

**COLEÇÃO LIÇÕES DE ARTE & DESIGN**

**Vol. 3**

**ANTÓNIO ORIOL TRINDADE**

**OS ESPELHOS E O DESENHO  
EM PERSPECTIVA LINEAR**



**COLEÇÃO  
LIÇÕES DE ARTE & DESIGN**

**Volume 3**  
OS ESPELHOS E O DESENHO  
EM PERSPECTIVA LINEAR

**Autor**  
António Oriol Trindade

**Coordenação editorial**  
Sérgio Vicente

**Comissão científica**  
Cristina Azevedo Tavares  
Cristóvão Valente Pereira  
Domingos Rego  
José Silva Teixeira  
Rogério Taveira  
Rui Serra  
Suzana Parreira

**Edição**  
Centro de Investigação  
e de Estudos em Belas-Artes  
(CIEBA)

**Capa**  
Composição e arranjo do autor  
com pintura de 2005 e desenho  
assistido por computador de 2023

**Design**  
Tomás Gouveia

**Paginação**  
Constança Mercês de Mello

**ISBN**  
978-989-8944-89-4

**Depósito legal**  
516852/23

**Impressão e acabamento**  
ACD Print

**Tiragem**  
100 exemplares

Lisboa, junho 2023

**Propriedade**  
CIEBA: Centro de Investigação  
e de Estudos em Belas-Artes  
Universidade de Lisboa  
Largo da Academia Nacional  
de Belas-Artes  
1249-058 Lisboa, Portugal

Este livro é financiado por fundos  
nacionais através da FCT — Fundação  
para a Ciência e a Tecnologia, I.P.,  
no âmbito do projeto UIDB/04042/2020.

**COLEÇÃO LIÇÕES DE ARTE & DESIGN**

**Vol. 3**

**ANTÓNIO ORIOL TRINDADE**

**OS ESPELHOS E O DESENHO  
EM PERSPECTIVA LINEAR**

# ÍNDICE

7	<b>AGRADECIMENTOS</b>
8	<b>PREFÁCIO</b>
10	<b>INTRODUÇÃO</b>
13	<b>1. CONTEXTUALIZAÇÃO E ESCOLHA DE UM TEMA</b> Dos espelhos planos na criação da ilusão de múltiplos nas artes visuais e nas artes plásticas
17	<b>2. OS ESPELHOS NA GEOMETRIA DE MÚLTIPLOS</b> Experiência artística
20	<b>3. OS ESPELHOS E AS LEIS DA REFLECTÂNCIA NO DESENHO EM PERSPECTIVA LINEAR</b> Do estado da arte
25	<b>4. DA FORTUNA DE ALGUMAS TEORIAS DA GEOMETRIA PLANA E DA GEOMETRIA ESPACIAL NA REFLECTÂNCIA EM ESPELHOS PLANOS</b>
25	<b>4.1. O contributo do teorema atribuído a Tales</b>
31	<b>4.2. Desargues e a importância da Homologia</b>
37	<b>5. DO DESENHO DE REFLEXOS NO SISTEMA DE PERSPECTIVA LINEAR PLANA</b>
37	<b>5.1. Condicionantes nos resultados no desenho de reflexos em perspectiva linear plana</b>
38	<b>5.2. Algumas aplicações na forma de exercícios</b>

50	<b>6. DO ENQUADRAMENTO DE UMA LIÇÃO</b>
50	<b>6.1. Um exercício abrangente</b>
51	<b>6.2. Um caso particular da representação perspéctica do reflexo num espelho de perfil de uma estrutura cúbica iluminada por uma luz direccional</b>
52	<b>6.3. Objectivos do exercício proposto</b>
53	<b>6.4. Conteúdos no exercício proposto</b>
53	<b>6.5. Metodologia na lição do exercício proposto</b>
54	<b>6.6. Descrição detalhada da lição do exercício proposto</b>
64	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>
68	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>
72	<b>DESIGNAÇÕES DAS ENTIDADES GEOMÉTRICAS REPRESENTADAS NOS DESENHOS</b>
73	<b>FIGURAS</b>



## AGRADECIMENTOS

Ao Sérgio Vicente pelo convite endereçado ao autor e pela estima como colega.

À Teresa, pela enorme paciência e compreensão pelas longas horas de trabalho.

Ao meu filho António Xavier, que acompanhou muito de perto a realização do presente livro.

À Faculdade de Belas-Artes da Universidade de Lisboa (FBAUL) e a todo o seu corpo discente e docente, que me permitiram a publicação do presente Livro.

Ao Tomás Gouveia e à Constança Mercês de Mello, incansáveis no acompanhamento e realização do design e arranjo do livro.

Aos professores e colegas Ricardo Delgado, Joaquim Lima de Carvalho e José Moutinho, pelas conversas importantes nos corredores da FBAUL, no passado e no presente.

Ao professor Manuel Couceiro, um dos meus mestres, pelo conhecimento e amizade.

## PREFÁCIO

8

Este livro com o título *Os Espelhos e o Desenho em Perspectiva Linear*, resulta de um desenvolvimento da nossa aula de seminário das provas de Agregação, concluídas no dia 29 de Abril de 2022, conjugada com a nossa experiência científica, pedagógica e artística no que respeita à utilização e investigação sobre os espelhos, sobretudo no desenho de representação de reflexos de formas, objectos e conjuntos no sistema de perspectiva linear em quadro plano. Começando por referir esta temática em termos históricos e a sua inclusão e aplicação às artes visuais e artes plásticas, do Renascimento à Contemporaneidade, referimos também a nossa experiência artística na utilização de espelhos, particularmente em três exposições por nós efectuadas em 2004, 2005 e 2016, respectivamente em Lisboa e no Porto. Ao mesmo tempo, como a nossa área de investigação está centrada no Desenho e particularmente no desenho geométrico, achámos interessante ver esta temática dos espelhos e da reflectância em espelhos planos aplicada ao desenho geométrico e em particular ao sistema de perspectiva linear, um dos ramos da Geometria Descritiva. Há regras e métodos geométricos muito precisos para se determinar com grande rigor reflexos de formas e de conjuntos sobre superfícies especulares. Neste sentido referimos também no livro o contributo e o desenvolvimento histórico dos autores mais significativos que relacionaram esta temática dos espelhos com a ciência da perspectiva linear. Por fim, apresentamos um exemplo ou um caso mais detalhado e descritivo de um problema ou exercício específico da perspectiva linear de uma forma inclinada e seu reflexo num espelho de perfil, onde podemos observar efeitos curiosos. Os espelhos têm esta particularidade de reflectir novas formas, ou novos conjuntos, mostram a unidade na multiplicidade.

“(…) o espelho, não sendo nenhuma imagem, contém em si mesmo a possibilidade de todas as imagens”.

Nuno Crespo, Revista Ípsilon, 2017.

## INTRODUÇÃO

Foi a partir do período do Renascimento e do Maneirismo, que verificamos, com testemunhos históricos, escritos e visuais, a utilização e a inclusão de espelhos nas artes visuais e na pintura artística, desde Van Eyck, no Renascimento nórdico, passando por Parmagianino, no Maneirismo italiano, prolongando-se depois com Vermeer e Velazquez, já no período Barroco, entre outros artistas. Os espelhos e a representação com espelhos foi e é ainda hoje uma temática com bastante interesse e continua a ter adeptos, bem visível ainda hoje nas artes visuais contemporâneas, não só no domínio da Pintura, no domínio da Instalação, da Fotografia, onde temos o exemplo de Michelangelo Pistoletto, como também no domínio da arquitectura. No entanto, sabemos que na representação da reflectância sobre espelhos planos nas obras de arte ao longo de séculos não eram utilizados métodos geométricos rigorosos, mas antes métodos empíricos. Mesmo nos casos de exemplos artísticos em que essas representações da reflectância com espelhos parecem rigorosas, cremos que nos métodos empregues tenham sido utilizados outros métodos auxiliares, como outros métodos gráficos, recorrendo provavelmente a grelhas, ou a outros artifícios ópticos, como é o caso da câmara obscura, utilizada ao que parece por Vermeer e outros autores.

10

O presente livro divide-se essencialmente em seis partes. Na primeira, apontamos a utilização de espelhos em termos artísticos, referindo alguns exemplos de destaque do Renascimento ao presente. Numa segunda parte referimos a nossa própria experiência artística na utilização de espelhos, quer num primeiro autorretrato num espelho convexo realizado em 1989, quer utilizando os próprios espelhos como instrumentos materiais, como aconteceu na instalação por nós efectuada no Museu Militar em 2016, quer ainda em termos metafóricos, na questão do duplo, cujo primeiro ensaio aconteceu na nossa exposição *A Mulher e a Máscara*, realizada em 2004 na Galeria Arte Periférica em Lisboa, e ainda com mais ênfase e acentuação na

exposição *Burning Mirror. We Want to be but we can't find Ourselves*, em 2006 na extinta Galeria Sala Maior no Porto. Como a nossa área de investigação centra-se no desenho geométrico, foi interessante explorar esta temática dos espelhos e da reflectância sobre espelhos planos na ciência da perspectiva linear, tema aliás que divulgamos e ensinamos em particular aos nossos alunos da Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa. Neste sentido, a terceira parte do Livro trata do estado da arte relativamente ao desenho com representação de reflexos com espelhos planos. Aqui referimos essencialmente as leis da reflectância em espelhos planos e o contributo dos vários autores que relacionaram este fenómeno com o desenho em perspectiva linear, visível em várias obras e tratados de perspectiva linear.

Numa quarta parte do nosso livro, referimos algumas teorias e autores que foram determinantes para o desenho da representação de reflexos em perspectiva linear, como são o teorema atribuído a Tales e as homologias ou correspondências homológicas desenvolvidas ainda no século XVII pelo matemático Girard Desargues, precursor da geometria projectiva. Numa quinta parte do nosso livro, centramo-nos nas condicionantes que influenciam os resultados dos desenhos de representação de reflexos em perspectiva linear, onde também apresentamos alguns exemplos e aplicações na forma de exercícios, semelhantes aos que facultamos aos alunos. Finalmente num sexto e último capítulo ou parte do livro, centramo-nos na abordagem de um caso específico, devidamente detalhado e descrito, também na forma de um exercício, que corresponde à nossa aula de seminário das Provas de Agregação, concluídas no dia 29 de Abril de 2022.

O nosso interesse pela representação perspéctica de espelhos e de reflexos remonta a 1988, materializada com a realização de um auto-retrato num espelho convexo, e reforçou-se pouco depois nos tempos da licenciatura com algumas aulas do Professor José Moutinho. É nesta reminiscência antiga e re-paixão presente da temática dos espelhos e da reflectância em espelhos planos, que seleccionámos para a lição proposta no âmbito das nossas Provas de Agregação concluídas no dia 29 de Abril de 2022, que aqui incluímos e apresentamos, um problema específico da área da Geometria e da sua variante da Perspectiva Linear,

centrado na representação de uma forma cúbica composta, ou modelada por cubos, oblíqua ao Geometral, oblíqua ao quadro perspéctico e iluminada por uma fonte de luz direcional. Os efeitos, como mais à frente apresentamos com resultados gráficos, são os de uma perspectiva de quadro inclinado com três pontos de fuga dominantes, onde o reflexo da forma composta num espelho plano selecionado para o problema mostra-nos efeitos curiosos, distorcivos, anamórficos, dados precisamente pela colocação deliberada do espelho em relação ao objecto da forma composta e do observador, centro de projecção. A reflectância de volumes e de espaços, em espelhos planos, gera outras imagens e projecções homólogas, cria múltiplos que não se esgotam na aparência, dependendo do posicionamento do objecto, do espelho e do observador.

O último e sexto capítulo deste livro, centrado no seminário da nossa aula das Provas de Agregação, apresenta também um problema centrado numa representação perspéctica abrangente, englobando e compreendendo vários conteúdos programáticos das unidades curriculares que leccionamos no presente, determinados conhecimentos e métodos geométricos específicos, inerentes e administrados sobretudo na unidade curricular de “Métodos de Representação Rigorosa” do Mestrado de Desenho da Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa, mas também por nós transmitidos nas licenciaturas, designadamente na unidade curricular de “Geometria: perspectiva II”, leccionada igualmente na FBAUL. Na descrição detalhada da lição proposta, optámos por apresentar e descrever as várias fases do problema acompanhadas dos respectivos desenhos faseados por etapas e onde se apresenta no final a solução. Para o efeito, servimo-nos do auxílio do *software AutoSketch 10* e do *software Google SketchUp* para a realização dos desenhos digitais que apresentamos. Antes da descrição detalhada da aula, que corresponde à parte final deste livro, apontamos alguns aspectos históricos sobre a temática dos espelhos, quer na tratadística, quer nas artes visuais, incluindo a nossa própria experiência artística, como já referimos.

## **1. CONTEXTUALIZAÇÃO E ESCOLHA DE UM TEMA**

### **Dos espelhos planos na criação da ilusão de múltiplos nas artes visuais e nas artes plásticas**

Esta temática dos espelhos de há muito que surge nas artes visuais e plásticas, quer no passado, quer ainda no presente, como sabemos. Foi também pela nossa actividade paralela de artista plástico, que também surgiu este interesse, até porque pontualmente utilizamos os espelhos no nosso trabalho artístico. No Renascimento, os espelhos, como sabemos, tiveram na base das demonstrações da descoberta da perspectiva por parte de Brunelleschi, assunto já tratado por vários autores. Também Leonardo da Vinci valorizara e referira os espelhos como mestres dos pintores: “Comme Lo Spechio è I Maestro de’ Pittori” (RICHTER, 1970:p.264; TRINDADE, 2008:p.65). Leone Battista Alberti e Filarete também valorizam os espelhos e no norte da Europa Jean Pelerin Viator elabora a sua teoria da perspectiva artificial considerando a perspectiva como reflexo da pirâmide visual, como provou bem Andrès de Mesa Gisbert (CABEZAS, 2004, pp.158-176; MESA GISBERT, pp.80-95; TRINDADE, 2008, pp.66-86). A par daquelas referências já o pintor Jan van Eyck em 1434 ensaiara a representação de reflexos em espelhos côncavos, de forma empírica, na obra pictórica que retrata o casal Arnolfini. Surgem mais tarde também em Itália no século XVI representações na pintura de reflexos em espelhos côncavos, como no autorretrato conhecido de Girolamo Francesco Maria Mazzola, conhecido por Parmagiano (**Figura 1**). Depois, já no período Barroco, quer no Norte, nos Países Baixos, com a pintura “A Lição de Música” de Johannes Vermeer (TRINDADE, 2008: pp.774-780; TRINDADE, 2021), entre outros autores deste região, quer mesmo no Sul, onde a pintura “Las Meninas” de Diego Velazquez é exemplo paradigmático, surgem nas pinturas representações de reflexos em espelhos planos frontais e de rampa, embora os efeitos e os resultados tenham sido realizados de forma certamente empírica (**Figura 2 e Figura 3**). No mesmo período Barroco surge também a utilização de espelhos, côncavos, convexos e poliédricos na

elaboração das conhecidas anamorfoses espaciais catópticas, descritas em tratados franceses (VAUZELARD, 1630; NICERON, 1638, Livro III; BALTRUSAITIS, 1995: pp.183-228; TRINDADE, 2008: pp.362-366). E talvez seja aqui, com as anamorfoses catópticas, que se utilizam na prática e nas artes visuais, pela primeira vez e de forma rigorosa, os princípios universais da óptica aliados e relacionados com os conhecimentos geométricos necessários para a elaboração da representação deste tipo de imagens reflectidas.

Mas em termos artísticos e conceptuais, sabemos que anteriormente no século XVI os espelhos foram também instrumentos auxiliares para realização de composições de *trompe l'oeils*, como na questão do registo de efeitos perspetivos utilizando maquetas em escala menor que eram colocadas sobre as superfícies espaciais, onde assim os artistas podiam visualizar os efeitos pretendidos. Tal sabemos que aconteceu com Giulio Romano e muito provavelmente com Andrea Mantegna e Rafael Sanzio seu mestre, como testemunha Cristoforo Sorte (SORTE, 1584; BARROQUI, 1962, Vol.I: pp.297-298; KEMP, 1994: p.83 e p.62; TRINDADE, 2008: pp.867-874).

14

Neste sentido, considerando os espelhos como instrumentos conceptuais, de referir que no século XVII também sabemos que foram incorporados espelhos nas conhecidas câmaras obscuras, colocados com um ângulo específico dentro do dispositivo, com o objectivo de projectar as imagens invertidas de forma legível para o espectador, endireitando as imagens, digamos assim.

Na arte contemporânea, a utilização dos espelhos, embora sem aplicação prática directa de recursos ou métodos geométricos para efeitos de representação, ou seja, utilizando uma geometria mais intuitiva, digamos assim, surge automaticamente e também abunda em percursos e propostas de autores variados. Um dos casos, é o trabalho de Maurits Cornelis Escher (**Figura 4**), que representou de forma intuitiva numa só imagem representações simultâneas de dois e três mundos, possível através do interesse do autor pelas reflexões espaciais tirando partido de espelhos esféricos convexos para realizar alguns trabalhos e onde representou esses reflexos de forma intuitiva, mostrando mundos simultâneos, excluindo aquele situado por detrás do espelho (ERNST, 1991: pp.73-77).

Outro autor interessante e mais recente que utiliza espelhos é Michelangelo Pistoletto, relacionando os espelhos com a pintura em jogos ambíguos e eficazes (Figura 5). Este autor sobrepõe nos espelhos outras figuras imóveis dando a ver ao espectador outras realidades que surgem nos espelhos, a partir de personagens reais em movimento que se reflectem nos espelhos que se confrontam com a rigidez, digamos assim, nas mesmas superfícies dos espelhos-pinturas, das figuras ou personagens pintadas que o autor acrescenta (MAFFIOLETTI, 2011: pp.1-4). Nas famosas pinturas de espelhos de Pistoletto, como refere Nuno Crespo, “o espelho, não sendo nenhuma imagem, contém em si mesmo a possibilidade de todas as imagens” (CRESPO, 2017).

De referir um terceiro autor contemporâneo que é Dan Graham, que relaciona e integra os espelhos com a paisagem e ambientes envolventes, dando-nos a ver, através da inclusão de espelhos, de geometria e forma diversas, naquelas paisagens e ambientes, outros fragmentos, ou outras paisagens fragmentadas geradas e sugeridas precisamente pelos reflexos nas superfícies especulares, mostrando-nos deste modo uma espécie de mundos fragmentados e visualmente complexos (Figura 6). Por cá também o trabalho mais recente de José Pedro Croft, apresentado na Bienal de Veneza de 2017, nos mostra uma interessante fragmentação da realidade visual (Figura 7), mediante a interposição e elevação de espelhos e superfícies vítreas sobre os ambientes (SOROMENHO / MALHÃO, 2017).

Esta temática dos espelhos, deveras apaixonante e sugestiva, relacionada com a perspectiva linear e com a geometria, acompanha-nos há bastante tempo. Remonta ao ano de 1989, quando estávamos no segundo ano da licenciatura de Pintura, ainda na antiga ESBAL, e foi na antiga unidade curricular de GTRR, Geometria. Técnicas de Representação Rigorosa, regida pelo Professor José Moutinho, que realizámos um trabalho final sobre esta temática dos espelhos e da perspectiva linear, por sugestão do próprio Professor. Esse trabalho consistiu na representação perspectiva de um interior de um espaço de habitação, onde se colocou também no seu interior o objecto de uma mesa cilíndrica circular, partindo da planta e de alçados cotados, e sua reflexão num espelho plano deliberadamente posicionado de forma a obterem-se os efeitos visuais

pretendidos. Foi um trabalho simples, pois consistiu numa representação de um conjunto situado sobre o Geometral ou plano horizontal de projecção e seu reflexo num espelho vertical, onde a perspectiva realizada tinha quatro pontos de fuga dominantes, das direcções de nível da planta, situados ambos na linha do horizonte, como acontece com este tipo de perspectivas. Assim, servindo-nos do método dos traços e pontos de fuga para a representação perspéctica do conjunto e de mais outros conhecimentos e métodos para a representação do conjunto reflectido conseguimos realizar esse trabalho final. Foi sobretudo interessante verificarem-se os efeitos da perspectiva da mesa cilíndrica circular espelhada que mostravam outras linhas como arcos de elipses. Daqui também nasceu o interesse desta temática que ensinamos aos nossos alunos no presente, para além do gosto, da fortuna e do legado das obras artísticas ao longo da história que incluem espelhos nas suas representações.

## 2. OS ESPELHOS NA GEOMETRIA DE MÚLTIPLOS. EXPERIÊNCIA ARTÍSTICA

Desde muito cedo que as superfícies especulares exerceram em nós uma atenção especial pelos efeitos que eles despertam no espectador, sobretudo porque nos mostram uma espécie de desmultiplicação de realidades que surgem no confronto das superfícies dos espelhos com o mundo circundante. Depois há a questão do próprio polimento ou rugosidade dos espelhos e das respectivas imagens reflectidas. Dependendo da geometria, da textura, dos materiais, da rugosidade e do polimento, os espelhos registam imagens reflectidas que podem variar bastante, quer na geometria, quer na nitidez ou desfocagem das formas, conjuntos ou imagens. Em 1989 realizámos a primeira experiência artística com a utilização de um espelho convexo na realização de um auto-retrato e o espelho utilizado fora uma base de um simples instrumento de cozinha, como foi o da utilização de uma base metálica de geometria elipsoidal de uma máquina de batidos. Neste caso, a curvatura convexa desse espelho tridimensional reflectia o nosso tronco, o rosto e os objectos vizinhos, gerando formas curvas e algumas distorções bastante expressivas derivadas da curvatura do espelho, próxima da superfície geométrica de um elipsoide (Figura 8).

Muito mais tarde, no ano de 2004, para o projecto de exposição individual *A Mulher e a Máscara*, na Galeria Arte Periférica, no Centro Cultural de Belém em Lisboa, ensaiámos alguns trabalhos centrados na questão do duplo, onde para este projecto servimo-nos da referência do espelho, mas aqui não como um instrumento específico para a obtenção de reflexos, mas antes como objecto implícito e invisível, encenando e gerando simetrias irregulares de figuras representadas, com dois aspectos visuais possíveis (TRINDADE, 2004: pp.1-20). O espelho aqui embora se sentisse a sua presença estava ausente. Pretendia-se neste projecto criar também um efeito de labirinto entre a figura real e uma hipotética figura ilusória, com outro aspecto, que se verificava em detalhes específicos, englobando uma certa e

deliberada paródia sobre a representação das figuras, que se distinguíam apenas por simples detalhes ou pormenores, como a cor dos cabelos por exemplo (**Figura 9**).

Alguns destes trabalhos de 2004 foram o mote para outro projecto de exposição posterior de 2005 destinado à Galeria Sala Maior no Porto, cuja inauguração ocorreu em 2006. O projecto, desta vez ainda mais centrado novamente na questão do duplo, intitulou-se “Burning Mirror — We want to be but we can’t find ourselves”. Nesta exposição encenámos e explorámos outras situações de ambiguidade recorrendo novamente a diversos dípticos onde a mesma figura se apresenta com ligeiras e subtis diferenças, criando uma certa tensão no espectador, ao mesmo tempo que se enunciava uma mensagem crítica e novamente paródica sobre a questão do mundo das aparências feminino (**Figura 10 e Figura 11**). Desta exposição escreveu o nosso querido amigo escritor Valter Hugo Mãe (HUGO MÃE, 2006, pp.1-2):

“A cada figura corresponde uma leitura rica que se liberta mais ainda por nos apresentada em duas versões, ambas suficientemente energéticas para se esboroarem de formas convencionais, mas também suficientemente diferentes para nos revelarem a fronteira invisível entre o que é e o que parece ser”.

“A utilização das duas versões do mesmo retrato é eficaz na criação de um certo efeito de lupa. Naturalmente não nos referimos à amplificação dos pormenores, mas à evocação do que se esconde, como se nos fosse dada a destrinça da imagem, àquilo que nos permite ver para além do disfarce civilizacional. A partir desta mostra, o caminho para a interpretação abre-se à múltipla solução, como é, deve ser, apanágio da arte: colocar-nos incessantemente perante alguém, com todas as suas vicissitudes, confissões e mistérios. Estar diante destas telas é, estar diante de alguém”.

