
> **Professora**: E essa é a única hipótese, o trapézio isósceles?
> **Mateus**: Acho que sim.
> **Jorge**: Não é um paralelogramo.
> **Professora**: Portanto os únicos não paralelogramos que vocês conheceram foram os trapézios?
> **Mateus**: E o papagaio.
> **Mateus**: Também dava.

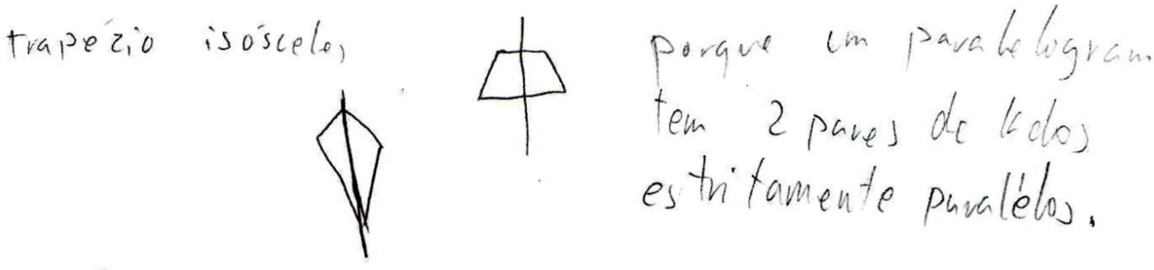


Figura 40 – Resolução apresentada pelo par Mateus-Jorge à segunda alínea

Tal como no caso anterior, o par Mateus-Jorge também só considerou um exemplo, não explorando outras hipóteses. Assim, os alunos deram por terminada a tarefa assim que realizaram uma descoberta, e apenas concluíram que podia ser um papagaio quando foram questionados.

De igual modo à tarefa anterior, o Mateus revelou-se líder do par, impondo as suas ideias e o seu trabalho ao colega, que pouco se manifestou ao longo da atividade.

Mesmo correspondendo a uma fase final de estudo, verifico que a classificação hierárquica não ficou clara para alguns entrevistados, sobretudo no que diz respeito à compreensão da definição hierárquica do losango. Alguns deles revelaram dificuldades no desenvolvimento dos conceitos geométricos, ficando assim patente que precisam de consolidar mais os seus conhecimentos nessa temática. O Mateus destacou-se pelo seu ritmo de trabalho superior ao dos seus colegas e pela segurança manifestada durante a realização da tarefa.

Ficha de avaliação global

A ficha de avaliação global proposta pela professora titular foi realizada no 3.º período e permitiu avaliar a aprendizagem dos alunos em vários temas, incluindo a geometria. Esta temática teve um peso substancial no teste e integrou diversos conteúdos, entre os quais, as áreas dos quadriláteros.

A ficha global tem a estrutura de prova de exame, sendo constituída por duas partes e permitido o uso de calculadora apenas na primeira parte.

Decorrente da sua realização, surgiram resultados interessantes que também poderão contribuir para o presente estudo. Por essa razão, apresento e analiso, em seguida, algumas resoluções dos alunos relativas à questão 3.1 da parte I do teste global.

Questão 3.1

Para realizar a referida questão da ficha de avaliação global era necessário que os alunos analisassem uma figura, identificassem as alturas de um conjunto de cinco paralelogramos (obliquângulos) com a mesma base e aplicassem a fórmula que permite o cálculo da sua área. O seu registo era feito numa tabela que se encontrava na própria folha de teste. Embora o item não constituísse uma atividade de natureza exploratória, envolvia a mobilização de conteúdos relativos à subunidade em estudo.

3. Na figura 2, sobre uma quadrícula de 5 mm de lado estão desenhados cinco paralelogramos com a mesma base.

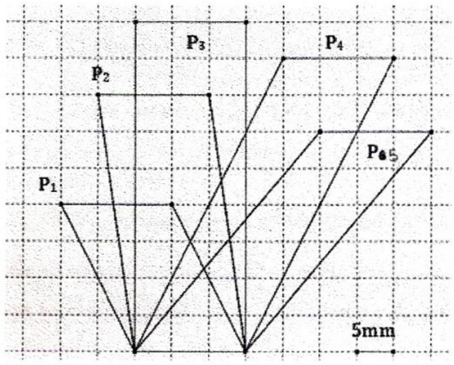


Figura 2

3.1. Completa a tabela seguinte:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Altura (cm)	2				
Área (cm^2)	3				

Figura 41 – Extrato da ficha de avaliação global (questão 3, parte I)

Na realidade, alguns alunos destacaram-se pela positiva enquanto outros evidenciaram dificuldades durante a sua concretização.

Por exemplo, o Gustavo mostrou que compreendeu o significado de altura de um paralelogramo (apenas errou ao determinar o valor da altura do paralelogramo P_5) e recorreu à classificação inclusiva para determinar as áreas dos vários quadriláteros. Desta forma, para preencher a segunda linha da tabela, o aluno aplicou a fórmula usada para calcular a área do trapézio, reconhecendo que o paralelogramo é um trapézio (figura 42).

Embora tivesse apresentado alguns erros de cálculo, o Gustavo acabou por destacar uma das vantagens da classificação hierárquica, pois todas as propriedades demonstráveis dos trapézios podem ser imediatamente aplicadas aos paralelogramos.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Altura (cm)	2	✓ 3,5cm	✓ 4,5cm	✓ 4	✗ 6
Área (cm^2)	3	✗ 4,125	$a = \frac{1,5+1,5}{2} \times 4,5 = 6,75$ ✓	✓ 6	✗ 9

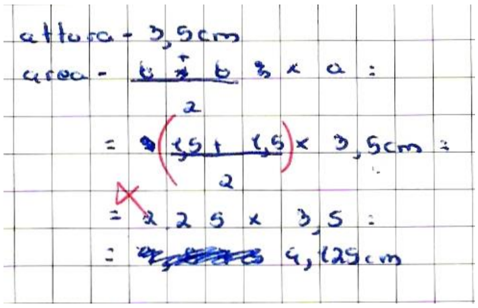


Figura 42 – Extrato da resolução apresentada pelo Gustavo (questão 3.1)

Numa situação oposta, a Sofia considerou que todos os paralelogramos tinham a mesma altura e concluiu que as suas áreas também eram iguais (figura 43). Na sua resolução, a aluna não apresentou os respetivos cálculos e não explicitou o seu raciocínio, impedindo-me de perceber qual o processo utilizado para determinar as respetivas medidas de áreas. Além disso, é notório que a aluna não deu importância ao exemplo apresentado na tabela.

	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1
Altura (cm)	1,5cm	1,5cm	1,5cm	1,5cm	2
Área (cm^2)	20	20	20	20	3

Figura 43 – Resolução apresentada pela Sofia

Assim, destaco o facto de a Sofia não ter sido capaz de identificar corretamente a altura dos paralelogramos relativamente à base indicada. Esta dificuldade conceitual também foi sentida por outros alunos, demonstrando que a definição geométrica de "altura" não ficou totalmente clara para eles.

Esses obstáculos já tinham sido evidenciados por alguns alunos numa aula anterior, inclusive, surgiu o caso de uma aluna que considerou a medida do lado de um paralelogramo obliquângulo equivalente à medida da sua altura, não aceitando as suas diferenças. Dadas as dificuldades, torna-se evidente que é necessário insistir na realização deste tipo de tarefas, propondo aos alunos a identificação dos elementos de alguns paralelogramos em diferentes posições e tamanhos. Essas atividades podem assim constituir experiências interessantes para os alunos, com vista a melhorar as suas capacidades de visualização.

O Lourenço, por sua vez, reconheceu corretamente a altura do paralelogramo em quase todas as situações, contudo não foi capaz de determinar a sua medida de área.

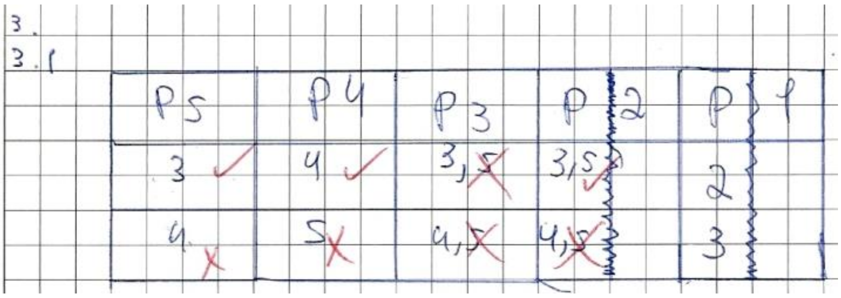


Figura 44 – Parte da resposta à questão 3.1 apresentada pelo Lourenço

De forma surpreendente, o aluno fez uma analogia com tarefas anteriores que tinham sido propostas no âmbito da álgebra (sobre sequências), e conjeturou, a partir do exemplo dado no teste, que o valor correspondente à medida de área de cada um dos paralelogramos era igual ao valor da respetiva medida de altura acrescido de uma unidade. Desse modo, não aplicou qualquer fórmula para o cálculo da sua área.

A partir destes resultados, podemos observar que os alunos apresentaram diversas dificuldades, sendo notório que precisam de trabalhar mais estes conteúdos, incluindo as suas capacidades associadas à visualização.

Não obstante, um ponto construtivo tem sido verificado nestas últimas análises e que se relaciona com uma maior utilização de uma classificação hierárquica.

Capítulo 6

Reflexão final

Neste último capítulo, apresento uma síntese dos resultados do estudo e as principais conclusões. Partindo da análise feita aos dados recolhidos, organizo as conclusões de acordo com os enfoques destacados nas questões de investigação, e procuro dar resposta a essas mesmas questões.

A realização deste estudo também me permitiu refletir sobre a atividade desenvolvida como professora e como investigadora, onde exponho no final alguns aspetos sobre o assunto.

Principais conclusões

Através da elaboração das conclusões mais relevantes, procuro descrever o raciocínio geométrico dos alunos da turma 7.º 2.ª, na subunidade "Quadriláteros", respondendo às seguintes subquestões formuladas no início do estudo:

c) Que tipo de definições usam preferencialmente os alunos? A que tipo de classificações recorrem? Que dificuldades evidenciam?

d) Como é que os alunos formulam as suas conjeturas? Qual o papel da dimensão visual neste processo? Que dificuldades evidenciam?

A organização e apresentação das conclusões incidiu, assim, sobre esses dois conjuntos de subquestões de estudo.

Definição e classificação dos quadriláteros

No decurso da intervenção letiva, os alunos tiveram várias oportunidades para construir definições relativas aos quadriláteros e classificá-los, recorrendo a tarefas de exploração. Deste modo, em quase todas as fichas de trabalho ou tarefas analisadas, houve evidências do tipo de definições (e de classificação) usadas preferencialmente pelos alunos na identificação ou caracterização dos quadriláteros, bem como das dificuldades sentidas ao longo desse processo. De assinalar que a categorização desses diferentes tipos de definições utilizadas pelos alunos foi feita de acordo com a revisão da literatura de Villiers, Govender e Patterson (2009).

A partir da realização das primeiras fichas de trabalho, onde houve o contacto primário com os quadriláteros, verifico que a tendência espontânea de grande parte dos alunos foi a realização de uma lista das suas propriedades descobertas experimentalmente por observação e por medição. Esta situação conduziu, necessariamente, à introdução de atributos desnecessários na descrição dos quadriláteros e, por conseguinte, à construção de definições não económicas. Assim, os alunos manifestaram, desde cedo, dificuldades em distinguir entre propriedades essenciais e não essenciais.

De facto, a economia das definições não foi reconhecida pela maioria da turma, pois tornou-se difícil para os alunos compreenderem que nem todas as condições necessárias são requeridas para a definição. O Mateus, pelo contrário, destacou-se pela positiva, desenvolvendo a capacidade de construir definições corretas e económicas. Dadas essas observações, concluo que a turma em questão precisa de continuar a realizar mais tarefas para ultrapassar esses obstáculos, sobretudo a concretização de exercícios onde os alunos possam avaliar quais são as condições que devem ser retiradas numa definição não económica, e compreender que as mesmas podem ser deduzidas das propriedades necessárias. Esta sugestão metodológica é indicada por de Villiers, Govender e Patterson (2009), em situações que o aluno reconhece que está perante uma definição não económica. De Villiers (1998) descreve ainda um caso concreto onde foi proposto a um grupo de estudantes a redução das suas descrições com o intuito de abandonar algumas propriedades desnecessárias, porém, alguns deles acabaram por construir definições incompletas.

Assim, a consideração única de atributos desnecessários também levou à elaboração de definições incorretas, nomeadamente de definições incompletas. A utilização deste tipo de definições também foi evidente durante a realização da última ficha de trabalho proposta, demonstrando que alguns alunos não adquiriram a destreza para construir definições corretas, apresentando descrições muito incompletas dos quadriláteros. Esses momentos foram oportunos para a apresentação de contraexemplos, levando os alunos a analisarem outras propriedades. Tal como foi salientado no enquadramento teórico, é importante que os alunos comparem contraexemplos (NCTM, 2001), detetando-se, em geral, dificuldades dos alunos na construção de contraexemplos corretos (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Não obstante, com o decorrer das aulas e a exploração de outras tarefas, alguns alunos, como o Gustavo e o Rodrigo (entre outros), passaram a discernir quais são as propriedades necessárias e suficientes para definir (e classificar) corretamente um quadrilátero, reconhecendo o papel das definições.

Outro aspeto que sobressaiu dos dados analisados está relacionado com a influência das representações visuais (protótipos) na identificação e classificação dos quadriláteros. Por exemplo, um grupo de alunos apenas reconheceu o papagaio pela sua forma e por possuir um ângulo interno reto – de modo semelhante à representação do papagaio fornecida na primeira ficha de trabalho –, não se preocupando em analisar as suas propriedades relativas aos lados, ou às diagonais.

A própria orientação dos quadriláteros também afetou a sua classificação, pelo que alguns alunos pareciam apenas identificá-los (e construí-los) nas suas posições habituais. Esta situação revelou lacunas nas capacidades de visualização espacial, em especial da constância percetual que corresponde à capacidade de reconhecer figuras em diversas posições e contextos.

A atitude de responderem consoante aquilo que veem em relação aos quadriláteros, sem atentarem nas suas características ou propriedades, parece ser típica nos alunos, tal como apontam alguns autores de acordo com as suas experiências de ensino (Pereira & Serrazina, 2013; Almiro, 2010). De facto, a forma como esses polígonos surgem aos olhos dos estudantes e o modo como estão orientados são decisivos para as suas respostas (Almiro, 2010). Deste modo, ao longo da intervenção letiva, essa abordagem superficial foi sempre combatida, levando os alunos, através do questionamento, a descreverem os polígonos em termos das suas propriedades.

No que respeita à construção dos quadriláteros, os alunos também apresentaram dificuldades. Este estudo revelou que, mesmo com o conhecimento das suas propriedades, fazer construções com material de desenho é uma tarefa difícil para a maior parte dos alunos. Este ponto é igualmente realçado no estudo de Almiro (2010).

No decorrer das aulas lecionadas, ficou ainda claro que os alunos tiveram problemas com a classificação hierárquica, demonstrando a complexidade da sua aprendizagem. Assim, a partir de discussões coletivas em sala de aula, verificou-se alguma resistência por parte dos alunos na aceitação da inclusão da classe hierárquica. O Lourenço, por exemplo, constituiu um desses casos, rejeitando o facto de o quadrado ser um caso particular do retângulo. Para esse aluno, a afirmação "o quadrado é um retângulo" não tinha sentido, dado que o retângulo (propriamente dito) não tem todos os lados geometricamente iguais. A respeito desse assunto, de Villers (1994) refere que o problema dos alunos reside na palavra "é" e, como alternativa, aconselha o uso da palavra "especial" (como "o quadrado é um retângulo especial"), o qual auxilia os alunos na compreensão de que um é subconjunto do outro.

Dessa forma, concluo que a turma, em geral, preferiu recorrer à classificação por partição. Apesar de a inclusão hierárquica ser de difícil compreensão, justificando, por um lado, esses resultados do estudo – os quais vão ao encontro da investigação desenvolvida por de Villers (1994) –; por outro lado, a situação leva-me a refletir sobre as tarefas propostas aos alunos. Na realidade, as primeiras fichas de trabalho seguiram uma lógica essencialmente exclusiva (com o preenchimento das tabelas), pois pretendia dar a conhecer aos alunos algumas propriedades de cada um dos quadriláteros. Talvez essa opção tenha prejudicado a compreensão relacional de uma classificação hierárquica. Sem embargo, estou certa que o fator tempo também dificultou o processo de aprendizagem, pois deveriam ter sido dadas mais atividades aos alunos, adequadas para a discussão do valor ou da função da classificação hierárquica, tal como sugere de Villers (1994). Infelizmente, a meu ver, a extensão exagerada do novo programa de Matemática aliada ao seu forte formalismo em nada ajudaram para que houvesse tempo para a realização desse tipo de atividades.

Em adição, parece-me, tendo em conta alguns dados obtidos do estudo, que a classificação hierárquica do retângulo foi mais aceite que a classificação hierárquica do losango. A origem desse comportamento pode estar associada ao aspeto visual análogo do quadrado e do retângulo. Tal como mencionou o Alberto numa das entrevistas realizadas, o quadrado é só "metade do retângulo", justificando por que razão o quadrado pertence à família dos retângulos e, por conseguinte, destacando a influência da visualização.

Apesar disso tudo, com o avançar da realização das fichas de trabalho, foi evidente uma melhor compreensão do significado de uma classificação inclusiva, registando-se nos diálogos dos alunos a compreensão de que as propriedades necessárias de alguns quadriláteros (como o quadrado) estão incluídas nas propriedades necessárias de outros (como o retângulo).

