

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



**Métodos Analíticos em Probabilidade
e Métodos Probabilísticos em Análise:
Fractalidade Associada aos Modelos Beta(p,q), Evolução de
Populações e Dimensões de Hausdorff**

Sandra Maria da Silva Figueiredo Aleixo

DOCTORAMENTO EM ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Probabilidade e Estatística

2008

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



**Métodos Analíticos em Probabilidade
e Métodos Probabilísticos em Análise:**

**Fractalidade Associada aos Modelos Beta(p,q), Evolução de
Populações e Dimensões de Hausdorff**

Sandra Maria da Silva Figueiredo Aleixo

Orientadores:

Professor Doutor José Leonel Linhares da Rocha

Professor Doutor Dinis Duarte Ferreira Pestana

DOUTORAMENTO EM ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Probabilidade e Estatística

2008

À minha Mãe.

Agradecimentos

- Aos meus orientadores, Professor Doutor Dinis Duarte Ferreira Pestana e Professor Doutor José Leonel Linhares da Rocha, a total disponibilidade, o apoio, o incentivo constante, a paciência, e o enorme contributo científico, que permitiram a realização desta dissertação de doutoramento.
- Ao Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, ISEL, e ao Instituto Politécnico de Lisboa, IPL, pela bolsa prioritária que me atribuíram, a qual me dispensou do serviço docente durante o período de realização deste trabalho.
- Ao Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa, CEAUL, por todo o apoio que me concederam como investigadora.
- Aos meus colegas do ISEL cuja carga horária foi sobrecarregada em função da minha dispensa de serviço.
- Ao meu colega do ISEL, Jorge Duarte, pela sua disponibilidade e ajuda na aprendizagem inicial da programação no programa Mathematica.
- À professora Fournier-Prunaret, do *Institut National des Sciences Appliquées*, pela confirmação de uma parte deste trabalho.
- Ao meu marido, às minhas filhas Mafalda e Catarina, à minha família e aos meus amigos, por toda a paciência, incentivo, apoio e carinho que sempre me dispensaram ao longo de todos estes meses de trabalho, em que pouca atenção lhes pude prestar.

Resumo

Deduzimos modelos de crescimento populacional proporcionais a densidades beta com parâmetros de forma p e 2 , onde $p \geq 1$, cuja complexidade dinâmica está relacionada com o parâmetro malthusiano r . Usando técnicas de dinâmica simbólica, investigamos o comportamento caótico destes modelos, em termos de entropia topológica, no espaço de parâmetros (r, p) , identificando diferentes comportamentos dinâmicos.

Verificamos a universalidade da constante de Feigenbaum nos modelos apresentados, usando uma fórmula diferente daquela que é usualmente apresentada na literatura.

O efeito de Allee foi analisado nestes modelos. Para $p > 2$, eles exibem uma dinâmica populacional onde o efeito de Allee surge naturalmente. No entanto, no caso onde $1 < p \leq 2$, os modelos propostos não incluem este efeito. Para invocá-lo, apresentamos alguns modelos alternativos e investigamos as suas dinâmicas.

Analisamos também a negatividade da derivada de Schwarz em todos os modelos propostos.

Definimos poeira de Cantor aleatória, um fractal obtido por eliminação recursiva do espaçamento central que é definido entre o mínimo e máximo de duas observações aleatórias uniformemente distribuídas, de cada intervalo da iteração anterior. A designação atribuída ao fractal é justificável, uma vez que os valores esperados dos extremos dos intervalos de cada iteração, coincidem com os extremos dos intervalos da correspondente iteração na construção da poeira de Cantor determinista.

Calculamos a dimensão de Hausdorff (que intuitivamente avalia a que ponto um conjunto é denso) da poeira de Cantor aleatória, e verificamos que apesar de a poeira de Cantor ser o “fractal médio” da poeira de Cantor aleatória, é mais denso (a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor \mathcal{C} é superior dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória \mathcal{F}_U).

Este resultado levou-nos a uma definição mais geral de conjuntos de Cantor aleatórios \mathcal{F}_X com $X \sim \text{Beta}(p, q)$, ao cálculo das suas dimensões de Hausdorff, e das dimensões de Hausdorff dos fractais deterministas que são a esperança daqueles fractais aleatórios, num sentido similar ao de a poeira de Cantor determinista ser a esperança da poeira de Cantor aleatória.

O fenómeno é geral, e para essa diferença entre dimensões de Hausdorff encontramos uma explicação probabilista que reforça a interpretação de dimensão de Hausdorff como reveladora da abundância de pontos do fractal.

Palavras Chave: Densidades Beta, Dinâmica Populacional, Efeito de Allee, Dimensão de Hausdorff, Conjuntos de Cantor Aleatórios.

Abstract

Populational growth models, proportional to beta densities with shape parameters p and 2, where $p \geq 1$, whose dynamical complexity is related with the malthusean parameter r , are investigated. Using dynamical symbolic techniques, we examine the chaotic behaviour of these models, in terms of topological entropy, in the parameter plane (r, p) , identifying different dynamical behaviours. We verify the universality of the Feigenbaum constant in the presented models, using a new formula.

The Allee effect is analyzed in these models. For $p > 2$, they exhibit a population dynamics with natural Allee effect. However, in the case where $1 < p \leq 2$, the proposed models do not include this effect. In order to invoke it, we present some alternative models and investigate their dynamics. We also analyze the negativity of the Schwarz derivative in all the models proposed.

We define random middle third Cantor set, a fractal obtained by recursive elimination of the central spacing which is defined between the minimum and the maximum of two random observations uniformly distributed, from each interval of the previous iteration. The designation attached to the fractal is justified, since the expected values of the extremes of the intervals of each iteration are the endpoints of the correspondent iteration in the deterministic middle third Cantor set.

We calculate the Hausdorff dimension (that intuitively evaluates how “dense” a set is) of the random middle third Cantor set, and we verify that although the middle third Cantor set is the expectation of the random middle third Cantor set, it is more dense than the one obtained stochastically.

This result lead us to define more generally random Cantor sets \mathcal{F}_X with $X \sim Beta(p, q)$, to compute their Hausdorff dimensions, and to compute the Hausdorff dimensions of the deterministic fractals which are the expected values of those random fractals, in a similiar sense to the one that the deterministic middle third Cantor set is the expected value of random middle third Cantor set.

The phenomenon is general, and we hint it’s probabilistic explanation.

Keywords: Beta Densities, Population Dynamics, Allee Effect, Hausdorff Dimension, Random Cantor Sets.

Conteúdo

1	Introdução e Motivação	1
2	Dinâmica simbólica em sistemas unimodais	7
2.1	Família de aplicações unimodais e dinâmica simbólica. Aplicação logística	8
2.2	Partições de Markov e entropia topológica	18
2.3	Teoria de <i>kneading</i> para aplicações unimodais	22
2.4	Ordenação topológica da família das aplicações unimodais	29
2.5	Diagrama de bifurcação e constante de Feigenbaum na família das aplicações unimodais	36
2.6	Conjuntos de Cantor	41
3	Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$	45
3.1	Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$	46
3.2	Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$	64
4	Modelos de crescimento baseados em aplicações proporcionais a	

densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$ com efeito de <i>Allee</i>	93
4.1 Modelos de crescimento populacional determinísticos com efeito de Allee. Abordagem heurística	94
4.2 Aplicação logística modificada com efeito de Allee	98
4.3 Modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$, modificados com efeito de Allee	106
4.4 Caracterização dos Modelos	111
5 Conjuntos de <i>Cantor</i> aleatórios	133
5.1 Dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor	134
5.2 Poeira de Cantor aleatória	141
5.3 Dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória	146
5.4 Fractais aleatórios $\mathcal{F}_{X_{p,q}}$ e correspondentes fractais $\mathcal{C}_{X_{p,q}}$ deterministas	149

Lista de Figuras

2.1	Taxas de crescimento populacional no modelo logístico	11
2.2	Dimensões populacionais no modelo logístico	12
2.3	Órbita periódica e partição de Markov da sequência $(CRLR^3)^\infty$. . .	21
2.4	Árvore topológica da aplicação logística	34
2.5	Entropia topológica na aplicação logística	35
2.6	Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(2, 2)$, aplicação logística	37
2.7	Função composta da aplicação logística	39
2.8	Função composta da aplicação logística, num subconjunto do intervalo $[0, 1]$	39
2.9	Modelo logístico com $r > 4$	43
3.1	Taxas de crescimento populacional usando o modelo proporcional à $Beta(3, 2)$	49
3.2	Varição da dimensão populacional ao longo do tempo usando o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$	53
3.3	Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$	55

3.4 Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(4, 2)$	58
3.5 Árvore topológica de aplicações unimodais proporcionais aos modelos $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$	61
3.6 Taxas de crescimento populacional usando o modelo proporcional à densidade $Beta(3.5, 2)$	68
3.7 Três tipos de formato das taxas de crescimento populacional usando modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, $p > 1$: curva enviesada para a esquerda, simétrica e enviesada para a direita	69
3.8 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(1.1, 2)$	69
3.9 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$	70
3.10 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(2, 2)$	70
3.11 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$	71
3.12 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(5, 2)$	71
3.13 Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(10, 2)$	72
3.14 Taxas de crescimento populacional nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 1$, cujas iteradas constituem órbitas de período 3	72
3.15 Efeito de Allee	80
3.16 Aplicações $f_{r_i(4),4}$, com $i = 1, 2^*, 2^{**}, 3, 4, 5$ para $p = 4$	82
3.17 Gráfico de regiões para $1 < p \leq 20$	82
3.18 Gráfico de regiões para $1 < p \leq 8$	88
3.19 Gráfico de regiões para $1 < p \leq 5$	89
3.20 Gráfico das regiões R_3 e R_4 para $5.5 < p \leq 5.7$ e $2.6 < r < 2.9$	90

4.1	Taxa de crescimento <i>per capita</i> para os modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, para $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$ e $K = 10$	101
4.2	Taxa de crescimento populacional para os modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, para $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$ e $K = 10$.	101
4.3	Dimensão populacional ao longo do tempo, nos modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$ e $N(0) = 3(> E)$	103
4.4	Modelos logísticos discretizados, corrigidos com efeito de Allee, com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$	106
4.5	Taxa de crescimento <i>per capita</i> para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, com $E = 2$ e $K = 10$	117
4.6	Taxa de crescimento populacional para 3 modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee	118
4.7	Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) < E$	118
4.8	Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) = E$	119
4.9	Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) > E$	119
4.10	Modelos discretizados baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$, corrigidos com efeito de Allee	120
4.11	Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,	122
4.12	Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.361$	124
4.13	Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.5$	125

4.14 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.695$	125
4.15 Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,	126
4.16 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.416$	127
4.17 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.6$	127
4.18 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.869$	128
4.19 Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,	129
4.20 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.484$	130
4.21 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.5$	131
4.22 Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.575$	131
4.23 Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$	132
4.24 Taxa de crescimento populacional para o modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$	132
5.1 Construção da poeira de Cantor	136
5.2 Construção da poeira de Cantor aleatória	142

Lista de Tabelas

2.1	Constante de Feigenbaum	41
3.1	Valores do parâmetro das sequências de <i>kneading</i> e entropia topológica	54
3.2	Constante de Feigenbaum	63
3.3	Constante de Feigenbaum nos modelos proporcionais a densidades <i>Beta(p, 2)</i> , com $p > 1$	74
3.4	Extremo superior do intervalo onde a derivada de Schwarz é positiva .	77
3.5	Valor do parâmetro r a partir do qual surge o efeito de Allee	80
3.6	Pontos das curvas que delimitam as regiões e amplitudes das mesmas no espaço de parâmetros	92
4.1	Valores do parâmetro das sequências de <i>kneading</i> para os 3 modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades <i>Beta(1.5, 2)</i> , modificados com efeito de Allee, com $E = 2$ e $K = 10$	123
5.1	Probabilidades do comprimento aleatório do <i>spacing</i> intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista e dimensões de Hausdorff .	157
5.2	Estimativas e intervalos de confiança a 95% para as probabilidades do comprimento aleatório do <i>spacing</i> intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista	161

5.3 Estimativas e intervalos de confiança a 95% para as probabilidades do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista (Cont.) 162

Introdução e Motivação

Entender os aspectos estruturais da dinâmica de populações, de modo a podermos prever a sua evolução futura, é um instrumento de decisão importante no planeamento económico e demográfico, essencial para administração em muitos ramos da Biologia, tais como preservação do ambiente, gestão da vida selvagem, restrições nas pescas, ou controle de pestes.

Na dinâmica das populações estão já disponíveis modelos aleatórios sofisticados, mas em muitas circunstâncias as suas funções médias são modelos determinísticos bem conhecidos, úteis como uma primeira abordagem em problemas aplicados. O modelo logístico de Verhulst (1845), o qual incorpora nos seus parâmetros a taxa de crescimento malthusiana e a retroacção devida a limitação de recursos naturais, é um candidato natural para modelar a dinâmica de gerações não sobrepostas, nomeadamente quando a unidade de tempo está relacionada com a duração de vida dos indivíduos na população. Modelos estocásticos mais gerais (natalidade e mortalidade, ramificação) e os equivalentes modelos determinísticos dados pelas suas funções médias são úteis em situações mais complexas.

Um ponto interessante do modelo de Verhulst é a sua utilidade ao lidar com a extinção de espécies. De facto, sabemos que uma grande percentagem de espécies se extinguem, mesmo quando a sua taxa de reprodução parecia ter bastante sucesso.

A teoria de sistemas dinâmicos aplicada ao modelo de Verhulst prediz de facto a extinção de espécies com taxa de reprodução elevada, e a dinâmica populacional interpreta isto como um efeito secundário, uma vez que o sucesso excessivo de uma espécie faz disparar o sucesso excessivo das espécies inimigas (predadores, viroses, doenças causadas por microorganismos, etc.); a co-integração das séries de peles de coelhos e raposas capturados na baía de Hudson, no Canadá, ao longo dos anos, mostra que por último ambas as espécies se podem extinguir assim que falhe o re-equilíbrio natural. Nesta perspectiva, os comportamentos fractal e caótico da dimensão da população $N(t)$ quando a taxa de reprodução malthusiana é elevada, é um ponto forte a favor da utilização de uma abordagem em termos de sistemas dinâmicos na modelação do fenómeno da vida.

A avaliação do comportamento de processos de crescimento: ecológicos, económicos, ou de outro tipo, através de modelação adequada, é um tema de extrema importância na sociedade e na comunidade científica. Um dos problemas importantes de dinâmica de populações prende-se com a modelação do crescimento populacional, avaliando o número de indivíduos $N(t)$ num dado instante t .

A aplicação logística tem sido usada com sucesso para modelar o crescimento de algumas populações limitadas por recursos finitos. Esta aplicação foi apresentada em 1845 pelo matemático e sociólogo belga Pierre François Verhulst (1804 – 1849), pelo que também é designada por Modelo de Verhulst, veja-se por exemplo Pestana e Velosa (2008). Este modelo de Verhulst pode ser facilmente apresentado como uma aproximação concedida pela expansão em série de Taylor, truncando os termos de ordem superior a dois, considerando-os irrelevantes para o modelo, obtém-se o modelo simplificado

$$\frac{d}{dt}N(t) = A_0 + A_1N(t) + A_2N(t)^2,$$

com $A_0 = 0$, $A_1 > 0$ e $A_2 < 0$, porque uma população extinta não se pode reproduzir, enquanto os recursos são abundantes ela reproduz-se, mas quando a população cresce muito os recursos tendem a escassear e portanto a população decresce.

A razão fundamental para truncar termos de ordem mais elevada na expansão em série de Taylor, como foi feito ao desenvolver o modelo de Verhulst, é a simplificação do modelo, como expressa a metáfora da navalha de Occam, mas também o preconceito de que em populações onde as gerações não se sobrepõem, o tempo de vida dos seus membros é uma unidade (isto é verdade para alguns insectos e plantas anuais).

Neste trabalho, investiga-se em linhas similares às usadas para o estudo do modelo de Verhulst, os comportamentos fractal e caótico de modelos proporcionais a outras densidades $Beta(p, 2)$, que pareçam plausíveis quando o paradigma da reprodução da população é mais geral. Note-se que, devido à simetria em torno de $x = \frac{1}{2}$, resultados análogos poderiam ser estabelecidos com o modelo $Beta(2, q)$.

Esta dissertação é constituída por 5 capítulos.

No primeiro capítulo explica-se a motivação do trabalho e é feita uma breve exposição sobre a sua estrutura.

No capítulo 2 apresenta-se a teoria relativa à dinâmica simbólica nos sistemas dinâmicos unidimensionais, definindo conceitos e resultados importantes, ilustrados com a aplicação logística. Mostra-se como a entropia topológica, invariante numérico e topológico usual para medir a complexidade topológica de um sistema dinâmico, pode ser calculada quer usando matrizes de Markov ou a teoria de *kneading*. Procede-se ainda à ordenação topológica da família de aplicações unimodais, usando a entropia topológica. Apresentam-se o diagrama de bifurcação e a tão famosa constante de Feigenbaum para esta família de aplicações. Por último apresentam-se os conjuntos de Cantor para estas aplicações e algumas das suas propriedades.

No terceiro capítulo introduz-se uma nova classe de aplicações unimodais, os modelos de crescimento populacional proporcionais a funções densidade de probabilidade $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$ e analisam-se os respectivos comportamentos dinâmicos. Começam por apresentar-se os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, os quais incluem a aplicação logística

($p = 2$). Após a dedução destes modelos, estuda-se o seu comportamento dinâmico utilizando a dinâmica simbólica. Estudam-se a título de exemplo, os modelos proporcionais às densidades $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$. Determina-se a constante de Feigenbaum nestes modelos unimodais, com elevada precisão nos cálculos, verificando-se a universalidade desta constante. Posteriormente, generalizam-se os resultados anteriores, caracterizando as aplicações unimodais proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$, considerando portanto uma família mais vasta de aplicações unimodais, englobando as aplicações estudadas anteriormente. Após a dedução teórica dos modelos e caracterização da respectiva família de aplicações unimodais, é feita uma análise do comportamento destas aplicações em função da variação dos parâmetros considerados, definindo um intervalo de variação para estes. Estuda-se o comportamento dinâmico destes modelos à semelhança do que havia sido feito nos capítulos anteriores, analisando-se cuidadosamente novamente a universalidade da constante de Feigenbaum, que obviamente se verifica nesta classe de aplicações uma vez que estas são unimodais. Analisam-se duas questões que merecem destaque. A primeira relacionada com o facto da condição de negatividade (com consequências dinâmicas benéficas) da derivada de Schwarz, que desempenha um papel importante na dinâmica unidimensional, ser violada num pequeno intervalo do domínio das aplicações desta família, quando $p \in]1, 2[$. A segunda, relativa ao efeito de Allee que surge naturalmente nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]2, +\infty[$, o que não acontecia na aplicação logística, e também não se verifica nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$. No final deste capítulo faz-se ainda uma caracterização do espaço de parâmetros da família de aplicações unimodais em estudo, em termos do seu comportamento dinâmico. Este espaço de parâmetros é dividido em seis regiões distintas, onde em cada uma delas, a dinâmica populacional das aplicações respectivas tem propriedades comuns que caracterizam essa região. É feita uma análise do comportamento caótico das aplicações pertencentes a cada região em

termos da respectiva entropia topológica.

No quarto capítulo deduzem-se modelos baseados em aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$, nos quais surge o efeito de Allee que não era contemplado nos modelos deduzidos no capítulo anterior para $p \in]1, 2]$. São apresentados três modelos existentes para a aplicação logística, e posteriormente, inspirando-se neles, são apresentados três modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee. Por último é feita uma análise do comportamento dinâmico destes modelos em termos de dinâmica simbólica.

No capítulo 5 define-se o conceito de poeira de Cantor aleatória. A construção deste fractal é feita através da eliminação recursiva do espaçamento central (definido entre mínimo e máximo de duas observações aleatórias uniformemente distribuídas), de cada intervalo da iteração anterior. O nome dado a este fractal é justificável, uma vez que os valores esperados dos extremos dos intervalos de cada iteração coincidem com os extremos dos intervalos da correspondente iteração na construção da poeira de Cantor determinista.

Em seguida, calcula-se a dimensão de Hausdorff (a qual representa em termos intuitivos, um parâmetro que avalia até que ponto um conjunto é denso) da poeira de Cantor aleatória, e verifica-se que apesar de a poeira de Cantor ser o “fractal médio” da poeira de Cantor aleatória, é mais denso. Verifica-se que a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor \mathcal{C} é aproximadamente 0.63093, enquanto que a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória \mathcal{F}_U é aproximadamente 0.56155.

Na sequência dos resultados obtidos, definimos de modo geral conjuntos de Cantor aleatórios \mathcal{F}_X com $X \sim Beta(p, q)$, calculámos as suas dimensões de Hausdorff, e determinámos ainda as dimensões de Hausdorff dos fractais deterministas que são os valores esperados daqueles fractais aleatórios, no mesmo sentido em que a poeira de Cantor determinista é o valor esperado da poeira de Cantor aleatória.

Verifica-se que o fenómeno é geral, que de facto a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor aleatório \mathcal{F}_X com $X \sim \text{Beta}(p, q)$, é inferior à dimensão de Hausdorff do correspondente fractal determinista. Para justificar esta diferença existente entre as dimensões de Hausdorff, encontra-se uma explicação que reforça a interpretação de dimensão de Hausdorff como reveladora da abundância de pontos do fractal.

Dinâmica simbólica em sistemas unimodais

A dinâmica simbólica é uma teoria composta por um conjunto de resultados, métodos e técnicas que tem um papel primordial no estudo das propriedades qualitativas e quantitativas dos sistemas dinâmicos. Não se sabe ao certo quando surgiu esta teoria no âmbito da história da Matemática. Embora uma das primeiras referências conhecidas seja da autoria de Hadamard em 1898, quem de facto reconheceu e divulgou os métodos simbólicos foi o matemático Morse desde 1921, quando aplicou a dinâmica simbólica ao estudo de fluxos geodésicos em variedades de curvatura negativa. A importância desta nova técnica só voltou a ser considerada em 1967, quando Smale estudou certas propriedades das órbitas de um sistema dinâmico discreto designado por ferradura de Smale, tendo associado símbolos de um dado alfabeto às regiões visitadas pelas órbitas do sistema, veja-se por exemplo Palis e Melo (1978); Guckenheimer e Holmes (1983).

Entre outros investigadores, Myberg, Metropolis, Milnor e Thurston, estudaram sistemas dinâmicos unidimensionais relevantes para o estudo de conceitos matemáticos de extrema importância e para a construção de invariantes topológicos e métricos, veja-se por exemplo Milnor e Thurston (1988).

Neste capítulo apresenta-se a teoria relativa à dinâmica simbólica nos sistemas dinâmicos unidimensionais, definindo conceitos e apresentando resultados

importantes. As metodologias apresentadas, possibilitam estudar a complexidade destes sistemas, os quais permitem modelar crescimentos populacionais em função do parâmetro malthusiano que lhes está associado. Mostra-se como a entropia topológica, invariante numérico e topológico usual para medir a complexidade topológica de um sistema dinâmico, pode ser calculada quer usando matrizes de Markov ou a teoria de *kneading*. Procede-se ainda à ordenação topológica da família de aplicações unimodais, usando a entropia topológica. Verifica-se que à medida que se aumenta o parâmetro malthusiano de um dado modelo de crescimento populacional, pertencente a esta família de aplicações unimodais, o valor da entropia topológica aumenta, o que significa que a complexidade do modelo inerente cresce correspondentemente. Apresentam-se o diagrama de bifurcação e a tão famosa constante de Feigenbaum para esta família de aplicações. Por último apresentam-se os conjuntos de Cantor para estas aplicações e algumas das suas propriedades.

2.1 Família de aplicações unimodais e dinâmica simbólica. Aplicação logística

A família de aplicações unimodais tem sido alvo de vastos estudos, principalmente desde os anos sessenta do século passado, veja-se por exemplo Sharkovsky (1964), Melo e van Strien (1989) e (1993), Graczyk e Swiatek(1999). Nesta secção apresentam-se alguns conceitos, resultados e metodologias importantes, no âmbito da dinâmica simbólica, para a família de aplicações unimodais. O objectivo principal é explicitar métodos que possibilitem avaliar a complexidade dos modelos de crescimento populacional pertencentes a esta família de aplicações, em função dos valores assumidos pelo parâmetro malthusiano. A aplicação logística, sendo um protótipo no estudo dos sistemas dinâmicos unidimensionais, é usada ao longo deste capítulo, para exemplificar e clarificar os conceitos, resultados e

metodologias fundamentais apresentados.

Considere-se uma família de aplicações unimodais com um parâmetro $r \in [m, M]$, $m \in \mathbb{R}_0^+$, onde

$$f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

satisfaz as seguintes condições:

- $f_r \in C^3([0, 1])$;
- $f_r'(x) \neq 0, \forall x \neq c$ (c é o ponto crítico de f_r);
- $f_r'(c) = 0$ e $f_r''(c) < 0$ significando que f_r é estritamente crescente em $[0, c[$ e estritamente decrescente em $]c, 1]$;
- $f_r(0) = f_r(1) = 0$;
- $f_m(c) = 0$ e $f_M(c) = 1$;
- $\forall x \neq c, S(f_r(x)) < 0$ onde $S(f_r(x)) = \frac{f_r'''(x)}{f_r'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f_r''(x)}{f_r'(x)} \right)^2$ representa a derivada de Schwarz de f_r . Note-se que $S(f_r(c)) = -\infty$.

Comece-se por estudar a família das aplicações logísticas.

2.1.1 Modelo de Verhulst. Modelo proporcional à densidade

Beta(2, 2)

Como se referiu na introdução, o modelo de Verhulst pode ser facilmente apresentado como uma aproximação concedida pela expansão em série de Taylor. Se a dimensão da população num dado instante t , $N(t)$, é uma função regular tal que

$$\frac{d}{dt}N(t) = A_0 + A_1N(t) + A_2N(t)^2 + \dots,$$

truncando os termos de ordem superior a dois, considerando-os irrelevantes para o modelo (ou seja, $A_i = 0$, para $i \geq 3$), obtem-se o modelo simplificado

$$\frac{d}{dt}N(t) = A_1N(t) + A_2N(t)^2,$$

com $A_1 > 0$ e $A_2 < 0$. De facto, $A_0 = 0$ uma vez que uma população extinta não pode produzir progénie, $A_1 > 0$ porque enquanto os recursos são abundantes a população tem tendência a crescer, e $A_2 < 0$ é uma espécie de *feedback* de retroacção do sistema alertando para a escassez dos recursos disponíveis devido ao crescimento populacional.

Esta equação é muitas vezes reescrita sob a forma clássica do modelo de Verhulst

$$\frac{d}{dt}N(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad (2.1)$$

onde K é o limite para que tende a população em equilíbrio, ou seja, é a capacidade de sustentação do meio, e r é o parâmetro malthusiano, interpretado como taxa de crescimento instantâneo. Saliente-se que $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ representa o efeito regulador da retroacção negativa. O modelo de Verhulst (2.1), representa a taxa de crescimento da população $\frac{d}{dt}N(t)$ ao longo do tempo t . Note-se que

$$\frac{\frac{d}{dt}N(t)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

é a taxa de crescimento per-capita. Pode observar-se na Figura 2.1, a variação da taxa de crescimento da população $\frac{dN(t)}{dt}$ à medida que a dimensão populacional $N(t)$ aumenta até ao limite sustentável, considerando $K = 10$.

Quando $\frac{N(t)}{K} \cong 0$, ou seja, quando a população está longe do limite sustentável, e os recursos ainda abundam permitindo a expansão populacional, tem-se

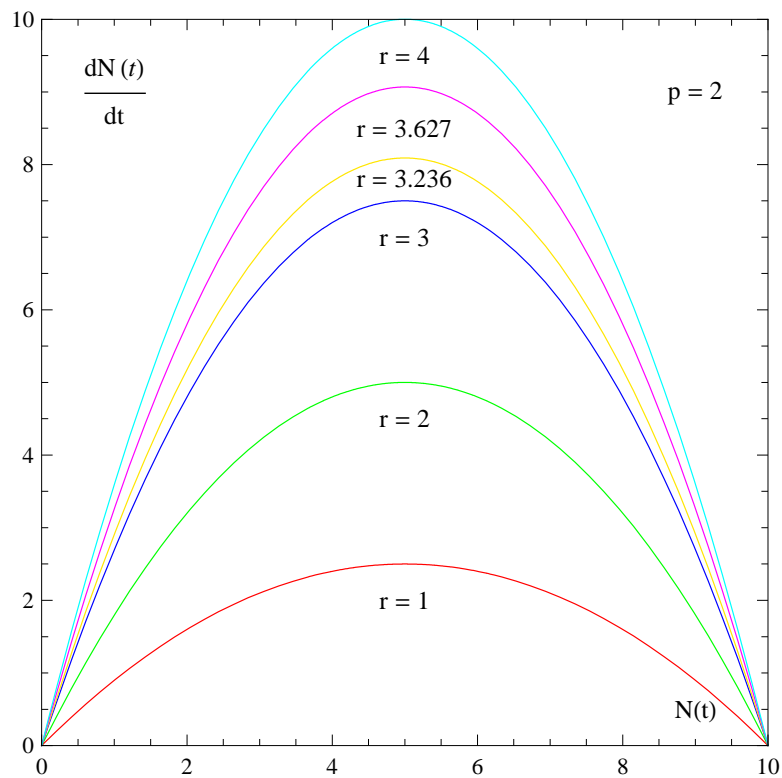


Figura 2.1: Taxas de crescimento populacional no modelo logístico

$$\frac{d}{dt}N(t) \cong rN(t)$$

$$\iff \frac{\frac{d}{dt}N(t)}{N(t)} \cong r$$

$$\iff \frac{d}{dt} \ln [N(t)] \cong r$$

$$\iff N(t) \cong Ce^{rt}, \text{ com } C \text{ constante}$$

pois que a população, nesta fase inicial (ou após ter sido dizimada por uma catástrofe), tem um crescimento exponencial.

Quando $N(t)$ se aproxima do valor K , verifica-se um abrandamento considerável

do crescimento populacional. Assim, o termo $1 - \frac{N(t)}{K}$ é uma retroação negativa, uma vez que o limite sustentável está quase a ser atingido, e os recursos disponíveis são escassos para o número de indivíduos na população, pelo que o ritmo de crescimento diminui.

A solução analítica geral da equação diferencial (2.1), designada por família de aplicações logísticas, é a seguinte

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K - 1)e^{-rt}}. \quad (2.2)$$

A variação da dimensão populacional $N(t)$ ao longo do tempo t , dada por (2.2), considerando a título de exemplo que a capacidade de sustentação do meio, K , é igual a 10, pode observar-se no gráfico da Figura 2.2.

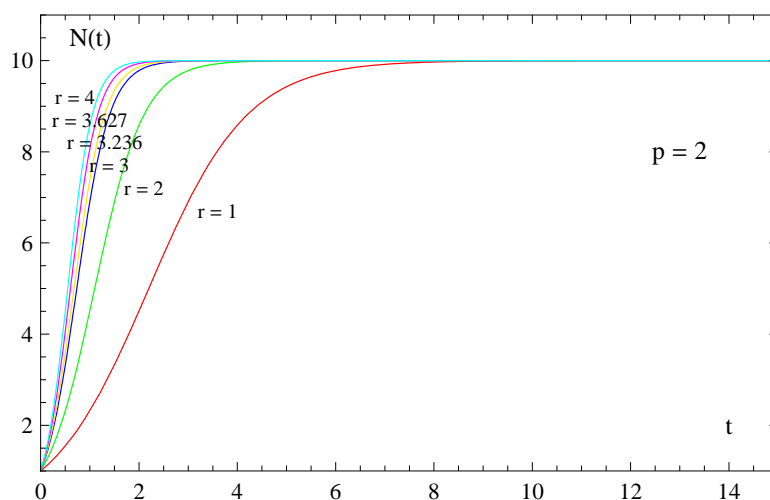


Figura 2.2: Dimensões populacionais no modelo logístico

Em muitos estudos de crescimento de populações naturais, esta solução aproximada tem sido usada com sucesso para determinar a dimensão dessas populações $N(t)$ num dado instante t .

Por outro lado, com o que foi atrás referido, constata-se que a parábola logística é uma alternativa relevante ao modelo de regressão linear, o qual não se adequa para modelar nenhum crescimento associado a um fenómeno natural; o que é esperado é

que numa fase inicial haja um crescimento rápido, que seja linear numa fase central e que esse crescimento abrande depois a partir de certa altura.

A abordagem diferencial anteriormente descrita, por admitir implicitamente que o crescimento da população é contínuo, está sujeita a crítica, já que o crescimento da maioria das espécies tem uma componente sazonal, há também interações entre espécies predador-presa, e factores de outro tipo, que fazem com que os crescimentos populacionais tenham que ser avaliados por modelos mais complexos. Assim, é natural pensar-se numa substituição do modelo de Verhulst diferencial, por um modelo discretizado, que numa fase inicial use a equação às diferenças

$$N(t_{n+1}) = rN(t_n), \text{ com } n \in \mathbb{N}_0$$

cuja solução é dada por

$$N(t_n) = N_0 r^n, \text{ com } N_0 \text{ constante.}$$

Para $r > 1$, a solução tende para $+\infty$ com $n \rightarrow +\infty$, o que mostra que este modelo só pode ser válido numa fase de explosão demográfica. Mas, à medida que a população cresce tem que ser considerada uma retroacção reguladora, pelo que a equação de Verhulst discretizada é apresentada da seguinte forma

$$N(t_{n+1}) = f_r(N(t_n)) = rN(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right).$$

Considerando $x_n = \frac{N(t_n)}{K}$, esta equação simplifica-se tendo-se então o modelo logístico discretizado

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \text{ com } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Esta abordagem discreta, obtida substituindo a equação diferencial pela equação às diferenças, pode ser usada para populações com gerações não sobrepostas. A partir de um valor inicial x_0 , obtem-se uma sequência infinita de valores, usando recursivamente a equação anterior. A discretização do modelo, permite assim um

tratamento em termos de dinâmica simbólica, cujos métodos têm potencialidades que possibilitam uma caracterização exaustiva desses modelos em termos do seu comportamento dinâmico. Relativamente à família das aplicações logísticas (modelos de Verhulst discretizados), com o parâmetro $r \in]0, 4]$, considerou-se $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f(x) = rx(1 - x). \quad (2.4)$$

O modelo (2.4) é proporcional à função densidade de probabilidade do modelo beta com ambos os parâmetros de forma iguais a dois, $Beta(2, 2)$, veja-se por exemplo Pestana e Velosa (2008). De facto, se X for uma variável aleatória com distribuição $Beta(2, 2)$, ou seja, se $X \sim Beta(2, 2)$, então a função densidade de probabilidade dessa variável aleatória X é dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(2, 2)} x(1 - x)I_{(0,1)}(x), \quad (2.5)$$

com

$$B(2, 2) = \int_0^1 t(1 - t)dt = \frac{1}{6}. \quad (2.6)$$

Outros modelos proporcionais a funções densidade de probabilidade de $X \sim Beta(p, 2)$,

$$f(x) = \frac{1}{B(p, 2)} x^{p-1}(1 - x)I_{(0,1)}(x), \quad (2.7)$$

com

$$B(p, 2) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)dt, \forall p > 0. \quad (2.8)$$

poderão ser interessantes para modelar crescimentos populacionais relativos a populações com uma evolução à qual o modelo de Verhulst não se ajuste de forma adequada, como se explica mais adiante. Por exemplo, relativamente ao crescimento de populações humanas, o modelo logístico não tem dado grande resultado. O

ajustamento deste modelo nesse caso, apenas é bom numa fase inicial, onde o crescimento é quase exponencial.

O estudo numérico, usando o método do ponto fixo, do comportamento limite desta “parábola logística” está no centro de desenvolvimentos importantes no âmbito dos sistemas dinâmicos.

2.1.2 Dinâmica Simbólica

Nesta secção, são apresentados os conceitos e os resultados principais de dinâmica simbólica, que serão posteriormente utilizados para o estudo dinâmico das aplicações unimodais definidas na secção 2.1, veja-se por exemplo os trabalhos de Sousa Ramos et al. (1984), e de Milnor e Thurston (1988).

Considere-se para cada valor do parâmetro r , a órbita do ponto crítico

$$O_r(c) = \{x_k : x_k = f_r^k(c), k \in \mathbb{N}_0\}$$

definida por um processo iterativo, onde

$$x_k = f_r^k(c) = f_r(x_{k-1}), \text{ com } k \in \mathbb{N}_0.$$

Se $f_r(x^*) = x^*$ então diz-se que x^* é um ponto fixo de f_r .

Qualquer ponto x é periódico de período $n \in \mathbb{N}$, se a condição $f_r^n(x) = x$ é satisfeita com n mínimo, ou por outras palavras, um ponto x é periódico de período n se x for um ponto fixo de f_r^n (n -ésima composição da função f_r consigo própria).

Do ponto de vista matemático, a sequência de órbitas numa aplicação unimodal f_r , a qual compreende órbitas periódicas, eventualmente periódicas e aperiódicas, também é descrita pelo Teorema de Sharkovsky.

Definição 1. ¹ A ordenação no conjunto dos números inteiros positivos

$$\begin{aligned}
 1 &< 2 < 4 < 8 < 16 < \dots < 2^m < \dots \\
 \dots &< 2^m \cdot 9 < 2^m \cdot 7 < 2^m \cdot 5 < 2^m \cdot 3 < \dots \\
 \dots &< 2^2 \cdot 9 < 2^2 \cdot 7 < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \dots \\
 \dots &< 2 \cdot 9 < 2 \cdot 7 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \dots \\
 \dots &< 9 < 7 < 5 < 3
 \end{aligned}$$

é designada por Ordem de Sharkovsky e é denotada por $<$.

Teorema 1. ² Sendo f_r uma função contínua em $I \subset \mathbb{R}$ e supondo que f_r tem um ponto periódico de período q . Se $p < q$ na ordenação de Sharkovsky, então f_r tem também um ponto periódico de período p .

A demonstração deste teorema pode ser consultada em Sharkovsky (1964), e em Collet e Eckmann (1980).

Como corolário do Teorema de Sharkovsky tem-se que se a aplicação f_r tem período 3 então ela tem também que ter todos os períodos n , onde n é um número inteiro qualquer. Este é o famoso Teorema de Li e Yorke, (1975), que diz: “Período três implica caos”.

Sendo $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação diferenciável, com derivada contínua no intervalo, pode definir-se um número λ que representa a estabilidade de cada ponto periódico x_0 com período n , do seguinte modo:

$$\lambda(x_0) = (f_r^n)'(x_0).$$

Tem-se então

- se $|\lambda(x_0)| \neq 1$, x_0 é denotado por ponto periódico hiperbólico e varia suavemente com r ;

¹ Sharkovsky (1964).

² Sharkovsky (1964).

- se $|\lambda(x_0)| < 1$, f_r é uma aplicação contractiva numa vizinhança de x_0 e este ponto periódico diz-se estável ou atractivo;
- se $|\lambda(x_0)| > 1$, f_r é uma aplicação repulsiva ou expansiva numa vizinhança de x_0 e este ponto periódico diz-se instável ou repulsivo;
- se $|\lambda(x_0)| = 1$, x_0 é denotado por ponto periódico neutro ou não hiperbólico; f_r bifurca no ponto periódico x_0 .

Note-se que, no caso particular em que x_0 é periódico de período 1, então x_0 é um ponto fixo de f_r , ou seja neste caso, $x_0 = x^*$.

Com o objectivo de estudar as propriedades topológicas das órbitas, associa-se a cada órbita $O_r(c)$ uma sequência de símbolos, correspondente ao itinerário do ponto crítico, denotado por

$$S^{(r)} = S_0^{(r)} S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} \dots, \text{ com } k \in \mathbb{N}_0$$

onde $S_k^{(r)}$ pertence ao alfabeto $\mathcal{A} = \{L, C, R\}$, com cada símbolo definido por

$$S_k^{(r)} = \begin{cases} L & \text{se } f_r^k(c) < c \\ C & \text{se } f_r^k(c) = c \\ R & \text{se } f_r^k(c) > c \end{cases} .$$

Note-se que, o alfabeto \mathcal{A} é um conjunto ordenado de símbolos, correspondente aos intervalos de monotonicidade e ao ponto crítico da aplicação f_r . A ordem da recta real induz naturalmente uma ordem no alfabeto \mathcal{A} , tendo-se

$$L \prec C \prec R.$$

Designa-se por $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ o espaço de todas as sequências simbólicas do alfabeto \mathcal{A} .

A dinâmica da aplicação f_r é completamente caracterizada pela sequência simbólica $S^{(r)}$ associada ao itinerário do ponto crítico, para cada valor do parâmetro r . A órbita $O_r(c)$ pode ser periódica, eventualmente periódica ou aperiódica. Neste trabalho, atendendo às técnicas utilizadas, consideraram-se apenas órbitas

periódicas. Para o estudo de órbitas eventualmente periódicas, usam-se técnicas análogas aquelas que seguidamente são expostas, veja-se por exemplo Rocha (2003). O estudo de órbitas aperiódicas pode ser feito recorrendo-se a técnicas mais complexas, veja-se por exemplo Alves e Ramos (1999).

Uma órbita periódica de período k , associada ao ponto crítico, é caracterizada por uma sequência simbólica que se repete periodicamente

$$CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_{k-1}^{(r)}CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_{k-1}^{(r)}CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots,$$

a qual habitualmente se denota por $S^{(r)} = (CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_{k-1}^{(r)})^\infty \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Esta órbita também é designada por sequência de *kneading* da aplicação.

2.2 Partições de Markov e entropia topológica

As partições de Markov foram introduzidas por Sinai (1994) para difeomorfismos de Anosov. As aplicações expansivas admitem partições de Markov, cuja existência está implícita nos trabalhos desenvolvidos por Bowen (1975). Para uma abordagem mais detalhada sobre este assunto veja-se Ruelle (1978). Neste trabalho considera-se a existência de partições de Markov, as quais são caracterizadas pela órbita do ponto crítico da aplicação f_r , Sousa Ramos et al. (1984).

Considera-se o conjunto dos pontos correspondentes à órbita periódica de período k do ponto crítico, o qual determina a partição de Markov do intervalo $I = [0, 1]$ num número finito de subintervalos, denotada por

$$\mathcal{P}_I = \{I_1, I_2, \dots, I_{k-1}\}.$$

Note-se que, a aplicação f_r determina uma única partição \mathcal{P}_I , no entanto o contrário não é verdadeiro.