Sandra Vieira Jürgens também a propósito deste nosso projecto no Porto escreveu na revista *Arte y Parte* (JÜRGENS, 2006: p.152):

“La idea de espejo constituye el punto de partida fundamental para abordar los trabajos reunidos en esta exposición de António Trindade (...) integra cerca de diez trabajos que exploran algunas cuestiones asociadas a los juegos especulares. La imagen de la figura humana, el acto de retratar, la idea de revelación, de reproducción, de duplicidad son, por ejemplo, aspectos a registrar en torno a esta temática y selección de obras. Además no deja de ser significativa la presencia de una

serie de obras de 40x40 y 40x50, que, agrupadas en parejas formando dípticos, nos remiten hacia una forma de existência que sugiere dualidade y, simultaneamente individualidade y complementariedad. En esta exposición es también esencial hacer notar que el concepto de identidade funciona como un hilo conductor en un recorrido dinâmico que, de quadro a quadro, de imagen a imagen, refleja las posibilidades de interpretar los sentidos establecidos entre ser y parecer, entre modelos y representaciones, ilusiones y realidades”.

Novamente no ano de 2016 surgiu outra oportunidade para realizarmos outro projecto integrando espelhos. A convite e com curadoria do Professor Ilídio Salteiro, projectámos uma instalação no Museu Militar em Lisboa, com o título *Guerra e Espelhos*, intervindo nos espaços do museu com jogos de espelhos parcialmente pintados e acompanhados de pinturas de cavalete. Neste projecto, com intervenção específica nas Salas da Grande Guerra, criámos um jogo de espelhos recorrendo a sugestões de rompimento e de aberturas virtuais dentro do espaço interventivo (**Figura 12**, **Figura 13** e **Figura 14**). Os espelhos utilizados, de várias dimensões, prolongam-se e confrontam-se com as pinturas, paredes e objectos existentes no museu e particularmente nas Salas da Grande Guerra e com outras pinturas de cavalete de nossa autoria e seleccionadas para a instalação, revelando novos objectos de confrontação óptica, quer agregados, quer separados de pinturas independentes. Criaram-se assim uma espécie de labirintos visuais, quer na visualização dos espelhos pintados, quer na visualização da reflectância de espaços, formas e perspectivas virtuais, criadas pelos próprios espelhos, que sugerem outros microespaços que se desmultiplicam e que se acentuam com a própria mobilidade do espectador-fruidor que circula no espaço expositivo (TRINDADE, 2016: pp.57-68).

### 3. OS ESPELHOS E AS LEIS DA REFLECTÂNCIA NO DESENHO EM PERSPECTIVA LINEAR.

Do estado da arte

20

A questão e o nosso interesse sobre os espelhos não é nova, como referimos na secção anterior. Importa lembrar ainda que os espelhos estiveram na base da descoberta da própria perspectiva como sistema de representação, mais especificamente com as experiências de Filippo Brunelleschi no Baptistério de Florença durante o Renascimento, onde há vários autores que referem este assunto. Ao que parece, os primeiros espelhos foram realizados em placas polidas de cobre e mais tarde de espéculo, ligas de cobre ricas em estanho. São exemplos alguns exemplares encontrados que chegaram aos nossos dias, como um que foi desenterrado perto da pirâmide de Sesostris II, c.1900 a.C., no Vale do Nilo. Euclides mais tarde enuncia a lei da reflexão da luz no seu livro sobre Catóptrica, cerca do ano 300 a.C., e mais tarde cerca do ano 1000 d.C é Alhazen que completa ou aperfeiçoa a lei da reflexão “estabelecendo que as direcções de incidência e de reflexão se encontram no mesmo plano normal, perpendicular, à interface reflectora”. As leis da reflexão da luz são mais tarde anunciadas por Witelo, na sua obra medieval editada posteriormente em 1535 (HECHT, 2002:pp.17-18; TRINDADE, 2008: pp.57-64). Como já referimos noutra lugar, e como já tinha registado Euclides, “A reflexão óptica geométrica dos corpos baseia-se, assim, no princípio simples de que o “*ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão*” o que, por conseguinte, determina que o segmento da distância de um ponto qualquer ao espelho é igual ao segmento de distância do espelho ao respectivo ponto reflectido”(TRINDADE, 2008, p.58). Dada esta lei universal, deduzimos então e sabemos que um ponto e o respectivo reflexo existem na mesma recta perpendicular ao plano do espelho (**Figura 15**).

As primeiras publicações com exemplos descritivos com ilustrações da representação de espelhos e reflexos no sistema de perspectiva linear só começam a surgir no século XVII, apesar do seu interesse e das experiências an-

teriores, como já referimos com as importantes experiências de Brunelleschi em Florença durante o Renascimento que foram importantes para a própria descoberta da perspectiva linear. As leis da reflectância e da utilização de espelhos começam-se a aplicar às artes visuais no desenho de anamorfoses especulares, ou seja, para a restituição de imagens deliberadamente e calculadamente distorcidas que se restituem a partir de espelhos convexos, sobretudo cónicos e cilíndricos. Na concepção destas imagens de anamorfoses especulares intervêm as leis da reflectância, já por nós assinaladas atrás, mas neste caso relacionadas com a geometria das superfícies especulares que condicionam o tipo de reflexos e que permitem a restituem as imagens distorcidas que são calculadas num plano com o auxílio de superfícies cónicas e cilíndricas imaginárias que representam os espelhos convexos de simples curvatura. Em França dois autores importantes, Vaulezard em 1630 e Nicéron em 1638, publicaram descrições dos métodos com ilustrações para a concepção destas anamorfoses especulares (VAULEZARD, 1630; NICERON, 1638, Livro III; BALTRUSAITIS, 1995: pp.183-228; TRINDADE, 2008: pp.362-366).

Depois dos apontamentos e descrições de Leonardo da Vinci e de outros autores medievais e renascentistas e das anamorfoses especulares, onde se utilizam espelhos cónicos e cilíndricos tridimensionais auxiliares, surge em 1661 com Charles Bourgoing a primeira ou uma das primeiras representações de espelhos e reflexos no sistema de perspectiva linear em quadro plano (BOURGOING, 1661: p.140; ANDERSEN, 2007: pp.467-470). Mais especificamente este autor apresenta a perspectiva de um interior com um prisma frontal e o respectivo reflexo num espelho de topo inclinado em relação ao geometral ou plano horizontal (**Figura 16**).

O interesse pela reflectância em espelhos planos e sua representação em perspectiva é também manifestada e descrita no início do século XVIII pelo britânico Brook Taylor (1685-1731), que para além desse pormenor é um autor chave no desenvolvimento da perspectiva linear. Publicou em 1715 um importantíssimo tratado de perspectiva, intitulado *Linear Perspective*, e em 1719 publica outra versão mais completa daquele, com o título *New Principles of Linear Perspective*. Duas grandes novidades e contributos introduzidos por este autor que permitem desenhar em

perspectiva linear figuras, sólidos e conjuntos inclinados e oblíquos em relação ao quadro perspectico e ao Geometral, gerando perspectivas com três pontos de fuga de três direcções perpendiculares entre si (**Figura 17**), são bem assinadas por Kirsti Andersen (ANDERSEN, 2007: pp.515-538). De facto, é Taylor quem descreve e ilustra pela primeira vez (ANDERSEN, 2007: pp.515-516):

- o de como determinar a direcção normal ou perpendicular a uma orientação de planos dada, ou de como determinar o ponto de fuga de rectas perpendiculares a uma direcção de planos dada;
- e o inverso, ou seja, o de como determinar uma orientação e direcção de planos perpendiculares a uma direcção dada, ou de como determinar a recta do infinito ou de fuga de uma orientação, direcção, de planos dada.

Na questão da representação perspéctica da reflectância em espelhos planos, Brook Taylor começa por dar o exemplo do reflexo de um simples ponto num determinado plano, com a respectiva descrição, e depois apresenta alguns exemplos de desenhos onde se observam reflexões de porções de planos, ou de figuras planas em espelhos, alguns deles oblíquos, representados em pinturas de cavalete, onde descreve esses reflexos de forma muito sucinta referindo por vezes apenas o reflexo de um ponto dessas figuras. O autor apenas dá um exemplo da reflectância de sólidos com o exemplo simples do espelho de água com o reflexo de cones, cilindros e um prisma (**Figura 18 e Figura 19**) (TAYLOR BROOK, 1719: pp.49-52, figuras 22 e 23; ANDERSEN, 2007: pp.529-533).

Em 1763, Joseph Highmore, profundo conhecedor de Brook Taylor com quem contactou, apresenta no seu livro *Pratique of Perspective* o exemplo (**Figura 20**) de uma composição com quatro espelhos (HIGHMORE, 1763: figura 74.1; ANDERSEN, 2007: p.568).

Em 1774 Johann Lambert também trata da questão dos espelhos na sua obra referindo novamente o reflexo do ponto, depois apresenta um exemplo do espelho de água, de uma sala com dois espelhos e ainda refere a determinação de reflexos de pontos em superfícies curvas. No exemplo curioso da representação de uma sala com dois espelhos, Lambert mostra e determina as áreas de reflexão com o au-

xílio da determinação dos reflexos do observador, centro de projecção, relativamente aos dois espelhos da sala (Figura 21), assunto bem observado por Kirsti Andersen (LAMBERT, 1774: pp.129-132; ANDERSEN, 2007: pp.664-673).

Já na segunda metade do século XIX, Jean Joules de La Gournerie, no seu tratado *Traité de Perspective Lineaire*, publicado em 1859, também dedica no Livro IV, exclusivamente dedicado a imagens de óptica, um primeiro capítulo que refere os espelhos. Mais detalhadamente nesse capítulo começa por referir as leis da reflexão, depois refere o exemplo do espelho de água, tal como outros autores que já referimos, dá exemplos de vários tipos de espelhos na última secção do capítulo e refere ainda os pontos e as linhas de fuga das imagens relacionadas também com a reversão da linha do horizonte (LA GOURNERIE, 1859: pp.127-133).

Mais tarde, já no século XX, Jean Jules Pilet no seu tratado *Traité de Perspective Lineaire*, também dedica um capítulo IX dedicado aos espelhos planos (PILLET, 1953: pp.198-202). Curiosamente, e tal como Brook Taylor anos antes, Lambert ou La Gournerie, Pilet começa logo no início por referir as leis da reflectância, chama a atenção do campo de reflexão do espelho, ou da área compreendida que permite a reflectância e depois dá e descreve também os exemplos do espelho de água, do espelho vertical, do espelho inclinado e também refere a reflexão do próprio centro de projecção, observador, num espelho vertical. As descrições de Pilet e mesmo os seus desenhos são mais cuidadosos do que os desenhos de Brook Taylor. Pilet é um importante autor e vai ser uma grande referência para alguns géometras dos anos seguintes.

A temática dos espelhos no sistema de perspectiva linear surge depois na segunda metade do século XX incluída em algumas obras de Geometria e de Perspectiva, como na obra de Dik Vroman, *Architecture, Perspective, Shadows and Reflections*, publicado em 1978. Em Portugal, esta temática está incluída e é abordada e tratada também na obra de Carlos da Silva Pinheiro e de Pedro Fialho de Sousa, *Tpu 55*, publicada em 1980, onde os autores dão exemplos de imagens espelhadas em espelhos de frente, vertical e de rampa (PINHEIRO/ SOUSA, 1980: pp.73-78) e também na obra de Moreira de Sousa, *Desenho e Geometria Descritiva*, antigo 12<sup>o</sup> ano, publicado em 1995. De referir ainda uma

obra recente e interessante da autoria de Cristina Candito, *Il Disegno e la Luce – Fondamenti e metodi, storia e nuove applicazioni delle ombre e dei riflessi nella rappresentazione*, professora na Universidade de Génova, que trata entre outros assuntos e temas, da representação com espelhos em quadro inclinado (CANDITO, 2010).

## 4. DA FORTUNA DE ALGUMAS TEORIAS DA GEOMETRIA PLANA E DA GEOMETRIA ESPACIAL NA REFLECTÂNCIA EM ESPELHOS PLANOS

### 4.1. O contributo do teorema atribuído a Tales

O antigo Teorema atribuído a Tales de Mileto, de cerca do ano 600 a.C. e portanto mais antigo que as teorias de Euclides, com a respectiva relação harmónica dos triângulos e segmentos proporcionais, é de uma relevância enorme para a determinação da marcação de segmentos iguais em perspectiva, aplicando-se à reflectância sobre espelhos planos, pois permite, em determinados casos de resolução de problemas, com espelhos de frente, vertical e de perfil, economizar traçados. E foi também importante para a própria descoberta da perspectiva linear plana, sistematizada e descrita pela primeira vez por Alberti, como já vimos e como defendem e pensamos que bem Hubert Damisch e William Ivins (DAMISCH,1994: pp.76-85; IVINS, Jr.,1973:p.49, nota 1). Assim como o conceito de *Homologia* e de Afinidade, desenvolvido o primeiro por Girard Desargues, enunciado em 16481 e aplicado com grande fortuna correntemente, sendo também bastante útil por isso no campo da geometria projectiva e não apenas na resolução simples dos rebatimentos em perspectiva linear plana. Pois, por exemplo, na determinação perspectica do rebatimento ou contra-rebatimento de uma figura plana, basta determinar um ponto pelo método convencional, determinando para tal o ponto de fuga das cordas de arco de rebatimento, que os restantes pontos da forma que se pretende rebater ficam facilmente determinados por homologia, tirando partido dos pontos autoconjugados que existem no eixo de homologia, que corresponde à charneira no caso dos rebatimentos. Veremos então em que consiste primeiramente o teorema de Tales.

25

1 Sobre a génese, a discussão, o desenvolvimento e o debate em torno do teorema de Girard DESARGUES vide o estudo de FIELD e GRAY, 1987: em especial o capítulo 7, pp.60-140 e no apêndice 5, pp.189-206. Sobre a explicação geométrica deste teorema e sua relação com a representação de figuras homológicas e com a perspectiva linear plana vide também FLOCON e TATON,1990, pp. 102-124.

O teorema de Tales diz respeito a segmentos, a pares de segmentos e a formas proporcionais que apresentam ratios idênticos. Sejam, por exemplo, dois triângulos **BED** e **CED** que têm a mesma área, pela simples razão de terem a mesma base e a mesma altura (**Figura 22**). A área do triângulo **ADE** será  $AD.a/2=AE.b/2$ , a área do triângulo **CDE** será  $CD.a/2$  e a área do triângulo **BED** será  $BE.b/2$ . Como as áreas dos triângulos **BED** e **CDE** são iguais, os quocientes **ADE/BED** e **ADE/CDE** serão iguais, o que nos permite verificar que  $AD/CD=AE/BE$ , ou seja, que os segmentos apontados são proporcionais entre si.

Noutro esquema (**Figura 23**), apresentam-se quatro segmentos **a**, **b**, **c** e **d** proporcionais entre si e tal que  $a/b=c/d=0,60$ . Este quociente refere-se à razão proporcional dos ratios das proporções numéricas dos respectivos quocientes referidos. Sendo conhecidas as medidas dos segmentos  $a=5\text{cm}$ ,  $b=7\text{cm}$  e  $c=10\text{cm}$  pretende-se, pois, determinar a verdadeira medida do segmento **d**. Para tal, bastará resolver a equação com as razões proporcionais e os valores dados dos segmentos, o que não é difícil, sendo  $d=0.60/c$ , pela regra de três simples obteremos substituindo a fórmula  $a/b=c/d$ , teremos  $5/7=10/d$  que será **14**. Neste caso, o ratio ou o valor proporcional é de **0,71...** Para explicitar o teorema de Tales, continuando ainda no campo da geometria plana — que é aplicada à perspectiva, como veremos —, podemos ainda exemplificar como várias linhas rectas, paralelas entre si, no presente caso três, ao intersectarem duas linhas transversais que fazem ângulos diferentes, ou não, com essas linhas paralelas, produzem segmentos proporcionais, resultando num ratio constante e de valor sempre igual (**Figura 24**). Assim, duas linhas transversais **a** e **b** intersectam três linhas paralelas: a primeira **a**, situada mais à esquerda, nos pontos **A**, **B** e **C**; a segunda **b**, situada mais à direita, nos pontos **A'**, **B'** e **C'**. Se dividirmos os valores numéricos dos dois segmentos de cada transversal, delimitados pelos três pontos de intersecção com as linhas paralelas, obtemos um ratio idêntico. Assim,  $AB/BC=A'B'/B'C'=0,666...$

Vimos, pois, como o Teorema de Tales se verifica em geometria plana, mas o mesmo se aplica à perspectiva linear plana para resoluções espaciais, pois, em determinados casos, permite economizar traçado e evitar que se façam rebatimentos excessivos pelo método tradicional

da determinação do ponto de fuga das cordas de arco de rebatimento. O método da corda de arco permite marcar numa determinada recta segmentos com valores idênticos e outros mesmo de dimensões diferentes, consoante as medidas que queiramos, aplicando-se com bastante frequência quando as direcções de rectas em questão são paralelas ao Geometral e portanto de nível. Assim, para marcármos dois segmentos iguais numa mesma recta, separados por um ponto, começamos por determinar o ponto de fuga das cordas de arco, o traço da recta no plano do quadro perspéctico e o traço da recta com a linha do horizonte que corresponde ao ponto de fuga, visto a direcção em questão ser de nível (**Figura 25**). O ponto de fuga das cordas de arco determina-se bastando rebater o raio visual paralelo à recta, ou direcção de rectas em questão, que contém o centro de projecção, rebatendo ao mesmo tempo o próprio centro de projecção que coincide com o procurado ponto de fuga das cordas de arco. Basta, para tal, fazer o rebatimento auxiliar do centro de projecção, considerando o método do triângulo do rebatimento, onde como charneira consideraremos a recta de fuga do plano vertical que contém a recta dada que passa precisamente pelo ponto de fuga situado na linha do horizonte, já referido; consideramos em seguida a distância de visão e colocamos esta medida na paralela à charneira homológica, ou à recta de fuga referida. A hipotenusa delimitada pelo ponto que corresponde ao rebatimento auxiliar do centro de projecção e o ponto de fuga situado na linha do horizonte determinam o valor do raio do rebatimento, bastando em seguida com centro no ponto de fuga da recta — que é o centro do rebatimento do centro de projecção — e considerando o raio do rebatimento obtido, proceder ao rebatimento final, considerando o arco de circunferência e a respectiva intersecção com os traços do plano projectante perpendicular à charneira do rebatimento, que no presente caso é o próprio plano do horizonte visto a recta ser de nível. Depois de determinado o ponto de fuga das cordas de arco, basta considerarmos a recta em questão rebatida sobre a LT e nela marcar os dois pontos que se pretendem equidistantes, ou seja marcar dois segmentos de dimensão igual, bastando em seguida contrarebate-los, operação que se resolve pela intersecção das cordas de arco que fugam no respectivo

ponto de fuga das cordas de arco e que partem dos pontos e segmentos marcados em verdadeira grandeza na LT, com a recta em perspectiva. Nesta operação, com o auxílio do ponto de fuga das cordas de arco, está subjacente também o teorema de Tales de Mileto (COUCEIRO, 1992: p.144 e figs. 3.33.a) e b), pois o triângulo determinado pelo ponto de fuga das cordas de arco, os três pontos marcados sobre a LT, que marcam dois segmentos iguais, no caso particular com o valor de 60, e os três pontos marcados sobre a recta em curso, apresentam valores e ratios proporcionais entre si o que garante que os segmentos em perspectiva VA e AA1 sejam idênticos em medida. Verificando esta solução da marcação de dois segmentos iguais numa recta em perspectiva, o teorema de Tales mais se afirma, pois se considerarmos em vez do ponto de fuga das cordas de arco, um ponto de fuga F aleatório na linha do horizonte, verificamos que as rectas que nele fugam e que passam pelos pontos V, A e A1, produzem igualmente três pontos na linha de terra que delimitam dois segmentos de recta igualmente de iguais dimensões e que no presente exemplo medem cerca de 47,05. O que significa, com esta demonstração, que se quisermos marcar um segmento na recta r para a direita de A e com as mesmas dimensões que VA, não é necessário recorrer obrigatoriamente ao ponto de fuga das cordas de arco do rebatimento, mas a qualquer ponto de fuga aleatório colocado sobre a linha do horizonte. Pois a relação de proporcionalidade verifica-se na própria linha de terra, o que se observa no ratio existente entre os segmentos proporcionais que é idêntico, ou seja:  $V_3/V_1 = V_4/V_2 = 0,784$ .

Assim, num método semelhante ao da corda de arco, mas com a vantagem de não ter que se fazer qualquer rebatimento da recta em questão para mais do que um ponto em que é necessário fazer sempre um rebatimento, o Teorema de Tales permite marcar segmentos iguais em perspectiva com mais facilidade e aplicabilidade, através da correspondência dos segmentos proporcionais. Com base na figura (Figura 25), verificamos que a transferência de segmentos de recta conhecidos em verdadeira grandeza para a perspectiva, ou vice versa, concordam no Teorema de Tales. Como refere Manuel Couceiro (COUCEIRO, 1992: p.145), “*as rectas que fazem a transferência podem ter uma qualquer direcção, ou seja, um qualquer ponto de fuga, adaptado às dimensões em confronto*”.

Se quisermos transportar segmentos iguais e com uma certa medida para a perspectiva de uma recta, temos, apesar de tudo, que rebater essa recta para determinarmos pelo menos um ponto. O teorema de Tales, apesar de prático, não evita que se tenha que marcar uma primeira medida conhecida em perspectiva, operação que só se faz com o rebatimento, podendo, e ai sim, os outros segmentos iguais serem determinados pelo Teorema de Tales, escolhendo, para o efeito, qualquer ponto de fuga na linha do horizonte. Estes dois métodos, da Corda de Arco e do Teorema de Tales facilmente se conjugam com outras situações e métodos, como, por exemplo, a criação de uma estrutura tridimensional pela multiplicação de um módulo, apontados por Manuel Couceiro (COUCEIRO,1992: pp.144-145).

Outras situações em que é aplicado o teorema de Tales, são aquelas em que a distância ou a altura de visão estipuladas para uma determinada resolução sejam excessivamente longas, ou quando o centro de projecção ou os pontos de distância se encontram fora dos limites do suporte plano de representação, quando presenciamos determinados pontos de fuga inacessíveis ou ainda no caso em que as coordenadas de determinados pontos apresentem um valor excessivo em relação ao formato do suporte de representação, pelo que, por vezes, estamos obrigados a criar situações de redução proporcional, ou da distância de visão, ou de determinadas coordenadas de pontos, consoante as situações que como vimos podem ser diversas e onde é, mais uma vez aqui, aplicado novamente o teorema de Tales com os seus segmentos e triângulos proporcionais. Assim, bastará reduzir no ratio que podemos escolher livremente e conforme as medidas do suporte, as medidas iniciais num determinado coeficiente de redução, determinar em seguida a perspectiva com a redução estabelecida ou elegida e finalmente em perspectiva aumentar a respectiva medida o número de vezes necessária mas respeitando sempre o número ou o coeficiente de redução. Se, por exemplo, reduzirmos a abcissa de um ponto num coeficiente de  $1/2$ , então depois para obtermos a perspectiva final do mesmo ponto pretendido e não reduzido, basta para tal multiplicarmos por dois a medida das coordenadas da abcissa reduzida, ou para a esquerda, ou para a direita do plano de perfil de referência, consoante a abcissa seja positiva ou negativa.

No caso da redução dos afastamentos de um determinado ponto, presenciamos sempre situações de simultaneidade de redução, pois reduzimos não só o valor do afastamento, como também o valor da distância de visão, mas sempre no mesmo coeficiente escolhido e não em dois coeficientes diferentes. No caso das cotas reduzidas, procedemos de igual modo como se procede para as abcissas. Há casos, como referimos acima em síntese, em que o centro de projecção se encontra fora dos limites do suporte de representação plano, como a folha de papel, e em que pretendemos encontrar pelo método directo os pontos de fuga de determinadas rectas, dadas em dupla projecção ortogonal por exemplo. Para tal, reduzimos a distância de visão no coeficiente escolhido que é relativo e depois só teremos de ampliar pelo número de vezes relacionado com a redução estabelecida, encontrando o ponto de fuga pretendido que, esse sim, se encontra dentro dos limites do suporte de representação. O teorema de Tales aplica-se, ainda, numa situação em que presenciamos uma recta em que o respectivo ponto de fuga é inacessível e um ponto do espaço, ambos representados num determinado suporte, e em que queremos traçar uma outra recta paralela a essa dada a passar no ponto referido. Para tal, encontramos a solução recorrendo mais uma vez a triângulos proporcionais com os lados paralelos entre si, permitindo obter em perspectiva a recta paralela procurada.