Além das dificuldades dos alunos acima apontadas, destaco outras igualmente relevantes, associadas a noções mais básicas: falta de compreensão de alguns conceitos geométricos, como "paralelismo", "diagonal" e "altura" e dificuldades na medição dos ângulos internos dos quadriláteros. Acresce ainda outro aspeto que ficou percetível no decorrer das aulas: estes alunos necessitam de desenvolver mais as suas capacidades relacionadas com a visualização espacial – não só a constância percetual (já referida), mas também a perceção figura-fundo, em que os alunos são capazes de identificar figuras num fundo complexo. Tal como já foi mencionado, as atividades que envolvem as capacidades espaciais da criança parecem ter um papel especial, facilitando a aprendizagem da Geometria (Matos & Gordo, 1993) e, por essa razão, devem ser adquiridas e desenvolvidas (Gutiérrez, 1996).

Em síntese, de um modo geral, verifica-se uma progressão no raciocínio geométrico dos alunos, retratada por uma compreensão mais avançada dos quadriláteros: os alunos foram capazes de identificar as suas características, estabeleceram relações entre elas e participaram ativamente na construção das suas definições. Contudo, ressalta ainda que os alunos precisam de consolidar mais os seus conhecimentos geométricos e ter mais experiências ao nível da geometria. De notar que, de acordo com os resultados do estudo, a maioria encontra-se no nível 2 de van Hiele, em diferentes fases de desenvolvimento.

Formulação de conjeturas e influência do papel de visualização

A formulação de conjeturas e sua justificação por parte dos alunos também teve lugar durante a realização de algumas fichas de trabalho, indo assim ao encontro do objetivo de estudo. Atendendo aos respetivos resultados, verifico que os alunos formularam as suas conjeturas por observação direta e manipulação dos dados, do mesmo modo que referem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) na sua investigação.

Para o efeito contribuiu o uso de materiais manipuláveis, pois não só apoiou a formulação de conjeturas como também motivou a turma para o trabalho da disciplina. Esse aspeto foi notório durante a concretização da última ficha de trabalho, onde os alunos manipularam os quadrados de acetato de diferentes cores e tamanhos, em várias posições e, através da observação e sua análise, formularam conjeturas sobre os polígonos que podiam (ou não) obter por sobreposição. Sem dúvida, que a utilização desses materiais facilitou as descobertas de polígonos e das suas propriedades, auxiliando a visualização e a representação. Almiro (2010, p. 199) também conclui, com a realização da mesma tarefa por parte dos seus alunos do 7.º ano de escolaridade, que o material manipulável foi "um factor positivo para o bom desempenho dos alunos".

Associada à manipulação dos materiais, constato ainda que a visualização teve um papel muito importante no processo de conjeturar. Além da tarefa anterior onde foi dada oportunidade para explorar e argumentar visualmente, de modo semelhante, no trabalho autónomo referente à ficha de trabalho sobre as áreas dos quadriláteros, ficou patente que grande parte dos alunos compreendeu a equivalência das medidas de áreas do retângulo e do paralelogramo formado (ou do papagaio e do retângulo) graças à exploração com os polígonos em papel e à utilização dos elementos visuais. A visualização foi, de facto, fundamental no decorrer dessa aula e, apesar do sentido espacial dos alunos se encontrar pouco desenvolvido, essa componente do raciocínio geométrico permitiu-lhes uma melhor compreensão do modo de calcular a área do paralelogramo e do papagaio, partindo da sua relação com a área do retângulo. Tal como se revelou na teoria, as representações visuais – neste caso, os polígonos em papel, em conjugação com a sua manipulação e transformação –, podem ser essenciais para a compreensão de ideias geométricas (Battista, 2007) – de que a relação de equivalência entre figuras constituiu um exemplo. Dessa forma, o mesmo autor constata que a visualização constitui uma componente primordial do raciocínio geométrico. Loureiro (2009) também valoriza a visualização, acrescentando que deve ser assumida como uma âncora para o raciocínio matemático em geral.

Outro aspeto que merece atenção relaciona-se com a função que os conhecimentos prévios dos alunos tiveram na formulação das conjeturas, podendo auxiliá-los na resolução das respetivas questões. Retomando o exemplo anterior, na mesma ficha de trabalho, alguns alunos procuraram relacionar os conhecimentos que já tinham sobre as áreas com o contexto do problema, por forma a descobrirem uma fórmula que permitisse o cálculo da área do paralelogramo.

Além disso, este estudo mostra que os alunos basearam as suas conjeturas num número reduzido de casos, não sentindo necessidade de explorar outras situações e, consequentemente, limitando o número de descobertas. Esse aspeto também é sublinhado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). Dessa forma, na minha opinião, é necessário investir mais na concretização desse tipo de tarefas, proporcionando aos alunos a oportunidade de formularem e testarem conjeturas, e desenvolverem capacidades inerentes a esses processos, como observação atenta e análise crítica.

No decurso dessas aulas, a comunicação matemática, oral e escrita, assumiu uma função relevante, justificando igualmente a necessidade de realizar esse tipo de atividades. Na verdade, os alunos sentiram muitas dificuldades nesse campo, tendo sido mais evidente na elaboração de registos escritos, onde apresentaram descrições pobres. Almiro (2010, p. 203) também observou esses obstáculos ao longo das suas aulas sobre os quadriláteros, assumindo que a "criação de oportunidades de comunicação adequadas" deve fazer parte do trabalho a realizar na sala de aula.

De um modo geral, os alunos foram capazes de formular conjeturas tendo como suporte a observação e manipulação de materiais colocados à sua disposição. Esses materiais auxiliaram assim o desenvolvimento dos processos geométricos. A visualização também teve um papel essencial na formulação de conjeturas e, dado o nível de escolaridade e as características da turma, penso que contribuiu para atenuar as dificuldades de aprendizagem relativas aos conteúdos trabalhados e que foram sentidas pelos alunos no decorrer da intervenção letiva.

Reflexão pessoal

A realização deste trabalho fez-me refletir sobre vários aspetos, desde o estudo desenvolvido de cariz investigativo à intervenção letiva na subunidade "Quadriláteros", que constituiu a minha primeira experiência como professora.

Tendo em conta o objetivo de investigação, foi percetível para mim que a descrição do raciocínio geométrico dos alunos da turma de 7.º ano em questão iria constituir um grande desafio. De facto aceder ao raciocínio dos alunos não é uma tarefa fácil e implica que o professor esteja atento às suas representações e que os alunos sejam bons comunicadores. No entanto, atentando a todo o processo investigativo desenvolvido, denoto que essa experiência (mesmo tendo sido curta) foi muito enriquecedora, revelando resultados pertinentes que contribuíram para as respostas das subquestões formuladas inicialmente. Destaco ainda o papel central da revisão da literatura nesse processo: não só porque me ajudou a clarificar múltiplos aspetos associados ao raciocínio geométrico, como me deu uma visão mais alargada das definições geométricas, influenciando a construção das tarefas exploratórias propostas aos alunos. Além disso, essa revisão da literatura permitiu-me construir um quadro de referência teórico, identificando e precisando diferentes tipos de definições e de classificação dos quadriláteros.

No decorrer da prática letiva, também fiquei com a noção que não tinha recolhido dados suficientes para o estudo. Contudo, aquando da análise dos mesmos, apercebi-me que tinha reunido um conjunto considerável de dados, acabando por tornar essa etapa longa e demorada. Todas essas sensações próprias de um investigador inexperiente são retratadas por Bogdan e Biklen (1994) e, portanto, serão tidas em consideração nos próximos estudos desenvolvidos por mim.

Além do modo como os alunos formulam conjeturas, também teria sido interessante investigar de que forma testam e justificam essas conjeturas. Infelizmente, não foi possível explorar de forma conveniente esses processos durante a minha prática letiva. Dadas as características da turma e o pouco tempo que dispúnhamos, acabei por não lhes atribuir muita importância, propondo assim esses elementos para objeto de estudo numa investigação futura. No que diz respeito ao tipo de definições (e de classificação) dos quadriláteros usadas preferencialmente pelos alunos, penso que o estudo acumulou resultados pertinentes, indo ao encontro de estudos realizados por diversos investigadores. No entanto, tal como já referi na seção anterior, o fator tempo ou a própria estrutura das fichas de trabalho exploratórias não permitiram que se registasse uma evolução significativa da utilização da classificação hierárquica, sendo esta a mais vantajosa de acordo com alguns autores. Talvez, enquanto professora, pudesse ter explorado melhor essas ideias, sobretudo durante as discussões coletivas. Sem embargo, observo que alguns alunos destacaram-se pela positiva e compreenderam o seu sentido e significado.

No que se refere ao trabalho que desenvolvi como professora, este integrou um leque de experiências ricas e aprendizagens significativas, tornando relevante os pontos onde preciso melhorar. Por exemplo, a gestão da discussão coletiva constituiu sempre um momento difícil para mim, embora tivesse realizado uma boa preparação das aulas. Incentivar a exposição e a discussão de ideias, promover o questionamento – sobretudo após verificar que os alunos não alcançaram os objetivos pretendidos durante o trabalho autónomo –, e lidar com situações imprevistas não foram tarefas fáceis. Acresce ainda as dificuldades sentidas pela turma, e o seu ritmo de trabalho mais reduzido. Ao longo da prática letiva, valorizo ainda a partilha de saberes e a reflexão crítica feita aos planos elaborados e às aulas lecionadas, proporcionadas pelas minhas orientadoras, em conjugação com a minha colega de estágio.

Apesar disso tudo, penso que estabeleci uma boa relação de comunicação e de interação com os alunos, contribuindo para o seu interesse na realização das tarefas exploratórias e dando sentido ao processo de ensino-aprendizagem. No decorrer da minha intervenção letiva sempre me preocupei em ajudar os alunos a ultrapassarem os seus obstáculos. Embora refira com frequência, ao longo deste trabalho, a manifestação dessas dificuldades, reconheço que os alunos evoluíram desde do início do ano letivo e realizaram aprendizagens significativas, incluindo na subunidade lecionada relativa aos quadriláteros, tal como constatei pelos entrevistados. Aliás, pelo que observei das primeiras aulas e comparando com as aulas do 3.º período, é impressionante o progresso efetuado pelos alunos, em especial nos seus hábitos de trabalho favorecendo assim a sua autonomia. Sem dúvida que as características desta turma condicionaram o meu trabalho enquanto professora e a dinâmica das aulas, desenvolvendo em mim diversas competências.

Termino o presente trabalho realçando o papel das tarefas exploratórias sobre os quadriláteros no decorrer das aulas lecionadas, as quais evidenciaram capacidades de alguns alunos tidos por mais fracos e proporcionaram, no geral, o entusiasmo da turma e o seu envolvimento no trabalho. Concluo, assim, que o recurso a esse tipo de tarefas foi a melhor opção, constituindo uma ótima forma de aprendizagem (para os alunos e para mim).

Referências

Almeida, L., & Freire, T. (2007). *Metodologia da investigação em Psicologia e Educação*. Braga: Psiquilíbrios.

Almiro, J. (2010). Os quadriláteros no Programa de Matemática do Ensino Básico: Uma reflexão sobre a prática. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 175-208). Lisboa: APM.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Braga, G. M. (1991). Apuntes para la Enseñanza de la Geometría. *Signos Teoria y Practica de la Educación, 4*, 52-57.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brunheira, L. (2014). *O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos.* (Projeto de Doutoramento, Universidade de Lisboa.)

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. da Ponte (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-231). Lisboa: IE (http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=406,1852906&_dad=portal&_schema=PORTAL).

De Amorim, D. P. (1943). *Compêndio de Geometria*. Coimbra: Coimbra Editora , Lda.

De Villers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics, 14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 248-255.

De Villers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 29-83). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, 1,* 3-19.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in Geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 29-83). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Janela, M. (2012). *O novo programa de Matemática do ensino básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.)

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de Matemática do ensino básico. *Educação e Matemática, 105,* 61-66.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18,* 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Martin, W. G. et al. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA.: NCTM.

Matos, J. M., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: Algumas actividades. *Educação e Matemática, 26,* 13-17.

Menezes, L., Serrazina, L., Fonseca, L., Ribeiro, A., Rodrigues, M., Vale, I., & Tempera, T. (2014). Conhecimento de geometria de alunos da licenciatura em Educação Básica. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2001). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 1992).

Neves, M. A., & Silva, A. P. (2013). *Matemática 7.º Ano. Parte 2.* Porto: Porto Editora.

Pereira, M. G., & Serrazina, M. L. (2013). Propriedades e relações entre quadriláteros: um estudo no 4.º ano de escolaridade. *Encontro Investigação em Educação Matemática 2013 – Raciocínio Matemático* (pp. 108-129). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Poças, R., Aires, A. P., & Campos, H. (2013). O raciocínio geométrico de alunos do 6.º ano de escolaridade sobre a noção de quadrado. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M. C. Costa & R. A. Ferreira (Orgs.). *Raciocínio Matemático* (pp. 88-106). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Matemática. ISBN: 2182-0023.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2008). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano.* ME-DGIDC.

Stake, R. E. (2007). *A arte de investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

Anexos

Anexo I – Plano de aula do dia 2 e 4 de março

Ano/Turma: 7.º 2.ª
Domínio: Geometria e Medida
Conteúdos: Quadriláteros
Data/Hora: 2 de março (10h50) e 4 de março (8h15)

Sumário
Classificação de quadriláteros e suas propriedades.

Propósito principal da tarefa
Definição e classificação dos quadriláteros.

Objetivos Específicos
Metas GM7.2 - Investigar propriedades relativas aos lados e aos ângulos dos quadriláteros; - Reconhecer as características específicas dos trapézios isósceles, retângulo e escaleno, do paralelogramo obliquângulo, do quadrado, do retângulo, do losango e do papagaio; - Estabelecer hierarquias entre os quadriláteros, atendendo às suas características. Reconhecer, por exemplo, o quadrado como caso particular do losango e do retângulo.

Conhecimentos prévios
- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo; - Identificar elementos de um polígono.

Recursos		Metodologia de trabalho
Do professor	Dos alunos	
- Plano de aula; - Manual; - Quadro branco e marcador; - Cartaz com a classificação dos quadriláteros.	- Ficha de trabalho (em suporte de papel). - Lápis, borracha e caneta; - Régua e transferidor; - Manual - Quadro de apoio com a indicação das propriedades dos quadriláteros.	- Trabalho a pares; - Discussão coletiva das resoluções e consolidação de ideias com a turma.

Momentos das aulas	Tempos
1.º Momento: Sumário e apresentação da ficha de trabalho referente à primeira questão.	5 minutos
2.º Momento: Realização da primeira questão da tarefa. I. Trabalho autónomo dos alunos.	40 minutos
3.º Momento: Sumário e continuação da realização da primeira questão. II. Discussão coletiva.	45 minutos

4.º Momento: Apresentação da ficha de trabalho referente à segunda questão e sua realização. I. Trabalho autónomo dos alunos. II. Discussão coletiva. **5.º Momento**: Sistematização dos conceitos.	10 minutos 30 minutos 5 minutos

Desenvolvimento da aula

Sumário e apresentação da ficha de trabalho referente à 1.ª questão (*5 minutos*)

A aula terá início com o sumário escrito no quadro e, em seguida, com a proposta da realização da tarefa de exploração “De volta dos quadriláteros…”. Depois de distribuída a ficha de trabalho relativa à primeira questão (uma por aluno), informarei os alunos que irão trabalhar a pares e utilizar material de desenho (régua e transferidor). Explicarei, ainda, que terão de apresentar os seus raciocínios por escrito e a caneta, não esquecendo a resposta às questões na própria folha da tarefa. Além disso, chamarei atenção para colocarem entre parêntesis os raciocínios abandonados. Os alunos também serão informados de que a ficha de trabalho será recolhida no final da aula.

Será feita a leitura do enunciado (primeira questão) por um dos alunos da turma, por forma a esclarecer eventuais dúvidas na linguagem, por exemplo no significado de “propriedade comum”.

Realização da 1.ª questão da tarefa

I. Trabalho autónomo dos alunos (*40 minutos*)

Enquanto os alunos realizam a tarefa, irei circular pela sala de modo a esclarecer dúvidas, incentivar o trabalho autónomo e observar as ideias matemáticas e as dificuldades manifestadas pelos alunos.

1)

Alínea a: Esta alínea é longa e exigente, pelo que ocupará grande parte da primeira aula de 45 minutos. Os alunos podem começar por medir os lados dos quadriláteros e os seus ângulos internos e concluir que:

- Quadrado: Lados opostos estritamente paralelos e todos geometricamente iguais; quatro ângulos retos.
- Retângulo: Lados opostos estritamente paralelos e geometricamente iguais dois a dois; quatro ângulos retos.
- Losango: Lados opostos estritamente paralelos e todos geometricamente iguais; ângulos opostos geometricamente iguais.
- Paralelogramo obliquângulo: Lados estritamente paralelos e geometricamente iguais dois a dois; ângulos opostos geometricamente iguais; os dois ângulos adjacentes ao mesmo lado são suplementares.
- Trapézio isósceles: Um só par de lados estritamente paralelos e os lados não paralelos são geometricamente iguais; os ângulos adjacentes à mesma base são geometricamente iguais.

- Trapézio retângulo: Um só par de lados estritamente paralelos e um dos lados não paralelos é perpendicular às bases; um par de ângulos retos consecutivos.
- Trapézio escaleno: Um só par de lados estritamente paralelos e todos os lados geometricamente diferentes; todos os ângulos geometricamente diferentes.
- Papagaio: Pares de lados consecutivos geometricamente iguais; um par de ângulos opostos.

Cada quadrilátero apresenta o seu respetivo nome. Assim, a identificação dos mesmos não será uma dificuldade para os alunos e, como tal, não constituirá um entrave para o preenchimento da tabela.

Espera-se, ainda, que os alunos não tenham dificuldades na medição de ângulos, cuja prática foi desenvolvida em anos anteriores. Para facilitar essa medição, apresentam-se quadriláteros de grande dimensão. É preciso ter em conta que, dado que se optou por usar lápis e papel, podem ocorrer pequenos erros, sobretudo na medição de ângulos.