A aplicação f_r e a partição de Markov associada induzem um *subshift* do tipo finito cuja matriz de transição de Markov $A = [a_{ij}]$, do tipo $(k-1) \times (k-1)$, é

definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \text{int}I_j \subseteq f_r(\text{int}I_i) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Usualmente o *subshift* é denotado por $(\sum_{\mathcal{A}}, \sigma)$, onde σ é a aplicação *shift* em $\sum_{k-1}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$\sigma(S_1 S_2 \dots) = S_2 S_3 \dots$$

com $\sum_{k-1}^{\mathbb{N}} = \{1, \dots, k-1\}$ correspondente aos $k-1$ estados do *subshift*. Para uma abordagem mais pormenorizada sobre *subshifts* do tipo finito e para o Teorema de Perron-Frobenius sobre o raio espectral da matriz de transição de Markov, pode consultar-se Walters, (1981). No entanto, recorde-se que a matriz de transição de Markov tem um valor próprio positivo dominante com valor $e^{h_{top}}$, igual ao raio espectral, onde $h_{top} > 0$ é a entropia topológica do *subshift* $(\sum_{\mathcal{A}}, \sigma)$. Se a matriz A é irredutível então este valor próprio é simples e é o único valor próprio cujo valor absoluto é $e^{h_{top}}$. Para além disso, os correspondentes vectores próprios direito e esquerdo permitem construir a medida de Parry, ou seja, a medida de entropia máxima, Parry, (1964).

A complexidade topológica de um sistema dinâmico é habitualmente medida através da sua entropia topológica, Adler et al., (1965). Este invariante numérico e topológico está associado à taxa de crescimento dos vários estados do sistema dinâmico. A entropia topológica de uma aplicação f_r no espaço de fases, é definida no espaço simbólico associado, como a taxa de crescimento assintótico das palavras (sequências simbólicas finitas) admissíveis em relação ao comprimento das palavras, isto é,

$$h_{top}(f_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(n)}{n}$$

onde $N(n)$ é o número de palavras admissíveis de comprimento n , Misiurewicz e

Szlenk (1980). A entropia topológica pode também definir-se por

$$h_{top}(f_r) = \sup_{\mu \in M_I(f_r)} h_{\mu}(f_r)$$

onde h_{μ} é a entropia métrica e o supremo é calculado no conjunto de todas as medidas invariantes $\mu \in M_I(f_r)$ de f_r . A igualdade anterior é conhecida pelo princípio variacional da entropia topológica. Em particular, para um *subshift* do tipo finito, o supremo é dado pela medida de Parry, que também se designa por medida de máxima entropia de Parry, seja μ_{max} . Assim, tem-se $h_{top}(f_r) = h_{\mu_{max}}(f_r)$, veja-se por exemplo Parry (1964) e Katok e Hasselblatt (1995).

Por outro lado, a entropia métrica pode ser considerada como uma medida estatística do comportamento irregular do sistema. A probabilidade dos acontecimentos é pesada em função da medida invariante escolhida. A ligação entre estes dois invariantes, topológico e métrico, é estabelecida em termos das medidas invariantes associadas. A entropia métrica e a entropia topológica são alguns dos invariantes que quantificam o comportamento irregular ou caótico dos sistemas dinâmicos.

Para um *subshift* do tipo finito, unidireccional ou bidireccional, descrito pela matriz de transição de Markov A , tem-se

$$h_{top}(\sigma) = \ln(\lambda_A)$$

onde λ_A é o raio espectral da matriz A , veja-se o Teorema de Parry, em Parry, (1964), e também Maak, (1963) e Walters, (1981).

Apresenta-se de seguida um exemplo que ilustra os conceitos acima expostos.

Exemplo 1. *Seja $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família de aplicações logísticas com um parâmetro $r \in]0, 4]$, definida por $f_r(x) = rx(1 - x)$. Esta aplicação enquadra-se na família de aplicações unimodais descrita na secção 2.1. Note-se que, o ponto crítico é $c = \frac{1}{2}$, para todo o valor do parâmetro r .*

Considerando-se $r = 3.627\dots$, tem-se a sequência simbólica $(CRLR^3)^{\infty}$. A órbita periódica de período 6 e a respectiva partição de Markov são apresentadas na

Figura 2.3.

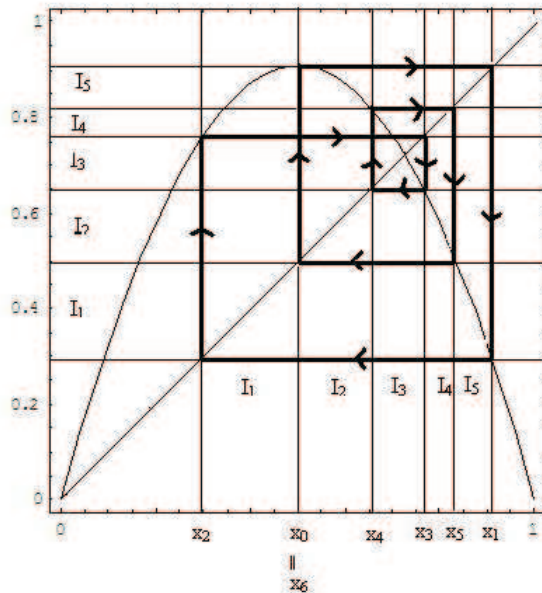


Figura 2.3: Órbita periódica e partição de Markov da sequência $(CRLR^3)^\infty$

A matriz de transição de Markov correspondente é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

O polinómio característico da matriz A é

$$p(t) = \text{Det}(A - tI) = 1 - t - t^2 + t^3 - t^4 + t^5 = (-1 + t)(-1 + t^2 + t^4)$$

onde o raio espectral da matriz A é $\lambda_A = 1.27202\dots$, pelo que a entropia topológica é $h_{\text{top}}(f_{3.627}) = \ln(1.27202\dots) = 0.240606\dots$

2.3 Teoria de *kneading* para aplicações unimodais

A teoria de *kneading* foi introduzida por Milnor e Thurston, (1988), para aplicações contínuas e monótonas por troços no intervalo. Outros trabalhos sobre a teoria do *kneading* foram feitos por diversos autores, veja-se por exemplo Alves e Ramos (1999). Para aplicações expansivas descontínuas com buracos veja-se por exemplo Rocha (2003).

Esta teoria baseia-se nos conceitos de incremento de *kneading* e de matriz de *kneading*. Os incrementos de *kneading* são séries de potências formais que medem a descontinuidade das coordenadas invariantes calculadas sobre os pontos críticos.

Nesta secção, apresenta-se a teoria de *kneading* para aplicações unimodais. Para cada símbolo $S_i^* \in \mathcal{A} = \{C, L, R\}$, com $i = 0, 1, 2$, respectivamente, define-se o sinal associado, denotado por $\epsilon(S_i^*)$. Tem-se para $i = 0$, $S_0^* = C$ e $\epsilon(S_0^*) = \epsilon(C) = 0$ e para $i = 1, 2$ designe-se o respectivo sinal por

$$\epsilon(S_i^*) = \begin{cases} -1 & \text{se } f_r \text{ é decrescente em } I_i \\ 1 & \text{se } f_r \text{ é crescente em } I_i \end{cases}.$$

Podem calcular-se os números seguintes

$$\tau_k = \prod_{n=0}^{k-1} \epsilon(S_n^{(r)}) = \tau_{k-1} \epsilon(S_{k-1}^{(r)})$$

para $k \in \mathbb{N}$, e tome-se $\tau_0 = 1$. Note-se que $S_n^{(r)}$ representa o n -ésimo símbolo pertencente ao alfabeto \mathcal{A} , de uma sequência simbólica finita, correspondente a um dado valor do parâmetro r , $S^{(r)} = S_0^{(r)} S_1^{(r)} \dots S_{k-1}^{(r)}$, com $n \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

A coordenada invariante da sequência simbólica $S^{(r)} = C S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} \dots$, correspondente a um dado valor do parâmetro r , associada ao ponto crítico c , é dada por

$$\theta_c^{(r)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k t^k S_k^{(r)}.$$

O incremento de *kneading* do ponto crítico c é definido por

$$\nu_c^{(r)}(t) = \theta_{c^+}^{(r)}(t) - \theta_{c^-}^{(r)}(t)$$

com $\theta_{c^\pm}^{(r)}(t) = \lim_{x \rightarrow c^\pm} \theta_x^{(r)}(t)$, onde c^- e c^+ são os pontos laterais limites ao ponto crítico. Para calcular estes limites inferior e superior da coordenada invariante do ponto crítico, deve definir-se primeiro o conceito de paridade de uma sequência simbólica finita.

Definição 2.³ A paridade de uma sequência simbólica finita $S^{(r)} = CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)}$, associada a um dado valor do parâmetro r , de símbolos pertencentes ao alfabeto \mathcal{A} , é dada por

$$p(S^{(r)}) = (-1)^{\#_R(S^{(r)})}$$

onde $\#_R(S^{(r)})$ representa o número de símbolos da sequência $S^{(r)}$, correspondentes aos subintervalos de monotonicidade onde a aplicação é decrescente. Diz-se que a paridade de $S^{(r)}$ é

$$\begin{cases} \text{par,} & \text{se } p(S^{(r)}) = 1 \\ \text{ímpar,} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note-se que, na Definição 2, $\#_R(S^{(r)})$ é o número de vezes que o símbolo R aparece na sequência $S^{(r)}$.

Para determinar os limites laterais da coordenada invariante de uma determinada sequência simbólica periódica $S^{(r)} = (CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)})^\infty$, de período $k + 1$, associada ao ponto crítico c , começa por averiguar-se a paridade da sequência simbólica finita associada $CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)}$, denotada por $S_f^{(r)}$:

- Se a paridade desta sequência for par, então substitui-se C por L na sequência $\sigma(S_f^{(r)})$ e os itinerários dos pontos c^- e c^+ que permitem depois calcular

³ Sousa Ramos et al. (1984).

os referidos limites laterais da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S^{(r)}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} it(f_r(c^-)) &= L \left(S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} L \right)^\infty = S_0^- S_1^- \dots S_i^- \dots \\ it(f_r(c^+)) &= R \left(S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} L \right)^\infty = S_0^+ S_1^+ \dots S_i^+ \dots \end{aligned}$$

- Se a paridade desta sequência for ímpar, então substitui-se C por R na sequência $\sigma \left(S_f^{(r)} \right)$ e os itinerários dos pontos c^- e c^+ que permitem depois calcular os referidos limites laterais da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S_f^{(r)}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} it(f_r(c^-)) &= L \left(S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} R \right)^\infty = S_0^- S_1^- \dots S_i^- \dots \\ it(f_r(c^+)) &= R \left(S_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} R \right)^\infty = S_0^+ S_1^+ \dots S_i^+ \dots \end{aligned}$$

Os limites laterais da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S^{(r)}$ são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \theta_{c^-}^{(r)}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i^- t^i S_i^- \\ \theta_{c^+}^{(r)}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i^+ t^i S_i^+ \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_i^- &= \prod_{n=0}^{i-1} \epsilon(S_n^-) = \tau_{i-1}^- \epsilon(S_{i-1}^-) \\ \tau_i^+ &= \prod_{n=0}^{i-1} \epsilon(S_n^+) = \tau_{i-1}^+ \epsilon(S_{i-1}^+) \end{aligned}$$

para $i \in \mathbb{N}$, e tome-se $\tau_0^- = \tau_0^+ = 1$. A partir destes limites calcula-se então o incremento de *kneading* $\nu_c^{(r)}(t)$. Separando os termos associados com os símbolos $S_1^* = L$ e $S_2^* = R$ do alfabeto \mathcal{A} , este incremento $\nu_c^{(r)}(t)$ é então dado por

$$\nu_c^{(r)}(t) = M_{11}(t)L + M_{12}(t)R.$$

A matriz de *kneading* é definida por

$$M(t) = [M_{11}(t) \quad M_{12}(t)].$$

A partir desta matriz, calculam-se os determinantes $D_j(t)$, com $j = 1, 2$, das submatrizes da matriz $M(t)$, que resultam de eliminar a coluna j da matriz $M(t)$. Note-se que, neste caso, tem-se então

$$D_1(t) = M_{12}(t) \text{ e } D_2(t) = M_{11}(t),$$

e o determinante de *kneading* é dado por

$$D(t) = \frac{(-1)^{j+1} D_j(t)}{1 - \epsilon(S_j^*) t}, \text{ com } j = 1, 2.$$

Como $\epsilon(S_1^*) = \epsilon(L) = 1$ e $\epsilon(S_2^*) = \epsilon(R) = -1$, tem-se que

$$D(t) = \frac{D_1(t)}{1-t} = -\frac{D_2(t)}{1+t}.$$

Definição 3.⁵ Para cada sequência simbólica periódica $S^{(r)} = (CS_1^{(r)} S_2^{(r)} \dots S_{p-1}^{(r)})^\infty$ de período p , associada a um valor do parâmetro r , define-se o polinómio característico associado a $S^{(r)}$, por

$$d_{S^{(r)}}(t) = D_{S^{(r)}}(t) (1 - \tau_p t^p)$$

onde

$$D_{S^{(r)}}(t) = \frac{1 + \tau_1 t + \tau_2 t^2 + \dots + \tau_{p-1} t^{p-1}}{1 - \tau_p t^p}$$

é o determinante de *kneading*, com $\tau_k = (-1)^{N_k}$, onde N_k é o número de símbolos R até ao k -ésimo símbolo de $\sigma(S^{(r)})$.

Nota 1. Na secção anterior, foram apresentadas várias formas de determinar a entropia topológica de um sistema dinâmico. Uma forma alternativa de definir este invariante usando a teoria do *kneading* é dada por $h_{top} = \ln\left(\frac{1}{t_{min}}\right)$, onde

$$t_{min} = \min \left\{ t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : D_{S^{(r)}}(t) = 0 \right\},$$

veja-se Sousa Ramos et al., (1984).

⁴ Milnor e Thurston, (1988).

⁵ Sousa Ramos et al. (1984).

Para ilustrar os conceitos acima descritos apresenta-se o exemplo seguinte, no qual é usada a mesma sequência simbólica periódica usada no Exemplo 1, para mostrar que, embora o cálculo da entropia topológica possa ser feito quer utilizando matrizes de Markov quer a teoria de *kneading*, o resultado obtido é o mesmo.

Exemplo 2. Seja $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família de aplicações logísticas com um parâmetro $r \in]0, 4]$, definida por

$$f_r(x) = rx(1 - x)$$

onde o ponto crítico é $c = \frac{1}{2}$. Considerando-se $r = 3.627\dots$, tem-se a sequência simbólica $S^{(3.627)} = (CRLR^3)^\infty$. Portanto para determinar os limites laterais da coordenada invariante desta sequência, associada ao ponto crítico c , começa por averiguar-se a paridade da sequência simbólica finita associada $S^{(3.627)} = (CRLR^3)^\infty$. Como a paridade desta sequência é par, então substitui-se C por L na sequência $\sigma(S^{(3.627)})$ e os itinerários dos pontos c^- e c^+ que permitem depois calcular os referidos limites laterais da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S^{(3.627)}$ são dados respectivamente por

$$it(f_{3.627}(c^-)) = L(RLR^3L)^\infty = LRLRRRLRLRRRL\dots = S_0^- S_1^- \dots S_i^- \dots,$$

$$it(f_{3.627}(c^+)) = R(RLR^3L)^\infty = RRLRRRLRLRRRL\dots = S_0^+ S_1^+ \dots S_i^+ \dots$$

O limite inferior da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S^{(3.627)}$

é dado por

$$\begin{aligned}
 \theta_{c^-}^{(3.627)}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i^- t^i S_i^- \\
 &= L + Rt - Lt^2 - Rt^3 + Rt^4 - Rt^5 + Lt^6 + \\
 &\quad Rt^7 - Lt^8 - Rt^9 + Rt^{10} - Rt^{11} + Lt^{12} + \dots \\
 &= L + t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5) + \\
 &\quad t^7(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5) + \dots \\
 &= L + t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)(1 + t^6 + t^{12} + t^{18} + \dots) \\
 &= L + \frac{t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)}{1 - t^6}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, o limite superior da coordenada invariante da sequência simbólica periódica $S^{(3.627)}$ é dado por

$$\begin{aligned}
 \theta_{c^+}^{(3.627)}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i^+ t^i S_i^+ \\
 &= R - Rt + Lt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Rt^5 - Lt^6 - \\
 &\quad Rt^7 + Lt^8 + Rt^9 - Rt^{10} + Rt^{11} - Lt^{12} + \dots \\
 &= R - t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5) - \\
 &\quad t^7(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5) - \dots \\
 &= R - t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)(1 + t^6 + t^{12} + t^{18} + \dots) \\
 &= R - \frac{t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)}{1 - t^6}.
 \end{aligned}$$

O incremento de kneading do ponto crítico é então dado por

$$\begin{aligned}
 \nu_c^{(3.627)}(t) &= \theta_{c^+}^{(3.627)}(t) - \theta_{c^-}^{(3.627)}(t) \\
 &= R - \frac{t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)}{1 - t^6} - \\
 &\quad L - \frac{t(R - Lt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Lt^5)}{1 - t^6} \\
 &= \frac{-1 + 2t^2 - t^6}{1 - t^6} L + \frac{1 - 2t + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6}{1 - t^6} R.
 \end{aligned}$$

Logo a matriz de kneading é dada por

$$M(t) = \begin{bmatrix} \frac{-1 + 2t^2 - t^6}{1 - t^6} & \frac{1 - 2t + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6}{1 - t^6} \end{bmatrix}.$$

Donde se tem

$$D_1(t) = M_{12}(t) = \frac{1 - 2t + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6}{1 - t^6} = \frac{(t - 1)^2 (-t^4 - t^2 + 1)}{1 - t^6}$$

e

$$D_2(t) = M_{11}(t) = \frac{-1 + 2t^2 - t^6}{1 - t^6} = \frac{(t - 1)(t + 1)(-t^4 - t^2 + 1)}{1 - t^6}.$$

O determinante de kneading é dado por

$$D_S(t) = \frac{D_1(t)}{1 - t} = \frac{(t - 1)^2 (-t^4 - t^2 + 1)}{(1 - t^6)(1 - t)} = \frac{(t - 1)(t^4 + t^2 - 1)}{1 - t^6}$$

ou

$$D_S(t) = -\frac{D_2(t)}{1 + t} = \frac{-(t - 1)(t + 1)(-t^4 - t^2 + 1)}{(1 - t^6)(1 + t)} = \frac{(t - 1)(t^4 + t^2 - 1)}{1 - t^6}.$$

O polinómio $d_{S(3.627)}(t)$ associado à sequência simbólica periódica $(CRLR^3)^\infty$ é dado

por

$$d_{S(3.627)}(t) = (t - 1)(t^4 + t^2 - 1) = 1 - t - t^2 + t^3 - t^4 + t^5.$$

Assim, a menor raiz real positiva da equação $D(t) = 0$ é $t_{min} = 0.786151\dots$,

pelo que o valor da entropia topológica, associado à sequência simbólica periódica $S(3.627) = (CRLR^3)^\infty$, é dado por $h_{top}(f_{3.627}) = \ln\left(\frac{1}{0.786151}\right) = \ln(1.27202\dots) = 0.240606\dots$

2.4 Ordenação topológica da família das aplicações unimodais

Nesta secção apresentam-se mais alguns conceitos e resultados fundamentais, para se proceder à ordenação da família das aplicações unimodais f_r em função da respectiva complexidade, medida em termos de entropia topológica. Estas aplicações podem ser usadas como modelos de crescimento populacional, e dependem do parâmetro malthusiano r , que representa a taxa de crescimento instantâneo. À medida que se aumenta o valor desta taxa, a complexidade dos modelos aumenta. Assim, apresenta-se uma forma de representar estes modelos em árvore, Sousa Ramos et al. (1984), que permite uma ordenação da complexidade dos mesmos.

Pode estabelecer-se uma relação de ordem entre duas sequências simbólicas distintas, $S^{(r_a)}$ e $S^{(r_b)}$, associadas a diferentes valores do parâmetro r , constituídas por elementos do alfabeto \mathcal{A} . A ordem depende da paridade da sequência finita $S^{(*)}$, constituída pelo bloco comum às sequências $S^{(r_a)}$ e $S^{(r_b)}$.

Definição 4. ⁶ *Dadas duas sequências simbólicas*

$$S^{(r_a)} = CS_1^{(r_a)}S_2^{(r_a)} \dots S_k^{(r_a)} \dots \quad e \quad S^{(r_b)} = CS_1^{(r_b)}S_2^{(r_b)} \dots S_k^{(r_b)} \dots$$

e considerando $S^{(*)} = CS_1^{(r_a)}S_2^{(r_a)} \dots S_{k-1}^{(r_a)} = CS_1^{(r_b)}S_2^{(r_b)} \dots S_{k-1}^{(r_b)}$ o bloco comum a $S^{(r_a)}$ e $S^{(r_b)}$, a ordem \prec em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, é definida por $S^{(r_a)} \prec S^{(r_b)}$ se e só se

$$S_k^{(r_a)} \prec S_k^{(r_b)} \quad e \quad p(S^{(*)}) = 1 \quad \text{ou} \quad S_k^{(r_b)} \prec S_k^{(r_a)} \quad e \quad p(S^{(*)}) = -1$$

para algum inteiro positivo k .

Note-se que, na definição anterior, a relação de ordem na posição k depende da paridade da sequência $S^{(*)}$, ou seja, do número de vezes que o símbolo R ocorre nessa sequência, tendo-se especificamente

⁶ Sousa Ramos et al. (1984)

$$\left\{ \begin{array}{l} L \prec C \prec R \text{ na posição } k, \text{ se } \#_R(S^{(*)}) \text{ é par} \\ R \prec C \prec L \text{ na posição } k, \text{ se } \#_R(S^{(*)}) \text{ é ímpar} \end{array} \right.$$

Definição 5. ⁷ Seja σ a aplicação shift em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Diz-se que uma sequência associada a um valor do parâmetro r , dada por $S^{(r)} = CS_1^{(r)}S_2^{(r)} \dots S_k^{(r)} \dots$, é admissível se e só se

$$\sigma^i(S^{(r)}) = S_i^{(r)}S_{i+1}^{(r)} \dots \prec \sigma(S^{(r)}), \forall i \in \mathbb{N}.$$

O exemplo seguinte ilustra os conceitos já estabelecidos.

Exemplo 3. Relativamente à sequência simbólica periódica $(CRLR^3L)^\infty$, mostra-se que esta não é admissível. Note-se que a sequência considerada é obtida da sequência $(CRLR^3)^\infty$ por junção do símbolo L . Tem-se que,

$$\sigma^i(CRLR^3L) = \{RLR^3LC, LR^3LCR, R^3LCRL, R^2LCRLR, RLCRLR^2, LCRLR^3, CRLR^3L\}, \text{ com } i \in \{1, 2, \dots, 7\}.$$

Analisa-se a ordem entre as sequências de $\sigma^i(CRLR^3L)$ e a sequência inicial considerada.

- $LR^3LCR \prec RLR^3LC$, neste caso não há bloco comum às duas sequências, assim compara-se o primeiro símbolo de ambas, de acordo com a ordem $L \prec C \prec R$, verificando-se a ordem pretendida.
- $R^3LCRL \prec RLR^3LC$, o bloco comum das duas sequências é R , assim compara-se o segundo símbolo de ambas, de acordo com a ordem $R \prec C \prec L$, porque a sequência comum tem um R , logo tem paridade ímpar. Assim verifica a ordem.
- $R^2LCRLR \prec RLR^3LC$, o bloco comum das duas sequências é também R pelo que o caso é igual ao anterior.

⁷ Sousa Ramos et al. (1984).

2.4. Ordenação topológica da família das aplicações unimodais

- $RLCRLR^2 \prec RLR^3LC$, o bloco comum das duas sequências é RL , assim compara-se o terceiro símbolo de ambas, de acordo com a ordem $R \prec C \prec L$, porque a sequência comum tem um R , logo tem paridade ímpar. Neste caso a ordem estudada não se verifica.

Assim, a sequência $(CRLR^3L)^\infty$ não é admissível.

Considere-se $\Sigma_{\mathcal{A}}^* \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$, o conjunto das sequências simbólicas admissíveis relativamente à relação de ordem \prec definida anteriormente. O par $(\Sigma_{\mathcal{A}}^*, \prec)$ pode ser representado através de uma estrutura em árvore, onde cada vértice corresponde a uma sequência de *kneading* correspondente à respectiva sequência simbólica periódica admissível. A cada ramo na árvore corresponde uma nova iteração, onde está associado um novo símbolo L ou R , dependendo de quando o valor iterado fica à esquerda ou à direita do ponto crítico. Deste modo, a ordenação ramificada de cada vértice é dada por

$$\begin{array}{c}
 (CS_1S_2 \dots S_k)^\infty \\
 L \swarrow \quad \searrow R \\
 (CS_1S_2 \dots S_kL)^\infty \qquad (CS_1S_2 \dots S_kR)^\infty
 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c}
 (CS_1S_2 \dots S_k)^\infty \\
 R \swarrow \quad \searrow L \\
 (CS_1S_2 \dots S_kR)^\infty \qquad (CS_1S_2 \dots S_kL)^\infty
 \end{array}$$

dependendo do facto da paridade da sequência ser par ou ímpar, respectivamente. A estrutura da árvore em sequências simbólicas é também verificada para os polinómios

característicos associados, veja-se o trabalho exaustivo de Sousa Ramos et al., (1984), sobre este assunto.

Proposição 1. ⁸ *Dada uma sequência simbólica $S^{(r)}$ periódica de período p , $S^{(r)}$, cujo polinómio característico $d_{S^{(r)}}(t)$ tem grau $n = p - 1$, os polinómios característicos associados às sequências simbólicas periódicas de período $(p + 1)$ têm a seguinte regra de construção*

$$\begin{array}{ccc}
 & d_{S^{(r)}}(t) & \\
 + \swarrow & & \searrow - \\
 d_{S^{(r)}}(t) + t^p & & d_{S^{(r)}}(t) - t^p.
 \end{array}$$

A demonstração deste resultado é uma consequência da Definição 3, e por análise da paridade e da ordem (Definições 2 e 4, respectivamente).

A estrutura em árvore é ordenada pelo polinómio $d_{S^{(r)}}(t)$, e notando que $d_{S^{(r)}}(t)$ tem um comportamento monótono não decrescente em ordem a $s = \frac{1}{t_{min}}$, veja-se Sousa Ramos et al. (1984) e Milnor e Thurston (1988). Assim, têm-se os seguintes resultados:

Corolário 1. ⁹ *Há uma aplicação injectiva entre o conjunto das sequências periódicas de kneading e o conjunto de todos os polinómios $d_{S^{(r)}}(t)$.*

Corolário 2. ¹⁰ *A entropia topológica associada a cada sequência de kneading periódica é monótona não decrescente em ordem ao parâmetro r .*

Nota 2. *Os resultados expressos nos corolários anteriores possibilitam estruturar ordenadamente a árvore que representa todas as sequências simbólicas (e correspondentes polinómios característicos), cada uma associada a um valor de complexidade dado pela entropia topológica, para uma dado valor do parâmetro*

⁸ Sousa Ramos et al. (1984).

⁹ Sousa Ramos et al. (1984).

¹⁰ Sousa Ramos et al. (1984).

malthusiano r . Ao observar a árvore da esquerda para a direita, o parâmetro r aumenta e conseqüentemente aumenta a complexidade do modelo unimodal correspondente, avaliada pelo respectivo valor da entropia topológica.

Todos os resultados numéricos, seguidamente apresentados, para as aplicações unimodais, foram determinados computacionalmente através de programação implementada no programa Mathematica.

Neste estudo, considera-se a família parametrizada f_r . Um objectivo fundamental neste trabalho é perceber como é que a dinâmica das aplicações desta família se altera à medida que o parâmetro r se vai alterando. Como já foi mencionado, a aplicação logística pertence a esta família, pelo que constitui um bom exemplo inicial para o desenvolvimento de trabalho.

Na Figura 2.4, a árvore apresentada ilustra a relação entre as sequências simbólicas associadas às órbitas de período k , com $k = 2, 3, \dots, 8$, bem como os respectivos polinómios característicos da matriz de transição de Markov, os valores correspondentes da entropia topológica e do parâmetro r da família das aplicações logísticas respectivas. Note-se que esta representação em árvore complementa substancialmente a informação dada pelo diagrama de Feigenbaum, uma vez que reproduz explicitamente a informação oculta na zona caótica. As duplicações de período que se observam no diagrama de bifurcação, apresentado na Figura 2.6, correspondem às órbitas representadas na árvore com entropia topológica nula.

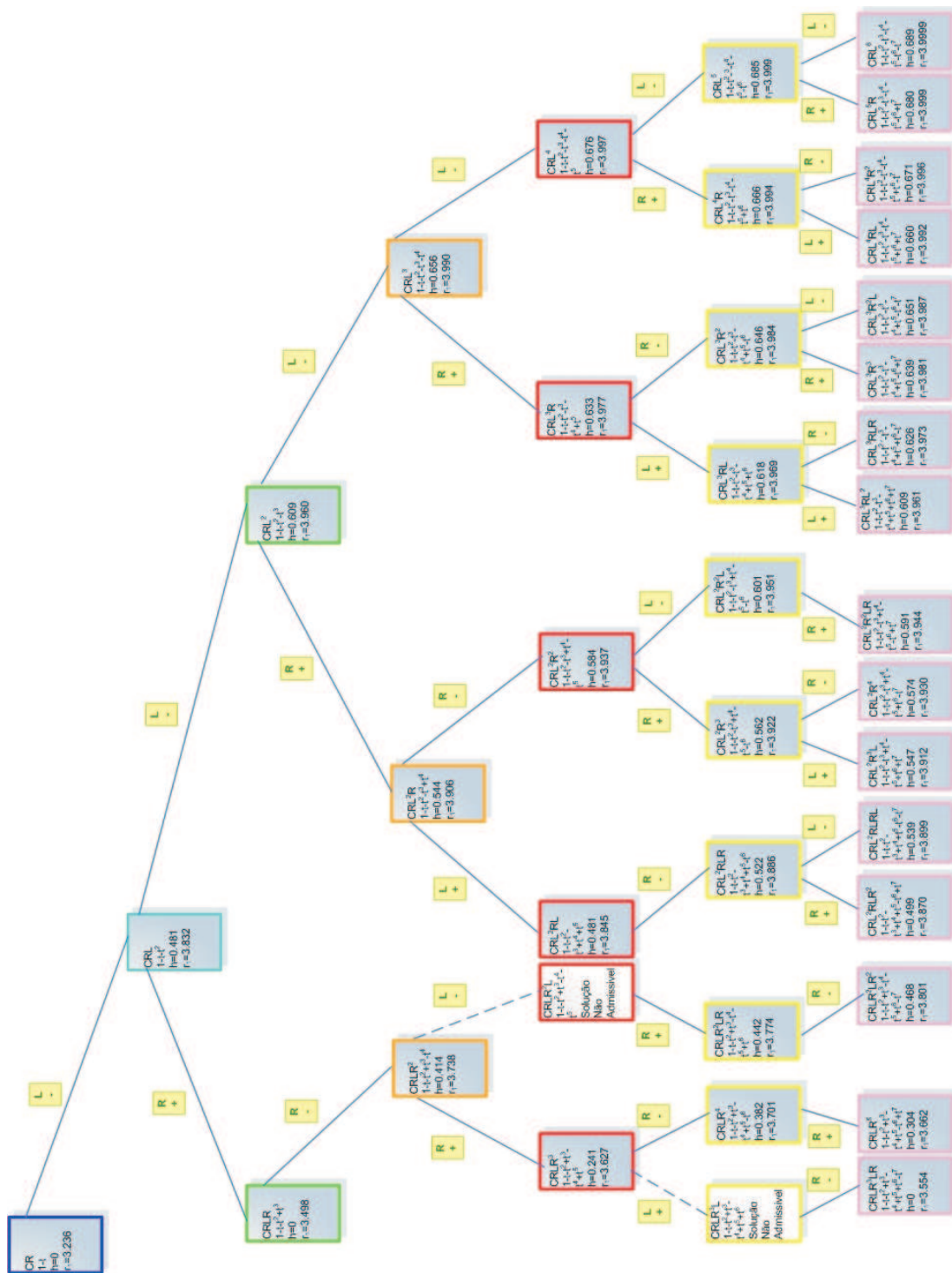


Figura 2.4: Árvore topológica da aplicação logística

Com o intuito de realçar a monotonicidade da entropia topológica em função do parâmetro r , apresenta-se o gráfico da Figura 2.5.

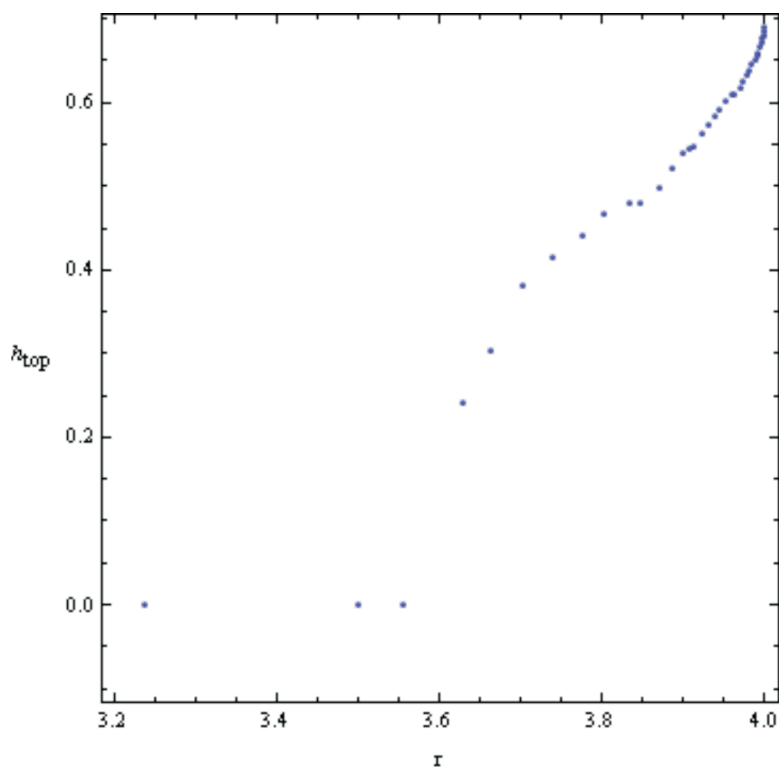


Figura 2.5: Entropia topológica na aplicação logística

De facto pode verificar-se que à medida que o valor do parâmetro r aumenta, o valor da entropia topológica associada às órbitas periódicas aumenta também, atingindo o valor da entropia topológica máxima $\ln 2$, correspondente ao chamado *full shift*, veja-se por exemplo Milnor e Thurston (1988). Quando o ponto crítico de uma aplicação unimodal tem o itinerário CRL^∞ , o conjunto das dinâmicas simbólicas das suas iteradas é um deslocamento completo, vulgarmente designado por *full shift*. Neste caso, as iteradas dessa aplicação tomam valores em todo o intervalo $[0, 1]$.

2.5 Diagrama de bifurcação e constante de Feigenbaum na família das aplicações unimodais

O diagrama de bifurcação, por vezes também designado por diagrama de Feigenbaum por estar associado ao trabalho do físico com o mesmo nome, tornou-se um ícone muito importante da teoria do caos. É uma imagem gerada computacionalmente, que nos permite ter ideia do comportamento dinâmico da aplicação em estudo, mas que deve ser vista com o devido cuidado. Para determinar valores correctos associados ao diagrama devem usar-se métodos analíticos complementares. Uma estrutura essencial observada em diagramas deste tipo é a de uma árvore ramificada, a qual retrata as alterações qualitativas no comportamento dinâmico da função iteradora em questão. Após uma ramificação maior inicial, bifurcam dois ramos, cada um dos quais bifurca noutros dois, e assim por diante. Este é o regime de duplicações de período. Depois desta cascata de duplicações de período aparece na parte final à direita no gráfico uma estrutura com muitos padrões notáveis e detalhados. O caos instala-se e para o último valor do parâmetro considerado, o caos governa todo o intervalo $[0, 1]$, veja-se por exemplo Peitgen et al. (1978).

Associada à referida cascata de duplicação de período tem-se uma constante universal extremamente importante, designada por constante de Feigenbaum, definida usualmente da seguinte forma (ver por exemplo Peitgen et al. (1978)).

Definição 6. ¹¹ *Seja r_n o valor do parâmetro r para o qual ocorre uma bifurcação de duplicação para o período 2^n . A constante de Feigenbaum é dada por*

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

¹¹ Peitgen et al. (1978)

2.5. Diagrama de bifurcação e constante de Feigenbaum na família das aplicações unimodais

Na secção 3.1.3, apresenta-se uma fórmula alternativa para calcular esta constante.

O diagrama de bifurcação relativo a uma aplicação f_r é um gráfico que permite representar o comportamento dinâmico dessa aplicação em função da variação do valor do parâmetro malthusiano r . Neste diagrama é representado um certo número fixo (ni), de iteradas da aplicação f_r para cada valor desse parâmetro. Note-se no entanto, que nem todas as iteradas calculadas (nc) para cada valor de r , a partir de um valor inicial escolhido, são representadas no diagrama. Na realidade, apenas as últimas ni ($ni < nc$) iteradas são registadas no gráfico, uma vez que o que se pretende registar é o comportamento das iteradas num estado final, após um certo número de nc iteradas, depois de uma fase inicial transiente.

Observe-se o diagrama de Feigenbaum para a aplicação logística f_r , apresentado na Figura 2.6.

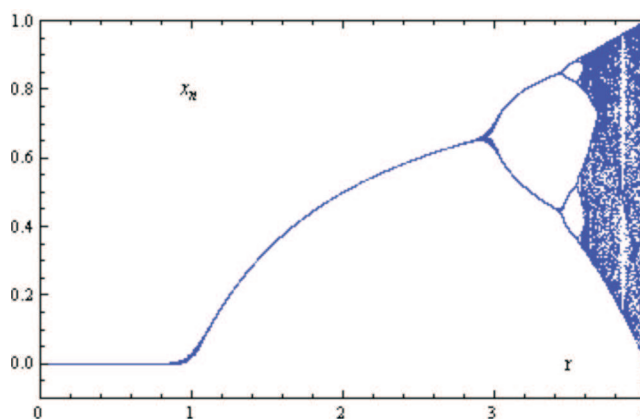


Figura 2.6: Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(2, 2)$, aplicação logística

Analisando este diagrama, pode caracterizar-se o comportamento dinâmico da aplicação logística f_r , com a variação do parâmetro r , veja-se por exemplo Holmgren (1996), Peitgen et al. (1978) e Schroeder (1991).

- Esta aplicação tem um ponto fixo atractivo ou estável, $x_0^* = 0$, para valores do

parâmetro $r \in [0, 1[$, o que significa que as iteradas da aplicação logística são atraídas para o ponto fixo zero, para valores do parâmetro r neste intervalo. Note-se que um ponto fixo x^* diz-se atractivo ou estável desde que $|f'_r(x^*)| < 1$. Este intervalo de variação do parâmetro r , está inserido na região de extinção súbita do espaço de parâmetros definida posteriormente na secção 3.2.5.

- Para $r = 1$ esta aplicação exhibe uma bifurcação, designada por bifurcação transcítica; note-se que $f'_1(0) = 1$ quando $r = 1$, pelo que o ponto fixo $x_0^* = 0$ não é hiperbólico quando a bifurcação ocorre.
- Para $r > 1$, a aplicação tem um outro ponto fixo positivo atractivo ou estável $x_1^* = 1 - \frac{1}{r}$.
- Para $r \in]1, 3[$, $x_0^* = 0$ torna-se um ponto fixo repulsivo, e o ponto fixo x_1^* torna-se atractivo. Uma observação do gráfico de f_r^2 (Figuras 2.7 e 2.8) permite concluir que f_r não tem outros pontos periódicos quando r está neste intervalo. Este intervalo de variação de r está inserido na região de estabilidade ou de equilíbrio definida à frente na secção 3.2.5. Note-se que, para $r = 2$, o ponto fixo coincide com o ponto crítico ($c = x^* = \frac{1}{2}$), e neste caso diz-se ser super atractivo ou super estável, porque a convergência para o ponto fixo é muito rápida, ou mesmo imediata se o valor inicial x_0 coincidir com o ponto crítico.
- Para $r = 3$, o ponto fixo $x_1^* = \frac{2}{3}$ é fracamente atractivo; deixa de ser hiperbólico porque $f'_3(\frac{2}{3}) = -1$; o ponto fixo $x_0^* = 0$ continua a ser repulsivo.
- Para $r > 3$, o ponto fixo não nulo torna-se instável e bifurca numa órbita de período 2, ou seja, o ponto fixo atractivo divide-se numa órbita atractiva de período 2 com um ponto fixo repulsivo entre os dois pontos da órbita. Este tipo de bifurcação é designada por bifurcação de duplicação de período. Note-se que numa vizinhança do valor do parâmetro $r = 3$, o valor da $(f_r^2)'(x_1^*)$, com x_1^* ponto fixo positivo de f_r , altera-se de um valor inferior a 1 para um valor

2.5. Diagrama de bifurcação e constante de Feigenbaum na família das aplicações unimodais

superior a 1, e portanto o referido ponto fixo passa de atractivo a repulsivo. Vejam-se as Figuras 2.7 e 2.8.

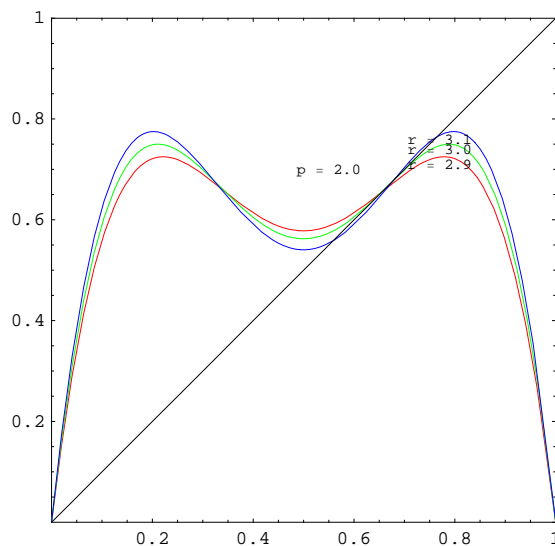


Figura 2.7: Função composta da aplicação logística

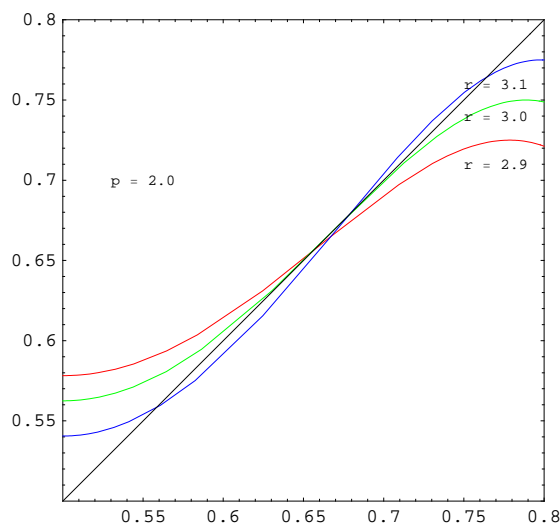


Figura 2.8: Função composta da aplicação logística, num subconjunto do intervalo $[0, 1]$

- Para $r = 3.2361\dots$ tem-se uma órbita periódica de período 2, que é super estável. De facto, para $r \in]3, r^\infty[$, com $r^\infty = 3.5699\dots$, verificam-se sucessivas duplicações de período. Para valores de $r \in]3, r^\infty[$, a entropia topológica é nula. Este intervalo de variação de r está inserido na região de duplicação de período, definida na secção 3.2.5.
- Para valores do parâmetro $r \in]r^\infty, 4]$, surgem então as sequências periódicas admissíveis de vários períodos k com entropia topológica não nula. São essas as mais interessantes pois estão na zona caótica do sistema dinâmico em questão. Por esta razão, foi efectuado um estudo exaustivo para a aplicação logística, em termos de dinâmica simbólica, sumariado na árvore já apresentada na Figura 2.4, veja-se Sousa Ramos et al. (1984). Este intervalo de variação de r insere-se na região caótica, definida na secção 3.2.5.
- Para $r > 4$, o conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ depois de n iterações da aplicação f_r , $\{x : f_r^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de Cantor. Este intervalo de variação de r inclui-se na região de extinção diferida, definida na secção 3.2.5. Neste intervalo, a aplicação logística é caótica e o conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ depois de n iterações da aplicação logística, $\{x : f_r^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de Cantor, veja-se por exemplo Holmgren (1996).