Relacionando o teorema de Tales com a determinação de reflexos em espelhos planos em perspectiva linear, verificamos que aquele traz inúmeras vantagens, no caso, particularmente quando os espelhos em questão são modelados por planos de frente, verticais, ou de perfil. Exemplificando, tome-se novamente como base a figura anterior e consideraremos agora a recta de nível  $r$  como sendo a recta perpendicular a um espelho modelado por um plano vertical  $\alpha$  (Figura 26).

Pois, sabendo nós que a distância de um ponto a um espelho plano é igual à distância desse espelho ao ponto reflectido e que ambos os pontos, o ponto no espaço e o ponto reflectido, determinam um segmento que existe numa recta perpendicular ao plano do espelho, basta conhecer então o ponto médio desse segmento, que corresponde ao ponto de intersecção da dita perpendicular com o plano do espelho (na figura, ponto A) e marcar outro ponto A1 na mesma perpendi-

cular, tal que  $AA_1 = VA$ , operação que se resolve com o Teorema de Tales. Assim, em vez de recorrermos ao ponto de fuga das cordas de arco  $Fc$ , poderemos recorrer a um ponto de fuga qualquer marcado na linha do horizonte, no caso o ponto  $F$ , para marcar um segmento igual a  $VA$ , bastando transportar o ponto  $A$  para a  $LT$ , ponto 3, e em seguida marcar um segmento igual para o lado direito de 3, no presente caso, o ponto 4, e proceder à respectiva inversão, voltando a unir 4 ao ponto de fuga  $F$ , obtendo também desta forma o reflexo do ponto  $A$  pretendido, ou seja o ponto  $A_1$ . Como vimos, recorrendo ao teorema de Tales, não foi necessário, neste caso sequer saber a dimensão do segmento  $VA$  para podermos marcar o reflexo de igual dimensão  $AA_1$  do outro lado do espelho. Nesta operação em que intervém o teorema de Tales, constatamos da existência de pares de conjuntos harmónicos de pontos, pois encontramos relações várias de proporcionalidade de segmentos (Figura 27).

#### 4.2. Desargues e a importância da Homologia

Girard Desargues sendo um dos fundadores da geometria projectiva — que permite o grande passo para o desenvolvimento da perspectiva linear —, depois aperfeiçoada e continuada por Jean Victor Poncelet (PONCELET, 1865) e outros géometras, cria em 1648, como já referimos atrás, o famoso teorema de seu nome, partindo ainda assim dos conhecimentos anteriores provenientes da antiga Grécia, que por ele são assimilados e desenvolvidos. O teorema deste géometra surge nas três proposições famosas de 1648, como já referimos, recolhidas pelo seu discípulo Abraham Bosse na obra *La Perspective de Mr. Desargues* que sintetiza conteúdos da obra de Desargues, *Perspective*, de 1636, e que basicamente enuncia o seguinte (BOSSE, 1648:pp.340-343; FIELD e GRAY, 1987:pp.161-169): “*duas figuras correspondentes e homólogas entre si apresentam as intersecções dos lados correspondentes alinhadas sobre uma recta*” (Figura 28 e Figura 29)<sup>2</sup>.

Como sabemos, uma homologia apresenta um centro, ponto  $O$ , um eixo e duas figuras semelhantes, chamadas

2 Itálico nosso. O teorema está bem descrito na obra de Abraham BOSSE, mas com um texto demasiado longo, pelo que fizemos uma síntese dos conteúdos expostos por aquele autor, discípulo de Desargues. Qualquer das formas vide a explicação mais detalhada em FIELD e GRAY, 1987: pp.161-169..

homólogas (Figura 30). Na figura, podemos verificar que os lados correspondentes  $AB$  e  $A_1B_1$ ;  $BC$  e  $B_1C_1$ ; e  $AC$  e  $A_1C_1$  apresentam as respectivas intersecções em pontos localizados numa mesma linha recta que corresponde ao eixo de homologia. Esses pontos são autoconjugados. Pelo teorema e pela figura representada, verificamos que esta demonstração de Desargues não só se aplica à resolução de rebatimentos, como também à resolução de reflexos em espelhos planos, ambos em perspectiva linear plana que recorre a um sistema de projecções centrais. E de que forma e quais as vantagens? Pela simples razão de que ao aplicar este teorema, os exercícios resolvem-se com menos traçado, quer no caso dos rebatimentos, quer no caso da determinação de reflexos em espelhos planos. Tanto no primeiro caso, dos rebatimentos, como no segundo, do reflexo em espelhos planos, presenciamos homologias espaciais, pois as duas figuras homologas pertencem a planos diferentes (as figuras no espaço e as figuras rebatidas; e as figuras no espaço e as figuras reflectidas), mas o processo é, em tudo, semelhante à determinação ou à concepção de homologias planas.

**32**

No caso dos rebatimentos, como sabemos, a charneira do rebatimento corresponde sempre ao eixo de homologia e aquela não é mais do que a recta de intersecção entre o plano da figura que se quer rebater com o plano sobre o qual a figura irá se apresentar em rebatimento. Normalmente rebate-se para os planos de projecção ou para planos de frente ou de nível. A intersecção das rectas que contêm os pontos no espaço com as mesmas rectas com os mesmos pontos rebatidos, determinam pontos infinitamente próximos que se encontram alinhados numa linha recta que é a charneira do rebatimento e ao mesmo tempo o eixo da homologia espacial. Os pontos fixos da charneira ou do eixo de homologia, assim alinhados, permitem resolver com muito menos traçado os rebatimentos de qualquer forma ou figura plana, pois bastará rebater um ponto pelo método tradicional que recorre ao ponto de fuga das cordas de arco, que todos os outros pontos da mesma figura se poderão determinar recorrendo aos pontos fixos da charneira ou eixo de homologia. Seja, por exemplo, um quadrado, em que queremos rebatê-lo para o plano vertical de projecção, único plano para onde se rebatem as formas

em perspectiva. Basta, pois, rebater um dos vértices, recorrendo ao ponto de fuga das cordas de arco, que os restantes três vértices se determinam com o auxílio das relações homológicas existentes. Para tal, para rebatermos em seguida outro vértice da mesma aresta ou de uma diagonal que passa por aquele primeiro ponto primeiramente rebatido, consideramos a recta que contém esses dois pontos e sua intersecção com a charneira ou eixo de homologia que determina o seu ponto fixo, que no caso particular é sempre o traço vertical da recta, bastando de seguida unir esse ponto fixo da charneira ao ponto rebatido, obtendo a recta rebatida que irá conter esses dois pontos rebatidos. Depois deste passo, bastará por fim considerar a recta ou a corda de arco que contém o ponto de fuga das cordas, que corresponde ao centro de homologia, e o outro ponto da aresta ou diagonal, e proceder à respectiva intersecção com a recta rebatida encontrando o ponto da outra aresta ou da outra diagonal rebatida. Ou seja, a recta no espaço e a recta rebatida, que contêm, neste caso, uma das arestas ou umas das diagonais do quadrado que se quer rebater, no espaço e em rebatimento, são homólogas entre si, assim como os dois pontos que a elas pertencem, os do espaço e os rebatidos, pois as rectas encontram-se num ponto fixo da charneira que conjuntamente com os outros pontos fixos resultantes do cruzamento de outras rectas que contêm outras diagonais ou outras arestas do quadrado determinam a charneira do rebatimento ou o eixo de homologia. Então verificamos que a figura no espaço e a figura rebatida são sempre homólogas e que o eixo de homologia que corresponde à charneira do rebatimento é ao mesmo tempo o lugar geométrico de encontro dos pontos de intersecção das rectas rebatidas com as rectas no espaço, e esses pontos são sempre colineares pois definem uma linha recta. No rebatimento, o centro de homologia corresponderá sempre ao ponto de fuga das cordas de arco,  $F_c$ . Se ao invés de termos uma figura plana, tivermos um sólido ou uma superfície diédrica qualquer, far-se-á ou proceder-se-á da mesma forma para a determinação do rebatimento dos pontos de outras faces.

No caso dos reflexos em espelhos planos em perspectiva, como referimos atrás, também é conveniente utilizarmos a homologia, onde está novamente explícito o teore-

ma de Desargues, permitindo, também aqui, economizar traçados excessivos. Seja, por exemplo, uma figura plana delimitada por quatro vértices, um simples polígono, e o respectivo reflexo num espelho plano dado (Figura 31). Uma forma qualquer é homóloga do seu reflexo num espelho, onde temos como exemplo o polígono  $A,B,C,D$  e seu reflexo  $A_1,B_1,C_1,D_1$  num determinado espelho plano. Na figura, verificamos que para além dos pontos reflectidos no espelho estarem em perpendiculares ao plano do espelho e a igual distância daquele, convergindo no ponto de fuga das perpendiculares ao plano do espelho, que os pontos de intersecção das rectas que contêm os lados do polígono com o plano do espelho estão alinhadas sobre uma linha recta que resulta da intersecção do plano do polígono com o plano do espelho. Essa recta de intersecção é o eixo de homologia existente entre o plano do polígono e o plano do polígono reflectido, ou do polígono com o respectivo reflexo (TRINDADE, 2008: pp.376-381).

34

Na figura, podemos verificar que as relações homológicas entre os pontos da figura no espaço  $ABCD$  e os pontos homólogos da figura virtual reflectida  $A_1B_1C_1D_1$  são bem evidentes, sendo o centro de homologia neste exemplo o ponto de fuga  $F_p$ . Sabemos já que os pontos no espaço e os respectivos pontos reflectidos existem em rectas perpendiculares ao plano do espelho, todas paralelas entre si e que por esta razão convergem para o mesmo ponto de fuga das perpendiculares,  $F_p$ , que neste caso da determinação de reflexos em espelhos planos corresponde sempre ao centro de homologia espacial. Sabemos também que a distância dos vários pontos da figura no espaço ao plano do espelho é absolutamente igual à distância do espelho aos respectivos pontos virtuais ou reflectidos. Os pontos  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os pontos médios dos segmentos perpendiculares que compreendem os pontos no espaço e os pontos reflectidos. Na figura podemos considerar vários eixos de homologia, onde assinalámos apenas três, sendo um deles principal, que são respectivamente  $e$ ,  $e_1$  e  $e_2$ , sendo este último o principal porque corresponde à recta de intersecção do plano do espelho com o plano da figura delimitada pelos quatro vértices.

Assim, pelo recurso às relações homológicas entre os pontos no espaço e os pontos reflectidos, verificamos que

basta determinar um ponto pelo processo corrente utilizando os rebatimentos, que todos os restantes pontos da figura reflectida se podem determinar por homologia. Suponhamos que determinámos o reflexo do ponto  $A$  pelo recurso ao método tradicional do rebatimento. O ponto  $B$  poderá ser determinado utilizando também o ponto fixo da recta de intersecção que contém a aresta  $AB$ , ou seja, na figura a recta  $a$ . Esta recta intersecta o plano do espelho no ponto fixo  $Q$  e uma vez supondo que já determinado o reflexo do ponto  $A$ , de que resulta o ponto  $A_1$ , basta pois para determinar o reflexo do ponto  $B$ , unir o ponto  $A$   $A_1$  reflectido ao ponto fixo  $Q$ , o que determina a recta  $a$  reflectida, que designámos por  $a_1$ . para encontrar o ponto  $B_1$  reflectido, basta agora considerármos a perpendicular que passa no ponto  $B$  do espaço e pelo ponto de fuga das perpendiculares que corresponde ao centro de homologia, o ponto  $F_p$ , e considerar a respectiva intersecção com a recta  $a_1$ . Então a recta  $a$  é homóloga da recta  $a_1$ . que é o seu reflexo, o ponto  $A$  é homólogo de  $A_1$  e  $B$  homólogo de  $B_1$ , onde o respectivo eixo de homologia é a recta  $e_2$ , assinalada na figura a azul. Do mesmo modo, por homologia determinámos os restante vértices da figura, recorrendo mais uma vez às diagonais ou às restantes arestas que compreendem os vértices e as arestas da figura e aos pontos fixos,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ , do eixo de homologia principal, e, que não é mais do que a recta de intersecção do plano da figura com o plano do espelho. Assim, para a determinação do reflexo dos vértices  $C$  e  $D$  da figura, no que resultam os pontos  $C_1$  e  $D_1$ , temos várias opções possíveis para a respectiva determinação, cujo caminho dependeria sempre dos dados de arranque do problema e da acessibilidade de determinados elementos. Ou seja, e imaginando que todas as hipóteses seriam possíveis, para determinar o reflexo do ponto  $C$ , o ponto  $C_1$ , por exemplo, poderemos recorrer a uma das diagonais da figura, a  $d$  por exemplo, e considerar o respectivo ponto fixo na charneira, o ponto  $S$ , que uma vez unido ao ponto  $A_1$  permite determinar o reflexo da diagonal  $d$ , ou a sua homóloga, a recta virtual  $d_1$ , bastando, para finalizar, unir o vértice  $C$  ao ponto de fuga das perpendiculares ou ao centro de homologia,  $F_p$ , cuja intersecção com a diagonal reflectida  $d_1$  nos permite encontrar o reflexo, que corresponde ao ponto  $C_1$ . Observando novamente a figura, verifi-

camos que existem bastantes pares de elementos homólogos, para além dos pontos da própria figura, pois os pares de elementos homólogos como as rectas **a** e **a1**, **b** e **b1**, **c** e **c1**, **d** e **d1**, intersectam-se todas nos pontos fixos **P**, **Q**, **R** e **S**, todos colineares entre si e que determinam o eixo de homologia principal **e**.

As aplicações e os cálculos da reflectância de superfícies nas artes plásticas e nas artes visuais são uma constante, como aliás vemos no exemplo das anamorfoses construídas com espelhos auxiliares. Mas o interesse da reflectância alarga-se a outro tipo de linguagens e de ciências, a campos artísticos diversos, como a Arquitectura (**Figura 32**)<sup>3</sup>, a Pintura e mesmo a Instalação contemporâneas, como já vimos com os *trompe l'oeils* especulares de Gerard Richter (**Figura 33**). Os espelhos planos têm também a vantagem de simular situações diversas, de resolver situações de simulação de prolongamentos de espaços, entre outras aplicações. Em suma, não se esgota a sua utilidade nas artes e ofícios.

3 Em relação aos reflexos aplicados à arquitectura vide VROMAN, 1983, pp.112-127.

## 5. DO DESENHO DE REFLEXOS NO SISTEMA DE PERSPECTIVA LINEAR PLANA

### 5.1. Condicionantes nos resultados do desenho de reflexos em perspectiva linear plana

Antes de referir e descrever alguns exemplos de desenhos de reflexos em espelhos planos e resolvidos em perspectiva linear plana, importa referir algumas premissas, algumas delas obrigatórias, que trazem algumas vantagens para a resolução deste tipo de problemas, quer quanto aos efeitos pretendidos, quer quanto à resolução dos problemas, como são:

1. A posição do centro de projecção;
2. A definição do perspectógrafo, onde a altura de visão e a distância de visão também condicionam os reflexos pretendidos;
3. A colocação relativa do espelho e do/s objecto/s, de forma a obter os efeitos pretendidos;
4. A determinação do ponto de fuga das perpendiculares ao plano do espelho;
5. Os rebatimentos;
6. As homologias;
7. Os teoremas de Desargues e de Tales, neste último caso mais aplicado aos espelhos planos de frente, de perfil e verticais, não oblíquos portanto.

A **Figura 34**, que corresponde à resolução da primeira parte de um exercício que se apresenta mais desenvolvido e descrito nas duas figuras seguintes (**Figura 35** e **Figura 36**), ilustra bem os sete conteúdos que atrás referimos. Depois de se ter perspectivado a forma de um quadrado assente no plano horizontal, ou Geometral, cuja forma é condicionada pela posição do observador, ou centro de projecção, da sua altura e distância de visão, e pela sua posição relativa a um espelho vertical assinalado a verde na figura, verificamos também a necessidade do rebatimento do plano do horizonte para o plano frontal ou quadro perspéctico, rebatendo o observador para esse efeito, onde determiná-

mos o ponto de fuga das perpendiculares ao plano do espelho, mediante a consideração do raio visual rebatido perpendicular ao raio visual rebatido com a direção das rectas de maior inclinação do plano. Por outro lado, verificamos também a aplicação do teorema atribuído a Tales para a determinação do reflexo de um primeiro ponto do quadrado, no caso o ponto **A**. Para este efeito, considerámos a recta perpendicular ao plano do espelho a passar pelo ponto **A** em perspectiva e sua intersecção com o traço horizontal do plano do espelho, onde obtivemos o ponto **I**. O segmento **AI** representa a distância do ponto **A** ao espelho. Bastou de seguida projectar esse segmento ou distância **AI** na Linha de Terra, **LT**, recorrendo a um ponto de fuga arbitrário, no caso aproveitámos do ponto principal para evitar a marcação de outro ponto na Linha do Horizonte, e duplicar para a direita de **I1** a mesma distância, obtendo na extremidade o ponto reflectido **A1** projectado na Linha de Terra. Finalmente ao unirmos o ponto **A1** projectado na Linha de Terra ao Ponto Principal **P**, determinamos o ponto reflectido em perspectiva, na intersecção dessa linha com a perpendicular ao plano do espelho que passa no ponto **A**.

Os dois últimos conteúdos aplicados no exercício, ou seja as correspondências homológicas e o Teorema de Desargues, verificam-se bem na perspectiva das diagonais do quadrado **AC** e **BD** e respectiva reflexão no espelho plano, **AICI** e **BIDI**.

## 5.2. Algumas aplicações na forma de exercícios

Podemos referenciar e descrever as metodologias de alguns exemplos de reflexos em espelhos planos aplicados à representação gráfica perspéctica, onde se aplicam os teoremas dos géometras Tales e Desargues. Seja como primeiro exemplo que se desenvolve a partir da imagem precedente (**Figura 34**), a determinação gráfica em perspectiva linear plana do reflexo, num espelho vertical  $\alpha$ , de um biombo modelado por quatro porções de planos verticais, perpendiculares entre si e ao Geometral, (**Figura 35** e **Figura 36**). Os dados de arranque apresentam-se já em perspectiva, como a distância de visão,  $OO_2$ , também assinalada pela distância do ponto principal **P** aos pontos de distância **D**, que no presente caso corresponde a **11cm** e a altura de visão a altura de visão,  $OO_1$ , que no presente caso

corresponde a **10cm**, e onde é dado o biombo poliédrico de base [ABCD] e altura **12**, em que se pretende determinar a respectiva imagem reflectida no espelho vertical  $\alpha$ , assim como as sombras do conjunto a partir do foco luminoso F.

Para a determinação da perspectiva da base [ABCD], procedemos ao método dos traços e pontos de fuga e como a base tem duas direcções de arestas, procedemos à determinação dos respectivos pontos de fuga dessas duas direcções, que no presente caso são os pontos de distância D e D1, visto que as duas direcções horizontais das arestas da base do biombo fazem  $45^\circ$ , com abertura à esquerda e com abertura à direita em relação à LT e ao quadro perspéctico. Depois de determinada a base do biombo, com o auxílio dos pontos de distância e dos traços das arestas na Linha de Terra e no quadro perspéctico, ou plano frontal, determinámos em seguida a perspectiva do biombo, resolvendo a perspectiva da marcação das quatro arestas verticas através da marcação no quadro da altura **12**, neste caso particular a partir do ponto A que se encontra no mesmo quadro perspéctico e na LT. Depois de marcada essa altura, bastou unir o ponto mais alto, não designado na figura, aos pontos de distância, D e D1, considerando portanto as rectas de nível que contêm as arestas superiores do biombo e intersectá-las com as respectivas rectas verticais que partem dos quatro pontos da base, permitindo determinar as restantes três alturas em perspectiva, completando, assim, a perspectiva total do biombo. Para a determinação das sombras do conjunto sobre o Geometral e sobre a porção de plano vertical  $\alpha$  do espelho, a partir do foco luminoso F, bastou considerar os raios luz-sombra que partem daquele foco e as arestas que com aqueles são complanares, que produzem planos rasantes e considerar a respectiva intersecção com os dois planos referidos. Atente-se que o biombo produz sombras sobre ele próprio, que no caso presente foram de determinação bastante simples, bastando, para tal, considerar os planos secantes e rasantes luz-sombra, determinados pelas arestas do biombo e pelos raios de luz-sombra que partem do foco luminoso F, que com aquelas são complanares, e proceder em seguida à respectiva intersecção com as porções de planos que modelam o biombo. Pois, sabendo que esses planos luz-sombra, alguns deles intersectam o próprio biombo segundo arestas secundárias,

basta, para encontrar a sombra própria interior projectada, considerar essas arestas, resultantes da intersecção com os planos luz sombra, e a respectiva intersecção com os raios luz-sombra que pertencem também àqueles planos e que ficam determinados precisamente pelo foco luminoso e pelos pontos das arestas que nós achemos mais convenientes, como são alguns dos pontos das arestas de nível da parte superior do biombo.

Para a determinação da imagem virtual no espelho dos reflexos do conjunto, começamos por determinar o ponto de fuga da direcção das rectas perpendiculares ao plano do espelho, o que foi conseguido rebatendo o plano do horizonte sobre o quadro, bastando, para tal, recorrer ao processo do triângulo do rebatimento, fazendo o rebatimento auxiliar do centro de projecção, considerando a distância de visão paralela à charneira homológica do plano do espelho, ou seja, a recta de fuga do plano  $\alpha$ ,  $f\alpha$ , onde o segmento compreendido entre os pontos  $F_i$ , o ponto de fuga das rectas de maior inclinação do plano  $\alpha$ , e  $Or\ aux.$ , determinam o raio visual rebatido auxiliar paralelo às rectas de maior inclinação — que no caso do plano vertical são também de nível e que por isso coincidem — do plano  $\alpha$ . De seguida, considerámos neste rebatimento auxiliar e a partir de  $Or\ aux.$ , outro raio visual rebatido perpendicular àquele, que corresponde ao raio visual auxiliariamente rebatido e paralelo às direcções das rectas perpendiculares ao plano do espelho, que intersecta o plano do horizonte e o plano vertical de projecção na respectiva recta de intersecção, que é a própria linha do horizonte  $LH$ , mais precisamente no ponto  $F_p$ , ponto de fuga da direcção das rectas perpendiculares ao plano do espelho. Tendo mais este elemento, estamos assim em condições de determinar os reflexos do conjunto, onde começámos por determinar a imagem virtual no espelho da base do biombo  $[ABCD]$ , onde determinámos primeiramente o reflexo do ponto  $A$ , ponto  $A_1$ , conseguido com o auxílio da recta perpendicular ao plano do espelho, que passa naqueles pontos, que fuga em  $F_p$  e que intersecta o plano do espelho no ponto  $I$ . Com o recurso ao Teorema atribuído a Tales, evitando os rebatimentos, escolhemos uma direcção de rectas, que tem o próprio ponto  $P$  como ponto de fuga (no caso particular das rectas de topo), para realizar a transferência do segmento que com-

preende a distância entre o ponto A e o espelho, ou seja, o segmento AI. Uma vez transferido este último para a linha de terra LT, considerámos para a direita do ponto I outro segmento, tal que  $AI_1 = I_1A_1$ , bastando de seguida inverter a transferência do ponto A1, unindo este ao ponto de fuga P, determinando deste modo o reflexo do ponto A procurado, que resulta no ponto AI.