Além disso, os vértices dos quadriláteros estão definidos de modo a facilitar o reconhecimento dos lados dos quadriláteros e dos seus ângulos internos. Desse modo, pretende-se clarificar as notações das entidades geométricas. Por exemplo, para o caso do quadrado temos:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \text{ e } D\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}A$$

Dificuldades: Os alunos podem apresentar dificuldades na definição das propriedades de cada um dos quadriláteros apresentados. Ao realizarem a pequena investigação sobre o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos internos, os alunos terão que perceber as diferenças e as semelhanças entre os quadriláteros e, para isso, terão que investigar se os lados de um dado quadrilátero são todos geometricamente iguais, ou apenas os lados opostos; se os lados são estritamente paralelos dois a dois ou se contém apenas um par de lados estritamente paralelos; se os ângulos são todos geometricamente iguais, ou apenas os ângulos opostos, etc.

Para ajudar os alunos poderei colocar as seguintes questões:

- Ao medirem o comprimentos dos lados dos quadriláteros, o que concluem? Isso acontece em todos os polígonos?

- O que me podem dizer sobre o paralelismo/ não paralelismo dos lados opostos desses quadriláteros?

- E relativamente aos ângulos, são todos geometricamente iguais em todos os polígonos? Que relação existe entre os ângulos opostos?

- Existem quadriláteros com ângulos retos? Quais são?

Caso surjam muitos obstáculos nesse campo, também será cedido ao par de alunos um quadro de apoio com um conjunto de propriedades que ajudam os alunos a encontrar as relações entre os quadriláteros e a defini-los:

1. Tem um par de lados estritamente paralelos.
2. Tem dois pares de lados estritamente paralelos.
3. Tem lados opostos com a mesma medida de comprimento.
4. Tem lados consecutivos com a mesma medida de comprimento.
5. Tem todos os lados geometricamente iguais.
6. Tem todos os ângulos geometricamente iguais.
7. Tem ângulos opostos geometricamente iguais.
8. Tem ângulos consecutivos suplementares.

Poderá surgir o estudo das diagonais dos quadriláteros, nomeadamente no que se refere ao seu comprimento, à forma como se intersetam e à existência de perpendicularidade. Apesar desse estudo não constituir o objetivo da tarefa, não será "travado" uma vez que os alunos irão, numa fase posterior, estudar as propriedades das diagonais dos quadriláteros. Em seguida, apresenta-se uma síntese dessas propriedades e daquilo que os alunos podem encontrar durante a exploração da tarefa:
- Quadrado: Diagonais geometricamente iguais, perpendiculares e dividem-se ao meio (ou seja, bissetam-se).
- Retângulo: Diagonais oblíquas, geometricamente iguais e dividem-se ao meio.
- Losango: Diagonais perpendiculares, com medidas de comprimento diferentes e dividem-se ao meio.
- Paralelogramo obliquângulo: Diagonais oblíquas, com medidas de comprimento diferentes mas que se dividem ao meio.
- Trapézio isósceles: Diagonais oblíquas e geometricamente iguais.
- Trapézio retângulo e escaleno: Diagonais oblíquas com medidas de comprimento diferentes.
- Papagaio: Diagonais perpendiculares, com medidas de comprimento diferentes e só uma é dividida ao meio.

Além disso, os alunos também podem estudar os eixos de simetria de reflexão, apesar de não fazer parte do programa. Porém, esse estudo já foi realizado anteriormente, no 6.º ano. Deste modo, considerando esse critério os alunos podem concluir que:
- Quadrado: Quatro eixos de simetria (dois na condição de losango, e outros dois, na condição de retângulo). Esses eixos intersectam-se no centro do quadrado.
- Retângulo: Dois eixos de simetria perpendiculares e contendo os pontos médios dos lados.
- Losango: Dois eixos de simetria perpendiculares (um deles, na condição de papagaio).
- Paralelogramo obliquângulo e trapézios retângulo e escaleno: sem eixos de simetria.
- Trapézio isósceles: Um eixo de simetria.
- Papagaio: Um eixo de simetria.

Alínea b: Os alunos devem reconhecer que todos os quadriláteros, à exceção do papagaio, têm pelo menos dois lados estritamente paralelos. Esta característica permite incluir todos esses quadriláteros na família dos trapézios.

Os alunos que definiram, na primeira alínea, os quadriláteros atendendo ao paralelismo/ não paralelismo dos lados opostos, não apresentarão, em princípio, dificuldades na resolução da alínea b.

Dificuldades: Caso os alunos não tenham considerado esse critério, poderão ter dificuldades na resolução da presente alínea. Com o intuito de contornar essa situação, poderei questioná-los:
- Atendendo aos lados opostos dos quadriláteros, que característica podemos encontrar em todos, à exceção do papagaio?

Alínea c: Os alunos devem reconhecer que o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo obliquângulo têm lados estritamente paralelos dois a dois.

De modo semelhante à alínea anterior e caso surjam **dificuldades** também poderei auxiliar os alunos, colocando a seguinte questão:
- Atendendo ao paralelismo dos lados opostos desses quadriláteros, que característica têm eles em comum?

Alíneas d, e: A resolução de ambas as alíneas será útil para que os alunos compreendam, posteriormente, que o quadrado é um caso particular do losango, em que os lados são todos geometricamente iguais ou um caso particular do retângulo, em que os quatro ângulos são retos.
O registo destas propriedades é, assim, muito importante para a resolução da segunda questão.

Mais uma vez, a manifestação de **dificuldades** nesta atividade poderá ocorrer conforme os critérios usados no preenchimento da tabela da primeira alínea. No entanto, caso seja necessário poderei colocar as seguintes questões:
- O que podem concluir sobre a medida de comprimento dos lados do quadrado e do losango?
- O que podem concluir sobre a medida de amplitude dos ângulos internos do quadrado e do retângulo?

Sumário e continuação da realização da 1.ª questão (*45 minutos – Início da segunda aula*)
Antes da discussão coletiva e dado que é o início da segunda aula, irei escrever o sumário no quadro e distribuir a ficha de trabalho iniciada na aula anterior. Caso considere necessário e conforme o trabalho realizado nessa aula, poderei atribuir mais tempo (10 minutos) para os alunos terminarem a primeira questão da tarefa.

II. Discussão coletiva
A discussão coletiva é decisiva para que os alunos percebam quais as características necessárias para definir cada um dos quadriláteros apresentados. Deste modo, irei solicitar a um aluno para apresentar a sua resolução da primeira alínea no quadro, justificando as

suas ideias. A escolha deste aluno será feita tendo em conta o maior número de critérios usados para definir os quadriláteros (paralelismo/ não paralelismo dos lados opostos, comprimento dos lados, amplitude dos ângulos) e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a colocar questões e a fazer observações ao aluno que apresenta a resolução. Nesse sentido, tentarei incentivar à exposição e discussão de ideias e resultados, questionando os alunos se concordam com a resolução do colega e se houver divergências, pedir-lhes-ei para argumentar e defender as suas respostas.
É de realçar que a tabela com as características dos quadriláteros será antecipadamente desenhada em meia parte do quadro. A outra parte do quadro será utilizada para desenhar o diagrama.

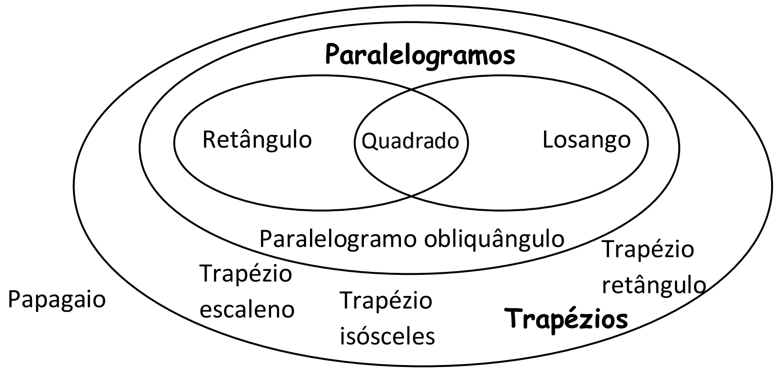
A discussão das restantes alíneas será feita tendo como base essa tabela preenchida acerca das propriedades dos quadriláteros (primeira alínea). Para esse efeito, questionarei os alunos (as mesmas questões apresentadas na seção anterior) acerca das suas respostas e incentivarei a discussão dessas ideias. Espera-se, assim, que os alunos participem de modo a responderem às dúvidas e às questões colocadas pelos colegas. Será um momento propício para perceber se existem dificuldades no que respeita à compreensão das semelhanças, diferenças e relações entre quadriláteros.
Para a realização da questão 2 será importante que os alunos compreendam os conceitos de trapézio e paralelogramo. Dessa forma, no momento da discussão, será escrito no quadro, as definições desses conceitos:
Trapézio é um quadrilátero com pelo menos um par de lados estritamente paralelos.
Paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados estritamente paralelos.
É de notar que esses dois conceitos surgem no seguimento da resolução das alíneas b e c.
Após a escrita dessas definições, poderei questionar os alunos:
- Dada a definição de trapézio, podemos afirmar que o retângulo ou o paralelogramo obliquângulo são trapézios? Porquê?
- Também podemos dizer o mesmo em relação ao papagaio? Este quadrilátero também é um trapézio? Porquê?
- Considerando a definição de paralelogramo, podemos afirmar que o quadrado ou o losango são paralelogramos?
Estas questões irão assim ajudar à fase seguinte, que se refere à realização da segunda questão da tarefa.

Apresentação da ficha de trabalho referente à 2.ª questão e sua realização

A ficha de trabalho referente à 2.ª questão será distribuída e pedirei a um aluno para ler o enunciado e questionarei a turma para perceber se há dúvidas relativamente ao enunciado e ao esquema apresentado.

I. Trabalho autónomo dos alunos (*10 minutos*)

Com as características estudadas é possível organizar os quadriláteros em duas grandes famílias: os trapézios e os não trapézios (como é o caso do papagaio). Além disso, os alunos terão que ser capazes de concluir que os paralelogramos também são trapézios e, como tal, estarão incluídos nesta última família. O esquema seguinte resume a classificação hierárquica dos quadriláteros:



Deste modo, para completar o esquema, os alunos podem começar por agrupar os quadriláteros em trapézios e papagaio. Segue-se a divisão entre trapézios propriamente ditos (isósceles, retângulo e escaleno) e os paralelogramos. No seio desta família, surge o quadrado como um caso particular do retângulo ou do losango.
Apesar do enunciado assinalar que os alunos devem completar o esquema com os nomes dos quadriláteros, os mesmos também podem fazer desenhos representativos desses quadriláteros.

Dificuldades: Os alunos podem não compreender o esquema, mesmo depois de estudadas as propriedades que caracterizam cada um dos quadriláteros apresentados.
Para ajudar os alunos poderei colocar as seguintes questões:
- *Por que é o conjunto dos paralelogramos se encontra no interior do conjunto dos trapézios?*
- *Quais os quadriláteros que são trapézios mas não paralelogramos? Porquê? No esquema apresentado, onde se "localizam" esses quadriláteros?*
- *Quais os quadriláteros que são trapézios paralelogramos? Porquê?*
- *O que podem concluir das duas últimas alíneas da questão anterior? Que relação existe entre quadrado/losango e quadrado/retângulo?*
- *Que quadrilátero se encontra excluído da família dos trapézios? Porquê?*

Na elaboração das justificações também podem surgir alguns obstáculos, dado que a turma tem demonstrado algumas dificuldades nesse campo. Assim, poderei auxiliar os alunos pedindo que expliquem por que colocaram o nome do quadrilátero numa dada região do diagrama e não noutra.

II. Discussão coletiva (*30 minutos*)

O diagrama será previamente desenhado no quadro e será pedido a um aluno (voluntário) para ir ao quadro apresentar a sua resolução. Este aluno terá de justificar as ligações estabelecidas entre os quadriláteros; nesse momento, tentarei promover a discussão ao nível da turma questionando os alunos sobre a resolução apresentada e respetivas justificações. Caso seja necessário, poderei colocar questões como:
- *Concordam com a resolução do vosso colega?*

- Utilizaram outros critérios para agrupar os quadriláteros? Se sim, quais e justifiquem a vossa opção.

Na discussão também será valorizado o conhecimento de outros esquemas que relacionem os quadriláteros, como o esquema apresentado no manual (p. 124). Dessa forma, poderei promover a argumentação matemática dos alunos, pedindo justificações sobre as várias divisões e relações entre os quadriláteros. Para facilitar esse processo, foi elaborado um cartaz, em A3, com o mesmo esquema. Na verdade, este esquema não pode ser projetado, uma vez que nesta sala o projetor está direcionado para o quadro branco.
Assim, tendo como suporte esse cartaz, poderei questionar os alunos sobre as ligações entre os vários quadriláteros, em especial sobre a relação entre o losango e o papagaio, dado que até ao momento não foi discutido.
- O que têm de comum o losango e o papagaio?
Os alunos devem compreender que o losango é um papagaio, pois contém dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais, sendo que esses dois pares são também geometricamente iguais entre si.
Dado que o manual é utilizado pelos alunos como um apoio ao seu estudo, torna-se relevante a compreensão do presente esquema.

Além disso, poderei pedir aos alunos (sobretudo se ocorrerem muitas dificuldades) para escreverem, numa pequena composição, a(s) propriedade(s) que caracteriza(m) de uma forma sintética cada um dos quadriláteros. A ideia é compreender as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos ao longo da realização da tarefa e promover a sua capacidade de síntese, onde deverão com o menor número possível de características encontrar as que tornam aqueles quadriláteros únicos.

Sistematização dos conceitos (*5 minutos*)

No momento final da aula, deverei lembrar o que foi aprendido durante a realização da ficha de trabalho, chamando atenção dos alunos para a tabela e para o diagrama representados no quadro, sendo que este último agrupa e classifica hierarquicamente os quadriláteros.

Avaliação formativa

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:
- Observação direta.
- Registos efetuados pela minha colega, seguindo um guião.
- Registo áudio da atividade realizada por dois pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Pedagogia diferenciada

- Os alunos NEE irão realizar as mesmas tarefas que os restantes colegas.
- Aos alunos com maior ritmo de trabalho e que terminaram a ficha de trabalho, será proposto a realização dos exercícios do manual.

Anexo II – Plano de aula do dia 6 de março

Ano/Turma: 7.º 2.ª
Domínio: Geometria e Medida
Conteúdos: Quadriláteros
Data/Hora: 6 de março (8h15)

Sumário
Classificação dos quadriláteros (conclusão). Propriedades das diagonais de um quadrilátero.

Propósito principal da tarefa
Identificar as propriedades das diagonais dos quadriláteros.

Objetivos Específicos
Metas GM7.2 - Investigar propriedades relativas às diagonais dos quadriláteros; - Caracterizar paralelogramos e trapézios (não paralelogramos) através das diagonais.

Conhecimentos prévios
- Identificar as diagonais de um quadrilátero; - Reconhecer retas perpendiculares e oblíquas e ponto médio de um segmento de reta; - Identificar e classificar quadriláteros.

Recursos		Metodologia de trabalho
Do professor	Dos alunos	
- Plano de aula; - Manual; - Quadro branco e marcador; - Geoplano.	- Ficha de trabalho (em suporte de papel); - Quadro de apoio com a indicação das propriedades das diagonais; - Lápis, borracha e caneta; - Régua; - Manual.	- Trabalho a pares; - Discussão coletiva das resoluções e consolidação de ideias com a turma.

Momentos das aulas	Tempos
1.º Momento: Sumário e conclusão da ficha de trabalho “De volta dos quadriláteros...”.	15 minutos
2.º Momento: Apresentação e distribuição da ficha de trabalho “Investigando as diagonais dos quadriláteros”.	5 minutos
3.º Momento: Realização da ficha de trabalho sobre as diagonais.	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	35 minutos
II. Discussão coletiva.	30 minutos
4.º Momento: Sistematização dos conceitos.	5 minutos

Desenvolvimento da aula

Sumário e conclusão da ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…" (15 *minutos*)

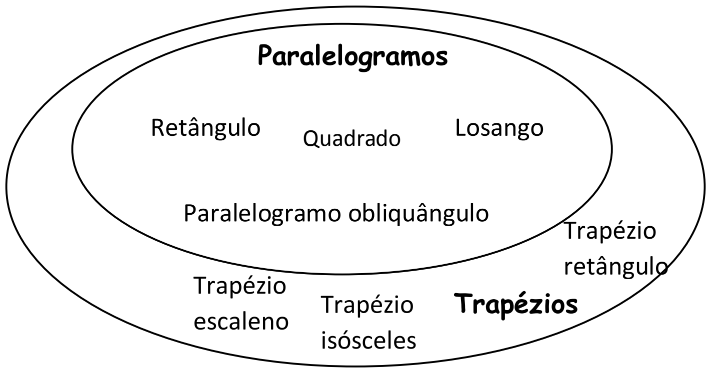
A aula iniciará com o sumário escrito no quadro.

Dado que não foi possível cumprir com o plano da aula anterior, a discussão da última questão da ficha de trabalho sobre as características dos quadriláteros ficou por discutir. Assim, após a distribuição dessa ficha de trabalho, irei começar pela discussão da questão 2, apresentando o diagrama de Venn no quadro e as definições de "trapézio" e de "paralelogramo". Como os alunos apresentaram muitas dificuldades no seu preenchimento, - situação já prevista na aula anterior, pois os alunos passam de uma classificação por partição (com a tabela relativa às características dos quadriláteros) para uma classificação hierárquica (com o diagrama) - irei gerir a discussão e através do questionamento, completarei o diagrama com os nomes dos quadriláteros. Para facilitar a compreensão do diagrama, desenharei, em primeiro lugar, o conjunto dos trapézios e o conjunto dos paralelogramos e colocarei as seguintes questões:

- Por que é o conjunto dos paralelogramos se encontra no interior do conjunto dos trapézios?

- Quais os quadriláteros que são trapézios mas não paralelogramos? Porquê? No esquema apresentado, onde se "localizam" esses quadriláteros?

- Quais os quadriláteros que são trapézios paralelogramos? Porquê?



