

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Instituto Superior de Economia e Gestão

**INCORPORAÇÃO DO RESSEGURO *EXCESS OF LOSS*
NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA**

Carlos Manuel Saiago

Orientador da dissertação:

Prof. Doutora MARIA DE LOURDES CENTENO

Constituição do júri:

Presidente: - Prof. Doutora MARIA DE LOURDES CENTENO

Vogais: - Prof. Doutor TIAGO PRAÇA NUNES MEXIA

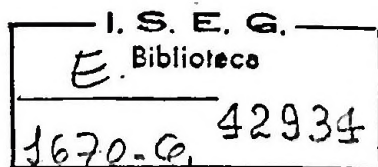
- Prof. Doutor ALFREDO DUARTE EGÍDIO DOS REIS

OUTUBRO 1995

LISBOA

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Instituto Superior de Economia e Gestão



HG8083
S25
1995

INCORPORAÇÃO DO RESSEGURO *EXCESS OF LOSS*
NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA

Carlos Manuel Saiago

Orientador da dissertação:

Prof. Doutora MARIA DE LOURDES CENTENO

Constituição do júri:

Presidente: - Prof. Doutora MARIA DE LOURDES CENTENO

Vogais: - Prof. Doutor TIAGO PRAÇA NUNES MEXIA

- Prof. Doutor ALFREDO DUARTE EGÍDIO DOS REIS

OUTUBRO 1995

LISBOA

CA-11

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Actuariado e Gestão de Riscos Financeiros, na área da Teoria do Risco.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - MODELO CLÁSSICO DE RISCO	
1.1 - Processo de Poisson composto	5
1.2 - Distribuição de Poisson composta	6
1.2.1 - Características básicas da distribuição de Poisson composta	7
1.2.2 - Função de distribuição de Poisson composta	8
1.3 - O processo de reserva	13
1.3.1 - Modelo em tempo contínuo	14
1.3.1.1 - O coeficiente de ajustamento	15
1.3.1.2 - Ruína em tempo contínuo	17
1.3.2 - Modelo em tempo discreto	20
CAPÍTULO 2 - ALGORITMOS PARA O CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA	
2.1 - Em horizonte finito e tempo discreto - Algoritmo de F. DE VYLDER e M.J. GOOVAERTS	23
2.2 - Em horizonte finito e tempo contínuo	29
2.2.1 - Algoritmo de F. DE VYLDER e M.J. GOOVAERTS	29
2.2.2 - Algoritmo de F. DE VYLDER e M.J. GOOVAERTS alterado por D.C.M. DICKSON e H.R. WATERS	31
2.2.3 - Algoritmo de D.C.M. DICKSON e H.R. WATERS.	35
2.3 - Em horizonte infinito e tempo contínuo - Algoritmo de D.C.M. DICKSON e H.R. WATERS	40
2.4 - Considerações às aproximações das probabilidades em tempo contínuo	41
CAPÍTULO 3 - INCORPORAÇÃO DO RESSEGURO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA	
3.1 - Tratados de resseguro	43
3.1.1 - <i>Excess of Loss</i>	43
3.1.2 - <i>Quota-Share</i>	44
3.2 - Processo de reserva, incorporando o resseguro	45
3.3 - Probabilidade de ruína e coeficiente de ajustamento com resseguro	47

3.4 - Implementação de algoritmos para calcular a probabilidade de ruína, incorporando o resseguro	48
3.4.1 - Em horizonte finito	48
3.4.1.1 - Em tempo contínuo	48
3.4.1.2 - Em tempo discreto	51
3.4.2 - Em horizonte infinito e tempo contínuo	53

CAPÍTULO 4 - O EFEITO DO RESSEGURO NA PROBABILIDADE DE RUÍNA

4.1 - Ruína em tempo contínuo e horizonte infinito	56
4.2 - Ruína em tempo contínuo e horizonte finito	91

CONCLUSÃO	101
----------------------------	------------

BIBLIOGRAFIA	103
-------------------------------	------------

AGRADECIMENTOS

Na fase terminal de mais uma das etapas da minha história de vida, quero aqui registrar os meus reconhecidos agradecimentos à Professora Doutora Maria de Lourdes Centeno, que não só me orientou na elaboração deste trabalho, através de críticas e sugestões fundamentadas, como também me incentivou em momentos de maior desmotivação, a não desistir do meu objectivo, porquanto se mostrou disponível, compreensiva e humana.

RESUMO

Nesta dissertação, procurou-se estudar, para alguns exemplos práticos, o comportamento da probabilidade de ruína e coeficiente de ajustamento como função do limite de retenção, aquando da incorporação do resseguro *Excess of Loss*.

Uma vez que, depois de escolhido o tipo de tratado de resseguro a celebrar, subsiste o problema de determinar o montante óptimo a ressegurar, tratou-se este problema segundo dois critérios de optimização:

- 1º. O montante óptimo a ressegurar é aquele que maximiza o coeficiente de ajustamento;
- 2º. O montante óptimo a ressegurar é aquele que minimiza a probabilidade de ruína.

Para a abordagem do segundo critério de optimização, foi necessário não só o estudo de algoritmos para o cálculo recursivo da probabilidade de ruína, como também a sua adaptação para incorporar o resseguro.

O estudo do referido problema efectuou-se em horizonte temporal infinito e em horizonte temporal finito.

Palavras-chave: Probabilidade de ruína, Algoritmos recursivos, Coeficiente de ajustamento, Resseguro, Excess of Loss, Limite de retenção.

INTRODUÇÃO

O propósito desta dissertação é o de estudar o efeito da incorporação do resseguro *Excess of Loss* no cálculo da probabilidade de ruína, em horizonte temporal infinito e horizonte temporal finito, ilustrando os resultados para alguns exemplos numéricos.

Dado um determinado risco associado a uma carteira de uma seguradora, à Teoria da Ruína interessa analisar, do ponto de vista probabilístico, o comportamento deste risco durante um certo período de tempo.

Se neste período, o montante de indemnizações ocorridas exceder o montante de receitas esperadas, ultrapassando um certo nível previamente fixado, estamos perante uma situação que pode pôr em causa a estabilidade económica da seguradora. Assim, a probabilidade deste evento, designada normalmente por *probabilidade de ruína*, é um bom indicador do risco associado à carteira, pelo que há todo o interesse em quantificá-la.

Para o estudo desta probabilidade, recorre-se à construção de modelos matemáticos, baseados em elementos da teoria das probabilidades e dos processos estocásticos, que representem o processo do número de indemnizações ocorridas num dado intervalo de tempo, a distribuição do montante de cada indemnização particular ocorrida e, ainda, o processo composto resultante da conjugação destes dois factores, designado normalmente por processo de *indemnizações agregadas*.

O modelo clássico de risco será descrito no CAPÍTULO 1, revendo, no essencial, os conceitos, definições e notações normalmente utilizadas.

O cálculo da probabilidade de ruína de um risco tem sido um objectivo perseguido desde o início do século. Em alguns casos particulares, é possível determinar uma expressão explícita para o cálculo desta probabilidade em tempo contínuo e horizonte temporal

infinito. No entanto, de uma forma geral, isto não é possível, razão pela qual se desenvolvem algoritmos recursivos para o cálculo destas probabilidades.

Tendo como objectivo uma posterior utilização, alguns destes algoritmos, no contexto de um processo de Poisson composto, serão objecto de estudo no CAPÍTULO 2, visando o cálculo das probabilidades de ruína em horizonte temporal finito¹ e tempo discreto (DE VYLDER e GOOVAERTS (1988)), em horizonte temporal finito e tempo contínuo (DE VYLDER e GOOVAERTS (1988), DICKSON e WATERS (1991)) e em horizonte temporal infinito e tempo contínuo (DICKSON e WATERS (1991)).

O *coeficiente de ajustamento* é outra ferramenta poderosa nesta análise de risco, porquanto é um valor relativamente simples e rápido de calcular, possibilitando determinar um majorante para a probabilidade de ruína, denominado por majorante de *Lundberg*.

Visto que a probabilidade de ruína é um indicador do risco associado à carteira, interessa desenvolver mecanismos que promovam a redução desta probabilidade. Um destes mecanismos consiste no *resseguro* - forma como a seguradora, mediante o pagamento de um prémio, transfere parte do risco da carteira para outra seguradora, procurando precaver-se de perdas que lhe originem dificuldades financeiras e que possam até pôr em causa a solvência da empresa.

Os problemas que se colocam directamente à seguradora, ao procurar ressegurar um dado risco, são, essencialmente, sobre a determinação da forma óptima de resseguro e quanto ao montante óptimo a ressegurar.

¹Os algoritmos para horizonte temporal finito exigem maiores requisitos técnicos para processamento em computador, que se não estiverem disponíveis dificultam grandemente a sua utilização tanto nos aspectos de memória necessária para manter os valores calculados como em tempo dispendido em todo o processo.

Das formas de resseguro, proporcionais e não proporcionais ou qualquer outra que resulte da combinação destas duas, no CAPÍTULO 3, faz-se apenas uma breve referência aos tratados do tipo *Excess of Loss* (não proporcional) e *Quota -Share* (proporcional). Dado o objectivo da dissertação, tornou-se ainda necessário adaptar alguns dos algoritmos para contemplar a incorporação do resseguro, nomeadamente em horizonte infinito e tempo contínuo e em horizonte finito e tempo contínuo.

Escolhido o tipo de tratado de resseguro a celebrar, subsiste o problema de determinar o montante óptimo a ressegurar, isto é, determinar o limite de retenção que minimize a probabilidade de ruína.

Como resposta a este problema, vários estudos têm sido elaborados visando o efeito do resseguro no coeficiente de ajustamento e considerando que o limite de retenção óptimo é aquele que maximiza este coeficiente, dado que esse valor minimiza o majorante de *Lundberg* (por exemplo, WATERS (1979), ANDREADAKIS (1980), WATERS (1983), CENTENO (1986), CENTENO (1991)).

Outros estudos há que abordam o efeito do resseguro na probabilidade de ruína em horizonte temporal infinito (por exemplo DICKSON e WATERS (1994)) e em horizonte temporal finito (por exemplo DICKSON e WATERS (1994), CENTENO (1995)).

DICKSON e WATERS (1994) mostraram, para alguns exemplos numéricos, que, quando o processo de indemnizações agregadas segue um processo de Poisson composto e o prémio de resseguro é calculado pelo princípio² do valor esperado com coeficiente de carga dependente do limite de retenção, o limite de retenção que minimiza a probabilidade de ruína em horizonte infinito, dada a reserva inicial, tende para o limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, à medida que tal reserva aumenta.

² "Princípios de cálculo de prémios". Veja para o efeito GERBER (1979), pág.66

Será interessante verificar, também para alguns exemplos numéricos, se o mesmo acontece quando são utilizados outros princípios para o cálculo do prémio de resseguro.

Assim, no CAPÍTULO 4, para cada um dos exemplos considerados, o objectivo será o de determinar o limite de retenção óptimo que maximiza o coeficiente de ajustamento e depois o que minimiza a probabilidade de ruína, dado o princípio do cálculo do prémio de resseguro, combinação de coeficientes de carga de seguro directo e resseguro, e distribuição do montante das indemnizações particulares.

Encontram-se casos interessantes, onde o coeficiente de ajustamento e a probabilidade de ruína são funções bimodais do limite de retenção e onde o comportamento do majorante de *Lundberg* é algo diferente do da probabilidade de ruína.

Relativamente aos exemplos estudados, em que se calculam também as probabilidades de ruína em horizonte finito, compara-se o comportamento desta probabilidade com a de ruína em horizonte infinito, como funções do limite de retenção. Faz-se ainda a comparação dos limites de retenção que, respectivamente, minimiza a probabilidade de ruína em horizonte finito, em horizonte infinito e que maximiza o coeficiente de ajustamento.

Procurar-se-á ainda, tal como em DICKSON e WATERS (1994), verificar a relação que existe entre a probabilidade de ruína e o majorante de *Lundberg*, como funções do limite de retenção.

CAPÍTULO 1 - MODELO CLÁSSICO DE RISCO

1.1 - PROCESSO DE POISSON COMPOSTO

Dado um determinado risco (uma apólice ou um conjunto de apólices) que gera indemnizações, o modelo matemático é construído com base em dois processos estocásticos: o processo do *número de indemnizações* ocorridas no intervalo $(0, t]$, representado por $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, e o processo do montante global de indemnizações ocorridas nesse intervalo, normalmente designado por *indemnizações agregadas* e representado por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Hipóteses e características dos processos $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ (PANJER e WILLMOT (1992), pág.169):

Como a $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ corresponde o processo de indemnizações agregadas ocorridas no intervalo $(0, t]$, representa-se por

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i ,$$

onde $X_0 \equiv 0$ e X_i , com $i = 1, 2, \dots, N(t)$ representa o montante da i -ésima indemnização ocorrida no intervalo $(0, t]$.

Considera-se que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é tal que:

- (i) $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de valores inteiros;
- (ii) $\{X_i\}_{i=1, 2, \dots, N(t)}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição G e independentes de $N(t)$.

Este processo é designado por processo composto.

No caso particular em que o processo do número de indemnizações, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, é um processo de Poisson, o processo das indemnizações agregadas, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, denomina-se por *Processo de Poisson Composto*.

Daqui em diante, supõe-se sempre que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ segue um processo de Poisson.

1.2 - DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COMPOSTA

Seja S a variável aleatória, representando o montante das indemnizações agregadas ocorridas num determinado período, e N a variável aleatória, representando o número de indemnizações ocorridas nesse período, isto é,

$$S = \sum_{i=1}^N X_i .$$

Se F for a função de distribuição de S , designa-se por *distribuição composta*.

Conhecidas as funções de distribuição do número de indemnizações para um dado período de tempo e do montante das indemnizações particulares, pode-se obter a função distribuição das indemnizações agregadas, para o mesmo período (BEARD (1984), pág.51).

A probabilidade condicionada de que, se o número de indemnizações é exactamente k , a soma dessas k indemnizações seja menor ou igual a s , é representada por $G_k(s)$. Então,

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G_k(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k G^{k*}(s) \quad , s > 0 \quad , \quad (1.1)$$

onde $p_k = \Pr[N = k]$ e G^{k^*} representa a k -ésima convolução da função distribuição G , com

$$G^{0^*} = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} .$$

De modo semelhante, a função de densidade de probabilidade ou função de probabilidade de S será

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k g^{k^*}(s) \quad , s > 0 .$$

Se N tiver distribuição de Poisson, ou seja,

$$\Pr[N = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda > 0 ,$$

diz-se que S tem *distribuição de Poisson composta* com parâmetro λ . Neste caso, tem-se que o valor esperado, a variância e a função geradora de momentos da variável aleatória N , são respectivamente:

$$\begin{aligned} E[N] &= \lambda ; \\ \text{Var}[N] &= \lambda ; \\ M_N(t) &= e^{\lambda(e^t - 1)} . \end{aligned}$$

1.2.1 - CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COMPOSTA

Seja G a função de distribuição das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas X_i 's e X uma variável aleatória com a mesma distribuição. Seja

$$a_k = E[X^k], \quad \text{o } k\text{-ésimo momento em relação à origem de } X;$$

$$M_X(r) = E[e^{rX}], \quad \text{a função geradora de momentos de } X, \text{ montante das} \\ \text{indemnizações particulares;}$$

$$M_N(r) = E[e^{rN}], \quad \text{a função geradora de momentos de } N, \text{ número de} \\ \text{indemnizações;}$$

$$M_S(r) = E[e^{rS}], \quad \text{a função geradora de momentos de } S, \text{ indemnizações} \\ \text{agregadas.}$$

Tem-se que o valor esperado, a variância, o terceiro momento central e a função geradora de momentos da variável aleatória S , são respectivamente:

$$E[S] = \lambda \times a_1 ;$$

$$Var[S] = \lambda \times a_2 ;$$

$$\mu_3[S] = \lambda \times a_3 ;$$

$$M_S(r) = M_N(\log M_X(r)) = e^{\lambda(M_X(r)-1)} .$$

1.2.2 - FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE POISSON COMPOSTA

O problema de cálculo de (1.1) não é fácil, mas PANJER (1981) provou que F pode ser calculada recursivamente no caso de N ser ela própria do tipo recursivo, ou seja, no caso de N ser tal que

$$\Pr[N = k + 1] = \left(a + \frac{b}{k + 1} \right) \cdot \Pr[N = k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

com a e b constantes e das indemnizações X tomarem valores nos inteiros positivos.

Teorema 1.1 (PANJER (1981))

No caso em que N é do tipo (1.2) e X tomar valores nos inteiros positivos, a função de probabilidade de S, f , pode ser calculada usando a seguinte fórmula recursiva:

$$f(i) = \sum_{j=1}^i \left(a + b \frac{j}{i} \right) \cdot g(j) \cdot f(i-j), \quad i = 1, 2, \dots$$
$$f(0) = p_0$$

onde g representa a função de probabilidade de X .