Resta, pois, determinar os restantes pontos da base e da forma e bem assim das respectivas sombras reflectidas, o que se resolveu recorrendo às relações homológicas dos elementos existentes e onde está bem explícito, como já vimos anteriormente, o teorema de Desargues. Assim, os reflexos dos pontos B, C e D da base determinaram-se considerando as rectas e as diagonais daquela que os contém e os pontos fixos destas no eixo de homologia, que no caso particular corresponde ao traço horizontal do plano do espelho. Para determinar o reflexo do ponto C, por exemplo, o ponto CI, considerámos a recta diagonal que contém esse ponto e o ponto A, a sua intersecção com o traço horizontal do plano do espelho e por este ponto de intersecção unimos ao ponto AI, reflexo do ponto A. Uma vez determinada a diagonal reflectida por homologia, bastou de seguida unir o ponto C ao ponto de fuga das perpendiculares  $F_p$  e considerar a respectiva intersecção com a dita diagonal reflectida. Os restantes dois pontos da base reflectidos BI e DI determinaram-se do mesmo modo, utilizando os elementos homólogos como as rectas que os contém e os respectivos pontos fixos do eixo de homologia que como já dissemos é o traço horizontal do plano do espelho. Para a determinação dos pontos reflectidos e de cota mais alta do biombo, bastou elevar as verticais a partir do reflexo dos pontos da base e proceder à respectiva intersecção com as perpendiculares que partem dos pontos mais altos do biombo situado à esquerda na imagem. Igualmente tirámos partido das homologias para a determinação do reflexo das sombras do conjunto, onde mais uma vez tirámos partido dos pontos fixos e autoconjugados pertencentes ao traço horizontal do plano do espelho o qual é um eixo de homologia como já vimos.

Outro exemplo simples de reflectância em perspectiva linear plana, é o reflexo simétrico de uma cúpula poliédrica, de directriz ou base pentagonal, num espelho plano coin-

cidente com o Geometral. Este tipo de reflexos são normalmente conhecidos como “espelho de água”. Como dados de arranque apresentamos a figura, dada em planta e alçado, com a distância de visão  $OO_2=8$ , a altura de visão  $OO_1=4$ , onde a directriz pentagonal maior inscreve-se numa circunferência de raio 7 e o plano de perfil de referência situa-se a 10cm da margem esquerda de uma folha A4 ao alto considerada para o exercício (Figura 37 e Figura 38).

Começámos por determinar a perspectiva da planta do conjunto recorrendo ao método dos traços e pontos de fuga, onde considerámos a intersecção com o quadro perspectico ou plano vertical de projecção, das rectas que contêm as arestas dos dois pentágonos concêntricos e onde, para tal, determinámos também os quatro pontos de fuga das quatro direcções dominantes, os pontos F, F1, F2 e F3, permitindo deste modo determinar a perspectiva da planta. Como o eixo da forma passa pelo centro da planta, logo pertence ao quadro, onde marcámos as três cotas, relativamente às três alturas dos vários vértices da cobertura em causa. Depois de marcada esta escala de alturas e tendo já a perspectiva da planta, foi de determinação fácil a perspectiva da cobertura, recorrendo aos pontos de fuga das quatro direcções dominantes e também ao ponto de fuga das rectas de topo, que coincide com o ponto principal, P. Tratando-se pois de um espelho de nível, que neste caso é o próprio Geometral, não foi necessário determinar o ponto de fuga das rectas perpendiculares ao plano do espelho, uma vez que aquelas têm uma direcção vertical sendo, neste caso, o ponto de fuga das perpendiculares ao plano um ponto impróprio. Assim sendo, para determinar o respectivo reflexo da cúpula poliédrica, bastou considerar as várias distâncias dos pontos ao plano Geometral e duplicar essas distâncias para baixo do espelho, o mesmo é dizer que marcámos essas distâncias-reflexos a partir da planta, sendo esta o lugar geométrico dos pontos igualmente afastados da forma e do respectivo reflexo.

Vejamos agora o exemplo de um espelho de rampa, que produz efeitos de uma grande profundidade e agudez nas formas representadas, na medida em que apresenta uma determinada inclinação em relação ao Geometral, dando-nos a sensação de estarmos a operar com o mesmo sob uma determinada inclinação, ou então que mais parece es-

tarmos na presença de um quadro de rampa oblíquo mas com arestas paralelas ao mesmo plano Geometral (**Figura 39**). Este exemplo do plano de rampa cria de facto a sensação de estarmos a operar com o quadro inclinado, sendo um dos caminhos possíveis para se obterem efeitos de uma grande agudez e profundidade, um pouco como se pode ver nos diagramas de determinadas arquitecturas perspectivadas igualmente com grande profundidade e agudez do flamengo Jan Vredeman de Vries. Este tipo de efeitos criados em espelhos inclinados, como os planos de rampa, ao que parece, foram bastante importantes para autores como Giulio Romano e antes ainda muito possivelmente pelo próprio mestre deste artista Rafael Sanzio, que se serviram destas superfícies especulares, embora empiricamente, para realizar os estudos necessários para determinados *trompe l'oeils* ilusionísticos no palácio Tè em Mântua, na questão do prolongamento de arquitecturas virtuais. Assim testemunham os escritos de Cristofore Sorte e é uma possibilidade bastante consistente também defendida por Martin Kemp (SORTE, 1584; BARROCHI, 1962: pp.297-298; KEMP, 1994:pp.83-84; TRINDADE, 2008:pp.867-874).

Para o desenho deste exemplo, considerámos um referencial perspectico com uma distância de visão  $OO_2 = 13$  e uma altura de visão  $OO_1 = 6$ , onde determinámos o reflexo de um prisma hexagonal num espelho de rampa  $\delta$ . O prisma tem de altura **11,51mm** e uma das bases hexagonal, a de cota mais baixa, tem um vértice pertencente ao plano vertical ou perspectico, pertencendo duas das arestas a rectas de maior inclinação do plano  $\alpha$  que contém a referida base inferior que se inscreve numa circunferência de raio 6. O plano  $\alpha$  está determinado pelos seus traços, dados já em perspectiva,  $ha$  e  $va$ , e que em perspectiva projectam-se à distância de respectivamente 5 e 8 em relação à LT. O plano do espelho  $\delta$ , igualmente de rampa e por esta razão paralelo aos planos e às bases do prisma, dista **0,4** de um dos planos de rampa da base inferior. Tendo nós lançado os dados de arranque da resolução gráfica deste problema, começámos por determinar o ponto de fuga das cordas de arco do rebatimento relativamente ao plano de rampa  $\alpha$ , o ponto **Fc**, e também o ponto de fuga da direcção de rectas perpendiculares ao mesmo plano, o ponto **Fp**, que nos vão possibilitar a determinação das outras arestas do prisma, as

perpendiculares ao plano de rampa do espelho, e também o respectivo reflexo no espelho de rampa  $\delta$ . Para o rebatimento auxiliar e final do centro de projecção considerámos o plano projectante, que contém o centro de projecção  $O$ , perpendicular ao plano de rampa e ao plano do espelho, onde recorreremos ao processo do triângulo do rebatimento.

Assim, considerámos a charneira homológica de  $V\alpha$ , a recta de fuga  $fa$  — que se determinou com o auxílio de uma recta qualquer mas pertence ao plano, como a que se assinala na figura —, para o referido rebatimento do centro de projecção, onde se considerou o respectivo centro, ponto  $Fi$ , que corresponde ao ponto de fuga das rectas de maior inclinação do plano de rampa que contém a base inferior do prisma. Na paralela à charneira, que neste caso se situa sobre a linha do horizonte, e a partir de  $P$ , marcámos a distância de visão considerada, onde o segmento delimitado pelos respectivos pontos extremos,  $Or\ aux.$ , que corresponde ao rebatimento auxiliar do centro de projecção, e  $Fi$ , determinam o raio do rebatimento e também a direcção rebatida auxiliar das rectas de maior inclinação dos planos de rampa, quer das bases do prisma, quer do plano do espelho, pois são todos paralelos entre si. Pelo ponto  $Or\ aux.$ , posteriormente, considerámos o raio visual rebatido perpendicular ao referido raio visual rebatido paralelo às rectas de maior inclinação e a intersecção daquele com o plano projectante considerado e com o quadro permite encontrar o ponto de fuga das perpendiculares, o ponto  $Fp$ . Para a determinação do ponto de fuga das cordas de arco do rebatimento, o ponto  $Fc$ , que coincide com o centro de projecção rebatido, bastou rodar o raio do rebatimento, com centro em  $Fi$ , até intersectar a perpendicular à charneira, que, como sabemos, coincide com os traços do plano projectante que contém o arco do rebatimento. Estamos agora em condições de determinar a perspectiva da base inferior do prisma, construindo o hexágono rebatido a partir da circunferência de raio  $6$  tangente ao traço vertical do plano  $\alpha$  que contém a base. Para o contrarebatimento da base, utilizámos as rectas de maior inclinação que contêm os seis vértices do hexágono, que fugam todas em  $Fi$  e que contêm os traços no plano de rampa  $\alpha$  e também o ponto de fuga das cordas de arco, bastando considerar a intersecção das cordas com as rectas em perspectiva que contêm as arestas

da base para a determinação da perspectiva da base. Depois de determinada a perspectiva da base inferior, pelos passos que descrevemos, a construção da base superior e do reflexo do prisma, de arestas paralelas, foram de fácil determinação, bastando considerar os pontos de fuga das direcções das rectas que contêm as arestas do prisma, pontos  $F_1$  e  $F_2$ , e também o ponto de fuga das perpendiculares aos planos das bases e do espelho, o ponto  $F_p$ , que assim que assim representam uma perspectiva com três pontos de fuga dominantes. Para a marcação das alturas da base superior do prisma, da respectiva distância da base inferior ao plano do espelho e da distância deste último ao prisma reflectido, aos seus pontos e bases que igualmente são paralelas ao plano do espelho — e que pertencem por isso a planos de rampa igualmente paralelos aos referidos, mas cujos traços não foram representados —, considerámos a recta  $i$  perpendicular aos planos referidos, com o respectivo rebatimento e contrarebatimento, que fuga em  $F_p$  e que passa pelo vértice da base inferior, já referido, pertencente ao quadro e ao plano da base inferior.

Noutro exemplo de desenho que ilustra o reflexo de um cubo representado em perspectiva linear plana num espelho plano oblíquo aos dois planos de projecção, horizontal e frontal, que corresponde ao quadro perspéctico (**Figura 40 e Figura 41**), temos outra situação onde assistimos ao efeito de desmultiplicação da forma, que permite visualizar faces primeiramente ocultadas na imagem real à esquerda, o que mostra outra particularidade do efeito dos espelhos, pois os reflexos, como vemos neste exemplo de espelho oblíquo, permitem mostrar partes da forma que estão ocultadas à partida. Podemos observar, neste exemplo, duas representações da mesma forma numa só imagem, enriquecendo-a na sua informação, acerca do seu duplo, ou da sua duplicidade, o que faz nos fazer questionar sobre a própria aparência das coisas, ou da unidade na multiplicidade. No presente exemplo, em termos de imagem, a única informação visual à partida que temos do cubo em termos de contorno aparente é apenas a face  $ABCD$  que oculta todas as restantes cinco, mas curiosamente, com a interposição do espelho oblíquo e do respectivo reflexo deste sólido platónico, na figura representado, a imagem que nos surge mostra-nos agora outras partes que sem o es-

pelho não seriam visíveis, dando-nos uma imagem virtual de uma forma que já parece ser outra mas que não é, é apenas o reflexo. Este exemplo mostra também a curiosidade desta transformação especular originar a perspectiva de uma forma já não apenas construída com dois pontos de fuga dominantes, como acontece com a forma da esquerda e dada à partida, mas agora apresentando-se com três pontos de fuga dominantes, respectivamente os pontos  $F$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , mostrando-nos uma nova imagem e configuração da forma, pelo reflexo resultante no plano oblíquo, que mais parece uma perspectiva de quadro inclinado. É interessante verificar também com este exemplo, de como os espelhos modificam a própria aparência das formas, e mais a mais neste caso em que a obliquidade do espelho parece contrariar, dinamizar e fragilizar a aparência bastante firme do cubo inicial com todas as arestas perpendiculares ao plano Geometral. Estes efeitos especulares na confrontação entre a forma dada e a forma reflectida, onde contrastam os respectivos contornos aparentes, fazem lembrar a dinâmica sugerida pelos efeitos “cubistas” ensaiados pelos modernistas no princípio do século XX.

**46**

Para o desenho deste novo exemplo de uma perspectiva de um cubo e o respectivo reflexo num plano oblíquo, considerámos um referencial perspéctico em que a distância de visão  $OO_2 = 12$  e a altura de visão  $OO_1 = 6$ . Dois pontos, dados pelas suas três coordenadas  $C(-3;4;0)$  e  $E(-11;2;0)$ , definem uma das diagonais da base de um cubo assente no plano Geometral, ou plano horizontal, e pertencente aos Espaços Intermédio e Real e cujo plano oblíquo  $\alpha$  do espelho intersecta a  $LT$  no ponto  $X\alpha(-2;0;0)$  e os seus traços horizontal e vertical,  $h\alpha$  e  $v\alpha$ , fazem, respectivamente com a  $LT$ ,  $48,85^\circ$  e  $65,22^\circ$ , com abertura à direita. A metodologia adoptada para este exercício é de alguma forma semelhante à do exemplo anterior, mas com algumas diferenças. Assim, para a representação perspéctica do cubo, bastou determinar a perspectiva da respectiva base. Como o formato da folha de representação, por nós utilizado, ter dimensões reduzidas, houve uma necessidade inicial de proceder à redução proporcional da distância de visão  $OO_2/2$  num ratio por nós arbitrado de  $\frac{1}{2}$  e por consequência dos pontos de fuga das duas direcções dominantes,  $F$  e  $F_1$ , que se obtiveram a partir de  $F/2$  e  $F_1/2$ . As arestas verticais e de nível

paralelas às da base foram de fácil determinação, utilizando uma escala vertical no ponto de cruzamento da aresta da base  $EH$  com a  $LT$ , onde marcámos a altura do cubo no quadro perspéctico. Com a altura do cubo assim marcada no quadro, fizemos de seguida a transferência das alturas em perspectiva nas quatro verticais que sobem da linha de base, através da intersecção das mesmas com as rectas de nível que convergem para os dois pontos de fuga das duas direcções dominantes,  $F$  e  $F_1$ , onde, por exemplo, os pontos  $F$  (do cubo) e  $G$ , foram conseguidos na intersecção das respectivas verticais que partem de  $E$  e  $H$  com a recta de nível que fuga em  $F_1$ . Para a determinação dos restantes dois pontos da base superior, os pontos  $A$  e  $B$  que completam a base superior do cubo, bastou considerar o outro ponto de fuga  $F$  da outra direcção de arestas do cubo e considerar a intersecção das rectas que nele convergem, que passam por  $F$  do cubo e  $G$ , com as rectas verticais que partem dos pontos  $C$  e  $D$ . Ficou assim determinada a perspectiva do cubo, cujo contorno aparente apenas mostra a única face visível  $ABCD$ .

Depois de desenhados os traços do plano do espelho em perspectiva pelo método directo, procedemos à determinação do respectivo ponto de fuga das perpendiculares  $F_p$ , que como sabemos é o ponto de convergência das rectas que irão conter os pontos que modelam o cubo reflectido. Para tal, considerámos o rebatimento auxiliar do plano do espelho  $\alpha$ , recorrendo ao plano projectante  $\delta$  que lhe é perpendicular e que contém o centro de projecção, sendo por isso o plano que contém o arco do rebatimento do centro de projecção, embora não haja, neste caso, necessidade de rebater o centro de projecção na totalidade, mas apenas o rebatimento auxiliar, o ponto  $Or_{aux}$ . Assim, a partir de  $P$ , traçamos os traços desse plano  $\delta$  do arco de rebatimento perpendicular ao plano  $\alpha$  e considerámos a respectiva intersecção com a charneira homológica  $f\alpha$ , onde se determinou o centro do rebatimento que corresponde ao ponto  $Fi$ , ponto de fuga das rectas de maior inclinação do plano  $\alpha$ ; na paralela à charneira homológica referida a partir de  $P$ , considerámos a medida da distância de visão determinando assim o rebatimento auxiliar do centro de projecção. O segmento delimitado pelos pontos  $Fi$  e por  $Or_{aux}$ , para além de corresponder ao raio do rebatimento, determina o raio visual rebatido auxiliar paralelo às rectas de maior

inclinação do plano  $\alpha$ , bastando assim traçar pelo mesmo ponto **Or aux.** outro raio visual rebatido auxiliar perpendicular àquele referido, que intersecta o plano perspectico e os traços do plano projectante  $\delta$  do arco do rebatimento, precisamente no ponto de fuga das perpendiculares procurado, ou seja no ponto **Fp**.

Estamos agora em condições de determinar o reflexo do cubo no espelho oblíquo, onde se começou por determinar a imagem especular do pontos **C** que é quase suficiente para que se determine o reflexo dos restantes pontos, recorrendo para isso às relações homológicas entre os pontos do cubo e os respectivos pontos reflectidos ou homólogos. Para a determinação do reflexo do ponto **C**, considerámos a perpendicular que passa nesse ponto, determinando o respectivo ponto **I** de intersecção com o plano do espelho oblíquo, através do recurso a um plano vertical auxiliar  $\theta$ . Este plano, contendo a perpendicular **p** intersecta o plano oblíquo segundo a recta **i** que por sua vez intersecta a perpendicular **p** no ponto **I** procurado. Uma vez que a distância do ponto **C** ao ponto **I** será igual à distância deste ao ponto **C** reflectido, ponto **CI**, tivémos que para efectuar esta marcação, necessidade de efectuar o rebatimento da recta perpendicular ao plano do espelho, o que foi possível rebatendo o plano  $\theta$  que a contém, pelos métodos por nós já conhecidos. Determinando o ponto **CI** reflectido, recorrendo ao contrarebatimento com o auxílio do ponto de fuga das cordas de arco do plano  $\theta$ , foi possível posteriormente por homologia determinar o reflexo do ponto **D**, considerando, para tal, a recta pertencente ao Geometral que contém os pontos **C** e **D** e sua intersecção com o traço horizontal do plano **ha** — que pode ser considerado um eixo de homologia —, que corresponde ao ponto fixo de homologia, ponto **M**. Unimos posteriormente este ponto ao ponto **CI** e assim determinámos o reflexo da recta que contém a aresta **CD** da base do cubo que está assente no Geometral, permitindo, deste modo, determinar o reflexo **DI** do ponto **D**, considerando a perpendicular que passa neste último e sua intersecção com a recta referida recta reflectida, não designada na figura. Para a determinação do reflexo dos restantes pontos não só da base como do restante cubo recorreremos igualmente às relações homológicas entre os vários elementos (vide novamente a **Figura 31**).

Assim, por exemplo, para a determinação do reflexo EI, consideramos uma das duas diagonais da base do cubo, a que passa por E e C, e a respectiva intersecção com o mesmo eixo de homologia  $h\alpha$ , determinando assim outro ponto fixo, não designado na figura, mas apenas assinalado a vermelho, que uma vez unido ao reflexo do ponto C, o ponto CI, permite encontrar o ponto EI, reflexo do ponto E, pela intersecção da diagonal reflectida, que passa no referido ponto fixo com a recta perpendicular ao espelho que passa em E e que fuga em Fp. Para a determinação dos restantes pontos reflectidos procedeu-se de igual modo. Dando como último exemplo, a determinação do ponto BI, que corresponde ao ponto B reflectido, considerámos a recta vertical que contém a aresta BC do cubo e a sua intersecção com o plano oblíquo, no que resulta o ponto L, que é também um ponto fixo. Unimos posteriormente este ponto fixo L ao ponto CI que já tínhamos determinado anteriormente e considerámos a respectiva intersecção com a perpendicular ao plano do espelho que passa no ponto B, permitindo deste modo encontrar o reflexo do ponto B, o ponto BI. Os restantes pontos determinaram-se de forma semelhante. É interessante notar, como mostra a imagem, que o reflexo do cubo no plano oblíquo do espelho apresenta uma nova perspectiva com três pontos de fuga dominantes, F, F1 e F2, o que demonstra que a transformação da forma através da reflexão especular gera outras vistas e perspectivas daquela, revelando pormenores que à partida estavam ocultos pelo contorno aparente da forma inicial. Este cubo podia ser a forma geométrica circunscrita a outras mais complexas e que podiam conter partes curvas, pode ser assim uma estrutura auxiliar que permite o desenho de outras formas. Deste modo, se imaginarmos uma inscrição no cubo de uma forma mais complexa, os efeitos geradores da reflexão poderiam mostrar formas e imagens ainda mais curiosas, dependendo do referente ali colocado.

## 6. DO ENQUADRAMENTO DE UMA LIÇÃO

### 6.1. Um exercício abrangente

Em todas as obras ou tratados de geometria dos autores de referência atrás referidos no capítulo três, não encontramos exemplos de problemas de representação de reflexos de formas em perspectivas de quadro inclinado, ou com os objectos oblíquos ao quadro perspéctico. Essa foi também e essencialmente a razão pela qual decidimos apresentar aqui um problema em jeito de exercício que ilustrasse um exemplo do segundo tipo. No entanto, importa lembrar que Cristina Candito, da Universidade de Génova, já ensaiara também alguns exemplos de reflexos de formas inclinadas ou resolvidas em quadro inclinado, em resoluções semelhantes às de perspectivas de objectos e conjuntos oblíquos ao quadro perspéctico e ao geometral, plano de terra, ou plano horizontal (CANDITO, 2010).

50

Damos agora como exemplo a lição do seminário das nossas Provas de Agregação que apresentámos no dia 29 de Abril de 2022. A lição enquadra-se numa das temáticas do desenho geométrico em representação perspéctica mais interessantes porque os efeitos do problema anunciado têm muita aplicação e visibilidade nas artes visuais e plásticas, na medida em que, como sabemos, os espelhos mostram outras imagens ou a multiplicidade das imagens ou dos referentes, ilustradas precisamente pelos respectivos reflexos. Mesmo no desenho empírico, à vista, muitas vezes surgem situações em que surgem espelhos nas representações e com a assimilação dos métodos e do conhecimento da perspectiva e da respectiva memória mais facilmente os alunos evitam os erros na representação. A abordagem do desenho geométrico dos espelhos e da reflectância em espelhos planos em perspectiva linear situa-se ou enquadra-se na parte final do segundo semestre do primeiro ano da licenciatura de desenho, na unidade curricular de Geometria: perspectiva II e depois no mestrado de desenho, na unidade curricular de Métodos de Representação Rigorosa, onde são realizados exercícios mais exigentes. A determinação de reflexos em perspectiva geométrica envolve,

para além das leis da óptica e da reflectância, já atrás assinaladas na secção 2, outros conhecimentos, outros tópicos programáticos e métodos operativos que antes são divulgados aos alunos em outras aulas teóricas. Assim é importante adquirir o conhecimento dos métodos dos rebatimentos em perspectiva e das homologias, bem como o de compreender a teoria de perpendicularidade entre rectas e planos.

## **6.2. Um caso particular da representação perspéctica do reflexo num espelho de perfil de uma estrutura cúbica iluminada por uma luz direcciona**

O tema do exercício centra-se num caso específico da representação, em perspectiva linear, do reflexo num espelho de perfil de uma forma geométrica modelada por dezasseis cubos, tal como se indica na **Figura 42** e na **Figura 43**, numa representação axonométrica-isométrica e numa representação em 3D. A forma em perspectiva linear é oblíqua ao quadro perspéctico e ao geometral e iluminada por uma fonte de luz direcciona. Na primeira parte do problema determinamos a perspectiva do conjunto, partindo da representação de um primeiro cubo que tem como face o quadrado **ABCD**. Para esta operação da construção daquela face aplicámos métodos relativos a rebatimentos. Para fecharmos esse primeiro cubo aplicámos depois os métodos inerentes ao paralelismo e perpendicularidade no sistema de perspectiva linear. O cubo e a forma que ele gera apresenta três pontos de fuga dominantes de três direcções ortogonais entre si, designados por **F1**, **F2** e **F3**, como veremos mais adiante. Depois de determinado e representado esse primeiro cubo procedemos em seguida à representação da forma, juntado os 15 cubos restantes que compõem a forma final. Para este efeito e para a representação da forma (**Figura 42** e **Figura 43**), consideraram-se as diagonais das faces dos respectivos cubos geradores que por serem todas paralelas têm deste modo os mesmos pontos de fuga. As diagonais e a respectiva intersecção com as linhas fugantes de três direcções perpendiculares entre si, que convergem nos respectivos três pontos de fuga dominantes permitem fechar e encontrar a forma desejada. Depois de representada a perspectiva da forma, procedemos à determinação e à representação das sombras produzidas: das sombras próprias, das sombras autoprojectadas e das sombras projectadas pelo objecto no plano definido pelas

faces inferiores dos cubos que se situam mais abaixo e que é um plano de rampa. Os efeitos aparentam-se aos que verificamos nas perspectivas de quadro inclinado. No entanto, neste exemplo não é o quadro que se inclina mas sim o objecto em relação a ele e ao Geometral, plano de terra. Para tal e para dar mais expressão ao objecto a perspectivar, considerou-se uma fonte luminosa direccionada, representada pelo respectivo ponto de fuga, que seleccionámos para o efeito. Por fim, representamos o reflexo, num espelho de perfil, do conjunto da forma e das sombras produzidas.