Neste momento, poderei questionar os alunos sobre as propriedades dos paralelogramos:

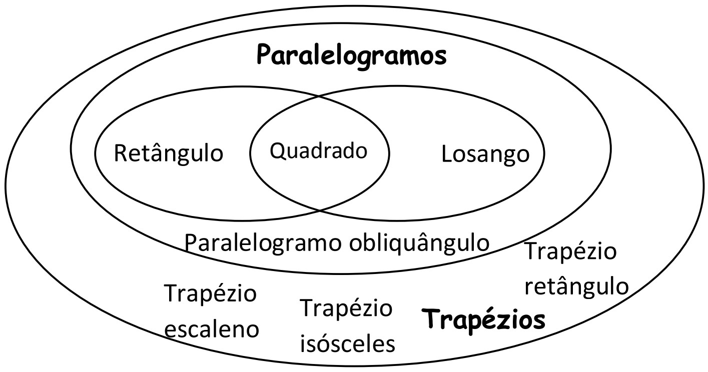
- De entre os paralelogramos, podemos encontrar paralelogramos com características comuns? Quais são e porquê?

- Que relação existe entre o quadrado/losango?

- Que relação existe entre o quadrado/retângulo?

Os alunos terão de compreender que o quadrado é um caso particular do losango, em que os lados são todos geometricamente iguais ou um caso particular do retângulo, em que os quatro ângulos são retos.

Completando o esquema teremos:



Por último, colocarei a seguinte questão:

- E quanto ao papagaio? Pertence à família dos trapézios? Porquê?

Deverei escrever "papagaio" fora do conjunto dos trapézios.

A ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…" será apenas recolhida no final da aula, pois os alunos poderão consultá-la como apoio à realização da próxima ficha de trabalho.

Apresentação e distribuição da ficha de trabalho "Investigando as diagonais dos quadriláteros" (*5 minutos*)

Após a distribuição da tarefa de exploração "Investigando as diagonais dos quadriláteros" (documento em papel, um por aluno) e, tal como procedido em aulas anteriores, informarei os alunos que irão trabalhar a pares e poderão recorrer à régua.

Relembrarei que terão de apresentar os seus raciocínios por escrito, a caneta, não esquecendo a resposta às questões na própria folha da tarefa. Os alunos também serão informados de que a ficha de trabalho será recolhida no final da aula.

Seguidamente, pedirei a um dos alunos da turma para ler o enunciado, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem. Os alunos poderão não conhecer o geoplano e, por essa razão, existe a possibilidade de nunca terem trabalhado com esse tipo de material. Deste modo, poderei mostrar um exemplo de um geoplano e explicar-lhes que representa uma malha quadriculada (apesar de haver outros modelos) e, portanto, as distâncias entre os pontos são sempre as mesmas.

Para a realização da tarefa, é imprescindível que os alunos saibam traçar as diagonais de um quadrilátero, pelo que basta unir dois vértices opostos. Se for necessário apresentarei um exemplo no quadro.

Realização da primeira questão da tarefa

III. Trabalho autónomo dos alunos (35 *minutos*)

Durante este momento, irei circular pela sala de modo a esclarecer dúvidas, incentivar o trabalho autónomo e observar as ideias matemáticas e as dificuldades manifestadas pelos alunos.

Quadrilátero	Identificação pelos números romanos	Propriedades das diagonais
Quadrado	I; X	Geometricamente iguais, perpendiculares e dividem-se ao meio (ou seja, bissetam-se).
Retângulo	V; XII	Oblíquas, geometricamente iguais e dividem-se ao meio.
Losango	IV	Perpendiculares, com medidas de comprimento diferentes e dividem-se ao meio.
Paralelogramo obliquângulo	III; IX	Oblíquas, com medidas de comprimento diferentes mas que se dividem ao meio.
Trapézio isósceles	VII; XIII	Oblíquas e geometricamente iguais.
Trapézio retângulo	II	Oblíquas com medidas de comprimento diferentes.
Trapézio escaleno	VIII	Oblíquas com medidas de comprimento diferentes.
Papagaio	VI; XI	Perpendiculares, com medidas de comprimento diferentes e só uma diagonal é dividida ao meio.

1)

Alínea a: Os alunos podem começar por traçar as diagonais de cada um dos quadriláteros com o auxílio de uma régua. Seguidamente, podem estudar as suas propriedades, no que diz respeito ao seu comprimento, à forma como se intersetam e à existência de perpendicularidade.

Para facilitar a identificação das diagonais, os vértices dos quadriláteros encontram-se definidos por letras maiúsculas; pretende-se, assim, criar uma oportunidade para os alunos utilizarem a notação das entidades geométricas.
Além do reconhecimento das propriedades das diagonais, os alunos devem ser capazes de identificar e classificar os quadriláteros. Dado que essa matéria foi discutida em aulas anteriores, não são previstas grandes dificuldades nesse campo.

Outra hipótese: Os alunos também podem reconhecer apenas algumas das propriedades das diagonais, decorrente da análise dos aspetos que lhe são mais familiares como o seu comprimento ou a existência de perpendicularidade. Nesse caso, as suas respostas estarão incompletas.

Dificuldades: Apesar da classificação dos quadriláteros ter sido estudada em aulas anteriores, os alunos podem ter dificuldades em reconhecer que o polígono X é um quadrado ou que o polígono *XI* é um papagaio. Caso essas situações ocorram (ou outras semelhantes), questionarei os alunos sobre as propriedades estudadas dos quadriláteros, relativamente à medida de comprimento dos seus lados e de amplitude dos seus ângulos. Exemplificando, poderei colocar as seguintes questões:

- Atendendo aos lados e ângulos, que propriedades caracterizam os quadrados? Se rodarem um quadrado, que polígono obtém?
- Como caracterizam o papagaio?

Na caracterização dos quadriláteros através das diagonais também são previstas algumas dificuldades, pois os alunos poderão não perceber que é necessário estudar a forma como as diagonais se intersetam. Este aspeto é relevante, pois quando as diagonais se intersetam no ponto médio (ou seja, bissetam-se) o quadrilátero é sempre um paralelogramo. Nesse sentido e por forma a auxiliar os alunos, poderei colocar questões como:

- Como se intersetam as diagonais nos quadriláteros? O que podem dizer sobre o seu ponto de interseção? Relativamente às diagonais, onde se localiza esse ponto?

De modo semelhante, também poderei colocar questões relacionadas com outras propriedades das diagonais:

- As diagonais têm medidas de comprimento iguais ou diferentes?
- Qual é o ângulo formado pelas duas diagonais? Isso significa que as diagonais são…

Dadas as características da turma, os alunos poderão não estar relembrados do que são retas perpendiculares ou oblíquas, apesar de este assunto já ter sido discutido em aulas anteriores. Se esse facto constituir um obstáculo para a maioria, interromperei a aula para fazer a revisão sobre a posição relativa entre duas retas e desbloquear essa situação.

Se as dificuldades persistirem, será cedido ao(s) par(es) de alunos um quadro de apoio:

1. As diagonais têm a mesma medida de comprimento.
2. Tem diagonais perpendiculares.
3. As diagonais bissetam-se, isto é, dividem-se ao meio.

É importante que os alunos também reconheçam, ao longo do trabalho autónomo e da discussão, que "diagonais iguais" não é o mesmo que "diagonais geometricamente iguais". A confusão destes termos não foi assinalada na aula anterior, contudo espera-se que os alunos compreendam que quando as diagonais têm a mesma medida de comprimento, designam-se por "diagonais geometricamente iguais". Na verdade, para as diagonais serem iguais teriam que ter os meus vértices.

IV. Discussão coletiva (30 minutos)

Para a discussão desta questão, solicitarei a um aluno para ir ao quadro expor e explicar a sua resolução à turma, com a tabela previamente desenhada. A escolha deste aluno será baseada no maior detalhe da caracterização das diagonais dos quadriláteros. Posteriormente, perguntarei se todos estão de acordo com a resolução ou se algum par utilizou outros critérios. Se a resposta for afirmativa, pedirei a esse par para apresentar e justificar as suas ideias.

Nesse momento, o meu papel incidirá no incentivo à exposição e à discussão e confronto de ideias e na mediação da interação na sala entre os alunos.

Para evitar o mesmo erro cometido na aula anterior, caso o preenchimento da tabela realizado pelo aluno demore muito tempo, poderei quebrar a sua escrita, discutir com a turma as propriedades das diagonais já descritas no quadro e continuar a preencher a tabela, juntamente com os alunos (deste modo, pouparei algum tempo).

Tendo em conta as características anteriores, os alunos deverão ser capazes de concluir/ sintetizar que:

- Um quadrilátero é um paralelogramo se, e só se, as suas diagonais se bissetam, isto é, se dividem ao meio.
- Um paralelogramo é um retângulo se, e só se, as suas diagonais são geometricamente iguais.
- Um paralelogramo é um losango se, e só se, as suas diagonais são perpendiculares

Para que essas conclusões ocorram, poderei colocar questões como:

- Em que casos as diagonais dividem-se ao meio (isto é, bissetam-se)? Esses quadriláteros pertencem a que família?

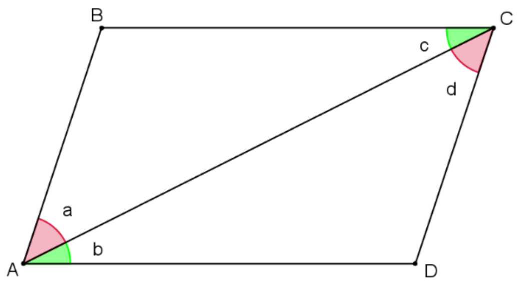
- Quais os quadriláteros que possuem diagonais geometricamente iguais? O que podem concluir?

- De entre os paralelogramos, quais são aqueles que possuem diagonais perpendiculares?

Essas conclusões (definidas a azul) poderão ser escritas no lado direito do quadro. Desse modo, deverei ter em conta, logo no início da discussão, essa divisão do quadro branco; ou seja, no lado direito será desenhada a tabela e será reservada uma parte do lado esquerdo do quadro para escrever as definições referidas.

Além disso, os alunos também podem observar que, por vezes, as diagonais dividem os quadriláteros em dois triângulos geometricamente iguais. Com efeito, poderei questioná-los da seguinte forma:

- Ao traçarmos uma diagonal, como fica dividido o retângulo ou o paralelogramo? Como podemos provar?



Podemos verificar que $\measuredangle \boldsymbol{a}$ e $\measuredangle \boldsymbol{d}$, $\measuredangle \boldsymbol{b}$ e $\measuredangle \boldsymbol{c}$ são ângulos de lados estritamente paralelos, pelo que são geometricamente iguais. Dado que *[AC]* é um lado comum aos dois triângulos, *[ABC]* e *[ADC]*, pelo critério *ALA* (Ângulo-Lado-Ângulo), podemos concluir que os dois triângulos referidos são geometricamente iguais.

Sistematização dos conceitos (5 minutos)

No momento final da aula, deverei lembrar o que foi aprendido durante a realização da ficha de trabalho, chamando atenção dos alunos para o que foi escrito no lado direito do quadro sobre as propriedades das diagonais de alguns quadriláteros.

Avaliação formativa

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:
- Observação direta.
- Registos efetuados pela minha colega, seguindo um guião.
- Registo áudio da atividade realizada por dois pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Pedagogia diferenciada

- Os alunos NEE irão realizar as mesmas tarefas que os restantes colegas.
- Aos alunos com maior ritmo de trabalho e que terminaram a ficha de trabalho, será proposto a realização do exercício 8 do manual (p. 138), que conduz à construção de quadriláteros com base nas suas propriedades.

Anexo – Exercício 8 do manual (p. 138)

8 **Constrói, no teu caderno,**

a) um paralelogramo [*DOCE*], tal que $\overline{DO} = 4$ cm, $\overline{CO} = 3$ cm e $\overline{DC} = 6$ cm.

b) um paralelogramo [*MATE*], tal que $\overline{MA} = 5$ cm, $\overline{AT} = 2,5$ cm e $\hat{A} = 55°$.

c) um losango cujas diagonais tenham 4 cm e 6 cm de medida de comprimento.

d) um losango [*ABCD*], em que $\hat{A} = 60°$ e a diagonal [*AC*] mede 8 cm.

Anexo III – Plano de aula do dia 9 de março

Ano/Turma: 7.º 2.ª
Domínio: Geometria e Medida
Conteúdos: Quadriláteros
Data/Hora: 9 de março (10h50)

Sumário
Realização da tarefa "Elaborando demonstrações".

Propósito principal da tarefa
Provar a seguinte propriedade: "Todo o trapézio com bases geometricamente iguais é um paralelogramo".

Objetivos Específicos
Meta GM7.2.24; Meta GM7.3.1. - Formular, testar e demonstrar conjeturas. - Compreender o significado de demonstração e conjetura. - Identificar elementos de um trapézio. - Utilizar critérios de igualdade de triângulos na elaboração de demonstrações. - Utilizar relações entre ângulos na elaboração de demonstrações.

Conhecimentos prévios
- Distinguir de entre quadriláteros os que são trapézios e os que são paralelogramos. - Compreender e aplicar os critérios de congruência de triângulos. - Conhecer relações entre ângulos.

Recursos		Metodologia de trabalho
Do professor	Dos alunos	
- Plano de aula; - Manual; - Quadro branco e marcador; - *Software Geogebra*..	- Ficha de trabalho (em suporte de papel); - Lápis, borracha e caneta;	- Trabalho coletivo.

Momentos das aulas	Tempos
1.º Momento: Sumário e discussão inicial coletiva.	10 minutos
2.º Momento: Apresentação e realização da ficha de trabalho "Elaborando demonstrações".	30 minutos
3.º Momento: Sistematização.	5 minutos

Desenvolvimento da aula

Sumário e discussão inicial coletiva (*10 minutos*)

Após a escrita do sumário no quadro, irei questionar os alunos sobre o que é um trapézio – pretende-se que os alunos recordem que para um quadrilátero ser um trapézio basta que tenha um par de lados estritamente paralelos – e sobre os seus elementos. É importante que os alunos reconheçam que os lados opostos estritamente paralelos de um trapézio são designados por bases. Por forma a apoiar essa discussão, poderei fazer um esboço de um trapézio, identificando a base maior e a base menor.

Seguidamente, tendo como suporte o *software Geogebra*, irei construir um trapézio $[\boldsymbol{ABCD}]$, de bases geometricamente iguais, $[\boldsymbol{AB}]$ e $[\boldsymbol{CD}]$. A construção será feita de modo a manter a condição proposta quando se mover qualquer um dos seus vértices (ou seja, as bases do trapézio terão de se manter com a mesma medida de comprimento). Nesse momento, espera-se que os alunos sejam capazes de concluir que todo o trapézio de lados geometricamente iguais é um paralelogramo. Para que essa conclusão ocorra, poderei colocar questões como:

- O que podem dizer quanto à posição relativa dos seus lados opostos? O que podem concluir sobre o tipo de quadrilátero obtido?
- Ao mover um ou mais vértices do trapézio $[\boldsymbol{ABCD}]$, verifica-se a mesma conclusão?
- Que conjetura podemos estabelecer?

Os alunos poderão não saber ou recordar o que é uma conjetura; deste modo, é necessário assegurar que todos os alunos reconheçam que uma conjetura é uma ideia/afirmação que se estabelece a partir dos nossos sentidos ou de medições que efetuamos. Uma vez que as medições envolvem erros, tal como os nossos sentidos nos podem enganar, devemos demonstrar essas conclusões para termos a certeza que elas são verdadeiras.

Apresentação e realização da ficha de trabalho (30 minutos)

Após a distribuição da tarefa "Elaborando demonstrações" (documento em papel, um por aluno), informarei os alunos que irão trabalhar coletivamente, com o meu auxílio. Na verdade, considerando o ano de escolaridade e as características da turma, sabe-se que estas demonstrações são ainda um pouco abstratas para a maioria dos alunos e, por isso, irão ter a minha ajuda.

Seguidamente, pedirei a um dos alunos da turma para ler o enunciado, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem.

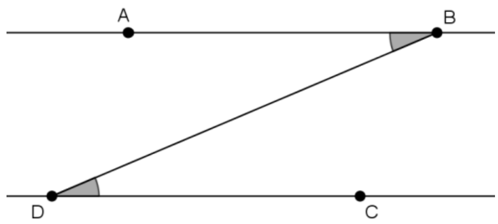
1)

Alínea b:

PASSO 1: Considerando o trapézio $[\boldsymbol{ABCD}]$ apresentado na ficha de trabalho, com a diagonal traçada $[\boldsymbol{BD}]$, os alunos terão de provar que os ângulos $\boldsymbol{ABD}$ e $\boldsymbol{CDB}$ são geometricamente iguais pela aplicação dos ângulos alternos internos formados por retas estritamente paralelas. Os alunos devem reconhecer que estes ângulos estão em lados opostos da reta secante (reta que interseta outra reta).

Outra hipótese: Os alunos também podem considerar que $\boldsymbol{A\hat{B}D} = \boldsymbol{C\hat{D}B}$, por serem ângulos agudos de lados estritamente paralelos.

Dificuldades: Os alunos podem não estar relembrados das relações entre ângulos e, consequentemente, não identificar ângulos alternos e internos ou ângulos de lados estritamente paralelos. Nesse caso, será necessário recordar algumas dessas relações e, com efeito, poderei colocar as seguintes questões:
- Qual a relação entre os ângulos $\boldsymbol{ABD}$ e $\boldsymbol{CDB}$?
- Como se classifica esse par de ângulos?
- Os ângulos alternos internos são sempre geometricamente iguais? Em que situações isso não acontece?
Se for necessário, farei um esboço no quadro para ajudar os alunos a compreenderem essa relação:



PASSO 2: Os alunos devem ser capazes de aplicar o critério LAL para justificar que os triângulos [ADB] e [CBD] são geometricamente iguais.
Dificuldades: Como os critérios de congruência de um triângulo constituem uma matéria recente, estudada há pouco tempo, os alunos podem ter dificuldades na sua compreensão e aplicação. Para ajudar os alunos, poderei colocar questões como:
- Como podemos provar que estes dois triângulos são geometricamente iguais?
- Quais são os critérios de igualdade de triângulos? Que critério podemos aplicar para provar que os triângulos $[\boldsymbol{ADB}]$ e $[\boldsymbol{CBD}]$ são geometricamente iguais? Porquê?
- Que características conhecemos relativamente aos lados e aos ângulos dos triângulos referidos?