O cálculo aproximado da constante de Feigenbaum para a aplicação logística, determinada com base na fórmula (2.9), veja-se por exemplo Peitgen et al. (1978), apresenta-se na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Constante de Feigenbaum

n	2^n	$r_n - Beta(2, 2)$	$\delta_n - Beta(2, 2)$
0	1	3.0	
1	2	3.449489	
2	4	3.544090	4.751419
3	8	3.564407	4.656248
4	16	3.568759	4.668428
5	32	3.569692	4.664523

2.6 Conjuntos de Cantor

As famílias de aplicações unimodais definidas na secção 2.1 são modelos razoáveis de crescimento populacional. Para valores do parâmetro malthusiano r , superiores a um valor r_{fs} (para o qual o conjunto das dinâmicas simbólicas das iteradas da aplicação unimodal é um deslocamento completo ou *full shift*), as iteradas da aplicação passam a ser atraídas para o ponto fixo zero e dá-se a extinção da população cujo crescimento estava a ser modelado pela aplicação em causa. Associados a estes tipos de aplicações surgem os chamados conjuntos de Cantor. Estes conjuntos foram descobertos pelo matemático alemão Georg Cantor no fim do século *XIX*. Nessa época os conjuntos de Cantor foram considerados pouco mais do que uma curiosidade matemática, e os matemáticos interessaram-se sobretudo com conjuntos e funções às quais se podiam aplicar os métodos clássicos de cálculo. Conjuntos e funções que não fossem suficientemente suaves ou regulares tendiam a ser ignoradas como “patológicas”, considerando-se não valer a pena estudá-los. Certamente, esses conjuntos e funções foram vistos como curiosidades pontuais e só raramente foram observados como uma classe à qual se poderia aplicar uma teoria mais geral. Nos anos sessenta, o trabalho de Smale demonstrou que os conjuntos

de Cantor têm um papel importante nos sistemas dinâmicos. Um conjunto de Cantor é também um exemplo de um fractal. Mais recentemente, percebeu-se que muito pode e merece dizer-se acerca da matemática de conjuntos não regulares. De facto, conjuntos irregulares fornecem uma representação muito melhor de muitos fenómenos naturais do que as figuras da geometria clássica. A geometria fractal fornece uma estrutura geral para o estudo de tais conjuntos irregulares, Falconer (1990) e Holmgren (1996).

Pode definir-se um conjunto de Cantor do seguinte modo:

Definição 7. ¹² *Um conjunto não vazio $\Lambda \subset \mathbb{R}$ diz-se ser um conjunto de Cantor se*

- a) Λ é um conjunto compacto, ou seja, limitado e fechado;
- b) Λ é um conjunto totalmente desconexo, isto é, não contém intervalos;
- c) Todo o ponto em Λ é um ponto de acumulação de Λ .

O conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de uma dada aplicação f_r é denotado por Λ_n ,

$$\Lambda_n = \{x : f_r^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$$

e o conjunto de pontos que nunca deixam de pertencer ao intervalo $[0, 1]$ sob iteração de f_r é denotado por Λ , isto é,

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Exemplo 4. *Para a aplicação logística $f_r(x) = rx(1 - x)$, Λ é um conjunto de Cantor sempre que $r > 4$, e as dinâmicas de f_r são caóticas neste conjunto.*

O vértice desta aplicação é em $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$.

Quando $r > 4$, tem-se $f_r(\frac{1}{2}) > 1$ e como $f_r(0) = f_r(1) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \in [0, \frac{1}{2}]$ e um $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \in [\frac{1}{2}, 1]$

¹² Holmgren (1996).

2.6. Conjuntos de Cantor

tais que $f_r(x_0) = f_r(x_1) = 1$ e conseqüentemente, $f_r^2(x_0) = f_r^2(x_1) = 0$. Veja-se a Figura 2.9.

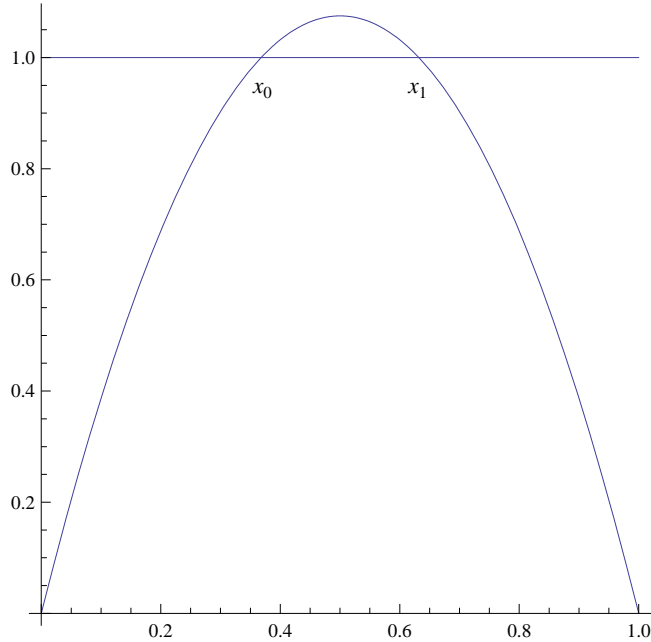


Figura 2.9: Modelo logístico com $r > 4$

Proposição 2. ¹³ Considere-se a aplicação logística $f_r(x) = rx(1-x)$. Se $r > 4$, então as afirmações seguintes são verdadeiras:

- a) O conjunto de números reais $x \in [0, 1]$ tais que $f_r(x) \notin [0, 1]$ é dado pelo intervalo

$$(x_0, x_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right).$$

Além disso,

$$\Lambda_1 = [0, x_0] \cup [x_1, 1] = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1 \right].$$

- b) O conjunto Λ_n consiste em 2^n intervalos fechados disjuntos para todos os números naturais n .

¹³ Holmgren (1996).

- c) Se I é um dos 2^n intervalos fechados disjuntos em Λ_n , então $f_r^n : I \rightarrow [0, 1]$ é injectiva.

A demonstração desta proposição pode ver-se em Holmgren (1996).

Embora Λ seja um conjunto de Cantor sempre que $r > 4$, é mais difícil prová-lo para $4 < r \leq 2 + \sqrt{5}$. Para $r > 2 + \sqrt{5}$, tem-se o Teorema 2.

Teorema 2. ¹⁴ Se $r > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

é um conjunto de Cantor.

A demonstração deste Teorema pode ser consultada em Holmgren (1996). A demonstração da extensão do Teorema 2 para $r > 4$ pode ser consultada em Katok e Hasselblatt (1995).

No capítulo 5 faz-se uma abordagem probabilística dos conjuntos de Cantor.

¹⁴ Holmgren (1996).

Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$

As famílias de aplicações unimodais são usadas em estudos numéricos exaustivos, e pela sua estrutura possibilitam construir uma descrição teórica pormenorizada em termos de dinâmica simbólica. Os conceitos da teoria das aplicações unimodais podem ser usados em variados contextos nas ciências biológicas, económicas e sociais, como já se tinha mencionado. No âmbito da dinâmica populacional, por exemplo, quando se pretende modelar o crescimento de uma dada espécie, o uso destas famílias tem sido frequente. Para certas espécies, a aplicação logística tem sido usada com sucesso para modelar o crescimento populacional. No entanto, para outras espécies o recurso a tais técnicas revela-se inadequado. O modelo de Verhulst é proporcional à densidade $Beta(2, 2)$. Outros modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$, poderão ser interessantes para modelar crescimentos populacionais relativos a populações com uma evolução à qual o modelo de Verhulst não se ajuste de forma adequada.

Após a dedução teórica destes novos modelos e caracterização da respectiva família de aplicações unimodais, é feita uma análise do comportamento destas aplicações em função da variação dos parâmetros considerados, definindo um

intervalo de variação para estes. Estuda-se o comportamento dinâmico destes modelos, avaliando-se a universalidade da constante de Feigenbaum (a qual obviamente se verifica nesta classe de aplicações uma vez que estas são unimodais), veja-se Aleixo et al. (2008).

Analisa-se duas questões interessantes, uma relativa à condição de negatividade (com consequências dinâmicas benéficas) da derivada de Schwarz, a qual desempenha um papel importante na dinâmica unidimensional, que é violada num pequeno intervalo do domínio das aplicações desta família, quando $p \in]1, 2[$. A segunda, respeitante ao efeito de Allee que surge naturalmente nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]2, +\infty[$, o que não se verifica para a aplicação logística, nem para os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$.

No final deste capítulo, caracteriza-se o espaço de parâmetros desta família de aplicações, relativamente ao seu comportamento dinâmico. Este espaço de parâmetros é dividido em sete regiões distintas, de acordo com as propriedades comuns relativas à dinâmica que define cada região. O comportamento caótico das aplicações pertencentes a cada região é analisado em termos da respectiva entropia topológica, verificando-se que, para cada valor fixo do parâmetro p , a complexidade dos modelos inerentes aumenta à medida que o valor do parâmetro malthusiano r se torna mais elevado.

3.1 Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Nesta secção apresenta-se uma nova classe de aplicações unimodais, os modelos de crescimento proporcionais a funções densidade de probabilidade $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, os quais incluem a aplicação logística ($p = 2$). Após a dedução destes modelos, estuda-se o seu comportamento dinâmico utilizando a dinâmica simbólica.

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Estudam-se a título de exemplo, os modelos proporcionais às densidades $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$. Determina-se a constante de Feigenbaum nestes modelos unimodais, com elevada precisão nos cálculos, verificando-se a universalidade desta constante.

Tal como se viu anteriormente, o modelo de Verhulst discretizado é dado por

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

No entanto, para certas populações, a taxa de crescimento malthusiano não é suficiente para a população evoluir. Assim o modelo anterior, proporcional à função densidade de probabilidade da $Beta(2, 2)$, não modela adequadamente o crescimento populacional nesses casos. Deste modo, nesta secção consideraram-se modelos discretizados do tipo

$$x_{n+1} = rx_n^{p-1}(1 - x_n), \text{ com } p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$$

que são proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

3.1.1 Família de modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Na secção 2.1.1, mostrou-se como o modelo de Verhulst pode ser apresentado como uma aproximação concedida pela expansão em série de Taylor. Usando um raciocínio análogo, apresentam-se agora novos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Estes modelos poderão ser vantajosos na modelação de crescimentos populacionais de espécies cuja evolução necessite de uma taxa de crescimento instantânea superior à fornecida pelo modelo logístico.

Considere-se então que a dimensão da população num dado instante t , $N(t)$, é uma função regular tal que

$$\frac{d}{dt}N(t) = A_0 + A_1N(t) + A_2N(t)^2 + \dots + A_{p-1}N(t)^{p-1} + A_pN(t)^p + A_{p+1}N(t)^{p+1} + \dots,$$

truncando os termos de ordem inferior a $p - 1$ e os termos de ordem superior a p , considerando-os irrelevantes para o modelo (ou seja, $A_i = 0$, para $i \leq p - 2 \vee i \geq p + 1$), obtem-se o modelo simplificado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= A_{p-1}N(t)^{p-1} + A_pN(t)^p \\ &= A_{p-1}N(t)^{p-1} \left(1 + \frac{A_p}{A_{p-1}}N(t) \right) \end{aligned}$$

com $A_{p-1} > 0$ e $A_p < 0$. Considerando

$$\begin{aligned} A_{p-1} &= r^* \text{ (coeficiente proporcional à taxa de crescimento populacional instantâneo)} \\ \frac{A_p}{A_{p-1}} &= -\frac{1}{K} \iff K = -\frac{A_p}{A_{p-1}} \text{ (capacidade de sustentação do meio)} \end{aligned}$$

esta equação, que representa a taxa de crescimento populacional, pode ser reescrita sob a forma

$$\frac{d}{dt}N(t) = r^*N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right), \text{ com } r^* > 0.$$

Na Figura 3.1 pode observar-se a variação dessa taxa $\frac{dN(t)}{dt}$ para o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$, à medida que a dimensão populacional $N(t)$ aumenta, considerando por exemplo $K = 10$.

Discretizando o modelo tem-se

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= r^*N(t_n)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K} \right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K^{p-1}} &= r^* \frac{N(t_n)^{p-1}}{K^{p-1}} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K} \right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r^* K^{p-2} \left(\frac{N(t_n)}{K} \right)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K} \right). \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{N(t_n)}{K} \\ r &= r^* K^{p-2} > 0 \text{ (taxa de crescimento populacional instantâneo)} \end{aligned}$$

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

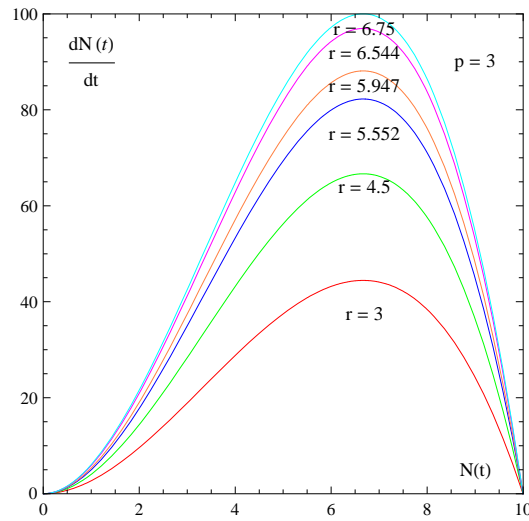


Figura 3.1: Taxas de crescimento populacional usando o modelo proporcional à $Beta(3, 2)$

o modelo discretizado que é proporcional à densidade da $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, é pois dado por

$$x_{n+1} = rx_n^{p-1}(1 - x_n), \text{ com } p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

Analogamente ao que acontecia para a aplicação logística, a abordagem discreta destes novos modelos pode ser usada para populações com gerações não sobrepostas. A partir de um valor inicial x_0 , obtem-se uma sequência infinita de valores, usando recursivamente a equação anterior. A discretização do modelo, possibilita a utilização de técnicas de dinâmica simbólica que permitem caracterizar exaustivamente esses modelos em termos do seu comportamento dinâmico.

Relativamente à nova família das aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com um novo parâmetro $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, para além do parâmetro malthusiano r , considera-se para cada p , a aplicação $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f_{r,p}(x) = rx^{p-1}(1 - x). \quad (3.1)$$

O modelo (3.1) é proporcional à função densidade de probabilidade do modelo $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Voltando à equação diferencial, quando $\frac{N(t)}{K} \cong 0$, ou seja, quando a dimensão populacional está afastada da capacidade de sustentação do meio, e os recursos permitem ainda a expansão populacional, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &\cong rN(t)^{p-1} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dN(t)}{N(t)^{p-1}} &\cong \int r dt \\ \Leftrightarrow \frac{(N(t))^{2-p}}{2-p} &\cong rt + C_0, \text{ com } C_0 \text{ constante} \\ \Leftrightarrow (N(t))^{2-p} &\cong r(2-p)t + C, \text{ com } C = (2-p)C_0 \text{ constante} \\ \Leftrightarrow N(t) &\cong (r(2-p)t + C)^{\frac{1}{2-p}} \\ \Leftrightarrow N(t) &\cong \left(\frac{1}{r(2-p)t + C} \right)^{\frac{1}{p-2}}. \end{aligned}$$

Para determinar a solução analítica geral desta equação diferencial, é necessário proceder do seguinte modo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= rN(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)} &\cong r dt \end{aligned}$$

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, considerando $N(t) = N$ apenas por uma questão de simplificação, e sendo A_i , com $i = 1, 2, \dots, p-1$, constantes reais, vem

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)} &= \frac{\sum_{i=0}^{p-2} A_i N^i}{N^{p-1}} + \frac{A_{p-1}}{1 - \frac{N}{K}} \\
 &= \frac{\left(\sum_{i=0}^{p-2} A_i N^i\right) \left(1 - \frac{N}{K}\right) + A_{p-1} N^{p-1}}{N^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^{p-2} A_i N^i + \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{p-2} A_i N^{i+1} + A_{p-1} N^{p-1}}{N^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)} \\
 &= \frac{A_0 + \sum_{i=1}^{p-2} \left(A_i - \frac{A_{i-1}}{K}\right) N^i - \frac{A_{p-2} N^{p-1}}{K} + A_{p-1} N^{p-1}}{N^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)}
 \end{aligned}$$

Igualando os numeradores, obtêm-se então a expressão genérica das constantes A_i como sendo

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_i - \frac{A_{i-1}}{K} = 0, \quad i = 1, \dots, p-2 \\ A_{p-1} - \frac{A_{p-2}}{K} = 0 \end{cases} \iff A_i = \frac{1}{K^i}, \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)} &= \frac{\sum_{i=0}^{p-2} A_i N^i}{N^{p-1}} + \frac{A_{p-1}}{1 - \frac{N}{K}} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^{p-2} \left(\frac{N}{K}\right)^i}{N^{p-1}} + \frac{1}{K^{p-1} \left(1 - \frac{N}{K}\right)} \\
 &= \sum_{i=0}^{p-2} \frac{N^{i-p+1}}{K^i} + \frac{1}{K^{p-1} - NK^{p-2}} \\
 &= \sum_{i=0}^{p-2} \frac{N^{i-p+1}}{K^i} + \frac{1}{K^{p-2} (K - N)}
 \end{aligned}$$

Deste modo, para $p = 3, 4, 5, \dots$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dN(t)}{N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)} \cong \int r dt \\
 \Leftrightarrow & \int \left(\sum_{i=0}^{p-2} \frac{N(t)^{i-p+1}}{K^i} + \frac{1}{K^{p-2}(K - N(t))} \right) \cong rt + C \quad (C \text{ constante}) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{p-3} \frac{1}{K^i} \int N(t)^{1-p+i} dN(t) + \frac{1}{K^{p-2}} \int \frac{1}{N(t)} dN(t) + \frac{1}{K^{p-2}} \int \frac{1}{K - N(t)} dN(t) \\
 & \cong rt + C \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{p-3} \frac{1}{K^i} \frac{N(t)^{2-p+i}}{2-p+i} + \frac{1}{K^{p-2}} (\ln [N(t)] - \ln [K - N(t)]) \cong rt + C \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=0}^{p-3} \frac{1}{K^i} \frac{N(t)^{2-p+i}}{2-p+i} + \frac{1}{K^{p-2}} \left(\ln \left[\frac{N(t)}{K - N(t)} \right] \right) \cong rt + C.
 \end{aligned}$$

Assim, a solução analítica geral desta equação diferencial não se consegue explicitar em ordem a $N(t)$. No entanto é possível representar graficamente esta solução obtida por implementação computacional, como se pode observar no gráfico da Figura 3.2, onde se pode visualizar o comportamento da dimensão populacional $N(t)$ ao longo do tempo t , usando o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$.

Em estudos de crescimento de determinadas populações naturais, esta solução aproximada poderá vir a ser usada com sucesso para determinar a dimensão dessas populações $N(t)$ num dado instante t .

3.1.2 Dinâmica simbólica na família dos modelos proporcionais às densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Considere-se então a nova família das aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f_{r,p}(x) = rx_n^{p-1}(1 - x_n). \quad (3.2)$$

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

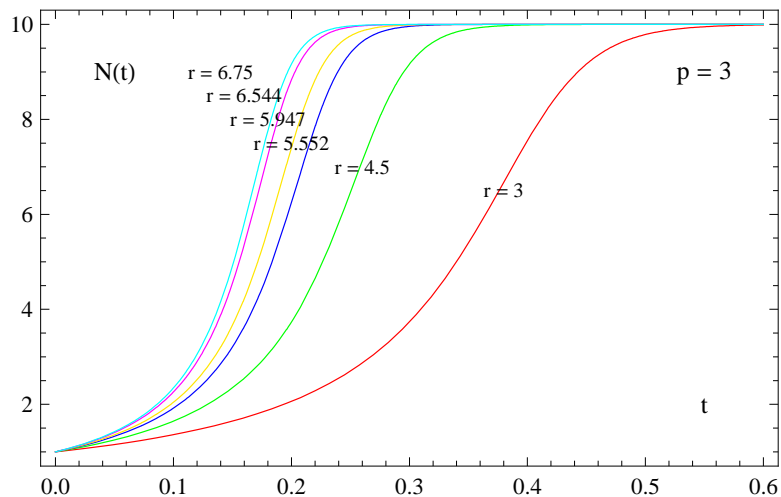


Figura 3.2: Variação da dimensão populacional ao longo do tempo usando o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$

Atendendo a que os modelos proporcionais às densidades $Beta(p, 2)$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ são famílias de aplicações unimodais, satisfazendo as propriedades definidas na secção 2.1, os seus comportamentos dinâmicos são análogos ao apresentado para a família das aplicações logísticas ($p = 2$). As sequências admissíveis são precisamente as mesmas, pelo que o polinómio característico da matriz de transição de Markov, bem como o respectivo valor da entropia topológica associado, permanecem inalterados. O que efectivamente muda é o valor do parâmetro r associado a cada uma delas.

Nesta secção estudam-se a título de exemplo os modelos proporcionais às densidades $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$. Na Tabela 3.1, podem observar-se os valores do parâmetro r para os quais são obtidos os vários períodos, correspondentes às sequências simbólicas respectivas. Estes valores foram obtidos a partir da construção de listas simbólicas para valores crescentes do parâmetro r , usando programas computacionais adequados, implantados no programa Mathematica.

Tabela 3.1: Valores do parâmetro das sequências de *kneading* e entropia topológica

período	$S^{(r)}$	$Beta(2, 2)$	$Beta(3, 2)$	$Beta(4, 2)$	h_{top}
2	CR	3.236	5.551	8.006	0.000
4	$CRLR$	3.498	5.813	8.243	0.000
8	$CRLR^3LR$	3.554	5.871	8.296	0.000
6	$CRLR^3$	3.627	5.947	8.365	0.241
8	$CRLR^5$	3.662	5.982	8.398	0.304
7	$CRLR^4$	3.701	6.021	8.433	0.382
5	$CRLR^2$	3.738	6.062	8.471	0.414
7	$CRLR^2LR$	3.774	6.104	8.510	0.442
8	$CRLR^2LR^2$	3.801	6.135	8.539	0.468
3	CRL	3.832	6.178	8.579	0.481
6	CRL^2RL	3.845	6.199	8.599	0.481
8	CRL^2RLR^2	3.870	6.238	8.635	0.499
7	CRL^2RLR	3.886	6.258	8.654	0.522
8	CRL^2RLRL	3.899	6.277	8.672	0.539
5	CRL^2R	3.906	6.288	8.682	0.544
8	CRL^2R^3L	3.912	6.299	8.692	0.547
7	CRL^2R^3	3.922	6.313	8.705	0.562
8	CRL^2R^4	3.930	6.324	8.715	0.574
6	CRL^2R^2	3.937	6.335	8.725	0.584
8	CRL^2R^2LR	3.944	6.346	8.736	0.591
7	CRL^2R^2L	3.951	6.358	8.747	0.601
4	CRL^2	3.960	6.380	8.767	0.609
8	CRL^3RL^2	3.961	6.383	8.770	0.609
7	CRL^3RL	3.969	6.405	8.789	0.618
8	CRL^3RLR	3.973	6.415	8.798	0.626
6	CRL^3R	3.977	6.425	8.808	0.633
8	CRL^3R^3	3.981	6.434	8.816	0.639
7	CRL^3R^2	3.984	6.442	8.823	0.646
8	CRL^3R^2L	3.987	6.451	8.830	0.651
5	CRL^3	3.990	6.462	8.840	0.656
8	CRL^4RL	3.992	6.474	8.850	0.660
7	CRL^4R	3.994	6.483	8.857	0.666
8	CRL^4R^2	3.996	6.491	8.863	0.671
6	CRL^4	3.997	6.500	8.871	0.676
8	CRL^5R	3.998	6.511	8.878	0.680
7	CRL^5	3.999	6.520	8.884	0.685
8	CRL^6	3.9999	6.530	8.891	0.689

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Relativamente a estes modelos foram feitos estudos análogos ao efectuado anteriormente para as famílias das aplicações logísticas, em termos de dinâmica simbólica. Vejam-se os dois exemplos seguintes, relativos aos modelos proporcionais às densidades $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$.

Exemplo 5. Considerou-se $f_{r,3} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família das aplicações proporcionais à densidade do modelo $Beta(3, 2)$, com o parâmetro $r \in]0, 6.75]$, definida por

$$f_{r,3}(x) = rx^2(1 - x).$$

Note-se que nesta família o ponto crítico é $c = \frac{2}{3}$.

O diagrama de Feigenbaum correspondente ao modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$ pode observar-se na Figura 3.3.

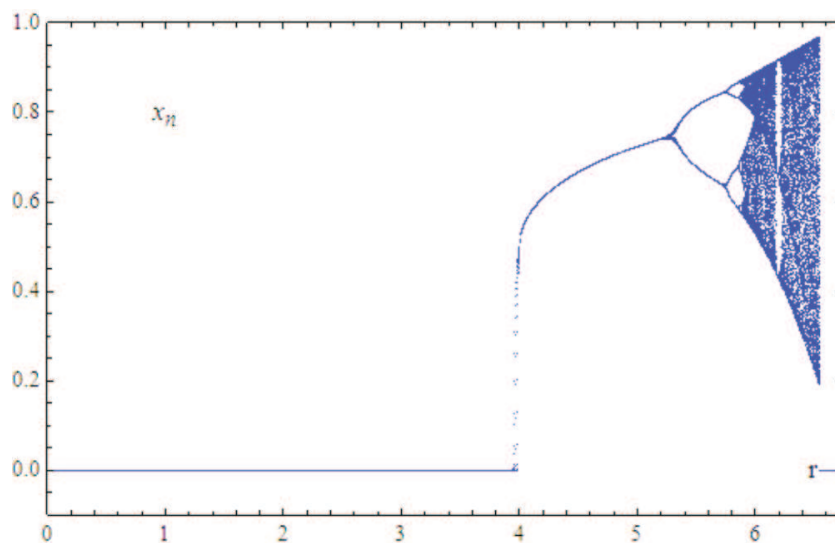


Figura 3.3: Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(3, 2)$

Analisando este diagrama, pode caracterizar-se o comportamento dinâmico desta aplicação $f_{r,3}$ com a variação do parâmetro malthusiano r .

- Para valores do parâmetro $r \in]0, 4[$, esta aplicação tem um ponto fixo atractivo ou estável, $x_0^* = 0$, pelo que as iteradas da aplicação $f_{r,3}$ são atraídas para o ponto fixo zero, para valores do parâmetro r neste intervalo. Este intervalo de variação do parâmetro r , está inserido na região de extinção súbita do espaço de parâmetros definida posteriormente na secção 3.2.5.
- Para $r = 4$ esta aplicação exhibe uma bifurcação transcítica; note-se que $f'_{4,3}(0) = 1$ quando $r = 4$, pelo que o ponto fixo $x_0^* = 0$ não é hiperbólico quando a bifurcação ocorre.
- Para $r > 4$, a aplicação tem dois pontos fixos positivos para além do zero; o maior deles

$$x_2^* = 0.5 + 0.5\sqrt{\frac{r-4}{r}}$$

é atractivo ou estável, e o outro

$$x_1^* = 0.5 - 0.5\sqrt{\frac{r-4}{r}}$$

é repulsivo, tal como o ponto fixo nulo.

- Para $r \in]4, 5.3333[$, $x_0^* = 0$ torna-se um ponto fixo repulsivo, e o maior ponto fixo x_2^* torna-se atractivo. Este intervalo de variação de r está inserido na região de estabilidade ou de equilíbrio definida na secção 3.2.5. Note-se que, para $r = 4.5$, o ponto fixo coincide com o ponto crítico ($c = x_2^* = \frac{2}{3}$), e neste caso diz-se ser super atractivo ou super estável, porque a convergência para o ponto fixo é muito rápida, ou mesmo imediata se o valor inicial x_0 coincidir com o ponto crítico.
- Para $r = 5.3333\dots$, o ponto fixo $x_2^* = 0.75$ é fracamente atractivo; deixa de ser hiperbólico porque $f'_{5.3333,3}(0.75) = -1$; os pontos fixos $x_0^* = 0$ e $x_1^* = 0.25$ continuam a ser repulsivos.
- Para $r > 5.3333\dots$, o maior ponto fixo positivo torna-se instável e bifurca numa órbita de período 2, ou seja, o ponto fixo atractivo divide-se numa órbita

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

atractiva de período 2. Este tipo de bifurcação é designada por bifurcação de duplicação de período. Note-se que numa vizinhança do valor do parâmetro $r = 5.3333\dots$, o valor da derivada $(f_{r,3}^2)'(x_2^)$, com x_2^* maior ponto fixo positivo de $f_{r,3}$, altera-se de um valor inferior a 1 para um valor superior a 1, e portanto o referido ponto fixo passa de atractivo a repulsivo.*

- *Para $r = 5.5518\dots$ tem-se uma órbita periódica de período 2, que é super estável.*
- *Para $r \in]5.333, r^\infty[$, com $r^\infty \cong 5.8877\dots$, verificam-se sucessivas duplicações de período. Para valores de r nesse intervalo, a entropia topológica é nula. Este intervalo de variação de r está inserido na região de duplicação de período, apresentada na secção 3.2.5.*
- *Para valores do parâmetro $r \in]r^\infty, 6.544]$, surgem então as sequências periódicas admissíveis de vários períodos k com entropia topológica positiva. São essas as mais interessantes pois estão na zona caótica do sistema dinâmico em questão. Por esta razão, foi efectuado um estudo exaustivo para a aplicação $f_{r,3}$, em termos de dinâmica simbólica, sumariado na árvore apresentada na Figura 3.5. Este intervalo de variação de r insere-se na região caótica, definida na secção 3.2.5.*
- *Para $r \in]6.544, 6.75]$, as iteradas de $f_{r,3}$ são atraídas para o ponto fixo $x_0^* = 0$, ou seja este torna-se novamente atractivo. O conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ depois de n iterações da aplicação $f_{r,3}$, $\{x : f_{r,3}^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de Cantor. Este intervalo de variação de r inclui-se na região de extinção devido ao efeito de Allee, explicitada na secção 3.2.5.*
- *Para $r > 6.75$, as iteradas de $f_{r,3}$ são também atraídas para o ponto fixo $x_0^* = 0$. O conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ depois de n iterações da aplicação $f_{r,3}$, também é um conjunto de Cantor. Este intervalo de variação de r inclui-se na região de extinção diferida, explicitada na secção 3.2.5.*

Exemplo 6. *Relativamente à família das aplicações proporcionais ao modelo $Beta(4, 2)$, com o parâmetro $r \in]0, 9.48]$, considerou-se $f_{r,4} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por*

$$f_{r,4}(x) = rx^3(1 - x),$$

cujo ponto crítico é $c = \frac{3}{4}$.

O diagrama de Feigenbaum correspondente a este modelo está representado na Figura 3.4.

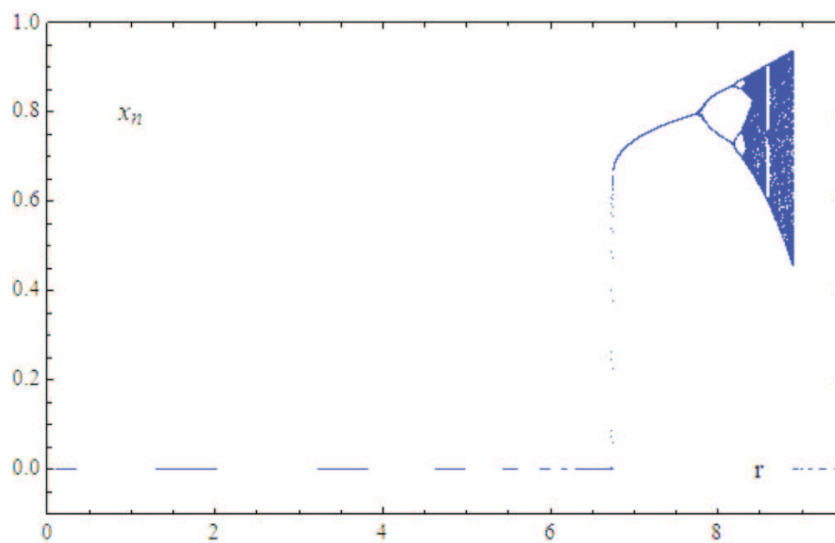


Figura 3.4: Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(4, 2)$

Analisando este diagrama, pode caracterizar-se o comportamento dinâmico desta aplicação $f_{r,4}$ com a variação do parâmetro r .

- Esta aplicação $f_{r,4}$ tem um ponto fixo atractivo, $x_0^* = 0$, para valores do parâmetro $r \in]0, 6.75[$, porque as suas iteradas são atraídas para o ponto fixo zero, para valores do parâmetro r neste intervalo. Este intervalo de variação do parâmetro r , insere-se na já mencionada região de extinção súbita do espaço de parâmetros apresentada na secção 3.2.5.

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

- Para $r = 6.75$ a aplicação apresenta bifurcação transcritical. Como $f'_{6.75,4}(0) = 1$, o ponto fixo $x_0^* = 0$ não é hiperbólico quando se dá a bifurcação.
- Para $r > 6.75$, a aplicação tem dois pontos fixos positivos para além do zero, o maior deles é atractivo ou estável, e o outro ponto fixo positivo é repulsivo, tal como o ponto fixo nulo. Neste caso não é fácil obter os pontos fixos não nulos de $f_{r,4}$. Apenas se conseguem obter valores aproximados por métodos numéricos.
- Para $r \in]6.75, 7.8125[$, $x_0^* = 0$ torna-se um ponto fixo repulsivo, e o maior ponto fixo x_2^* torna-se atractivo. Este intervalo de variação de r pertence à região de estabilidade ou de equilíbrio definida na secção 3.2.5. Para $r = 7.1111\dots$, o ponto fixo coincide com o ponto crítico ($c = x^* = \frac{3}{4}$), é super atractivo ou super estável.
- Para $r = 7.8125\dots$, o ponto fixo $x_2^* = 0.8$ é fracamente atractivo; deixa de ser hiperbólico porque $f'_{7.8125,4}(0.8) = -1$; os pontos fixos $x_0^* = 0$ e $x_1^* = 0.5123\dots$ continuam a ser repulsivos.
- Para $r > 7.8125\dots$, o ponto fixo atractivo divide-se numa órbita atractiva de período 2, ocorrendo uma bifurcação de duplicação de período. Numa vizinhança de $r = 7.8125\dots$, x_2^* , o maior ponto fixo positivo de $f_{r,4}$ passa de atractivo a repulsivo porque o valor da $(f_{r,4}^2)'(x_2^*)$ altera-se de um valor inferior a 1 para um valor superior a 1.
- Para $r = 8.006\dots$ tem-se uma órbita periódica de período 2, que é super estável.
- Para $r \in]7.8125, r^\infty[$, com $r^\infty \cong 8.3109\dots$, verificam-se sucessivas duplicações de período. A entropia topológica é nula para valores de r neste intervalo. Este intervalo de variação de r está inserido na região de duplicação de período, definida na secção 3.2.5.

- Para valores do parâmetro $r \in]r^\infty, 8.897]$, surgem então as sequências periódicas admissíveis de vários períodos k com entropia topológica positiva. Este intervalo de variação de r insere-se na região caótica, apresentada na secção 3.2.5.
- Para $r \in]8.897, 9.481]$, as iteradas de $f_{r,4}$ são atraídas para o ponto fixo $x_0^* = 0$, tornando-se este novamente atractivo. Surgem conjuntos de Cantor. Este intervalo de variação de r inclui-se na região de extinção devido ao efeito de Allee, especificada na secção 3.2.5.
- Para $r > 9.481$, as iteradas de $f_{r,4}$ são também atraídas para o ponto fixo $x_0^* = 0$. O conjunto de pontos que permanecem em $[0, 1]$ depois de n iterações da aplicação $f_{r,4}$, também é um conjunto de Cantor. Este intervalo de variação de r inclui-se na região de extinção diferida, explicitada na secção 3.2.5.

Os resultados de todo o estudo de dinâmica simbólica encontram-se sumarizados na árvore da Figura 3.5, análoga à da parábola logística anteriormente apresentada.

3.1.3 Constante de Feigenbaum nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Tal como na aplicação logística, modelo proporcional à função densidade $Beta(2, 2)$, noutros modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, a constante de Feigenbaum, $\delta = 4.6692016091029\dots$, é determinada através da Definição 8.

Definição 8. *Seja r_n o valor do parâmetro r associado à órbita para o período 2^n . A constante de Feigenbaum é dada por*

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

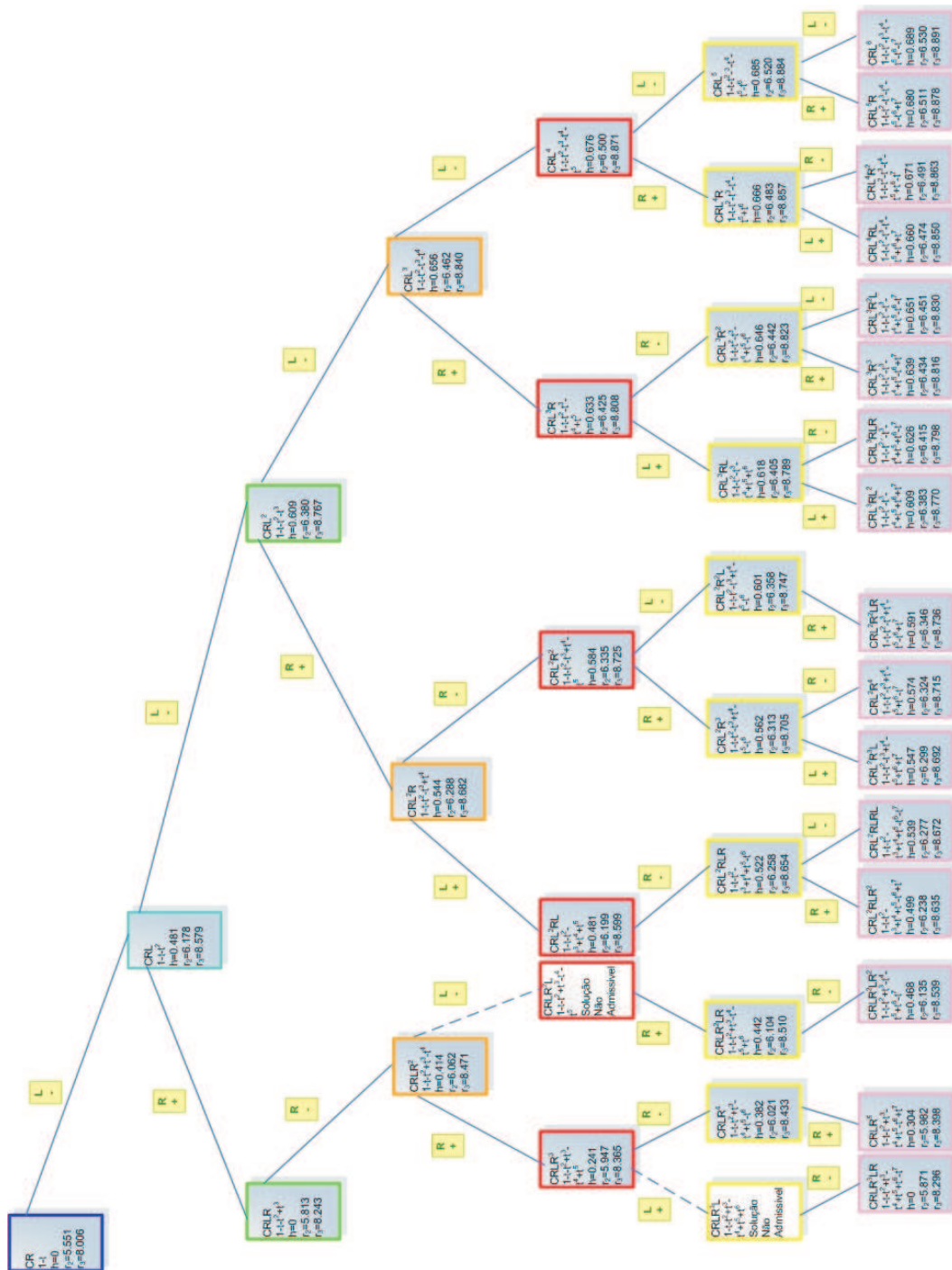


Figura 3.5: Árvore topológica de aplicações unimodais proporcionais aos modelos $Beta(3, 2)$ e $Beta(4, 2)$

Nota 3. *Observe-se no entanto que, embora a constante de Feigenbaum seja habitualmente calculada por uma fórmula matemática análoga à apresentada neste trabalho, há uma diferença substancial. Na bibliografia usual, como por exemplo Peitgen et al. (1978), o cálculo da constante é feito a partir de três valores consecutivos do parâmetro r , associados a pontos de duplicação de período, os quais correspondem às bifurcações que podem ser observadas no diagrama de bifurcação, Definição 6. Estes valores foram analiticamente calculados usando métodos de análise numérica. No presente trabalho, os cálculos são feitos a partir de três valores consecutivos do parâmetro r , também associados a órbitas periódicas de períodos 2^n , com $n \in \mathbb{N}_0$, obtidos a partir de listas de sequências simbólicas. Deve salientar-se o esforço analítico subjacente a estes cálculos, uma vez que os valores do parâmetro r foram calculados com uma precisão de 15 casas decimais, o que certamente enaltece o rigor destes cálculos.*

A constante de Feigenbaum é calculada usando a mesma metodologia para todos os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Isto deve-se ao facto de todas estas aplicações serem unimodais no domínio considerado. De facto, a constante de Feigenbaum é universal, porque é exactamente a mesma para todas as classes de aplicações deste tipo, veja-se Peitgen et al. (1978).

Na Tabela 3.2, é evidente a convergência para a constante de Feigenbaum. No entanto, observa-se que esta convergência é mais lenta nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p = 3, 4$, uma consequência do decréscimo da amplitude do intervalo de variação do parâmetro r na região de duplicação de período, zonas das bifurcações que podem ser observadas nos diagramas de Feigenbaum representados nas Figuras 3.3 e 3.4.

