ESTUDOS DE ECONOMIA, VOL. XVI-XVII, N.º 4, OUTONO 1997

# COMPLEXIDADE E EFICIÊNCIA NO SISTEMA PRODUTIVO

*João Ferreira do Amaral* (*)

## 1 — Introdução

Uma economia pode ser considerada como um sistema de relações que se estabelecem entre agentes económicos no domínio da produção, da distribuição, do consumo, etc.

Domínio fundamental de todos os sistemas económicos é o da produção, o qual, por sua vez, pode ser encarado como um sistema de relações tecnológicas que ligam entre si os diversos sectores de actividade.

Um dos modelos mais aplicados na representação deste subsistema produtivo tem sido o modelo de Leontief, de que se recordam as seguintes hipóteses básicas:

*a*) Existem na economia $n$ sectores produtivos e $n$ bens produzidos, verificando-se uma correspondência biunívoca sectores-bens.

*b*) Cada sector utiliza no seu processo produtivo *inputs* intermédios produzidos por si próprio ou pelos outros sectores no mesmo período de produção, bem como factores primários existentes no início do período de produção;

*c*) Existe, para cada sector, uma função de produção de factores complementares. É uma função de rendimentos constantes à escala e de coeficientes técnicos constantes;

*d*) Não existe desperdício no processo produtivo, ou seja, o valor de um *input* utilizado na produção de um certo bem corresponde à quantidade mínima necessária para produzir essa quantidade de bem;

*e*) Para cada sector $i$ tem-se $\sum_j a_{ji} < 1$.

Com estas hipóteses, para uma economia fechada, pode escrever-se, a preços constantes de um dado período:

$$X = AX + Y$$

em que $X$ é o vector da produção, $Y$ o vector da procura final e $A$ a matriz quadrada dos coeficientes técnicos constantes.

Esta equação não é, contudo, suficiente para nos dar as possibilidades de produção de uma economia, uma vez que não tem em conta as dotações iniciais de factores primários (trabalho e capital, por exemplo). Uma forma de considerar estas condicionantes será a de admitir a existência de um vector $\bar{X}$ de capacidade produtiva máxima no período de produção escolhido.

Esta forma simples de introduzir as condicionantes dos factores primários é, contudo, limitativa, uma vez que basta considerarmos a possibilidade de haver

(*) ISEG — UTL.

transferência de factores primários de um sector para outro (o que existe certamente para o factor trabalho e para uma parte do factor capital) para evidentemente não ser possível definir um vector da capacidade produtiva máxima. No entanto, para não complicarmos demasiado a análises vamos introduzir as limitações nesta forma.

O sistema pode, assim, ser descrito por:

$$X = AX + Y$$
$$X \leqq \bar{X}$$

Antes de prosseguirmos convém chamar a atenção para que iremos proceder a uma análise estática, pelo que todas as variáveis se referem a um mesmo período de produção ([1]).

Podemos, agora estudar os dois problemas que nos propusemos: a complexidade e a eficiência de um sistema produtivo.

## 2 — Complexidade

A complexidade de um sistema de Leontief deve ser considerada sempre como relativa à intensidade das ligações entre os sectores de actividade. Sem dúvida que um sistema será mais complexo que outro se a intensidade das relações entre os sectores for superior à do outro ([2]). Porém, esta intensidade de relações pode ser analisada em termos de relações directas ou indirectas, o que nos vai permitir dividir a análise em duas componentes.

### 2.1 — A intensidade das relações directas: o valor dos coeficientes técnicos

Como é evidente, podemos utilizar como indicador para este tipo de complexidade o valor dos coeficientes técnicos. Assim se forem dadas duas matrizes da tecnologia $A$ e $B$ para os mesmos $n$ sectores, se $A \geq B$ (isto é, se os elementos de $A$ forem não inferiores aos homólogos de $B$, com $A \neq B$), o sistema $A$ é mais complexo que $B$.

As consequências em termos de política económica são importantes. Se considerarmos que a política económica define como objectivo um vector $Y$ da procura final e pretende encontrar o vector $X$ da produção que permite satisfazer este $Y$, então tem-se para as duas tecnologias:

$$X^A = (I - A)^{-1}\, Y$$
$$X^B = (I - B)^{-1}\, Y$$

em que as inversas existem sempre devido à hipótese *e*) da introdução.