Teorema 1.2 (DAYKIN (1994), pág. 120)

No caso em que N é do tipo (1.2) e de X tomar valores nos inteiros não negativos, a função de probabilidade de S, f , pode ser calculada usando a seguinte fórmula recursiva:

$$f(i) = \frac{1}{1 - a \cdot g(0)} \sum_{j=1}^i \left(a + b \frac{j}{i} \right) \cdot g(j) \cdot f(i-j), \quad i = 1, 2, \dots$$
$$f(0) = \begin{cases} p_0 & , \text{se } g(0) = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot g^k(0) & , \text{se } g(0) > 0 \end{cases} .$$

No caso em que N tem distribuição de Poisson com parâmetro λ , verifica (1.2) e tem-se que $a = 0$ e $b = \lambda$.

Quando a distribuição das indemnizações particulares, G , é do tipo contínuo, com suporte nos reais positivos, a distribuição das indemnizações agregadas tem um átomo na origem e é do tipo contínuo na parte positiva da recta.

Uma solução utilizada por DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) para possibilitar a utilização da fórmula recursiva de *Panjer* num modelo discreto, de forma a obter valores aproximados para a distribuição das indemnizações agregadas, consiste em substituir a função de distribuição G das indemnizações particulares por uma distribuição discreta, G^d , tomando massas de probabilidade g_k nos pontos k ($k = 0, 1, 2, \dots$). tal que

$$G^d(k) = g_0 + g_1 + \dots + g_k = \int_k^{k+1} G(x) dx \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Este processo de *discretização* permite obter uma distribuição que aproxima a distribuição inicial, mantendo o valor esperado, β , de uma indemnização particular, uma vez que

$$\begin{aligned} G^d(0) &= \int_0^1 G(x) dx & \Rightarrow & & 1 - G^d(0) &= \int_0^1 (1 - G(x)) dx \\ G^d(1) &= \int_1^2 G(x) dx & \Rightarrow & & 1 - G^d(1) &= \int_1^2 (1 - G(x)) dx \\ & \dots & & & \dots & \\ G^d(k) &= \int_k^{k+1} G(x) dx & \Rightarrow & & 1 - G^d(k) &= \int_k^{k+1} (1 - G(x)) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k (1 - G^d(i)) &= \int_0^{k+1} (1 - G(x)) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^k (1 - G^d(i)) \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{k+1} (1 - G(x)) dx \right) , \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1 - G^d(i)) = \int_0^{\infty} (1 - G(x)) dx .$$

Quanto maior for β , melhor será a aproximação. Note-se que se pode efectuar sempre uma alteração da unidade monetária de forma a tornar β elevado.

Exemplo 1.1

Considerando que um determinado risco dá origem a sinistros, cujo montante de cada indemnização particular tem distribuição exponencial de média 1 unidade monetária, isto é,

$$G(x) = 1 - e^{-x} \quad , x > 0$$

tem-se que $\Pr[X \leq 0.5] = G(0.5) = 0.393469$.

Compare-se os resultados de $G(0.5)$ com o obtido pelo processo de discretização (1.3).

Começa-se por rescalonar a função de distribuição G de modo a que o valor esperado seja β . Utilizar um parâmetro de discretização β , equivale a mudar a unidade monetária para $1/\beta$ da unidade monetária anterior.

Por (1.3), vem que

$$\begin{cases} g_0 = 1 - \beta(1 - e^{-1/\beta}) \\ g_k = \beta e^{-(k+1)/\beta} (e^{1/\beta} - 1)^2 \quad , \quad (k \geq 1) \end{cases} \quad (1.4)$$

Deste modo, aplicando (1.4), resultam os valores da TABELA 1.1 para diferentes parâmetros de discretização β , donde

$$G^d(0.5) = 0.4083830 \quad , \text{ se } \beta = 20$$

$$G^d(0.5) = 0.3873634 \quad , \text{ se } \beta = 50$$

$$G^d(0.5) = 0.3964919 \quad , \text{ se } \beta = 100.$$

β	20	50	100
k	gk	gk	gk
0	0.0245885	0.0099337	0.0049834
1	0.0475714	0.0196046	0.0099006
2	0.0452513	0.0192164	0.0098021
3	0.0430444	0.0188359	0.0097045
4	0.0409451	0.0184629	0.0096080
5	0.0389482	0.0180974	0.0095124
6	0.0370486	0.0177390	0.0094177
7	0.0352417	0.0173877	0.0093240
8	0.0335230	0.0170434	0.0092312
9	0.0318881	0.0167060	0.0091394
10	0.0303329	0.0163752	0.0090484
11		0.0160509	0.0089584
12		0.0157331	0.0088693
13		0.0154215	0.0087810
14		0.0151162	0.0086937
15		0.0148169	0.0086072
16		0.0145235	0.0085215
17		0.0142359	0.0084367
18		0.0139540	0.0083528
19		0.0136777	0.0082697
20		0.0134068	0.0081874
21		0.0131414	0.0081059
22		0.0128812	0.0080253
23		0.0126261	0.0079454
24		0.0123761	0.0078663
25			0.0077881
26			0.0077106
27			0.0076339
28			0.0075579
29			0.0074827
30			0.0074082
31			0.0073345
32			0.0072616
33			0.0071893
34			0.0071178
35			0.0070469
36			0.0069768
37			0.0069074
38			0.0068387
39			0.0067706
40			0.0067033
41			0.0066366
42			0.0065705
43			0.0065051
44			0.0064404
45			0.0063763
46			0.0063129
47			0.0062501
48			0.0061879
49			0.0061263
50			0.0060654
Σ	0.4083830	0.3873634	0.3964919

TABELA 1.1

1.3 - O PROCESSO DE RESERVA

Entenda-se por reserva de risco num dado instante (BOWERS (186), pág.345), a reserva inicial mais os prémios entrados, menos o total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no período em causa, que é denominado por indemnizações agregadas. (Note-se que esta é uma definição matemática conveniente, mas não corresponde a uma definição "contabilística" de reserva, porque, por exemplo, são ignorados os dividendos e/ou prejuízos das aplicações financeiras das provisões e os juros decorrentes dessas aplicações, contando, portanto, apenas com os prémios e indemnizações que possam afectar a reserva).

Para $t \geq 0$, seja

$U(t)$ a reserva de risco da seguradora no instante t ; $u = U(0)$, reserva inicial;

$\bar{S}(t)$ o montante de indemnizações agregadas até ao instante t ;

$P(t)$ o montante de prémios cobrados pela seguradora até ao instante t , deduzidas as despesas administrativas e de gestão. Assume-se que a cobrança dos prémios é efectuada a uma taxa constante. $P > 0$, isto é, $P(t) = P \cdot t$;

então

$$U(t) = u + P \cdot t - S(t) \quad , t \geq 0 . \quad (1.5)$$

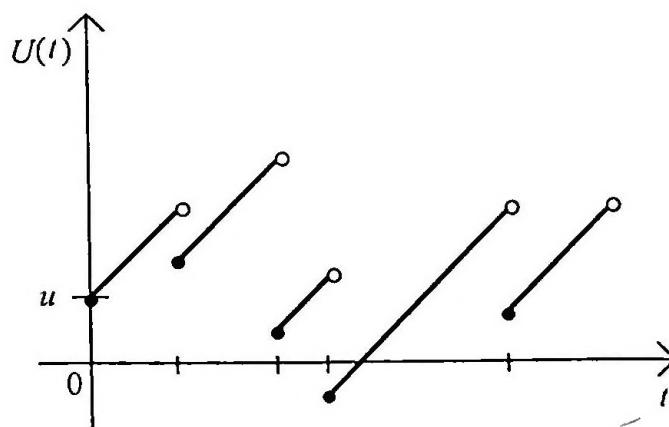


FIGURA 1.1 - Uma trajetória do processo de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$.

Note-se que a reserva cresce linearmente com t , excepto quando ocorre uma indemnização, o que "induz" um decréscimo da reserva no montante da indemnização ocorrida. Como a FIGURA 1.1 ilustra, a reserva pode tornar-se negativa num dado instante t . Quando tal acontece pela primeira vez, diz-se que ocorreu *ruína*. Este termo técnico não é equivalente a insolvência. Num caso real, pode ocorrer ruína, sem o sentido que a palavra sugere, pois considerados todos os factores, o fundo da seguradora pode ser positivo, possibilitando restaurar a reserva para uma posição positiva. No entanto, uma medida útil do risco financeiro, na organização seguradora, é obtida calculando a probabilidade de ruína como consequência da variação do montante de reserva.

O estudo da ruína pode ser feito em horizonte finito ou horizonte infinito e em tempo discreto ou tempo contínuo.

1.3.1 - MODELO EM TEMPO CONTÍNUO

Seja

$$T = \inf\{t: t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0\}$$

a variável aleatória que representa o instante em que a ruína ocorre (se $T = +\infty$, tem-se que $U(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, ou seja, a ruína não ocorre).

Representa-se por

$$\Psi(u) = \Pr[T < \infty | u]$$

a *probabilidade de ruína em horizonte infinito*, considerada como função da reserva inicial u , e

$$\Psi(u, t) = \Pr[T < t | u]$$

a *probabilidade de ruína em horizonte finito* (antes de decorridos t períodos de tempo), como função da reserva inicial u , fixado um dado t , $t > 0$.

1.3.1.1 - O COEFICIENTE DE AJUSTAMENTO

O processo de reserva, $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, pode ser estudado pela relação (1.5), a partir do processo de indemnizações agregadas $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Definido o processo de reserva, desenvolve-se o conceito de coeficiente de ajustamento, ferramenta que pode ser usada para determinar um minorante e um majorante para $\Psi(u)$ e uma expressão explícita para $\Psi(u)$, por exemplo no caso em que as indemnizações particulares têm distribuição exponencial.

Assume-se que

$$P > \lambda E(X) \text{ ,}$$

e seja $\theta (\theta > 0)$, tal que

$$P = (1 + \theta)\lambda E(X) \text{ .}$$

θ é normalmente designado por *coeficiente de carga*.

Esta hipótese é fundamental, porque se prova que quando $\theta \rightarrow 0$ ou $\theta < 0$, tem-se $\Psi(u) = 1$, ou seja, a ruína é certa. Por esta razão, manter-se-á sempre a hipótese de que $\theta > 0$.

Seja $]-\infty, \gamma[$, com $\gamma > 0$, o maior intervalo onde a função geradora de momentos de G existe e assume-se que $M_X(r) \xrightarrow{r \rightarrow \gamma} \infty$.

Nestas condições, se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ seguir um processo de Poisson composto, define-se *coeficiente de ajustamento* ou *coeficiencia de insolvência*, como sendo a única raiz positiva $r = R$ de

$$\lambda + P.r = \lambda.M_X(r) \quad , r < \gamma \quad (1.6)$$

que é equivalente a

$$1 + (1 + \theta)E(X)r = M_X(r) \quad , r < \gamma \quad (1.7)$$

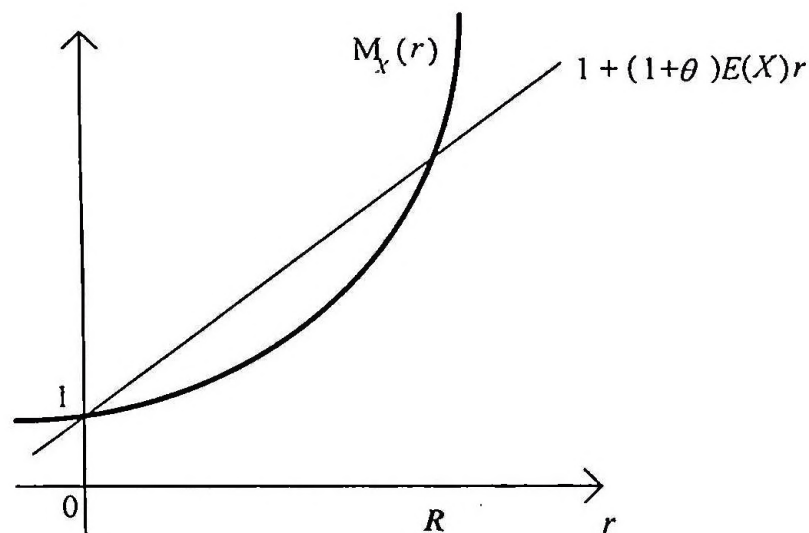


FIGURA 1.2 - Definição de coeficiente de ajustamento.

O lado esquerdo da equação (1.7) é uma função linear de r , enquanto que o lado direito é uma função crescente positiva de r , que tende para infinito à medida que $r \rightarrow \gamma$. Para além disso, a segunda derivada do lado direito de (1.7) é positiva, donde se conclui que é uma função convexa de r .

A hipótese de que $P > \lambda E(X)$ quer dizer que o declive, $(1 + \theta)E(X)$, do lado esquerdo de (1.7) excede o declive, $M'_X(0) = E[X]$, do lado direito no ponto $r = 0$.

Da FIGURA 1.2, vê-se que a equação (1.7) tem duas soluções.

No caso da distribuição exponencial com parâmetro α , γ é igual a α , tendo-se que a equação (1.7), toma a forma

$$1 + \frac{(1 + \theta)}{\alpha} r = \frac{\alpha}{\alpha - r} .$$

donde resulta que

$$R = \frac{\theta \times \alpha}{1 + \theta} . \tag{1.8}$$

1.3.1.2 - RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO

Existe uma relação entre o coeficiente de ajustamento e a probabilidade de ruína, dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.3 (BOWERS (1986), pág.356)

Para $u \geq 0$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-Rt(T)}, T < \infty]} \tag{1.9}$$

Da FIGURA 1.2, vê-se que se $\theta \rightarrow 0$, a secante aproxima-se à tangente a $M_X(r)$ quando $r = 0$, o que implica que $R \rightarrow 0$. Neste caso, por (1.9) resulta que $\psi(u) = 1$, ou seja, a ruína é certa.



Como $U(t), t > 0$, para o caso de $\theta < 0$, será sempre menor que a correspondente $U(t)$ quando $\theta \rightarrow 0$. então se a ruína é certa quando $\theta \rightarrow 0$, é ainda certa para $\theta < 0$. Por esta razão, considera-se sempre a já referida hipótese de que $\theta > 0$.

Em geral, a determinação explícita do denominador de (1.9) não é possível. No entanto, desta expressão pode-se derivar desigualdades.

Uma vez que $U(T)$ para $T < \infty$ é negativa, o denominador de (1.9) excede 1, resultando que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad . \quad (1.10)$$

Esta desigualdade é conhecida por *desigualdade de Lundberg* e fornece um majorante para a probabilidade de ruína.

Se a distribuição do montante de indemnizações particulares for limitada, isto é, $G(m) = 1$ para algum m finito, vem que, para $T < \infty$, se tem $U(T) > -m$, uma vez que o montante de reserva antes de ocorrer a ruína era positiva. Assim,

$$e^{-RU(T)} < e^{Rm} \quad ,$$

donde

$$E[e^{-RU(T)} | T < \infty] < e^{Rm} \quad .$$

Então,

$$\psi(u) \geq e^{-Ru} e^{-Rm} = e^{-R(u+m)} \quad .$$

Alguns autores sugerem o uso da aproximação $\psi(u) \cong e^{-\theta u}$ que, dado (1.10), exagera a probabilidade de ruína.

O caso em que $u = 0$ é uma das exceções em que é possível a determinação explícita de uma expressão para a probabilidade de ruína, $\psi(u)$. Nestas condições, prova-se que (BOWERS (1986), pág.361),

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \quad . \quad (1.11)$$

Outro caso especial da aplicação do *Teorema 1.3*, permitindo também determinar uma expressão explícita para $\psi(u)$, verifica-se quando o montante de indemnizações particulares tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$.

Como o denominador de (1.9) é calculado a partir da distribuição condicional da reserva negativa, $U(T)$, dado que a ruína ocorre (o que acontece se $T < \infty$), determinando a função de distribuição de probabilidade da variável aleatória $U(T)|T < \infty$, consegue-se resolver o problema.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \Pr[U(T) > y | T < \infty] &= \Pr[X > \bar{u} + y | X > \bar{u}] =^3 \\ &= \Pr[X > y] = \\ &= 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = e^{-\alpha y} \quad , \end{aligned}$$

logo,

³ A distribuição Exponencial não tem "memória". Veja para o efeito MURTEIRA (1990), pág.285.

$$E\left[e^{-R(T)} | T < \infty\right] = \frac{\alpha}{\alpha - R} \Rightarrow \psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\frac{\alpha}{\alpha - R}} = \frac{\alpha - R}{\alpha} e^{-Ru} .$$

Como no caso da exponencial, por (1.8), se tem $R = \frac{\theta \cdot \alpha}{1 + \theta}$, vem que

$$\psi(u) = \frac{\alpha - \frac{\theta \cdot \alpha}{1 + \theta}}{\alpha} e^{-\frac{\theta \cdot \alpha}{1 + \theta} u} = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta \cdot \alpha}{1 + \theta} u} . \quad (1.12)$$

1.3.2 - MODELO EM TEMPO DISCRETO

Descreve-se agora, de uma forma sucinta, um modelo análogo ao apresentado anteriormente, no qual se considera a variável tempo discreta.