### **6.3. Objectivos do exercício proposto**

A lição do exercício proposto tem como objectivo preparar os alunos para saber representar rigorosamente reflexos de formas e objectos em perspectiva, mas sobretudo de os saber representar em situações em que se posicionam obliquamente em relação ao quadro perspéctico e ao Geometral, ou seja, em perspectivas com três pontos de fuga. Representar formas e objectos em perspectiva assentes no Geometral, ou no plano horizontal, é relativamente simples, pois as perspectivas normalmente apresentam pontos de fuga de direcções de nível situados na linha do horizonte. De igual modo também é simples representar sombras e reflexos nestas situações, bastando aplicar o teorema de Tales e as homologias para o caso dos reflexos. Nestes casos o rebatimento reduz-se ou aplica-se à simples determinação do ponto de fuga das perpendiculares ao plano do espelho. A partir do momento que os objectos se tornam oblíquos quer ao quadro perspéctico, ou plano frontal ou vertical de projecção, quer ao Geometral, ou plano horizontal, também conhecido por plano de terra, os problemas ficam um pouco mais complexos porque envolvem mais traçado e operações geométricas, obrigando a aplicar com mais insistência outros métodos como os rebatimentos e as leis geométricas do paralelismo e da perpendicularidade entre rectas e planos em perspectiva. Por outro lado, a nosso ver, as perspectivas com três pontos de fuga, que não os das direcções de nível, mostram objectos muito mais expressivos do ponto de vista visual, pois apresentam situações de profundidade de três direcções dominantes ortogonais entre si. A lição e o problema exposto obrigam o aluno a rever os tópicos programáticos que são anunciados

e divulgados em aulas anteriores, como a questão dos rebatimentos, das homologias e da perpendicularidade entre rectas e planos, para além das leis da reflectância conjugadas com a perspectiva que já vimos atrás na secção 2.

#### **6.4. Conteúdos no exercício proposto**

A lição proposta envolve os seguintes conteúdos, a saber: rebatimentos com o método da determinação do ponto de fuga das cordas de arco; rebatimento do centro de projecção, observador, considerando o teorema atribuído a Tales, e o princípio de que dois segmentos perpendiculares existem numa semicircunferência; paralelismo e perpendicularidade entre rectas e planos, com a determinação e consideração das rectas de fuga ou do infinito de uma orientação de planos paralelos entre si e também a determinação do ponto de fuga de uma direcção de rectas perpendiculares a uma orientação de planos dada; as homologias ou correspondências homológicas, que trazem à memória o teorema de Desargues, que se verificam não só nos rebatimentos e contra-rebatimentos dos elementos das formas, em perspectiva e em verdadeira grandeza, como também nas correspondências homológicas entre a forma e as suas sombras produzidas e a forma espelhada ou reflectida que inclui as sombras, onde para tal também verificamos eixos de homologia; a questão das sombras, considerando o ponto de fuga de uma determinada direcção luminosa; e as leis e princípios da reflectância, já assinaladas na secção 2, relacionadas ao caso da perspectiva geométrica.

53

#### **6.5. Metodologia na lição do exercício proposto**

Para a descrição da lição proposta escolhemos em termos didáctico-pedagógicos apresentar todas as fases e etapas do problema com as respectivas descrições acompanhadas das respectivas imagens, mostrando os passos do problema até chegar à solução final. Para o efeito, escolhemos para exposição dessas fases e etapas do problema com a respectiva descrição o *software* do *power point*. Para os desenhos assistidos por computador, de nossa autoria, incorporados no *power point* e nesta apresentação da aula, utilizámos também o *software Autodesk 10* e o *software Google SketchUp*. Chegámos a pensar em apresentar o problema desenhando directamente e à mão levantada, num

quadro branco ou de ardósia com recurso ao vídeo, mas o rigor formal e da apresentação não seria o mesmo, razão pela qual optámos por esta via.

## **6.6. Descrição detalhada da lição do exercício proposto**

### **Dados do problema-exercício**

Pretende-se numa primeira fase determinar a perspectiva linear em quadro plano, da forma cúbica, modelada por dezasseis cubos, que se representa na **Figura 42** já indicada. Numa segunda fase pretende-se representar as sombras produzidas por uma determinada direcção luminosa, representada pelo respectivo ponto de fuga, no plano de rampa inclinado da base da forma. Finalmente numa terceira fase pretende-se determinar o reflexo do conjunto e das respectivas áreas iluminadas e em sombra num espelho de perfil. O problema-exercício é para ser resolvido num suporte ou numa folha de **formato A0** com a folha ao baixo, ou considerando a medida maior para baixo. O perspectógrafo, conjunto de planos que compõem o referencial do sistema, é o que temos vindo a utilizar com abundância na unidade curricular de Métodos de Representação Rigorosa do Mestrado de Desenho e também nas unidades curriculares de Geometria: perspectiva I e Geometria: perspectiva II das licenciaturas de Desenho e de Pintura. Ele é composto pelo plano frontal ou quadro perspectivo  $\varphi_0$ , pelo plano Geometral, plano de terra ou plano horizontal  $\vartheta_0$ , pelo plano do horizonte  $\vartheta_1$ , pelo plano neutro ou de desvanecimento  $\varphi_1$  e pelo plano de perfil de referência  $\omega_0$ . Como sabemos, o plano horizontal, o plano frontal e o plano de perfil de referência correspondem aos planos coordenados do sistema axonométrico.

Considerou-se o plano de perfil de referência onde se situa o centro de projecção **O** a **30 cm** da margem esquerda da folha **A0** ao baixo e a Linha de Terra, **LT**, a **40 cm** da margem inferior da mesma folha. A altura de visão  $OO_1$ , distância do centro de projecção, observador, em relação ao Geometral é de **9 cm** e a distância de visão  $OO_2$  do centro de projecção, observador, em relação ao plano frontal ou quadro perspectivo é de **11 cm**. São também dados do problema-exercício: a diagonal **AC** de perfil e de maior inclinação, que mede **6cm**, da face **ABCD** de um dos cubos,

assinalada na **Figura 42**, que pertence a um **plano de rampa  $\alpha$**  que faz  $20^\circ$  com o plano horizontal, ou geometral, e as coordenadas do ponto  $A(-8;0;4)$ , da diagonal que pertence ao traço vertical ou frontal  $V\alpha$  do **plano  $\alpha$**  que contém a referida face. O ponto C da diagonal AC pertence ao  $1^\circ$  quadrante e ao espaço intermédio entre o plano frontal e o plano neutro, ou de desvanecimento, que contém o centro de projecção, observador.

Para a segunda parte do exercício foi dada uma direcção luminosa oblíqua em relação ao quadro perspectico e ao Geometral, representada pelo respectivo ponto de fuga **Fl** que foi considerado à **distância 14** para a direita do plano de perfil do observador e à **distância 16** da linha do horizonte. Pretende-se nesta segunda fase, a partir da direcção luminosa representada por **Fl**, determinar as sombras produzidas no conjunto da forma, como são as respectivas sombras próprias, as sombras próprias interior projectadas e as sombras produzidas pela forma no plano da base da mesma, que é um plano de rampa paralelo ao plano da face ABCD que pertence ao primeiro cubo gerador da forma final. Este plano de rampa que funciona como uma espécie de solo ou chão inclinado, onde assenta a forma total, está, como se verifica na **Figura 42** e na **Figura 43**, a uma distância equivalente à altura de três cubos.

Por fim, para a determinação da perspectiva dos reflexos do conjunto da forma e das respectivas sombras considerou-se um espelho de perfil colocado à **distância de 15cm** do plano de perfil de referência que contém o centro de projecção, observador.

### **Determinação da perspectiva do conjunto**

A primeira operação a realizar no problema foi a marcação do perspectógrafo, marcando as projecções ortogonais do centro de projecção O, a Linha de Terra LT e a Linha do Horizonte. Depois passámos à construção do primeiro cubo gerador da forma a partir da respectiva face ABCD (**Figura 44**). Para representar esta primeira face, começámos por determinar a perspectiva do ponto A que por ter afastamento nulo pertence automaticamente ao quadro perspectico. Pelo ponto A considerámos a recta de perfil e de maior inclinação do plano  $\alpha$  da face superior ABCD do primeiro cubo, que contém a diagonal AC da referida face. Para a marcação da recta de perfil e de maior inclinação que contém a diago-

nal AC, considerámos a passar pelo ponto A, que coincide com o próprio ponto rebatido uma vez que está no quadro perspéctico, essa recta que foi rebatida para o lado esquerdo e onde podemos ver o ângulo de  $20^\circ$  que faz com LT, Linha de Terra. Ao mesmo tempo considerámos o plano de perfil que contem o centro de projecção e rebatemo-lo para o mesmo lado esquerdo rebatendo o centro de projecção O, determinado assim um primeiro rebatimento auxiliar do centro de projecção Or.aux. A partir de Or.aux. conduzimos um raio visual rebatido paralelo à recta de perfil e de maior inclinação rebatida, fazendo igualmente  $20^\circ$  com a Linha de Terra e também com o Geometral e o plano do horizonte. Esse raio visual intersecta o plano de perfil de referência que contem o centro de projecção O no ponto de fuga Fi das rectas de maior inclinação do plano e que é o ponto de fuga da recta que contem a diagonal AC, ou seja, é o ponto de fuga da própria diagonal AC e de todas as outras que lhe são paralelas, pertencentes todas a planos que convergem na recta do infinito, ou de fuga f. Este primeiro rebatimento auxiliar do centro de projecção Or.aux. permitiu ao mesmo tempo mais duas operações importantes: a primeira, o rebatimento definitivo do observador OR, relativamente ao plano da face do quadrado, que é ao mesmo tempo o ponto de fuga Fc das cordas de arco do rebatimento do plano  $\alpha$ , utilizando como charneira a recta de fuga do plano de rampa  $\alpha$ , ou seja, a recta f, onde para tal utilizámos o método do triângulo do rebatimento, sendo Fi o centro do rebatimento; e a segunda, a determinação do ponto de fuga das perpendiculares F3 ao plano da face ABCD, considerando o raio visual rebatido partindo de Or.aux. e perpendicular ao raio visual rebatido, segmento Or.aux.Fi, paralelo às rectas de perfil e de maior inclinação rebatidas. A intersecção deste segundo raio visual com o quadro perspéctico  $\phi\phi$  é o ponto de fuga das perpendiculares ao plano de rampa da face ABCD e a todos os outros planos que lhe são paralelos. Depois destas operações, considerámos o quadrado da face ABCD rebatido para baixo da charneira Va, que se traçou a partir de A que coincide com o seu próprio rebatimento, o que foi fácil desenhar em verdadeira grandeza uma vez que a medida da diagonal mede 6cm, enunciada no início do problema. Depois desta operação contra rebatemos o quadrado, com o auxílio do ponto de fuga das cordas de arco e

da perspectiva da recta de perfil que contem a diagonal AC. Para tal bastou contra rebater o ponto C, colocando-o em perspectiva, através da intersecção da perspectiva da recta de perfil, ou de maior inclinação, com a perspectiva da corda de arco que passa em CR. Depois deste rebatimento procedemos ao contra-rebatimento dos restantes pontos do quadrado, através do contra-rebatimento do respectivo centro M e dos outros dois pontos B e D que determinam a outra diagonal BD perpendicular à primeira AC e paralela à Linha do Horizonte. Ficou assim determinada e representada a perspectiva da face ABCD da face superior do primeiro cubo. Prolongando os lados AB e AD da face para a recta de fuga  $f\alpha$  do plano de rampa, determinamos os respectivos pontos de fuga F1 e F2 das arestas do cubo. Estão encontrados assim os três pontos de fuga dominantes da perspectiva do conjunto, F1, F2 e F3.

Para determinar e fechar este primeiro cubo que é o elemento ou módulo que gera os quinze cubos restantes que modelam a forma total já visualizada em axonometria e em 3D (Figura 42 e Figura 43) recorreremos a diagonais. Assim, considerámos o auxílio de uma das duas direcções de diagonais das faces quadradas dos cubos pertencentes a planos perpendiculares ao plano  $\alpha$  e sua intersecção com as arestas daqueles sólidos que convergem em F3, pois sabemos que elas fazem  $45^\circ$  com as arestas dos cubos. pelo que bastou determinar os pontos de fuga dessas direcções de diagonais. Para tal, procedemos a um segundo rebatimento do centro de projecção, para o lado direito, considerando como charneira a recta de fuga de uma das duas orientações de planos, perpendiculares ao plano da face ABCD, neste caso da orientação e da recta de fuga  $f1$  definida por F3 e F14. Este rebatimento possibilitou-nos encontrar o ponto de fuga Fd de uma das duas direcções de diagonais dos cubos que modelam a forma total, considerando para isso o raio visual rebatido paralelo a uma das

4 Para este segundo rebatimento do observador, considerámos o princípio atribuído a Tales de que dois segmentos perpendiculares existem numa semicircunferência. Deste modo, pelo ponto médio do segmento definido pelos pontos de fuga F1 e F2, desenhámos a semicircunferência com raio igual à distância do referido ponto médio aos pontos de fuga. Bastou depois considerar a perpendicular à charneira  $f1$  que parte do ponto principal P e a respectiva intersecção com o arco da semicircunferência, determinando assim o segundo rebatimento do centro de projecção O.

duas direcções das diagonais rebatidas dessas faces laterais perpendiculares ao plano da face **ABCD** e a respectiva intersecção com a recta de fuga determinada por **F3** e **F1**. Esse raio visual rebatido paralelo a uma das duas direcções das diagonais rebatidas que fazem  $45^\circ$  com as arestas das faces do cubo é também a bissectriz do ângulo dos raios visuais rebatidos das duas direcções perpendiculares entre si que convergem em **F1** e **F3**, ou seja, das direcções das arestas das faces que convergem naqueles pontos de fuga. Bastou então prolongar esse raio visual rebatido, bissectriz dos outros dois, e fazer a intersecção com a recta de fuga **f1** para encontrarmos o ponto de fuga dessa direcção de diagonal **Fd**. Com a obtenção deste ponto de fuga das diagonais **Fd** mais os outros três pontos de fuga dominantes já encontrados **F1**, **F2** e **F3** conseguimos não só fechar o primeiro cubo que acaba por ser o elemento gerador da forma total, como dos restantes quinze cubos que completam a forma (**Figura 44**).

**58**

Para fecharmos os restantes quinze cubos que faltam para completar a forma pretendida (**Figura 42**), de referir ainda que também nos servimos do ponto de fuga de uma das duas direcções de diagonais das faces dos cubos com orientação na recta de fuga **f2**, definida por **F2** e **F3**, ou seja, o ponto de fuga **Fd1**. Assim, a intersecção das rectas que contêm todas as arestas do primeiro cubo de face **ABCD** com uma série de diagonais paralelas convergindo umas em **Fd** e outras em **Fd1**, possibilitaram-nos multiplicar o número de cubos e consequentemente conseguir a forma representada em perspectiva, que neste caso apenas é modelada por 16 cubos. As operações geométricas de todas estas fases ou passos necessários à resolução desta primeira parte do problema-exercício, para encontrar a perspectiva do conjunto, que acima descrevemos, representa-se na **Figura 45** onde podemos observar a forma completa em perspectiva, ainda sem sombras e reflexos.

### **Determinação das sombras do conjunto da forma representada**

Depois de determinada a perspectiva da forma, procedemos à determinação das várias sombras pretendidas: da sombra própria, da sombra própria interior projectada e da sombra projectada do conjunto da forma sobre o plano de rampa da respectiva base, que é paralelo aos planos

de rampa das faces superiores da forma e cujo distância ao plano da face **ABCD** do primeiro cubo gerador é o equivalente à altura de dois cubos (**Figura 46**). Para tal, como já referimos nos dados do problema, considerámos uma direcção luminosa representada pelo ponto de fuga **Fl**, considerado à **distância 14** para a direita do plano de perfil do observador e à **distância 16** da linha do horizonte. Trata-se assim de uma direcção luminosa oblíqua. Sabendo nós que os planos rasantes luz-sombra ficam determinados por duas direcções: das arestas que convergem em **F3** e das arestas que convergem em **Fl**, então a recta de fuga ou do infinito do plano definida por aquelas duas direcções, recta **fõ**, fica determinada por aqueles dois pontos de fuga. Ao mesmo tempo, como sabemos que as sombras projectadas no plano de rampa da base têm a mesma direcção das rectas de intersecção dos planos rasantes luz-sombra com o plano da base de rampa e sendo essas direcções das sombras projectadas paralelas às próprias arestas da forma que as produzem, então os respectivos pontos de fuga dessas direcções, quer das sombras, quer das arestas são os mesmos. Neste exercício em particular, tirámos partido da intersecção da recta de fuga **fa** do plano da base de rampa com a recta de fuga dos planos rasantes luz-sombra **fõ**, ou seja no ponto de fuga **FLi**. Deste modo, as projecções de todos os raios luminosos no plano do solo inclinado de rampa convergem ou fugam em **FLi**, ponto de fuga determinado e situado na intersecção da recta de fuga **fa** do plano de rampa da base, que representa uma espécie de solo inclinado onde assenta o conjunto, com a recta de fuga **fõ** dos planos luz-sombra rasantes, determinada por **F3** e **Fl** (**Figura 13**).

Para se determinarem as sombras dos vários pontos da forma basta então considerar os raios luminosos que por aqueles passam, que fugam em **Fl**, e sua intersecção com o plano de rampa inclinado que corresponde ao solo, servindo-nos também e obrigatoriamente da respectiva projecção desses raios luminosos em perspectiva no plano do solo inclinado que fugam em **FLi** e também da projecção dos pontos de sombra da forma nesse mesmo plano do solo inclinado. Os pontos de sombra determinam-se considerando a intersecção dos raios luminosos com a respectiva projecção dos mesmos no plano de rampa inclinado do solo. Ao mesmo tempo, como as arestas da forma são

paralelas ao plano da base onde se projecta a sombra projectada e sendo as arestas paralelas às próprias sombras, servimo-nos assim também dos pontos de fuga dessas três direcções para desenhar com rigor as sombras projectadas, não apenas na base como também na própria forma (Figura 46, Figura 47, Figura 48 e Figura 49).

### **Determinação do reflexo do conjunto num espelho de perfil**

Para a determinação dos reflexos do conjunto e das respectivas sombras considerámos um espelho de perfil  $\pi$  situado a 15cm para a direita do plano de perfil do observador, tal como já anunciámos nos dados do problema. Na determinação destes reflexos também não considerámos o reflexo da luz devolvida pelo espelho reflector, mas apenas o reflexo das formas no espelho considerado. É aqui que também se aplicam as relações homológicas dos elementos, no caso, da forma com o seu próprio reflexo. Assim, sabendo e considerando nós que a forma assenta no plano de rampa da respectiva base, então a intersecção desse plano com o plano do espelho vai determinar uma recta  $i$  que será fundamental para o desenvolvimento desta parte final do problema. Essa recta  $i$  de intersecção do plano de rampa da base da forma com o plano do espelho  $\pi$  é um eixo de homologia que será fundamental para a prossecução do exercício-problema, uma vez que é ele que permite e conduz a reflectância da base da forma do conjunto e a partir desta base reflectida determinamos posteriormente o reflexo de toda a forma do conjunto. Assim é imprescindível a sua determinação pelo que o temos de considerar obrigatoriamente. A partir da base da forma reflectida posteriormente determinamos os restantes reflexos com o auxílio dos pontos de fuga dominantes da forma do conjunto e das perpendiculares ao plano do espelho que são rectas de frente-nível uma vez que o espelho é de perfil (Figura 50). Para a determinação desta recta  $i$  é necessário encontrar os traços do plano da base do conjunto da forma, que designamos de plano  $\alpha_1$ , que consideramos como sendo o plano do solo que, como já referimos, está situado à distância equivalente à altura de dois cubos, para baixo do plano da face ABCD.

Os traços desse plano foram obtidos com o auxílio de um ponto  $W$  situado numa recta de perfil contendo o pon-

to A, perpendicular ao plano de rampa da face ABCD e à distância de duas arestas do cubo ao mesmo ponto A. Para tal considerámos a dupla projecção ortogonal para encontrar esse ponto, considerando o rebatimento naquele sistema, para a esquerda, da recta de maior inclinação  $\mathbf{i}\alpha$  que contem o ponto A. A partir do ponto A, que coincide com o próprio rebatimento, considerámos em dupla projecção ortogonal, com o auxílio do rebatimento neste sistema, da recta perpendicular ao plano de rampa  $\alpha$  da face que o contém e marcámos nesta o ponto W, à distância correspondente a duas vezes a medida da aresta do módulo cúbico. Este ponto W está situado sobre o solo inclinado de rampa. Depois de determinarmos o seu rebatimento WR, contra rebatemo-lo. Determinámos por conseguinte a perspectiva desse ponto W com o auxílio do método directo ou dos raios visuais. Posteriormente, a partir do ponto W, já em perspectiva, considerámos uma recta auxiliar r, no caso de perfil, paralela ao plano da face ABCD, cujo ponto de fuga está na recta de fuga do plano  $\alpha$  de rampa daquela face, que é a mesma recta de fuga do plano  $\alpha 1$  que corresponde ao solo inclinado e que contem a recta r. Considerada e desenhada esta recta r de perfil, bastou agora determinar os respectivos traços onde apenas considerámos o traço vertical, ou frontal, Vr e o traço do infinito ou ponto de fuga Fr. Estes dois traços foram suficientes para traçarmos agora o traço vertical ou frontal do plano  $\alpha 1$ , igualmente de rampa e paralelo a  $\alpha$ .

Determinado o traço vertical  $V\alpha 1$  do plano  $\alpha 1$ , paralelo a  $V\alpha$ , cuja recta de fuga ou do infinito é a mesma do plano  $\alpha$ , por serem planos paralelos, de seguida procedemos à intersecção deste plano com o plano  $\pi$  do espelho de perfil, recorrendo à intersecção das respectivas rectas do infinito e dos respectivos traços verticais ou frontais, obtendo o traço do infinito Fi e o traço frontal ou vertical Vi, que permitiram representar graficamente a recta i. Está assim determinada a recta de intersecção i que vai ser um dos eixos de homologia dos pontos e rectas da forma em perspectiva com os respectivos pontos e rectas reflectidas em perspectiva (Figura 50). Neste caso a recta i é o eixo de homologia dos pontos da base da forma em perspectiva situados no solo ou no plano  $\alpha 1$  com os respectivos pontos reflectidos no espelho de perfil, plano  $\pi$ . Este eixo, recta i, permite de-

terminar todos os reflexos no espelho de perfil de todos os pontos e elementos da base da forma do conjunto pertencentes ao solo ou ao plano  $\alpha_1$ , considerando também as perpendiculares ao plano do espelho que por ser de perfil são rectas de frente-nível. A partir daqui a determinação dos reflexos dos pontos e dos elementos da forma situados acima da base torna-se mais simples, bastando recorrer às rectas perpendiculares ao plano do espelho que passam por aqueles pontos da forma em perspectiva e sua intersecção com as arestas que se apoiam na base reflectida e que convergem nos três pontos de fuga dominantes,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ .

Como o espelho é de perfil, as rectas que lhe são perpendiculares e que contêm os pontos em perspectiva do conjunto e os pontos do conjunto reflectidos, são como já referimos rectas fronto-horizontais ou rectas de frente-nível, paralelas à linha do horizonte  $LH$  e à linha de terra  $LT$ . Desta forma, não houve necessidade de determinar o ponto de fuga das perpendiculares ao plano do espelho, que seria necessário caso o espelho não estivesse nesta posição de perfil.