---

([1]) No final, sem deixarmos esta situação, falaremos, contudo, das potencialidades de crescimento do sistema.

([2]) E, correspondentemente, a quantidade de informação necessária para o gerir for também superior. V. Amaral (1989) e (1991b).

Ora, prova-se que se $A \geq B$ então $X^A \geqq X^B$, o que tem, naturalmente, importância para a política económica e para a própria eficiência do sistema produtivo, conforme se verá mais adiante.

No entanto, serão as relações indirectas que são talvez mais interessantes de analisar.

### 2.2 — As relações indirectas: decomponibilidade e indecomponibilidade

Para começar, consideramos a seguinte definição. Uma tecnologia $A$ é decomponível se e só se for possível apresentá-la da seguinte forma, partida em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

em que $A_1$ e $A_3$ são matrizes quadradas. Uma tecnologia indecomponível é a que não for decomponível. Uma tecnologia indecomponível é mais complexa de que uma tecnologia decomponível, na medida em que se prova que se $A$ for indecomponível (e só neste caso) $(I-A)^{-1}$ tem todos os elementos positivos. Ora, como é sabido, o elemento genérico $b_{ij}$ de $(I-A)^{-1}$ pode ser interpretado como o aumento de uma unidade da produção do sector $i$ em resposta ao aumento de uma unidade de procura final de $j$, mantendo-se as restantes procuras finais constantes. Se todos os $b_{ij}$ são positivos, isso significa que existe ligação entre todos os sectores, ou seja, fazendo variar a procura final do sector $j$ tem necessariamente que se variar a produção de todos os sectores, ainda que, para alguns $i$, os coeficientes $a_{ij}$ sejam nulos ([3]). Ou seja, se $A$ é uma tecnologia indecomponível, existem sempre relações indirectas entre os sectores mesmo que possam não existir relações directas. O sistema tem, pois, uma alta dose de complexidade.

No que respeita às matrizes decomponíveis nem todos os casos são idênticos. Por isso definimos Amaral (1991*c*) o conceito de grau de decomponibilidade $D(A)$ de uma matriz $A$ $D(A) = \frac{Z(A)}{n-1}$, em que $Z(A)$ é o número de zeros de $(I-A)^{-1}$. Prova-se que $0 \leq D(A) \leq n$, em que $D(A) = n$ se e só se $A$ for diagonal e $D(A) = 0$ se e só se $A$ for indecomponível. Por outro lado, não existe matriz $B$ tal que $0 < D(B) < 1$, o que significa que as matrizes menos decomponíveis, tirando as indecomponíveis, são aquelas em que o número de zeros de $(I-A)^{-1} = n-1$. Neste caso, das $n^2$ ligações possíveis entre sectores, $n-1$ não existem e o sistema é menos complexo do que no caso indecomponível. Podemos, portanto, tomar como uma das medidas de complexidade de um sistema o grau de decomponibilidade $D(A)$.

---

([3]) Uma matriz A indecomponível pode ter elementos nulos.

## 3 — Eficiência do sistema

A eficiência do sistema produtivo como aquele que estamos a considerar pode ser vista segundo, pelo menos, três ópticas, a primeira das quais será a da produção necessária para satisfazer a procura final.

### 3.1 — Produção necessária para satisfazer a procura final

Naturalmente que um sistema será tanto mais eficiente quanto menos produção for necessário realizar para satisfazer o mesmo vector da procura final. Ou seja, $B$ é mais eficiente que $A$ se e só se para o mesmo $Y$, $X^A \geq X^B$, em que $X^A = (I - A)^{-1}\ Y$ e $X = (I - B)^{-1}\ Y$.

A eficiência, segundo esta óptica, é uma qualidade importante, não só porque a produção é sempre um sacrifício (mais esforço, mais poupança) como também porque, existindo uma dotação dada de factores primários, uma tecnologia menos eficiente pode, ao contrário da outra, não permitir a satisfação do vector $Y$ (basta que $\bar{X}^A \leq X$ e $\bar{X}^B \leq X$).

Como é evidente, são óbvias as ligações com o conceito de complexidade (v. atrás 2.1).