PASSO 3: Os alunos devem ser capazes de compreender que, pelo passo anterior, podemos provar $\boldsymbol{C\hat{B}D = A\hat{D}B}$.

Dificuldades: Mesmo com a aplicação dos critérios de igualdade de triângulos, os alunos parecem apresentar dificuldades em compreender o conceito de congruência de triângulos e as suas características. Assim, poderei questioná-los:
- Se já provamos que os triângulos $[\boldsymbol{ADB}]$ e $[\boldsymbol{CBD}]$ são geometricamente iguais, o que podemos dizer relativamente aos seus ângulos?

PASSO 4: Os alunos devem saber identificar que os ângulos $\boldsymbol{CBD}$ e $\boldsymbol{ADB}$ são alternos internos formados pelas retas $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ com a reta secante $\boldsymbol{BD}$. Como esses ângulos são geometricamente iguais, concluímos que as retas $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ são retas estritamente paralelas.

Dificuldades: Os alunos podem apresentar algumas dificuldades, mesmo conhecendo a relação de ângulos alternos internos. Desta forma, os alunos podem não encontrar nenhuma relação entre o paralelismo das retas e os ângulos alternos internos (apesar de discutirmos esse assunto na justificação do primeiro passo). Para ajudar os alunos, poderei colocar as seguintes questões:

- Qual a relação entre os ângulos $\boldsymbol{CBD}$ e $\boldsymbol{ADB}$?
- O que justificámos no passo anterior?
- Em que situação podemos ter ângulos alternos internos geometricamente iguais? O que concluem?

PASSO 5: Como as retas $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ são estritamente paralelas pelo passo anterior, então podemos concluir que os segmentos de reta $\boldsymbol{AD}$ e $\boldsymbol{BC}$ também são estritamente paralelos. Não se esperam muitas dificuldades na justificação deste passo.
De uma forma resumida, temos:

	Passos	Justificações
1	$A\hat{B}D = C\hat{D}B$	**Ângulos alternos internos** formados pelas retas paralelas AB e CD com a secante BD.
2	Os triângulos [ADB] e [CBD] são geometricamente iguais	**Critério LAL**: [BD] é um lado comum dos triângulos $[ADB]$ e $[CBD]$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ (como se admitiu) e $A\hat{B}D = C\hat{D}B$.
3	$C\hat{B}D = A\hat{D}B$	**Ângulos correspondentes** em triângulos geometricamente iguais.
4	AD e BC são retas estritamente paralelas	$C\hat{B}D = A\hat{D}B$ e os ângulos CBD e ADB são alternos internos formados pelas retas AD e BC com a reta secante BD.
5	[AD] é estritamente paralelo a [BC]	AD e BC são retas estritamente paralelas.

Sistematização (5 minutos)

No momento final da aula, deverei lembrar o que foi aprendido durante a realização da ficha de trabalho, chamando atenção dos alunos para os significados de conjetura e de demonstração e para a propriedade demonstrada: "Todo o trapézio com bases geometricamente iguais é um paralelogramo".
Se houver tempo, será proposto aos alunos a realização do exercício 8 do manual (p. 138), que conduz à construção de quadriláteros com base nas suas propriedades.

Avaliação formativa

A avaliação será realizada através da observação direta.

Pedagogia diferenciada

- Os alunos NEE irão realizar as mesmas tarefas que os restantes colegas.

Anexo IV – Plano de aula do dia 11 de março

Ano/Turma: 7.º 2.ª
Domínio: Geometria e Medida
Conteúdos: Quadriláteros
Data/Hora: 11 de março (8h15)

Sumário
Áreas de quadriláteros (paralelogramo e papagaio).

Propósito principal da tarefa
Deduzir a fórmula da área de um paralelogramo e de um papagaio.

Objetivos Específicos
Metas GM7.8 - Relacionar a área de um retângulo com a área de um paralelogramo e relacionar a área de um retângulo com a área de um papagaio; - Reconhecer a altura e a base de um paralelogramo e a diagonal maior e a menor de um papagaio. - Deduzir a fórmula da área de um paralelogramo e de um papagaio.

Conhecimentos prévios
- Identificar elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos. - Calcular áreas de retângulos, de triângulos ou de quadrados.

Recursos		Metodologia de trabalho
Do professor	Dos alunos	
- Plano de aula; - Manual; - Quadro branco e marcador.	- Ficha de trabalho (em suporte de papel). - Lápis, borracha e caneta; - Folha quadriculada; - Régua e tesoura.	- Trabalho a pares; - Discussão coletiva das resoluções e consolidação de ideias com a turma.

Momentos das aulas	Tempos
1.º Momento: Sumário, apresentação da ficha de trabalho referente à primeira questão.	5 minutos
2.º Momento: Realização da primeira questão da ficha de trabalho.	
III. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
IV. Discussão coletiva.	15 minutos
3.º Momento: Apresentação e realização da segunda questão da ficha de trabalho.	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	20 minutos
II. Discussão coletiva.	15 minutos

4.º Momento: Sistematização dos conceitos. **5.º Momento:** Resolução e discussão de exercícios do manual.	5 minutos 15 minutos

Desenvolvimento da aula

Sumário e apresentação da ficha de trabalho referente à primeira questão (*5 minutos*)

Após a escrita do sumário no quadro e a distribuição da tarefa de exploração "Áreas de quadriláteros" (documento em papel, um por aluno) referente à primeira questão, informarei os alunos que irão trabalhar a pares e utilizar régua e tesoura para realizar a tarefa.

Relembrarei que terão de escrever, a caneta, na própria folha da tarefa e apresentar sempre os seus raciocínios por escrito, não esquecendo que os raciocínios abandonados devem ser colocados entre parêntesis. Os alunos também serão informados de que a ficha de trabalho é composta por uma segunda questão, pelo que irão realizá-la depois da discussão coletiva da primeira questão.

Seguidamente, pedirei a um dos alunos da turma para ler o enunciado, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem. Questionarei, ainda, os alunos sobre quem precisa de uma folha (quadriculada) para desenhar o retângulo.

Realização da primeira questão da tarefa (30 minutos)

I. Trabalho autónomo dos alunos

Durante este momento, irei circular pela sala de modo a esclarecer dúvidas, incentivar o trabalho autónomo e observar as ideias matemáticas e as dificuldades manifestadas pelos alunos.

1)

Alínea a, b e c:

Para os alunos descobrirem a forma de calcular a área de um paralelogramo recorrendo à área do retângulo, propõe-se uma tarefa exploratória em que o aluno constrói inicialmente o retângulo. Segue-se a decomposição desse retângulo, destacando-se uma parte do mesmo, com forma triangular. A partir da deslocação desta peça triangular, os alunos terão que ser capazes de obter um paralelogramo com a mesma base e a mesma altura que o retângulo.

Não são previstas muitas dificuldades na construção do retângulo (alínea a), dado que os alunos poderão recorrer à folha quadriculada do caderno e, como tal, traçar facilmente segmentos de reta perpendiculares entre si.

Na alínea b, onde os alunos terão que destacar as duas peças (*X* e *Y*) do retângulo, também não se esperam muitas dificuldades, uma vez que o enunciado da ficha de trabalho mostra o procedimento a realizar.

Dificuldades: A maior dificuldade que pode surgir na construção do paralelogramo relaciona-se com o último passo (resolução da alínea c), pois os alunos poderão não compreender como deslocar a peça triangular (peça *Y*) até obterem um paralelogramo. Para ajudar os alunos poderei colocar as seguintes questões?

- Como descrevem um paralelogramo obliquângulo? Que características tem esse quadrilátero?

- A peça X satisfaz algumas dessas características? Quais?

- Então como poderei deslocar a peça Y de modo a obter um paralelogramo obliquângulo?

Alínea d:

Nesta alínea, os alunos são convidados a relacionar as áreas do retângulo inicial e do paralelogramo obtido. Recorrendo ao conceito de área, terão de concluir que as duas medidas de área são iguais.

Dificuldades: Apesar dos alunos realizarem problemas com áreas desde do 2.º ciclo, é frequente surgirem dificuldades na compreensão deste conceito (que muitas vezes é confundido com o perímetro). Deste modo, poderei questioná-los sobre o que é a área. Os alunos terão de recordar que a área de um polígono é a medida de superfície interior desse polígono.

- Se com as duas peças do retângulo (e somente essas duas) conseguiram construir o paralelogramo, o que podem concluir quanto às suas áreas?

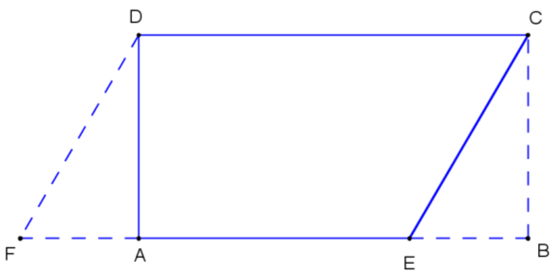
- Que relação existe entre as medidas de áreas do paralelogramo e do retângulo? Expliquem essa relação. Será que foi coincidência?

Alínea e:

Como o cálculo da área do retângulo já é conhecido dos alunos, pretende-se que associem essa fórmula ao cálculo da área do paralelogramo. Os alunos podem identificar a base do paralelogramo como um dos seus lados e a sua altura relativamente à base escolhida, como um segmento de reta que une um ponto do lado oposto à base e lhe é perpendicular. Assim os alunos, ao considerarem a base e a altura do paralelogramo, podem concluir que a sua área é igual ao produto da base, $\boldsymbol{b}$, pela altura respetiva, $\boldsymbol{a}$, ou seja:

$$\boldsymbol{A_{paralelogramo}} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

Como nestas últimas aulas ainda não se fez referência aos elementos de um paralelogramo, os alunos também podem recorrer a outras formas de representação da relação entre a base e a altura do paralelogramo, utilizando linguagem natural ou outro tipo de linguagem matemática, como por exemplo:



$$\boldsymbol{A_{[FECD]}} = \overline{\boldsymbol{FE}} \times \overline{\boldsymbol{AD}}$$

Dificuldades: Dado que as áreas do retângulo e do paralelogramo com a mesma base e altura são iguais, os alunos podem escrever a fórmula do retângulo como resposta à questão ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{l}$). Neste momento, poderei colocar as seguintes questões:

- Quais os elementos de um paralelogramo?

- Como se designam os lados $[\boldsymbol{FE}]$ e $[\boldsymbol{AD}]$ do paralelogramo?

- Como podem definir a altura do paralelogramo $[\boldsymbol{FECD}]$?

I. Discussão coletiva

Será selecionado um par de alunos (voluntário) para ir ao quadro apresentar a resolução no quadro. Um dos alunos poderá explicar como procedeu para construir o retângulo, decompô-lo em duas partes e construir o paralelogramo, enquanto o outro aluno poderá escrever as respostas à alínea d e à alínea e no quadro.

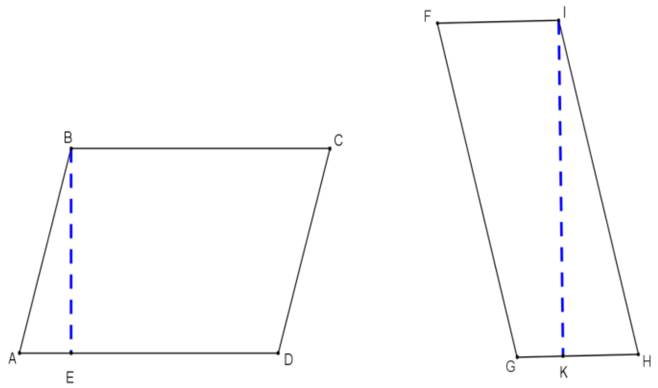
Através do questionamento, poderei incentivar à exposição e discussão de ideias, promovendo a sua troca e o confronto de opiniões distintas:

- Concordam com os vossos colegas?

- Algum par apresentou outra forma de representação para o cálculo da área do paralelogramo? Qual?

Espera-se ainda que sejam os restantes alunos da turma a colocar questões e a fazer comentários à resolução apresentada.

É importante aferir se os alunos sabem identificar a altura de um paralelogramo; deste modo, poderei apresentar no quadro alguns paralelogramos em posições distintas e pedir aos alunos que identifiquem a sua altura relativamente a uma base.



Apresentação e realização da segunda questão da tarefa (35 minutos)

A ficha de trabalho referente à segunda questão será distribuída e pedirei a um aluno para ler o enunciado. De seguida, questionarei a turma para perceber se há dúvidas relativamente ao enunciado, àquilo que deverão fazer e ao papagaio apresentado. Novamente, deverei assegurar que todos os alunos têm uma folha (quadriculada) para desenhar o papagaio.

I. Trabalho autónomo dos alunos

Neste momento, irei circular pela sala e tentar aceder aos raciocínios dos alunos e ajudá-los, através do questionamento, sempre que necessário.

2)

Alínea a, b e c:

Para os alunos desenharem um papagaio, os alunos devem recordar as suas propriedades. Por exemplo, através da perpendicularidade das diagonais e das suas medidas de comprimento diferentes, os alunos conseguem, sem grandes dificuldades, construir um papagaio. A figura representada na ficha de trabalho também pode auxiliar essa tarefa, permitindo que os alunos recordem/identifiquem algumas características do papagaio, já estudadas em aulas anteriores.

Em seguida, os alunos devem traçar as diagonais do papagaio, recortar tal como indica a figura e destacar as partes coloridas. Por fim, terão de construir um retângulo com as três peças obtidas no passo anterior.

Não são previstas muitas dificuldades na construção do papagaio e das suas diagonais, uma vez que a ficha de trabalho apresenta um papagaio desenhado e, além disso, os alunos já traçaram diagonais em aulas anteriores.

Dificuldades: Caso surjam dificuldades na construção do papagaio, poderei questionar os alunos sobre as suas características, de modo a ajudá-los:

- Como caracterizam o papagaio?

- Quais as propriedades das diagonais de um papagaio? As diagonais têm medidas de comprimento iguais ou diferentes? Qual a sua posição relativa? Como se intersetam?

Se a maioria dos alunos apresentar dificuldades na sua construção, deverei interromper a aula e auxilia-los com as perguntas referidas anteriormente.

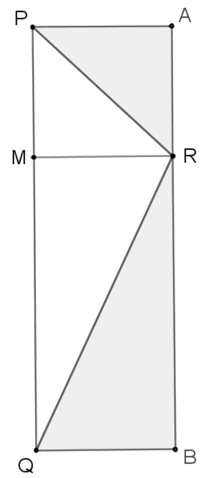
A maior dificuldade pode surgir na construção do retângulo com as três peças recortadas. Deste modo, e dado que qualquer retângulo pode ser dividido em dois triângulos geometricamente iguais, poderei colocar questões como:

- Conseguem "descobrir" triângulos geometricamente iguais? Quais?

- O que acontece quando unimos esses triângulos de modo a obter um quadrilátero com os lados opostos estritamente paralelos?

Alínea d:

Nesta alínea, os alunos devem ser capazes de estabelecer uma relação entre as áreas do papagaio $[\boldsymbol{OPRQ}]$ e do retângulo formado $[\boldsymbol{PABQ}]$, ou seja, ambas as áreas são iguais:



É de atentar que os vértices do retângulo identificados como A e B constituem um exemplo e, como tal, os alunos podem escolher outras letras ou recorrer a outro tipo de representação.
Uma vez construído o retângulo, e dado que a presente alínea é semelhante à alínea d da primeira questão, não se preveem muitas dificuldades dos alunos.

Alínea e:
Os alunos podem escrever a fórmula do cálculo da área do papagaio, estabelecendo uma relação entre a sua diagonal maior ($\boldsymbol{D}$), que corresponde ao comprimento do retângulo $[\boldsymbol{PABQ}]$ e a diagonal menor ($\boldsymbol{d}$), cuja metade corresponde à largura do mesmo retângulo:

$$\boldsymbol{A_{papagaio}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}} \times \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{D}}{\boldsymbol{2}}$$

Além disso, os alunos também podem utilizar outras formas de representação, a partir de linguagem natural ou outro tipo de linguagem matemática. Deste modo, podemos ter:

$$\boldsymbol{A_{[PABQ]}} = \overline{\boldsymbol{PQ}} \times \overline{\boldsymbol{PA}}$$

É de atentar que os elementos do papagaio – diagonal maior e diagonal menor – ainda não foram referidos nas aulas anteriores e, como tal, prevê-se que a maioria dos alunos não vá utilizar a relação entre $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{d}$.
Nesse sentido, poderei auxiliá-los, colocando as seguintes questões:
- O comprimento do retângulo [PABQ] corresponde a que elemento do papagaio?
- A largura do retângulo [PABQ] corresponde a que elemento do papagaio?
- Como poderei distinguir as duas diagonais (do papagaio)?

I. Discussão coletiva

De modo semelhante à discussão anterior, será pedido a um par de alunos (voluntário) para apresentar a sua resolução no quadro. Os alunos selecionados terão de explicar o procedimento que utilizaram para construir o papagaio e o retângulo, a partir das três peças recortadas e terão de apresentar as respostas à alínea d e à alínea e no quadro.
Mais uma vez, tentarei incentivar à exposição e discussão de ideias, questionando os alunos e promovendo a participação de todos os alunos na discussão:
- Concordam com os vossos colegas?

- Algum par apresentou outra forma de representação para o cálculo da área do papagaio? Qual?

Em adição, através do questionamento, tentarei que os alunos ultrapassem as suas dificuldades.

Sistematização dos conceitos (5 minutos)

No momento final da aula, deverei lembrar o que foi aprendido durante a realização da ficha de trabalho, chamando atenção dos alunos para as fórmulas que permitem o cálculo das áreas do paralelogramo e do papagaio.

Resolução e discussão de exercícios do manual (5 minutos)

Será, ainda, proposto aos alunos a realização da tarefa 5, alíneas c e d (p. 136) e da tarefa 9 (p. 141). Ambas as tarefas permitem a aplicação das fórmulas das áreas do paralelogramo e do papagaio estudadas na aula. Serão selecionados diferentes alunos que irão apresentar as suas resoluções no quadro e justificar as suas respostas às tarefas.