3.1. Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$

Tabela 3.2: Constante de Feigenbaum

n	2^n	$r_n - Beta(2, 2)$	$\delta_n - Beta(2, 2)$
0	1	2.0000000000000000	
1	2	3.236067977499769	
2	4	3.498561699327713	4.7089430135
3	8	3.554640862768819	4.6807709980
4	16	3.566667379856272	4.6629596111
5	32	3.569243531637112	4.6684039259
6	64	3.569795293749944	4.6689537410
n	2^n	$r_n - Beta(3, 2)$	$\delta_n - Beta(3, 2)$
0	1	4.5000000000000000	
1	2	5.551883678377213	
2	4	5.813996284641623	4.0130983907
3	8	5.871964588515327	4.5216538824
4	16	5.884459868104089	4.6392162306
5	32	5.887139699399200	4.6627112727
6	64	5.887713807213475	4.6678188809
n	2^n	$r_n - Beta(4, 2)$	$\delta_n - Beta(4, 2)$
0	1	7.1111111111111111	
1	2	8.006388088621897	
2	4	8.243423096224173	3.7769820862
3	8	8.296403721342422	4.4739941643
4	16	8.307847717287025	4.6295564394
5	32	8.310303243875927	4, 6605058142
6	64	8.310829349375576	4.6673653678

3.2 Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

Na secção 3.1 fez-se uma caracterização de aplicações unimodais proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, em termos da sua dinâmica. Nesta secção, generalizam-se os resultados anteriores, caracterizando as aplicações unimodais proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$, considerando portanto uma família mais vasta de aplicações unimodais, englobando as aplicações estudadas nos capítulos anteriores. Após a dedução teórica dos modelos e caracterização da respectiva família de aplicações unimodais, é feita uma análise do comportamento destas aplicações em função da variação dos parâmetros considerados, definindo um intervalo de variação para estes. Estuda-se o comportamento dinâmico destes modelos à semelhança do que havia sido feito na secção 3.1, avaliando-se a universalidade da constante de Feigenbaum, que obviamente se verifica nesta classe de aplicações uma vez que estas são unimodais. Analisam-se as duas questões relevantes para estes modelos, mencionadas no início deste capítulo. Por fim é feita uma divisão do espaço de parâmetros em regiões de acordo com o comportamento dinâmico das aplicações definidas.

3.2.1 Família de modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$ e dinâmica simbólica

Suponha-se que a equação, que representa a taxa de crescimento populacional é dada por

$$\frac{d}{dt}N(t) = r^*N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \text{ com } p \in]1, +\infty[\text{ and } r^* \in]0, +\infty[.$$

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

Discretizando o modelo à semelhança do que foi feito para os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, tem-se

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= r^* N^{p-1}(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{N(t_{n+1})}{K^{p-1}} &= r^* \frac{N^{p-1}(t_n)}{K^{p-1}} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r^* K^{p-2} \left(\frac{N(t_n)}{K}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right). \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{N(t_n)}{K} \\ r &= r^* K^{p-2} > 0 \end{aligned}$$

o modelo discretizado que é proporcional à densidade da $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$, é dado por

$$x_{n+1} = r x_n^{p-1} (1 - x_n), \text{ com } p \in]1, +\infty[. \quad (3.4)$$

Considere-se então a nova família de aplicações unimodais $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, com o parâmetro p e o parâmetro malthusiano r , cujos intervalos de variação máxima são respectivamente dados por $p \in]1, p_{mc}]$ e $r \in]0, r(p_{mc})]$, definidas por:

$$f_{r,p}(x) = r x^{p-1} (1 - x)$$

que satisfazem as seguintes condições:

- $f_{r,p} \in C^3([0, 1])$;
- $f'_{r,p}(x) \neq 0, \forall x \neq c$ (c é o ponto crítico de $f_{r,p}$);
- $f'_{r,p}(c) = 0$ e $f''_{r,p}(c) < 0$ significando que $f_{r,p}$ é estritamente crescente em $[0, c[$ e estritamente decrescente em $]c, 1]$;

- $f_{r,p}(0) = f_{r,p}(1) = 0$;
- $f_{0,p}(c) = 0$ e $f_{r(p_{mc}),p}(c) = 1$.
- A derivada de Schwarz de $f_{r,p}(x)$ é $S(f_{r,p}(x)) = \frac{f_{r,p}'''(x)}{f_{r,p}'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f_{r,p}''(x)}{f_{r,p}'(x)} \right)^2 < 0, \forall x \neq c$, para $p > 2$, e ($\forall x \neq c$ e $x > x_d^1$), para $1 < p < 2$. Note-se que $S(f_{r,p}(c)) = -\infty$.

Observe-se que, para que as aplicações $f_{r,p}$ sejam unimodais, o valor do parâmetro p tem que ser superior a um. O valor máximo considerado para o parâmetro p neste estudo, designado por p_{mc} , será discutido posteriormente em função do interesse que este possa ter para a modelação em causa. O valor $r(p_{mc})$ é o valor do parâmetro r correspondente ao *full shift* para $p = p_{mc}$.

Deve salientar-se que, para cada valor do parâmetro p fixo, se tem que $f_{r,p}$, pelo que em termos de comportamento dinâmico esta família comporta-se do mesmo modo que as três aplicações unimodais já estudadas. No entanto, surgem duas questões delicadas para esta família de aplicações mais geral, $f_{r,p}$, que merecem ser tratadas separadamente com um cuidado especial. O parâmetro p passa a desempenhar uma outra função, uma vez que uma das questões surge para valores do parâmetro p inferiores a 2 e a outra para valores de p superiores a 2. De facto, a derivada de Schwarz de $f_{r,p}$ não é sempre negativa no intervalo $[0, c[\cup]c, 1]$, quando $p \in]1, 2[$, como se verá na secção 3.2.3 (o que poderia representar um problema face ao papel desempenhado pela derivada de Schwarz na dinâmica unidimensional, veja-se por exemplo Graczyk et al. (2001)), e o efeito de Allee que nestes modelos surge naturalmente, quando $p \in]2, p_{mc}[$ (no modelo logístico por exemplo, isto não se verifica e portanto deve ser contornado corrigindo-se o modelo, veja-se por exemplo Boukal e Berec (2002)). Este assunto será tratado na secção 3.2.4 e posteriormente no capítulo 4.

Os dois parâmetros r e p , associados a estas aplicações unimodais $f_{r,p}$, são ambos parâmetros de forma. O parâmetro r relaciona-se com a altura da curva, enquanto

¹Para $1 < p < 2$, $S(f_{r,p}(x))$ é positiva em $[0, x_d]$. Como esta condição se verifica no início do intervalo $[0, 1]$, não perturba o comportamento dinâmico de $f_{r,p}$.

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

o parâmetro p se relaciona com o enviesamento da mesma. Para qualquer $p > 1$ fixo, o valor de $r = 0$ não tem sentido porque nesse caso não há curva; à medida que o valor do parâmetro r vai aumentando têm-se curvas cada vez mais elevadas, até ao valor de r corresponda ao chamado *full shift* quando a altura da curva atinge o valor máximo 1, vejam-se os gráficos representados na Figura 3.6, de aplicações $f_{r,3.5}$ correspondentes a vários valores do parâmetro r e para $p = 3.5$. Considerando para cada p , o valor do parâmetro r para o qual se obtém o *full shift* respectivo, constata-se que a curva da aplicação $f_{r,p}$ tem três formatos de enviesamento distintos que se podem observar na Figura 3.7, curvas enviesadas para a esquerda quando $1 < p < 2$ (casos de $(r, p) = (1.398, 1.1)$ e de $(r, p) = (2.598, 1.5)$), simétricas para $p = 2$ (caso de $(r, p) = (4.0, 2.0)$) ou enviesadas para a direita (casos de $(r, p) = (8.117, 3.5)$ e de $(r, p) = (53.0, 20.0)$). Analisando a Figura 3.7, percebe-se que a dinâmica unimodal não faz sentido para valores de p muito próximos de um, pois as curvas associadas têm um enorme enviesamento à esquerda; e o mesmo se verifica para valores de p elevados, pois as curvas correspondentes passam a ser extremamente enviesadas para a direita. Aplicações $f_{r,p}$, com estes valores extremos para o parâmetro p , dificilmente poderão modelar crescimentos populacionais de alguma espécie. Assim, decidiu-se considerar o valor máximo $p_{mc} = 20$, donde o respectivo valor de r varia até ao valor 53.001 correspondente ao *full shift*. Observando as Figuras 3.6 e 3.7, pode ainda verificar-se que as aplicações $f_{r,p}$, têm sempre o ponto fixo $x^* = 0$, para quaisquer $r > 0$ e $p > 1$. No entanto, os casos das aplicações para $p = 1.1$ e $p = 1.5$ na Figura 3.7, mostram que estas aplicações têm um outro ponto fixo positivo para além do zero, para $r > r_1$, no caso de $p \in]1, 2[$; mas para $p \in [2, p_{mc}]$, observando os casos das aplicações para $p = 2$, $p = 3.5$ e $p = 20$ na Figura 3.7 e todas as aplicações da Figura 3.6 conclui-se que, estas têm mais dois pontos fixos positivos além do zero, para valores de $r > r_1$; r_1 é o primeiro valor de r para o qual as iteradas deixam de ser atraídas para o ponto fixo zero e passam a ser atraídas para o único ponto fixo positivo dessa função $f_{r,p}$.

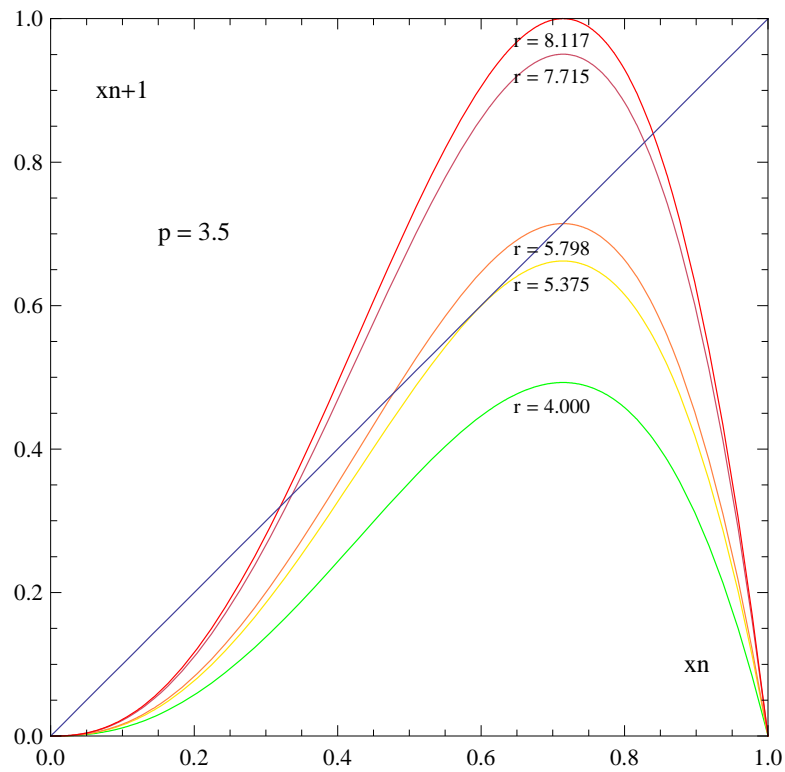


Figura 3.6: Taxas de crescimento populacional usando o modelo proporcional à densidade $Beta(3.5, 2)$

Para cada $p > 1$ fixo, o ponto crítico da aplicação $f_{r,p}$ é sempre dado por $c = \frac{p-1}{p}$. O comportamento dinâmico de todas as aplicações unimodais $f_{r,p}$ para cada $p > 1$ fixo, é idêntico e será estudado pormenorizadamente na secção 3.2.5. Para cada p fixo, quando se varia o valor do parâmetro r têm-se sucessivas bifurcações designadas usualmente por cascatas de duplicação de período. Associadas a estas cascatas tem-se sempre uma constante universal associada, a já referida constante de Feigenbaum, à qual será dedicada a secção 3.2.2.

A título exemplificativo, construíram-se diagramas de bifurcação para algumas aplicações da família unimodal em estudo, $f_{r,p}$, os quais podem ser observados nas Figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13.

Analisando os diagramas de bifurcação, verifica-se que nos diagramas

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

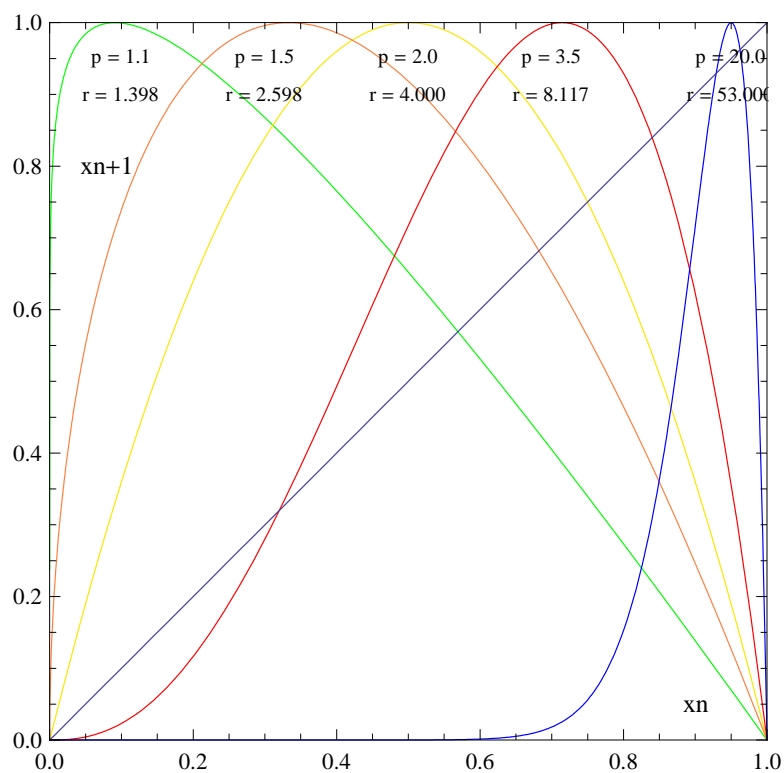


Figura 3.7: Três tipos de formato das taxas de crescimento populacional usando modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, $p > 1$: curva enviesada para a esquerda, simétrica e enviesada para a direita

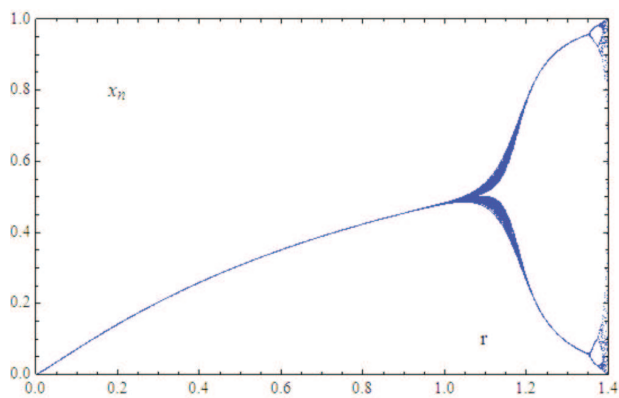


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(1.1, 2)$

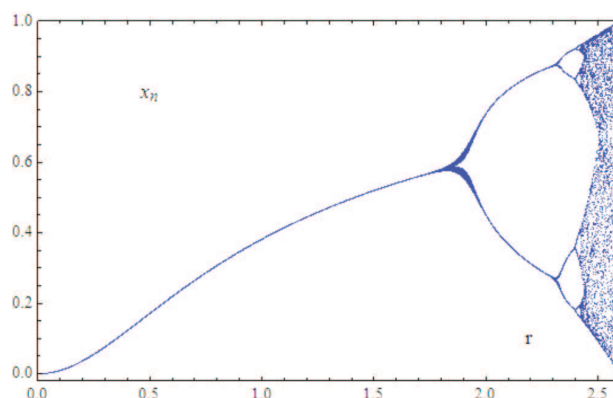


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$

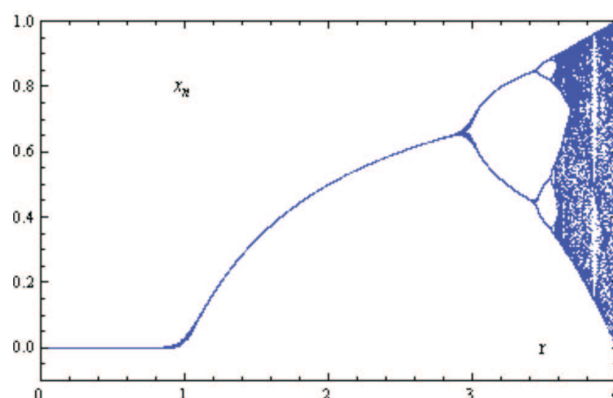


Figura 3.10: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(2, 2)$

correspondentes a valores do parâmetro p inferiores a dois, apenas numa pequena parte inicial do intervalo de variação do parâmetro r (r próximo de zero), as iteradas da função $f_{r,p}$ são atraídas para o ponto fixo zero (note-se que para p próximo de um, esse intervalo praticamente não existe); mas a amplitude do intervalo de valores do parâmetro r para o qual as iteradas da função $f_{r,p}$ são atraídas para o ponto fixo positivo é bastante grande. A zona de valores do parâmetro r correspondente à cascata de duplicação de período vai aumentando à medida que p aumenta entre 1 e 2, bem como a amplitude do intervalo de valores do parâmetro r associado ao caos; note-se que para valores de p próximos de um, estas duas últimas amplitudes de variação dos valores de r são muito pequenas, sobretudo a zona caótica. Para valores

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

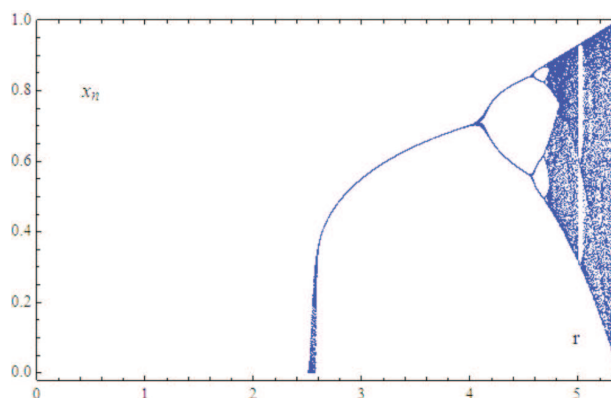


Figura 3.11: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$

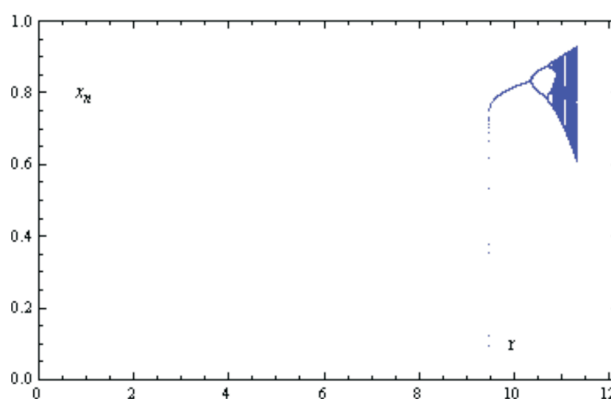


Figura 3.12: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(5, 2)$

de p superiores a dois, uma grande parte do intervalo de variação do parâmetro r , desde o início do mesmo, as iteradas da função $f_{r,p}$ são atraídas para o ponto fixo zero; a amplitude do intervalo de valores do parâmetro r para o qual as iteradas da função $f_{r,p}$ são atraídas para o ponto fixo positivo vai diminuindo à medida que o valor do parâmetro p vai aumentando e se afasta de 2. A zona de valores do parâmetro r correspondente à cascata de duplicação de período vai diminuindo à medida que p aumenta a partir de 2, bem como a amplitude do intervalo de valores do parâmetro r associado ao caos.

Na Figura 3.14, apresentam-se gráficos de modelos correspondentes a diferentes

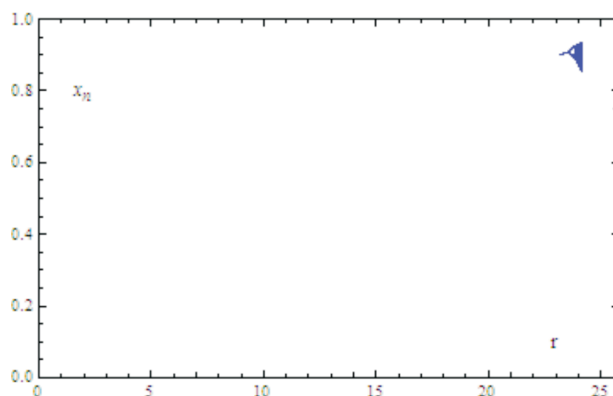


Figura 3.13: Diagrama de bifurcação do modelo proporcional à densidade $Beta(10, 2)$

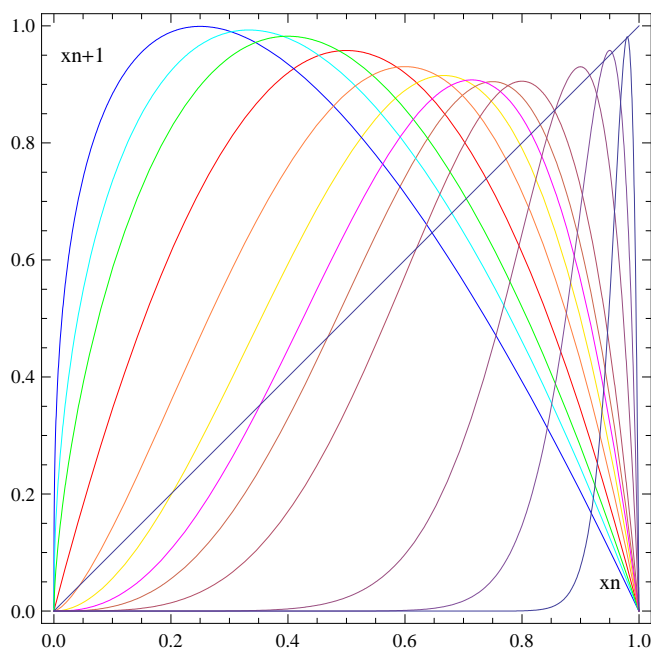


Figura 3.14: Taxas de crescimento populacional nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 1$, cujas iteradas constituem órbitas de período 3

valores do parâmetro p , todos eles relativos a valores do parâmetro r correspondentes a órbitas com o mesmo período (3, neste caso). De facto, evoluções populacionais de espécies com taxas de crescimento instantâneo e factores de retroacção distintos,

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

modeladas portanto através de modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com p adequado a cada caso, poderão apresentar comportamentos dinâmicos semelhantes no sentido em que a entropia topológica é a mesma, para valores do parâmetro r correspondentes a órbitas com o mesmo período.

3.2.2 Constante de Feigenbaum

Tendo generalizado a família das aplicações em estudo, $f_{r,p}$, é interessante investigar o que se passa relativamente à constante de Feigenbaum neste caso. Na subsecção 3.1.3, foi verificada a existência desta constante para um subconjunto desta família das aplicações, para valores do parâmetro p superiores a 2 e inteiros. Estude-se agora o que acontece para qualquer $p > 1$.

Os cálculos efectuados, os quais podem ser observados na Tabela 3.3, foram obtidos com a mesma fórmula (3.3) definida na subsecção 3.1.3 para o caso de p superior ou igual a 2 e inteiro. Recorde-se que esta fórmula é dada por

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde r_n o valor do parâmetro r associado à órbita para o período 2^n .

Estes cálculos permitem concluir que, a convergência para a constante de Feigenbaum é mais rápida para a família das aplicações logísticas $f_{r,2}$, e que à medida que p se afasta de 2 — quer quando diminui até 1, quer quando aumenta até ao valor máximo de p estudado — a convergência vai-se tornando um pouco mais lenta, mas é sempre verificada nesta família de aplicações unimodais $f_{r,p}$, o que vem mais uma vez salientar a universalidade desta constante, veja-se na Tabela 3.3 a distância à constante de Feigenbaum. O aparecimento da constante de Feigenbaum em qualquer aplicação da família $f_{r,p}$ era esperado, uma vez que estas são aplicações unimodais, com as propriedades definidas na secção 3.2.1.

Tabela 3.3: Constante de Feigenbaum nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 1$

		$Beta(1.1, 2)$		$Beta(1.5, 2)$	
n	2^n	r_n	δ_n	r_n	δ_n
0	1	0.127098161521025		0.866025403784450	
1	2	1.299561713609937		2.157632575128250	
2	4	1.368011651839911	17.1287744358	2.36872082050464	6.1188019685
3	8	1.378637307348070	6.4419496922	2.410912197668230	5.0031134219
4	16	1.380802602578542	4.9072548439	2.419880704226199	4.7043927426
5	32	1.381262674716717	4.7064254729	2.421798296800605	4.6769614555
6	64	1.381361026881841	4.6778038649	2.422208847046826	4.6707865653
		Dist.const.	0.0086022558	Dist.const.	0.0015849562
		$Beta(2, 2)$		$Beta(2.5, 2)$	
n	2^n	r_n	δ_n	r_n	δ_n
0	1	2.000000000000000		3.227486121839559	
1	2	3.236067977499769		4.37122090631690	
2	4	3.498561699327713	4.7089430135	4.640654095364646	4.2449662141
3	8	3.554640862768819	4.6807709980	4.699574974841031	4.5727964593
4	16	3.566667379856272	4.6629596111	4.712252372655581	4.6477108582
5	32	3.569243531637112	4.6684039259	4.714970072471902	4.6647527951
6	64	3.569795293749944	4.6689537410	4.715552224228679	4.6683700336
		Dist.const.	0.0002478681	Dist.const.	0.0008315755
		$Beta(3, 2)$		$Beta(4, 2)$	
n	2^n	r_n	δ_n	r_n	δ_n
0	1	4.500000000000000		7.111111111111111	
1	2	5.551883678377213		8.006388088621897	
2	4	5.813996284641623	4.0130983907	8.243423096224173	3.7769820862
3	8	5.871964588515327	4.5216538824	8.296403721342422	4.4739941643
4	16	5.884459868104089	4.6392162306	8.307847717287025	4.6295564394
5	32	5.887139699399200	4.6627112727	8.310303243875927	4,6605058142
6	64	5.887713807213475	4.6678188809	8.310829349375576	4.6673653678
		Dist.const.	0.0013827282	Dist.const.	0.0018362413

3.2.3 Modelos de crescimento proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$ e derivada de Schwarz

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

A derivada de Schwarz tem um papel importante em dinâmica unidimensional. Usualmente, esta derivada assume valores negativos em todo o intervalo onde a aplicação unimodal respectiva está definida. Esta condição de negatividade tem consequências dinâmicas benéficas (propriedades herdadas pelo “bom” comportamento da derivada de Schwarz negativa), nomeadamente a continuidade da entropia topológica relativamente ao parâmetro r , a monotonicidade da entropia topológica em função do parâmetro r e as cascatas de duplicação de período. O papel da derivada de Schwarz na dinâmica unidimensional, Graczyk et al. (2001), está relacionado com o Teorema de Singer(1978), o qual indica uma ordem na sucessão das bifurcações e revela a existência de um limite superior para o número de órbitas estáveis, e também com a propriedade relevante da não existência de intervalos errantes demonstrada em Guckenheimer (1979).

Vários investigadores, veja-se Yoccoz (1984), Sullivan (1985), Melo e Strien (1988) e (1989), Blokh e Lyubich (1989), Lyubich (1989), Martens et al. (1992) determinaram posteriormente condições que substituem a derivada de Schwarz negativa: condições de Koebe, condições de Zygmund, etc. Estas condições relacionam-se também fortemente com a não existência de intervalos errantes, Guckenheimer e Johnson (1990), Jiang (1993), Martens (1994), Sullivan e Hu (1997). O objectivo de introduzir estas novas condições era enfraquecer a forte diferenciabilidade (C^3) das aplicações, mantendo as consequências dinâmicas da derivada de Schwarz negativa.

Um estudo relativamente recente com aplicações unimodais, no qual não existiam pontos onde a derivada de todas as ordens se anulem (*flat points*), afirma que a condição de derivada de Schwarz negativa pode ser substituída por condições mais fracas, Kozlovski (2000).

Num outro estudo com aplicações unimodais com dois parâmetros, com derivada de Schwarz positiva para todos os valores de um dos parâmetros, Oliveira e Ramos (2003a) e (2003b), enveredou-se por outro caminho, pensando que a derivada de

Schwarz positiva poderia revelar comportamentos dignos de estudo, um dos quais estaria associado à existência de bifurcações inversas, como Singer sugeriu. Neste trabalho, o objectivo dos autores não era substituir a condição da derivada de Schwarz por outras condições mais fracas que não alterassem as propriedades da derivada de Schwarz negativa.

A derivada de Schwarz para as aplicações $f_{r,p}$, para $p \in]1, 2[$ é positiva numa pequena parte inicial do intervalo $[0, 1]$, qualquer que seja o valor do parâmetro r no seu intervalo de variação.

Para um dado p fixo, a derivada de Schwarz para a família das aplicações unimodais $f_{r,p}$ é dada por

$$S(f_{r,p}(x)) = -\frac{p(p-1)[2 + p^2(x-1)^2 + 4x + p(x^2 + 2x - 3)]}{2[1 + p(x-1)]^2 x^2}, \quad \text{com } x \in [0, 1].$$

O denominador é sempre positivo, pelo que o sinal da derivada de Schwarz só depende do sinal do numerador. Se $p > 2$, a derivada de Schwarz $S(f_{r,p}(x))$ é sempre negativa para qualquer $x \in [0, 1]$, o que é usual acontecer na dinâmica unidimensional. No caso de $p \in]1, 2[$, $S(f_{r,p}(x))$ não é sempre negativa em todo o intervalo $I = [0, 1]$. No entanto, verifica-se que a amplitude do intervalo onde a derivada de Schwarz é positiva é muito pequena. Assim, para $p \in]1, 2[$, tem-se

$$S(f_{r,p}(x)) \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in [0, x_d[\\ = 0 & \text{se } x = x_d \\ < 0 & \text{se } x \in]x_d, 1] \end{cases} .$$

Mesmo para $p \cong 2$ (mas $p < 2$), verifica-se que $0 < x_d \leq 0.102$. O valor $x_d = 0.102$ é obtido para $p \cong 1.725$. Na Tabela 3.4 podem observar-se os valores de x_d para alguns valores do parâmetro $p \in]1, 2[$.

Para que o comportamento dinâmico das aplicações unimodais seja mantido com as suas propriedades benéficas: continuidade e monotonicidade não decrescente da entropia topológica em função do parâmetro r , e as cascatas de duplicação de

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

Tabela 3.4: Extremo superior do intervalo onde a derivada de Schwarz é positiva

p	x_d	p	x_d
1.0001	0.000025	1.7200	0.101013
1.0010	0.000250	1.7250	0.102000
1.0100	0.002484	1.7260	0.102000
1.0300	0.007360	1.7265	0.101019
1.3333	0.066947	1.7270	0.101019
1.5000	0.088304	1.7300	0.101013
1.6667	0.100000	1.7500	0.100810
1.7000	0.100826	1.9500	0.068777
1.7100	0.100950	1.9950	0.024577

período, poder-se-ia fazer para cada p fixo, uma restrição do intervalo $I = [0, 1]$ ao intervalo $I_p^* =]x_d(p), x_{d1}(p)[$, onde $x_{d1}(p)$ é tal que $f_{r,p}(x_d(p)) = f_{r,p}(x_{d1}(p))$. E assim, as aplicações unimodais $g_{r,p} : I_p^* \rightarrow I_p^*$ definidas por

$$g_{r,p}(x) = rx^{p-1}(1-x)$$

têm sempre derivada de Schwarz negativa no seu domínio respectivo I_p^* . No entanto, como o subintervalo de I onde a derivada de Schwarz é positiva tem uma amplitude mínima, e além disso ocorre no início do intervalo I , não perturbando a dinâmica unidimensional das aplicações $f_{r,p}$, não se achou necessário efectuar a restrição mencionada.

3.2.4 O efeito de Allee nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]2, +\infty[$

O conceito de efeito de Allee foi abordado pela primeira vez em meados do século passado por Allee e Odum, que alertaram para a possibilidade de existir

uma correlação positiva entre qualquer componente mensurável do desempenho individual e a dimensão da população, quantificada pelo número ou densidade dos indivíduos da mesma espécie. Quando manifestada ao nível do desempenho total, a relação é referida como o efeito de Allee demográfico.

A ideia geral associada ao fenómeno designado por efeito de Allee relaciona-se geralmente com o facto de que para populações pequenas ou isoladas, a reprodução e a sobrevivência da espécie diminuem. Este efeito usualmente satura-se ou desaparece à medida que a dimensão da população aumenta. Assim, o efeito de Allee demográfico, o qual se designa vulgarmente apenas por efeito de Allee, é manifestado por uma redução na taxa de crescimento *per capita* a baixas dimensões populacionais. Quando o efeito de Allee é suficientemente forte, há um limite crítico abaixo do qual as populações se extinguem. No entanto, este efeito de Allee demográfico pode também afectar populações de maiores dimensões, Stephens et al. (1999).

Até ao fim do século *XX*, este conceito era usualmente visto como intrigante, mas não muito importante na ecologia populacional. Desde então tem vindo a ser vastamente reconhecido que indivíduos de muitas espécies beneficiam da presença de outros indivíduos da mesma espécie. Este fenómeno atraiu muita atenção durante a última década com o crescente aumento do interesse pela preservação biológica. As consequências do efeito de Allee na dinâmica populacional são de primordial importância na preservação biológica e noutros campos da ecologia.

A causa mais citada e óbvia do efeito de Allee é a dificuldade de encontrar parceiros sexuais em populações com baixas dimensões, nas espécies de reprodução sexuada. Outras causas menos frequentemente mencionadas relacionam-se com a necessidade de uma dimensão mínima de grupo para criar descendência, para procurar alimento e/ou sustentar ataques de predadores.

Baseado numa evidência difundida em populações naturais, vários modelos têm sido propostos para invocar o efeito de Allee; todos estes modelos partilham a falta

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

de cooperação a baixas dimensões populacionais, Boukal e Berec (2002). Muitos estudos da dinâmica populacional de uma determinada espécie que exiba o efeito de Allee, são baseados numa simples heurística, não espacial, e modelos determinísticos. Estes modelos não fornecem nenhum detalhe de profundo conhecimento no âmbito da biologia subjacente. Este assunto é objecto de estudo da secção 4.1.

Nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, para valores do parâmetro p superiores a 2, o efeito de Allee surge naturalmente a partir de certos valores elevados do parâmetro r .

Definição 9. *Considerando a aplicação unimodal $f_{r,p}$ em estudo, para valores do parâmetro $p > 2$, a partir de determinado valor do parâmetro r , tem-se*

$$f_{r,p}^2(c) < x^*,$$

onde $f_{r,p}^2$ é a função composta de $f_{r,p}$, $c = \frac{p-1}{p}$ é o ponto crítico de $f_{r,p}$, e x^* é o menor ponto fixo positivo. O ponto x^* designa-se por ponto de Allee. O primeiro valor de r nestas condições denota-se por r_e .

O valor r_e correspondente ao valor do parâmetro r a partir do qual surge o chamado efeito de Allee natural, ou seja, desde este valor de r , todas as iteradas da aplicação $f_{r,p}$ são atraídas para o ponto fixo zero, havendo portanto uma extinção provocada pelo efeito do ponto de Allee. Veja-se a Figura 3.15.

Nestes modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, para valores do parâmetro p superiores a 2 e para valores do parâmetro r superiores ou iguais a r_e , o menor ponto fixo positivo x^* da aplicação $f_{r,p}$, corresponde à razão entre o limite crítico de rarefacção e o limite sustentável, ou seja,

$$x^* = \frac{E}{K}.$$

Assim, ao determinar o ponto de Allee, x^* , numa aplicação $f_{r,p}$, para um dado valor do parâmetro $r \geq r_e$ e para um dado valor do parâmetro $p \in]2, +\infty[$, conhecendo o valor de K pode obter-se o valor de E , ou conhecendo o valor de E pode determinar-se o valor de K . Também, se para uma dada espécie, forem

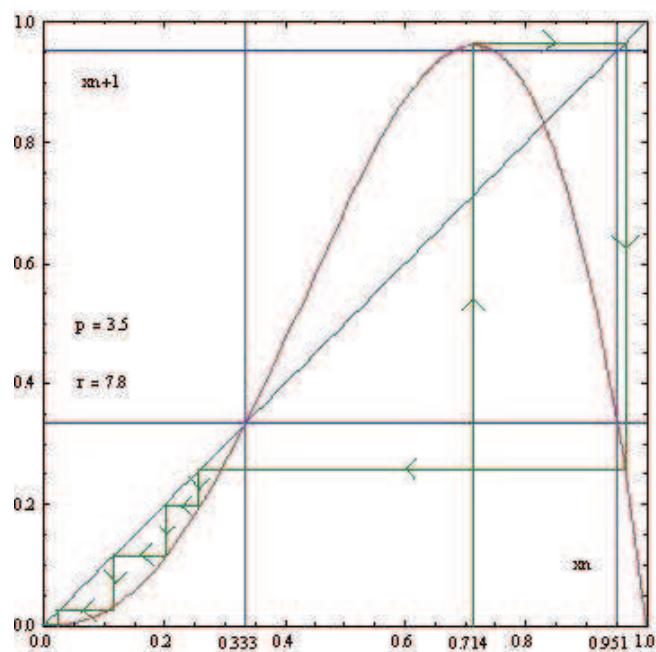


Figura 3.15: Efeito de Allee

conhecidos os valores de E , K e a taxa de crescimento intrínseca $r > r_e$, pode determinar-se o valor do parâmetro $p \in]2, +\infty[$ a usar, igualando o primeiro ponto fixo positivo de $f_{r,p}$, $x^*(p)$ a $\frac{E}{K}$, e resolvendo em ordem a p . Note-se que é possível determinar o valor de r_e para cada $p \in]2, +\infty[$. Na tabela 3.5 podem observar-se a título de exemplo, os valores de r_e para alguns valores do parâmetro p , calculados computacionalmente.

Tabela 3.5: Valor do parâmetro r a partir do qual surge o efeito de Allee

p	r_e
2.5	5.341
3.0	6.544
3.5	7.715
4.0	8.897

3.2.5 Caracterização do espaço de parâmetros

Nesta secção divide-se o espaço de parâmetros em regiões distintas, caracterizando-as relativamente ao comportamento dinâmico das respectivas aplicações unimodais pertencentes à família das funções $f_{r,p}$ proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, p_{mc}]$. Neste trabalho, o valor máximo considerado para o parâmetro p foi $p_{mc} = 20$, uma vez que acima desse valor julga-se que os modelos deixam de ter sentido para aplicação prática devido ao seu comportamento dinâmico.

Posteriormente sumarizam-se alguns resultados importantes relativamente à dinâmica dos modelos nas várias regiões consideradas.

Considere-se então o espaço de parâmetros definido por

$$\begin{aligned} R &= \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p \leq p_{mc} \wedge 0 < r \leq r_{fs}(p_{mc})\} \\ &= \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p \leq 20 \wedge 0 < r \leq 53\}, \end{aligned}$$

o qual se pretende dividir em determinados subconjuntos, correspondentes a regiões do plano, onde a dinâmica unidimensional das respectivas aplicações $f_{r,p}$ tem propriedades comuns. Designa-se por $r_{fs}(p_{mc})$ o valor do parâmetro r correspondente ao *full shift* para a aplicação $f_{r,p_{mc}}$.

Pareceu pertinente particionar R em 7 regiões, cada uma com um tipo de comportamento próprio, associada a uma determinada dinâmica de evolução populacional de eventuais espécies. Assim, para cada valor de p estudado, percorrendo o intervalo de variação considerado para o parâmetro r , determinaram-se os pontos $(r_i(p), p)$, com $i = 1, 2^*, 2^{**}, 3, 4, 5$. Observe-se, a título de exemplo, a Figura 3.16 onde estão representadas as aplicações $f_{r_i(4),4}$, com $i = 1, 2^*, 2^{**}, 3, 4, 5$, para $p = 4$.

Unindo os pontos determinados para cada $p \in]1, p_{mc}]$ definem-se 6 curvas, as quais delimitam as 7 regiões pretendidas. Observe-se a Figura 3.17. Note-se que

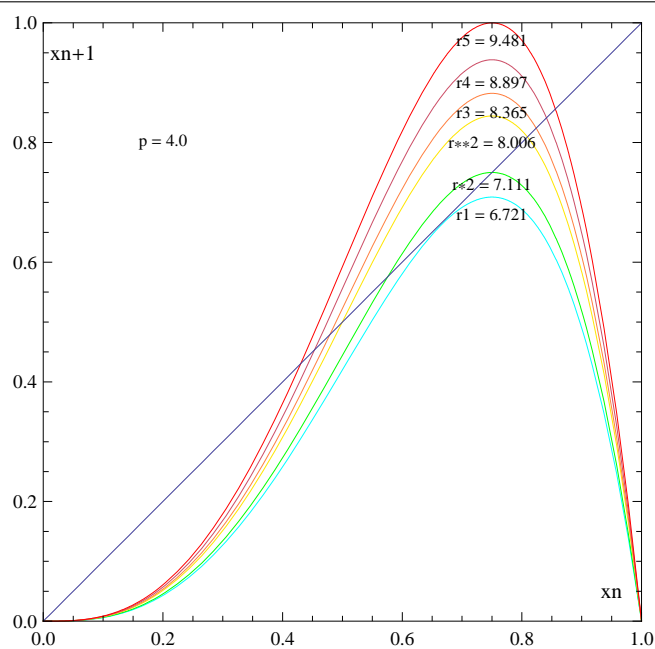


Figura 3.16: Aplicações $f_{r_i(4),4}$, com $i = 1, 2^*, 2^{**}, 3, 4, 5$ para $p = 4$

cada linha deste gráfico, corresponde à informação sumarizada num diagrama de bifurcação para uma aplicação $f_{r,p}$, para um dado p fixo.