Seja U_n a reserva da seguradora no instante n , ($n=0, 1, 2, \dots$), isto é,

$$U_n = u + n \times P - S_n ,$$

onde $u = U_0$ é a reserva inicial, P o montante de prémios cobrados por unidade de tempo e S_n o montante total de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos primeiros n períodos de tempo.

Assume-se ainda que

$$S_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i ,$$

onde Z_i representa o montante de indemnizações agregadas ocorridas no período i , e $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Considera-se ainda que $P > E(Z)$, onde Z é uma variável aleatória com a mesma distribuição de Z_i .

Seja

$$T = \inf\{n: U_n < 0\}$$

a variável aleatória que representa o momento em que a ruína ocorre (se $U_n \geq 0, \forall n$ então $T = \infty$), então

$$\tilde{\psi}(u) = \Pr\left[\tilde{T} < \infty | u\right]$$

representa a probabilidade de ruína em tempo discreto, dada a reserva inicial u .

Neste modelo, surge um resultado análogo ao enunciado no *Teorema 1.3*:

Teorema 1.4 (BOWERS (1986), pág.356)

Para $u \geq 0$,

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E\left[e^{-\tilde{R}U_i} | \tilde{T} < \infty\right]} . \quad (1.13)$$

Para este modelo, o coeficiente de ajustamento, \tilde{R} , define-se como sendo a única raiz positiva da equação

$$E\left[e^{r(Z-P)}\right] = 1 \Leftrightarrow E\left[e^{rZ}\right]e^{-rP} = 1 \Leftrightarrow E\left[e^{rZ}\right] = e^{rP} \Leftrightarrow M_Z(r) = e^{rP} .$$

De (1.13), conclui-se, de forma análoga a (1.10), que

$$\psi(u) \leq e^{-\tilde{R}u} .$$

No caso particular em que as indenizações agregadas têm distribuição Poisson composta com parâmetro λ , sendo G a função de distribuição do montante de indenizações particulares, tem-se que o coeficiente de ajustamento \tilde{R} é tal que $\tilde{R} = R$.

Demonstração:

$$M_Z(r) = e^{rP} \Leftrightarrow e^{\lambda(M_X(r)-1)} = e^{rP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(M_X(r) - 1) = rP \Leftrightarrow \lambda + P.r = \lambda.M_X(r)$$

$$\therefore \tilde{R} = R$$

■

CAPÍTULO 2 - ALGORITMOS PARA O CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA

2.1 - EM HORIZONTE FINITO E TEMPO DISCRETO

ALGORITMO DE F. DE VYLDER E M.J. GOOVAERTS

DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) desenvolveram um algoritmo para o cálculo numérico das probabilidades de ruína em horizonte finito no modelo de risco em tempo discreto, caso o número de indemnizações siga um processo de Poisson. A partir destas probabilidades, é possível calcular aproximações às probabilidades de ruína em horizonte finito e tempo contínuo.

1. HIPÓTESES E NOTAÇÕES CONSIDERADAS NO MODELO DE RISCO EM TEMPO CONTÍNUO

Como referido, supõe-se que o número de indemnizações segue um processo de Poisson com intensidade λ . Por comodidade de notação, e tendo em conta o processo de reserva descrito na secção 1.3, seja

N_t o número de indemnizações ocorridas no intervalo $[0, t]$;

X_k ($X_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$), a variável aleatória representando o montante da k -ésima indemnização particular;

S_t o montante de indemnizações agregadas no intervalo $[0, t]$;

e

$U_t(u)$ a reserva de risco no instante t , para uma dada reserva inicial u , isto é,

$$U_t(u) = u + P \times t - S_t$$

com $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$

e

$$P = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot E[X_i] \quad (2.1)$$

é o prémio cobrado, sendo θ ($\theta \geq 0$) o coeficiente de carga.

(P é considerado fixo e daqui em diante não é mencionado explicitamente).

2. HIPÓTESES E NOTAÇÕES CONSIDERADAS NO MODELO DE RISCO EM TEMPO DISCRETO

Seja Y_m ($m = 1, 2, \dots$) o montante total de indemnizações ocorridas durante o m -ésimo período, isto é.

$$Y_m = \sum_{i=N_{m-1}+1}^{N_m} X_i .$$

Supõe-se que $Y_m \geq 0$ e que Y_1, Y_2, \dots são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. O montante de indemnizações em $[0, n]$ é

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

e a reserva de risco no instante n é

$$U_n(u) = u + P \cdot n - S_n .$$

Representa-se ainda por

$$\Omega_{1,n}(u) = \Pr[U_1(u) \geq 0, U_2(u) \geq 0, \dots, U_n(u) \geq 0]$$

a probabilidade de sobrevivência nos instantes $1, 2, \dots, n$ correspondente à reserva inicial u .

A probabilidade de ruína, em cada um dos instantes $1, 2, \dots, n$ é

$$\Psi_{1,n}(u) = 1 - \Omega_{1,n}(u) ,$$

sendo

$$\Omega_{1,n}(u) = \Pr[Y_1 \leq u + P, Y_1 + Y_2 \leq u + 2P, \dots, Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \leq u + nP] .$$

Se $n = 1$, vem que

$$\Omega_{1,1}(u) = \Pr[Y_1 \leq u + P] = G(u + P) \quad (2.2)$$

onde G é a função de distribuição de Y_m e, condicionando $Y_1 = y$, vem que

$$\Omega_{1,n}(u) = \int_0^{u+P} \Omega_{1,n-1}(u + P - y) dG(y) \quad (n \geq 2) . \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3), obtêm-se ainda as relações para as probabilidades de ruína:

$$\Psi_{1,1}(u) = 1 - G(u + P) \quad (2.4)$$

e

$$\Psi_{1,n}(u) = 1 - G(u + P) + \int_0^{u+P} \Psi_{1,n-1}(u + P - y) dG(y) \quad (n \geq 2) . \quad (2.5)$$

3. O CASO EM QUE O MONTANTE DE INDEMNIZAÇÕES PARTICULARES TEM DISTRIBUIÇÃO DISCRETA

Partindo do princípio que Y_m é um valor inteiro, seja

$$g_j = \Pr[Y_m = j], \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Então,

$$G(k) = \Pr[Y_m \leq k] = \sum_{l=0}^k g_l, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Assume-se ainda que u e P são inteiros. De (2.2) e (2.3), vem que

$$\Omega_{1,1}(u) = \sum_{j=0}^{u+P} g_j \quad (2.6)$$

e

$$\Omega_{1,n}(u) = \sum_{j=0}^{u+P} \Omega_{1,n-1}(u+P-j)g_j \quad (n \geq 2) \quad (2.7)$$

Conhecidos os valores de g_0, g_1, \dots é possível o cálculo recursivo de $\Omega_{1,1}, \Omega_{1,2}, \dots$. Para o cálculo de $\Omega_{1,\bar{n}}(\bar{u})$, por (2.7), é preciso calcular $\Omega_{1,\bar{n}-1}(u)$ para todo $u \leq \bar{u} + P$. Mas para calcular $\Omega_{1,\bar{n}-1}(u)$ para todo $u \leq \bar{u} + P$, é necessário calcular $\Omega_{1,\bar{n}-2}(u)$ para todo o $u \leq \bar{u} + 2P$ e assim sucessivamente. Ou seja, urge calcular $\Omega_{1,n}(u)$ ($n \leq \bar{n}$), para todo o $u \leq \bar{u} + (\bar{n} - n)P$.

Para $n = 1$, por (2.6), é preciso calcular g_j , para todo $j \leq \bar{u} + \bar{n}P$.

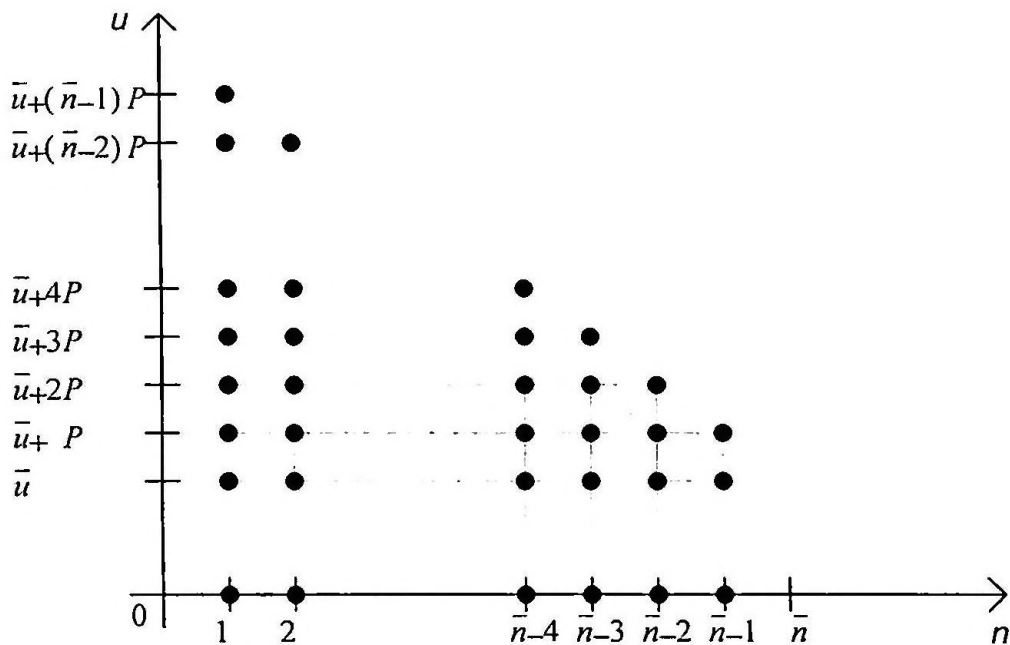


FIGURA 2.1 - Combinações de u e n , cujos valores de $\Omega_{1,n}(u)$ são necessários para calcular $\Omega_{1,\bar{n}}(\bar{u})$.

As versões discretas de (2.4) e (2.5) serão

$$\Psi_{1,1}(u) = 1 - G(u + P) \quad (u \leq \bar{u} + (n-1)P) \quad (2.8)$$

$$\text{e } \Psi_{1,n}(u) = 1 - G(u + P) + \sum_{j=0}^{u+P} \Psi_{1,n-1}(u + P - j)g_j, \quad (n \geq 2 : u \leq \bar{u} + (\bar{n} - n)P). \quad (2.9)$$

Dado que o algoritmo envolve grande número de cálculos, com conseqüente demora de tempo de processamento e erros de arredondamento, os referidos autores debruçaram-se ainda sobre o problema de como pequenas probabilidades podem ser desprezadas, de forma a limitar os erros de arredondamento e reduzir o tempo de processamento em computador.

Fixando um dado ε ($\varepsilon > 0$), que se pretende pequeno, o objectivo é o de aproximar as funções G e $\Psi_{1,n}$ por funções G^ε e $\Psi_{1,n}^\varepsilon$ (ε é um índice, nunca um expoente e é designado por *parâmetro de truncagem*). DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) provaram que, tal como estas funções serão definidas, o máximo erro cometido ao aproximar $\Psi_{1,n}$ por $\Psi_{1,n}^\varepsilon$ será de $3n\varepsilon$, ou seja, $\Psi_{1,n}(u) - \Psi_{1,n}^\varepsilon(u) \leq 3n\varepsilon$, para todo o $n = 1, 2, \dots$ e todo o $u = 0, 1, 2, \dots$.

4. O PROCEDIMENTO DE TRUNCAGEM

Dado $\varepsilon > 0$ fixo, seja $k_0 \in \{0, 1, \dots, \bar{u} + \bar{n}P\}$, tal que $G(k_0) \geq 1 - \varepsilon$. Define-se G^ε , da seguinte forma:

$$G^\varepsilon(j) = \begin{cases} G(j) & , j \leq k_0 \\ 1 & , j > k_0 \end{cases} .$$

Assim, para todo o j ,

$$G(j) \leq G^\varepsilon(j) \text{ e } G^\varepsilon(j) - G(j) \leq \varepsilon .$$

Seja

$$\Psi_{1,1}^\varepsilon(u) = \begin{cases} 1 - G^\varepsilon(u + P) & (u \leq u_1) \\ 0 & (u > u_1) \end{cases} \quad (2.10)$$

onde u_1 é tal que

$$\Psi_{1,1}^\varepsilon(u_1) \leq \varepsilon .$$

Deste modo, sucessivamente para $n = 2, 3, \dots$, define-se

$$\Psi_{1,n}^\varepsilon(u) = \begin{cases} 1 - G^\varepsilon(u + P) + \sum_{j=0}^{\min(u+P, k_n)} \Psi_{1,n-1}^\varepsilon(u + P - j)g_j & (u \leq u_n) \\ 0 & (u > u_n) \end{cases} \quad (2.11)$$

onde u_n é tal que $\Psi_{1,n}^\varepsilon(u_n) \leq \varepsilon$.

5. O CASO DO MONTANTE DE INDEMNIZAÇÕES COMPOSTAS

Supõe-se, agora, que o montante total de indemnizações Y_m do m -ésimo período ($m = 1, 2, \dots$) se divide em N_m montantes parciais $X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{mN_m}$, isto é,

$$Y_m = X_{m1} + X_{m2} + \dots + X_{mN_m} .$$

Assume-se que as variáveis aleatórias X_{mn} são independentes e identicamente distribuídas, que as variáveis aleatórias N_m são independentes e identicamente distribuídas e que todas as variáveis aleatórias X_{mn} , N_m são independentes.

Supondo-se que as variáveis aleatórias X_{mn} assumem valores inteiros, sejam

$$f_j = \Pr[X_{mn} = j] \quad (j = 0, 1, 2, \dots) ,$$

$$e \quad p_n = \Pr[N_m = n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) .$$

Para o cálculo das probabilidades g_j , se N_m for do tipo recursivo, poderá ser utilizada a fórmula recursiva de PANJER (Teorema 1.2). No caso particular em que N_m tem distribuição de Poisson com parâmetro λ , tem-se

$$g_0 = e^{-\lambda(1-f_0)}$$

e

$$g_j = \frac{\lambda}{j} \sum_{i=1}^j i \cdot f_i \cdot g_{j-i} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

2.2 - EM HORIZONTE FINITO E TEMPO CONTÍNUO

2.2.1 - ALGORITMO DE F. DE VYLDER E M.J. GOOVAERTS

A partir do algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) apresentado na secção 2.1.1, estes autores procuraram determinar uma aproximação à probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo no intervalo $[0, t]$, correspondente à reserva inicial u , $\Omega_t(u)$, com

$$\Omega_t(u) = \Pr[\forall_{s \leq t} : U_s(u) \geq 0] .$$

A probabilidade de ruína nesse intervalo, correspondente à reserva de risco inicial u será

$$\Psi_t(u) = 1 - \Omega_t(u) .$$

Para $n = 1, 2, \dots$ viu-se que

$$\begin{aligned} \Omega_{1,n}(u) &= \Pr[U_1(u) \geq 0, U_2(u) \geq 0, \dots, U_n(u) \geq 0] = \\ &= \Pr[\forall_{s \leq n} : U_{\{s\}}(u) \geq 0] \quad (\text{com } \{s\} \text{ o menor inteiro } k \geq s) \end{aligned}$$

é a *probabilidade de sobrevivência* decorridos os n primeiros períodos de tempo, correspondente à reserva inicial u .

Como

$$\forall_{s,t} : U_s(u) \geq 0 \Rightarrow \forall_{s,t} : U_{\{s,t\}}(u) \geq 0 .$$

tem-se que

$$\Omega_n(u) \leq \Omega_{1,n}(u) . \quad (2.12)$$

Num período, a reserva de risco cresce quanto muito P , então

$$\begin{aligned} U_s(u) < 0 &\Rightarrow U_{\{s,t\}}(u) < P \\ U_{\{s,t\}}(u) \geq P &\Rightarrow U_s(u) \geq 0 \\ U_{\{s,t\}}(u - P) \geq 0 &\Rightarrow U_s(u) \geq 0 \\ \Pr[\forall_{s,t} : U_{\{s,t\}}(u - P) \geq 0] &\leq \Pr[\forall_{s,t} : U_s(u) \geq 0] \end{aligned}$$

pelo que

$$\Omega_{1,n}(u - P) \leq \Omega_n(u) . \quad (2.13)$$

De (2.12) e (2.13), tem-se que

$$\Omega_{1,n}(u - P) \leq \Omega_n(u) \leq \Omega_{1,n}(u) ,$$

onde $\Omega_{1,n}(u - P)$ deve ser entendido como sendo igual a zero, se $u - P < 0$.