Avaliação formativa

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

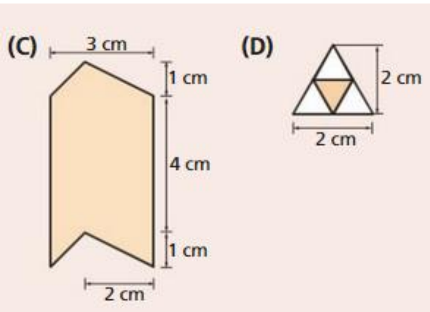
- Observação direta.
- Registos efetuados pela minha colega, seguindo um guião.
- Registo áudio da atividade realizada por dois pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

Pedagogia diferenciada

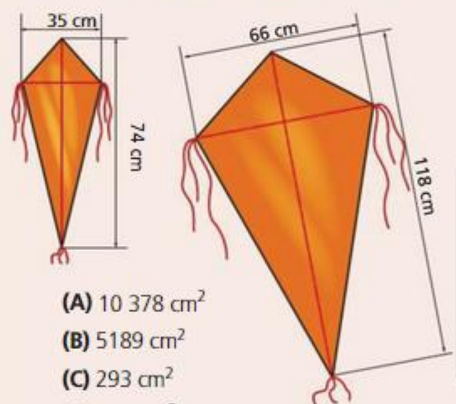
- Os alunos NEE irão realizar as mesmas tarefas que os restantes colegas.

Anexo I - Tarefas do manual (p. 136 e p. 141)

5 Calcula a área da parte sombreada de cada figura.



9 Que área de papel é necessária para fazer os dois papagaios de papel da figura?



(A) 10 378 cm²

(B) 5189 cm²

(C) 293 cm²

(D) 146 cm²

Anexo II – Quadro síntese das propriedades dos quadriláteros

Quadrilátero	Lados	Ângulos	Diagonais	Área
Quadrado	- Dois pares de lados estritamente paralelos. - Todos os lados geometricamente iguais.	- Quatro ângulos geometricamente iguais (90º).	- Geometricamente iguais. - Perpendiculares. - Dividem-se ao meio (ou seja, bissetam-se).	
Retângulo	- Dois pares de lados estritamente paralelos. - Geometricamente iguais dois a dois.	- Quatro ângulos geometricamente iguais (90º).	- Geometricamente iguais. - Oblíquas. - Dividem-se ao meio.	$A = c \times l$
Losango	- Dois pares de lados estritamente paralelos. - Todos os lados geometricamente iguais.	- Ângulos opostos geometricamente iguais.	- Com medidas de comprimento diferentes. - Perpendiculares. - Dividem-se ao meio.	
Paralelogramo obliquângulo	- Dois pares de lados estritamente paralelos. - Geometricamente iguais dois a dois.	- Ângulos opostos geometricamente iguais. - Os ângulos adjacentes à mesma base são suplementares.	- Com medidas de comprimento diferentes. - Oblíquas. - Dividem-se ao meio.	$A = b \times a$
Trapézio isósceles	- Um só par de lados estritamente paralelos. - Os lados não paralelos são geometricamente iguais.	- Os ângulos adjacentes à mesma base são geometricamente iguais.	- Geometricamente iguais. - Oblíquas.	
Trapézio retângulo	- Um só par de lados estritamente paralelos. - Um dos lados não paralelos é perpendicular às bases.	- Um par de ângulos retos consecutivos.	- Com medidas de comprimento diferentes. - Oblíquas.	
Trapézio escaleno	- Um só par de lados estritamente paralelos. - Todos os lados geometricamente diferentes.	- Todos os ângulos geometricamente diferentes.	- Com medidas de comprimento diferentes. - Oblíquas.	
Papagaio	- Dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais.	- Um par de ângulos opostos geometricamente iguais.	- Com medidas de comprimento diferentes. - Perpendiculares. - Só uma diagonal é dividida ao meio.	$A = \frac{D \times d}{2}$

Anexo V – Plano de aula do dia 10 de abril

Ano/Turma: 7.º 2.ª
Domínio: Geometria e Medida
Conteúdos: Quadriláteros
Data/Hora: 10 de abril (8h15)

Sumário
Realização de duas tarefas de exploração sobre polígonos e áreas.

Propósito principal da tarefa
- Aplicar e ampliar conceitos sobre as propriedades e as áreas de quadriláteros e de outros polígonos. - Formular e testar conjeturas.

Objetivos Específicos
Metas GM7.3 - Utilizar propriedades de polígonos e classificá-los. - Expressar processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito. - Identificar base e altura de um triângulo e de um paralelogramo. - Relacionar e calcular medidas de áreas de quadriláteros e triângulos. - Formular e testar conjeturas.

Conhecimentos prévios
- Identificar elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos. - Identificar base e altura de um triângulo e de um paralelogramo. - Calcular medidas de áreas de paralelogramos e de triângulos.

Recursos		Metodologia de trabalho
Do professor	Dos alunos	
- Plano de aula; - Manual; - Quadro branco e marcador; - Retroprojetor. - *Software GeoGebra*.	- Ficha de trabalho (em suporte de papel). - Lápis, borracha e caneta; - Folha quadriculada; - Régua e transferidor.	- Trabalho a pares; - Discussão coletiva das resoluções e consolidação de ideias com a turma.

Momentos das aulas	Tempos
1.º Momento: Sumário, apresentação da primeira parte da ficha de trabalho.	5 minutos
2.º Momento: Realização da primeira parte da ficha de trabalho.	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	30 minutos
II. Discussão coletiva.	20 minutos
3.º Momento: Apresentação e realização da segunda parte da ficha de trabalho.	
I. Trabalho autónomo dos alunos.	15 minutos
II. Discussão coletiva.	10 minutos

Desenvolvimento da aula

Sumário e apresentação da ficha de trabalho referente à primeira parte (*5 minutos*)

A aula terá início com o sumário escrito no quadro.

Após a distribuição da primeira parte da tarefa de exploração "Descobrindo polígonos" (documento em papel, para cada par) informarei os alunos, que irão trabalhar a pares, tal como habitualmente, e que irão utilizar materiais manipuláveis.

Recordarei que terão de escrever a caneta numa folha à parte (folha quadriculada para auxiliar os esboços) e apresentar sempre os seus raciocínios por escrito, não esquecendo que os raciocínios abandonados devem ser colocados entre parêntesis. Além disso, avisarei que não poderão utilizar corretor (tem acontecido com algumas tarefas) e que, eventualmente, irão utilizar régua e transferidor. As folhas com os registos dos alunos serão recolhidas no final da aula para análise.

Os alunos também serão informados de que a ficha de trabalho é composta por uma segunda parte, pelo que irão realizá-la depois da primeira discussão coletiva.

O enunciado será lido (por um aluno ou por mim), com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem. Também poderei colocar algumas questões para garantir que os alunos percebem o que se pretende:

- Olhando para a figura do enunciado, que polígonos se obtêm por sobreposição dos quadrados?

- Que outros polígonos conseguem obter? Descubram quais são esses polígonos.

- Em que condições a sobreposição dos quadrados é um polígono? Descrevam todas essas condições, indiquem o nome do polígono, explicando a razão da vossa escolha e façam um esboço do mesmo, tal como mostra a figura do enunciado.

No final desta apresentação, irei distribuir os quadrados em acetato de várias cores, três para cada par de alunos (dois com o mesmo tamanho e um outro com uma medida de comprimento de lado diferente).

Realização da primeira parte da tarefa (50 minutos)

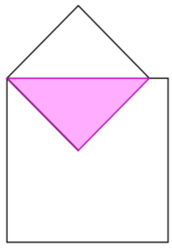
I. Trabalho autónomo dos alunos (30 minutos)

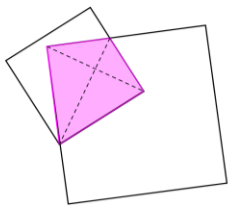
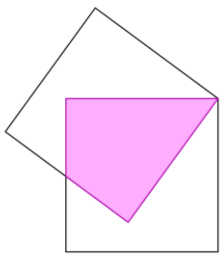
Durante este momento, irei circular pela sala de modo a esclarecer dúvidas. Como é uma tarefa de cariz investigativa, é importante focar os alunos no seu objetivo, incentivando-os e orientando-os no seu trabalho autónomo.

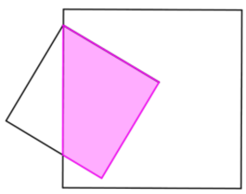
1) 2)

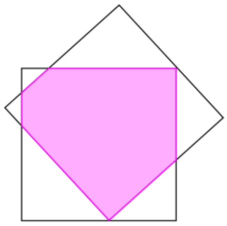
Os alunos devem ser capazes de obter alguns polígonos por sobreposição de dois quadrados, indicar o nome desses polígonos, descrever o modo como os obtêm e, em paralelo, fazer uma representação gráfica (ou seja, um esboço) da posição dos dois quadrados.

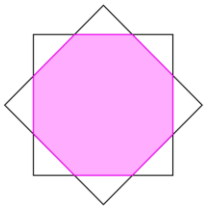
Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de polígonos obtidos por sobreposição de dois quadrados: possíveis esboços e respetivas descrições e justificações.

Triângulo retângulo isósceles 	A diagonal do quadrado menor coincide com parte de um dos lados do quadrado maior. É um **triângulo retângulo**, porque um dos seus ângulos é um ângulo interno (reto) do quadrado menor. Além disso, é um **triângulo isósceles**, porque dois dos seus lados são os lados do quadrado menor, ou seja, são geometricamente iguais. O outro lado do triângulo é a diagonal do quadrado menor, logo é maior que os outros dois lados do triângulo.

Papagaio 	Dois lados consecutivos do quadrado menor intersetam dois lados consecutivos do quadrado maior, de modo a obter, no polígono de sobreposição, dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais (ou seja, um **papagaio**). Uma dessas interseções é um dos vértices do quadrado menor.
	Dois lados consecutivos de um dos quadrados intersetam dois lados consecutivos do quadrado, de modo que uma das interseções é um dos vértices de cada um dos quadrados. Dois lados do polígono formado por sobreposição – papagaio – correspondem aos lados dos quadrados, logo são geometricamente iguais.

Trapézio retângulo 	Dois lados não consecutivos (ou lados opostos) do quadrado menor intersetam apenas um dos lados do quadrado maior, de modo que uma dessas interseções é um dos vértices do quadrado menor. Desta forma, obtemos um **trapézio** com apenas um par de lados estritamente paralelos, porque os lados opostos de um quadrado são estritamente paralelos. E é um **trapézio retângulo** porque dois dos seus ângulos são ângulos internos do quadrado menor (ângulos de 90°).

Hexágono irregular 	Sobrepomos os quadrados de modo que duas das interseções correspondam a um dos vértices de cada quadrado. Desta forma, obtemos um polígono irregular com 6 lados (ou seja um **hexágono**). É de notar que um **polígono irregular** é um polígono com lados e ângulos geometricamente diferentes.

Octógono regular 	Resulta da sobreposição dos quadrados maiores: cada lado de cada um dos quadrados interseta dois lados consecutivos do outro quadrado. A partir de cada uma dessas interseções, obtemos dois vértices, formando assim um polígono com 8 lados (ou seja, um **octógono**). Além disso, podemos obter um polígono **regular** (de lados e ângulos geometricamente iguais), porque ambos os quadrados têm a mesma dimensão.

Em particular, na questão 2), os alunos devem apontar quais os polígonos que não se podem obter por interseção de dois quadrados, tais como:

- Triângulos não retângulos;
- Trapézios não retângulos;
- Paralelogramos obliquângulos; losangos (propriamente ditos); no fundo, paralelogramos diferentes do retângulo.
- Polígonos com mais de oito lados.

Em adição, devem apresentar argumentos que justifiquem a ocorrência desses casos. De facto, não conseguimos obter os três primeiros casos por sobreposição, porque todos os ângulos do quadrado são retos.
No último caso, uma vez que o quadrado é um quadrilátero (ou seja, com 4 lados), apenas permite a obtenção de um polígono com 8 lados, no máximo. Isto só acontece se os quadrados apresentarem o mesmo tamanho, pois só assim, cada lado de cada um dos quadrados consegue intersetar dois lados adjacentes; ou seja, a partir de cada uma destas interseções obtemos sempre dois vértices.

Dificuldades: Podem surgir dificuldades na nomeação dos polígonos; é comum os alunos não se recordarem dos nomes dos polígonos. Nesse sentido poderei auxiliá-los, recordando essa classificação ou questionando os colegas, para averiguar quem conhece o nome de um dado polígono.

Apesar da classificação e das propriedades dos quadriláteros terem sido estudadas nas últimas aulas (no final do 2.º período), os alunos podem ter dificuldades em reconhecer alguns quadriláteros como o papagaio ou o trapézio propriamente dito (surgiram algumas dúvidas em aulas anteriores, na identificações desses quadriláteros). Caso essas situações ocorram (ou outras semelhantes), poderei, em primeiro lugar, aconselhar os alunos a consultarem a tabela que se encontra colada no seu caderno (dada numa das últimas aulas sobre os quadriláteros) e que resume as suas propriedades. Se as dúvidas persistirem, questionarei os alunos sobre essas propriedades, incidindo nos elementos relativos à medida de comprimento dos seus lados e de amplitude dos seus ângulos.

Os alunos também podem manifestar dificuldades na descoberta dos polígonos por sobreposição de dois quadrados.
Assim e, dado que esta tarefa é aberta e pressupõe a análise exaustiva de casos irei questionar, de modo sistemático, os alunos:
- Que outros polígonos podem obter por sobreposição? Em que condições a sobreposição dos quadrados gera esse polígono? Descrevam o modo como o obtêm e façam um esboço da posição dos dois quadrados que gera esse polígono.
- Conseguem formar polígonos de 4, 6 e 10 lados? Não se esqueçam de indicar o nome do polígono resultante da interseção dos quadrados.
- Que tipos de triângulos podem obter? Como podemos classificá-los, quanto aos lados e quanto aos ângulos?
- Porque é que só obtém triângulos retângulos?
- Porque é que não podem obter um triângulo equilátero?
- Podem obter um papagaio? Quais as propriedades de um papagaio?
- Podem obter trapézios? Porque é que é um trapézio? Porque é que os lados são estritamente paralelos?
- Podem obter todo o tipo de trapézios? Deem exemplos de trapézios que não se podem obter por interseção dos quadrados e encontrem argumentos que justifiquem essa situação.
- E em relação ao paralelogramo obliquângulo? É possível obter esse quadrilátero por sobreposição de dois quadrados? Porquê?
- O polígono da interseção dos dois quadrados poderá ser alguma vez um losango propriamente dito?
- Quais os polígonos que não se podem obter por sobreposição de dois quadrados?

II. **Discussão coletiva** (20 minutos)

A discussão irá centrar-se nas conclusões retiradas pelos alunos durante o trabalho autónomo. Desse modo, solicitarei a um grupo de alunos (selecionado ou voluntário) para mostrar à turma, com os quadrados de acetato de cor, como construiu os triângulos. Os alunos farão essa tarefa com o auxílio de um retroprojetor.
Outro grupo poderá mostrar os quadriláteros e, por último, outros alunos mostrarão os polígonos com mais de quatro lados. Terão de explicar algumas características dos polígonos obtidos e por que não é possível construir alguns deles. Em paralelo, poderei escrever algumas conclusões e desenhar os respetivos esboços.
Espera-se, ainda, que sejam os restantes alunos da turma a colocar questões e a fazer comentários ao aluno que apresenta. Contudo, em caso de necessidade, poderei questioná-los (com questões semelhantes às apresentadas no trabalho autónomo dos alunos), tentando que justifiquem as suas respostas.

Ao longo dessa discussão, e por forma a responder à questão 2, irei indicar no quadro, com a ajuda dos alunos, os polígonos que não se podem obter por sobreposição de dois quadrados. Para esse efeito, reservarei um espaço no quadro.
Neste momento, também será importante recordar algumas propriedades dos quadriláteros, estudadas em aulas anteriores; rever a classificação dos triângulos quanto à medida de comprimento dos lados (triângulos isósceles, escaleno e equilátero) e quanto aos ângulos (triângulos acutângulo, retângulo, obtusângulo) e relembrar o significado de "polígono regular" e "polígono irregular".

Apresentação e realização da segunda parte da tarefa (25 minutos)

A ficha de trabalho referente à segunda parte será distribuída a cada par e pedirei a um aluno para ler o enunciado. De seguida, questionarei a turma para perceber se há dúvidas relativamente ao enunciado.

I. Trabalho autónomo dos alunos

Neste momento, irei circular pela sala e tentar aceder aos raciocínios dos alunos e ajudá-los, através do questionamento, sempre que necessário.

1)

Hipótese 1: Para determinar a área da região colorida os alunos podem determinar, em primeiro lugar, a área do paralelogramo obliquângulo $[ABCD]$:

$$A_{[ABCD]} = b \times h = 11 \times 6 = 66\ cm^2$$

Em seguida, devem ser capazes de calcular a área do triângulo $[DEC]$:

$$A_{[DEC]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{11 \times 6}{2} = \frac{66}{2} = 33\ cm^2$$

Por fim, os alunos determinam a área da região colorida:

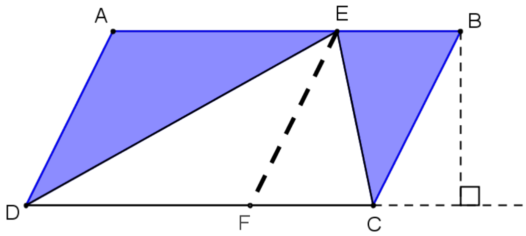
$$A_{[ABCD]} - A_{[DEC]} = 66 - 33 = 33\ cm^2.$$

Dificuldades: Os alunos podem ter dificuldades em identificar a altura ou até mesmo a base do paralelogramo obliquângulo, tal como se verificou na aula sobre áreas de quadriláteros. Nesse momento, poderei colocar as seguintes questões:
- Como se designam os lados [AB] e [DC] do paralelogramo?
- Como podem definir a altura do paralelogramo [ABCD]?
O mesmo se aplica para o triângulo $[DEC]$, caso os alunos apresentem dificuldades em identificar a sua altura.
Além disso, podem não estar recordados das fórmulas que permitem determinar as áreas do paralelogramo e do triângulo. Nesse sentido, poderei sugerir aos alunos a consulta do caderno ou do manual ou questionar os colegas sobre o assunto para auxiliar os alunos com mais dificuldades.