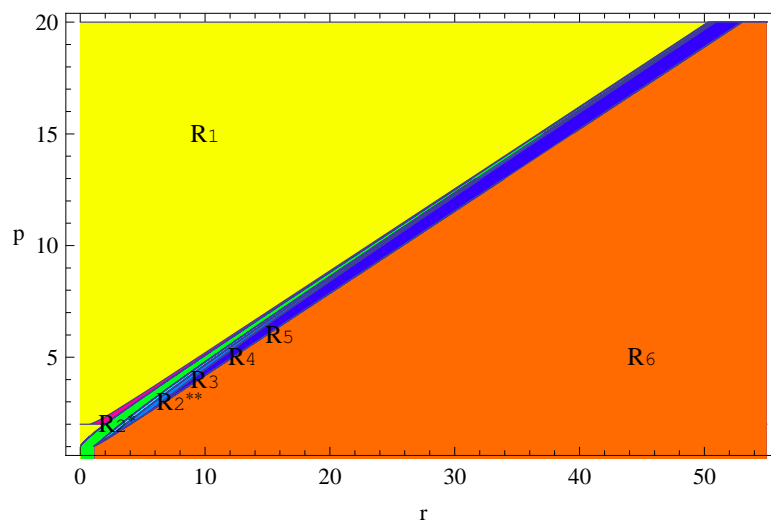


Figura 3.17: Gráfico de regiões para $1 < p \leq 20$

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

Nota 4. *Passando agora a explicar a estrutura de cada uma das regiões, há que clarificar o seguinte: antes de definir cada uma delas, começa por explicitar-se a curva que delimita superiormente a respectiva região. Saliente-se no entanto que esta curva pertence de facto à região seguinte, à excepção da última região.*

Região de extinção súbita

A primeira curva determinada diz respeito aos pontos de ordenada p , com $p \in [2, 20]$, cujas abcissas correspondem para cada p , ao primeiro valor do parâmetro r , seja $r_1(p)$, para o qual as iteradas da aplicação $f_{r,p}$ são atraídas para o único ponto fixo positivo. Esta função $r_1(p)$, para $p \in [2, 20]$, define uma curva ou linha estável ou atractiva. Note-se que esta curva pertence à região R_2 .

Assim, a primeira região denotada por R_1 pode pois ser definida por

$$R_1 = \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq p \leq 20 \wedge 0 < r < r_1(p)\}.$$

Genericamente, as iteradas das aplicações $f_{r,p}$, cujos valores dos parâmetros pertençam a esta região R_1 , são sempre atraídas para o ponto fixo atractivo $x^* = 0$. Esta é portanto uma região de extinção na medida em que uma aplicação $f_{r,p}$, com $(r, p) \in R_1$ poderá modelar apenas espécies em vias de extinção, que quando surgem estão imediatamente condenadas a desaparecer. A taxa de crescimento não é suficientemente grande para estabilizar a população. Ela decrescerá e a espécie extinguir-se-á. As aplicações unimodais $f_{r,p}$ da região R_1 não têm pois um comportamento caótico, a sua entropia topológica é nula, veja-se por exemplo Lind e Marcus (1995). As sequências simbólicas associadas às órbitas do ponto crítico $c = \frac{p-1}{p}$ são do tipo CL^∞ , para todo o $p \in [2, 20]$.

Região de estabilidade ou de equilíbrio

A segunda curva determinada corresponde aos pontos de ordenada p , com $p \in]1, 20]$, cujas abcissas correspondem para cada p , ao primeiro valor do parâmetro r , seja $r_2(p)$, para o qual surge uma órbita de período 2. Esta curva $r_2(p)$, para $p \in]1, 20]$, é designada por linha de início de duplicação de período. Note-se que esta curva pertence à região R_3 .

A segunda região designada por R_2 é pois definida do seguinte modo

$$R_2 = \left\{ (r, p) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p \leq 20 \wedge r_1(p) \leq r < r_2(p) \right\}.$$

Nota 5. *Esta região contém uma terceira curva $r^*(p)$ super estável ou super atractiva, cuja expressão pode ser explicitada resolvendo-se a equação $f_{r,p}(c) = c$, com $c = \frac{p-1}{p}$, em ordem a r , obtendo-se $r^*(p) = p \left(\frac{p}{p-1} \right)^{p-2}$. Assim esta curva divide a região R_2 em duas subregiões denotadas por R_2^* e R_2^{**} , as quais são delimitadas pelas curvas $r_1(p)$, $r^*(p)$ e $r_2(p)$, respectivamente.*

De um modo genérico pode dizer-se que as iteradas das aplicações $f_{r,p}$, cujos valores dos parâmetros pertençam a esta região R_2 , convergem para o maior ponto fixo positivo atractivo (único se $p \in]1, 2]$). Esta é pois uma região de estabilidade ou equilíbrio, uma vez que uma aplicação $f_{r,p}$, com $(r, p) \in R_2$ poderá modelar evoluções populacionais de espécies cuja dimensão se mantém sensivelmente constante ao longo do tempo em torno de determinado valor. De facto, para cada valor do parâmetro p , obtém-se uma alteração drástica quando $r \in [r_1(p), r_2(p)[$. Surge a possibilidade de se estabelecer o equilíbrio entre as duas forças competitivas, reprodução por um lado e limitação de recursos por outro. As aplicações unimodais $f_{r,p}$ da região R_2 também não têm um comportamento caótico, sendo a sua entropia topológica nula, veja-se por exemplo Lind e Marcus (1995). Nesta região as sequências simbólicas associadas às órbitas do ponto crítico são do tipo CL^∞ , na região R_2^* , e do tipo CR^∞ na região R_2^{**} .

Região de duplicação de período

A quarta curva determinada é relativa aos pontos de ordenada p , com $p \in]1, 20]$, cujas abcissas relativas ao valor do parâmetro r (denotado por $r_3(p)$), deixam de corresponder aos pontos de acumulação de Feigenbaum, isto é, onde a aplicação deixa de ter apenas órbitas de período 2^n , com n suficientemente grande na Ordem de Sharkovsky e passa a ter órbitas com períodos distintos. Designa-se esta curva por linha de início do caos, a qual pertence à região R_4 .

A terceira região denotada por R_3 é assim definida por

$$R_3 = \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p \leq 20 \wedge r_2(p) \leq r < r_3(p)\}.$$

Genericamente as órbitas formadas pelas iteradas das aplicações $f_{r,p}$, cujos valores dos parâmetros pertençam a esta região R_3 , são caracterizadas por órbitas de duplicação de período. Assim, a região R_3 enquadra dinâmicas populacionais correspondentes a espécies cujas oscilações populacionais aparecem em ciclos de período 2^n , com $n \in \mathbb{N}$. As aplicações unimodais $f_{r,p}$ da região R_3 não têm ainda um comportamento caótico, sendo a sua entropia topológica nula, veja-se por exemplo Milnor e Thurston (1988).

Região caótica

A quinta curva determinada diz respeito aos pontos de ordenada p , com $p \in]2, 20]$, cujas abcissas correspondem para cada p , ao primeiro valor do parâmetro r para o qual surge o efeito de Allee natural, seja $r_4(p)$. Veja-se a Definição 9. A curva $r_4(p)$, para $p \in]2, 20]$, designa-se portanto por linha do efeito de Allee natural, e pertence à região R_5 .

A quarta região denotada por R_4 é definida por

$$R_4 = \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 2 < p \leq 20 \wedge r_3(p) \leq r < r_4(p)\}.$$

Saliente-se que, embora neste trabalho se estudem essencialmente órbitas periódicas, é nesta região caótica que habitualmente se processa ao estudo de órbitas eventualmente periódicas ou aperiódicas em função da variação do parâmetro malthusiano r , veja-se Rocha (2003), e Alves e Ramos (1999). Portanto, as iteradas de aplicações $f_{r,p}$, cujos valores dos parâmetros pertençam a esta região R_4 , vão constituir órbitas dos vários tipos referidos, as quais já apresentam comportamentos caóticos, passando pois a sua entropia topológica a ser positiva. O valor da entropia topológica vai aumentando com o valor do parâmetro r , até atingir o valor máximo $\ln 2$, para $r = r_4(p)$, veja-se por exemplo Melo e van Strien (1993). Veja-se o gráfico da Figura 2.5 para a aplicação logística. As sequências simbólicas associadas às várias órbitas do ponto crítico $c = \frac{p-1}{p}$ que vão surgindo quando se aumenta o valor do parâmetro r são as mesmas, para todo o $p \in]2, 20]$. Veja-se em pormenor a complexidade desta região nas secções 2.4 e 3.1.2 (observem-se as Figuras 2.4 e 3.5).

Região de extinção devido ao efeito de Allee

A sexta e última curva determinada está associada aos pontos de ordenada p , com $p \in]1, 20]$, cujas abcissas correspondem para cada p , ao valor do parâmetro r correspondente ao *full shift*, denotado por $r_5(p)$. Esta curva designa-se portanto por linha do *full shift* e pertence à região R_5 .

A quinta região denotada por R_5 é definida por

$$R_5 = \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 2 < p \leq 20 \wedge r_4(p) \leq r \leq r_5(p)\}.$$

De uma forma genérica pode dizer-se que as iteradas das aplicações $f_{r,p}$, cujos valores dos parâmetros pertençam a esta região R_5 , são todas atraídas para o ponto fixo $x^* = 0$, pelo que aplicações $f_{r,p}$, com $(r, p) \in R_5$, poderão modelar evoluções populacionais de espécies que outrora se desenvolveram desordenadamente e que agora se encontram em vias de extinção, por já serem poucos indivíduos e estarem espacialmente muito afastados pelo que a reprodução se torna impossível, o que leva

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

à extinção dessas espécies. As aplicações unimodais $f_{r,p}$ da região R_5 apresentam comportamentos caóticos, com entropia topológica máxima $\ln 2$, veja-se por exemplo Milnor e Thurston (1988).

Região de extinção diferida

A região R_6 definida por

$$R_6 = \{(r, p) \in \mathbb{R}^2 : 1 < p \leq 20 \wedge r_5(p) < r \leq 53\}.$$

é designada por região de extinção diferida pois o gráfico de qualquer aplicação $f_{r,p}$, com $(r, p) \in R_6$, deixa de estar totalmente contido no conjunto invariante $[0, 1] \times [0, 1]$. A dinâmica perde todo o seu determinismo e a população evolui como um gerador de números aleatórios. A esta região estão associados os conjuntos de Cantor.

Resumindo os resultados explicitados nas várias regiões, relativamente à complexidade topológica dos sistemas dinâmicos pertencentes a cada região considerada, medida em termos de entropia topológica, pode enunciar-se o teorema seguinte:

Teorema 3. *A entropia topológica da família de aplicações unimodais $f_{r,p}(x) = rx^{p-1}(1-x)$ definidas no espaço de parâmetros R é caracterizada do seguinte modo:*

1. *nas regiões R_1 , R_2 e R_3 , a entropia topológica é nula;*
2. *na região R_4 , os conjuntos onde a entropia topológica é constante são conexos e indexados de forma estritamente monótona e contínua, por este invariante topológico, a menos de conjuntos de medida nula;*
3. *na região R_5 a entropia topológica é constante e igual ao seu valor máximo, $\ln 2$.*

Observem-se as Figuras 3.18 e 3.19. Estas representam ampliações da Figura 3.17. Os gráficos representados nestas figuras diferem apenas no intervalo de variação dos parâmetros e permitem avaliar mais pormenorizadamente a alteração da amplitude das várias regiões em função da variação dos valores dos parâmetros r e p .

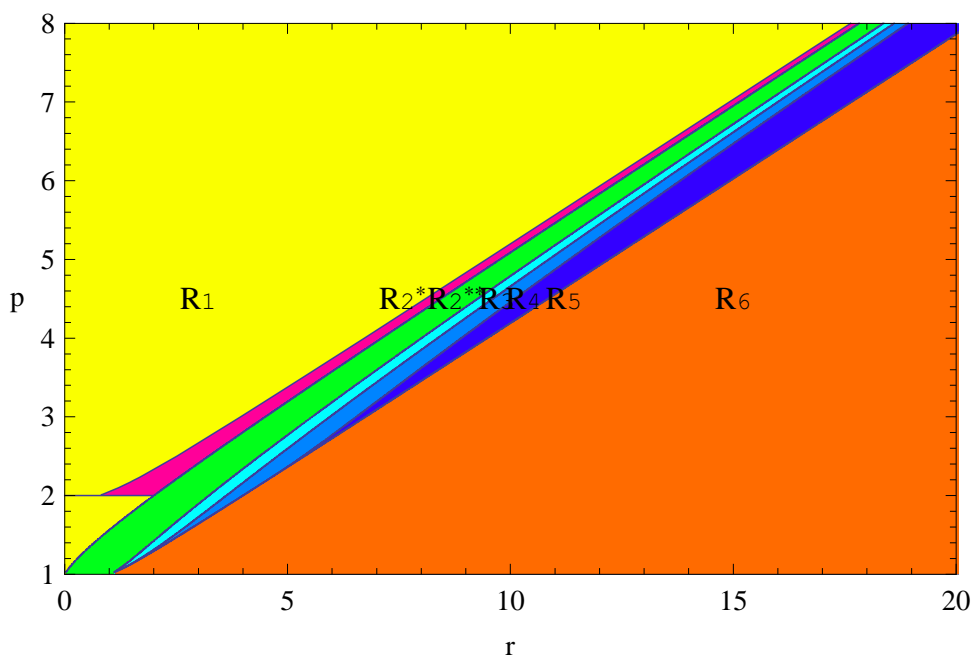


Figura 3.18: Gráfico de regiões para $1 < p \leq 8$

Note-se que, observando os gráficos das Figuras 3.17, 3.18 e 3.19, verifica-se que à medida que o valor do parâmetro p aumenta, a amplitude da região de extinção súbita, R_1 , vai claramente aumentando, as amplitudes das regiões de equilíbrio, R_2^* e R_2^{**} , de duplicação de período, R_3 , e caótica R_4 , vão diminuindo e a amplitude da região do efeito de Allee, R_5 , vai aumentando lentamente. À medida que se aumenta p , a região de extinção diferida, R_6 , vai claramente diminuindo, na proporção inversa à que a extinção súbita, R_1 , vai aumentando.

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

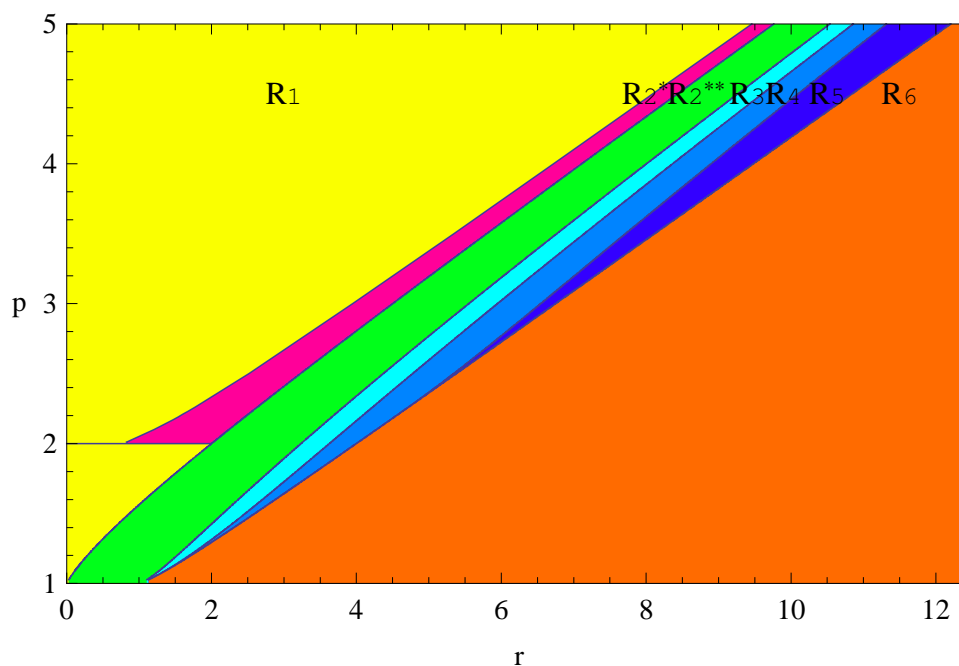


Figura 3.19: Gráfico de regiões para $1 < p \leq 5$

Na verdade, pensa-se que a imensa variedade de novos modelos apresentados neste trabalho, permite certamente a sua aplicação prática a um vasto conjunto de crescimentos populacionais distintos nas mais variadas situações. A riqueza inerente a estes modelos certamente representa uma mais valia no estudo da dinâmica das populações.

As regiões R_3 e R_4 , podem ser observadas em detalhe na Figura 3.20, vejam-se estudos análogos em Lopez-Ruiz e Fournier-Prunaret (2005).

Na região R_3 pode observar-se a parte inicial da cascata de duplicação de período, identificando claramente as zonas correspondentes aos períodos 2, 4 e 8.

Podem observar-se na região R_4 as curvas correspondentes a vários períodos da zona caótica, as quais aparecem de acordo com a Ordem de Sharkovsky.

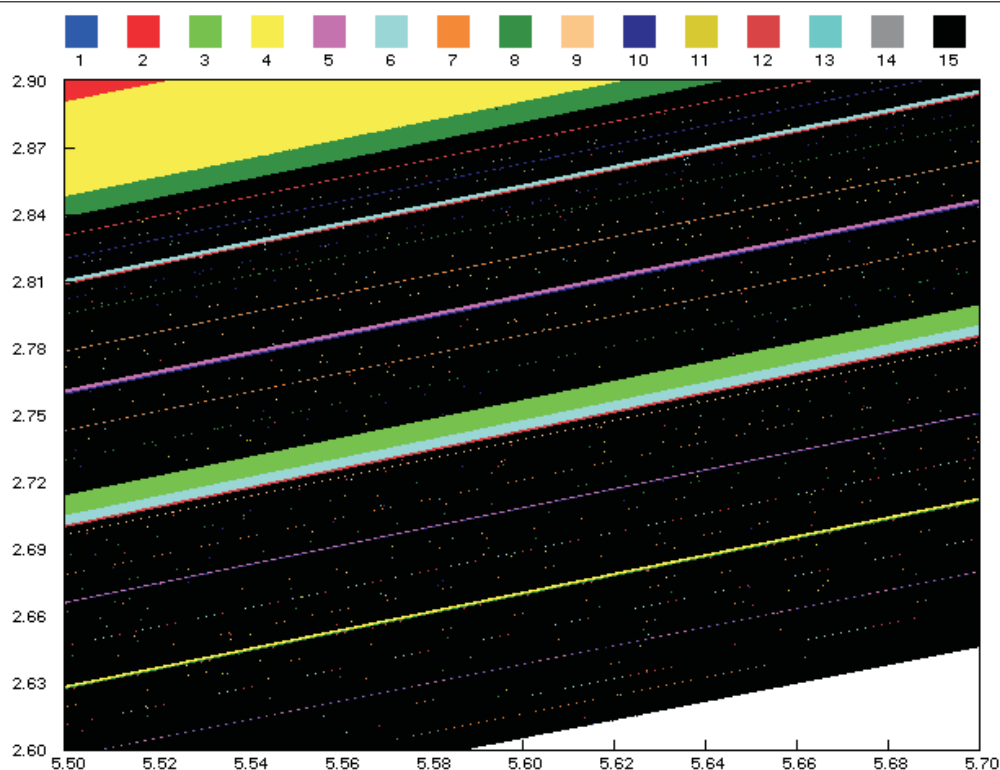


Figura 3.20: Gráfico das regiões R_3 e R_4 para $5.5 < p \leq 5.7$ e $2.6 < r < 2.9$

A Figura 3.20 representa uma ampliação de uma área particular do gráfico 3.19, confirmando uma parte do estudo que foi feito relativamente à caracterização do espaço de parâmetros.

Na Tabela 3.6, apresentam-se alguns valores do parâmetro r que definem as curvas, para certos valores do parâmetro p . Nesta tabela, podem também observar-se para cada p , o valor do ponto crítico e os valores das amplitudes dos intervalos das várias regiões estudadas. Note-se que, o valor do ponto crítico vai aumentando desde valores muito próximos de zero até valores muito próximos de um, à medida que o valor do parâmetro p vai aumentando.

3.2. Generalização dos modelos de crescimento populacionais proporcionais à densidade $Beta(p, 2)$

Nesta Tabela, fez-se variar o valor do parâmetro p para além do valor máximo considerado neste trabalho para as regiões, para que se perceba que para esses valores do parâmetro superiores a 20 os modelos parecem perder o seu interesse prático, no sentido em que não será fácil poderem modelar crescimentos populacionais de alguma população.

Quando os valores do parâmetro r que definem as curvas são muito elevados, a amplitude da região de extinção súbita torna-se enorme, as amplitudes das regiões de equilíbrio, de duplicação de período e caótica tendem a desaparecer, a amplitude da região do efeito de Allee vai aumentando lentamente, e a região de extinção diferida torna-se pequena. Ou seja, para valores muito elevados do parâmetro p , o crescimento populacional é genericamente conduzido para a extinção, súbita para a maioria das aplicações.

Legenda da Tabela 3.6:

$pc \rightarrow$ ponto crítico;

$r_i(p) \rightarrow$ ponto da curva que delimita a região R_{i+1} , $i = 1, 2, 3, 4$ para um dado p ,

$(r_5(p) \in R_5)$;

$A.R_i(p) \rightarrow$ amplitude da região R_i , $i = 1, 2, 3, 4$ para um dado p .

Tabela 3.6: Pontos das curvas que delimitam as regiões e amplitudes das mesmas no espaço de parâmetros

p	pc	$r_1(p)$	$A.R_1(p)$	$r^*(p)$	$A.R_2^*(p)$	$r_2(p)$	$A.R_2^{**}(p)$	$r_3(p)$	$A.R_3(p)$	$r_4(p)$	$A.R_4(p)$	$r_5(p)$	$A.R_5(p)$
1.05	0.0476		0.058	0.058	0.000	1.172	1.114	1.220	0.048		0.003	1.223	0.000
1.10	0.0909		0.127	0.127	0.000	1.299	1.172	1.391	0.092		0.007	1.398	0.000
1.20	0.1667		0.286	0.286	0.000	1.524	1.238	1.691	0.167		0.026	1.717	0.000
1.33	0.2500		0.528	0.528	0.000	1.807	1.279	2.050	0.243		0.067	2.117	0.000
1.50	0.3333		0.866	0.866	0.000	2.157	1.291	2.465	0.308		0.133	2.598	0.000
1.67	0.4000		1.228	1.228	0.000	2.511	1.283	2.859	0.348		0.211	3.070	0.000
2.00	0.5000		2.000	2.000	0.000	3.236	1.236	3.627	0.391		0.373	4.000	0.000
2.50	0.6000		2.516	3.228	0.712	4.371	1.144	4.776	0.405	5.341	0.565	5.379	0.038
3.00	0.6667		3.950	4.500	0.550	5.552	1.052	5.947	0.395	6.544	0.597	6.750	0.206
3.50	0.7143		5.343	5.789	0.446	6.766	0.977	7.145	0.379	7.715	0.570	8.117	0.402
4.00	0.7500		6.721	7.111	0.390	8.006	0.895	8.365	0.359	8.897	0.532	9.481	0.584
5.00	0.8000		9.461	9.766	0.305	10.540	0.774	10.862	0.322	11.318	0.456	12.207	0.889
10.00	0.9000		23.084	23.231	0.147	23.686	0.455	23.889	0.203	24.145	0.256	25.812	1.667
15.00	0.9333		36.683	36.781	0.098	37.101	0.320	37.248	0.147	37.425	0.177	39.407	1.982
20.00	0.9500		50.278	50.351	0.073	50.599	0.248	50.713	0.114	50.849	0.136	53.001	2.152
30.00	0.9667	77.465	77.465	77.513	0.048	77.683	0.170	77.762	0.079	77.854	0.092	80.186	2.332
40.00	0.9750	104.650	104.650	104.686	0.036	104.814	0.128	104.875	0.061	104.945	0.070	107.369	2.424
50.00	0.9800	131.833	131.833	131.862	0.029	131.966	0.104	132.015	0.049	132.072	0.057	134.553	2.481
60.00	0.9830	159.017	159.017	159.041	0.024	159.128	0.087	159.169	0.041	159.217	0.048	161.736	2.519
70.00	0.9857	186.200	186.200	186.221	0.021	186.295	0.074	186.331	0.036	186.372	0.041	188.919	2.547
80.00	0.9875	213.383	213.383	213.401	0.018	213.467	0.066	213.498	0.031	213.534	0.036	216.102	2.568
90.00	0.9889	240.566	240.566	240.582	0.016	240.640	0.058	240.668	0.028	240.701	0.033	243.285	2.584
100.00	0.9900	267.749	267.749	267.764	0.015	267.816	0.052	267.841	0.025	267.870	0.029	270.468	2.598
200.00	0.9950	539.579	539.579	539.586	0.007	539.612	0.026	539.624	0.012	539.640	0.016	542.297	2.657
300.00	0.9967	811.407	811.407	811.412	0.005	811.429	0.017	811.437	0.008	811.448	0.011	814.125	2.677
400.00	0.9975	1083.235	1083.235	1083.240	0.005	1083.250	0.010	1083.260	0.010	1083.270	0.010	1085.950	2.680
500.00	0.9980	1355.063	1355.063	1355.066	0.003	1355.077	0.011	1355.082	0.005	1355.082	0.000	1357.782	2.700

Modelos de crescimento baseados em
aplicações proporcionais a densidades
 $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$ com efeito de
Allee

Uma das críticas apontadas ao modelo logístico (modelo proporcional à densidade $Beta(2, 2)$), na modelação do crescimento populacional, é precisamente o facto de não ter em conta o efeito de Allee como referem por exemplo: Wilson e Bossert (1971), Lewis e Kareiva (1993), Gruntfest et al. (1997), Amarasekare (1998a, 1998b), Courchamp et al. (1999a, 1999b, 2000), Keitt et al. (2001), e Brassil (2001). Os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, para valores do parâmetro $p \in]1, 2[$, estão na mesma situação. Têm sido apresentados vários modelos logísticos corrigidos de modo a considerarem o efeito de Allee, veja-se por exemplo Boukal e Berec (2002), que sumariza os modelos dos autores atrás referidos que criticaram o modelo logístico clássico por este não contemplar o referido efeito. Na secção seguinte expõem-se três destes modelos. Deste modo, faz todo o sentido efectuar correcções semelhantes para os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, para valores do

parâmetro p inferiores a 2, de forma a que os novos modelos corrigidos considerem o efeito de Allee, e possam portanto modelar eventuais crescimentos de determinadas espécies de um modo mais realista em termos ecológicos. Relembre-se que uma vantagem a apontar aos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, para valores do parâmetro p superiores a 2, é o facto do efeito de Allee surgir naturalmente a partir de certos valores elevados do parâmetro r .

Assim, neste capítulo deduzem-se modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$, nos quais surge o efeito de Allee que não era contemplado nos modelos deduzidos no capítulo anterior para $p \in]1, 2]$. Na secção 4.2, são apresentados três modelos existentes para a aplicação logística, e posteriormente, inspirando-se neles, são na secção 4.3 são apresentados três modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2]$, modificados com efeito de Allee. Por último é feita uma análise do comportamento dinâmico destes modelos em termos de dinâmica simbólica.

4.1 Modelos de crescimento populacional determinísticos com efeito de Allee. Abordagem heurística

A essência da abordagem heurística, na qual se baseiam os modelos determinísticos usados para modelar crescimentos populacionais de espécies que exibem efeito de Allee, remonta pelo menos a Odum e Allee (1954): a taxa de crescimento *per capita* dependente da dimensão populacional esperada ou observada é modelada por uma função adequada. Considera-se uma única população cujo crescimento num ambiente homogéneo é descrito por uma equação diferencial

ordinária

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) g(N(t)), \quad (4.1)$$

ou por uma equação às diferenças

$$N_{t+1} - N_t = N_t g(N_t), \quad (4.2)$$

em ambos os casos N é a dimensão populacional, e $g(N)$ denota a taxa de crescimento *per capita* dependente da densidade N , a qual é negativa para populações decrescentes e positiva para populações crescentes.

Nesta secção abordam-se os casos em que o efeito de Allee ocorre em baixas dimensões populacionais; os exemplos onde o efeito de Allee ocorre em dimensões populacionais elevadas são muito limitados, veja-se por exemplo Kokko e Sutherland (2001).

A taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ que descreve o efeito de Allee é uma função unimodal, com uma cauda longa; a taxa máxima é obtida para uma única dimensão positiva, $N = C > 0$. Abaixo desta dimensão populacional “óptima”, prevalecem efeitos positivos da presença de indivíduos da mesma espécie e $g(N)$ é crescente, enquanto acima desta dimensão populacional “óptima”, domina a dependência negativa da dimensão populacional e portanto a taxa de crescimento *per capita*, $g(N)$, é decrescente. A maioria dos modelos incluem efeitos de super-lotação e previnem o crescimento indefinido, ao assumirem uma taxa de crescimento *per capita* negativa, $g(N) < 0$, para uma dimensão populacional N suficientemente elevada. Com o objectivo de analisar a estabilidade, os valores da taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ deve ter pequenas oscilações perto do equilíbrio (levemente crescente até ao ponto de equilíbrio, e suavemente decrescente logo após este valor), e deve ser uma função contínua para outros valores da dimensão populacional N , o que se verifica para os dois modelos propostos, (4.1) e (4.2), Boukal e Berec (2002). Nas equações às diferenças, (4.2), a taxa de crescimento *per capita* deve ainda satisfazer a condição $g(N_t) \geq -1$ para que se tenha sempre $N_t > 0$. Estas características são

exemplificadas na secção seguinte com o modelo logístico corrigido com efeito de Allee.

Nestes modelos heurísticos de crescimento populacional, (4.1) e (4.2), podem ocorrer três cenários básicos, veja-se Boukal e Berec (2002):

- Extinção-incondicional (EI) \rightarrow se o efeito de Allee (demográfico) é demasiado forte, a taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ é negativa para toda a dimensão populacional N e as populações vão-se extinguir inevitavelmente, qualquer que seja o valor da sua dimensão inicial;
- Extinção-sobrevivência (ES) \rightarrow em níveis moderados do efeito de Allee, a taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ é positiva para valores intermédios da dimensão populacional N mas é negativa para valores muito baixos ou elevados da dimensão populacional N . Surgem dois valores de equilíbrio: o mais baixo que é instável, denotado por E^i , e o mais elevado E^s que é localmente estável. A dimensão populacional no instante zero, ou seja, na origem, denotado por E^0 , que é localmente estável, designa-se por equilíbrio trivial. As populações cuja dimensão no instante zero é inferior ao valor E^i extinguem-se, enquanto aquelas com dimensão no instante zero superior a E^i estabelecem-se no valor E^s ;
- Sobrevivência-incondicional (SI) \rightarrow quando o efeito de Allee enfraquece ainda mais, o equilíbrio instável E^i desaparece, o equilíbrio trivial E^0 torna-se instável sempre que a taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ é positiva para toda a dimensão populacional $N > 0$, e todas as populações se estabelecem em E^s mesmo pensando que a sua taxa de crescimento *per capita* ainda é crescente com N a baixas dimensões populacionais.

O cenário ES é a consequência mais familiar do efeito de Allee, e a diferença entre extinção e sobrevivência (estabelecimento) da população, é o que suscita mais frequentemente interesse na prática, Boukal e Berec (2002).

4.1. Modelos de crescimento populacional determinísticos com efeito de Allee.
Abordagem heurística

Além destes três cenários, nos modelos discretos pode surgir um outro. Neste cenário alternativo, o equilíbrio E^s pode ser destabilizado caso o decréscimo da taxa de crescimento *per capita* $g(N)$ em E^s seja demasiado acentuado ($g'(E^s) < -1$). Nesta situação, surge um comportamento cíclico um fenómeno caótico, à semelhança do que acontece na equação logística discreta, veja-se May, 1974. Entre o cenário EI e o cenário ES pode aparecer um estado de semi-equilíbrio, no entanto este é biologicamente irrelevante.

O polinómio quadrático sugerido por Edelstein-Keshet (1988)

$$g(N) = r - b(N - a)^2 \text{ com } a, b > 0,$$

é um possível modelo para descrever a taxa de crescimento *per capita* sob o efeito de Allee. Este modelo ajusta-se aos três cenários apresentados. Outros três modelos que contemplam o efeito de Allee, são apresentados na secção 4.2; estes modelos são obtidos por alteração do modelo logístico de Verhulst clássico, e estão resumidos em Boukal e Berec (2002).

Um estudo análogo muito interessante, feito apenas para equações às diferenças, pode ser visto em Schreiber (2003). Neste artigo são investigados modelos populacionais para uma só espécie, nos quais o tempo é discretizado, com dependência da densidade populacional sobrecompensada e um efeito de Allee devido ao nível de satisfação do predador e à limitação de encontrar parceiros da mesma espécie para acasalamento. Estes modelos exibem quatro comportamentos: persistência para todas as densidades populacionais iniciais; biestabilidade, na qual uma população persiste para densidades iniciais intermédias e caso contrário extingue-se; extinção para todas as densidades populacionais; e extinção essencial na qual “quase todas” as densidades iniciais conduzem à extinção. Para populações com crescimentos mais rápidos, estes modelos mostram que as populações podem persistir mesmo com níveis de predação elevados, mesmo pensando que baixos níveis de predação conduzem à extinção essencial. Alternativamente, aumentando o tempo em que os predadores investem sobre as suas presas, a capacidade

de sustentação do meio, ou probabilidade de sucesso de acasalamento pode conduzir à extinção essencial. Em cada um destes casos, os mecanismos por detrás destes desaparecimentos têm dinâmicas caóticas, conduzindo as dimensões populacionais a valores inferiores ao limite crítico determinado pelo efeito de Allee. Estes desaparecimentos são seguidos de tempos para a extinção caóticos. Estes tempos para a extinção têm aproximadamente uma distribuição exponencial e são extremamente sensíveis às densidades populacionais iniciais.

4.2 Aplicação logística modificada com efeito de Allee

O modelo logístico é muitas vezes usado para modelar o crescimento populacional de certas espécies. No entanto, várias críticas são apontadas a este modelo, nomeadamente o facto dele não ter em conta o efeito de Allee. De facto, a equação logística pressupõe que a população cresce sempre, mesmo que a sua dimensão seja baixa; aliás, neste caso (densidade populacional baixa), este modelo pressupõe mesmo um rápido crescimento populacional. À partida, isto pode parecer aceitável porque os recursos do meio são abundantes para os poucos indivíduos que constituem a população.

No entanto, este pressuposto é questionável, uma vez que para certas populações, é admissível que exista uma dimensão populacional mínima (densidade crítica de rarefacção), designada por E .

- Abaixo desta densidade crítica de rarefacção, a probabilidade de os indivíduos de sexos opostos se encontrarem efectivamente, para se poderem reproduzir, é tão pequena, que a população não consegue recuperar a sua dimensão de modo a substituir os indivíduos que vão morrendo, e acaba por se extinguir. Neste caso a taxa de crescimento instantânea é negativa, $r < 0$.

- Acima dessa dimensão crítica de rarefacção, a probabilidade de os indivíduos de sexos opostos se encontrarem efectivamente para se poderem reproduzir é suficiente para que a população cresça até à capacidade de sustentação do meio K . Neste caso a taxa de crescimento instantânea é positiva, $r > 0$.
- Esta dimensão populacional mínima E corresponde a uma taxa de crescimento nula que permite que a população se mantenha exactamente com a mesma dimensão ($r = 0$). Nesta densidade crítica de rarefacção E , a população é incapaz de crescer e permanece em equilíbrio nesse valor, até que agentes perturbadores a desloquem dele.

Evidentemente a dimensão crítica de rarefacção E é inferior à capacidade de sustentação do meio K . Entre E e K há uma gama de dimensões populacionais para as quais a taxa de crescimento instantânea é positiva.

A inexistência de uma dimensão crítica de rarefacção E , e consequente inexistência do chamado efeito de Allee, no modelo logístico é um defeito que pode ser corrigido. Vários investigadores têm estudado este assunto (veja-se por exemplo os mencionados Boukal e Berec (2002)), sugerindo vários modelos para a taxa de crescimento *per capita*. A ideia básica é introduzir no modelo logístico clássico um termo, $T(N(t))$, que faça com que essa taxa $g(N(t))$ seja negativa assim que a dimensão da população $N(t)$ seja inferior à dimensão crítica de rarefacção E , do seguinte modo

$$g(N(t)) = \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) T(N(t)).$$

- Wilson e Bossert (1971), Courchamp et al.(1999b) e (2000) e Brassil (2001) sugeriram que o termo fosse

$$T(N(t)) = 1 - \frac{E}{N(t)},$$

ou seja, apresentaram a seguinte função para a taxa de crescimento *per capita*

$$g_1(N(t)) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t)}\right). \quad (4.3)$$

- Lewis e Kareiva (1993), Amarasekare (1998a) e (1998b), e Keitt et al. (2001) apresentaram o termo

$$T(N(t)) = \frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K},$$

pelo que estudaram a função

$$g_2(N(t)) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K}\right). \quad (4.4)$$

- Gruntfest et al. (1997) e Courchamp et al. (1999a) usaram o termo

$$T(N(t)) = \frac{N(t)}{E} - 1,$$

pelo que investigaram a seguinte função para a taxa de crescimento *per capita*

$$g_3(N(t)) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{E} - 1\right). \quad (4.5)$$

Conseqüentemente, as respectivas taxas de crescimento populacional são dadas por

$$f_1(N(t)) = N(t) g_1(N(t)) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t)}\right); \quad (4.6)$$

$$f_2(N(t)) = N(t) g_2(N(t)) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K}\right); \quad (4.7)$$

$$f_3(N(t)) = N(t) g_3(N(t)) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{E} - 1\right). \quad (4.8)$$

Um exemplo do comportamento destas taxas de crescimento *per capita* para os três modelos descritos, (4.3), (4.4) e (4.5), em função da dimensão populacional, para $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$ e $K = 10$ pode visualizar-se na Figura 4.1.

Um exemplo de taxas de crescimento populacional correspondentes, dadas pelas equações (4.6), (4.7) e (4.8), podem observar-se na Figura 4.2.

A solução geral da equação (4.6), que permite determinar a dimensão populacional num dado instante t , é dada por

$$N(t) = \frac{E(K - N(0)) + K(N(0) - E) e^{1 - \frac{E}{K}rt}}{(K - N(0)) + (N(0) - E) e^{1 - \frac{E}{K}rt}}.$$

4.2. Aplicação logística modificada com efeito de Allee

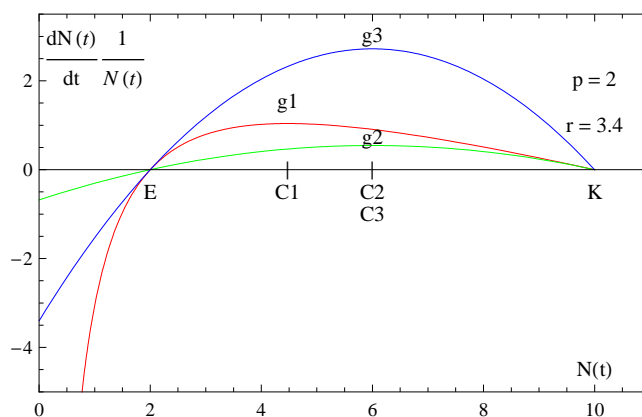


Figura 4.1: Taxa de crescimento *per capita* para os modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, para $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$ e $K = 10$

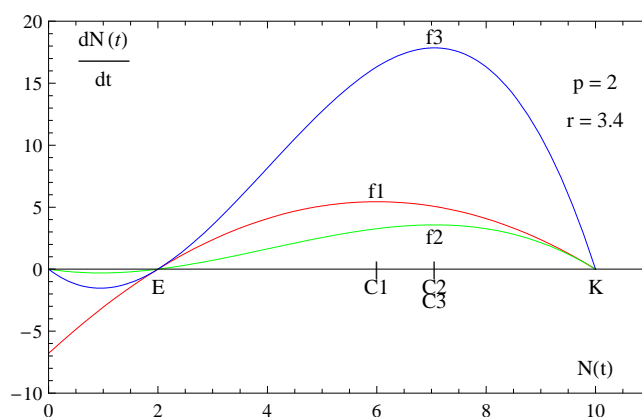


Figura 4.2: Taxa de crescimento populacional para os modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, para $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$ e $K = 10$

Embora as soluções gerais das equações (4.7) e (4.8), não se consigam obter explicitamente, é possível obter para cada uma delas uma expressão que as define implicitamente. A partir desta expressão implícita é possível explicitar o instante t , para o qual se tem uma dimensão populacional $N(t)$.

Assim, para a equação (4.7) tem-se

$$\left(\frac{N(t) - E}{N(0) - E}\right)^{K^2 E} \left(\frac{K - N(0)}{K - N(t)}\right)^K \left(\frac{N(0)}{N(t)}\right)^{K(1+K^2 E)} = e^{rE(1+K^2 E)t}$$

$$\iff t = \ln \left[\left(\frac{N(t) - E}{N(0) - E}\right)^{K^2 E} \left(\frac{K - N(0)}{K - N(t)}\right)^K \left(\frac{N(0)}{N(t)}\right)^{K(1+K^2 E)} \right]^{\frac{1}{rE(1+K^2 E)}}$$

e para (4.8) tem-se

$$\left(\frac{N(t) - E}{N(0) - E}\right)^{E \frac{K+E-1}{(KE-1)}} \left(\frac{K - N(0)}{K - N(t)}\right)^{\frac{E^2-E+1}{E(KE-1)}} \frac{N(0)}{N(t)} = e^{rt}$$

$$\iff t = \ln \left[\left(\frac{N(t) - E}{N(0) - E}\right)^{E \frac{K+E-1}{(KE-1)}} \left(\frac{K - N(0)}{K - N(t)}\right)^{\frac{E^2-E+1}{E(KE-1)}} \frac{N(0)}{N(t)} \right]^{\frac{1}{r}}$$

As soluções das equações (4.6), (4.7) e (4.8), $N(t)$, podem no entanto ser determinadas computacionalmente através de métodos numéricos. Estas podem ser também ser representadas graficamente como no exemplo da Figura 4.3, com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$ e $N(0) = 3(> E)$. Quando $N(0) = E$, então tem-se que a dimensão populacional se mantém igual a E ao longo do tempo, $N(t) = E$, $\forall t \geq 0$. Se $N(0) < E$, ao fim de um curto período de tempo, seja no instante de tempo t^* , a população extingue-se, isto é, $N(t) = 0$, $\forall t \geq t^*$. Note-se no entanto, que o valor de t^* difere relativamente à solução dos três modelos em causa.

Todos estes modelos para descrever a taxa de crescimento *per capita* sob o efeito de Allee, podem ser ajustados ao cenário ES descrito na secção anterior (o qual é a consequência mais familiar do efeito de Allee), considerando $E > 0$, veja-se na Figura 4.1. No entanto, apenas os modelos descritos pelas equações (4.3) e (4.4) podem ajustar-se ao cenário SI , com $E \leq 0$. Nenhum dos modelos permite ajustar-se ao cenário EI . Os modelos descritos pelas equações (4.3) e (4.4) são portanto mais flexíveis que o modelo descrito pela equação (4.5) pois este só se ajusta a um cenário enquanto os outros dois se ajustam a dois cenários.

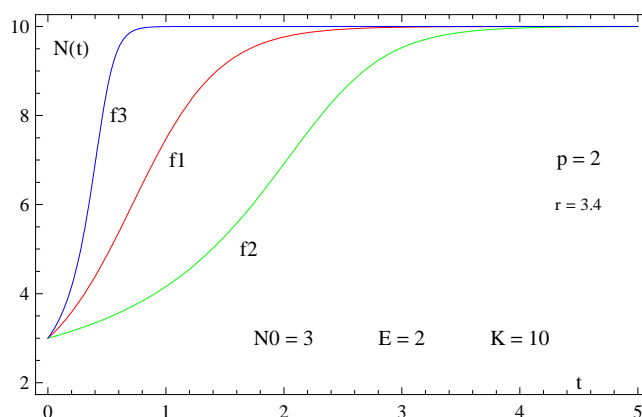


Figura 4.3: Dimensão populacional ao longo do tempo, nos modelos logísticos corrigidos com efeito de Allee, com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$ e $N(0) = 3(> E)$

Note-se que, na descrição dos cenários da secção anterior, a dimensão populacional de equilíbrio mais baixa E^i , e a dimensão populacional de equilíbrio mais elevada E^s , são respectivamente a dimensão crítica de rarefacção E e capacidade de sustentação do meio K .