Assim, estes autores propõem a seguinte aproximação para calcular $\Omega_n(u)$:

$$\Omega_n(u) \cong 0.5(\Omega_{1,n}(u - P) + \Omega_{1,n}(u)) . \quad (2.14)$$

2.2.2 - ALGORITMO DE F. DE VYLDER E M.J. GOOVAERTS ALTERADO POR D.C.M. DICKSON E H.R. WATERS

O algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (1988), apresentado na secção 2.1.1, foi alterado por DICKSON e WATERS (1991) para aproximar o cálculo das probabilidades de sobrevivência em tempo contínuo e horizonte finito, considerando determinadas hipóteses no modelo de risco em tempo contínuo.

Supõe-se, sem perda de generalidade, que os valores esperados do número de indemnizações por período de tempo e do montante de cada indemnização particular é 1, e que

(2.15)

- O número de indemnizações ocorridas até ao instante t , representado por ${}_0N_t$, tem distribuição de Poisson com parâmetro t ;
- O montante da i -ésima indemnização, representada por ${}_0X_i$, onde $\{{}_0X_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e independentes do processo do número de indemnizações, e cujos dois primeiros momentos existem;
- O prémio cobrado por unidade de tempo é $1+\theta$, onde θ é o coeficiente de carga.

Dada a reserva inicial u , ${}_0\delta(u, t)$ representa a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo, até ao instante t , isto é,

$${}_0\delta(u, t) = \Pr \left[u + (1 + \theta)\tau - \sum_{i=1}^{{}_0N_t} {}_0X_i \geq 0, \forall \tau: 0 < \tau \leq t \right].$$

O objectivo é o de aproximar o cálculo de ${}_0\delta(u,t)$ pela probabilidade de sobrevivência em tempo discreto e horizonte finito no modelo de risco em tempo discreto. com as seguintes características:

(2.16)

- O número de indemnizações ocorridas até ao instante t . representado por N_t , tem distribuição de Poisson com parâmetro λt ;
- O montante da i -ésima indemnização particular é X_i , onde $\{X_i\}_{i=1}^t$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, independentes do processo do número de indemnizações;
- As variáveis aleatórias X_i estão distribuídas nos inteiros não negativos;
- O prémio cobrado por unidade de tempo é igual a 1.

Para este modelo de risco, seja:

$$g_k = \Pr[X_i = k] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\delta(u,t) = \Pr\left[u + \tau - \sum_{i=1}^{\tau} X_i \geq 0, \tau = 0, 1, 2, \dots, t \right],$$

onde $\delta(u,t)$ representa a probabilidade de sobrevivência em tempo discreto até ao instante t , dada a reserva inicial u ($u \geq 0$).

DICKSON e WATERS (1991) mostram que

$${}_0\delta(u,t) \cong \delta(u\beta, (1+\theta)\beta t) \quad (2.17)$$

para uma escolha apropriada de λ e g_k 's.

A relação (2.17) pode ser justificada, discretizando e reescalando a unidade tempo e unidade monetária, de acordo com o seguinte procedimento:

PASSO 1

. Sejam $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas nos pontos discretos $0, 1/\beta, 2/\beta, \dots$ para um $\beta > 0$, de tal forma que a distribuição das variáveis aleatórias X_t aproxime a distribuição das variáveis aleatórias X_t ;

. Seja $g_k = \Pr[X_t = k/\beta]$, $k = 0, 1, 2, \dots$;

. Seja ${}_1\delta(u, t) = \Pr\left[u + (1 + \theta)\tau - \sum_{i=1}^{uN_t} X_i \geq 0, \forall \tau: 0 < \tau \leq t\right]$.

Nestas condições,

$${}_1\delta(u, t) \cong {}_0\delta(u, t) .$$

PASSO 2 ALTERAÇÃO DA UNIDADE MONETÁRIA

. Definindo a variável aleatória ${}_2X_t$, de forma que ${}_2X_t = \beta X_t$, tem-se que

$$g_k = \Pr[{}_2X_t = k] , k = 0, 1, 2, \dots$$

e, sendo

$${}_2\delta(u\beta, t) = \Pr\left[u\beta + (1 + \theta)\beta\tau - \sum_{i=1}^{uN_t} {}_2X_i \geq 0, \forall \tau: 0 < \tau \leq t\right] ,$$

tem-se que

$${}_1\delta(u, t) = {}_2\delta(u\beta, t) ,$$

pelo que

$${}_0\delta(u, t) \cong {}_2\delta(u\beta, t) .$$

PASSO 3 ALTERAÇÃO DA UNIDADE TEMPO

. Sendo $\{N_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson com parâmetro $\lambda = 1/[(1 + \theta)\beta]$ e

$${}_3\delta(u\beta, t) = \Pr\left[u\beta + \tau - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \geq 0, \forall \tau: 0 < \tau \leq t\right],$$

tem-se que

$${}_3\delta(u\beta, t) = {}_3\delta(u\beta, (1 + \theta)\beta t),$$

pelo que

$${}_0\delta(u, t) \cong {}_3\delta(u\beta, (1 + \theta)\beta t).$$

Intuitivamente, $\delta(u, t)$ será uma boa aproximação de ${}_3\delta(u, t)$, se para um dado t , o número de unidades de tempo reescalados, $(1 + \theta)\beta t$, for grande, onde $P = (1 + \theta)\beta$ é o novo prémio cobrado por unidade de tempo.

Assim, em termos do modelo caracterizado por (2.16), o algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) vem

$$\delta(w, 1) = \sum_{j=0}^{w+1} g_j, \quad w = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

$$e \quad \delta(w, m) = \sum_{j=0}^{w+1} \delta(w+1-j, m-1)g_j, \quad w = 0, 1, 2, \dots \quad e \quad m = 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Para determinar uma aproximação de $\delta(u, t)$, para $u \geq 0$ e $t > 1$, é necessário primeiro calcular $\delta(w, 1)$, para $w = 0, 1, 2, \dots, u+t-1$; depois é preciso calcular $\delta(w, 2)$, para $w = 0, 1, 2, \dots, u+t-2$, ou seja, calcula-se $\delta(w, \tau)$ para $w = 0, 1, 2, \dots, u+t-\tau$, tendo-se calculado antes $\delta(w, \tau-1)$ para $w = 0, 1, 2, \dots, u+t-\tau+1$.

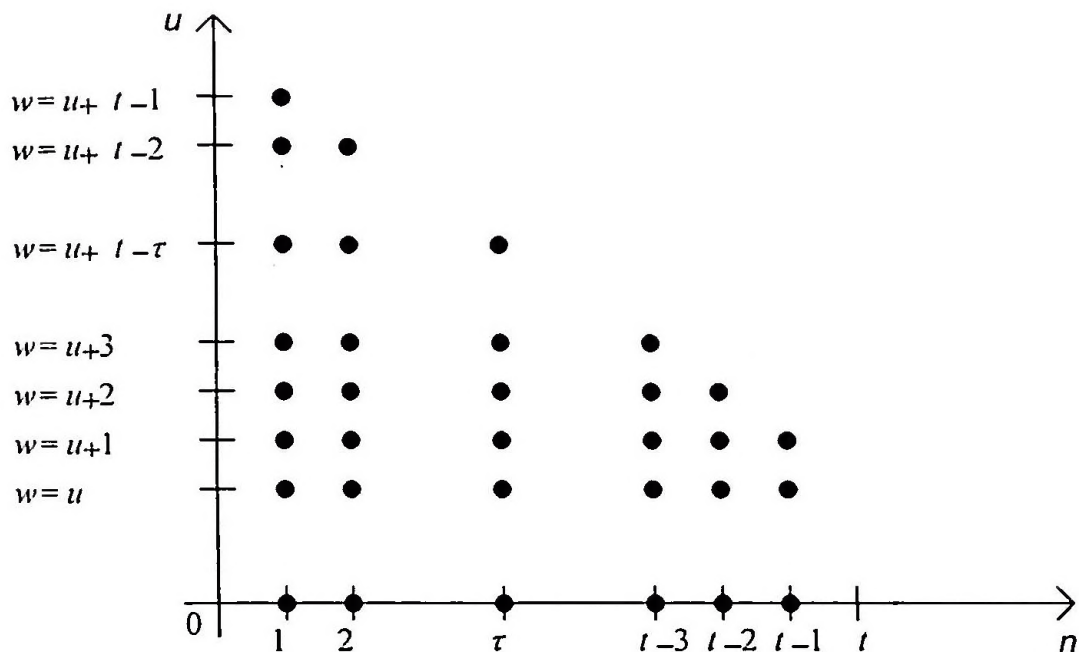


FIGURA 2.2 - Combinações de w e τ , cujos valores de $\delta(w, \tau)$ são necessários para calcular $\delta(u, t)$.

Portanto, para calcular uma aproximação de ${}_0\delta(u, t)$, com $u = 0, 1, 2, \dots$ e $t = 1, 2, \dots$, é necessário calcular $\delta(u\beta, (1 + \theta)\beta t)$, ou seja, é preciso calcular $\delta(u\beta, Pt)$, uma vez que $P = (1 + \theta)\beta$.

Para obter $\delta(u\beta, Pt)$, urge calcular

$$\delta(w, \tau) \quad , \quad \tau = 1, 2, \dots, Pt$$

com $w = 0, 1, \dots, u\beta + (Pt - \tau)$.

2.2.3 - ALGORITMO DE D.C.M. DICKSON E H.R. WATERS

DICKSON e WATERS (1991) apresentam uma aproximação ao cálculo de $\delta(u, t)$ diferente da descrita na secção 2.2.2.

O ponto de partida para esta nova aproximação é a fórmula (2.20)

$$\delta(w, m) = \sum_{j=0}^{w+1} \delta(w+1-j, m-1)g_j, \quad w = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad m = 2, 3, \dots .$$

que pode tomar a forma

$$\delta(u-1, t+1) = \sum_{i=0}^u g_i \delta(u-i, t) \quad , u = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad t = 1, 2, 3, \dots ,$$

fazendo em (2.20), $w+1 = u$ e $m-1 = t$.

Nesta nova aproximação não será necessária a fórmula correspondente a (2.19), mas será indispensável considerar a situação quando $u = 0$.

Como

$$\delta(u-1, t+1) = g_0 \delta(u, t) + \sum_{i=1}^u g_i \delta(u-i, t) ,$$

vem que

$$\delta(u, t) = g_0^{-1} \left[\delta(u-1, t+1) - \sum_{i=1}^u g_i \delta(u-i, t) \right] . \quad (2.21)$$

A FIGURA 2.3 ilustra as probabilidades de sobrevivência necessárias para calcular $\delta(u, t)$ a partir de (2.21).

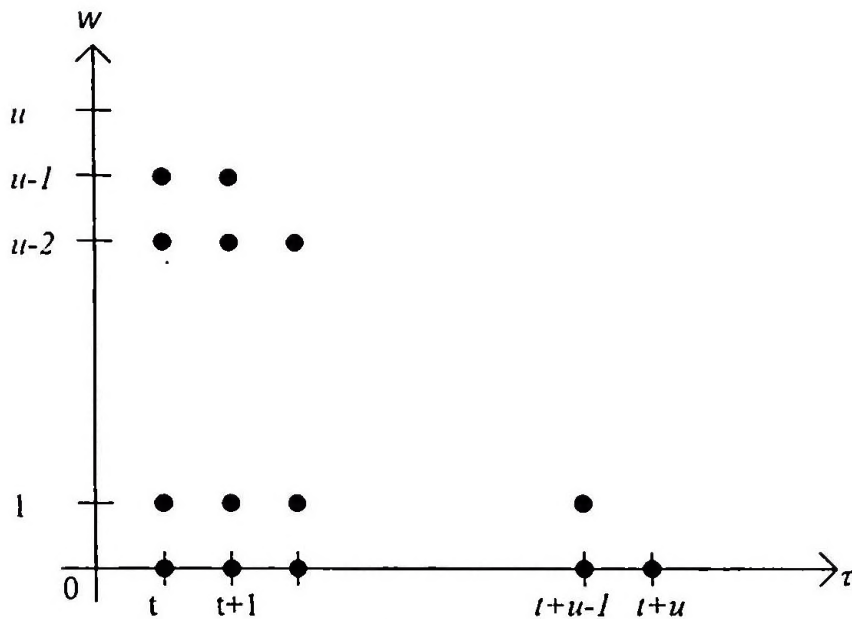


FIGURA 2.3 - Combinações de w e τ , cujos valores de $\delta(w, \tau)$ são necessários para calcular $\delta(u, t)$ recursivamente pela aplicação da fórmula (2.21).

O cálculo de $\delta(u, t)$ por este método, requer que previamente $0.5u(u+3)$ probabilidades de sobrevivência sejam calculadas. O que é notável, é que este número não depende de t , em contraste com o algoritmo apresentado na secção 2.2.2, onde o número de valores necessários para calcular $\delta(u, t)$ era de $(t-1) \times (u+0.5t+1)$ que dependia de t . No entanto, o número de cálculos exigidos para determinar $\delta(0, t)$ depende de t .

A principal diferença entre esta aproximação e a apresentada na secção 2.2.2 é que, antes, era necessário calcular todas as probabilidades para períodos de tempo inferiores a t e agora serão necessárias probabilidades para períodos de tempo entre t e $t+u$, inclusivé.

Como os valores de $\delta(0, \tau)$ são necessários para $\tau = t, t+1, \dots, t+u$, DICKSON e WATERS (1991) mostram que estas probabilidades podem ser calculadas pela relação

$$\delta(0, t) = g_0^{-1} \sum_{j=1}^{t+1} \frac{j}{t+1} f(t+1-j, t+1), \quad (2.22)$$

em que

$$f(j,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} g^{*n}(j)$$

representa a probabilidade das indemnizações agregadas até ao instante t ser igual a j .

$$\text{PROCEDIMENTO DE TRUNCAGEM} \tag{2.23}$$

Tal como na secção 2.1.1., DICKSON e WATERS (1991) elaboraram este procedimento com o objectivo de reduzir o tempo de processamento em computador para o cálculo de $\delta(u,t)$ e limitar os erros de arredondamento, pela aplicação das fórmulas (2.21) e (2.22).

Recordando que

$$g_k = \Pr[X_i = k] \quad , \quad k = 0,1,2,\dots ,$$

seja

$$G(k) = \Pr[X_i \leq k] \quad , \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Considerando ε ($0 < \varepsilon < 1$), o parâmetro de truncagem, define-se k_0 como sendo o menor inteiro tal que

$$G(k_0) > 1 - \varepsilon \quad ,$$

e definem-se as variáveis aleatórias $\{X_{i,\varepsilon}\}_{i=1}^{\infty}$ como

$$X_{i,\varepsilon} = \begin{cases} X_i & ; X_i \leq k_0 \\ \infty & ; X_i > k_0 \end{cases} \quad .$$

Define-se ainda

$$g_{\varepsilon}(k) = \Pr[X_{t,\varepsilon} = k] = \begin{cases} g_k & ; 0 \leq k \leq k_0 \\ 0 & ; k_0 < k < \infty \\ \sum_{l=k_0+1}^{\infty} g_l & ; k = \infty \end{cases}$$

e

$$G_{\varepsilon}(k) = \Pr[X_{t,\varepsilon} \leq k] .$$

Lembrando que $f(j,t)$ representa a probabilidade das indenizações agregadas até ao instante t ser igual a j , define-se $f_{\varepsilon}(j,t)$ como sendo a função de probabilidade correspondente, com o montante de indenizações particulares dado por $X_{t,\varepsilon}$ em vez de X_t , e $\delta_{\varepsilon}(0,t)$ a probabilidade de sobrevivência para este processo.

Nestas condições, DICKSON e WATERS (1991) mostram ainda que

$$\delta(0,t) - \lambda(t+1)\varepsilon g_0^{-1} \leq \delta_{\varepsilon}(0,t) \leq \delta(0,t) \quad , t = 1, 2, \dots \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots .$$

2.3 - EM HORIZONTE INFINITO E TEMPO CONTÍNUO

ALGORITMO DE D.C.M. DICKSON E H.R. WATERS

DICKSON e WATERS (1991) apresentam um algoritmo recursivo para o cálculo aproximado das probabilidades de sobrevivência em tempo contínuo e horizonte infinito, dada a reserva inicial u .

Assumindo que o valor médio do montante das indemnizações particulares, $E[X_i]$, é igual a β , isto é, a discretização efectuada do montante de indemnizações particulares iniciais é feita de modo a preservar o valor médio das indemnizações particulares.