62

Uma vez determinado e representado o plano do espelho de perfil  $\pi$ , prosseguimos agora com a determinação dos reflexos de todo o conjunto servindo-nos da recta  $i$  de intersecção do plano do espelho  $\pi$  com o plano da base onde assenta a forma, plano  $\alpha_1$ , dos três pontos de fuga dominantes,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  e ainda das rectas perpendiculares ao plano do espelho, paralelas à linha do horizonte, que são rectas de frente nível uma vez que neste caso o respectivo ponto de fuga é um ponto impróprio. Assim, começámos por determinar os reflexos da base da forma e da sombra projectada pela forma no solo de rampa inclinado, assentes e pertencentes ambas ao plano  $\alpha_1$ . Bastou para isso, conduzirmos rectas pelos pontos dessas áreas, perpendiculares ao plano do espelho, e considerar a sua intersecção com a recta  $i$  obtendo desta forma os segmentos das distâncias desses pontos ao plano do espelho. Depois da marcação e determinação destas distâncias, bastou duplicar as mesmas para o lado direito do espelho, a partir da recta  $i$ , obtendo desta forma os reflexos pretendidos de todos os elementos pertencentes ao plano da base  $\alpha_1$ . Para o traçado destas linhas nesta fase do exercício, ainda considerámos os pontos de fuga  $F_1$  e  $F_2$  como lugares de

convergência de algumas rectas reflectidas (**Figura 51**). Por fim, para a determinação dos reflexos dos restantes pontos e dos elementos da forma, mais elevados sobre a base situada no plano  $\alpha_1$ , bastou conduzir a partir dos homólogos em perspectiva da própria forma linhas perpendiculares ao plano do espelho, rectas de frente-nível, e proceder à respectiva intersecção com as rectas que se apoiam nos pontos da base e da mancha de sombra projectada reflectidas e que fogam em  $F_3$ . Do cruzamento dessas duas direcções de linhas conseguimos determinar o reflexo da forma total e das respectivas sombras. De referir a curiosidade do reflexo mostrar uma forma mais deformada em relação ao referente inicial, quase parecendo uma anamorfose. Os espelhos na representação perspéctica têm esta qualidade interessante e curiosa de também permitir e possibilitar apresentar outras aparências curiosas do mesmo objecto (**Figura 51 e Figura 52**).

A temática dos espelhos como sabemos sempre originou grande curiosidade e interesse na esfera das artes visuais, nas artes plásticas, na literatura e em outros campos da comunicação e imaginação. No presente livro, abordámos em síntese algumas aplicações e intervenções com espelhos nas artes visuais, referenciando alguns e significativos exemplos, desde a Renascença à Contemporaneidade, com obras de arte de autores variados. Referimos também o nosso interesse e a nossa experiência artística na utilização de espelhos, que remonta ao ano de 1988, com a realização de um auto-retrato num espelho convexo elipsoidal, às conversas que tivemos com o Professor José Moutinho e Joaquim Lima de Carvalho nos tempos da licenciatura em pintura e mais recentemente, e a outras experiências artísticas mais recentes, como aconteceu parcialmente na nossa exposição *A Mulher e a Máscara*, realizada na Galeria Arte Periférica em Lisboa, em 2004, com mais ênfase dois anos depois em 2006 na exposição *Burning Mirror. We Want to be but we can't find Ourselves*, na extinta Galeria Sala Maior no Porto, e mais recentemente em 2016 no Museu Militar em Lisboa, onde realizámos uma intervenção e uma instalação no espaço daquele museu utilizando e combinando espelhos, alguns parcialmente pintados, com pinturas em óleo sobre tela. Estas nossas experiências artísticas referenciadas foram fundamentais e aceleraram o nosso interesse para uma pesquisa maior neste campo de investigação, sobretudo na sua relação com a ciência da Geometria Descritiva e sobretudo com o seu ramo específico da perspectiva linear em quadro plano. Neste sentido, num segundo momento deste livro contextualizámos nesta temática da reflectância sobre espelhos planos, algumas questões do mundo da óptica, das leis universais da reflectância, e do que mais significativo se escreveu e se publicou sobre este assunto, em tratados e escritos de outros autores, desde a antiguidade à contemporaneidade. Como esta temática está relacionada com a ciência e com o desenho de perspectiva linear, achámos bem abrir um lugar

neste livro para apontar alguns teoremas e teorias da geometria plana e da geometria espacial que são ferramentas muito úteis para a representação e concretização dos desenhos rigorosos de reflexos. Neste sentido, enfatizámos a questão do teorema atribuído a Thales de Mileto, com a proporcionalidade de segmentos rectilíneos, e outro teorema mais recente da autoria de Girard Desargues, com a questão das homologias e correspondências entre elementos geométricos. O conhecimento de ambos os teoremas, como vimos, são fundamentais, em muitos casos e problemas específicos, para a concretização dos desenhos dos reflexos em perspectiva linear. Lançados e descritos estes dois teoremas, noutro momento seguinte já inteiramente dedicado ao desenho de reflexos em perspectiva linear plana, apontámos as condicionantes que determinam a visualidade dos reflexos e dos efeitos pretendidos e obtidos, que dependem de vários factores apontados no texto. Na continuação da descrição destes factores, apontamos e descrevemos algumas aplicações na forma de problemas e de exercícios específicos, todos realizados com dados de arranque e coordenadas precisas que permitem resolvê-los do princípio ao fim, através de etapas ou passos sucessivos.

**65**

No final do livro, no sexto e último capítulo, e como complemento e continuidade aos capítulos precedentes, apresentamos a estrutura de uma lição de seminário que constituiu a parte final das nossas Provas de Agregação concluídas no dia 29 de Abril de 2022. Como sabemos, o objecto do espelho sempre foi um referente de grande importância para os operadores plásticos, utilizado e representado em múltiplas situações. Os espelhos criam múltiplos, não esgotando a aparência dos objectos que uma vez reflectidos criam novos contornos, novas formas e novos espaços no imaginário do espectador. Mostram em simultâneo a unidade na diversidade, de forma curiosa e precisa. Os reflexos, por exemplo e em determinadas situações, mostram ou tornam visíveis partes dos objectos ou formas que nos próprios objectos se encontram inicialmente invisíveis ao olhar do espectador. Noutras situações os objectos reflectidos criam aparências semelhantes às anamorfoses clássicas. Neste sentido, apresentamos este exemplo descrito no sexto e último capítulo do livro, mais complexo e abrangente

te, que apontámos, e cujo resultado ou resolução visual da imagem especular se aproxima um pouco dos efeitos anamórficos de certas formas ou conjuntos. Como a nossa área de investigação está centrada no desenho geométrico e em particular no desenho de perspectiva linear, à parte do nosso interesse sobre esta temática dos espelhos a que já nos pronunciámos na Introdução, achámos bastante pertinente desenvolver este assunto do desenho da representação da reflectância sobre espelhos planos, que está relacionada e integrada com as leis da óptica e da perspectiva linear. Há regras para uma representação rigorosa do desenho de reflexos de objectos que pertencem ao mundo da geometria e da óptica, que apontamos no texto. Optámos assim no final por apresentar um exercício inédito da representação de um objecto gerado por um cubo com uma determinada inclinação, iluminado por uma luz direccionada e onde considerámos o plano de rampa da base como plano do solo para efeitos de projecção de sombras. Nos manuais e na Bibliografia sobre o assunto não encontramos exemplos de problemas nem de exercícios que apresentassem exemplos da determinação de reflexos de objectos iluminados por uma determinada direcção luminosa e assentes em planos inclinados, daí também a nossa curiosidade de enunciar um exemplo. Na bibliografia encontrada, com excepção de alguns exemplos da obra já referenciada de Cristina Candito da Universidade de Génova, apenas visualizámos exemplos de exercícios de espelhos com os objectos iluminados assentes no Geometral, ou plano horizontal de projecção, mas nunca num plano inclinado. No entanto e apesar do problema e exercício ser inédito, tivemos a preocupação de que fosse um exemplo globalizante ou abrangente razão pela qual incluímos nos conteúdos do exercício proposto vários tópicos programáticos que pertencem aos programas das Unidades Curriculares de “Geometria: perspectiva I”, de “Geometria: perspectiva II”, das licenciaturas de Desenho da FBAUL, e ainda da Unidade Curricular de “Métodos de Representação Rigorosa” do Mestrado de Desenho da FBAUL. O exercício proposto envolve vários métodos e submétodos da perspectiva linear geométrica, como rebatimentos, a representação do paralelismo

e da perpendicularidade, as leis e princípios universais da óptica, o teorema atribuído a Tales, as homologias entre os elementos, não apenas nos rebatimentos mas também entre o objecto e o seu próprio reflexo e também métodos e procedimentos para a determinação de sombras, no caso, considerando uma direcção luminosa a distância infinita. Trata-se, pois, de um exercício globalizante que obriga à assimilação de vários conhecimentos e conteúdos inerentes ao desenho geométrico e que fazem parte dos programas das unidades curriculares de Geometria da FBAUL. Sem estes conhecimentos seria impossível ensaiar este exemplo de representação rigorosa de reflectância sobre espelhos planos. É um exercício que poderia, por exemplo, ser uma proposta de trabalho final de um qualquer aluno. Importa ainda referir que os modernos *softwares* de desenho assistido por computador não incluem comandos para solucionar todos os tipos de problemas da representação de reflexos em espelhos, sobretudo dos que se situam particularmente posicionados no espaço geométrico de representação, pelo que se torna útil enunciar, ensaiar e conhecer os respectivos procedimentos e conhecimentos preparando os alunos para outras situações possíveis e mais complexas que incluam a representação de objectos com espelhos.

Por fim, esperamos também que este livro tenha dado algum contributo para as Unidades Curriculares que gerimos no presente na FBAUL e também para todos os interessados e curiosos sobre estas matérias, como desenhadores, artistas plásticos, designers, cenógrafos, entre outros, na esperança também da sua aplicação futura. Neste sentido, o livro pretende também ser um manual didáctico-pedagógico, sempre útil para aqueles que procuram o conhecimento.

- ALBERTI, Leon Battista, edição de Cecil GRAYSON (1973), *Opere Volgari. De Pictura*, Bari, [http:// www.liberliber.it/biblioteca/a/alberti/de\\_pictura/html/index.htm](http://www.liberliber.it/biblioteca/a/alberti/de_pictura/html/index.htm).
- ANDERSEN, Kirsti (1992), *Brook Taylor's Work on Linear Perspective. A Study of Taylor's Role in the History of Perspective Geometry. Including Facsimiles of Taylor's Two Books of Perspective*, New York, Springer-Verlag.
- ANDERSEN, Kirsti (2007), *The Geometry of na Art. The History of the Mathematical Theory os Perspective from Albery to Monge*, New York, Springer Science.
- ASENSI, Fernando Izquierdo (1997), *Ejercicios de Geometria Descriptiva I (Sistema Cónico)*, Madrid, ed. Paraninfo.
- BALTRUSAITIS, Jurgis (1995), *Les Perspectives Dépraveés*, Vol I e Vol.II, Paris, Flammarion.
- BARROCHI, P.(1962), a cura di, *Trattati d'Arte del Cinquecento*, 2 Vols., Bari, Laterza, Vol.I.
- BOURGOING, Charles (1661), *La Perspective affranchies... sans tracer ny supposer le plan geometral ordinarie*, Paris.
- BROOK TAYLOR (1715), *Linear Perspective, or: a New Method of representing justly all manner of objects. As they appear to the eye in all situations*, London, R. Knaplock.
- BROOK TAYLOR (1719), *New Principles of Linear Perspective: or the Art of Designing on a Plane the Representations os all sorts of Objects. In a more general and simple Method than as been done before*, London, R. Knaplock.
- CABEZAS, Lino (2004), "Razón y Medida: La Perspectiva y La Representación Arquitectónica Hispana en el Siglo XVI", in *El Modelo Italiano en las Artes Plásticas de la Península Ibérica durante El Renacimiento*, Universidade de Valladolid [Simpósio e catál., coord. de Maria José Redondo Cantera], Valladolid, ed. do Secretariado de Publicaciones e Intercambio Cultural.
- CANDITO, Cristina (2010), *IL DISEGNO E LA LUCE. Fondamenti e metodi, storia e nuove applicazioni delle ombre e dei riflessi nella rappresentazione*, Firenze, Alinea Editrice, s.r.l., ISBN 978-88-6055-585-4.
- COUCEIRO DA COSTA, Manuel (1992), *Perspectiva e Arquitectura. Uma Expressão de Inteligência no Trabalho de Concepção*, Dissertação de Doutoramento, Lisboa, Faculdade de Arquitectura da Universidade Técnica de Lisboa.
- CRESPO, Nuno (2017), "Michelangelo Pistoletto: o artista que não quer ser clássico", Revista Ípsilon <https://www.publico.pt/2017/03/26/culturaipsilon/noticia/o-artista-que-nao-quer-ser-classico-1766525>.
- DAMISCH, Hubert (1994), *The Origin of Perspective*, trad. de John Goodman, Cambridge, Mass.: Mit Press (ed.original com o título *L'Origine of Perspective*, Paris, Flammarion, 1989).

- DOBLIN, Jay (1956), *Perspective: A New System for Designers*, Whitney Publications.
- ERNST, Bruno (1991), *O Espelho Mágico de M.C. Escher*, Colónia, Taschen, 1ª edição de 1978.
- FIELD, Judith, e GRAY, J. J. (1987), *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New York, Springer-Verlag.
- FLOCON, Albert, TATON (1990), René, *La Perspective*, Paris, 5ª ed., Presses Universitaires de France (1ª edição de 1963).
- GOURNERIE, Jean Jules de (1859), *Traité de Perspective Lineaire*, Paris, Dalmont et Dunot, Mallet-Bachelier.
- HECHT, Eugene (2002), *Óptica*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2ª edição.
- HIGHMORE, Joseph (1763), *The Practice of Perspective on the Principles of Dr. Brook Taylor...*, written many years since, but now first published, London.
- HUGO MÃE, Valter (2006), texto no Catálogo da exposição de António Trindade, “Burning Mirror — We want to be but we can’t find ourselves”, impresso e publicado pela Galeria Sala Maior, Porto, 2004, pp.1-2.
- IVINS, M., Jr (1973), *On the Rationalization of Sight — With an Examination of Three Renaissance Texts on Perspective, Alberti, Albrecht Durer e Jean Pélérin Viator* (contém em apêndice as 1ª e 2ª ed. facsimiladas do tratado De Perspectiva Artificialis de Jean Pelérin Viator, 1505 e 1509), New York, Da Capo Press, (1ª ed. de 1938, Metropolitan Museum of Art).
- JÜRGENS, Sandra Vieira (2006), texto no Catálogo da exposição de António Trindade, “Burning Mirror — We want to be but we can’t find ourselves”, in *Revista Arte y Part*, Nº 65, Outubro-Novembro, 2006, p.150.
- KEMP, Martin (1994), *La Scienza dell’ Arte. Prospettiva e Percezione Visiva da Brunelleschi a Seurat*, Firenze, Giunti Gruppo Editoriale (1ª ed. com o título *The Science of Art. Optical Themes in Western Art from Brunelleschi to Seurat*, New Haven e Londres, Yale University Press, 1990).
- LAMBERT, Johann Heinrich (1774), *Die freye Perspective ... mit Anmerkungen und Zusätzen vermehrt*, Zurich.
- MAFIOLETTI, Claudio (2011), “Transient. Reflections of one and many. The idea of Art, participation and change in Pistoletto’s work [https://www.academia.edu/11182000/Michelangelo\\_Pistoletto\\_Transient\\_Reflections\\_of\\_One\\_and\\_Many\\_June\\_2011?auto=download](https://www.academia.edu/11182000/Michelangelo_Pistoletto_Transient_Reflections_of_One_and_Many_June_2011?auto=download).”
- MESA GIBBERT, Andrés de (1994), “Entre la Prática Artesanal y la Teoría de la Visión. El Concepto de Pirâmide Visual en el Tratado de Perspectiva de Jean Pélérin Viator”, in *Revista D’Art*, Nº 20, Perspectiva I Espai Figuratiu, Barcelona, Universidade de Barcelona Publicações.
- MOREIRA de SOUSA, Marcelo (1995), *Desenho e Geometria Descritiva*, 12º ano, Vols. I e II (Programa antigo de perspectiva), Lisboa, Plátano Editora.
- MOUTINHO, José Manuel Patrício de Sousa (1991), *Perspectiva Cónica Linear*, texto policopiado, para a obtenção do título de Professor Agregado, Lisboa, ESBAL.

- MURTINHO, Vitor (1993), *Perspectivas: o Espelho Maior ou o Espaço do Espanto*, Trabalho de Síntese apresentado no âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica ao Departamento de Arquitectura da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- NICERON, Jean François (1638), *La Perspective Curieuse*, Livro III, Paris.
- PILLET, Jean Jules (1953), *Traité de Perspective Linéaire, précédé du Tracé des Ombres Usuelles et du Rendu*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin.
- PINHEIRO, Carlos da Silva/ SOUSA, Pedro Fialho (1980), *Desenho — TPU 55*, Coleção Textos pré-universitários, Lisboa, Editorial do Ministério de Educação.
- PONCELET Jean Vitor (1865), *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, 2 Vols., Paris, Gauthier-Villars, 2ª edição.
- RICHTER, Jean Paul (1970), *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, New York, Dover Publications, 2 vols, Vol.II.
- SOROMENHO, Ana/ MALHÃO, Daniel (2017), “Água, céu, estacas, azul, vermelho, quente e frio. As obras que Portugal vai representar na Bienal de Veneza”, JORNAL EXPRESSO, 9.05.2017: <https://expresso.pt/cultura/2017-05-09-Agua-ceu-estacas-vermelho-azul-quente-e-frio-As-obras-que-Portugal-vai-apresentar-na-Bienal-de-Veneza>.
- SORTE, Cristoforo (1584), *Osservazioni nella Pittura*, Roma, Biblioteca Apostólica Vaticana, in *Trattati d'Arte del Cinquecento*, 2 Vols., a cura di P.BARROCHI, Bari, Laterza, 1962, Vol.I, pp.297-298.
- TRINDADE, António (2004), “A Mulher e a Máscara”, Catálogo da exposição, impresso e publicado pela Galeria Arte Periférica, Lisboa, 2004, pp.1-20.
- TRINDADE, António Oriol (2008), *Um Olhar sobre a Perspectiva Linear em Portugal nas Pinturas de Cavalete, Tectos e Abóbadas:1470-1816*, 2 vols., tese de Doutoramento, orientada pelo Professor Manuel Couceiro da Costa, Lisboa, Fbault.
- TRINDADE, António (2016), “Guerra e Espelhos”, texto da exposição no Museu Militar de Lisboa, in *Evocação. Nos 100 anos da primeira grande guerra*, catálogo da exposição, com curadoria de Ilídio Salteiro e coordenação de Ilídio Salteiro e Luís Sodré de Albuquerque, Lisboa, CIEBA, FBAUL, FCT, pp. 57-68; <http://evocacao14-18.blogspot.com/p/antonio-trindade.html>.
- TRINDADE, António Oriol (2021), “Da caixa ao cenário. A Lição de Música e a geometria ordenadora no desenho da composição de Veermer”, *ACTAS do 15 Congresso internacional CSO, Março de 2021*, Congresso Internacional com Comissão Científica e Revisão de pares, Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa, CIEBA/ FBAUL. Artigo aceite para publicação em 11 de Março de 2021. Link: [http://cso.belasartes.ulisboa.pt/programa\\_CSO\\_2021\\_1-6.pdf](http://cso.belasartes.ulisboa.pt/programa_CSO_2021_1-6.pdf).
- VAULEZARD, I.L.Sr De (1630), *Perspective Cylindrique et Conique*, Paris.

- VIATOR, Jean Pélerin (1508), *De Artificiali Perspectiva*, Toul, Piere Jacob.
- VILLANUEVA BARTRINA, Lluís (1996), *Perspectiva Lineal. Su construcción y su relación con la fotografía*, Barcelona, Arquitect 18, Ediciones Universitat Politècnica de Catalunya.
- VITELLIONES Mathematici Doctissimi pepi oftikhe (1535), id est de natura, ratione, & proiection e radiorum visus, luminura, colorum atq3 formarum e radiorum visus, luminum, colorum atq3 formarum, quam vulgo Perspectivam vocant, Libri X, Norembega, reed. impressa no ano de 1535, Livro X, diagramas das fls. 113 verso e 135 frente. Existe um exemplar desta reedição impressa de 1535 na Academia das Ciências de Lisboa, com a cota B.A.C.L. 11 371 10.
- VROMAN, Dik(1983), *Architecture: Perspective, Shadows and Reflections*, New York, Van Nostrand Reinhold Company.
- XAVIER, João Pedro (1997), *Perspectiva, Perspectiva Acelerada e Contraperspectiva*, Porto, 2ª ed., FAUP, 1997 (1ª ed. de 1995).

# DESIGNAÇÕES DAS ENTIDADES GEOMÉTRICAS REPRESENTADAS NOS DESENHOS DO AUTOR

72

- LT** — Linha de Terra, que corresponde ao eixo OX do sistema de eixos coordenados. L é colocado à esquerda e T colocado à direita nos desenhos.
- LH** — Linha do Horizonte. L é colocado à esquerda e H colocado à direita nos desenhos.
- O<sub>2</sub>** — Projecção frontal ou vertical do Centro de Projecção ou Observador.
- O<sub>1</sub>** — Projecção horizontal do Centro de Projecção ou Observador.
- P** — Ponto principal da perspectiva, que corresponde ao ponto de intersecção do raio visual principal com o plano frontal de projecção ou quadro perspéctico  $\varphi O$ .
- OO<sub>1</sub>** — Altura de visão (distância do observador, centro de projecção, ao plano horizontal ou Geometral).
- OO<sub>2</sub>** — Distância de visão (distância do observador, centro de projecção, ao plano frontal ou quadro perspéctico).
- OR** — Centro de projecção ou observador rebatido.
- Oraux.** — Centro de projecção ou observador auxiliar rebatido.
- A, B, C, D...** — Designação da perspectiva de pontos.
- A', B', C', D'...** — Designação da perspectiva da projecção horizontal de pontos.
- A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>, D<sub>2</sub>...** — Designação da projecção frontal ou vertical de pontos no sistema de dupla projecção ortogonal.
- A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>...** — Designação da projecção horizontal de pontos no sistema de dupla projecção ortogonal.
- a, b, c...** — Designação de rectas em perspectiva no sistema de perspectiva linear plana.
- a', b', c'...** — Designação da perspectiva da projecção horizontal de rectas no sistema de perspectiva linear plana.
- F** — Designação de ponto de fuga de uma direcção rectilínea.
- F'** — Designação de ponto de fuga da perspectiva da projecção horizontal de uma direcção rectilínea.
- Fc** — Designação do ponto de Fuga das cordas de arco de rebatimento.
- Fc'** — Designação do ponto de Fuga da perspectiva da projecção horizontal das cordas de arco de rebatimento.
- aR** — Designação de recta rebatida.
- D e D<sub>1</sub>** — Designação dos pontos de distância.
- hu** — Designação do traço horizontal de um plano em perspectiva linear plana.
- vu** — Designação do traço vertical ou frontal de um plano em perspectiva linear plana.
- fu** — Designação do traço do infinito do plano, ou recta de fuga de um plano em perspectiva linear plana. Nota: no ensino secundário em Geometria Descritiva, no método de dupla projecção ortogonal esta é a designação de traço frontal ou vertical de um plano. No entanto em perspectiva utilizamos esta designação para a recta do infinito do plano, ou recta de fuga de um plano, lugar geométrico de todos os pontos de fuga de todas as rectas de um plano. Para o traço frontal ou vertical utilizamos a designação de **vu**.
- $\alpha, \varphi, \omega, \theta, \delta...$**  — Designação de planos pelas letras do alfabeto grego.

## FIGURAS



1

À esquerda, Girolamo Francesco Maria  
Mazzola, conhecido por Parmagianino,  
Autoretrato num espelho convexo,  
c.1520.Fonte: Wikimédia:  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/  
File:Parmigianino\\_Selfportrait.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parmigianino_Selfportrait.jpg)



75

2

À direita, Diego da Silva Velasquez,  
Las Meninas, c.1656, Madrid,  
Museu do Prado. Fonte: Wikipédia:  
[https://pt.wikipedia.org/wiki/As\\_  
Meninas\\_%28Vel%C3%A1zquez%29](https://pt.wikipedia.org/wiki/As_Meninas_%28Vel%C3%A1zquez%29)





77

4

À direita, Maurits Cornelis Escher, Hand with Reflecting Sphere, 1935. Litogravura.  
Fonte: <https://www.arteeblog.com/2016/06/analise-de-hand-with-reflecting-sphere.html>.