Os modelos descritos pelas equações (4.4) e (4.5) são obtidos por alteração do modelo de Verhulst por introdução de outro limite $E < K$. O modelo descrito pela equação (4.3) merece uma discussão mais detalhada. Este modelo constitui uma escolha apelativa uma vez que a dinâmica aproxima o crescimento logístico para N elevado. Neste caso, deve convencionar-se que $N \cdot g(N) = 0$ para $N = 0$, para que a origem E^0 seja efectivamente um equilíbrio. Mais importante do que isso, $g(N)$ aproxima-se de ∞ para $N \rightarrow 0$ e $E > 0$, a qual impõe taxas de extinção maiores sobre populações pequenas do que os outros dois modelos (4.4) e (4.5), e também do que qualquer um dos modelos para descrever a taxa de crescimento *per capita* sob o efeito de Allee, sumarizados no artigo de Boukal e Berec (2002). Este facto não é crucial no modelo básico de crescimento de uma só espécie, mas a sua regra em cenários mais complicados nunca foi discutida devidamente. Por outro lado, o modelo (4.3) já tem sido usado em modelos de competição, predação

e metapopulacionais, por Courchamp et al. (2000) e Brassil (2001).

Dependendo da espécie em estudo e das características intrínsecas às mesmas, um destes três modelos poderá ajustar-se melhor do que os outros, ou mesmo nenhum deles se ajustar convenientemente ao crescimento da espécie em questão, e haver necessidade de criar um novo modelo, ou modificar algum já existente, que se adapte razoavelmente a esse caso.

Com o objectivo de analisar o comportamento dinâmico dos modelos (4.6), (4.7) e (4.8), procede-se à sua discretização. Entre as questões importantes que merecem atenção, pode destacar-se a averiguação do sinal da derivada de Schwarz no intervalo $[0, 1]$, para cada um dos modelos discretizados.

Estes modelos discretizados podem ser obtidos a partir das equações diferenciais (4.6), (4.7) e (4.8), considerando que $\frac{N(t_n)}{K} = x_n$.

- Relativamente ao primeiro modelo, a partir da equação (4.6), vem:

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= f_1(N(t_n)) = rN(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t_n)}\right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \iff x_{n+1} &= r(1 - x_n) \left(x_n - \frac{E}{K}\right); \end{aligned}$$

- No que respeita ao segundo modelo, este pode obter-se a partir da equação (4.7), do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= f_2(N(t_n)) = rN(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r \frac{N(t_n)}{K} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \iff x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) \left(x_n - \frac{E}{K}\right); \end{aligned}$$

- Em relação ao último modelo, este pode ser obtido como se segue, a partir da equação 4.8:

$$\begin{aligned}
 N(t_{n+1}) &= f_3(N(t_n)) = rN(t_n) \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{E} - 1\right) \\
 \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r \frac{N(t_n)}{K} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{K}{E} \frac{N(t_n)}{K} - 1\right) \\
 \iff x_{n+1} &= rx_n (1 - x_n) \left(\frac{K}{E} x_n - 1\right).
 \end{aligned}$$

Portanto, os modelos logísticos discretizados, corrigidos com efeito de Allee, são aplicações denotadas por $h_1, h_2, h_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente definidas do seguinte modo:

$$h_1(x) = r(1-x) \left(x - \frac{E}{K}\right); \quad (4.9)$$

$$h_2(x) = rx(1-x) \left(x - \frac{E}{K}\right); \quad (4.10)$$

$$h_3(x) = rx(1-x) \left(\frac{K}{E}x - 1\right). \quad (4.11)$$

Um exemplo dos gráficos correspondentes aos modelos discretizados (4.9), (4.10) e (4.11), com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$, pode ser observado na Figura 4.4.

Nota 6. As derivadas de Schwarz para os modelos discretizados (4.9), (4.10) e (4.11), não dependem do valor do parâmetro malthusiano r , são sempre negativas e verifica-se que $S(h_2(x)) = S(h_3(x))$. Tem-se:

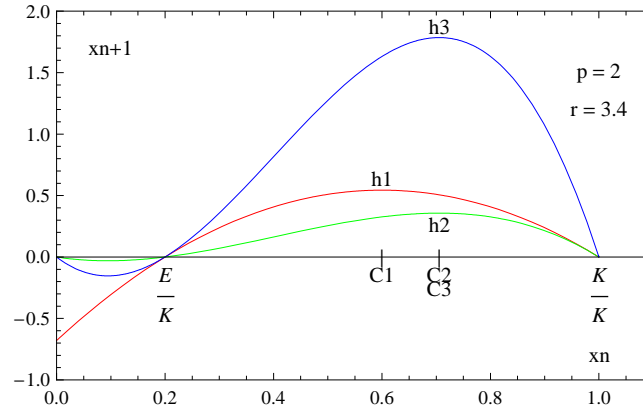


Figura 4.4: Modelos logísticos discretizados, corrigidos com efeito de Allee, com $p = 2$, $r = 3.4$, $E = 2$, $K = 10$

$$S(h_1(x)) = -\frac{6K^2}{(E + K - 2Kx)^2} < 0, \forall x \in [0, 1];$$

$$\begin{aligned} S(h_2(x)) &= S(h_3(x)) \\ &= -\frac{6(E^2 + E(K - 4Kx) + K^2(1 - 4x + 6x^2))}{(E - 2Ex + Kx(-2 + 3x))^2} < 0, \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

4.3 Modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee

Tal como acontece no modelo logístico clássico, apresentado na secção anterior, também para os modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $1 < p < 2$, a inexistência de uma dimensão crítica de rarefacção E , e conseqüente inexistência do chamado efeito de Allee é um defeito que pode ser corrigido.

Nesta secção utiliza-se um processo semelhante ao usado para corrigir o modelo

4.3. Modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee

logístico, para deduzir três novos modelos para a taxa de crescimento *per capita*. A ideia básica é introduzir nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $1 < p < 2$, um termo $T(N(t))$, de tal modo que essa taxa, $g^*(N(t))$, seja negativa assim que a dimensão da população $N(t)$ seja inferior à dimensão crítica de rarefacção E , do seguinte modo:

$$g^*(N(t)) = \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{N(t)} = r^* N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) T(N(t)).$$

Assim, usando os mesmos três termos $T(N(t))$ sugeridos por vários autores para o modelo logístico, obtêm-se as três aplicações para modelar a taxa de crescimento *per capita* de uma população.

4.3.1 Modelo 1

Usando o termo

$$T(N(t)) = 1 - \frac{E}{N(t)},$$

sugerido por Wilson e Bossert (1971), Courchamp et al. (1999–2000) e Brassil (2001) para invocar o efeito de Allee no modelo logístico, obtêm-se a seguinte função para a taxa de crescimento *per capita*

$$g_1^*(N(t)) = r^* N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t)}\right), \quad (4.12)$$

e conseqüentemente, a respectiva taxa de crescimento populacional é dada por

$$f_1^*(N(t)) = N(t) g_1^*(N(t)) = r^* N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t)}\right). \quad (4.13)$$

O modelo (4.13) pode ser discretizado, de forma a ter as propriedades necessárias para que seja possível estudá-lo através dos métodos de dinâmica simbólica descritos anteriormente. Duas questões importantes merecem ser salientadas: o sinal da derivada de Schwarz não ser sempre negativo em todo o intervalo $[0, 1]$ e o facto de, a partir de certas taxas de crescimento instantâneo r , as funções discretizadas que

representam a taxa de crescimento com efeito de Allee, assumirem valores fora do intervalo invariante, sugerindo o estudo de conjuntos de Cantor.

O modelo discretizado, denotado por Modelo 1, pode ser obtido a partir da equação diferencial (4.13), considerando que $\frac{N(t_n)}{K} = x_n$ e $r^*K^{p-2} = r > 0$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= f_1^*(N(t_n)) = r^*N(t_n)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(1 - \frac{E}{N(t_n)}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r^*K^{p-2} \frac{N(t_n)^{p-2}}{K^{p-2}} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= rx_n^{p-2} (1 - x_n) \left(x_n - \frac{E}{K}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o Modelo 1, corrigido com efeito de Allee, é uma aplicação $h_1^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$h_1^*(x) = rx^{p-2} (1 - x) \left(x - \frac{E}{K}\right). \quad (4.14)$$

4.3.2 Modelo 2

Usando o termo

$$T(N(t)) = \frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K},$$

apresentado por Lewis e Kareiva (1993), Amarasekare (1998) e Keitt et al. (2001) para corrigir a inexistência do efeito de Allee no modelo logístico clássico, obtem-se a seguinte função para a taxa de crescimento *per capita*

$$g_2^*(N(t)) = r^*N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K}\right); \quad (4.15)$$

e conseqüentemente, a respectiva taxa de crescimento populacional é dada por

$$f_2^*(N(t)) = N(t) g_2^*(N(t)) = r^*N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{K} - \frac{E}{K}\right). \quad (4.16)$$

4.3. Modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee

O modelo (4.16) pode ser discretizado, de forma a ter as propriedades necessárias para que seja possível estudá-lo através dos métodos de dinâmica simbólica descritos anteriormente. As mesmas duas questões importantes merecem ser discutidas relativamente a este modelo.

O modelo discretizado, denotado por Modelo 2, pode ser obtido a partir da equação diferencial (4.16), considerando que $\frac{N(t_n)}{K} = x_n$ e $r^*K^{p-2} = r$, de modo análogo ao procedimento do modelo anterior:

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= f_2^*(N(t_n)) = r^*N(t_n)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r^*K^{p-2} \frac{N(t_n)^{p-1}}{K^{p-1}} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{K} - \frac{E}{K}\right) \\ \iff x_{n+1} &= rx_n^{p-1} (1 - x_n) \left(x_n - \frac{E}{K}\right). \end{aligned}$$

Desta forma, o Modelo 2, corrigido com efeito de Allee, é uma aplicação $h_2^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$h_2^*(x) = rx^{p-1} (1 - x) \left(x - \frac{E}{K}\right). \quad (4.17)$$

4.3.3 Modelo 3

Se for utilizado o termo

$$T(N(t)) = \frac{N(t)}{E} - 1,$$

apresentado por Gruntfest et al. (1997) e Courchamp et al.(1999) para colmatar a inexistência do efeito de Allee no modelo logístico clássico, obtem-se a seguinte função para a taxa de crescimento *per capita*

$$g_3^*(N(t)) = r^*N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{E} - 1\right); \quad (4.18)$$

e conseqüentemente, a respectiva taxa de crescimento populacional é dada por

$$f_3^*(N(t)) = N(t) g_3^*(N(t)) = r^* N(t)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(\frac{N(t)}{E} - 1\right). \quad (4.19)$$

O modelo (4.19) pode ser discretizado, de modo a que seja possível estudá-lo através dos métodos de dinâmica simbólica descritos anteriormente. As mesmas duas questões importantes merecem ser discutidas relativamente a este modelo.

O modelo discretizado, denotado por Modelo 3, pode ser obtido a partir da equação diferencial (4.19), considerando que $\frac{N(t_n)}{K} = x_n$ e $r^* K^{p-2} = r$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} N(t_{n+1}) &= f_3(N(t_n)) = r^* N(t_n)^{p-1} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{N(t_n)}{E} - 1\right) \\ \iff \frac{N(t_{n+1})}{K} &= r^* K^{p-2} \frac{N(t_n)^{p-1}}{K^{p-1}} \left(1 - \frac{N(t_n)}{K}\right) \left(\frac{K}{E} \frac{N(t_n)}{K} - 1\right) \\ \iff x_{n+1} &= r x_n^{p-1} (1 - x_n) \left(\frac{K}{E} x_n - 1\right). \end{aligned}$$

Portanto, o Modelo 3, corrigido com efeito de Allee, é uma aplicação $h_3^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$h_3^*(x) = r x^{p-1} (1 - x) \left(\frac{K}{E} x - 1\right). \quad (4.20)$$

4.4 Caracterização dos Modelos

Devem salientar-se alguns aspectos relativamente aos novos Modelos apresentados. Deste modo, nesta secção são estabelecidas duas proposições, e algumas notas importantes sobre determinadas características destes Modelos.

Proposição 3. *Os Modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee, h_i^* , com $i = 1, 2, 3$, verificam as seguintes proposições:*

1. *As condições do cenário ES (Extinção-Sobrevivência), o qual é a consequência mais usual do efeito de Allee, são satisfeitas por todos os Modelos apresentados.*
2. *As condições do cenário SI (Sobrevivência-Incondicional), são satisfeitas pelos Modelos 1 e 2, mas não pelo Modelo 3.*
3. *Nenhum destes Modelos satisfaz as condições do cenário EI (Extinção-Incondicional).*

Demonstração 1. 1. *Atendendo às condições do cenário ES dadas por 4.1, tem-se que:*

Para $1 < p < 2$, as taxas de crescimento per capita relativas a qualquer um dos Modelos, $g_1^(N(t))$, $g_2^*(N(t))$ e $g_3^*(N(t))$, dadas respectivamente por (4.12), (4.15) e (4.18), são positivas se e só se*

$$r^* > 0 \wedge 0 < E < N(t) < K.$$

Assim todos os Modelos considerados satisfazem as condições do cenário ES.

2. Atendendo às condições do cenário SI, apresentadas em 4.1, pode analisar-se o que acontece para cada um dos Modelos.

- Veja-se o que acontece com o Modelo 1:

A taxa de crescimento per capita para o Modelo 1, $g_1^*(N(t))$, é dada pela expressão (4.12).

Considerando-se $E = N(0) = 0$, vem

$$g_1^*(N(t)) = r^* N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right).$$

Para $1 < p < 2$, como $0 \leq E \leq K$ e $0 \leq N(t) \leq K$, então

$$N(t)^{p-2} \geq 0 \text{ e } 0 \leq \frac{N(t)}{K} \leq 1,$$

portanto

$$1 - \frac{N(t)}{K} \geq 0 \text{ e atendendo a que } r^* > 0, \text{ temos } g_1^*(N(t)) \geq 0.$$

Assim, o Modelo 1 satisfaz as condições do cenário SI.

- Relativamente ao Modelo 2:

A taxa de crescimento per capita para este modelo, $g_2^*(N(t))$, é dada pela expressão (4.15).

Considerando-se $E = N(0) = 0$, tem-se

$$g_2^*(N(t)) = r^* N(t)^{p-2} \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) \frac{N(t)}{K}.$$

Para $1 < p < 2$, como $0 \leq E \leq K$ e $0 \leq N(t) \leq K$, então

$$N(t)^{p-2} \geq 0 \text{ e } 0 \leq \frac{N(t)}{K} \leq 1,$$

donde

$$1 - \frac{N(t)}{K} \geq 0$$

e tendo em conta que $r^* > 0$, temos $g_2^*(N(t)) \geq 0$.

Logo, o Modelo 2 satisfaz as condições do cenário SI.

- Para o Modelo 3:

A taxa de crescimento per capita para este Modelo, $g_3^*(N(t))$, é dada pela expressão (4.18).

Para $1 < p < 2$, considerando-se $E = N(0) = 0$, a expressão de $g_3^*(N(t))$ não tem sentido uma vez que inclui a fracção $\frac{N(t)}{E}$ que é indeterminada.

Assim, o Modelo 3 não satisfaz as condições do cenário SI.

3. Nas condições do cenário EI, 4.1, o efeito de Allee é demasiado forte, a taxa de crescimento per capita $g^*(N(t))$ é negativa para todas as dimensões populacionais $N(t)$ e quase certamente as populações vão extinguir-se, independentemente da sua dimensão inicial.

Para qualquer um dos três Modelos, a taxa de crescimento per capita $g_i^*(N(t))$ ($i = 1, 2, 3$), não é negativa para todas as dimensões populacionais $N(t)$.

De facto, $g_i^*(N(t)) < 0$, para $1 < p < 2$, se e só se

$$r^* > 0 \wedge 0 < E < K \wedge [(N(t) > K) \vee (0 < N(t) < E)].$$

A condição $N(t) > K$ é impossível, uma vez que K corresponde à capacidade de sustentação do meio.

Assim, como $r^* > 0$, $g_i^*(N(t))$ só é negativa se $0 < N(t) < E$, e portanto não é negativa para qualquer $N(t)$.

Portanto nenhum dos Modelos apresentados satisfaz o cenário EI.

Nota 7. *Pode afirmar-se portanto que os Modelos 1 e 2 para a taxa de crescimento per capita, respectivamente (4.12) e (4.15), são mais flexíveis que o Modelo 3, (4.18), pois este só satisfaz as condições de um cenário enquanto os outros dois satisfazem as condições de dois.*

Relativamente às derivadas de Schwarz destes modelos, verifica-se o seguinte resultado:

Proposição 4. *As derivadas de Schwarz dos Modelos h_i^* , com $i = 1, 2, 3$, não dependem do valor do parâmetro malthusiano r e satisfazem $S_{h_2^*}(x) = S_{h_3^*}(x)$.*

Demonstração 2. *Considerando as expressões das derivadas de Schwarz para os referidos modelos, as quais são dadas por:*

$$\begin{aligned}
 S_{h_1^*}(x) &= -\frac{-2EK(-2+p)px(3+4p(-1+x)+p^2(-1+x)^2+4x-x^2)}{2x^2(K(1+p(-1+x))x+E(-2+p+x-px))^2} \\
 &\quad -\frac{E^2(2-3p+p^2)(6+p^2(-1+x)^2-p(5-6x+x^2))}{2x^2(K(1+p(-1+x))x+E(-2+p+x-px))^2} \\
 &\quad -\frac{K^2(-1+p)px^2(2+p^2(-1+x)^2+4x+p(-3+2x+x^2))}{2x^2(K(1+p(-1+x))x+E(-2+p+x-px))^2} \\
 S_{h_2^*}(x) &= S_{h_3^*}(x) = -\frac{-2EK(-1+p^2)x(p^2(-1+x)^2+6x+2p(-1+x^2))}{2x^2(Kx(p(-1+x)+x)+E(-1+p-px))^2} \\
 &\quad -\frac{E^2(-1+p)p(2+p^2(-1+x)^2+4x+p(-3+2x+x^2))}{2x^2(Kx(p(-1+x)+x)+E(-1+p-px))^2} \\
 &\quad -\frac{K^2p(1+p)x^2(p^2(-1+x)^2+2x(2+x)+p(-1-2x+3x^2))}{2x^2(Kx(p(-1+x)+x)+E(-1+p-px))^2}
 \end{aligned}$$

4.4. Caracterização dos Modelos

verifica-se que de facto, nenhuma destas expressões depende do valor do parâmetro r e $S_{h_2^*}(x) = S_{h_3^*}(x)$.

Nota 8. Para qualquer um dos modelos h_i^* , com $i = 1, 2, 3$, a negatividade da derivada de Schwarz não é verificada em todo o intervalo $[0, 1]$. Esta propriedade das aplicações unimodais, não é satisfeita num subintervalo $[0, x_{di}] \subset [0, 1]$.

Esta positividade da derivada de Schwarz junto da origem, deve-se ao facto das três primeiras derivadas de cada um dos modelos h_i^* , com $i = 1, 2, 3$, $(h_i^*)'(x)$, $(h_i^*)''(x)$ e $(h_i^*)'''(x)$, as quais fazem parte da fórmula de cálculo da derivada de Schwarz $S(h_i^*(x)) = (h_i^*)'''(h_i^*)'(x) - \frac{3}{2} \left(\frac{(h_i^*)''(x)}{(h_i^*)'(x)} \right)^2$, tenderem para ∞ à medida que x tende para zero, ou seja:

- Em relação ao Modelo 1, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (h_1^*)'(x) &= r(1-x)x^{p-2} \\ &\quad + (p-2)r(1-x)x^{p-3}\left(x - \frac{E}{K}\right) - rx^{p-2}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_1^*)''(x) &= 2(p-2)r(1-x)x^{p-3} - 2rx^{p-2} \\ &\quad + (p-3)(p-2)r(1-x)x^{p-4}\left(x - \frac{E}{K}\right) \\ &\quad - 2(p-2)rx^{p-3}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_1^*)'''(x) &= 3(p-3)(p-2)r(1-x)x^{p-4} - 6(p-3)rx^{p-3} \\ &\quad + (p-4)(p-3)(p-2)r(1-x)x^{p-5}\left(x - \frac{E}{K}\right) \\ &\quad - 3(p-3)(p-2)rx^{p-4}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty. \end{aligned}$$

- Para o Modelo 2 vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (h_2^*)'(x) &= r(1-x)x^{p-1} + (p-1)r(1-x)x^{p-2}\left(x - \frac{E}{K}\right) \\ &\quad - rx^{p-1}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_2^*)''(x) &= 2(p-1)r(1-x)x^{p-2} - 2rx^{p-1} \\ &\quad + (p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-3}\left(x - \frac{E}{K}\right) \\ &\quad - 2(p-1)rx^{p-2}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_2^*)'''(x) &= 3(p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-3} - 6(p-1)rx^{p-2} \\ &\quad + (p-3)(p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-4}\left(x - \frac{E}{K}\right) \\ &\quad - 3(p-2)(p-1)rx^{p-3}\left(x - \frac{E}{K}\right) = \infty. \end{aligned}$$

- Relativamente ao Modelo 3, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (h_3^*)'(x) &= \frac{Kr(1-x)x^{p-1}}{E} + (p-1)r(1-x)x^{p-2}(Kx - 1E) \\ &\quad - rx^{p-1}\left(\frac{Kx}{E} - 1\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_3^*)''(x) &= \frac{2K(p-1)r(1-x)x^{p-2}}{E} - \frac{2Krx^{p-1}}{E} \\ &\quad + (p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-3}\left(\frac{Kx}{E} - 1\right) \\ &\quad - 2(p-1)rx^{p-2}\left(\frac{Kx}{E} - 1\right) = \infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (h_3^*)'''(x) &= \frac{3K(p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-3}}{E} - \frac{6K(p-1)rx^{p-2}}{E} \\ &\quad + (p-3)(p-2)(p-1)r(1-x)x^{p-4}\left(\frac{Kx}{E} - 1\right) \\ &\quad - 3(p-2)(p-1)rx^{p-3}\left(\frac{Kx}{E} - 1\right) = \infty. \end{aligned}$$

O valor do ponto x_{di} para além de depender do modelo h_i^* usado, o qual está associado a um parâmetro $p \in]1, 2[$, depende também dos valores considerados para E e K ; deste modo, a expressão geral para x_{da}^i é extremamente extensa e complicada,

4.4. Caracterização dos Modelos

pelo que não é aqui apresentada. No entanto, fixando os valores de p , K e E , o valor de x_{da}^i pode ser determinado. Veja-se a parte final do Exemplo 7.

Exemplo 7. Considerem-se agora os Modelos 1, 2 e 3 apresentados, com $p = 1.5$, $r = 2$, $E = 2$ e $K = 10$.

Na Figura 4.5 podem observar-se as taxas de crescimento per capita, (4.12), (4.15) e (4.18), relativas aos três modelos considerados.

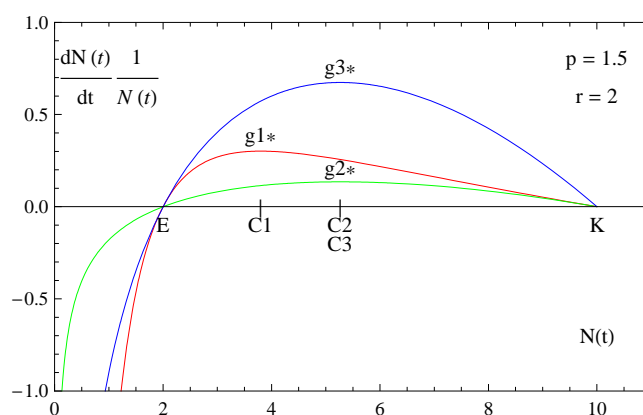


Figura 4.5: Taxa de crescimento *per capita* para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, com $E = 2$ e $K = 10$

As taxas de crescimento populacional correspondentes, (4.13), (4.16) e (4.19), podem observar-se na Figura 4.6.

As soluções gerais das equações diferenciais (4.13), (4.16) e (4.19) não se conseguem obter explicitamente. No entanto, podem obter-se gráficos destas soluções computacionalmente através de métodos numéricos. Apresentam-se três exemplos para $N(0) = 1 < E$, $N(0) = 2 = E$ e $N(0) = 3 > E$, respectivamente nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9.

Os modelos discretizados podem ser observados na Figura 4.10

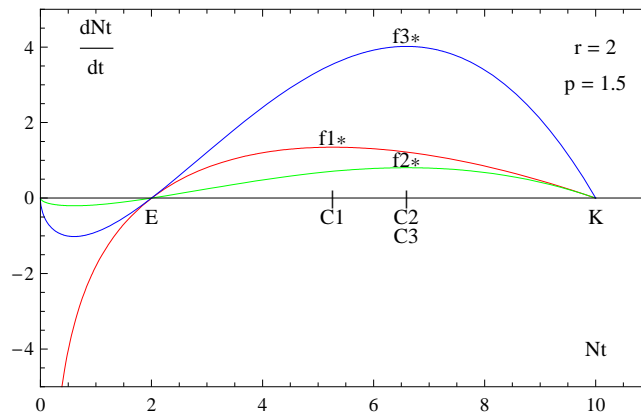


Figura 4.6: Taxa de crescimento populacional para 3 modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee

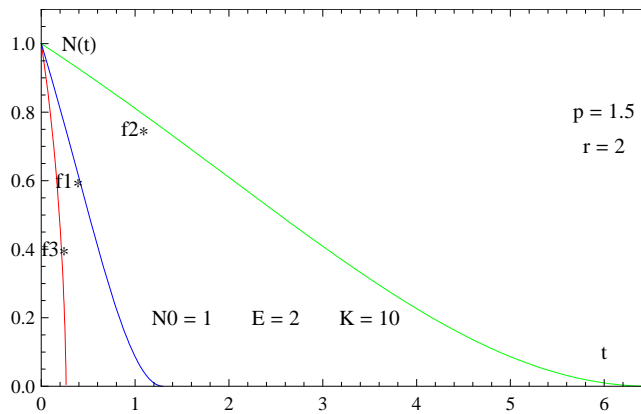


Figura 4.7: Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) < E$

Os modelos discretizados são então dados por:

$$h_1^*(x) = rx^{-0.5}(1-x)(x-0.2)$$

$$h_2^*(x) = rx^{0.5}(1-x)(x-0.2)$$

$$h_3^*(x) = rx^{0.5}(1-x)(5x-1).$$

4.4. Caracterização dos Modelos

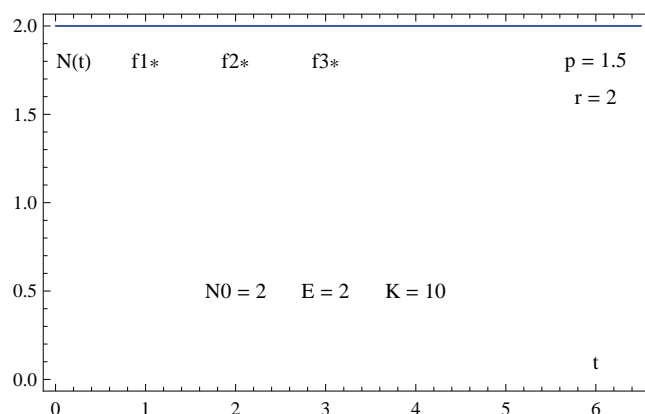


Figura 4.8: Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) = E$

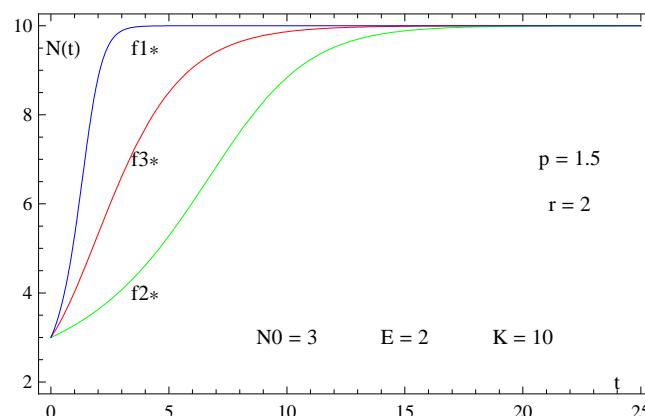


Figura 4.9: Dimensão populacional para os modelos baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$ corrigidos com efeito de Allee, $N(0) > E$

As respectivas derivadas de Schwarz vêm

$$S(h_1^*(x)) = \frac{0.00375x^{7.5} + 0.135x^{8.5} - 0.7275x^{9.5} - 1.125x^{10.5} - 1.40625x^{11.5}}{x^{8.5} (0.1x^{0.5} + 0.6x^{1.5} - 1.5x^{2.5})^2}$$

$$S(h_2^*(x)) = S(h_3^*(x)) = \frac{0.00375x^{3.5} - 0.225x^{4.5} - 1.0875x^{5.5} + 7.875x^{6.5} - 16.4063x^{7.5}}{x^{5.5} (0.1 - 1.8x + 4.5x^2)^2}.$$

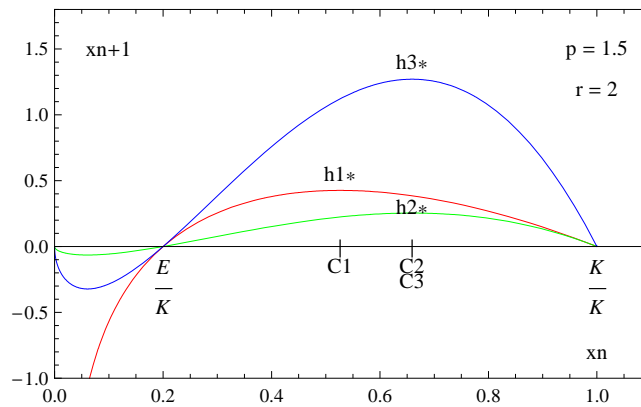


Figura 4.10: Modelos discretizados baseados nas aplicações proporcionais a $Beta(1.5, 2)$, corrigidos com efeito de Allee

Tem-se

$$S(h_1^*(x)) \geq 0 \text{ no intervalo } [0, 0.165551]$$

$$S(h_2^*(x)) = S(h_3^*(x)) \geq 0 \text{ no intervalo } [0, 0.015617].$$

4.4.1 Dinâmica simbólica nos modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee

Tendo em conta que os modelos baseados nas aplicações proporcionais às densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, 2[$, modificados com efeito de Allee, são famílias de aplicações unimodais, o comportamento dinâmico é análogo ao apresentado para a família das aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p \in]1, +\infty[$, nas secções 3.1.2 e 3.2.1 do capítulo 3. As sequências admissíveis são precisamente as mesmas, pelo que o polinómio característico da matriz de transição de Markov, bem como o respectivo valor da entropia topológica associado, mantêm-se, alterando-se

apenas o valor do parâmetro r associado a cada uma delas.

Nesta secção, estudam-se a título exemplificativo os 3 modelos baseados nas aplicações proporcionais à densidade $Beta(1.5, 2)$, modificados com efeito de Allee, considerando $E = 2$ e $K = 10$ (apenas como exemplo). Na Tabela 4.1, podem observar-se os valores do parâmetro r para os quais são obtidos os vários períodos, correspondentes às sequências simbólicas respectivas. Estes valores foram obtidos a partir da construção de listas simbólicas para valores crescentes do parâmetro r , usando programas computacionais adequados.

Nota 9. *Note-se a diferença significativa que existe para estes três modelos, ao nível do intervalo de variação dos valores do parâmetro r para as várias sequências de kneading encontradas, para o exemplo considerado onde $E = 2$ e $K = 10$. Saliente-se que para outros valores de E e K os valores do parâmetro r alteram-se. Para o Modelo 3 tem-se $r \in [1.038, 1.483]$, para o Modelo 1 tem-se $r \in [2.472, 4.355]$, enquanto que para o Modelo 2 se tem $r \in [5.190, 7.368]$. A amplitude do intervalo de variação de r no Modelo 3, $\cong 0.5$, é muito pequena quando comparada com as respectivas amplitudes para os outros dois Modelos, $\cong 2$. Estas diferenças entre os modelos podem ser benéficas, no sentido em que cada um dos modelos poderá ser aplicado a um determinado tipo específico de crescimento populacional. Cabe depois aos possíveis utilizadores destes modelos, nas várias áreas da ciência em que estes possam ter interesse prático, utilizarem o modelo mais adequado. Muito trabalho há ainda a desenvolver neste âmbito. Para além da escolha do tipo de modelo de entre os que foram apresentados, há também a questão da estimação dos valores dos parâmetros r e p , e dos valores de E e K .*

Modelo 1

Considera-se $h_{1,r,p=1.5}^* : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família das aplicações baseadas nos modelos proporcionais à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, com o parâmetro $r \in]0, 4.694]$, definida por

$$h_{1,r,p=1.5}^* = rx^{-0.5}(1-x)\left(x - \frac{E}{K}\right) = rx^{-0.5}(1-x)(x - 0.2).$$

Nesta família o ponto crítico é $c \cong 0.527$.

O diagrama de Feigenbaum correspondente ao Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, pode observar-se na Figura 4.11. Nas Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 podem observar-se respectivamente, os gráficos das aplicações $h_{1,4.361,p=1.5}^*$, $h_{1,4.5,p=1.5}^*$ e $h_{1,4.695,p=1.5}^*$. Estes gráficos revelam de facto, que o Modelo 1 considerado, contempla de facto o efeito de Allee (o qual não existia no modelo proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$), de modo análogo ao efeito que surgia naturalmente nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 2$, veja-se a Figura 4.24.

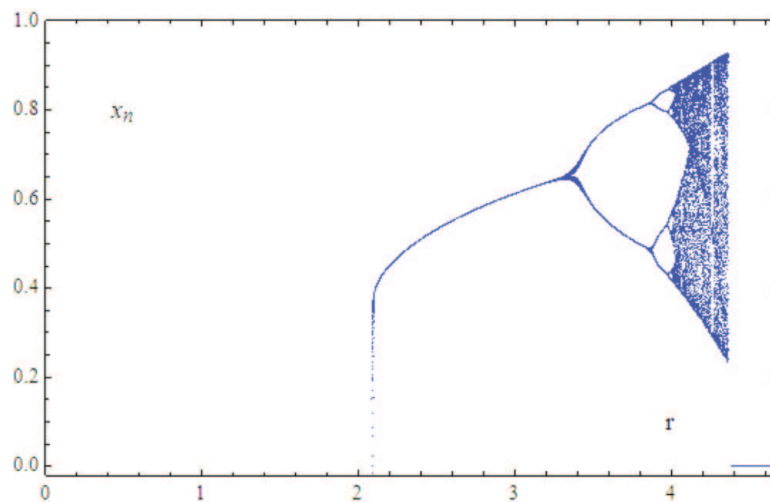


Figura 4.11: Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,

4.4. Caracterização dos Modelos

Tabela 4.1: Valores do parâmetro das sequências de *kneading* para os 3 modelos baseados nas aplicações proporcionais a densidades $Beta(1.5, 2)$, modificados com efeito de Allee, com $E = 2$ e $K = 10$

período	$S^{(r)}$	<i>Mod.1</i>	<i>Mod.2</i>	<i>Mod.3</i>
1	<i>CL</i>	2.472	5.190	1.038
2	<i>CR</i>	3.671	6.412	1.283
4	<i>CRLR</i>	3.935	6.717	1.344
8	<i>CRLR³LR</i>	3.991	6.784	1.357
6	<i>CRLR³</i>	4.064	6.871	1.375
8	<i>CRLR⁵</i>	4.099	6.912	1.383
7	<i>CRLR⁴</i>	4.143	6.958	1.392
5	<i>CRLR²</i>	4.178	7.005	1.401
7	<i>CRLR²LR</i>	4.208	7.051	1.411
8	<i>CRLR²LR²</i>	4.232	7.086	1.418
3	<i>CRL</i>	4.255	7.130	1.426
6	<i>CRL²RL</i>	4.262	7.150	1.430
8	<i>CRL²RLR²</i>	4.281	7.189	1.438
7	<i>CRL²RLR</i>	4.294	7.210	1.442
8	<i>CRL²RLRL</i>	4.304	7.230	1.446
5	<i>CRL²R</i>	4.308	7.250	1.450
8	<i>CRL²R³L</i>	3.312	7.250	1.450
7	<i>CRL²R³</i>	3.320	7.265	1.453
8	<i>CRL²R⁴</i>	4.327	7.276	1.456
6	<i>CRL²R²</i>	4.332	7.287	1.458
8	<i>CRL²R²LR</i>	4.336	7.297	1.460
7	<i>CRL²R²L</i>	4.340	7.308	1.462
4	<i>CRL²</i>	4.344	7.326	1.466
8	<i>CRL³RL²</i>	4.345	7.328	1.471
7	<i>CRL³RL</i>	4.348	7.344	1.475
8	<i>CRL³RLR</i>	4.351	7.353	1.476
6	<i>CRL³R</i>	4.353	7.361	1.482
8	<i>CRL³R³</i>	4.355	7.368	1.483

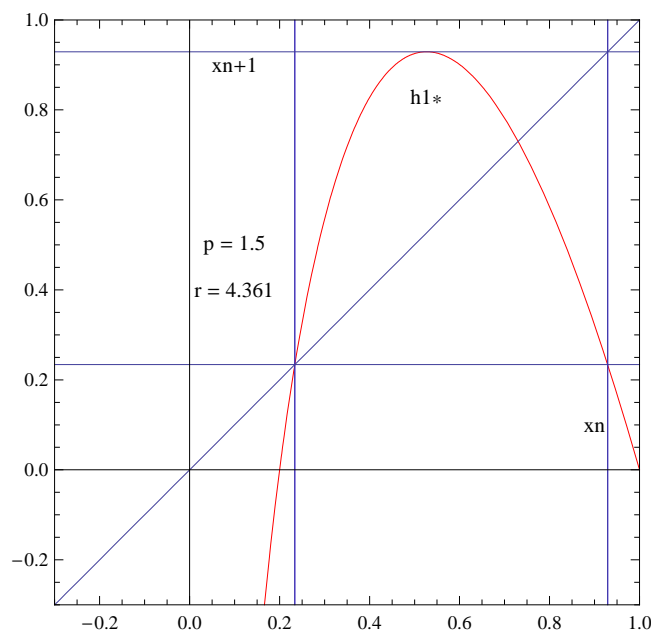


Figura 4.12: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.361$

A aplicação da Figura 4.12 ainda não contempla nenhum conjunto de Cantor, mas o mesmo não acontece com as aplicações representadas nas Figuras 4.13 e 4.14. De facto, para valores do parâmetro malthusiano r superiores a $r_{fs} = 4.5$ neste caso (para o qual o conjunto das dinâmicas simbólicas das iteradas da aplicação unimodal é um deslocamento completo ou *full shift*), as iteradas da aplicação passam a ser atraídas para $-\infty$ e dá-se a extinção da população cujo crescimento estava a ser modelado pela aplicação em causa, e surgem os chamados conjuntos de Cantor.

4.4. Caracterização dos Modelos

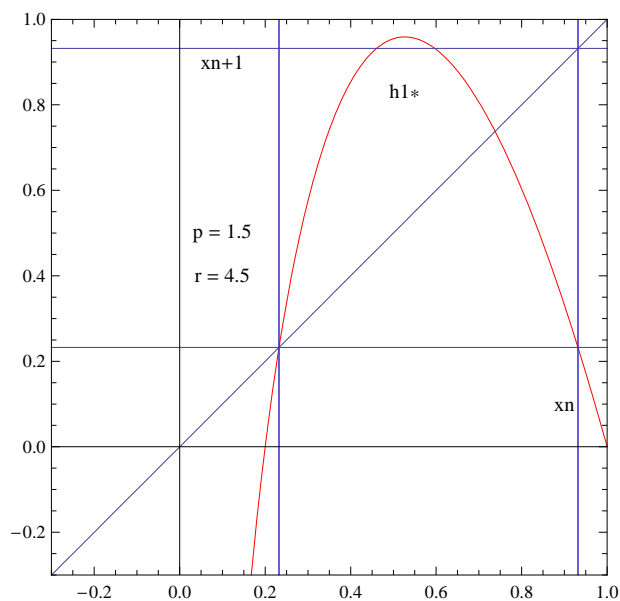


Figura 4.13: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.5$

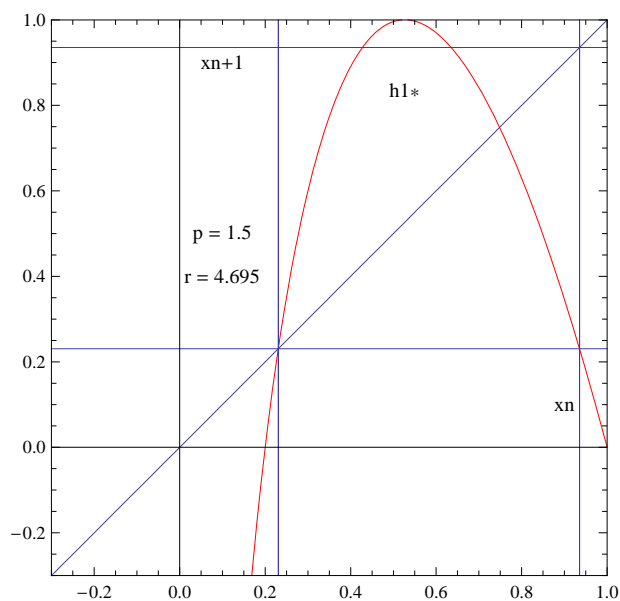


Figura 4.14: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 1 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 4.695$

Modelo 2

Considera-se $h_{2,r,p=1.5}^* : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família das aplicações baseadas nos modelos proporcionais à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, com o parâmetro $r \in]0, 7.869]$, definida por

$$h_{2,r,p=1.5}^* = rx^{0.5} (1 - x) \left(x - \frac{E}{K}\right) = rx^{0.5} (1 - x) (x - 0.2).$$

Nesta família o ponto crítico é $c \cong 0.659$.

Nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18 podem observar-se respectivamente, os gráficos das aplicações $h_{2,7.416,p=1.5}^*$, $h_{2,7.6,p=1.5}^*$ e $h_{2,7.869,p=1.5}^*$. Estes gráficos revelam de facto, que o Modelo 2 considerado, contempla de facto o efeito de Allee (o qual não existia no modelo proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$), de modo análogo ao efeito que surgia naturalmente nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 2$, veja-se a Figura 4.24. O diagrama de Feigenbaum correspondente ao Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, pode observar-se na Figura 4.15.