Dado que não é possível determinar a área da região colorida pela adição das áreas dos triângulos $[AED]$ e $[EBC]$ por falta de dados, os alunos podem não compreender como determinar a área da região pretendida. Desta forma, para auxiliá-los, poderei colocar as seguintes questões:

- Que dados conhecemos?
- Esses dados permitem calcular que medidas de área?
- A partir da medida de área do paralelogramo [ABCD], como podemos calcular a medida de área da região colorida? No paralelogramo, qual é a região que não "interessa"? Qual é a fórmula que permite o cálculo dessa região?

Hipótese 2: Os alunos podem ser capazes de reconhecer que a região colorida do paralelogramo tem a mesma medida de área que a região não colorida do mesmo paralelogramo. Ao traçarem um segmento de reta (estritamente paralelo a [BC]), a partir do ponto E até à base [DC], conseguem verificar facilmente que os triângulos formados - $[\boldsymbol{AED}]\ \boldsymbol{e}\ [\boldsymbol{EFD}]$; $[\boldsymbol{ECF}]\ \boldsymbol{e}\ [\boldsymbol{EBC}]$ – são geometricamente iguais (é de notar que cada diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos geometricamente iguais):



Assim, os alunos podem concluir que a medida de área da região colorida é metade da medida de área da região do paralelogramo obliquângulo $[\boldsymbol{ABCD}]$, ou seja:

$$\boldsymbol{A_{[ABCD]} \div 2 = (b \times h) \div 2 = (11 \times 6) \div 2 = 66 \div 2 = 33\ cm^2}$$

2)

Os alunos devem ser capazes de reconhecer que a área da região colorida é sempre a mesma, uma vez que os diferentes triângulos $[\boldsymbol{DEC}]$ têm sempre a mesma base e a mesma altura.

Hipótese 1: Os alunos podem determinar a medida de área da região colorida, partindo de vários exemplos, ou seja, variando a posição do ponto *E* ao longo do segmento $[\boldsymbol{AB}]$. Nesse caso, irão chegar à conclusão acima assinalada, pois ao determinar a área do triângulo $[\boldsymbol{DEC}]$ para cada exemplo, irão verificar que é sempre igual, logo a área da região colorida também é sempre a mesma.

Dificuldades: Os alunos podem se sentir desorientados, sem saber como proceder para resolver a questão. Como auxílio, poderei sugerir aos alunos para apresentarem alguns exemplos, variando a posição do ponto E, e determinarem para os mesmos, a área da região colorida, tal como fizeram na questão anterior. Posteriormente, pedirei que retirem conclusões perante os resultados obtidos.

Hipótese 2: Os alunos que recorreram à hipótese 2 (indicada para a resolução da questão 1), não terão muitas dificuldades na resolução da presente questão. Assim, irão concluir que, independentemente da posição do ponto *E* ao longo da base $[\boldsymbol{AB}]$, a área da região colorida é sempre igual à área da região não colorida e, como tal, será sempre metade da área do paralelogramo.

II. Discussão coletiva

Após a realização da parte II da ficha de trabalho, irei promover a discussão ao nível da turma, pedindo a diferentes grupos de alunos (selecionados ou voluntários) para apresentarem a resolução das questões no quadro.

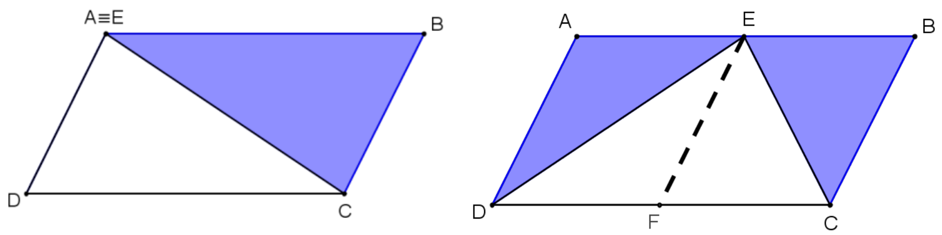
De modo a promover a participação de todos os alunos na discussão, questionarei a turma sobre as conclusões obtidas pelos colegas e sobre outras estratégias de resolução:

- Concordam com a estratégia dos vossos colegas? Como é que eles pensaram?

- Algum grupo chegou à resposta de outra forma?

Se surgirem muitas dificuldades na questão 2 e, caso não esteja presente na resolução apresentada pelo grupo de alunos, poderei recorrer ao *GeoGebra* para mostrar alguns exemplos, variando a posição do ponto *E*. Nesse momento, os alunos irão verificar que ao variar a posição desse ponto, a base e a altura do triângulo *[DEC]* são sempre iguais. Como consequência, a região sombreada é sempre a mesma.

Em seguida, apresentam-se alguns exemplos mais simples, levando os alunos a concluir que, em cada caso, a medida de área da zona sombreada é igual à medida de área da zona não sombreada e, portanto, é sempre a mesma.



Neste momento, poderá ser oportuno recordar o que são **figuras equivalentes**, ou seja, figuras com a mesma medida de área.

No final da aula será dado aos alunos a resolução da tarefa "Descobrindo os polígonos" (1.ª questão) com os esboços dos vários polígonos formados por sobreposição de dois quadrados, descrições da forma como foram obtidos e explicitação das suas características (encontra-se em anexo). Optou-se por usar esta estratégia, uma vez que a escrita (no quadro) de todos esses exemplos ocuparia a aula inteira.

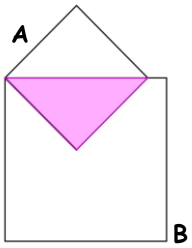
Avaliação formativa

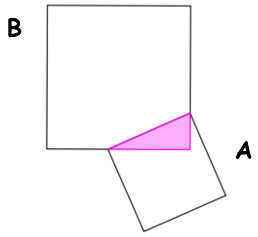
A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:
- Observação direta.
- Registos efetuados pela minha colega, seguindo um guião.
- Registo áudio da atividade realizada por dois pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).

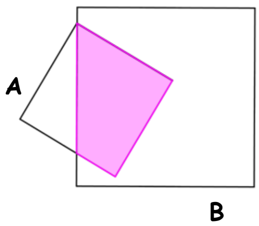
Pedagogia diferenciada

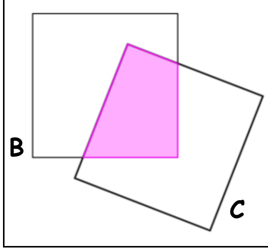
- Os alunos NEE irão realizar as mesmas tarefas que os restantes colegas.

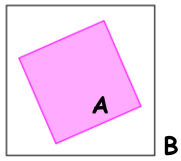
Anexo – Resolução da tarefa "Descobrindo polígonos"

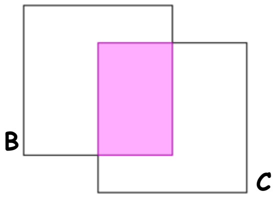
Triângulo retângulo isósceles 	A diagonal do quadrado A coincide com parte de um dos lados do quadrado B. É um **triângulo retângulo**, porque um dos seus ângulos é um ângulo interno (reto) do quadrado A. Além disso, é um **triângulo isósceles**, porque dois dos seus lados são os lados do quadrado A, ou seja, são geometricamente iguais. O outro lado do triângulo é a diagonal do quadrado A, logo é maior que os outros dois lados do triângulo.

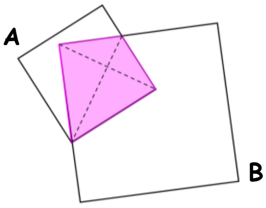
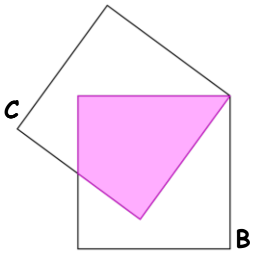
Triângulo retângulo escaleno 	Dois vértices consecutivos do quadrado A intersetam dois lados consecutivos do quadrado B, de modo a obter um triângulo com todos os lados geometricamente diferentes (ou seja, um **triângulo escaleno**).

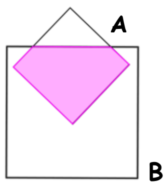
Trapézio retângulo 	Dois lados não consecutivos (ou lados opostos) do quadrado A intersetam apenas um dos lados do quadrado B, de modo que uma dessas interseções é um dos vértices do quadrado A. Desta forma, obtemos um **trapézio** com apenas um par de lados estritamente paralelos, porque os lados opostos de um quadrado são estritamente paralelos. E é um **trapézio retângulo** porque dois dos seus ângulos são ângulos internos do quadrado A (ângulos de 90°).

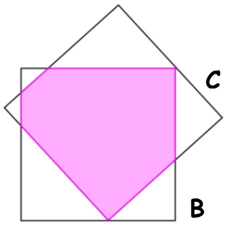
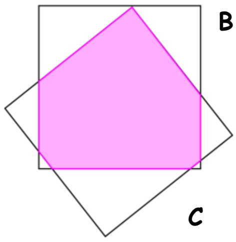
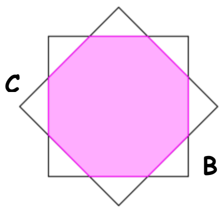
Quadrilátero irregular 	Dois lados consecutivos do quadrado B intersetam dois lados consecutivos do quadrado C, de modo a obter um **quadrilátero não trapézio**, ou seja, sem lados estritamente paralelos. É um **quadrilátero irregular** porque os lados são geometricamente diferentes.

Losango (quadrado) 	O quadrado A sobrepõe-se totalmente sobre o quadrado B. A interseção de ambos é o próprio quadrado A. Como o **quadrado** tem todos os lados geometricamente iguais, então é um losango.

Retângulo 	Dois lados consecutivos do quadrado B intersetam perpendicularmente dois lados consecutivos do quadrado C. Cada um desses lados é estritamente paralelo a um dos lados do outro quadrado. Nessas condições, podemos obter um paralelogramo com quatro ângulos retos, ou seja, um **retângulo**.

Papagaio 	Dois lados consecutivos do quadrado A intersetam dois lados consecutivos do quadrado B, de modo a obter, no polígono de sobreposição, dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais (ou seja, um **papagaio**). Uma dessas interseções é um dos vértices do quadrado A.
	Dois lados consecutivos do quadrado B intersetam dois lados consecutivos do quadrado C, de modo que uma das interseções é um dos vértices de cada um dos quadrados. Dois lados do polígono formado por sobreposição – papagaio – correspondem aos lados dos quadrados, logo são geometricamente iguais.

Pentágono irregular 	Três vértices do quadrado A encontram-se no interior do quadrado B e o quarto vértice é um ponto exterior desse quadrado. Assim, obtemos um **pentágono** (polígono com 5 lados) **irregular**, dado que não apresenta todos os lados e ângulos geometricamente iguais.

Hexágono irregular 	Sobrepomos os quadrados (B e C) de modo que duas das interseções correspondam a um dos vértices do quadrado B e do quadrado C. Desta forma, obtemos um polígono irregular com 6 lados (ou seja um **hexágono**). É de notar que um **polígono irregular** é um polígono com lados e ângulos geometricamente diferentes.
Heptágono irregular 	Três lados do quadrado B intersetam dois lados consecutivos do quadrado C; a partir de cada uma dessas interseções, obtemos dois vértices. O quarto lado do quadrado B interseta o quadrado C num dos seus vértices. Nessas condições, podemos obter um **heptágono** (polígono com 7 lados) **irregular**.
Octógono regular 	Resulta da sobreposição dos quadrados B e C: cada lado de cada um dos quadrados interseta dois lados consecutivos do outro quadrado. A partir de cada uma dessas interseções, obtemos dois vértices, formando assim um polígono com 8 lados (ou seja, um **octógono**). Além disso, podemos obter um polígono **regular** (de lados e ângulos geometricamente iguais), porque ambos os quadrados têm a mesma dimensão.

Anexo VI – Ficha de trabalho "De volta dos quadriláteros…"

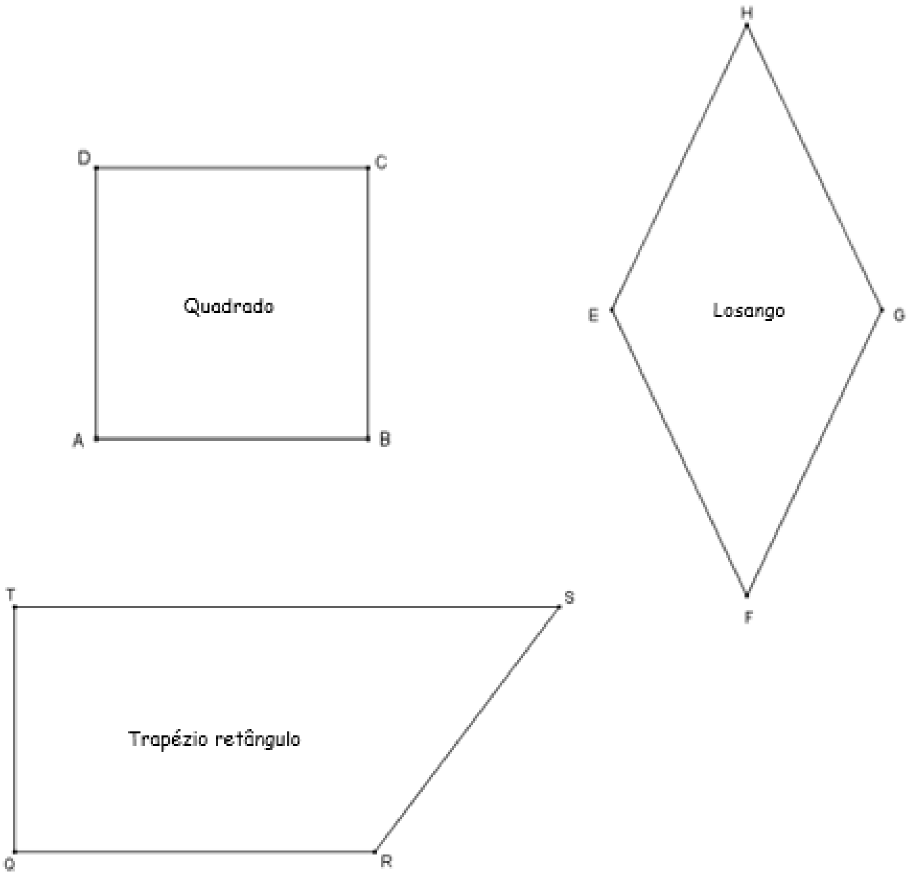
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo — Ficha de trabalho nº

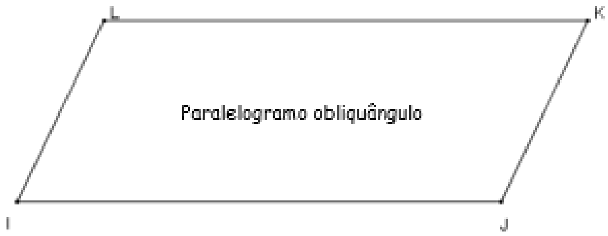
Nome: ____________________ Nº ___ Turma: ______ Data: _________

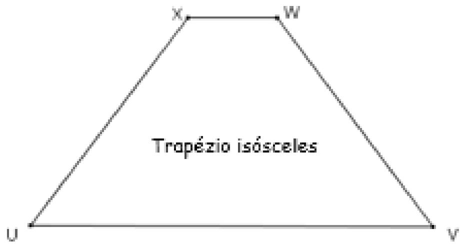
De volta dos quadriláteros…[i]

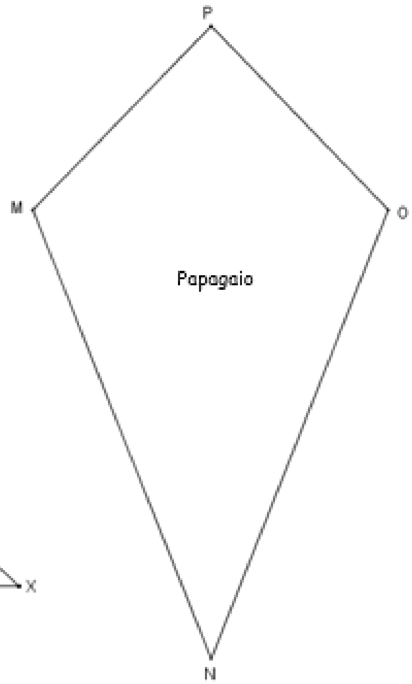
1) Para responder às seguintes questões considera os seguintes quadriláteros:

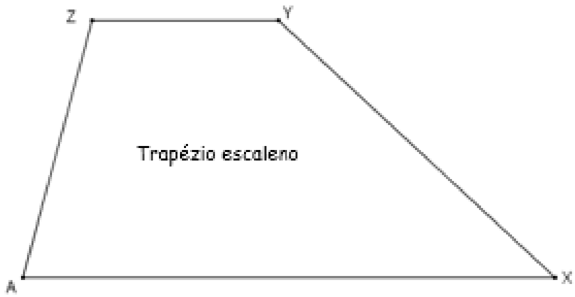


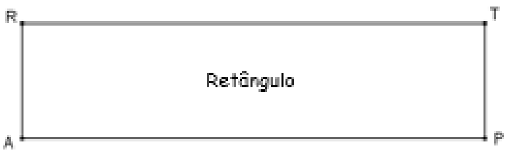
[i] Adaptada de Ponte, Oliveira & Candeias (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC.