Partindo da relação (2.21) do algoritmo anterior, obtêm que

$$\delta(u) = g_0^{-1} \left[\delta(u-1) - \sum_{i=1}^u g_i \delta(u-i) \right] \quad ; \quad u = 1, 2, \dots, \quad (2.24)$$

onde

$$\delta(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(u, t) = \Pr \left[u + \tau - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \geq 0, \forall \tau = 0, 1, 2, \dots \right].$$

Provam ainda que $\delta(0)$ pode ser obtida da relação

$$\delta(0) = \frac{\theta}{g_0(1+\theta)}. \quad (2.25)$$

Assim, considerando as hipóteses de (2.15), no modelo de risco em tempo contínuo, tem-se

$${}_0\delta(u) \approx \delta(u\beta) \quad ; \quad u = 0, 1, 2, \dots,$$

onde

$${}_0\delta(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} {}_0\delta(u, t).$$

2.4 - CONSIDERAÇÕES ÀS APROXIMAÇÕES DAS PROBABILIDADES EM TEMPO CONTÍNUO

Ao considerarem-se as probabilidades de sobrevivência em tempo discreto como aproximações às probabilidades de sobrevivência em tempo contínuo, a tendência é para exagerar o valor destas, como se viu na secção 2.2.1, expressão (2.12).

DE VYLDER e GOOVAERTS (1988) procuraram minorar este problema, propondo a média aritmética expressa na fórmula (2.14).

Outra razão que pode favorecer o exagero dos valores nas aproximações às probabilidades em tempo contínuo é o facto do montante das indemnizações particulares ter uma distribuição contínua. Isto, porque, para que a sobrevivência ocorra, de acordo com os pressupostos anteriores, é necessário apenas que a reserva se situe acima do valor -1 (mas pode ser 0 em qualquer altura).

DICKSON e WATERS (1991) propõem como resposta a este problema, em termos do modelo de risco em tempo discreto com as hipóteses de (2.16), a redefinição de probabilidade de sobrevivência em tempo discreto, $\delta^*(u, t)$, como sendo

$$\delta^*(u, t) = \Pr \left[u + \tau - \sum_{i=1}^{N_\tau} X_i \geq 1, \tau = 1, 2, \dots, t \right], \quad u \geq 0 \text{ e } 1 \leq t \leq \infty .$$

Esta nova definição de sobrevivência requer que a reserva seja estritamente maior do que zero, após o instante inicial ($t = 0$).

Nestas condições, mostram que:

. Para t finito, $\delta^*(0, t)$ pode ser calculada por

$$\delta^*(0, t) = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} F(j, t),$$

onde $F(j, t)$ representa a probabilidade das indemnizações agregadas até ao instante t ser menor ou igual a j .

Para t infinito, tem-se que

$$\delta^*(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Para $u > 0$, é claro que $\delta^*(u, t) = \delta(u - 1, t)$.

Pelo menos para um exemplo numérico, mostraram que $\delta^*(u\beta, (1 + \theta)\beta t)$ era uma melhor aproximação do que $\delta(u\beta, (1 + \theta)\beta t)$ para ${}_0\delta(u, t)$, apontando como explicação para o facto, a contribuição de dois erros que, funcionando em direcções opostas, se compensam e anulam mutuamente. isto é:

- Por um lado, ${}_0\delta(u, t)$ é suavizada pela redefinição da probabilidade de sobrevivência em tempo discreto, $\delta^*(u, t)$;
- Por outro lado, ${}_0\delta(u, t)$ é exagerada pela utilização de uma probabilidade em tempo discreto para sua aproximação.

CAPÍTULO 3 - INCORPORAÇÃO DO RESSEGURO NO CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA

3.1 - TRATADOS DE RESSEGURO

3.1.1 - *EXCESS OF LOSS*

No tratado de resseguro *Excess of Loss*, a resseguradora escolhe o montante que pretende reter aquando da ocorrência de uma indemnização, designado normalmente por *limite de retenção* ou *nível de retenção*. Fica assim a seguradora responsável por apenas um determinado montante por cada indemnização que ocorra, ficando o excesso da indemnização a cargo da resseguradora.

Se M for o limite de retenção, então a variável aleatória indemnizações particulares retidas pela seguradora, X^{rc} , será

$$X^{rc} = \min(X, M) = \begin{cases} X & \text{se } X \leq M \\ M & \text{se } X > M \end{cases} ,$$

com função distribuição

$$G^{rc}(x) = \begin{cases} G(x) & , x < M \\ 1 & , x \geq M \end{cases} .$$

e a variável aleatória indemnizações particulares cedidas pela seguradora, X^{cc} , será

$$X^{cc} = \max(0, X - M) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq M \\ X - M & \text{se } X > M \end{cases} .$$

Seja $S = \sum_{i=1}^N X_i$, a variável aleatória indenizações agregadas no período em questão. Após o resseguro a variável aleatória indenizações agregadas retidas pela seguradora, S^{rc} , será

$$S^{rc} = \sum_{i=1}^N \min(X_i, M)$$

e a variável aleatória indenizações agregadas cedidas pela seguradora, S^{cc} , será

$$S^{cc} = S - S^{rc} = \sum_{i=1}^N \max(0, X_i - M)$$

Tem-se que

$$E[S^{rc}] = E[N] \left[\int_0^M x dG(x) + M(1 - G(M)) \right]$$

e

$$E[S^{cc}] = E[S - S^{rc}] = E[N] \int_M^{+\infty} (x - M) dG(x)$$

3.1.2 - QUOTA-SHARE

Neste tipo de tratado, a resseguradora participa em todas as indenizações que ocorram, numa dada percentagem. Seja a , com $0 < a \leq 1$, a percentagem de cada indenização X retida pela seguradora e $1 - a$ a percentagem a cargo da resseguradora.

A variável aleatória indenizações particulares retidas pela seguradora, X^{rc} , será

$$X^{rc} = aX$$

com função distribuição

$$G^{ra}(x) = G(x/a) .$$

e a variável aleatória indemnizações particulares cedidas pela seguradora, X^{ca} , será

$$X^{ca} = (1-a)X .$$

Após o resseguro, a variável aleatória indemnizações agregadas retidas pela seguradora, S^{ra} , será

$$S^{ra} = \sum_{i=1}^N aX_i = a \sum_{i=1}^N X_i = aS$$

e a variável aleatória indemnizações agregadas cedidas pela seguradora, S^{ca} , será

$$S^{ca} = S - aS = (1-a)S .$$

Tem-se ainda que

$$E[S^{ra}] = aE[S]$$

e

$$E[S^{ca}] = (1-a)E[S] .$$

3.2 - PROCESSO DE RESERVA, INCORPORANDO O RESSEGURO

Na secção 1.3 apresentou-se a noção de reserva de risco da seguradora no instante t , $U(t)$, dada a reserva inicial u , como sendo

$$U(t) = u + P \cdot t - S(t) \quad , t \geq 0 .$$

Com a incorporação do resseguro, representando por $h(X_i)$ o montante de indemnização a cargo da seguradora quando o i -ésimo sinistro ocorre, com o correspondente montante de indemnização representada pela variável aleatória X_i , tem-se que

$$0 \leq h(X_i) \leq X_i .$$

Supondo que o prémio de resseguro, $P_{\text{res}}(h)$, é calculado com um coeficiente de carga ξ ($\xi > 0$), e pagos a uma taxa constante, a reserva da seguradora no instante t , representada por $U(t;h)$, dada a reserva inicial u , será

$$U(t;h) = u + P_{\text{liq}}(h) \cdot t - S^{\text{rc}}(t), \quad t \geq 0 ,$$

onde

$$P_{\text{liq}}(h) = P - P_{\text{res}}(h)$$

e

$$S^{\text{rc}}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(X_i).$$

Recorde-se que no caso do resseguro *Quota-Share* com nível de retenção a , tem-se que

$$h(X_i) = aX_i, \quad 0 < a \leq 1$$

e no caso do resseguro *Excess of Loss* com nível de retenção M , tem-se que

$$h(X_i) = \min(X_i, M) .$$

3.3 - PROBABILIDADE DE RUÍNA E COEFICIENTE DE AJUSTAMENTO COM RESSEGURO

Para este processo de reserva, a probabilidade de ruína em horizonte infinito, dada a reserva inicial u , $\Psi(u;h)$, é definida como

$$\Psi(u;h) = \Pr[U(t;h) < 0 \text{ , para algum } t > 0] \text{ .} \quad (3.1)$$

De forma análoga,

$$\Psi(u,T;h) = \Pr[U(t;h) < 0 \text{ , para algum } t: 0 < t \leq T] \quad (3.2)$$

representa a probabilidade de ruína em horizonte finito, isto é, antes de decorridos T períodos de tempo.

Nestas condições, o coeficiente de ajustamento é a solução não nula R , da equação

$$\lambda + P_{l,q}(h) \times r = \lambda \times M_{X^*}(r;h) \text{ ,} \quad (3.3)$$

sendo

$$M_{X^*}(r;h) \quad (3.4)$$

a função geradora de momentos das indemnizações retidas pela seguradora, resultantes de um tratado de resseguro.

Em secções posteriores, no caso de um tratado de resseguro *Excess of Loss* com limite de retenção M , representar-se-ão (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) com o h substituído por M , ficando implícito que o tratado de resseguro é do tipo *Excess of Loss*.

3.4 - IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMOS PARA CALCULAR A PROBABILIDADE DE RUÍNA, INCORPORANDO O RESSEGURO

3.4.1 - EM HORIZONTE FINITO

3.4.1.1 - EM TEMPO CONTÍNUO

O algoritmo de partida para este fim é o algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (1988), alterado posteriormente por DICKSON e WATERS (1991), apresentado na secção 2.2.2 .

De acordo com o modelo de risco em tempo contínuo com as hipóteses referidas em (2.15), apresentado na secção 2.2.2, se existir um tratado de resseguro com limite de retenção M , para o qual corresponde um prémio de resseguro, P_{ress} ($P_{ress} = P_{ress}(M)$), tal que o prémio líquido de resseguro, P_{liq} ($P_{liq} = P_{liq}(M)$), é

$$P_{liq} = (1 + \theta) - P_{ress} > 0$$

e em que ${}_0X_i^{rc}$ representa o montante da i -ésima indemnização a cargo da seguradora, tem-se que, nestas condições, para uma reserva inicial de risco u , a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo, até ao instante t , representada por ${}_0\delta^{rc}(u, t)$, é

$${}_0\delta^{rc}(u, t) = \Pr \left[u + P_{liq} \times \tau - \sum_{i=1}^{N_\tau} {}_0X_i^{rc} \geq 0, \forall \tau: 0 < \tau \leq t \right]. \quad (3.5)$$

De acordo com o reescalonamento adiantado por DICKSON e WATERS (1991) e apresentado na secção 2.2.2 (2.18), tem-se que⁴

⁴ β é o parâmetro da discretização resultante do reescalonamento (2.18).

$${}_0\delta^{rc}(u, t) \cong \delta^{rc}(u\beta, P_{l,q} \times \beta \times t)$$

onde

$$\delta^{rc}(u, t)$$

é a probabilidade de sobrevivência em tempo discreto e horizonte finito, até ao instante t , dada a reserva inicial u , no modelo de risco em tempo discreto com as seguintes características:

- O número de indemnizações ocorridas até ao instante t , representado por N_t , tem distribuição de Poisson com parâmetro λt ;
- O montante da i -ésima indemnização particular retida pela seguradora é X_i^{rc} , onde $\{X_i^{rc}\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, independentes do processo do número de indemnizações;
- As variáveis aleatórias X_i^{rc} estão distribuídas nos inteiros não negativos;
- O prémio cobrado por unidade de tempo é igual a 1;

donde,

$$\delta^{rc}(u, t) = \Pr \left[u + \tau - \sum_{i=1}^{N_t} X_i^{rc} \geq 0, \tau = 0, 1, 2, \dots, t \right].$$

Mas como $P_{l,q} \times \beta$, em geral, não é inteiro, $\delta^{rc}(u\beta, P_{l,q} \times \beta \cdot t)$ será calculado por interpolação linear.

Assim, e por interpolação linear (CENTENO (1995)), tem-se que

$$\begin{aligned} \delta^{rc}(u\beta, P_{l,q} \times \beta \cdot t) \approx & \left(\{P_{l,q} \times \beta \cdot t\} - P_{l,q} \times \beta \cdot t \right) \cdot \delta^{rc}(u\beta, [P_{l,q} \times \beta \cdot t]) + \\ & + \left(1 - \{P_{l,q} \times \beta \cdot t\} + P_{l,q} \times \beta \cdot t \right) \cdot \delta^{rc}(u\beta, \{P_{l,q} \cdot \beta \cdot t\}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $\lfloor P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a $P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t$.

De acordo com o algoritmo, para interpolar $\delta^{\tau}(u\beta, P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t)$ é necessário calcular

$$\begin{aligned} \delta^{\tau}(w, \tau), \quad & \text{para } \tau = 1, 2, \dots, \lfloor P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t \rfloor \\ \text{com } w = 0, 1, \dots, u\beta + \left(\lfloor P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t \rfloor - \tau \right), \end{aligned}$$

onde $\lceil P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a $P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t$.

Exemplo 3.1

Suponhamos que, para um determinado tratado de resseguro *Excess of Loss* se tem $P_{t,uq} \cdot \beta = 3.8$ e se pretende calcular ${}_0\delta^{\tau}(u, 4)$, isto é, a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo, até ao instante $t = 4$, no modelo de risco em tempo contínuo, de acordo com (3.5).

Neste caso, tem-se que

$$P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t = 3.8 \cdot 4 = 15.2 ,$$

$$\lfloor P_{t,uq} \cdot \beta \cdot t \rfloor = \lfloor 15.2 \rfloor = 16$$

e

$${}_0\delta^{\tau}(u, 4) \cong \delta^{\tau}(u\beta, P_{t,uq} \cdot \beta \cdot 4) = \delta^{\tau}(u\beta, 15.2) .$$

Mas pelo algoritmo inicial, calculam-se apenas

$$\delta^{\tau}(u\beta, N) \quad , \quad N = 1, 2, \dots, 16$$

e. por interpolação. aplicando (3.6), vem que

$$\delta^{rc}(u\beta, 15.2) \approx (16 - 15.2) \cdot \delta^{rc}(u\beta, 15) + (1 - 16 + 15.2) \cdot \delta^{rc}(u\beta, 16) ,$$

donde

$${}_0\delta^{rc}(u, 4) \approx (16 - 15.2) \cdot \delta^{rc}(u\beta, 15) + (1 - 16 + 15.2) \cdot \delta^{rc}(u\beta, 16) .$$

De forma análoga. se calculam

$${}_0\delta^{rc}(u, \tau) \quad . \quad \tau = 1, 2, 3 .$$

3.4.1.2 - EM TEMPO DISCRETO

Se bem que não iremos trabalhar em tempo discreto, dado o propósito desta secção, interessa referir a adaptação efectuada por DICKSON e WATERS (1994) do algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (Algoritmo descrito na secção 2.1) para o cálculo das probabilidades de ruína em tempo discreto e horizonte finito.

DICKSON e WATERS (1994) estudaram o efeito do resseguro na probabilidade de ruína no modelo clássico de risco, visando a determinação do limite óptimo a ressegurar, isto é, aquele que minimiza a probabilidade de ruína. Mostraram, para alguns exemplos numéricos (no contexto de um processo de Poisson Composto, em que o prémio de resseguro era calculado com coeficiente de carga dependente do limite de retenção), que em tempo contínuo e horizonte finito, à medida que o horizonte temporal aumentava, o limite de retenção que minimizava esta probabilidade tendia para o limite de retenção que minimizava a probabilidade de ruína em horizonte infinito.

No entanto, verificaram que, trabalhando em horizonte temporal finito e tempo discreto, tal não acontecia, quando se alterava a unidade tempo de forma a que o valor esperado do número de indemnizações ocorridas por período de tempo fosse elevado (isto é, quando se rescalona a unidade de tempo de forma que o parâmetro do processo do número de indemnizações seja elevado).

Para este efeito definiram probabilidade de ruína em tempo discreto e horizonte finito, dada a reserva inicial u e o arranjo de resseguro h , como

$$\Psi(u, T, d; h) = \Pr[U(t; h) < 0, \text{ para algum } t, t = d, 2d, \dots, T - d, T] .$$

onde se assume que T é um múltiplo de d .

Para calcular esta probabilidade utilizaram o algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS (1988), discretizando a função de distribuição do montante de indemnizações particulares (antes do resseguro) em $1/\beta, 2/\beta, \dots$ de acordo com o processo descrito em (1.3).

Note-se que, o prémio líquido da seguradora (após o resseguro) correspondente ao intervalo de tempo com comprimento d não é, em geral, um número inteiro, pelo que o nível de reserva nos instantes $d, 2d, 3d, \dots$ pode não assumir valores inteiros. Assim, dado que a função de distribuição das indemnizações agregadas foi discretizada nos inteiros e que, se a reserva for zero, equivale a ocorrer ruína (excepto em $t = 0$), note-se que se tem

$$\Psi(u, d, d; h) = \Psi(\{u\}, d, d; h) ,$$

onde $\{u\}$ representa o menor inteiro maior ou igual a u .