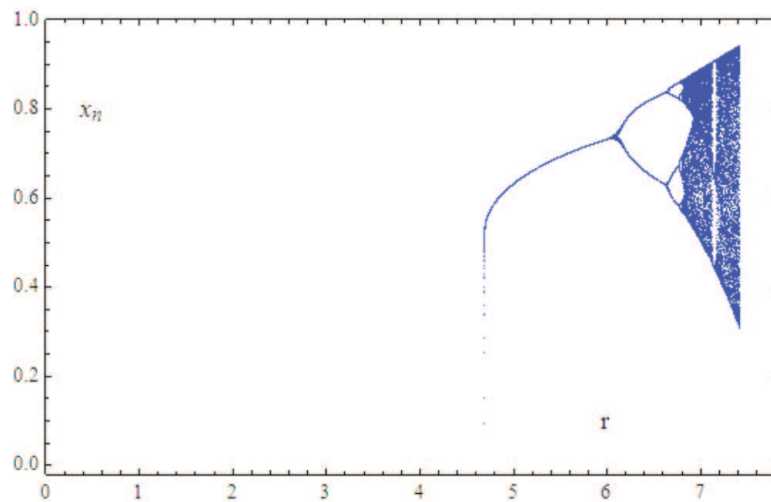


Figura 4.15: Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,

4.4. Caracterização dos Modelos

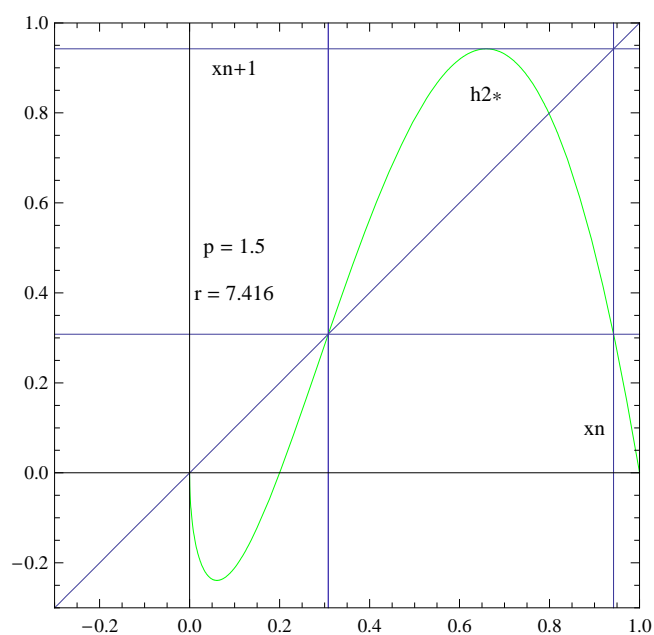


Figura 4.16: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.416$

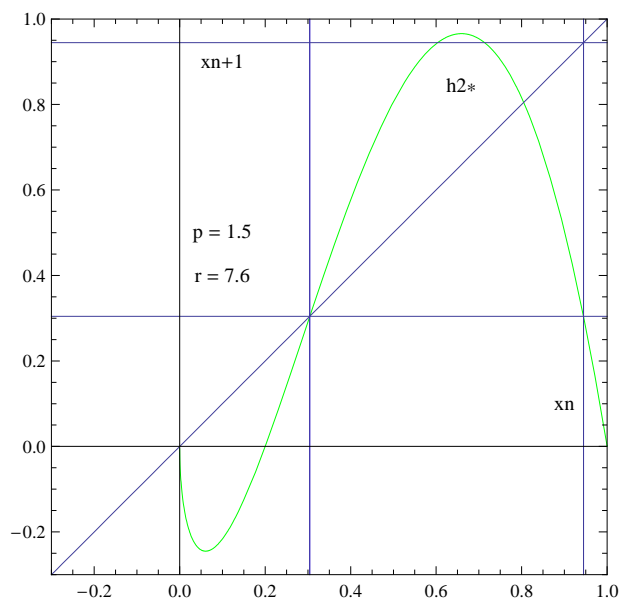


Figura 4.17: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.6$

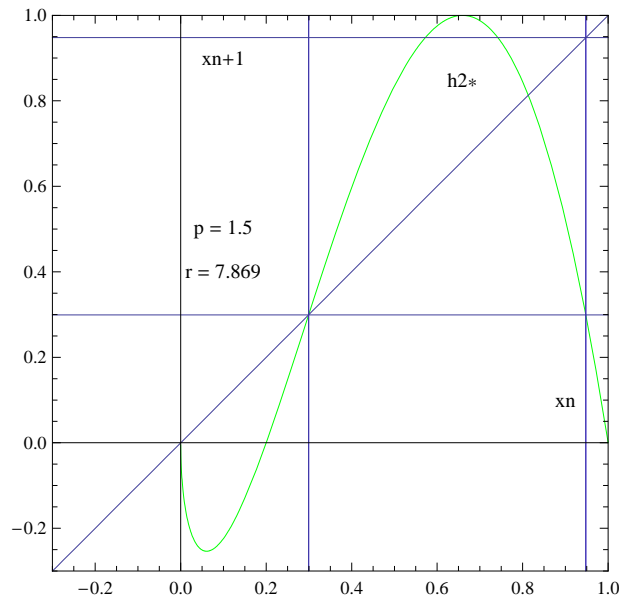


Figura 4.18: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 2 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 7.869$

A aplicação da Figura 4.16 ainda não contempla nenhum conjunto de Cantor, mas isso não acontece com as aplicações representadas nas Figuras 4.17 e 4.18. Na realidade, para valores do parâmetro malthusiano r superiores a $r_{fs} = 7.6$ neste caso (correspondente a *full shift*), as iteradas da aplicação passam a ser atraídas para o ponto fixo zero e dá-se a extinção da população cujo crescimento estava a ser modelado pela aplicação utilizada, e aparecem então os conjuntos de Cantor.

Modelo 3

Considera-se $h_{3,r,p=1.5}^* : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a família das aplicações baseadas nos modelos proporcionais à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, com o parâmetro $r \in]0, 1.575]$, definida por

$$h_{3,r,p=1.5}^* = rx^{0.5}(1-x)\left(\frac{K}{E}x-1\right) = rx^{0.5}(1-x)(5x-1).$$

Nesta família o ponto crítico é $c \cong 0.659$.

4.4. Caracterização dos Modelos

O diagrama de Feigenbaum correspondente ao Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$, pode observar-se na Figura 4.19.

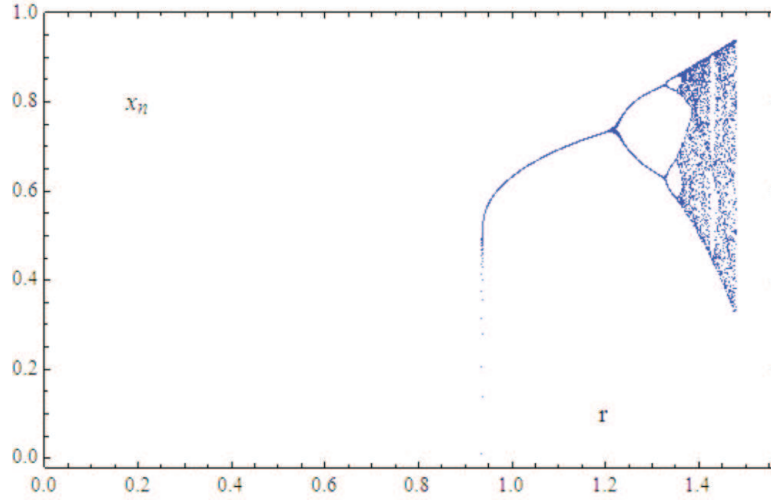


Figura 4.19: Diagrama de Feigenbaum para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, para $E = 2$ e $K = 10$,

Nas Figuras 4.20, 4.21 e 4.22 podem observar-se respectivamente, os gráficos das aplicações $h_{3,1.484,p=1.5}^*$, $h_{3,1.5,p=1.5}^*$ e $h_{3,1.575,p=1.5}^*$. Estes gráficos revelam de facto, que o Modelo 3 considerado, contempla o efeito de Allee (que não existia no modelo proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$), de modo semelhante ao efeito que surgia naturalmente nos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 2$, veja-se a Figura 4.24. A aplicação da Figura 4.20 ainda não contempla nenhum conjunto de Cantor, mas isso não se verifica para as aplicações representadas nas Figuras 4.21 e 4.22. Para valores do parâmetro malthusiano r superiores a $r_{fs} = 1.5$ neste caso (correspondente ao *full shift*), as iteradas da aplicação passam a ser atraídas para o ponto fixo zero e dá-se a extinção da população cujo crescimento estava a ser modelado pela aplicação utilizada, e surgem os conjuntos de Cantor.

Comparando os diagramas de bifurcação relativos aos três modelos, pode concluir-se que estes apresentam todos o mesmo aspecto geral, o que muda é o

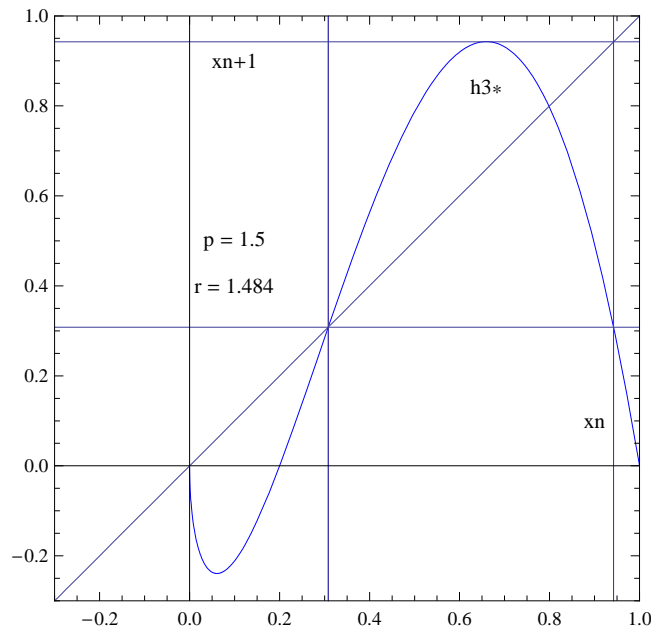


Figura 4.20: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.484$

intervalo de variação do parâmetro r , diferença esta que já havia sido constatada na análise da Tabela 4.1. É curioso notar que estes gráficos se assemelham também a alguns diagramas associados a aplicações proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 2$, os quais apresentam efeito de Allee natural, nomeadamente aos diagramas de bifurcação correspondentes às aplicações proporcionais às densidades $Beta(2.5, 2)$ e $Beta(3.5, 2)$. Veja-se por exemplo a Figura 4.23.

Constata-se também que os modelos corrigidos com o efeito de Allee, se comportam de modo semelhante aos modelos proporcionais a densidades $Beta(p, 2)$, com $p > 2$, os quais englobam naturalmente o referido efeito. Comparem-se, por exemplo, os gráficos das Figuras 4.13, 4.17 e 4.21, com o gráfico da Figura 4.24.

4.4. Caracterização dos Modelos

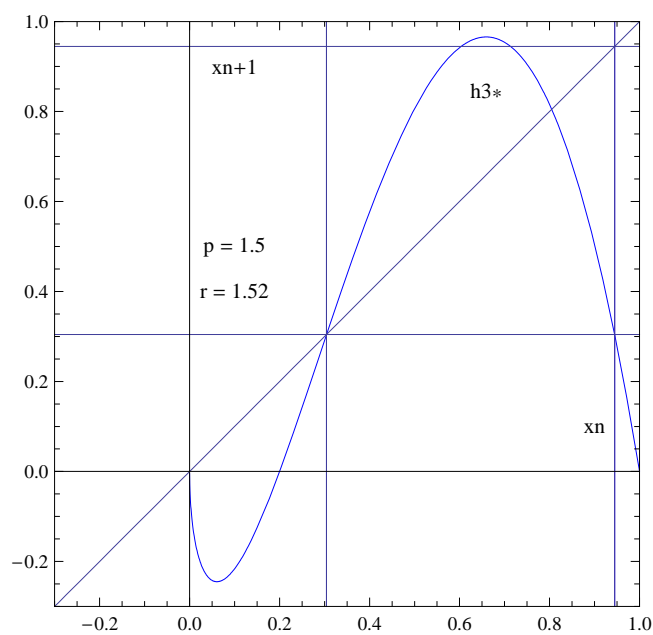


Figura 4.21: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.5$

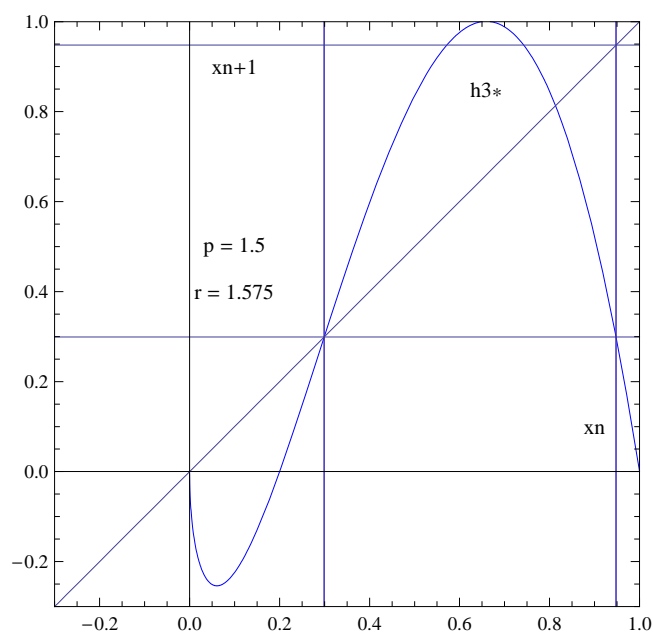


Figura 4.22: Taxa de crescimento populacional para o Modelo 3 baseado na aplicação proporcional à densidade $Beta(1.5, 2)$, $r = 1.575$

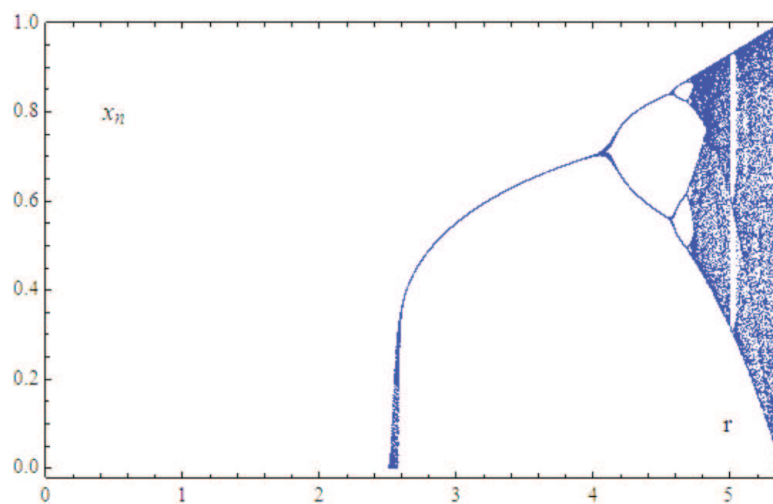


Figura 4.23: Diagrama de Feigenbaum para o modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$

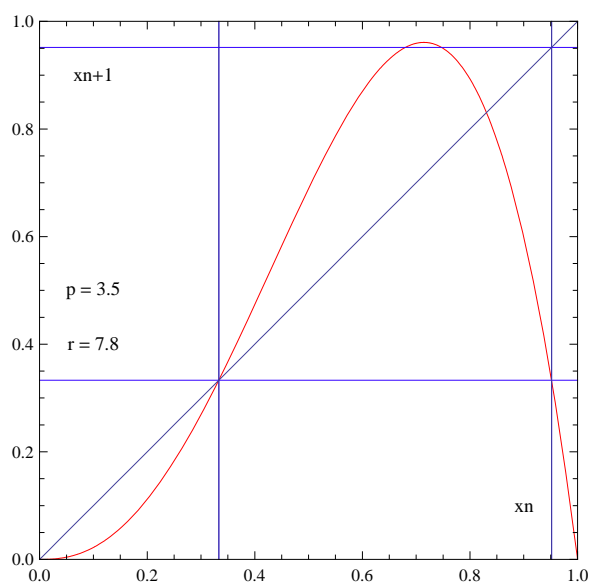


Figura 4.24: Taxa de crescimento populacional para o modelo proporcional à densidade $Beta(2.5, 2)$

Conjuntos de *Cantor* aleatórios

Durante anos os matemáticos preocuparam-se fundamentalmente com conjuntos e funções às quais podem ser aplicados os métodos de cálculo clássicos. Os conjuntos e funções que não são suficientemente regulares tendiam a ser ignorados, sendo considerados “patológicos” e sem interesse de estudo. Eram vistos como curiosidades pontuais e só raramente se pensou neles como uma classe à qual se poderia aplicar uma teoria geral. Mais recentemente esta atitude alterou-se. Alguns matemáticos perceberam que muito pode e merece ser dito acerca da matemática de conjuntos irregulares. Muitos destes conjuntos fornecem uma representação muito melhor de muitos fenómenos naturais do que as figuras da geometria clássica. A geometria fractal fornece uma estrutura geral para o estudo dos referidos conjuntos irregulares. A palavra “fractal” foi utilizada por Mandelbrot no início dos anos oitenta, para descrever objectos que eram demasiado irregulares para se enquadrarem no conjunto geométrico tradicional, veja-se por exemplo Falconer, (1990).

No presente capítulo definimos a poeira de Cantor aleatória, um fractal que é construído pela eliminação recursiva do espaçamento central gerado pelo mínimo e máximo de duas observações “ao acaso” — no sentido usual de uniformemente distribuídas — de cada intervalo da anterior iteração. Este nome justifica-se plenamente, no sentido em que os valores esperados dos extremos dos intervalos de

cada iteração coincidem com os extremos dos intervalos da correspondente iteração na construção da poeira de Cantor determinista.

Seguidamente calculamos a dimensão de Hausdorff — em termos intuitivos, um parâmetro que avalia a que ponto um conjunto é denso — da poeira de Cantor aleatória, e encontramos um resultado surpreendente: apesar de a poeira de Cantor ser o “fractal médio” da poeira de Cantor aleatória, é mais denso — a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor \mathcal{C} é aproximadamente 0.63093, enquanto a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória \mathcal{F}_U é aproximadamente 0.56155.

Leva-nos este resultado inesperado a definir mais geralmente conjuntos de Cantor aleatórios \mathcal{F}_X com $X \sim Beta(p, q)$, calcular as suas dimensões de Hausdorff, e calcular as dimensões de Hausdorff dos fractais deterministas que são a esperança daqueles fractais aleatórios, num sentido similar ao de a poeira de Cantor determinista ser a esperança da poeira de Cantor aleatória.

O fenómeno é geral, e para essa diferença entre dimensões de Hausdorff encontramos uma explicação que reforça a interpretação de dimensão de Hausdorff como reveladora da abundância de pontos do fractal.

5.1 Dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor

A poeira de Cantor, um famoso exemplo de auto-semelhança de Georg Cantor, é um dos fractais mais conhecidos e de mais fácil construção, mostrando ainda assim muitas das características típicas dos fractais. Este conjunto é construído a partir de um intervalo — sem perda de generalidade, o intervalo $[0,1]$ —, através de uma sequência de operações de eliminação de subintervalos intermédios.

Considere-se então o conjunto inicial $E_0 = [0,1]$, o qual é dividido em três segmentos de igual comprimento. Seja E_1 o conjunto obtido por eliminação do segmento intermédio de E_0 ; portanto E_1 consiste na união de dois intervalos,

$$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Dividindo cada um destes dois intervalos em três partes iguais, e eliminando o segmento intermédio de cada um deles, obtém-se o conjunto E_2 formado pela união quatro intervalos, isto é, $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

Procedendo de modo análogo, obtém-se o conjunto E_n a partir da eliminação dos segmentos intermédios dos 2^{n-1} subconjuntos que constituem o conjunto E_{n-1} . Assim, E_n é constituído pela união 2^n intervalos, cada um com comprimento 3^{-n} . A poeira de Cantor \mathcal{C} , é formada pelos pontos que estão em E_n para todo o n , ou seja

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n. \quad (5.1)$$

A poeira de Cantor \mathcal{C} , veja-se a Figura 5.1, pode ser vista como o limite da sequência de conjuntos E_n à medida que n tende para infinito. É impossível desenhar o próprio conjunto \mathcal{C} com o seu detalhe infinitesimal, pelo que imagens de \mathcal{C} tendem a ser imagens de um dos E_n , os quais são uma representação sugestiva de \mathcal{C} quando n é razoavelmente elevado. À primeira vista pode parecer que se retira tanto do intervalo $[0, 1]$ durante a construção de \mathcal{C} que “nada”, resta¹. Na verdade, \mathcal{C} é um conjunto com um número infinito não numerável de pontos, o qual contém infinitos pontos em qualquer vizinhança de cada um dos seus pontos. De facto, é óbvio que a poeira de Cantor \mathcal{C} consiste no conjunto de pontos pertencentes a $[0, 1]$ cuja expansão na base 3 não contém o dígito 1, ou seja, todos os números $\sum_{i=1}^{\infty} c_i 3^{-i}$ com $c_i = 0$ ou $c_i = 2$ para cada i . Note-se que, para obter E_1 a partir de E_0 removem-se esses números com $c_1 = 1$, para obter E_2 a partir de E_1 removem-se esses números com $c_2 = 1$, e assim sucessivamente.

¹ Na k -ésima iteração do procedimento de eliminação estamos a retirar 2^{k-1} segmentos de comprimento $\frac{1}{3^k}$; assim, dados que os segmentos que retiramos são disjuntos, estamos a retirar o “comprimento”, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$ ao comprimento de $[0, 1]$, o que justifica que adiante se diga que o comprimento de \mathcal{C} é 0.

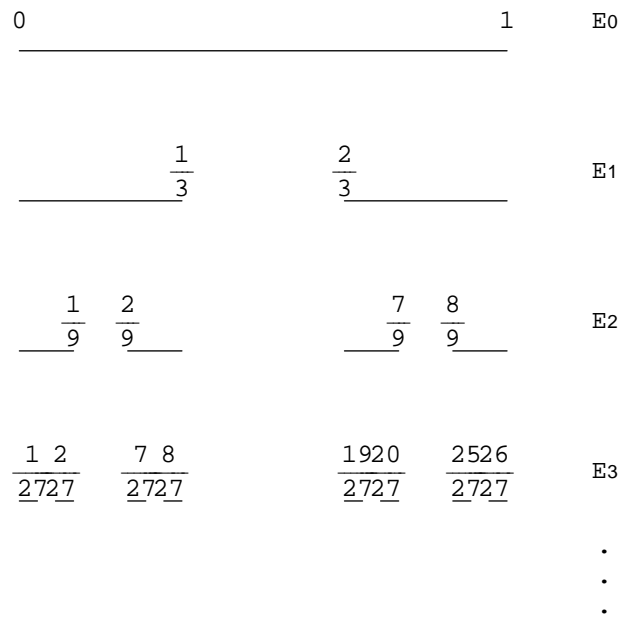


Figura 5.1: Construção da poeira de Cantor

Algumas observações sobre a poeira de Cantor parecem pertinentes:

- \mathcal{C} é auto-semelhante; de facto a parte de \mathcal{C} no intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ de E_1 e a parte de \mathcal{C} no outro intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ de E_1 , são geometricamente semelhantes a \mathcal{C} , escalonadas por um factor $\frac{1}{3}$. Também as partes de \mathcal{C} em cada um dos quatro intervalos de E_2 são semelhantes a \mathcal{C} mas escalonadas por um factor $\frac{1}{9}$, e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor contém cópias de si próprio em muitas escalas diferentes, a menos de uma mudança de escala uma parte é semelhante ao todo.
- O conjunto \mathcal{C} tem uma estrutura “perfeita”, uma vez que contém o mesmo detalhe de informação em escalas arbitrariamente pequenas. Quanto mais se amplia a imagem do conjunto de Cantor, mais espaços se tornam aparentes à vista.
- Embora \mathcal{C} tenha uma estrutura detalhada complexa, a sua definição é muito simples.

- \mathcal{C} pode ser obtido através de um procedimento recursivo de descrição muito simples. A sua construção consiste em retirar repetidamente o segmento do meio dos intervalos. Passos sucessivos fornecem cada vez melhores aproximações E_n ao conjunto \mathcal{C} .
- A geometria de \mathcal{C} não é facilmente descrita em termos clássicos, no sentido em que não é um conjunto de pontos que satisfazem determinada condição geométrica simples, nem é um conjunto de soluções de qualquer equação simples. Note-se, por outro lado, que a definição de \mathcal{C} como conjunto dos pontos de $[0,1]$ cuja expansão triádica não tem uns é simples.
- É difícil descrever a geometria local de \mathcal{C} — em qualquer vizinhança de cada um dos seus pontos existe um elevado número de outros pontos de \mathcal{C} , separados por espaços de comprimentos variados.
- Embora \mathcal{C} seja um conjunto bastante abundante (os seus pontos não podem ser indexados por \mathbb{N}), a sua dimensão não é quantificável pelas medidas usuais tais como o comprimento; de facto \mathcal{C} tem comprimento zero, como atrás assinalámos.

Estas propriedades da poeira de Cantor são similares às de muitos outros fractais. Qualquer fractal tem uma estrutura excelente no sentido em que tem grande riqueza de detalhe em todas as escalas. Muitos fractais têm algum grau de auto-semelhança — eles são formados por partes que se parecem com o todo de alguma forma. Por vezes a parecença pode ser mais fraca do que a semelhança geométrica rigorosa; por exemplo, a semelhança pode ser aproximada ou estatística, veja-se por exemplo Falconer, (1990).

Os métodos e cálculos da geometria clássica são inadequados para estudar fractais, pelo que são necessários métodos alternativos. Um conceito fundamental na geometria fractal é o de dimensão. De uma forma grosseira, pode dizer-se que a

dimensão fornece uma descrição da quantidade de espaço que um conjunto ocupa. É um parâmetro que permite evidenciar as irregularidades de um conjunto quando visto a escalas muito pequenas. A dimensão contém muita informação acerca das propriedades geométricas de um conjunto. Existem vários tipos de dimensão, umas mais satisfatórias que outras, que são definidas de modo distinto, pelo podem dar valores diferentes para o mesmo conjunto. A dimensão de Hausdorff é uma das dimensões mais utilizadas. Uma das formas de a definir, em espaços de dimensão 1, é a seguinte:

Definição 10. *Seja $\mathcal{F} = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k$ um conjunto fractal construído recursivamente a partir de F_0 , em que após a k -ésima iteração se obtém F_k como união de n_k linhas, cada uma das quais de comprimento $r_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. A dimensão de Hausdorff do conjunto \mathcal{F} é*

$$Dim_H \mathcal{F} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_k)}{\ln\left(\frac{1}{r_k}\right)} \quad (5.2)$$

Vejamos o exemplo do cálculo da dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor:

Exemplo 8.

$$Dim_H \mathcal{C} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^k)}{\ln(3^k)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0.63093,$$

um valor entre 0 e 1 como esperado, porque a poeira de Cantor é muito mais do que um conjunto com uma infinidade numerável de pontos, o qual tem dimensão 0, e muito menos do que um comprimento de uma linha ou curva regular, a qual tem dimensão 1. Assim, embora a poeira de Cantor tenha comprimento zero, a sua dimensão fractal não é de facto nula.

Anote-se que a dimensão de Hausdorff de um fractal não é necessariamente fraccionária, veja-se por exemplo em Schroeder (1991), a descrição da curva de Hilbert \mathcal{H} , com $Dim_H \mathcal{H} = 2$, como é de esperar de uma linha que passa por quase todos os pontos do interior de um quadrado. Não é decerto descabido apelar à

intuição interpretando a dimensão de Hausdorff de um fractal \mathcal{F} como uma avaliação de a que ponto este é denso no espaço euclideano em que está definido.

A dimensão de Hausdorff pode ser calculada de forma diversa da apresentada em (5.2), como se pode ver em Falconer (1990, cap. 9). O processo apresentado por Falconer tem a dupla vantagem de

- ser simples, pois recorre directamente à “razão de auto-semelhanças” entre etapas sucessivas do procedimento recursivo de definir o fractal;
- poder ser generalizada de forma intuitiva para definir uma dimensão de Hausdorff de fractais estocásticos, veja-se Falconer (1990, cap. 15).

Transcrevemos o enunciado do Teorema de Falconer (1990, cap. 9) que estabelece que este procedimento de cálculo, no caso determinista, é válido:

Teorema 4. *Suponhamos que a condição do conjunto aberto, se verifica para as similaridades S_i definidas em \mathbb{R}^n com razões c_i , ($1 \leq i \leq m$). Se \mathcal{F} é o conjunto invariante satisfazendo*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m S_i(\mathcal{F})$$

então

$$\dim_H \mathcal{F} = s$$

onde s é a solução de

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

No enunciado acima

- $S_1, S_2, \dots, S_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são similaridades, com

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

onde $0 < c_i < 1$ (c_i é chamada a razão da similaridade S_i). Assim, cada S_i transforma subconjuntos de \mathbb{R}^n em conjuntos geometricamente similares.

- S_i satisfazem a condição do conjunto aberto se existe um conjunto não vazio aberto e limitado tal que

$$V \supset \bigcap_{i=1}^m S_i(V)$$

com a união disjunta.

Vejam como exemplo a aplicação à poeira de Cantor.

Exemplo 9. No procedimento iterativo para construção da poeira de Cantor \mathcal{C} , no n -ésimo passo cada um dos intervalos $I_k^{(n-1)}$ cuja união é E_{n-1} dá origem a dois subintervalos disjuntos $I_{2k}^{(n)} \cup I_{2k+1}^{(n)}$, sendo E_n a união dos 2^n intervalos assim obtidos. Ora $I_{2k}^{(n)}$ é obtido de $I_k^{(n-1)}$ aplicando a similaridade

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x$$

e $I_{2k+1}^{(n)}$ é obtido de $I_k^{(n-1)}$ aplicando a similaridade

$$S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Consequentemente, para poeira de Cantor, a condição do conjunto aberto verifica-se para S_1 e S_2 com $V = (0, 1)$. Então $S_1(E_n)$ e $S_2(E_n)$ são precisamente as uniões das “terças partes” esquerdas e das metades direitas, respectivamente, dos intervalos cuja união forma E_n , donde $E_n = S_1(E_{n-1}) \cup S_2(E_{n-1})$. Assim os E_k são invariantes para as aplicações S_1 e S_2 , as quais representam as auto-similaridades fundamentais do conjunto de Cantor.

Então a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor é o real s que é a solução de $(\frac{1}{3})^s + (\frac{1}{3})^s = 1$, ou seja

$$\text{Dim}_H \mathcal{C} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}.$$

Note-se que esta forma de calcular a dimensão de Hausdorff mostra claramente que esta avalia a expansão a que deveríamos sujeitar cada um dos subintervalos que constituem C_n , em cada etapa, para refazer C_{n-1} .

5.2 Poeira de Cantor aleatória

Uma das vias do desenvolvimento da Matemática é decerto a aleatorização; há inúmeros exemplos de desenvolvimentos em que estruturas e leis deterministas bem conhecidas surgem como esperanças matemáticas de campos ou processos estocásticos.

O conjunto de Cantor pode ser aleatorizado de muitas maneiras. A mais simples, mas pouco interessante, é em cada passo do procedimento iterativo atrás descrito o conjunto E_n ser obtido por eliminação de um segmento escolhido ao acaso de entre os três segmentos iguais em que dividimos cada um dos 2^{n-1} subconjuntos que constituem o conjunto E_{n-1} . Outra, mais complexa, consiste em cada passo, cada um dos 2^{n-1} subconjuntos que constituem o conjunto E_{n-1} , ser dividido num número aleatório N de segmentos iguais, de que se eliminam K escolhidos ao acaso.

Por outro lado, pode também aleatorizar-se o comprimento dos segmentos em que se divide cada um dos referidos subconjuntos.

Nesta secção vamos ocupar-nos apenas do que denominamos *poeira de Cantor aleatória*. Definimos este fractal aleatório da seguinte forma:

Definição 11. *Consideremos que,*

- $C_0 = [0, 1]$.
- *Seja $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, $U_{1:2}$ e $U_{2:2}$ o mínimo e o máximo, respectivamente, de uma amostra aleatória de dimensão dois de U ; $C_1 = [0, U_{1:2}] \cup [U_{2:2}, 1]$.*

- *Sendo $C_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^{(n-1)}$, $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k^{(n)}$, com*

$$I_{2k}^{(n)} \cup I_{2k+1}^{(n)} = I_k^{(n-1)} - (U_{1:2}^{(n,k)}, U_{2:2}^{(n,k)}), \quad k = 1, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

onde $U_{1:2}^{(n-1,k)}$ e $U_{2:2}^{(n-1,k)}$ são o mínimo e o máximo, respectivamente, de uma amostra aleatória de dimensão dois de $U_k^{(n-1)} \sim \text{Uniforme}(I_k^{(n-1)})$.

$$\bullet \mathcal{F} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_n.$$

Dizemos que \mathcal{F} é um fractal aleatório.

Justificamos, em detalhe, a razão que nos leva a denominar este fractal aleatório *poeira de Cantor aleatória*. De facto, como a seguir se demonstra, os valores esperados dos extremos dos subconjuntos I_k , $k = 1, \dots, 2^n$ de C_n na construção da poeira de Cantor aleatória \mathcal{F}_U coincidem com os correspondentes extremos dos subconjuntos de E_n na construção da poeira de Cantor \mathcal{C} . (Observe-se a Figura 5.2, onde se pode visualizar a construção da poeira de Cantor aleatória, ao longo das várias etapas.)

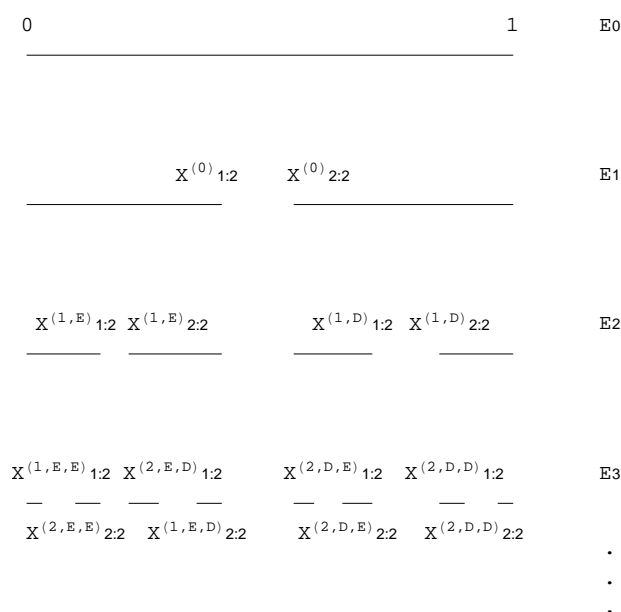


Figura 5.2: Construção da poeira de Cantor aleatória

Considere-se a partição do intervalo $[0, 1]$ em três segmentos de comprimento aleatório, determinados por dois pontos ao acaso, no sentido tradicional, de seguirem uma lei uniforme: $S_1 = [0, X_{1:2}^{(0)}]$, $S_2 = [X_{1:2}^{(0)}, X_{2:2}^{(0)}]$ e $S_3 = [X_{2:2}^{(0)}, 1]$.

Do resultado geral sobre funções densidade de probabilidade do mínimo e do máximo de uma amostra aleatória de dimensão n de uma população com função

densidade de probabilidade f_X , função de distribuição F_X e função cauda \tilde{F}_X ,

$$f_{X_{1:n}}(x) = n\tilde{F}_X^{n-1}(x)f_X(x)\mathbf{I}_{\mathcal{S}}(x) \quad \text{e} \quad f_{X_{n:n}}(x) = nF_X^{n-1}(x)f_X(x)\mathbf{I}_{\mathcal{S}}(x)$$

(onde \mathbf{S} denota o suporte da população parente) imediatamente se conclui que a função densidade de probabilidade das estatísticas ordinais que delimitam o intervalo central são, no caso de parente uniforme e de uma amostra de dimensão dois,

$$f_{X_{1:2}^{(0)}}(x_1) = 2(1-x_1)\mathbf{I}_{(0,1)}(x_1);$$

e

$$f_{X_{2:2}^{(0)}}(x_2) = 2x_2\mathbf{I}_{(0,1)}(x_2).$$

donde

$$\mathbb{E}[X_{1:2}^{(0)}] = \int_0^1 2x_1(1-x_1)dx_1 = 2B(2,2) = \frac{1}{3};$$

e

$$\mathbb{E}[X_{2:2}^{(0)}] = \int_0^1 2x_2^2dx_2 = \frac{2}{3}.$$

Concluimos assim que $\mathbb{E}[C_1] = E_1$.

Note-se agora que, a definição de \mathcal{C} pode ser feita de uma forma muito análoga à que usámos para definir a poeira de Cantor aleatória \mathcal{F} .

Definição 12. *Consideremos,*

- $E_0 = [0, 1]$.
- $E_1 = E_0 - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
- *Sendo* $E_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \mathbb{I}_k^{(n-1)} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [a_k^{(n-1)}, b_k^{(n-1)}]$, *então*

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \mathbb{I}_k^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left([a_{2k}^{(n)}, b_{2k}^{(n)}] \cup [a_{2k+1}^{(n)}, b_{2k+1}^{(n)}] \right)$$

com

$$a_{2k}^{(n)} = a_k^{(n-1)}, \quad b_{2k}^{(n)} = a_k^{(n-1)} + \frac{b_k^{(n-1)} - a_k^{(n-1)}}{3},$$

$$a_{2k+1}^{(n)} = b_k^{(n-1)} - \frac{b_k^{(n-1)} - a_k^{(n-1)}}{3}, \quad b_{2k+1}^{(n)} = b_k^{(n-1)}$$

$$\bullet \mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_n.$$

Designamos \mathcal{C} por poeira de Cantor.

Com esta notação, facilmente se prova o resultado que pretendemos, o qual enunciamos no teorema seguinte.

Teorema 5. *Os valores esperados dos extremos dos subconjuntos I_k , $k = 1, \dots, 2^n$ de C_n na construção da poeira de Cantor aleatória \mathcal{F}_U coincidem com os correspondentes extremos dos subconjuntos de E_n na construção da poeira de Cantor \mathcal{C} , ou seja,*

$$\mathbb{E}[C_n] = E_n.$$

Demonstração 3. *Estabelecemos atrás que os valores esperados dos extremos do intervalos $I_1^{(1)}$ são 0 e $\frac{1}{3}$ e os dos extremos de $I_2^{(1)}$ são $\frac{2}{3}$ e 1, ou seja,*

$$\mathbb{E}[I_1^{(1)}] = \mathbb{I}_1^{(1)}$$

e

$$\mathbb{E}[I_2^{(1)}] = \mathbb{I}_2^{(1)}.$$

Ponha-se então a hipótese de indução

$$\mathbb{E}[I_k^{(j)}] = \mathbb{I}_k^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, 2_{n-1}$$

Uma vez que

$$I_{2k}^{(n)} \cup I_{2k+1}^{(n)} = I_k^{(n-1)} - (U_{1:2}^{(n-1,k)}, U_{2:2}^{(n-1,k)}) = [X, U_{1:2}^{(n-1,k)}] \cup [U_{1:2}^{(n-1,k)}, Y],$$

5.2. Poeira de Cantor aleatória

$k = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, onde X e Y são os extremos do intervalo aleatório $I_k^{(n-1)}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[U_{1:2}^{(n-1,k)} \right] &= \mathbb{E}_{(X,Y)} \left[\mathbb{E}_{U_{1:2}^{(n-1,k)} | (X,Y)} \left[U_{1:2}^{(n-1,k)} \right] \right] = \\ &= \mathbb{E}_{(X,Y)} \left[X + \frac{Y - X}{3} \right] = \\ &= a_k^{(n-1)} + \frac{b_k^{(n-1)} - a_k^{(n-1)}}{3} = \\ &= b_{2k}^{(n)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[U_{2:2}^{(n-1,k)} \right] &= \mathbb{E}_{(X,Y)} \left[\mathbb{E}_{U_{2:2}^{(n-1,k)} | (X,Y)} \left[U_{2:2}^{(n-1,k)} \right] \right] = \\ &= \mathbb{E}_{(X,Y)} \left[Y - \frac{Y - X}{3} \right] = \\ &= b_k^{(n-1)} - \frac{b_k^{(n-1)} - a_k^{(n-1)}}{3} = \\ &= a_{2k+1}^{(n)} = b_k^{(n-1)} - \frac{b_k^{(n-1)} - a_k^{(n-1)}}{3} \end{aligned}$$

pois por hipótese de indução $\mathbb{E}[X] = a_k^{(n-1)}$ e $\mathbb{E}[Y] = b_k^{(n-1)}$.

Então, como $a_k^{(n-1)} = a_{2k}^{(n)}$ e $b_k^{(n-1)} = b_{2k+1}^{(n)}$, segue-se que

$$\mathbb{E}[I_{2k}^{(n)} \cup I_{2k+1}^{(n)}] = \mathbb{I}_{2k}^{(n)} \cup \mathbb{I}_{2k+1}^{(n)}, \quad k = 1, \dots, 2^{n-1} - 1$$

e finalmente, como desejávamos estabelecer

$$\mathbb{E}[C_n] = E_n.$$

5.3 Dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória

Os fractais apresentam algumas características fascinantes, e por isso têm surgido diversas extensões aleatórias do conceito de fractal, consoante as características dos fractais deterministas que mais fascinaram quem as elaborou.

Um dos aspectos mais apelativos dos fractais é a recursividade na construção, e o reflexo que isso em geral tem no que se designa por auto-similaridade. De facto, os mais famosos fractais têm a estranha peculiaridade de qualquer parte ser, à escala, uma reprodução do todo, para usar a saborosa descrição de Paul Lévy².

Por isso, de entre as múltiplas extensões estocásticas do conceito de fractal ternário de Cantor, apenas vamos considerar as que preservam alguma auto-similaridade estocástica, nomeadamente conjuntos \mathcal{F} que se adequam à descrição que se segue:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n, \quad (5.3)$$

onde $[0, 1] = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ é uma sequência decrescente de intervalos fechados, sendo F_n a união de 2^n intervalos $I^{(n)}$ fechados e disjuntos.

Assumem-se as condições seguintes:

- Cada intervalo $I^{(n)}$ de F_n contém dois intervalos de F_{n+1} (dos três segmentos com comprimento aleatório em que F_n é dividido, o segmento do meio é sempre eliminado na etapa seguinte). Designam-se estes intervalos por $I_L^{(n+1)}$ e $I_R^{(n+1)}$. O limite inferior de $I_L^{(n+1)}$ coincide com o limite inferior de $I^{(n)}$ e o limite superior de $I_R^{(n+1)}$ coincide com o limite superior de $I^{(n)}$.

² Lévy (1938). Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout, *Jour. Ec. Pol. (3)* **7**, 227–247; **8**, 249–291.