5

À esquerda, Michellangelo Pistoletto,  
*Partitura in nero* — G, 2010 — 2012.  
Fonte: <https://www.simonleegallery.com/artists/52-michelangelo-pistoletto/works/6148/>

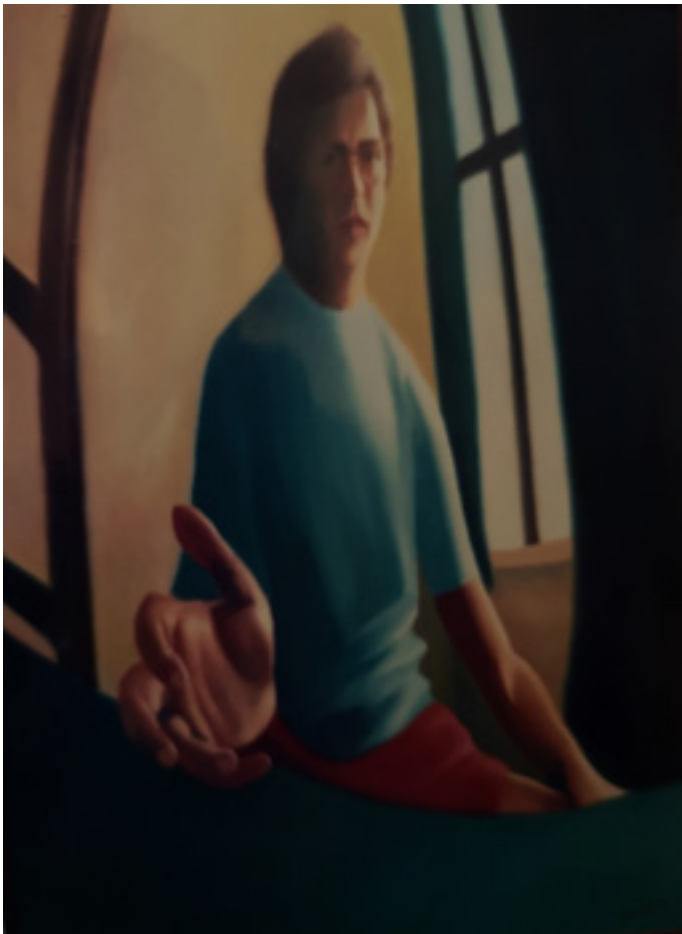


79

6

À direita, Dan Graham, *Cafe Bravo for Kunst-Werke, Berlin*, 1998. Courtesy Marian Goodman Gallery, New York.  
Fonte: <https://bordercrossingsmag.com/article/dan-graham-mirror-complexities>





**81**

8

Auto-retrato do autor, óleo sobre tábuas de madeira, 100x65cm, 1989. Coleção do autor. Fonte própria.





**83**

10

"O Espelho de Joana - 2a parte", óleo sobre tela, 130x170cm, 2005. Fonte: Imagem do convite da exposição de António Trindade, "Burning Mirror - We want to be but we can't find ourselves", Galeria Sala Maior, Porto, 2004.



11

"O Espelho (Ana) I e II", óleo sobre tela,  
cada unidade de 40x40cm, 2005.  
Fonte: catálogo da exposição de António  
Trindade, "Burning Mirror – We want to  
be but we can't find ourselves", Galeria  
Sala Maior, Porto, 2006.

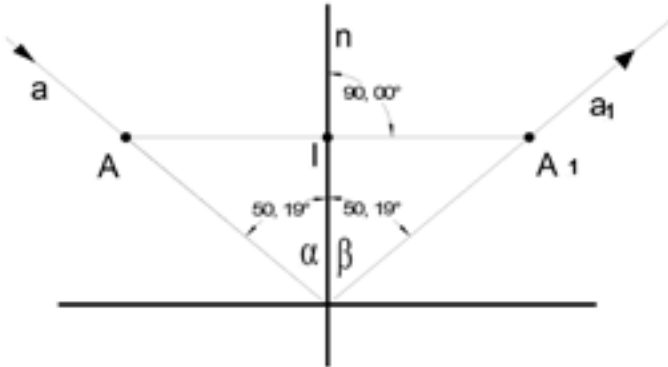


85



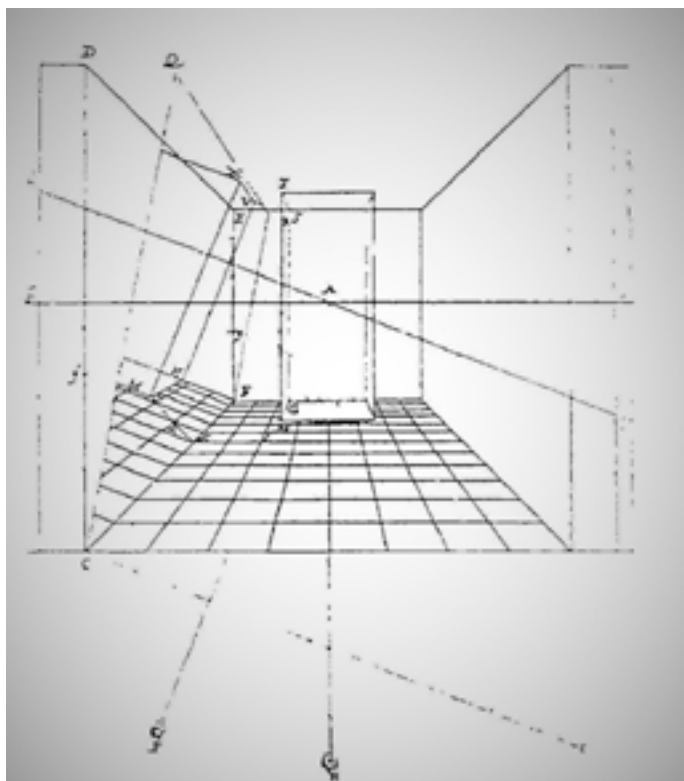
12, 13 e 14

Vistas da exposição — instalação  
*Guerra e Espelhos*, 2016. Fonte própria:  
TRINDADE, António, 2016:



15

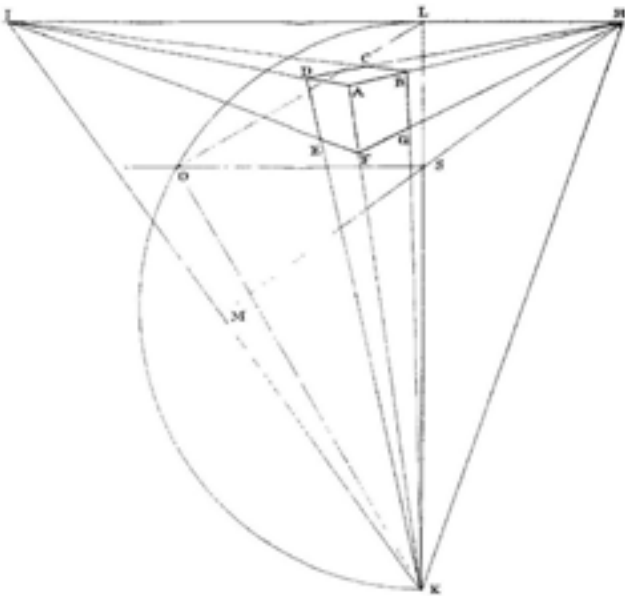
Esquema demonstrativo do principio da lei da reflexão que diz que "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão". O ângulo que o raio incidente **a** faz com a normal **n** ao plano da interface reflectora é igual ao ângulo que o raio reflectido **a1** faz com a mesma normal **n**, logo o ponto reflectido corresponde ao simétrico do ponto original. Desenho do autor assistido por computador. Fonte: TRINDADE, 2008;p.59.

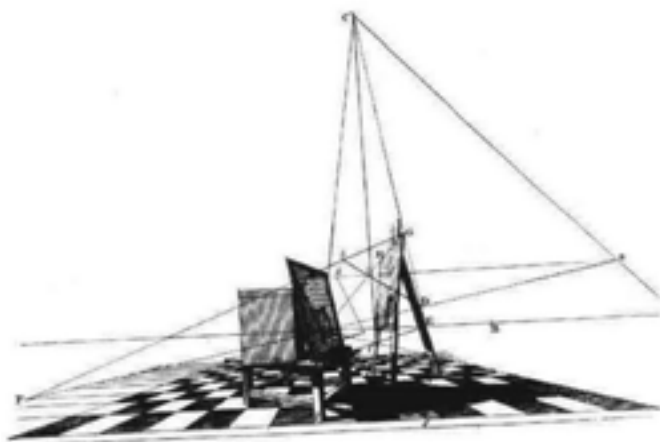
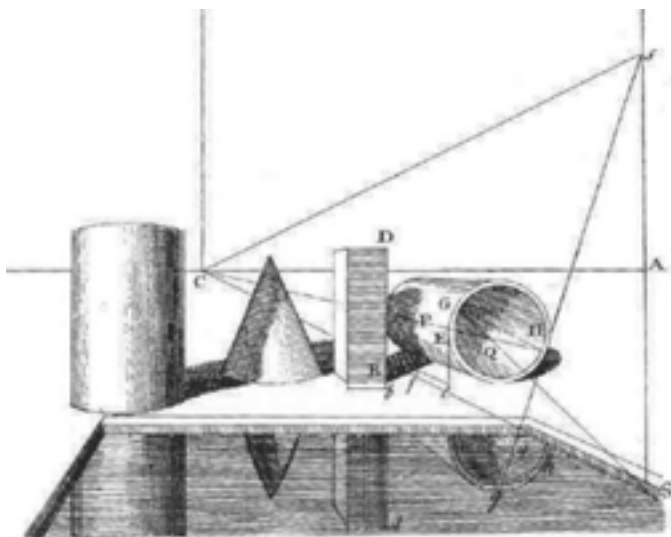


87

16

Charles Bourgoing, representação de uma perspectiva frontal de um espaço interior com um prisma e respectivo reflexo num espelho de topo. Fonte: BOURGOING, 1661: p.140; ANDERSEN, 2007: p.469.

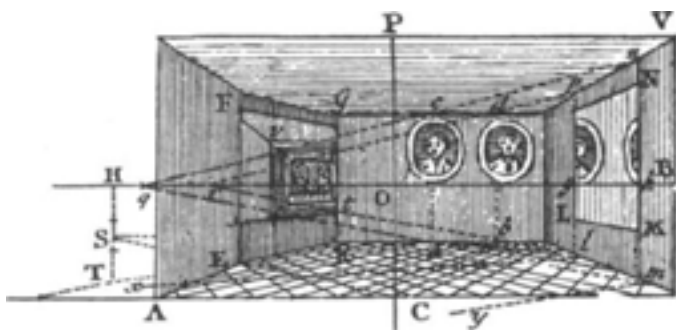






20

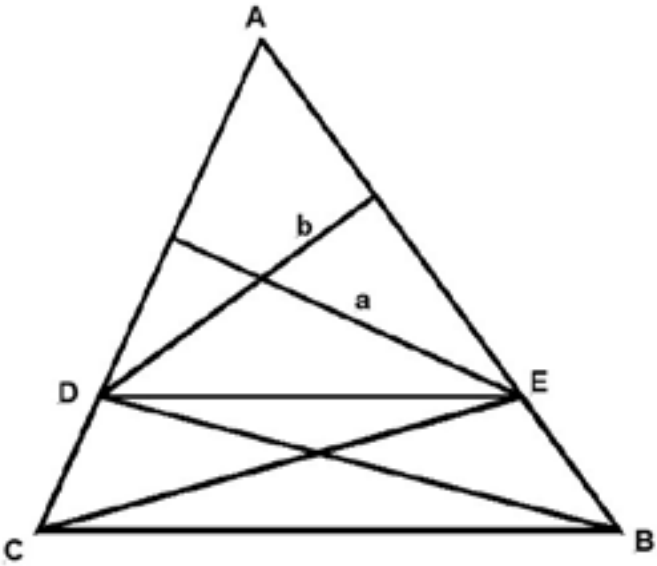
À esquerda, Joseph Highmore, 1763, sala com quatro espelhos. Fonte: HIGHMORE, 1763, figura 74.1; ANDERSEN, 2007, figura X 69.

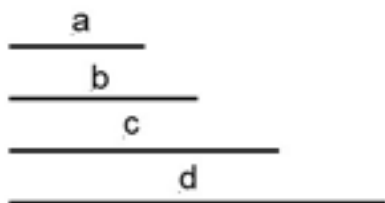


91

21

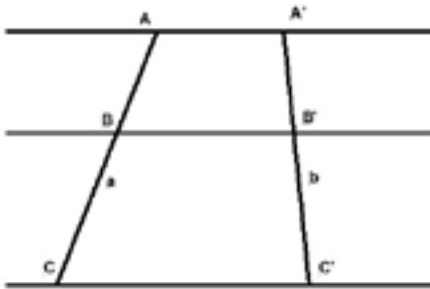
À direita, Johann Lambert, sala com dois espelhos. Fonte: LAMBERT, 1774, figura 56; ANDERSEN, 2007, p.665, figura XI.27.





a=5cm  
b=7cm  
c=10cm  
d=14cm

em que  $a/b = c/d = 0,71\dots$



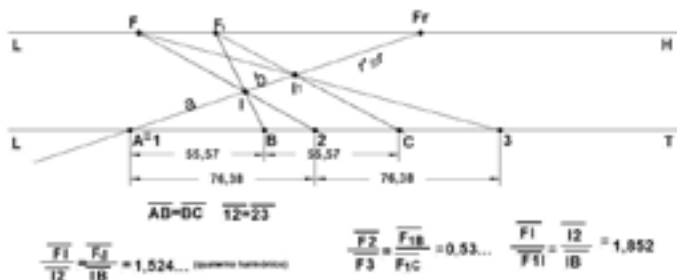
AB=43,08  
BC=64,52

A'B'=40,20  
B'C'=60,30

$AB/BC=0,666$  (valor constante do ratio)  $A'B'/B'C'=0,666$  (valor constante do ratio)

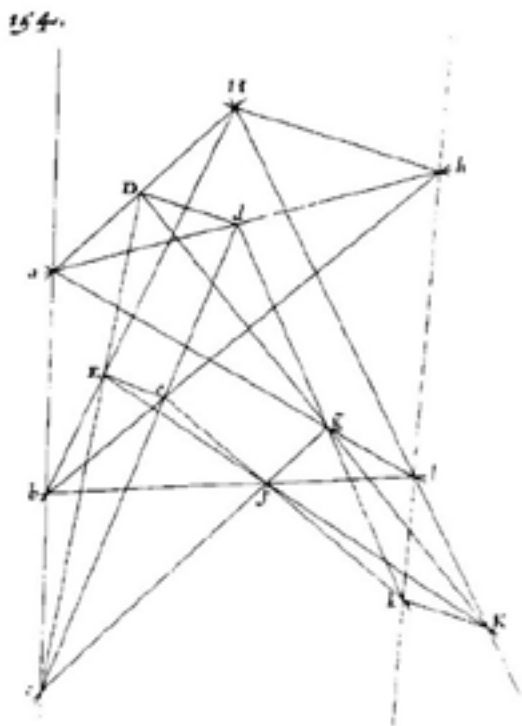






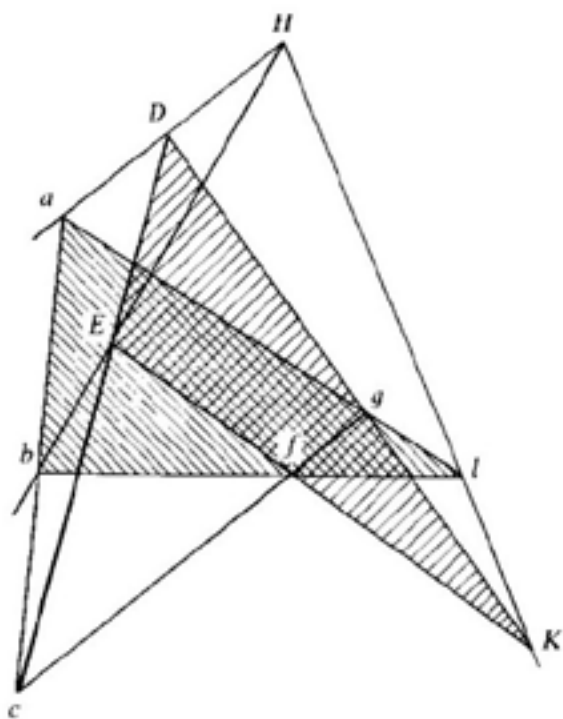
27

Verificação da relação de proporcionalidade entre segmentos na aplicação do teorema de Tales à perspectiva e desta à geometria plana. Verificamos na figura, onde apenas se assinalam a linha do horizonte, a linha de terra e a recta  $r$ , no que respeita ao perspectógrafo e à perspectiva, vários ratios entre segmentos proporcionais entre si, nos quais encontramos um quaternio harmónico, pois, por exemplo, os pontos **F** e **F1** são conjugados harmónicos de **B** e **2** porque são iguais e de sinal contrário as razões simples de **F** e **F1** em relação a **B** e **2**. Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.



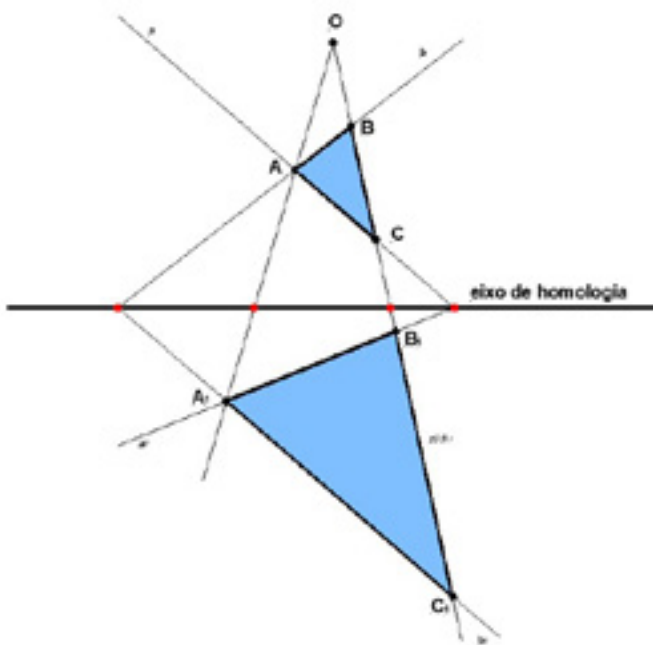
28

À esquerda, figura original da primeira proposição geométrica de Desargues, onde se verifica bem o seu teorema.  
 Fonte: BOSSE, 1648: prancha 154, registada no verso da p. 340.



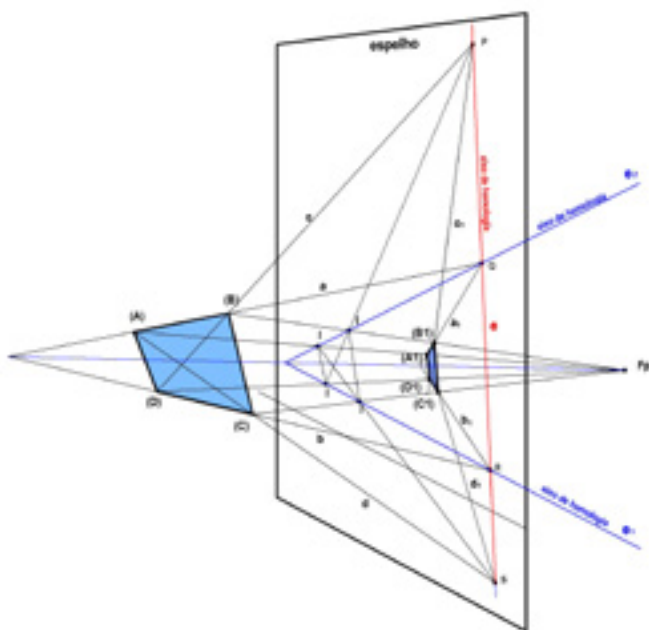
29

À direita, a mesma figura redesenhada, eliminando as linhas superfluas e acentuando os dois triângulos que descrevem o seu teorema. Fonte: FIELD e GRAY, 1987: pp.162-163. Nas figuras podemos verificar que as intersecções dos lados correspondentes estão alinhadas numa linha recta.



30

Explicação do teorema de Desargues, através de duas figuras homólogas, no presente caso, dos triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$ . As intersecções dos lados correspondentes  $AB$  e  $A_1B_1$ ;  $BC$  e  $B_1C_1$ ; e  $AC$  e  $A_1C_1$  encontram-se em pontos que estão alinhados sobre a mesma linha recta que é o eixo de homologia de centro  $O$ . Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.

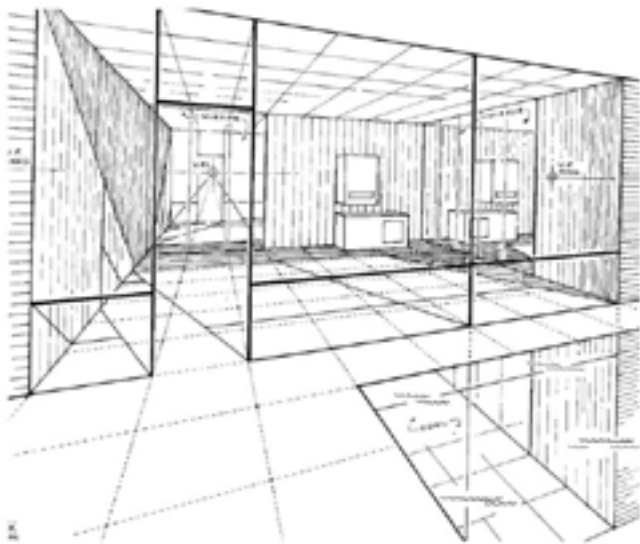


101

31

Homologia e teorema de Desargues, presentes na determinação do reflexo de uma figura plana num espelho plano. Desenho do autor assistido por computador. Fonte: TRINDADE, 2008: p.379.

**102**

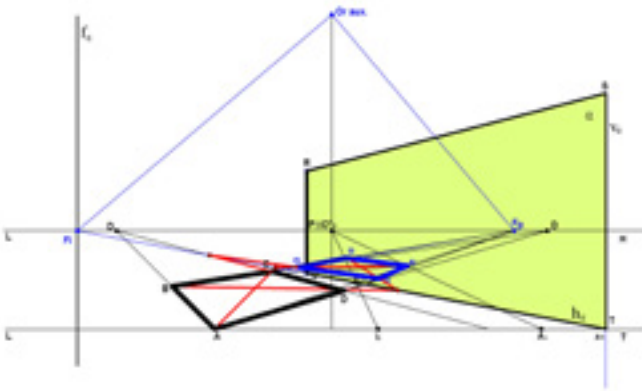


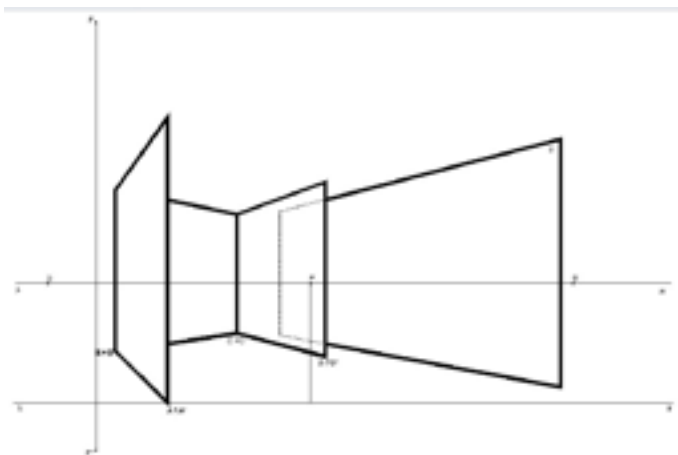


**103**

33

Gerhard Richter, *Six Gray Mirrors No. 884/1-6*, 2003. Dia Art Foundation, Photo ©Richard Barnes Fonte: site disponível na Web, Dia: *Beacon Press Image, 1995-2007*. <http://www.diacenter.org/dia/press/pressimages.html>.