Sejam f_k a probabilidade das indemnizações agregadas num intervalo de tempo d ser igual a k e $F(k)$ a probabilidade das indemnizações agregadas num intervalo de tempo d ser menor ou igual a k .

Partindo de um montante de reserva inicial u inteiro e um prémio líquido (após o resseguro) não inteiro, Q , relativo ao intervalo de tempo com comprimento d , as fórmulas equivalentes a (2.8) e (2.9) do algoritmo de DE VYLDER e GOOVAERTS, vêm

$$\Psi(u, d, d; h) = 1 - F(u + [Q]),$$

e

$$\Psi(u, T, d; h) = \Psi(u, d, d; h) + \sum_{j=0}^{u-[Q]} f_j \Psi(u + \{Q\} - j, T - d, d; h), \quad T = 2d, 3d, \dots$$

onde $[Q]$ é o maior inteiro menor ou igual a Q .

3.4.2 - EM HORIZONTE INFINITO E TEMPO CONTÍNUO

O algoritmo de partida para o efeito é o algoritmo de DICKSON e WATERS (1991), descrito na secção 2.3.1 .

Supõe-se sem perda de generalidade, tendo em conta as hipóteses (2.15) no modelo de risco em tempo contínuo, que o valor esperado do número de indemnizações por período de tempo, λ , e do montante de cada indemnização particular, $E({}_0X_t)$, é igual a 1.

Nesse modelo, para a reserva inicial u , representou-se por ${}_0\delta(u)$ a probabilidade de sobrevivência em tempo contínuo e horizonte infinito como sendo

$${}_0\delta(u) = \Pr \left[u + (1 + \theta)\tau - \sum_{t=1}^{N_\tau} {}_0X_t \geq 0, \forall \tau : \tau > 0 \right],$$

onde θ é o coeficiente de carga do prémio cobrado pela seguradora, ${}_0X_i$ a variável aleatória montante da i -ésima indemnização particular e ${}_0N_\tau$ a variável aleatória número de indemnizações ocorridas até ao instante τ .

DICKSON e WATERS (1991) mostraram que discretizando e reescalando a unidade tempo e unidade monetária de acordo com o procedimento (2.18), se tem

$${}_0\delta(u) \approx \delta(u\beta) \quad ; \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad ,$$

onde

β é o parâmetro da discretização efectuada pelo procedimento (2.18).

$$\delta(u) = \Pr \left[u + \tau - \sum_{i=1}^{N_\tau} X_i \geq 0, \forall \tau = 0, 1, 2, \dots \right] ,$$

N_τ é a variável aleatória número de indemnizações ocorridas até ao instante τ na unidade de tempo resultante do procedimento (2.18),

X_i é a variável aleatória montante da i -ésima indemnização particular na nova unidade monetária, resultante da aplicação do procedimento (2.18)

e

$$\delta(0) = \frac{\theta}{g_0(1+\theta)},$$

$$\delta(u) = g_0^{-1} \left[\delta(u-1) - \sum_{i=1}^u g_i \delta(u-i) \right] \quad ; \quad u = 1, 2, \dots \quad ,$$

sendo

$$g_k = \Pr[X_i = k] \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad .$$

Se existir um tratado de resseguro *Excess of Loss* com limite de retenção M , suponhamos que M é aceitável desde que o correspondente prêmio líquido, $P_{l,u}(M)$, seja superior ao valor esperado das indemnizações retidas pela seguradora, X_t^r , isto é, desde que

$$P_{l,u}(M) > E(X_t^r)$$

com

$$X_t^r = \begin{cases} X_t & : X_t \leq M \\ M & : X_t > M \end{cases} .$$

Nestas condições, existe $\theta_M > 0$, tal que

$$P_{l,u}(M) = (1 + \theta_M) E(X_t^r)$$

e por (2.18), fazendo

$$\lambda = 1/P_{l,u}(M)$$

tem-se que

$$\delta^r(0) = \frac{\theta_M}{r_0(1 + \theta_M)}$$

e
$$\delta^r(u) = r_0^{-1} \left[\delta^r(u-1) - \sum_{i=1}^u r_i \delta^r(u-i) \right] \quad ; u = 1, 2, \dots ,$$

sendo

$$r_k = \Pr[X_t^r = k] \quad ; k = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\delta^r(u) = \Pr \left[u + \tau - \sum_{i=1}^{N_\tau} X_i^r \geq 0, \forall \tau; \tau = 0, 1, 2, \dots \right] .$$

CAPÍTULO 4 - O EFEITO DO RESSEGURO NA PROBABILIDADE DE RUÍNA

4.1 - RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO E HORIZONTE INFINITO

Nesta secção, considera-se o efeito do resseguro na probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte infinito, utilizando exemplos numéricos.

Considere-se, no modelo clássico de risco, as seguintes hipóteses:

(4.1)

- O processo de indemnizações agregadas no período $(0, t]$, $S(t)$, é um processo de Poisson composto;
- O montante da i -ésima indemnização particular é representada por X_i , onde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com função de distribuição G ;
- Supõe-se, sem perda de generalidade, que o parâmetro de Poisson, λ , é igual a 1, e que o valor esperado de cada indemnização particular é igual a 1;
- O prémio cobrado por unidade de tempo, P , é $1 + \theta$, com coeficiente de carga $\theta > 0$.

Suponhamos ainda que a seguradora pretende celebrar um tratado de resseguro *Excess of Loss*, cujo prémio de resseguro é calculado com coeficiente de carga ξ ($\xi > 0$), e pago continuamente.

De acordo com os pressupostos anteriores e com (3.3), o coeficiente de ajustamento é a única solução positiva da equação

$$1 + P_{1,\mu}(M) \cdot r = M_{X^*}(r; M) \quad (4.2)$$

Dado o princípio do cálculo do prémio de resseguro, combinação de coeficientes de carga de seguro directo e resseguro, e distribuição do montante das indemnizações particulares, o objectivo será o de determinar o limite de retenção óptimo, segundo dois critérios:

1º Critério de optimização - o limite de retenção óptimo, M^* , é aquele que maximiza o coeficiente de ajustamento, dado que é dos valores de M , aquele que minimiza o majorante de *Lundberg* (1.10) para a probabilidade de ruína .

2º Critério de optimização - o limite de retenção óptimo, M^* , é aquele que minimiza a probabilidade de ruína.

Para o efeito, considerar-se-ão três distribuições para o montante de indemnizações particulares.

1º CRITÉRIO DE OPTIMIZAÇÃO

- Distribuição A: $G(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$ i.e.,
 $X \sim$ Exponencial (1)

A1.1 - O PRÉMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Segundo este princípio de cálculo, e representando por $P_{res}(M)$ o prémio de resseguro, dada a retenção M , este obtém-se da seguinte forma:

$$P_{res}(M) = (1 + \xi) \lambda \int_M^{\infty} (x - M) dG(x) .$$

De acordo com a distribuição em questão e as hipóteses enunciadas em (4.1), tem-se que

$$P_{res}(M) = (1 + \xi) e^{-M} .$$

Daqui resulta que o prémio líquido de resseguro, dada a retenção M , representado por $P_{liq}(M)$ será

$$P_{liq}(M) = P - P_{res}(M) = 1 + \theta - (1 + \xi) e^{-M} .$$

Determinando a função geradora de momentos das indemnizações retidas pela seguradora, dada a retenção M , representada por $M_{X^{(r)}}(r; M)$, vem que

$$M_{X^{(r)}}(r; M) = \int_0^M e^{rx} dG(x) + e^{rM} (1 - G(M)) = \frac{1}{r-1} [r e^{(r-1)M} - 1] , \quad r \neq 1 .$$

Assim, a equação (4.2), que define o coeficiente de ajustamento, toma a forma

$$1 + [1 + \theta - (1 + \xi)e^{-M}]^r = \frac{1}{r-1} [r e^{(r-1)M} - 1] \quad , r \neq 1 .$$

Considerando as combinações de θ e ξ , da TABELA 4.1

θ	ξ
0.1	0.2
0.2	0.4

TABELA 4.1

o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento R ($R = R(M)$), para cada uma destas combinações será representado por $M^\#$ e consta da TABELA 4.2:

θ/ξ	$M^\#$	$R(M^\#)$
0.1/0.2	1.533	0.1189
0.2/0.4	1.486	0.2265

TABELA 4.2

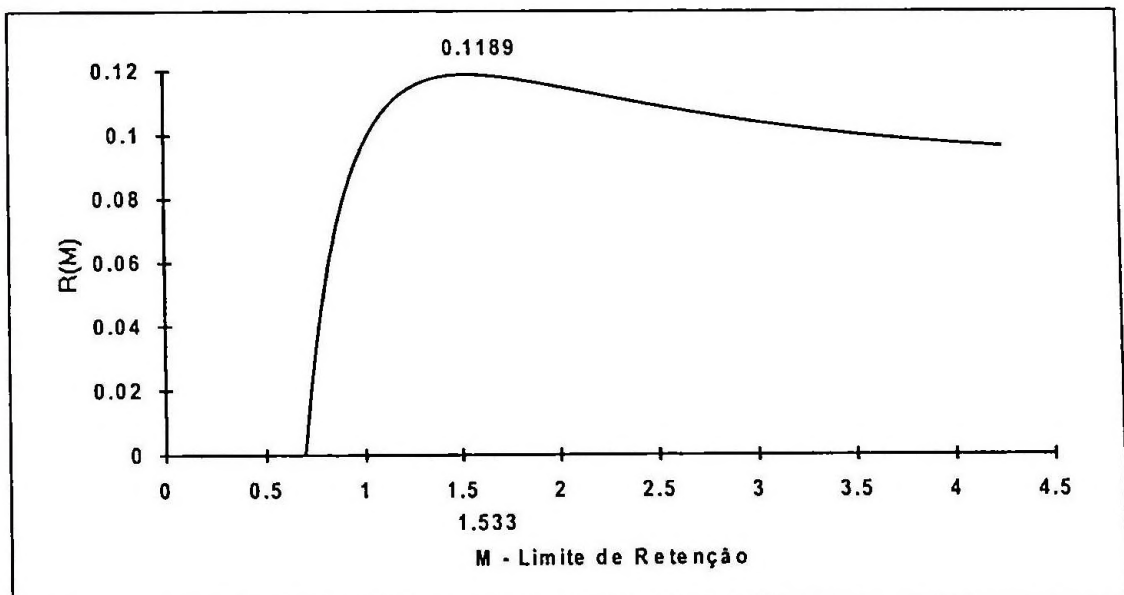


FIGURA 4.1 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$.

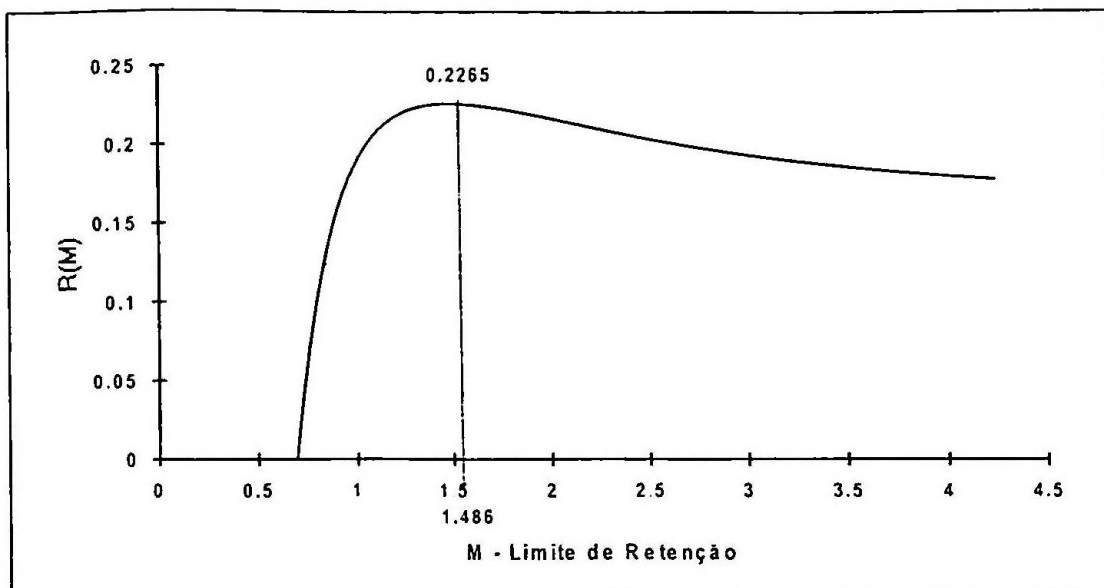


FIGURA 4.2 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.4$.

A1.2 - O PRÉMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO DESVIO PADRÃO

De acordo com este princípio de cálculo, o prémio de resseguro, dada a retenção M , obtém-se da seguinte forma:

$$P_{res}(M) = \lambda \int_M^{\infty} (x - M) dG(x) + \xi \sqrt{\lambda \int_M^{\infty} (x - M)^2 dG(x)},$$

donde, para o exemplo em questão se tem que

$$P_{res}(M) = e^{-M} + \xi \sqrt{2e^{-M}}$$

e o prémio líquido de resseguro, dada a retenção M , vem

$$P_{liq}(M) = 1 + \theta - \left[e^{-M} + \xi \sqrt{2e^{-M}} \right].$$

Assim, a equação (4.2), que define o coeficiente de ajustamento, toma a forma

$$1 + \left[1 + \theta - \left[e^{-M} + \xi \sqrt{2e^{-M}} \right] \right]^r = \frac{1}{r-1} \left[r e^{(r-1)M} - 1 \right] \quad , \quad r \neq 1 .$$

Considerando as combinações de θ e ξ , da TABELA 4.3

θ	ξ
0.20	0.15
0.15	0.11

TABELA 4.3

o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento R ($R = R(M)$), para cada uma destas combinações, consta da TABELA 4.4:

θ/ξ	$M^{\#}$	$R(M^{\#})$
0.20/0.15	0.243	0.46496
0.15/0.11	0.148	0.54258

TABELA 4.4

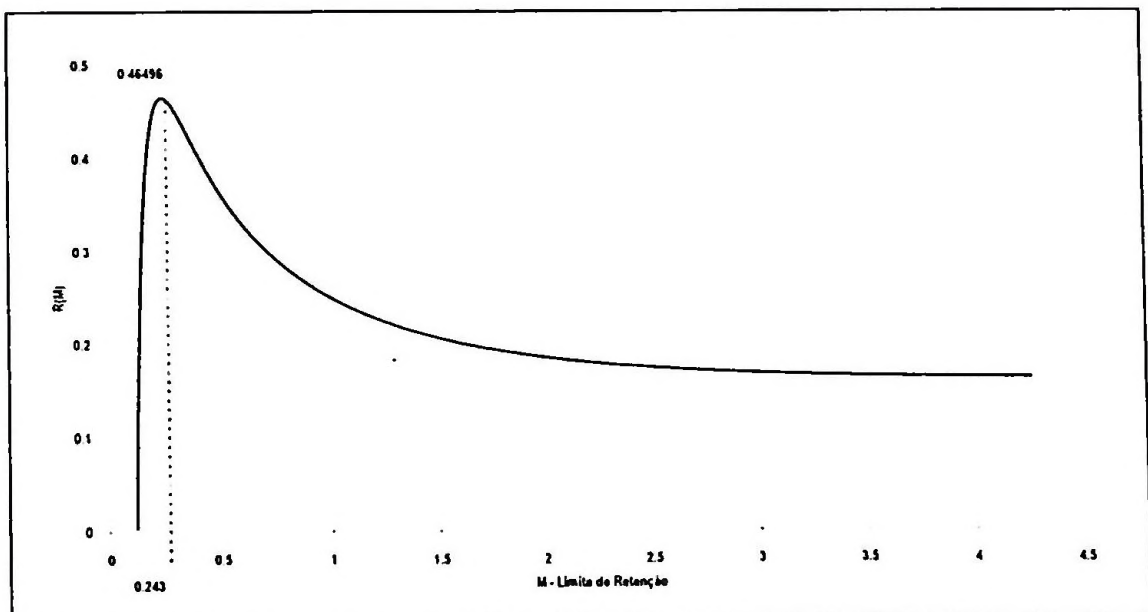


FIGURA 4.3 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.15$.