- Os comprimentos dos segmentos $I_L^{(n+1)}$ e $I_R^{(n+1)}$ são aleatórios, e exige-se auto-semelhança estatística pela necessidade dos rácios $C_L^{(n)} = \frac{|I_L^{(n+1)}|}{|I^{(n)}|}$ terem a mesma distribuição de probabilidade, quaisquer que sejam as etapas n e $n + 1$ e qualquer que seja o intervalo $I^{(n)}$ de F_n , e também pela necessidade dos rácios $C_R^{(n)} = \frac{|I_R^{(n+1)}|}{|I^{(n)}|}$ terem a mesma distribuição de probabilidade, qualquer que sejam as etapas n e $n + 1$ e qualquer que seja o intervalo $I^{(n)}$ de F_n . Note-se que os rácios $C_L^{(n)}$ e $C_R^{(n)}$ não têm que ter a mesma distribuição de probabilidade e não são independentes.

Como se assume que, para as várias etapas n , com $n = 0, 1, 2, \dots$, todos os rácios $C_L^{(n)}$ têm a mesma distribuição de probabilidade, pode usar-se em particular o rácio $C_1 = C_L^{(0)} = \frac{|I_L^{(1)}|}{|I^{(0)}|} = \frac{|I_L^{(1)}|}{1} = |I_L^{(1)}|$; e do mesmo modo, como se assume que, para as várias etapas n , com $n = 0, 1, 2, \dots$, todos os rácios $C_R^{(n)}$ têm a mesma distribuição de probabilidade, pode usar-se em particular o rácio $C_2 = C_R^{(0)} = \frac{|I_R^{(1)}|}{|I^{(0)}|} = \frac{|I_R^{(1)}|}{1} = |I_R^{(1)}|$.

Falconer (1990, cap. 15), demonstra o seguinte resultado:

Teorema 6. *Com probabilidade 1, o conjunto de Cantor aleatório (5.3) tem dimensão de Hausdorff, $\text{Dim}_H \mathcal{F}$ igual a s , que é a solução da equação*

$$\mathbb{E}[C_1^s + C_2^s] = 1. \quad (5.4)$$

Note-se que, tal como no procedimento descrito no Teorema 4 para calcular a dimensão de Hausdorff de um fractal determinista com base nas auto-similaridades decorrentes do modo recursivo como era construído, s determina a expansão a que teria que se sujeitar cada elemento de F_n para “refazer” F_{n-1} .

Vejamos então a dimensão de Hausdorff da poeira de Cantor aleatória definida na secção anterior.

Nesse caso, tem-se que

$$C_1 = |I_L^{(1)}| = |X_{1:2} - 0| = X_{1:2}$$

e

$$C_2 = |I_R^{(1)}| = |1 - X_{2:2}| = 1 - X_{2:2}$$

onde $X_{1:2}$ e $X_{2:2}$ são estatísticas ordinais associadas a uma amostra aleatória (X_1, X_2) , vector aleatório cujas margens univariadas X_i , com $i = 1, 2$, são variáveis aleatórias independentes com distribuição idêntica à do modelo X da população, $F_X(x)$; mais especificamente são, respectivamente, o mínimo e o máximo da amostra aleatória referida.

De

$$1 = \mathbb{E}[C_1^s + C_2^s] = \int_0^1 x^s f_{X_{1:2}}(x) dx + \int_0^1 (1-x)^s f_{X_{2:2}}(x) dx = 4B(s+1, 2)$$

conclui-se que

$$Dim_H \mathcal{F} = s = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56155,$$

quase certamente.

À primeira vista este resultado parece interessante, uma vez que indica que a poeira de Cantor aleatória seria tendencialmente menos “densa” em $[0,1]$ do que a poeira de Cantor ($Dim_H \mathcal{C} \approx 0.63093$).

Como $C_1 = X_{1:2}$ tem função densidade de probabilidade $f_{C_1}(x) = 2(1-x)I_{[0,1]}(x)$,

$$\mathbb{P}[C_1 \leq \mathbb{E}[C_1]] = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}.$$

Acresce que a mediana de C_1 é aproximadamente $0.293 < \mathbb{E}[C_1]$, e portanto em mais de metade dos casos o comprimento de C_1 vai ser inferior a 0.293. Os resultados no que se refere ao comprimento de C_2 são idênticos.

Assim, o factor de expansão s que é necessário utilizar para $\mathbb{E}[C_1^s + C_2^s] = 1$ (isto é, que aplicado a cada iteração F_n reconstruísse F_{n-1}) seria necessariamente menor do que $Dim_H \mathcal{C}$.

No entanto esta explicação intuitiva tem duas falhas incontornáveis:

1. Se $\mathbb{E}[\mathcal{F}] = \mathcal{C}$, necessariamente tal como há realizações da poeira de Cantor aleatória menos densas do que \mathcal{C} teria que haver outras realizações mais densas, que reequilibrassem a situação.

2. A análise simplista que parece apoiar o cálculo feito não tem em conta um factor essencial: C_1 e C_2 são mutuamente dependentes!

Assim, em nossa opinião a questão tem que ser aprofundada, o que faremos depois de abordar outros fractais aleatórios que generalizam de forma diversa a poeira de Cantor \mathcal{C} .

5.4 Fractais aleatórios $\mathcal{F}_{X_{p,q}}$ e correspondentes fractais $\mathcal{C}_{X_{p,q}}$ deterministas

Vamos agora tomar o caminho inverso, começar por definir conjuntos aleatórios usando como população parente $X \sim \text{Beta}(p, q)$.

Ao segmento $[0, 1]$ retira-se $S_2 = [X_{1:2}, X_{2:2}]$, onde $X_{1:2}$ e $X_{2:2}$ são o mínimo e o máximo, respectivamente, de duas observações independentes da população $X \sim \text{Beta}(p, q; 0, 1)$. Depois, em cada passo, retiram-se aos segmentos sobrantes o *spacing* médio S_2 em cada um dos segmentos que remanescem do passo anterior. $\mathcal{F}_{X_{p,q}}$ é a intersecção dos conjuntos assim obtidos em cada etapa.

O “fractal médio” $\mathcal{C}_{X_{p,q}}$ correspondente a $\mathcal{F}_{X_{p,q}}$ é a intersecção dos conjuntos que se obtêm da seguinte forma: partindo de $[0, 1]$ retira-se $[\mathbb{E}[X_{1:2}], \mathbb{E}[X_{2:2}]]$, que é o *spacing* esperado, e este procedimento é repetido em cada um dos subconjuntos remanescentes do passo anterior.

Começemos por observar, com toda a generalidade, que se X for uma variável aleatória positiva com função de distribuição $F_X(x)$, então se o seu valor médio $\mathbb{E}[X]$ existe, este pode ser determinado usando (5.5).

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx \quad (5.5)$$

Sabemos que as funções de distribuição do mínimo e do máximo de uma amostra aleatória de dimensão dois, são dadas respectivamente por (5.6) e (5.7).

$$F_{X_{1:2}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^2; \quad (5.6)$$

$$F_{X_{2:2}}(x) = (F_X(x))^2, \quad (5.7)$$

e conseqüentemente, se existirem, os valores médios do mínimo e do máximo de uma amostra aleatória de dimensão dois de uma variável positiva com função de distribuição F_X são dados respectivamente por (5.8) e (5.9).

$$\mathbb{E}[X_{1:2}] = \int_0^1 (1 - F_X(x))^2 dx; \quad (5.8)$$

$$\mathbb{E}[X_{2:2}] = \int_0^1 (F_X(x))^2 dx. \quad (5.9)$$

A expressão acima é facilmente calculada, de forma exacta, quando $X \sim \text{Beta}(p, q)$ com p ou q tomando os valores 1 ou 2:

Se $q = 1$, ou seja se $X \sim \text{Beta}(p, 1)$,

$$F_X(x) = x^p I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x).$$

Conseqüentemente

$$\mathbb{E}[X_{1:2}] = \frac{2p^2}{(p+1)(2p+1)}; \quad (5.10)$$

$$\mathbb{E}[X_{2:2}] = \frac{2p}{2p+1}. \quad (5.11)$$

Designando por $S_2 = X_{2:2} - X_{1:2}$ o *spacing* intermédio, a retirar em cada etapa da construção do conjunto de Cantor aleatório, temos que

$$\mathbb{E}[S_2] = \mathbb{E}[X_{2:2} - X_{1:2}] = \frac{2p}{(p+1)(2p+1)}.$$

Para calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor aleatório construído por supressão iterada do *spacing* intermédio numa população $Beta(p, 1)$ utilizando o Teorema 6, (Falconer (1990), cap. 15), basta recordar que

$$f_{X_{1:2}}(x) = (2px^{p-1} - 2px^{2p-1})I_{(0,1)}(x);$$

$$f_{X_{2:2}}(x) = 2px^{2p-1}I_{(0,1)}(x).$$

e resolver a equação seguinte em ordem a s :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_1^s + C_2^s] = 1 &\iff \int_0^1 x^s f_{X_{1:2}}(x) dx + \int_0^1 x^s f_{X_{2:2}}(1-x) dx = 1 \\ &\iff \int_0^1 x^s (2px^{p-1} - 2px^{2p-1}) dx + \int_0^1 x^s (2p(1-x)^{2p-1}) dx = 1 \\ &\iff \frac{1}{p+s} - \frac{1}{2p+s} + \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(2p+s+1)} = \frac{1}{2p}. \end{aligned}$$

O correspondente conjunto de Cantor determinista obtém-se partindo do segmento $[0, 1]$ e suprimindo iterativamente os segmentos $[\mathbb{E}[X_{1:2}], \mathbb{E}[X_{2:2}]$], com parente $X \sim Beta(p, 1)$.

Para determinar a dimensão de Hausdorff deste conjunto de Cantor determinista, construído usando a distribuição $Beta(p, 1)$, baseámo-nos no Teorema 4 (Falconer (1990), cap. 9), resolvendo a equação (5.12) em ordem a s .

$$(\mathbb{E}[X_{1:2}])^s + (1 - \mathbb{E}[X_{2:2}])^s = 1. \tag{5.12}$$

Note-se que em cada etapa da construção do conjunto de Cantor determinista, as razões de similaridade são $c_1 = \mathbb{E}[X_{1:2}]$ e $c_2 = 1 - \mathbb{E}[X_{2:2}]$ para o intervalo da esquerda e da direita, respectivamente. As expressões de $\mathbb{E}[X_{1:2}]$ e $\mathbb{E}[X_{2:2}]$ foram calculadas em (5.10) e (5.11).

Se $q = 2$, ou seja se $X \sim Beta(p, 2)$, então a função densidade de probabilidade da variável aleatória X é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{B(p, 2)} x^{p-1}(1-x) = p(p+1)x^{p-1}(1-x)I_{(0,1)}(x).$$

a respectiva função de distribuição é

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x p(p+1)t^{p-1}(1-t)dt \\ &= ((p+1)x^p - px^{p+1})I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando (5.8) e (5.9) e (5.13).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{1:2}] &= \int_0^1 (1 - (p+1)x^p + px^{p+1})^2 dx \\ &= \int_0^1 dx - 2(p+1) \int_0^1 x^p dx + (p+1)^2 \int_0^1 x^{2p} dx \\ &\quad + 2p \int_0^1 x^{p+1} dx - 2p(p+1) \int_0^1 x^{2p+1} dx + p^2 \int_0^1 x^{2p+2} dx \\ &= \frac{2p}{p+2} + \frac{(p+1)^2}{2p+1} + \frac{p^2}{2p+3} - (p+1) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{2:2}] &= \int_0^1 (1 - ((p+1)x^p - px^{p+1})^2) dx \\ &= \int_0^1 dx - (p+1)^2 \int_0^1 x^{2p} dx + 2p(p+1) \int_0^1 x^{2p+1} dx \\ &\quad - p^2 \int_0^1 x^{2p+2} dx \\ &= p+1 - \frac{(p+1)^2}{2p+1} - \frac{p^2}{2p+3}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Portanto, o valor médio do *spacing* intermédio é dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_2] &= \mathbb{E}[X_{2:2}] - \mathbb{E}[X_{1:2}] \\
 &= p + 1 - \frac{(p+1)^2}{2p+1} - \frac{p^2}{2p+3} \\
 &\quad - \left(\frac{2p}{p+2} + \frac{(p+1)^2}{2p+1} + \frac{p^2}{2p+3} - (p+1) \right) \\
 &= 2p + 2 - \frac{2(p+1)^2}{2p+1} - \frac{2p^2}{2p+3} - \frac{2p}{p+2}. \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

Para calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor aleatório construído usando a distribuição $Beta(p, 2)$, pelo Teorema 6 (Falconer (1990), cap. 15), usando (5.6) e (5.7), podem determinar-se as funções de distribuição do mínimo e do máximo

$$\begin{aligned}
 F_{X_{1:2}}(x) &= (2x^p + 2px^p - x^{2p} - 2px^{2p} - p^2x^{2p} - 2px^{p+1} \\
 &\quad + 2px^{2p+1} + 2p^2x^{2p+1} - p^2x^{2p+2}) I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{X_{2:2}}(x) &= (x^{2p} + 2px^{2p} + p^2x^{2p} - 2px^{2p+1} - 2p^2x^{2p+1} \\
 &\quad + p^2x^{2p+2}) I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x).
 \end{aligned}$$

e derivando-as obtêm-se as funções de densidade de probabilidade destas estatísticas

ordinais

$$\begin{aligned}
 f_{X_{1:2}}(x) &= 2p(p+1)(1-x)x^{p-1}(1-(p+1)x^p+px^{p+1})I_{(0,1)}(x) \\
 &= 2px^{p-1} + 2p^2x^{p-1} - 2px^p - 2p^2x^p + 2px^{2p} \\
 &\quad + 6p^2x^{2p} + 4p^3x^{2p} - 2px^{2p-1} - 4p^2x^{2p-1} \\
 &\quad - 2p^3x^{2p-1} - 2p^2x^{2p+1} - 2p^3x^{2p+1}I_{(0,1)}(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{X_{2:2}}(x) &= 2p(1+p)(-1+p(x-1))(x-1)x^{2p-1}I_{(0,1)}(x) \\
 &= (-2px^{2p} - 6p^2x^{2p} - 4p^3x^{2p} + 2px^{2p-1} + 4p^2x^{2p-1} \\
 &\quad + 2p^3x^{2p-1} + 2p^2x^{2p+1} + 2p^3x^{2p+1})I_{(0,1)}(x).
 \end{aligned}$$

Resolve-se a equação seguinte em ordem a s , obtendo assim a dimensão se Hausdorff do conjunto de Cantor aleatório construído usando a distribuição $Beta(p, 2)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[C_1^s + C_2^s] = 1 &\iff \int_0^1 x^s f_{C_1}(x)dx + \int_0^1 x^s f_{C_2}(x)dx = 1 \\
 &\iff \int_0^1 x^s f_{X_{1:2}}(x)dx + \\
 &\quad \int_0^1 x^s f_{X_{2:2}}(1-x)dx = 1 \\
 &\iff \int_0^1 x^s (-2p(p+1)(x-1)x^{p-1}(1-(p+1)x^p+px^{p+1}))dx \\
 &\quad + \int_0^1 x^s (2p(p+1)(-1-px)x(1-x)^{2p-1})dx = 1 \\
 &\iff \frac{2p^2(p+1)^2(2+4p+3s)}{(p+s)(1+p+s)(2p+s)(1+2p+s)(2+2p+s)} \\
 &\quad + \frac{2p(p+1)(2+s+p(4+s))\Gamma(2p)\Gamma(2+s)}{\Gamma(3+2p+s)} = 1.
 \end{aligned}$$

Para determinar a dimensão de Hausdorff do correspondente conjunto de Cantor determinista, construído usando a distribuição $Beta(p, 2)$, baseámo-nos no Teorema 4 (Falconer (1990), cap.9), resolvendo a equação (5.17) em ordem a s .

$$(\mathbb{E}[X_{1:2}])^s + (1 - \mathbb{E}[X_{2:2}])^s = 1 \quad (5.17)$$

As expressões de $\mathbb{E}[X_{1:2}]$ e $\mathbb{E}[X_{2:2}]$ são dadas pelas expressões (5.14) e (5.15), respectivamente.

Genericamente, se $X \sim \text{Beta}(p, q)$ — e como se $X \sim \text{Beta}(p, q)$, então $1 - X \sim \text{Beta}(q, p)$, basta tratar um dos casos —, os cálculos são analiticamente infactíveis, mas as expressões prestam-se a avaliação numérica simples usando *software* apropriado, por exemplo o *Mathematica*. A função densidade de probabilidade da variável aleatória $X \sim \text{Beta}(p, q)$ é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} I_{(0,1)}(x).$$

a respectiva função de distribuição é

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{B(p, q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt I_{(0,1)}(x) + I_{(1,\infty)}(x). \quad (5.18)$$

Assim, os valores médios do mínimo e do máximo de uma amostra aleatória de dimensão dois, podem ser calculados usando (5.8) e (5.9), usando (5.18).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{1:2}] &= \int_0^1 (1 - F_X(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \int_0^x \frac{1}{B(p, q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \right)^2 dx \\ \mathbb{E}[X_{2:2}] &= \int_0^1 (1 - (F_X(x))^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \left(\int_0^x \frac{1}{B(p, q)} t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Portanto, o valor médio do *spacing* intermédio é dado por:

$$\mathbb{E}[S_2] = \mathbb{E}[X_{2:2}] - \mathbb{E}[X_{1:2}].$$

Por outro lado, a função densidade de probabilidade do *spacing* intermédio S_2 é dada por

$$f_{S_2}(z) = 2 \left(\frac{1}{B(p, q)} \right)^2 \int_0^{1-z} x^{p-1} (1-x)^{q-1} (z+x)^{p-1} (1-z-x)^{q-1} dx$$

Logo, a probabilidade do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista do mesmo, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbb{P}[S_2 > \mathbb{E}[S_2]] = \int_{\mathbb{E}[S_2]}^1 f_{S_2}(z) dz.$$

- Quando $q = 1$, ou seja, quando $X \sim \text{Beta}(p, 1)$, então a função densidade de probabilidade do *spacing* intermédio S_2 é dada por

$$\begin{aligned} f_{S_2}(z) &= 2 \left(\frac{1}{B(p, 1)} \right)^2 \int_0^{1-z} x^{p-1} (z+x)^{p-1} dx \\ &= 2p^2 \int_0^{1-z} x^{p-1} (z+x)^{p-1} dx \end{aligned}$$

- Quando $q = 2$, ou seja, quando $X \sim \text{Beta}(p, 2)$, então a função densidade de probabilidade do *spacing* intermédio S_2 é dada por

$$\begin{aligned} f_{S_2}(z) &= 2 \left(\frac{1}{B(p, 2)} \right)^2 \int_0^{1-z} x^{p-1} (1-x)(z+x)^{p-1} (1-z-x) dx \\ &= 2p^2(p+1)^2 \int_0^{1-z} x^{p-1} (1-x)(z+x)^{p-1} (1-z-x) dx \end{aligned}$$

Na Tabela 5.1 podemos observar, para alguns valores de p e q , a probabilidade do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista, bem como as dimensões de Hausdorff dos respectivos conjuntos de Cantor aleatório e determinista.

Podemos verificar que para cada uma das betas consideradas, $\text{Beta}(p, 1)$ e $\text{Beta}(p, 2)$, temos

5.4. *Fractais aleatórios $\mathcal{F}_{X_{p,q}}$ e correspondentes fractais $\mathcal{C}_{X_{p,q}}$ deterministas*

Tabela 5.1: Probabilidades do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista e dimensões de Hausdorff

p	q	$\mathbb{E}[S_2]$	$Med(S_2)$	$\mathbb{P}[S_2 > \mathbb{E}[S_2]]$	$Dim_H \mathcal{F}_X$	$Dim_H \mathcal{F}$
0.1	1	0.151515	0.026300	0.293280	0.352648	0.557659
0.25	1	0.266667	0.172200	0.392116	0.436276	0.578127
0.5	1	0.333333	0.278630	0.434425	0.500000	0.600967
0.75	1	0.342857	0.299360	0.443826	0.536400	0.617679
1	1	0.333333	0.292893	0.444444	0.561553	0.630930
1.5	1	0.300000	0.259473	0.437901	0.595741	0.651179
2	1	0.266667	0.225220	0.429426	0.618907	0.666305
3	1	0.214286	0.173688	0.415534	0.649741	0.688046
5	1	0.151515	0.116921	0.399752	0.685187	0.715013
20	1	0.046458	0.033219	0.376770	0.761324	0.778206
0.1	2	0.081845	0.010338	0.260435	0.417567	0.586921
0.25	2	0.158730	0.081557	0.349471	0.502501	0.611604
0.5	2	0.225000	0.165812	0.399198	0.563298	0.636423
0.75	2	0.254545	0.206609	0.419337	0.596491	0.653356
1	2	0.266667	0.225222	0.429426	0.618907	0.666305
1.5	2	0.267857	0.232474	0.437156	0.648970	0.685617
2	2	0.257143	0.223925	0.437868	0.669269	0.699867
3	2	0.228571	0.196836	0.433337	0.696464	0.720341
5	2	0.179820	0.150747	0.423116	0.728262	0.746003
20	2	0.064972	0.051222	0.401046	0.798716	0.807604

- Embora ambas as dimensões de Hausdorff dos respectivos conjuntos de Cantor aleatório e determinista sejam ambas crescentes com o aumento do parâmetro livre p , em cada caso, tem-se sempre $Dim_H \mathcal{F}_X < Dim_H \mathcal{F}$.
- Relativamente ao valor esperado do *spacing* intermédio S_2 e à probabilidade do comprimento aleatório desse *spacing* intermédio exceder o respectivo comprimento determinista (dado pelo valor esperado do *spacing*), podemos constatar que são ambos crescentes com o aumento do parâmetro livre até ao caso de $p = q$, após o que ambos decrescem.

Assim, reforça-se a aparência de que o fractal aleatório deveria ter uma dimensão de Hausdorff maior do que o correspondente fractal determinista. Mostramos seguidamente que é uma falsa aparência, pois de facto quando numa etapa é retirado um *spacing* menor do que o *spacing* esperado, na etapa seguinte os segmentos sobranes são compensatoriamente maiores, e por isso há uma probabilidade elevada de lhes retirar nessa etapa *spacings* intermédios maiores.

Para ilustrar isso, vamos indicar a probabilidade de a soma dos comprimentos dos segmentos que são retirados até à k -ésima etapa ($k = 1, \dots, 5$) na construção do fractal aleatório, que designamos $S_{2,A}^{(k)}$, excederem o comprimento da soma dos segmentos retirados na construção do correspondente fractal determinista, que denotamos $S_{2,D}^{(k)}$.

Para efectuar a simulação de Monte Carlo para determinação dessas probabilidades e correspondentes intervalos de confiança de 95%, usámos em cada caso 5000 *runs*. Por outro lado, para cálculo do valor de referência do fractal determinista, necessário se tornava conhecer $S_{2,D}^{(k)}$.

Note-se que na primeira etapa se tem $[0, a] \cup [b, 1]$, onde $a = \mathbb{E}[X_{1:2}]$ e $b = \mathbb{E}[X_{2:2}]$, que atrás discutimos e calculámos para os valores dos parâmetros para que fazemos este estudo.

O resultado que se segue indica o valor de referência $S_{2,D}^{(k)}$:

Teorema 7. *O comprimento da soma dos segmentos retirados na construção de um fractal determinista até à k -ésima etapa, que denotamos $S_{2,D}^{(k)}$ pode ser calculado do seguinte modo:*

$$S_{2,D}^{(k)} = 1 - (a + (1 - b))^k,$$

onde $a = \mathbb{E}[X_{1:2}]$ e $b = \mathbb{E}[X_{2:2}]$.

Demonstração 4. *Demonstremos primeiro por indução que na etapa E_n , o conjunto de Cantor determinístico é constituído por 2^n intervalos, com comprimento total dado por $(a + (1 - b))^n$. Depois basta pensar que se o intervalo inicial na etapa 0 tem comprimento 1, então a soma dos comprimentos dos segmentos que são retirados até à n -ésima etapa na construção do fractal determinista, que designamos $S_{2,D}^{(n)}$, é dada por $1 - (a + (1 - b))^n$.*

Na etapa E_1 , o conjunto de Cantor é constituído por 2^1 intervalos, com comprimento total dado por $a + (1 - b) = (a + (1 - b))^1$.

Considere-se então **Hipótese de indução:** Na etapa E_n , o conjunto de Cantor determinístico é constituído por 2^n intervalos, com comprimento total dado por $(a + (1 - b))^n$, que pode ser reescrito como

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (1 - b)^{n-k}.$$

Tese: Na etapa E_{n+1} , o conjunto de Cantor determinístico é constituído por 2^{n+1} intervalos, com comprimento total dado por $(a + (1 - b))^{n+1}$.

Cada intervalo dos 2^n intervalos da etapa E_n perde uma parte central na etapa E_{n+1} , originando dois intervalos, respectivamente com comprimentos $a \cdot a^k (1 - b)^{n-k} = a^{k+1} (1 - b)^{n-k}$ e $(1 - b) \cdot a^k (1 - b)^{n-k} = a^k (1 - b)^{n+1-k}$. Consequentemente, na etapa E_{n+1} , o número total de intervalos será $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, sendo a soma total dos

comprimentos desses intervalos dada por

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [a^{k+1}(1-b)^{n-k} + a^k(1-b)^{n+1-k}] \\
 = & a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k(1-b)^{n-k} + (1-b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k(1-b)^{n-k} \\
 = & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k(1-b)^{n-k}(a+1-b) \\
 = & (a+1-b)^n(a+1-b) \\
 = & (a+1-b)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Nas Tabelas 5.2 e 5.3, apresentam-se as probabilidades $\mathbb{P}[S_{2,A}^{(k)} > S_{2,D}^{(k)}]$, para $k = 1, \dots, 5$, e os respectivos intervalos de confiança a 95%.

Assim, observa-se que etapa a etapa $\mathbb{P}[S_{2,A}^{(k)} > S_{2,D}^{(k)}]$ vai crescendo consistentemente, e exceptuando os casos em que a dimensão de Hausdorff do fractal aleatório e do correspondente fractal determinista são valores muito próximos, a quinta etapa já indica claramente — ao invés do que conclusões precipitadas tiradas com base apenas na primeira etapa — que é intuitivo que o fractal aleatório tem quase certamente uma dimensão inferior à do correspondente fractal determinista, como de facto os nossos cálculos indicam!

Tabela 5.2: Estimativas e intervalos de confiança a 95% para as probabilidades do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista

$B(p.1)$	1ª Etapa		2ª Etapa		3ª Etapa	
	<i>Est.1</i>	<i>I.C.1</i>	<i>Est.2</i>	<i>I.C.2</i>	<i>Est.3</i>	<i>I.C.3</i>
$B(0.1, 1)$	0.2874	(0.2748; 0.2999)	0.3836	(0.3701; 0.3971)	0.4500	(0.4362; 0.4638)
$B(0.25, 1)$	0.3930	(0.3794; 0.4065)	0.4730	(0.4592; 0.4868)	0.5330	(0.5192; 0.5468)
$B(0.5, 1)$	0.4254	(0.4117; 0.4391)	0.5120	(0.4981; 0.5259)	0.5508	(0.5370; 0.5646)
$B(0.75, 1)$	0.4340	(0.4202; 0.4477)	0.5068	(0.4929; 0.5207)	0.5554	(0.5416; 0.5692)
$B(1, 1)$	0.4450	(0.4312; 0.4588)	0.5110	(0.4971; 0.5249)	0.5342	(0.5204; 0.5480)
$B(1.5, 1)$	0.4434	(0.4296; 0.4572)	0.4914	(0.4775; 0.5053)	0.5168	(0.5030; 0.5307)
$B(2, 1)$	0.4270	(0.4132; 0.4407)	0.4810	(0.4672; 0.4949)	0.5136	(0.4998; 0.5275)
$B(3, 1)$	0.4228	(0.4091; 0.4365)	0.4838	(0.4700; 0.4977)	0.5236	(0.5098; 0.5374)
$B(5, 1)$	0.4000	(0.3864; 0.4136)	0.4596	(0.4458; 0.4734)	0.4836	(0.4698; 0.4975)
$B(20, 1)$	0.3770	(0.3635; 0.39043)	0.4194	(0.4057; 0.4331)	0.4360	(0.4223; 0.4498)
$B(p.q)$	4ª Etapa		5ª Etapa			
	<i>Est.4</i>	<i>I.C.4</i>	<i>Est.5</i>	<i>I.C.5</i>		
$B(0.1, 1)$	0.4960	(0.4821; 0.5099)	0.5298	(0.5160; 0.5436)		
$B(0.25, 1)$	0.5724	(0.5587; 0.5861)	0.5950	(0.5814; 0.6086)		
$B(0.5, 1)$	0.5836	(0.5700; 0.5973)	0.5974	(0.5838; 0.6110)		
$B(0.75, 1)$	0.5792	(0.5655; 0.5929)	0.5942	(0.5806; 0.6078)		
$B(1, 1)$	0.5484	(0.5346; 0.5622)	0.5628	(0.5491; 0.5766)		
$B(1.5, 1)$	0.5342	(0.5204; 0.5480)	0.5390	(0.5252; 0.5528)		
$B(2, 1)$	0.5388	(0.5250; 0.5526)	0.5444	(0.5306; 0.5582)		
$B(3, 1)$	0.5492	(0.5354; 0.5630)	0.5596	(0.5458; 0.5734)		
$B(5, 1)$	0.4948	(0.4809; 0.5087)	0.5180	(0.5042; 0.5319)		
$B(20, 1)$	0.4488	(0.4350; 0.4625)	0.4506	(0.4368; 0.4644)		

Tabela 5.3: Estimativas e intervalos de confiança a 95% para as probabilidades do comprimento aleatório do *spacing* intermédio S_2 ser superior ao comprimento determinista (Cont.)

$B(p,2)$	1ª Etapa		2ª Etapa		3ª Etapa	
	<i>Est.1</i>	<i>I.C.1</i>	<i>Est.2</i>	<i>I.C.2</i>	<i>Est.3</i>	<i>I.C.3</i>
$B(0.1, 2)$	0.2590	(0.2469; 0.2711)	0.3440	(0.3308; 0.3572)	0.3980	(0.3844; 0.4116)
$B(0.25, 2)$	0.3425	(0.3294; 0.3557)	0.4115	(0.3979; 0.4251)	0.4565	(0.4427; 0.4703)
$B(0.5, 2)$	0.3965	(0.3829; 0.4101)	0.4720	(0.4582; 0.4858)	0.5060	(0.4921; 0.5199)
$B(0.75, 2)$	0.4115	(0.3979; 0.4251)	0.4755	(0.4617; 0.4893)	0.5145	(0.5007; 0.5284)
$B(1, 2)$	0.4274	(0.4137; 0.4411)	0.4806	(0.4668; 0.4945)	0.5100	(0.4961; 0.5239)
$B(1.5, 2)$	0.4328	(0.4191; 0.4465)	0.4880	(0.4741; 0.5019)	0.5124	(0.4985; 0.5263)
$B(2, 2)$	0.4350	(0.4213; 0.4487)	0.4708	(0.4570; 0.4846)	0.4968	(0.4829; 0.5107)
$B(3, 2)$	0.4316	(0.4179; 0.4453)	0.4790	(0.4652; 0.4929)	0.4914	(0.4775; 0.5053)
$B(5, 2)$	0.4146	(0.4009; 0.4283)	0.4566	(0.4428; 0.4704)	0.4826	(0.4688; 0.4965)
$B(20, 2)$	0.4108	(0.3972; 0.4244)	0.4392	(0.4254; 0.4530)	0.4558	(0.4420; 0.4696)
$B(p,q)$	4ª Etapa		5ª Etapa			
	<i>Est.4</i>	<i>I.C.4</i>	<i>Est.5</i>	<i>I.C.5</i>		
$B(0.1, 2)$	0.4360	(0.4223; 0.4498)	0.4750	(0.4223; 0.4498.)		
$B(0.25, 2)$	0.4770	(0.4632; 0.4908)	0.5100	(0.4632; 0.4908)		
$B(0.5, 2)$	0.5320	(0.5182; 0.5458)	0.5540	(0.5182; 0.5458)		
$B(0.75, 2)$	0.5355	(0.5217; 0.5493)	0.5380	(0.5217; 0.5493)		
$B(1, 2)$	0.5200	(0.5062; 0.5339)	0.5364	(0.5062; 0.5339)		
$B(1.5, 2)$	0.5232	(0.5094; 0.5370)	0.5298	(0.5094; 0.5370)		
$B(2, 2)$	0.5134	(0.4996; 0.5273)	0.5168	(0.4996; 0.5273)		
$B(3, 2)$	0.4948	(0.4809; 0.5087)	0.4978	(0.4809; 0.5087)		
$B(5, 2)$	0.4922	(0.4783; 0.5061)	0.4942	(0.4783; 0.5061)		
$B(20, 2)$	0.4636	(0.4498; 0.4774)	0.4692	(0.4498; 0.4774)		

Referências

- Adler, R. C., Konheim, A.C. e McAndrew, M.H. (1965). Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114, p. 309-319.
- Aleixo, S., Rocha, J. e Pestana, D. (2008). Populational Growth Models in the Light of Symbolic Dynamics. *ITI2008 Conference Proceedings*, p. 311-316.
- Alves, J. F. e Ramos, J. S. (1999). Kneading Theory: A Functorial Approach. *Commun. Math. Phys.*, 204, p. 89-114.
- Amarasekare, P. (1998a). Allee effects in metapopulation dynamics. *Am. Nat.*, 152, p. 298-302.
- Amarasekare, P. (1998b). Interactions between local dynamics and dispersal: insights from single species models. *Theor. Popul. Biol.*, 53, p. 44-59.
- Beesack, P. R. (1966). A general form of the remainder in Taylor's theorem. *Amer. Math. Monthly*, 73, p. 64-67.
- Blokh, A. M. e Lyubich, M. Y. (1989). Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems. II. The smooth case. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 9, p. 751-758.

-
- Blumenthal, L. M. (1926). Concerning the remainder term in Taylor's formula. *Amer. Math. Monthly*, 33, p. 424-426.
 - Boukal, D. S. e Berec, L. (2002). Single-species Models of the Allee Effect: Extinction Boundaries, Sex Ratios and Mate Encounters, *J. Theor. Biol.*, 218, p. 375-394.
 - Bowen, R. (1975). *Equilibrium States in Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lectures Notes in Mathematics, 470, Berlin: Springer-Verlag.
 - Brassil, C. E. (2001). Mean time to extinction of a metapopulation with an Allee effect. *Ecol. Model*, 143, p. 9-13.
 - Brianzoni, S., Mammana, C. e Michetti, E. (2007). Nonlinear Dynamics in a business-cycle model with logistic population growth. *Chaos, Solitons and Fractals*, doi:10.1016/j.chaos.2007.08.041.
 - Cantrell, R. e Cosner, C. (2007). Density dependent behavior at habitat boundaries and the Allee effect. *Bull. Math. Biol.*, 69, p. 2339-2360.
 - Collet, P. e Eckmann, J.P. (1980). *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress on Physics, 1, Boston: Birkhauser.
 - Courchamp F., Clutton-Brock, T. H. e Grenfell, B. (1999a). Inverse density dependence and the Allee effect. *Trends Ecol. Evol.*, 14, p. 405-410.
 - Courchamp F., Grenfell, B. e Clutton-Brock, T. (1999b). Population dynamics of obligate cooperators. *Proc. R. Soc. London B*, 266, p. 557-563.
 - Courchamp F., Clutton-Brock, T. H. e Grenfell, B. (2000a). Multipack dynamics and the Allee effect in the African wild dog, *Lycaon pictus*. *Animal conservation*, 3, p. 277-285.

- Courchamp F., Grenfell, B. e Clutton-Brock, T. (2000b). Impact of natural enemies on obligately cooperative breeders. *Oikos*, 91, p. 311-322.
- Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Chichester: Wiley.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*, New York: Random House.
- Graczyk, J. e Swiatek, G. (1999). Survey Smooth unimodal maps in the 1990s. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 19, p. 263-287.
- Graczyk, J., Swiatek, G. e Sands, D. (2001). La dérivée schwarzienne en dynamique unimodale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 332, série I, p. 329-332.
- Gruntfest, Y. Arditi, R. e Dombrovsky, Y. (1997). A fragmental population in a varying environment. *J. Theor. Biol.*, 185, p. 539-547.
- Guckenheimer, J. (1979). Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional dynamics. *Commun. Math. Phys.*, 70, p. 173-180.
- Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Guckenheimer, J. e Johnson, S. (1990). Distortion of S-unimodal maps. *Ann. Math.*, 132, p. 71-130.
- Hilker, F., Langlais, M., Petrovskii, S. e Malchow, H. (2007). A diffusive SI model with Allee effect and application to FIV, *Math. Biosci.*, 206, p. 61-80.
- Holmgren, R. A. (1996). *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.

-
- Jiang, Y. (1993). Geometry of geometrically finite one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, 156, p. 639-647.
 - Jonker, L. (1979). Periodic orbits and *kneading* invariants. *Proc. London Math. Soc.*, (3) 39, p. 428-450.
 - Jonker, L. e Rand, V. (1980). The periodic orbits and entropy of certain maps of the unit interval. *J. London Math. Soc.*, (2) 22, p. 175-181.
 - Katok, A. e Hasselblatt, B. (1995). Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, 54, Cambridge: Cambridge University Press.
 - Keitt, T. H., Lewis, M. A. e Holt, R. D. (2001). Allee effects, invasion pinning and species' borders. *Am. Nat.*, 157, p. 203-216.
 - Kokko, H. e Sutherland, W. J. (2001). Ecological traps in changing environments: ecological and evolutionary consequences of a behaviourally mediated Allee effect. *Evol. Ecol. Res.*, 3, p. 537-551.
 - Kozlovski, O. S. (2000). Getting rid of the negative schwarzian derivative condition. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 9, p. 737-750.
 - Lewis, M. A. e Kareiva, P. (1993). Allee dynamics and the spread of invading organisms, *Theor. Popul. Biol.*, 43, p. 141-158.
 - Lind, D. e Marcus, B. (1995). *An Introduction to Symbolic Dynamics and Codings*. Cambridge: Cambridge University Press.
 - Lopez-Ruiz, R. e Fournier-Prunaret, D. (2005). Indirect Allee effect, bistability and chaotic oscillations in a predator-prey discrete model of logistic type. *Chaos, Solitons and Fractals*, 24, p. 85-101.

- Lyubich, M. Y. (1989). Non-existence of wandering intervals and structure of topological attractors of one dimensional dynamical systems. I. The case of negative schwarzian derivative. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 14, p. 331-349.
- Maak, W. (1963). *An Introduction to Modern Calculus*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Mañé, K. (1983). *Introdução à Teoria Ergódica*, Rio de Janeiro: IMPA, Projecto Euclides.
- Martens, M., Melo, W. e Strien, S. (1992). Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics. *Acta Math.*, 168, p. 273-318.
- Martens, M. (1994). Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 14, p. 331-349.
- May, R. M. (1974). Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science*, 186, p. 645-647.
- Melo, W. e van Strien, S. (1988). One-Dimensional Dynamics: the Schwarzian derivative and beyond. *Bull. A. M. S.*, 18, p. 159-162.
- Melo, W. e van Strien, S. (1989). A structure theorem in one-dimensional dynamics. *Ann. Math.*, 129, p. 519-546.
- Melo, W. e van Strien, S. (1993). *One-Dimensional Dynamics*. Berlin, New York: Springer.
- Milnor, J. e Thurston, W. (1988). *On iterated maps of the interval*, J.C. Alexander (ed.) Proceedings Univ. Maryland 1986-1987. Lect. Notes in Math. 1342. Berlin, New York: Springer-Verlag.
- Misiurewicz, M. e Szlenk, W. (1980). Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, 67, p. 45-63.

-
- Odum, H. T. e Allee, W. C. (1954). A note on the stable point of populations showing both intraspecific cooperation and disoperation. *Ecology*, 35, p. 95-97.
 - Oliveira, H. e Ramos, J. S. (2003a). Symbolic Dynamics of the tangent map. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 8, nº 2, p. 183-208.
 - Oliveira, H. e Ramos, J. S. (2003b). Iterates of the tangent map - the bifurcation scheme. *Proc. ICDEA 2003*.
 - Palis, J. e Melo, W. (1978). *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, IMPA, Projecto Euclides.
 - Parry, W. (1964). Intrinsic Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112, p. 55-65.
 - Peitgen, H. O., Jürgens, H. e Saupe, D. (1978). *Chaos and Fractals (New Frontiers of Science)*, New York: Springer-Verlag.
 - Pestana, D. e Mendonça, S. (2001). Higher-order monotone functions and Probability Theory in *Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*. Springer-Verlag, p.317-331.
 - Pestana, D. e Velosa, S. (2008). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Vol.1, 3ª edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
 - Rasband, S. N. (1997). *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
 - Rocha, J. L. (2003). *Invariantes Topológicos e Métricos de Sistemas Dinâmicos de Baixa Dimensão*, Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Matemática, Lisboa: Univ. Técn. de Lisboa. Inst. Sup. Técnico.

- Rogovchenko, S. e Rogovchenko, Y. (2007). Effect of periodic environmental fluctuations on the Pearl-Verhulst model. *Chaos, Solitons and Fractals*, doi:10.1016/j.chaos.2007.11.002.
- Ruelle, D. (1978). *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Schreiber, S. J. (2003). Allee effects, extinctions and chaotic transients in simple population models. *Theor. Pop. Biol.*, 64, p. 201-209.
- Schroeder, M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws: minutes from a infinite paradise*, New York: W. H. Freeman.
- Schuster, H. G. (1995). *Deterministic Chaos, An Introduction*, New York: VCH.
- Sharkovsky, A. N. (1964). Coexistence of cycles of a continuous map of the interval into itself. *Ukrain. Math.Zh.*, 16, p. 61-71.
- Sharkovsky, A. N., Kolyada, S. F., Sivak, A. G. e Fedorenko, V. V.(1997). *Dynamics of One-Dimensional Maps*, Kluwer Academic Publishers.
- Sinai, Y.G. (1994). *Topics in Ergodic Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Singer, D. (1978). Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. *SIAM J. - Appl. Math.*, 35, p. 260-267.
- Sousa Ramos, J. S., Lampreia, J. P. e Silva, A. R. (1984). Tree of Topologic Markov Chains. *IFM/CFMC - EA/84*.
- Stephens, P. A., Sutherland, W. J. e Freckleton, R. P. (1999). What is the Allee effect? *Oikos*, 87, p. 185-190.

- Sullivan, D. (1985). Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: a solution of Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. Math.*, 122, p. 401-418.
- Sullivan, D. e Hu, J. (1997). Topological conjugacy of circle diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 17, p. 173-186.
- Takens, F. e Verbitskiy, E. (2003). On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23, p. 317-348.
- Verhulst, P. F. (1845) Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population, *Nouv. Mém. de l'Académie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, 1-41.
- Walters, P. (1981). *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Math., 79. New York: Springer-Verlag.
- Wilson, E. O. e Bossert, W. H. (1971). *A Primer of Population Biology*. MA, U.S.A.: Sinauer Associates Sunderland.
- Yoccoz, J. (1984). Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 298, série I, p. 141-144.