L
K
Paralelogramo obliquângulo
I
J


X
W
Trapézio isósceles
U
V


P
M
O
Papagaio
N


Z
Y
Trapézio escaleno
A
X


R
T
Retângulo
A
P

a. Vamos encontrar características de cada quadrilátero!
Começa por medir os lados e os ângulos de cada um e compará-los…

Quadrilátero	Características
Quadrado	
Retângulo	
Losango	
Paralelogramo obliquângulo	
Trapézio isósceles	
Trapézio retângulo	
Trapézio escaleno	
Papagaio	

3

b. Qual é a propriedade comum a todos os polígonos, à exceção do papagaio.

4

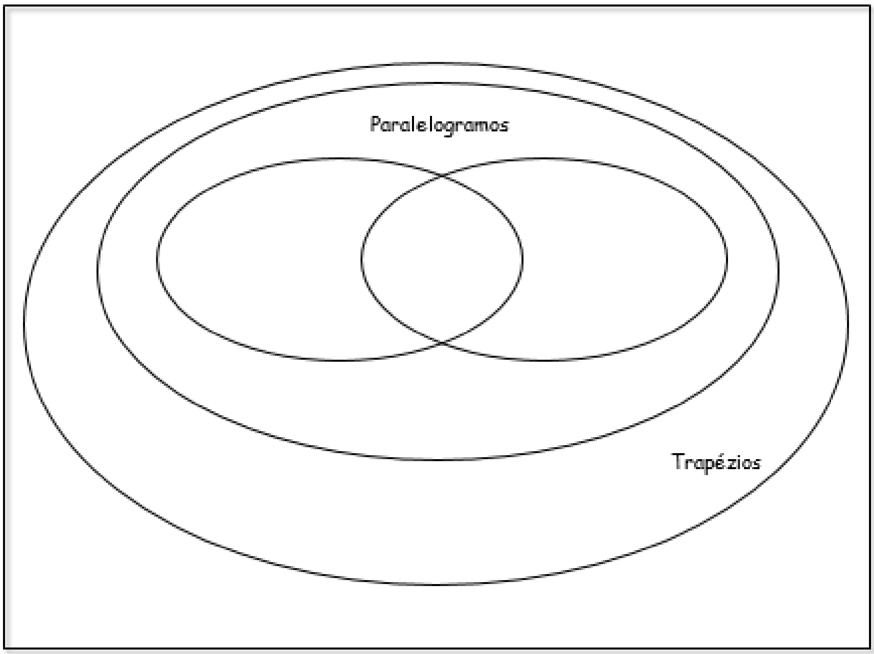
c. *O* que têm de comum o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo obliquângulo?

d. Regista as propriedades que são partilhadas pelos quadrados e losangos.

5

e. Regista as propriedades que são partilhadas pelos quadrados e retângulos.

2) Tendo em atenção as características descritas anteriormente, completa o esquema seguinte com os nomes dos quadriláteros, **justificando** as ligações entre eles.



Justificação:

Anexo VII – Ficha de trabalho “Investigando as diagonais dos quadriláteros”

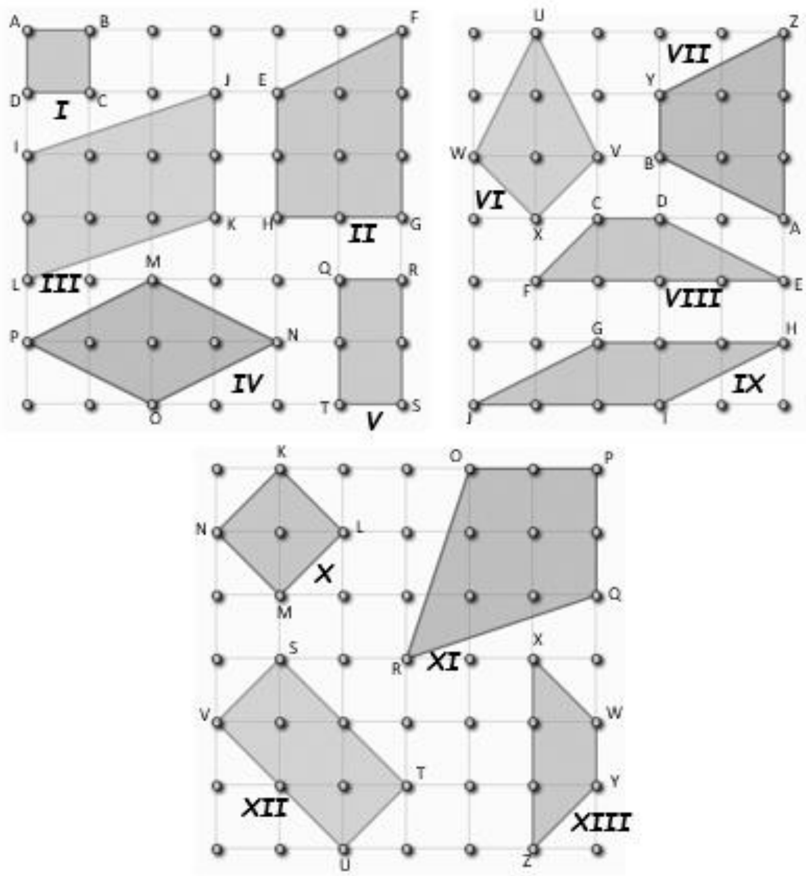
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo | Ficha de trabalho nº

Nome: ______________________________ Nº ___ Turma: ______ Data: _________

Investigando as diagonais dos quadriláteros[i]

1) *Considera os seguintes quadriláteros construídos no geoplano.*



[i] Adaptada de Ponte, Oliveira & Candeias (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC e de Conceição & Almeida 2014. *Matematicamente falando 7*. Porto: Areal Editores.

a. *Constrói as diagonais dos quadriláteros anteriores e descreve as suas propriedades na tabela seguinte.*

Quadrilátero	Identificação pelas números romanos	Propriedades das diagonais
Quadrado		
Retângulo		
Losango		
Paralelogramo obliquângulo		
Trapézio isósceles		
Trapézio retângulo		
Trapézio escaleno		
Papagaio		

2

Anexo VIII – Ficha de trabalho "Elaborando demonstrações"

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo | Ficha de trabalho nº

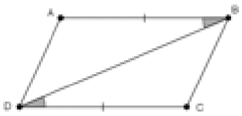
Nome: ______________________________ Nº ___ Turma: ______ Data: _________

Elaborando demonstrações[i]

1) Vamos demonstrar a seguinte propriedade:

Todo o trapézio com bases geometricamente iguais é um paralelogramo.

a. Considera o seguinte trapézio $[ABCD]$, cujas bases $[AB]$ e $[CD]$ são geometricamente iguais. Traçou-se a diagonal $[BD]$.



b. Vamos organizar a demonstração num esquema a duas colunas: na coluna da esquerda estão registados os vários passos (as afirmações) e na coluna da direita teremos de escrever a justificação de cada um dos passos.

	Passos	Justificações
1	$A\hat{B}D = C\hat{D}B$	
2	Os triângulos [ADB] e [CBD] são geometricamente iguais	
3	$C\hat{B}D = A\hat{D}B$	
4	AD e BC são retas estritamente paralelas	
5	[AD] é estritamente paralelo a [BC]	

[i] Adaptada de Santos, M. (2012). *O geogebra no estudo dos triângulos e quadriláteros: Uma experiência no 7.º ano de escolaridade.* Instituto Politecnico de Leiria: Leiria.

Anexo IX – Ficha de trabalho “Áreas de quadriláteros”

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo   Ficha de trabalho nº

Nome: ____ Nº ___ Turma: ______ Data: _________

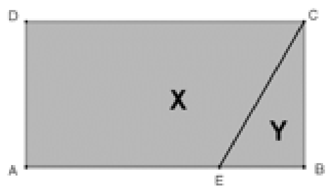
Áreas de quadriláteros[i]

As fórmulas das áreas de alguns quadriláteros podem ser obtidas por decomposição e composição.

1) *Os seguintes passos sugerem um caminho para deduzir a fórmula que permite calcular a área do* **paralelogramo.**

   a. Desenha e recorta numa folha um retângulo.

   b. Recorta em duas partes X e Y como indica a figura:



   c. Desloca a peça Y até obteres um paralelogramo.

   d. Qual é a relação entre as áreas do paralelogramo e do retângulo? Porquê?

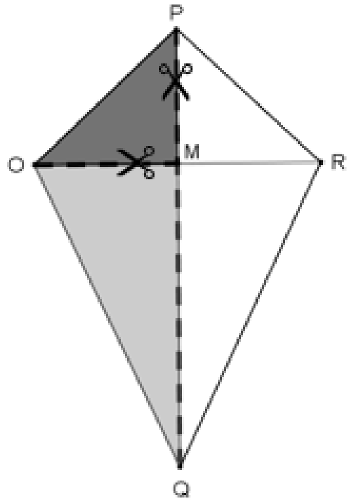
   e. Escreve uma fórmula que permita calcular a área do paralelogramo.

[i] Adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm206/tarefa.htm.

2) Vamos agora investigar a **área do papagaio**.

a. *Constrói* um papagaio numa folha e recorta-o.

b. Desenha as suas diagonais e recorta o papagaio tal como indica a figura, destacando as suas partes coloridas:



c. *Constrói* um retângulo com as três peças obtidas anteriormente.

d. O que podes dizer quanto às áreas do papagaio e do retângulo formado? Porquê?

e. Escreve uma fórmula que permita calcular a área do papagaio.

Anexo X – Ficha de trabalho “Descobrindo polígonos” (parte I) e “Comparar áreas” (parte II)

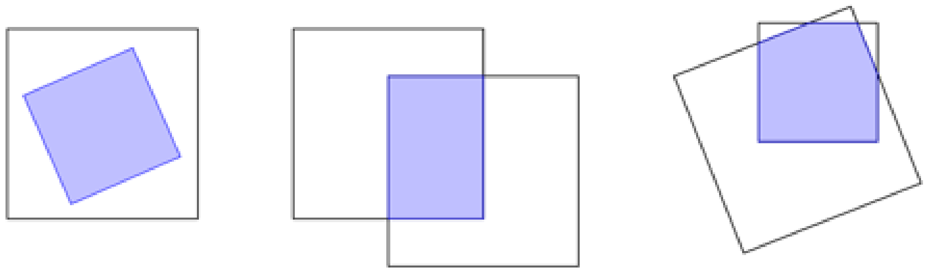
ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo Ficha de trabalho nº

Nome: ____ Nº ___ Turma: ______ Data: _________

Parte I – Descobrindo polígonos[i]

A sobreposição de dois quadrados, não necessariamente com o mesmo tamanho, gera um polígono, tal como se exemplifica na figura seguinte pelas zonas sombreadas.



1) Que polígonos se podem obter por sobreposição? Losangos, triângulos isósceles, pentágonos, hexágonos, octógonos, decágonos, papagaios, trapézios retângulos?
Mostra como podem ser obtidos (podes utilizar palavras, esquemas ou desenhos).

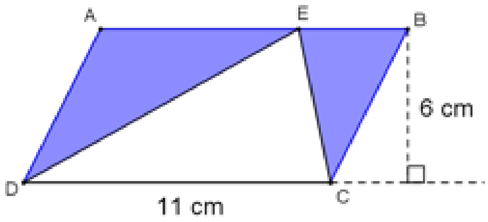
2) Dá exemplos de polígonos que não se podem obter por sobreposição.
Explica a tua resposta (podes utilizar palavras, esquemas ou desenhos).

Nota: Deves responder a estas questões numa folha quadriculada.

[i] Adaptada de Ponte, Oliveira & Candeias (2009). *Triângulo e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC.

Parte II – Comparar áreas[ii]

Na figura seguinte, $[ABCD]$ é um paralelogramo obliquângulo.



1) Atendendo aos dados da figura, determina a área da região colorida.

2) Imagina que o ponto E se desloca no segmento de reta $[AB]$. Para cada posição do ponto E, qual é a área da região colorida? Explica o teu raciocínio.

ii Adaptada de Passos & Correia (2014). *Matemática em ação – 7. º Ano*. Lisboa: Raiz Editora.

Anexo XI – Guião de apoio à observação da aula

Objetivo do estudo

Descrever o raciocínio geométrico dos alunos, no subtópico Quadriláteros, recorrendo a tarefas de exploração.

Aspetos a observar no comportamento dos alunos

I. Durante o trabalho autónomo dos alunos:

- Envolvimento e entusiamo dos alunos face à tarefa;
- Conhecimentos e capacidades que evidenciam;
- Conjeturas que formulam;
- Principais dificuldades com que se deparam;
- Questões ou dúvidas colocadas à professora;
- Opiniões que expressam ou ideias que discutem entre colegas.

II. Durante a discussão coletiva:

- Intervenções dos colegas perante a resolução apresentada no quadro (reações dos alunos, argumentações ou comentários realizados);
- Conjeturas que os alunos formulam ou conclusões que retiram da discussão;
- Principais dificuldades com que se deparam;
- Questões ou dúvidas colocadas à professora;
- Evidências de aprendizagem dos alunos.

Anexo XII – Guião da entrevista

A entrevista que se irá realizar, assente em tarefas de exploração, tem como objetivo obter uma visão mais aprofundada dos processos de raciocínio geométrico desenvolvidos pelos alunos, bem como as dificuldades que evidenciam.

A fase inicial da entrevista permitirá a identificação e caracterização do aluno e a sua perspetiva relativamente às aulas por mim lecionadas. Pretende-se, assim, criar um ambiente agradável e de à vontade para o aluno, antes da realização das tarefas.

Seguidamente, em cada tarefa, serão colocadas questões que solicitem ao aluno a explicação da sua resolução e/ou para verificar o seu grau de compreensão. Além disso, poderei colocar outras questões que auxiliem o aluno a resolver a respetiva tarefa, caso surjam muitas dificuldades.

Identificação e caracterização do aluno

1. Nome do aluno:
2. Idade:
3. O que mais gostaste das aulas por mim selecionadas? E o que menos gostaste?
4. Considerando as tarefas que realizaste nessas aulas, quais foram as tuas principais dificuldades?
5. O que é que aprendeste, essencialmente, com a realização dessas tarefas sobre os quadriláteros?

Questões relacionadas com as tarefas (exemplos)

1. Como pensaste?
2. Podes dizer-me como chegaste a essa solução?
3. Consegues explicá-lo de outra forma?

4. Quanto à tarefa referente aos **pontos médios dos quadriláteros**, que conclusões podes retirar?
5. Quais as características das diagonais do papagaio (para a construção dos quadriláteros com diagonais perpendiculares)?
6. Porque é que achas que obtiveste esse tipo de quadrilátero (após a união dos pontos médios dos lados consecutivos)?

a. Quais as características do retângulo (nomeadamente a posição relativa dos lados opostos e os ângulos)? Quais delas podem estar relacionadas com as propriedades das diagonais dos quadriláteros que construíste?

7. Na tarefa referente à **sobreposição dos quadrados**, a área da zona sombreada varia se um dos quadrados rodar? Porquê?

a. Se traçares as diagonais do quadrado menor, o que concluis relativamente à área da zona sombreada? Porquê?

b. Então se o quadrado menor tiver área igual a um, qual é a área da parte sombreada?

c. Como poderias demonstrar esse resultado?

Anexo XIII – Tarefas para a entrevista

ESCOLA E.B. 2,3 DE FERNANDO PESSOA

Matemática do 3º ciclo | Ficha de trabalho nº

Nome: ______________________________ Nº ___ Turma: _______ Data: __________

Parte I[1]
Descobrindo os quadriláteros

Descobre o quadrilátero considerando as propriedades enunciadas e justifica a tua resposta.

1) Não é um quadrado e tem os lados geometricamente iguais.

2) Não é um paralelogramo e tem um eixo de simetria.

3) *As diagonais bissetam-se e não são perpendiculares.*

[1] Adaptada de Passos, I. C., & Correia, O. F. (2014). *Matemática em ação – 7.º Ano. Caderno de atividades*. Lisboa: Raiz Editora.

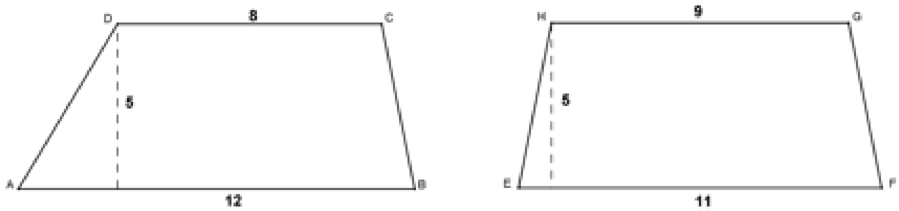
Parte I[ii]
Explorando os quadriláteros e pontos médios

1) *Constrói os quadriláteros que têm as diagonais perpendiculares e marca os pontos médios dos seus lados. Une os pontos médios dos lados consecutivos. Que quadriláteros obténs?*
Escreve uma conjetura sobre o que observas e tenta justificá-la.

[ii] Adaptada de Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2008). *Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7.º ano*. ME-DGIDC.

Áreas de trapézios

2) Na figura seguinte estão desenhados dois trapézios.



3

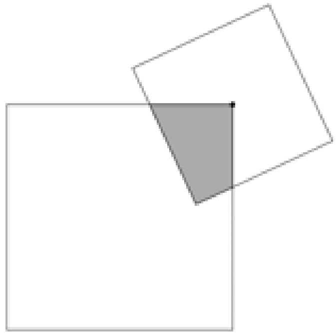
a. Calcula e compara as áreas desses trapézios.

b. Faz o esboço de um trapézio diferente com a mesma altura e que tenha a mesma área.

c. Haverá outros trapézios com a mesma área? Quantos? Há alguma relação entre as bases desses trapézios?

Sobrepondo quadrados

3) Dois quadrados sobrepõem-se como mostra a figura.



4

Um dos vértices do quadrado maior coincide com o centro do quadrado menor. Qual é a relação entre a área sombreada e a área do quadrado menor? Explica a tua resposta.

Anexo XIV - Autorização

Exmo. Sr. Encarregado de Educação,

Com o objetivo de realizar um trabalho académico, venho por este meio pedir autorização para a gravação áudio e vídeo de uma entrevista com o seu educando, tendo como base uma tarefa matemática.

Este trabalho será supervisionado pela Professora de Matemática Cláudia Torres.

Agradeço a sua atenção e apresento os meus melhores cumprimentos.