### 3.2 — Um segundo critério: as potencialidades de crescimento futuro

Um segundo critério para apreciar a eficiência do sistema será o que assenta nas possibilidades de crescimento futuro. Suponhamos, para simplificar, que toda a procura final se destina a investimento e que cada sector reserva para investimento uma parte idêntica, $\lambda$, do *stock* de capital originado nele próprio. Temos então (Brody, 1971):

$$X = AX + \lambda CX$$

em que:

$$C = \{C_{ij}\}$$

onde $C_{ij}$ é o capital originado no sector $i$ necessário à produção de uma unidade de $j$.

Sendo $A$ indecomponível (e mesmo em certos casos de decomponibilidade), os vectores $X^*$ que verificam esta igualdade têm componentes todas positivas, o que significa que existe de facto a possibilidade de produzir $X^*$ desde que $\leq$ a $\bar{X}$. Quanto maior for $\lambda$ tanto mais eficiente é o sistema porque tanto maior será a proporção de investimento e, por consequência, tanto maior o crescimento futuro.

Ora, se $A \leq B$ tem-se $\lambda^A < \lambda^B$, uma vez que os maiores valores próprios de, respectivamente, $A + \lambda^A C$ e $B + \lambda^B C$ se têm de manter iguais à unidade ([4]). Então, tal como sucedia no primeiro critério, se $A \geq B$, $A$ é menos eficiente que $B$.

---

([4]) Prova-se que se $D \geq E \geq 0$ com $D$ e $E$ indecomponíveis então o maior valor próprio de $D$ é maior que o maior valor próprio de $E$. No nosso caso para ambas $A + \lambda^A A$ e $B + \lambda^B B$ terem o maior valor próprio igual à unidade com $A \geq B$ terá de ser obviamente $\lambda^A < \lambda^B$.

**3.3 — Um terceiro critério: a plena utilização de factores primários**

Este critério tem interesse de analisar quando existe um vector $\bar{X}$ da capacidade máxima e, por outro lado, também se admite a existência de um vector de procura final $\bar{Y}$ mínimo que é necessário assegurar para satisfazer as necessidades mínimas das populações. Então, neste caso só são susceptíveis de ser produzidos os vectores $X$ tais que:

$$X - AX = Y \geqq \bar{Y}$$

Ora, o conjunto $\chi^A$ de vectores $X$ susceptíveis de ser produzidos com a tecnologia $A$ não coincide com o espaço $R^{n+}$ (v. Amaral, 1991*a*). Não existe nenhuma garantia *a priori* que para uma dada tecnologia $A$ se tenha $\bar{X} \in \chi^A$, ou seja, que seja possível a plena utilização da capacidade. Parece, no entanto evidente que quanto «maior» (no sentido da inclusão de conjuntos) for $\chi^A$ tanto mais provável que $\bar{X} \in \chi^A$, ou seja, maior a possibilidade de a capacidade máxima ser susceptível de ser plenamente utilizada. Ora quando $A \geq B$ tem-se $\chi^A \subset \chi^B$. Mais uma vez, segundo este critério de eficiência, se $A \geq B$, $A$ é menos eficiente que $B$.

Este critério é muito importante principalmente em termos de política conjuntural porque demonstra que políticas keynesianas de estímulo à procura e, portanto, à plena utilização da capacidade produtiva podem levar a tensões graves sobre o sistema por tentarem forçar a realização de um vector $\bar{X}$ que não é possível.

## Conclusão

Como se verificou, a estrutura tecnológica de um sistema económico condiciona aspectos importantes do funcionamento do sistema. Pode mesmo admitir-se que se a evolução económica das economias for no sentido de uma maior complexidade, tal levará certamente a uma perda de eficiência por qualquer dos três critérios definidos.

No entanto, não devemos esquecer o simplismo do modelo utilizado. A economia fechada, a total rigidez admitida para a tecnologia e a não consideração explícita dos preços são algumas das simplificações introduzidas que, naturalmente deverão ser abandonadas em futuras análises.

## REFERÊNCIAS

AMARAL, João Ferreira (1989), «O conteúdo de informação de uma tecnologia», *Estudos de Economia,* vol XI, n.º 2.

—— (1991*a*), «Curso avançado de análise económica multisectorial», Escher, 1991.

—— (1991*b*), «Complexidade e conteúdo de informação de uma economia», Departamento de Economia.

—— (1991*c*), «Grau de decomponibilidade de matrizes», CEMAPRE

BRODY, András (1971), *Proportions, prices and planning,* North-Holland.