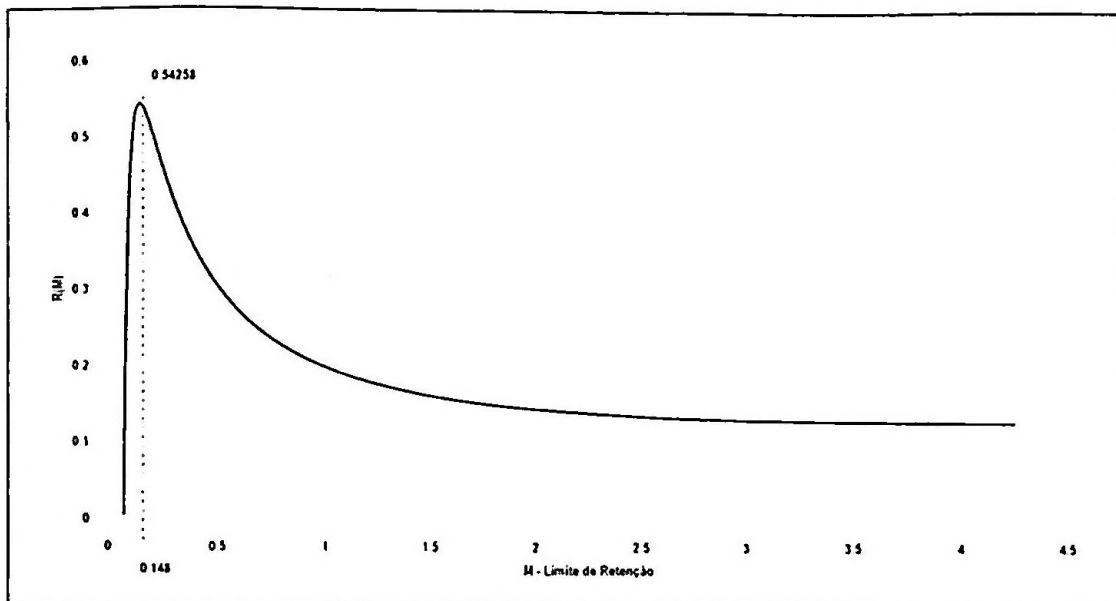


FIGURA 4.4 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.15$ e $\xi = 0.11$.

- Distribuição B⁵:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & ; x < \frac{20}{25.917} \\ 10.992^{-1} [10^{-6} \cdot 25.917^3 \cdot x^3 - 10e^{20-25.917x} + 9.992] & ; \frac{20}{25.917} \leq x \leq \frac{100}{25.917} \\ 1 & ; \frac{100}{25.917} < x \end{cases}$$

e

$$\frac{dG(x)}{dx} = \begin{cases} 10.992^{-1} [10 \cdot 25.917e^{20-25.917x} + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 25.917^3 \cdot x^2] & ; \frac{20}{25.917} \leq x \leq \frac{100}{25.917} \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases}$$

⁵ Ideia proveniente de WATERS (1983)

B1.1 - O PRÉMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Para esta função de distribuição do montante de indemnizações particulares, é necessário considerar duas situações, dependentes do valor de retenção M , para o cálculo do prémio de resseguro:

(i) Se $M < \frac{20}{25.917}$.

a variável aleatória indemnizações cedidas pela seguradora, X^{cc} , é tal que

$$X^{cc} = X - M,$$

pelo que

$$E[X^{cc}] = 1 - M.$$

(ii) Se $\frac{20}{25.917} \leq M \leq \frac{100}{25.917}$,

X^{cc} é tal que

$$X^{cc} = \begin{cases} 0 & ; X \leq M \\ X - M & ; X > M \end{cases},$$

pelo que

$$E[X^{cc}] = \int_M^{100/25.917} (x - M) dG(x)$$

ou seja,

$$E[X^{cc}] = 10.992 \left[10e^{20-25.917M} \left(M + \frac{1}{25.917} \right) - \frac{1010}{25.917} e^{-80} + \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 25.917^3}{4} \left(\left(\frac{100}{25.917} \right)^4 - M^4 \right) \right] - M[1 - G(M)] .$$

É evidente que se $M > \frac{100}{25.917}$ é o mesmo que não haver resseguro, dado que se tem $X^{cc} = 0$, pelo que $E[X^{cc}] = 0$.

Também para determinar a função geradora de momentos das indemnizações retidas pela seguradora, dada a retenção M , será necessário considerar as duas situações anteriores:

(i) Se $M < \frac{20}{25.917}$,

a variável aleatória indemnizações retidas pela seguradora é tal que

$$X^{cc} = M ,$$

pelo que

$$M_{X^{cc}}(r; M) = \int_{\frac{20}{25.917}}^{\frac{100}{25.917}} e^{rM} dG(x) = e^{rM} .$$

(ii) Se $\frac{20}{25.917} \leq M \leq \frac{100}{25.917}$,

X^{cc} é tal que

$$X^{cc} = \begin{cases} X & ; X \leq M \\ M & ; X > M \end{cases} .$$

pele que

$$M_{\text{Yr}}(r; M) = \int_{20/25917}^M e^{rx} dG(x) + \int_M^{100/25917} e^{rM} dG(x) ,$$

donde resulta

$$M_{\text{Yr}}(r; M) = 10^{-992} \left[\frac{10 \cdot 25917}{r - 25917} \left(e^{20 - (10/25917)M} - e^{20/25917 r} \right) + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 25917^3 \cdot \left(e^{rM} \left(\frac{M^2}{r} - \frac{2M}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) + e^{r \cdot 20/25917} \left(-\frac{1}{r} \left(\frac{20}{25917} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{40}{25917} - \frac{2}{r^3} \right) \right) \right] \cdot e^{rM} (1 - G(M))$$

com $r \notin \{0, 25.917\}$.

Registe-se então que a equação (4.2), que define o coeficiente de ajustamento, terá formas diferentes consoante os casos anteriormente apontados, uma vez que o prémio líquido após o resseguro, com retenção M ($P_{Lq}(M)$), assim como a função geradora de momentos das indemnizações retidas pela seguradora são diferentes em cada uma das situações anteriores.

Considerando as combinações de θ e ξ , da TABELA 4.5,

θ	ξ
0.1	0.2
0.2	0.4

TABELA 4.5

o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento R ($R = R(M)$), para cada uma destas combinações, consta da TABELA 4.6:

θ/ξ	$M^{\#}$	$R(M^{\#})$
0.1/0.2	1.009	0.1806
0.2/0.4	0.977	0.3445

TABELA 4.6

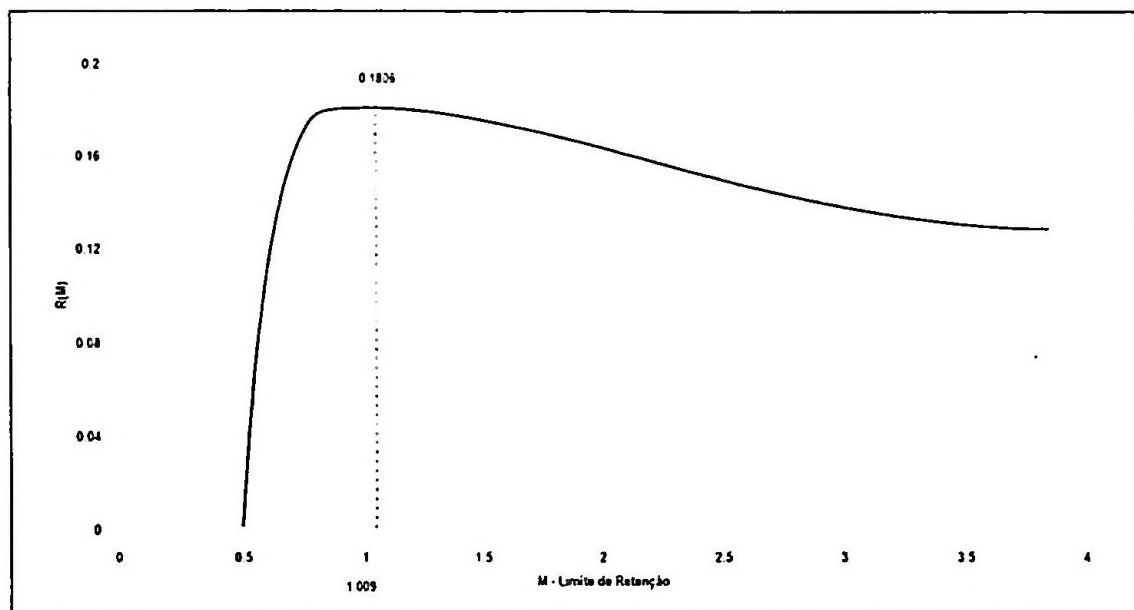


FIGURA 4.5 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$.

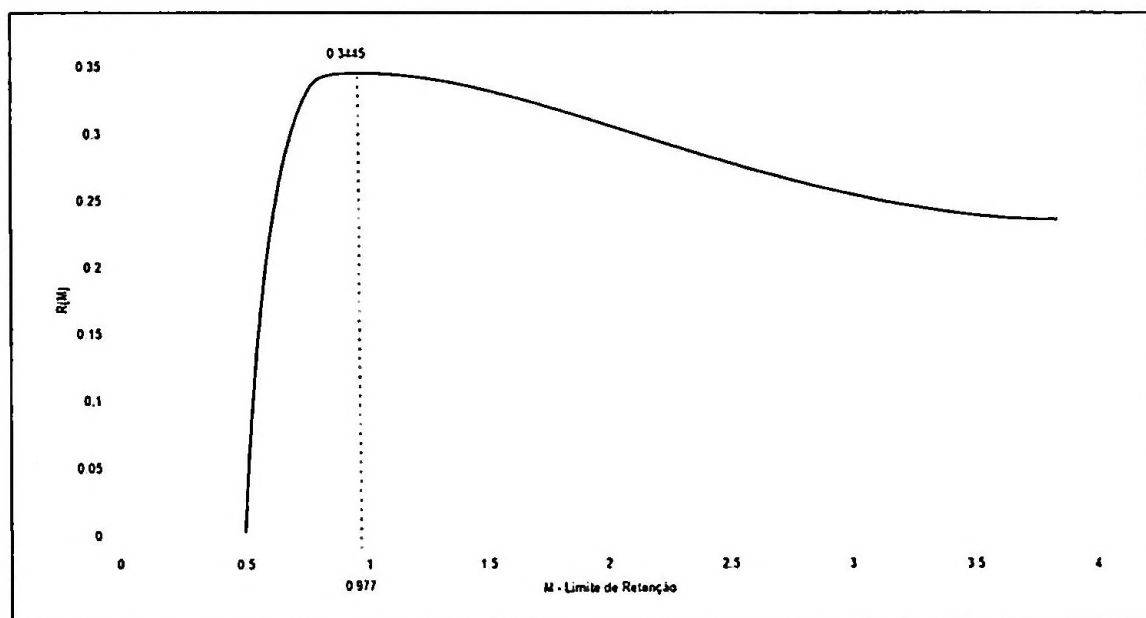


FIGURA 4.6 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.4$.

B1.2 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DA VARIÂNCIA

De acordo com este princípio de cálculo, o prêmio de resseguro, dada a retenção M , obtém-se da seguinte forma:

$$P_{r_{\text{res}}}(M) = \lambda \int_M^{\infty} (x - M) dG(x) + \xi \lambda \int_M^{\infty} (x - M)^2 dG(x) .$$

Tal como em B1.1, será necessário considerar dois casos, dependentes do valor de retenção M , para o cálculo do prêmio de resseguro e da função geradora de momentos das indemnizações retidas pela seguradora. Visto que em B1.1 já se focou o problema do cálculo de $E[X^{ce}]$ e $M_{X^{ce}}(r; M)$, vejamos quais as fórmulas para o cálculo de $Var[X^{ce}]$.

(i) Se $M < \frac{20}{25.917}$,

tem-se que

$$Var[X^{ce}] = \int_{\frac{20}{25.917}}^{\frac{100}{25.917}} (x - M)^2 dG(x) ,$$

resultando

$$Var[X^{ce}] = 10.992^{-1} \left[\frac{1}{25.917^2} (10.118.08 - 10.2020e^{-80}) - \frac{M}{25.917^2} (569.76 - 2020e^{-80}) - 10M^2e^{-80} \right] \cdot M^2 .$$

(ii) Se $\frac{20}{25.917} \leq M \leq \frac{100}{25.917}$,

tem-se

$$Var[X^{ce}] = \int_M^{\frac{100}{25.917}} (x - M)^2 dG(x) ,$$

donde resulta

$$\begin{aligned}
 Var[X^{**}] = & 10^{-992} \left[\frac{102.2}{25.917} \cdot 80 \cdot 10e^{20} \cdot 25917^3 \left(M^2 - \frac{20}{25917} \cdot \frac{1}{25917} \cdot \frac{2020}{25.917} M e^{-80} - 20 M e^{20} \cdot 25917^3 \left(M + \frac{1}{25.917} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 10 M^2 \left(1 - 25.917 M e^{-80} \right) + 3 \cdot 10^{-6} \cdot 25.917^3 \left(\left(\frac{102.2}{25.917} \right)^2 - M^2 \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6 \cdot 10^{-6} \cdot 25.917^3 M \left(\frac{102.2}{25.917} \right) - M^4 \right) + 10^{-6} \cdot 25.917^3 M^2 \left(\frac{102.2}{25.917} \right)^2 - M^4 \right] .
 \end{aligned}$$

Tal como aconteceu em B1.1, a equação (4.2), que define o coeficiente de ajustamento, terá formas diferentes consoante os casos anteriormente estudados.

Considerando as combinações de θ e ξ , da TABELA 4.7

θ	ξ
1.0106	1.29585
0.4	0.4

TABELA 4.7

o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento R ($R = R(M)$), para cada uma destas combinações, consta da TABELA 4.8:

θ/ξ	$M^{\#}$	$R(M^{\#})$
1.0106/1.29585	0.603	1.1727
0.4/0.4	0.395	0.9979

TABELA 4.8

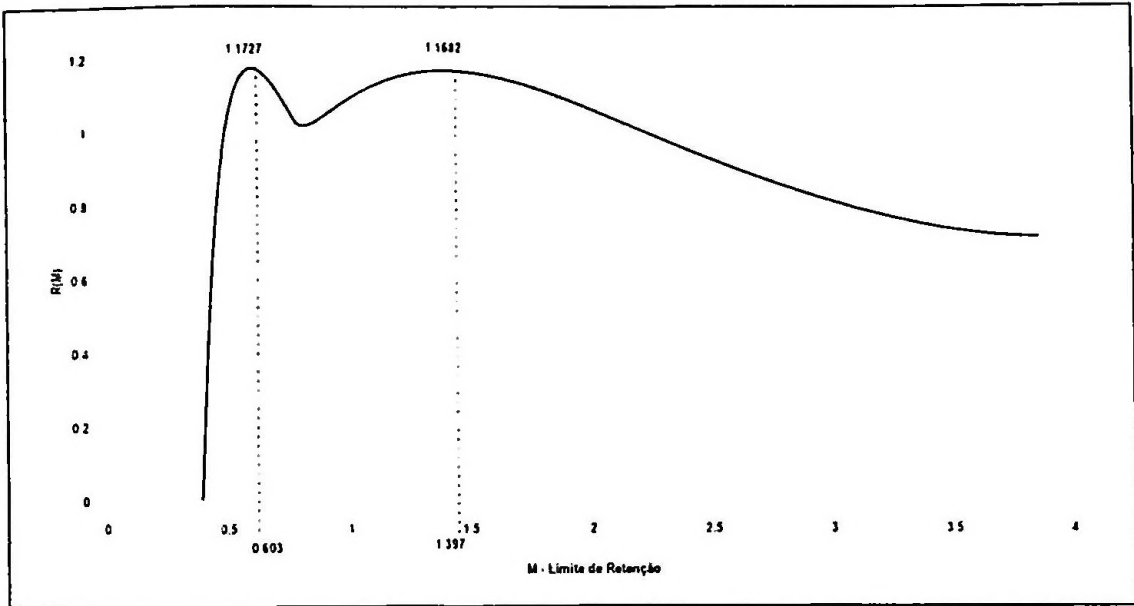


FIGURA 4.7 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 1.0106$ e $\xi = 1.29585$.