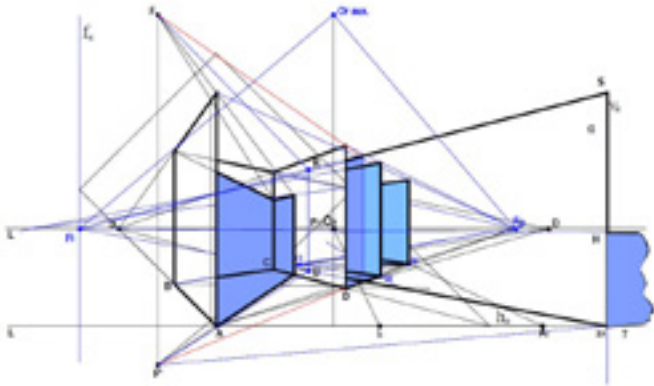


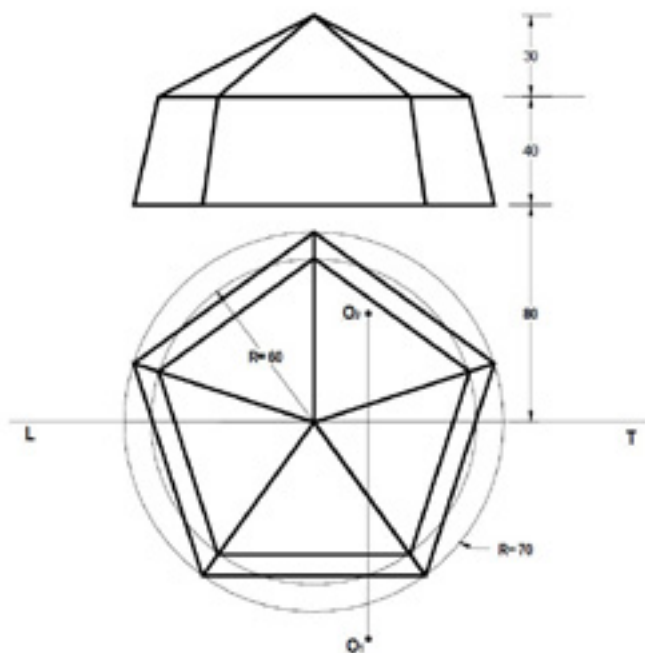


**105**

35

Dados de arranque de um exercício, já em perspectiva linear plana, em que a distância de visão, no presente caso, corresponde a 11cm e a altura de visão, no presente caso, corresponde a 10cm, e onde é dado o biombo poliédrico de base **[ABCD]** e de altura **12**, em que se pretende determinar a respectiva imagem reflectida no espelho vertical **a**, assim como as sombras do conjunto a partir do foco luminoso **F** dado. Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.

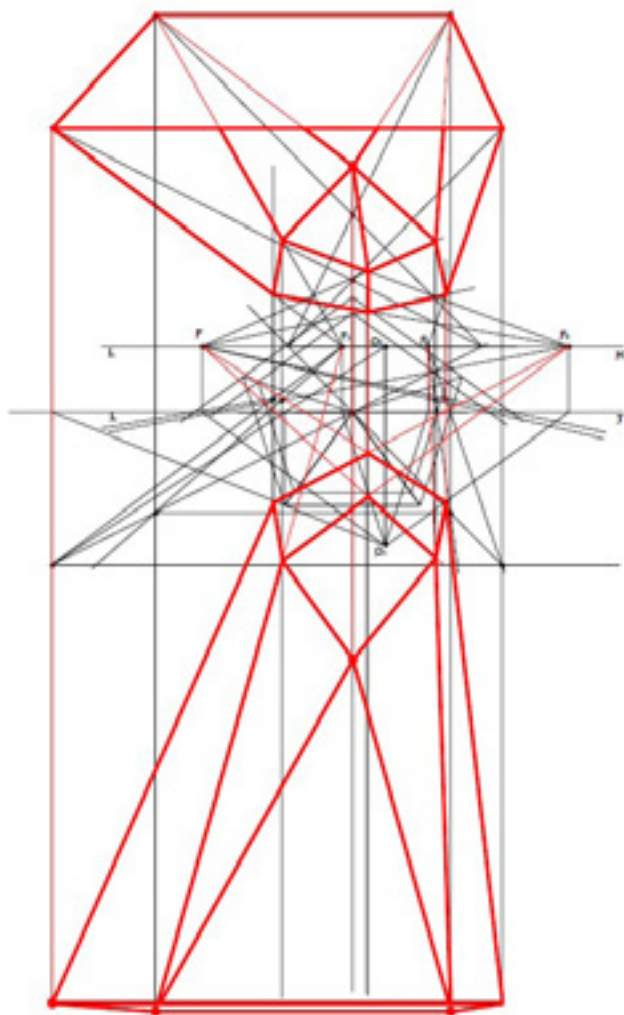


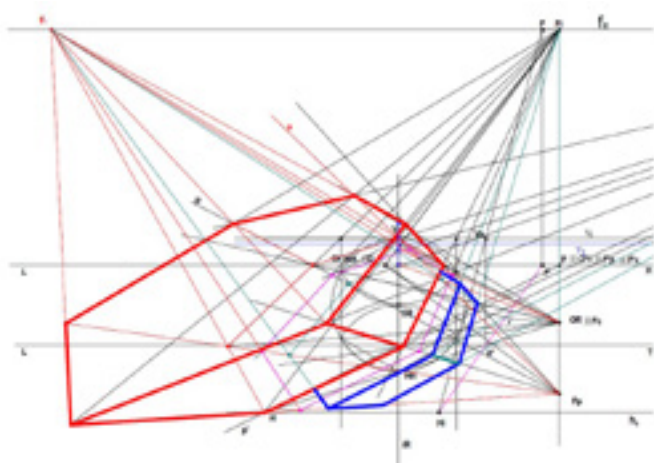


107

37

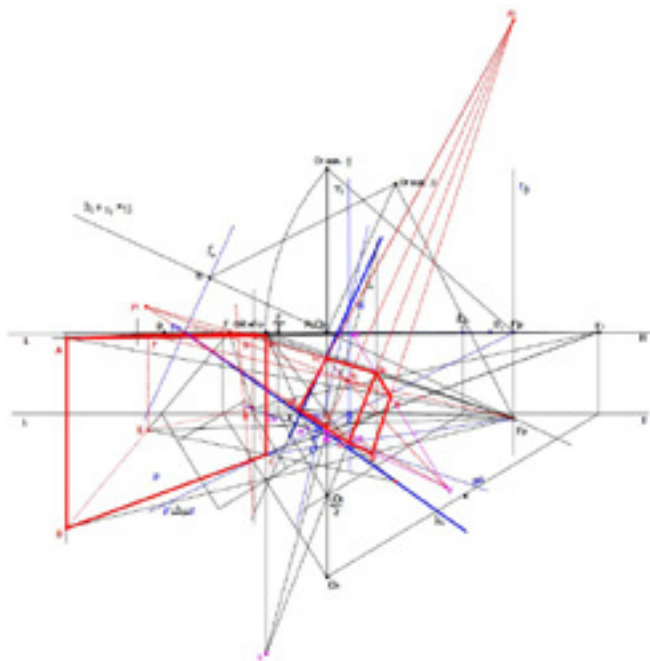
Planta e alçado do enunciado de um exercício que consiste na determinação do reflexo de uma cúpula poliédrica de base e secção pentagonal num espelho que está coincidente com o Geometral. Na figura assinala-se a posição do observador,  $O_1$  e  $O_2$ , dada em dupla projecção ortogonal. Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.





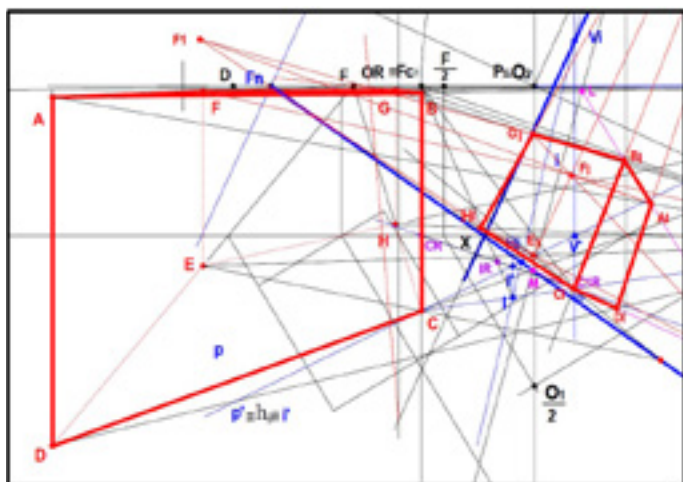
**109**

**110**



40

Perspectiva com reflexo num plano oblíquo de um cubo assente no Geometral. Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.

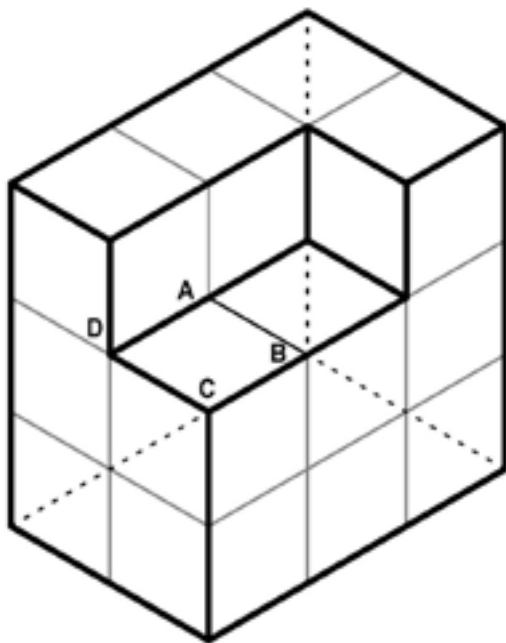


111

41

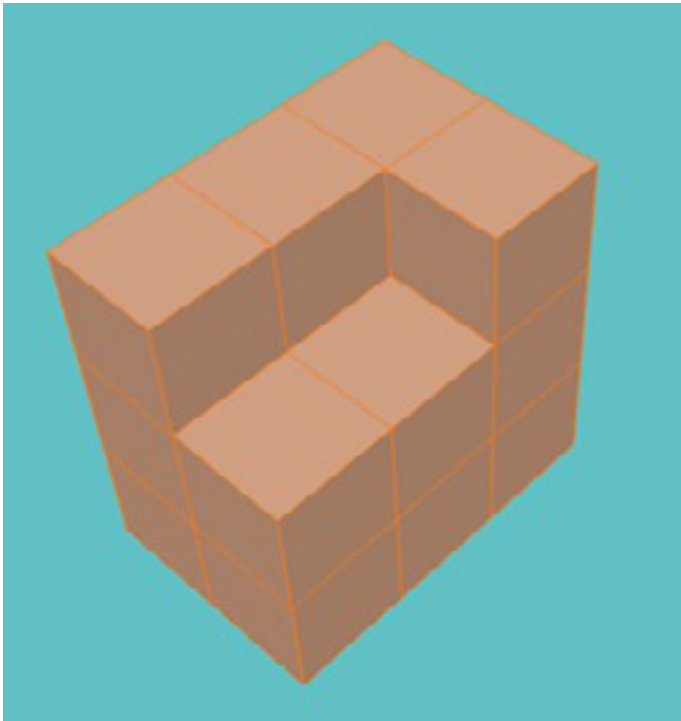
Ampliação de um pormenor da **Figura 41**, da construção da perspectiva com reflexo num plano oblíquo de um cubo assente no Geometral. É interessante verificar de como os reflexos mudam a aparência das formas dos objectos noutros contornos aparentes possíveis. Desenho do autor assistido por computador. Fonte própria.

**112**



42

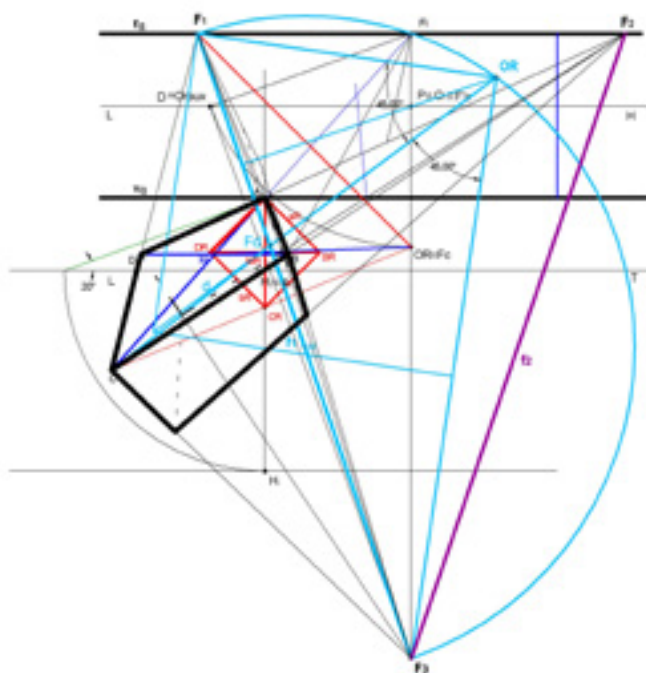
Forma composta por dezasseis cubos  
desenhada numa representação  
axonométrica-isométrica. Fonte  
própria: desenho do autor assistido por  
computador.

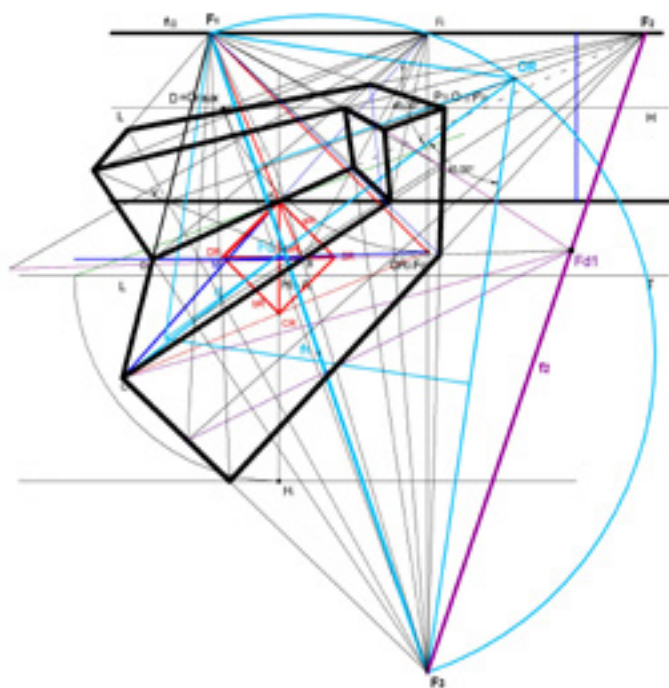


**113**

43

Forma composta por dezasseis cubos  
desenhada numa representação em 3D.  
Fonte própria: desenho do autor assistido  
por computador.



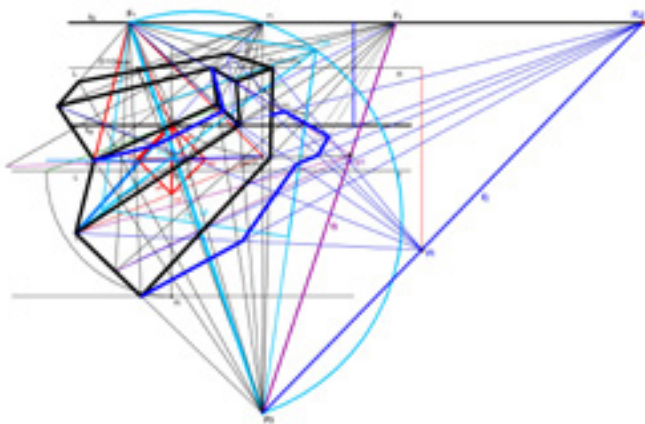


**115**

45

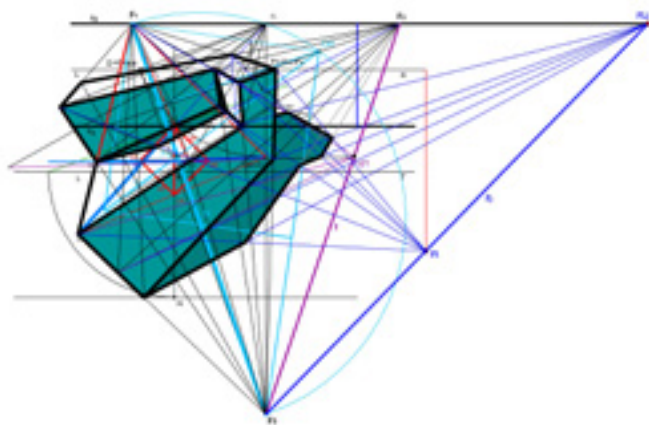
Perspectiva da forma completa, composta por dezasseis cubos com os respectivos traçados das fases ou passos do problema exposto. Fonte própria: desenho do autor assistido por computador.

**116**



46

Perspectiva da forma completa do conjunto composto por dezasseis cubos e das respectivas sombras produzidas no plano da base de rampa. Fonte própria: desenho do autor assistido por computador.

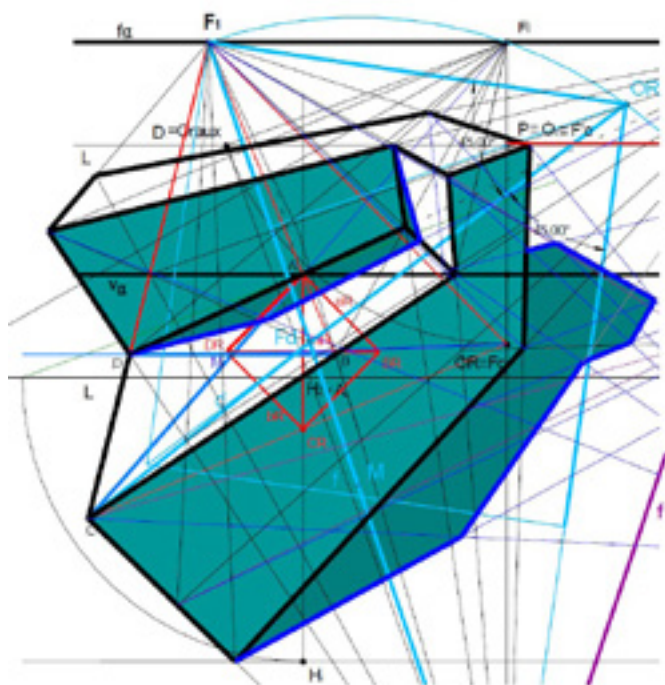


**117**

47

Perspectiva da forma completa do conjunto composto por dezasseis cubos e das respectivas sombras produzidas no plano da base de rampa. Representação das manchas de sombra. Fonte própria: desenho do autor assistido por computador.



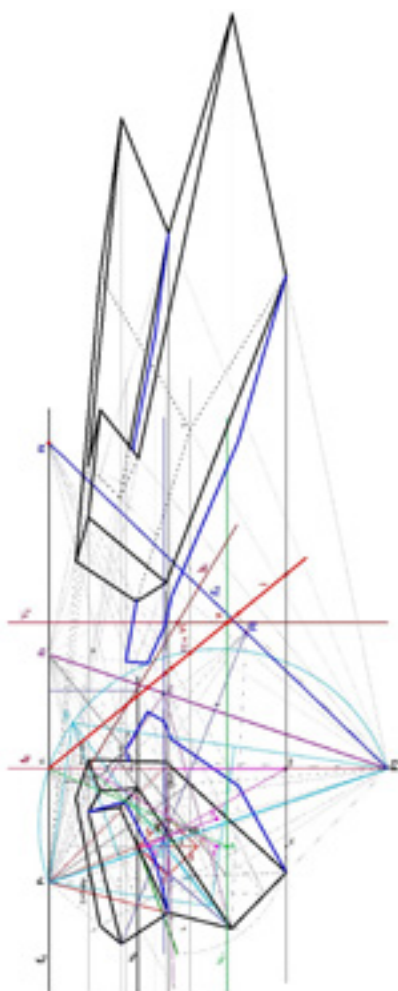


119

49

Ampliação de detalhe da **Figura 47** com a representação das manchas de sombra. Fonte própria: desenho do autor assistido por computador.

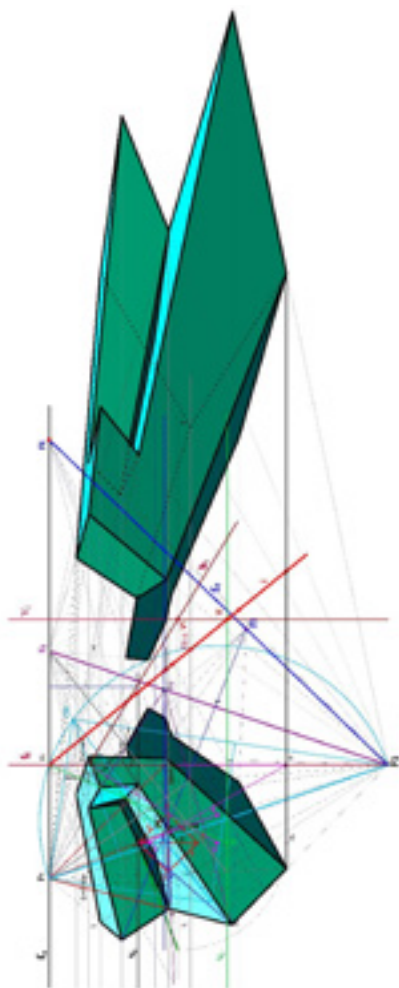




**121**

51

Representação da perspectiva do conjunto e da forma situada à esquerda e do respectivo reflexo situado para a direita do espelho de perfil. Na imagem representam-se apenas as linhas do contorno aparente da forma do objecto, as linhas limites das sombras projectadas e os respectivos reflexos no espelho, não representando as manchas das áreas sombreadas. Fonte própria: desenho do autor assistido por computador.



Este livro com o título *Os Espelhos e o Desenho em Perspectiva Linear*, resulta de um desenvolvimento da nossa aula de seminário das provas de Agregação, concluídas no dia 29 de Abril de 2022, conjugada com a nossa experiência científica, pedagógica e artística no que respeita à utilização e investigação sobre os espelhos, sobretudo no desenho de representação de reflexos de formas, objectos e conjuntos no sistema de perspectiva linear em quadro plano. Começando por referir esta temática em termos históricos e a sua inclusão e aplicação às artes visuais e artes plásticas, do Renascimento à Contemporaneidade, referimos também a nossa experiência artística na utilização de espelhos, particularmente em três exposições por nós efectuadas em 2004, 2005 e 2016, respectivamente em Lisboa e no Porto. Ao mesmo tempo, como a nossa área de investigação está centrada no Desenho e particularmente no desenho geométrico, achámos interessante ver esta temática dos espelhos e da reflectância em espelhos planos aplicada ao desenho geométrico e em particular ao sistema de perspectiva linear, um dos ramos da Geometria Descritiva. Há regras e métodos geométricos muito precisos para se determinar com grande rigor reflexos de formas e de conjuntos sobre superfícies especulares. Neste sentido referimos também no livro o contributo e o desenvolvimento histórico dos autores mais significativos que relacionaram esta temática dos espelhos com a ciência da perspectiva linear. Por fim, apresentamos um exemplo ou um caso mais detalhado e descritivo de um problema ou exercício específico da perspectiva linear de uma forma inclinada e seu reflexo num espelho de perfil, onde podemos observar efeitos curiosos. Os espelhos têm esta particularidade de reflectir novas formas, ou novos conjuntos, mostram a unidade na multiplicidade.

**António Oriol Trindade** é Professor Auxiliar com Agregação na Faculdade de Belas-Artes da Universidade de Lisboa, integrando o Departamento de Desenho da FBAUL. Paralelamente exerce também a actividade de Artista Plástico. Atua na área de Desenho Geométrico, tendo como focos de interesse as Geometrias da Representação e Belas Artes. Publicou um livro em 2015 e tem publicado vários artigos científicos e textos artísticos, tendo já participado em cerca de 60 exposições colectivas no país e no estrangeiro, outros projectos artísticos de encomenda e realizado 19 exposições individuais.

COLEÇÃO  
LIÇÕES DE ARTE  
& DESIGN

Volumes

1. Carlos Vidal
2. João Castro Silva

**b**  
a

cieba

belas-artes  
ulisboa

**fct**

Fundação  
para a Ciência  
e a Tecnologia

ISBN 978-989-8944-89-4