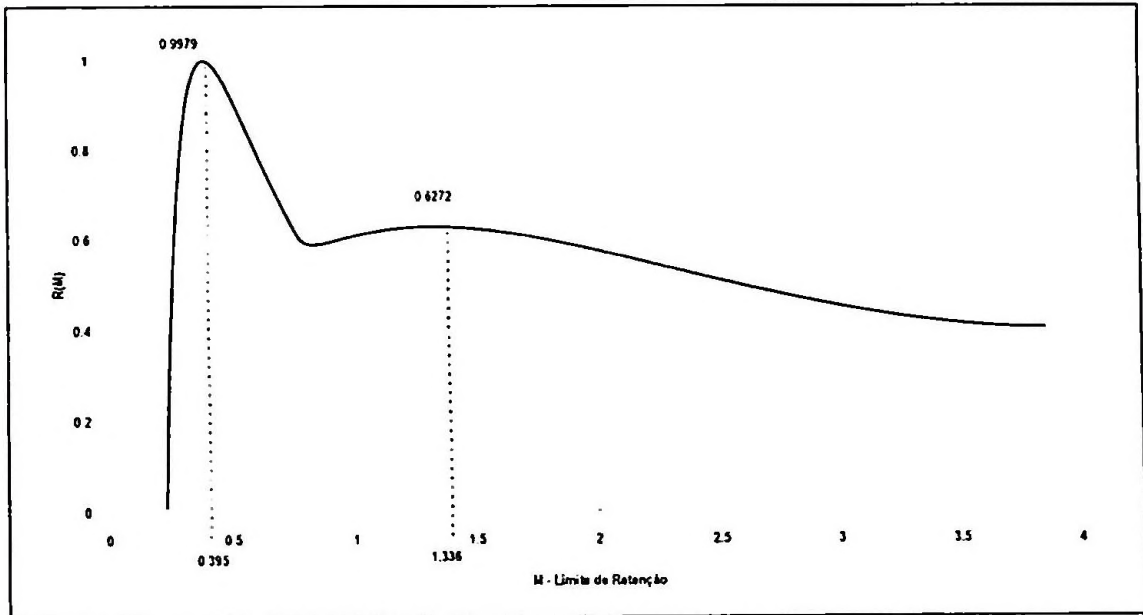


FIGURA 4.8 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, quando $\theta = 0.4$ e $\xi = 0.4$.

- Distribuição C: $G(x) = 1 - (1+x)^{-2}$, $x > 0$ i.e.,
 $X \sim \text{Pareto}(2,1)$

C1 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Neste caso, dada a retenção M , vem que o prêmio de resseguro, $P_{res}(M)$, tem a forma

$$P_{res}(M) = (1 + \xi) \frac{1}{1 + M}.$$

resultando que o prêmio líquido de resseguro para essa retenção M , $P_{liq}(M)$, seja

$$P_{liq}(M) = 1 + \theta - (1 + \xi) \frac{1}{1 + M}.$$

Para a determinação do coeficiente de ajustamento, R ($R=R(M)$), seria necessário determinar a solução não nula da equação (4.2), que neste caso assume a forma

$$1 + \left[1 + \theta - (1 + \xi) \frac{1}{1 + M} \right] r = \int_0^M e^{rx} \frac{2}{(1+x)^3} dx + e^{rM} \left(\frac{1}{1 + M} \right)^2.$$

Esta equação pode ser resolvida recorrendo a técnicas de análise numérica, mas optou-se por utilizar a função distribuição discretizada a partir do processo descrito por (1.3), com parâmetro de discretização $\beta = 100$.

Assim, aplicando (1.3), obtém-se

$$\begin{cases} g_0 = 1 + \beta^2 [(\beta+1)^{-1} - \beta^{-1}] \\ g_k = \beta^2 [(\beta+k+1)^{-1} - 2(\beta+k)^{-1} + (\beta+k-1)^{-1}] \end{cases} : k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Para as combinações de θ e ξ , da TABELA 4.9

θ	ξ
0.1	0.25
0.2	0.4

TABELA 4.9

o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento R ($R = R(M)$), para cada uma destas combinações, consta da TABELA 4.10:

θ/ξ	$M^\#$	$R(M^\#)$
0.1/0.25	3.83	0.0583
0.2/0.4	2.33	0.1447

TABELA 4.10

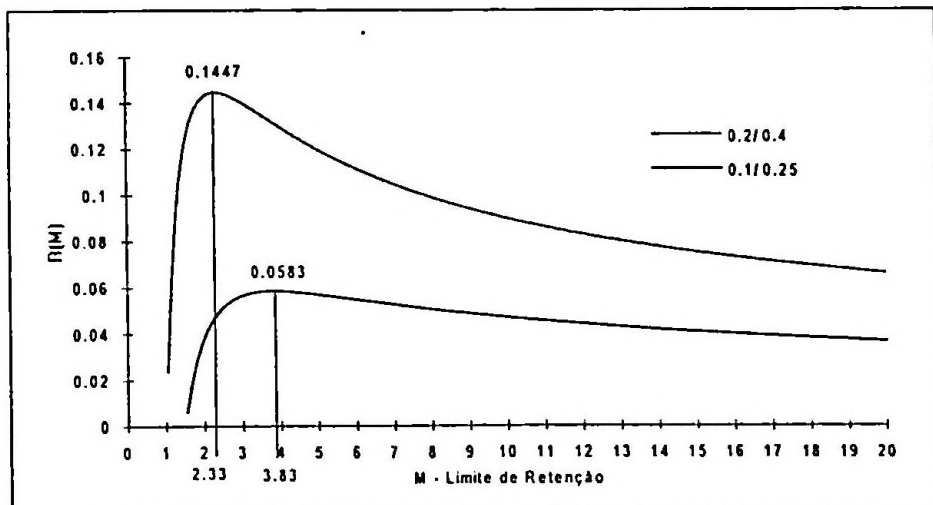


FIGURA 4.9 - Determinação do limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, para as duas combinações θ/ξ da TABELA 4.9.

Nota: No cálculo dos valores necessários para a construção da FIGURA 4.9 usou-se $\beta = 20$.

Quando o critério de otimização for o de minimizar a probabilidade de ruína, comparar-se-ão, para cada um dos casos estudados, os limites de retenção ótimos M^* , com os valores de M^f agora obtidos.

2º CRITÉRIO DE OPTIMIZAÇÃO



Para este efeito será utilizado o algoritmo de DICKSON e WATERS, alterado para incorporar o resseguro, já descrito na secção 3.4.2, discretizando o montante de indemnizações particulares (antes do resseguro) nos pontos $1/\beta, 2/\beta, \dots$, de acordo com o método referido em (1.3) utilizando o parâmetro da discretização $\beta = 200$ (Para este efeito, foi necessário um β tão elevado, devido ao facto de os limites de retenção, que minimizam a probabilidade de ruína para os diferentes valores de reserva inicial u considerados, serem muito próximos, como se constata da leitura das TABELAS 4.11, 4.13, 4.15, 4.17 e 4.20).

Estas probabilidades foram calculadas utilizando o parâmetro de truncagem ϵ referido em (2.23), igual a 3×10^{-9} .

No caso da Distribuição A, a função de probabilidade discretizada, tomando massas de probabilidade g_k nos pontos k ($k = 0, 1, 2, \dots$), resultante da aplicação de (1.3), já foi apresentada no *Exemplo 1.1*, expressão (1.4).

Relativamente à Distribuição B, discretizando de acordo com (1.3), resulta que

$$g_k = 0 \quad \text{se } k < \left\lfloor \frac{20\beta}{25917} \right\rfloor \text{ ou } k > \left\lceil \frac{100\beta}{25917} \right\rceil$$

$$g_k = 10^{-992} \left\{ \frac{10^{-u}}{4\beta^4} \left[(k+1)^4 - \left(\frac{20\beta}{25917} \right)^4 \right] + \frac{10\beta}{25917} \left(e^{20 \cdot 25917k \cdot 10\beta} - 1 \right) + 9.992 \left(k+1 - \frac{20\beta}{25917} \right) \right\},$$

$$\text{se } k = \left\lfloor \frac{20\beta}{25917} \right\rfloor$$

$$g_k = 10^{-992} \left\{ \frac{10^{-u}}{4\beta^4} \left[(k+1)^4 - 2k^4 + \left(\frac{20\beta}{25917} \right)^4 \right] + \frac{10\beta}{25917} \left(e^{20 \cdot 25917k \cdot 10\beta} - 2e^{20 \cdot 25917(k-1) \cdot 10\beta} + 1 \right) + 9.992 \left(1 - k + \frac{20\beta}{25917} \right) \right\},$$

$$\text{se } k = \left\lfloor \frac{20\beta}{25917} \right\rfloor + 1$$

$$s_k = 10^{-0.02} \cdot 10^{-\frac{25.917}{\beta} k} \left\{ ((k+1)^k - 2k^k + (k-1)^k) + \frac{10\beta}{25.917} (e^{20.25917k/\beta} - 2e^{20.25917k/\beta} + e^{20.25917(k-1)/\beta}) \right\}$$

$$SE \left[\frac{20\beta}{25.917} \right] + 1 < k < \left[\frac{100\beta}{25.917} \right]$$

$$s_k = 10^{-0.02} \cdot 10^{-\frac{25.917}{\beta} k} \left\{ \left(\frac{100\beta}{25.917} \right)^k - 2k^k + (k-1)^k \right\} + \frac{10\beta}{25.917} (e^{20.25917k/\beta} - 2e^{20.25917k/\beta} + e^{20.25917(k-1)/\beta}) + 10^{-0.02} \left(\frac{100\beta}{25.917} - k - 1 \right)$$

$$SE \ k = \left[\frac{100\beta}{25.917} \right]$$

onde β é o parâmetro da discretização e $[s]$ representa o maior inteiro menor ou igual a s .

Quanto à Distribuição C, deste processo de discretização resultam as fórmulas já adiantadas em (4.3).

Para cada distribuição (A, B e C), e considerando cada um dos casos estudados anteriormente no *1º Critério de otimização*, quanto a princípios de cálculo de prémios e combinações de coeficientes de carga (θ/ξ), procurou-se determinar os limites de retenção (M^*) que minimizam a probabilidade de ruína, $\Psi(u; M)$, para vários valores de reserva inicial u .

Para a obtenção do valor pretendido M^* , dada a reserva inicial u , foi necessário calcular os vários valores de $\Psi(u; M)$, pelo que é possível traçar o seu gráfico comparando o seu comportamento com o respectivo majorante de *Lundberg*. Para cada valor de u , apresenta-se uma tabela que permitirá comparar os valores da probabilidade de ruína sem resseguro, $\Psi(u)$, a probabilidade de ruína ressegurando o montante óptimo, $\Psi(u; M^*)$, e o valor do majorante de Lundberg, $e^{-R(M^*)u}$.

- Distribuição A: $G(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$

A2.1 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Considerando as diferentes combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.1, a TABELA 4.11 apresenta, para diferentes montantes de reserva inicial u , os respectivos valores de $M(M^*)$ que minimizam as probabilidades $\Psi(u; M)$; a última linha contém o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento ($M^\#$ do critério de otimização anterior, TABELA 4.2).

u	M^*	
	$\theta = 0.1/\xi = 0.2$	$\theta = 0.2/\xi = 0.4$
10	1.585	1.530
20	1.555	1.505
30	1.550	1.500
40	1.545	1.500
50	1.545	1.500
$M^\#$	1.533	1.486

TABELA 4.11

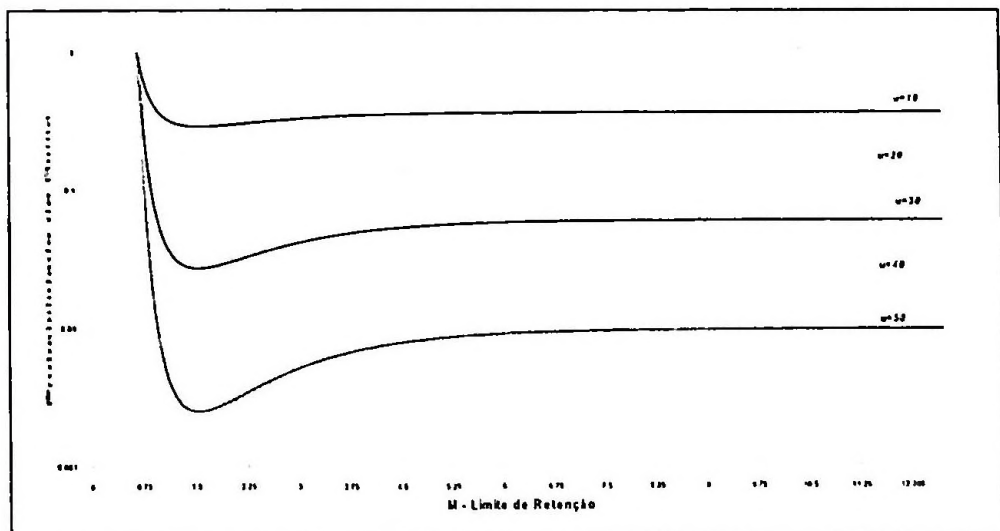


FIGURA 4.10 - $\Psi(u; M)$, quando $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$

O valor de M , que minimiza a probabilidade de ruína, decresce à medida que u aumenta, e estes valores parecem convergir para o valor de M que maximiza o valor do coeficiente de ajustamento.

Este comportamento sugere que, pelo menos para valores elevados de u , determinando o valor de M que maximize o coeficiente de ajustamento, é uma alternativa razoável e bastante mais rápida para aproximar o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína $\Psi(u; M)$.

u	$\theta = 0.1/\xi = 0.2$			$\theta = 0.2/\xi = 0.4$		
	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$
10	0.366264	0.288555	0.304523	0.157396	0.093964	0.103865
20	0.147564	0.087902	0.092734	0.029728	0.009766	0.010788
30	0.059452	0.026771	0.028240	0.005615	0.001015	0.001121
40	0.023953	0.008153	0.008600	0.001061	0.000105	0.000116
50	0.009650	0.002483	0.002619	0.000200	0.000011	0.000012

TABELA 4.12

- (1) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, sem resseguro, calculada pela expressão (1.12).
- (2) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, incorporando o resseguro, nos limites óptimos de retenção M^* (que minimizam a probabilidade de ruína), constantes na TABELA 4.11.
- (3) - Majorante de Lundberg (1.10), onde $R(M^*)$ é o valor do coeficiente de ajustamento constante da TABELA 4.2.

A FIGURA 4.11 apresenta, apenas para os valores de reserva inicial $u = 10, 20, 30$ (para não sobrecarregar a figura), $\Psi(u; M)$ e o majorante de Lundberg $e^{-R(M)u}$, como funções de M , quando $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$.

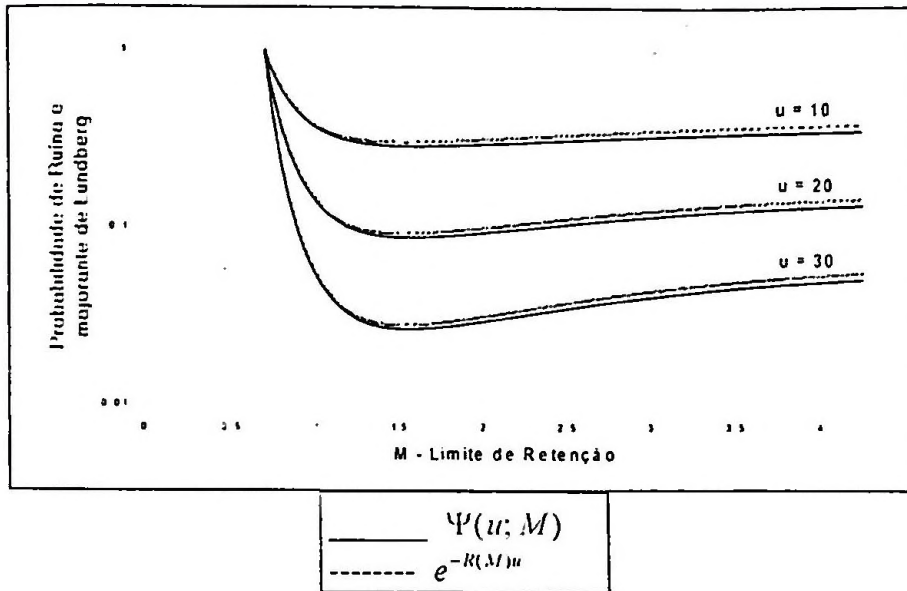


FIGURA 4.11

Da análise da FIGURA 4.11 é de registrar a semelhança de comportamento de $\Psi(u; M)$ e de $e^{-R(M)u}$. Como seria de esperar, à medida que u aumenta tem-se que os valores de $\Psi(u; M)$ tendem para os valores de $e^{-R(M)u}$.

Da leitura dos resultados da TABELA 4.12 pode-se ver que, nos níveis de retenção óptimos, a probabilidade de ruína $\Psi(u; M)$ é muito menor do que $\Psi(u)$. Mais ainda, o majorante de *Lundberg* está muito próximo da probabilidade de ruína, $\Psi(u; M)$, nos pontos dos níveis óptimos de retenção.

É de referir também que o resseguro *Excess of Loss* provoca uma redução significativa na probabilidade de ruína.

A2.2 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO DESVIO PADRÃO

Considerando as diferentes combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.3, a TABELA 4.13 apresenta, para diferentes montantes de reserva inicial u , os respectivos valores de M que minimizam as probabilidades $\Psi(u; M)$; a última linha contém o valor de M que nestas condições maximiza o coeficiente de ajustamento ($M^{\#}$ do critério de otimização anterior, TABELA 4.4).

u	M^*	
	$\theta = 0.2 / \xi = 0.15$	$\theta = 0.15 / \xi = 0.11$
5	0.245	0.150
10	0.245	0.150
15	0.245	0.145
20	0.240	0.145
$M^{\#}$	0.243	0.148

TABELA 4.13

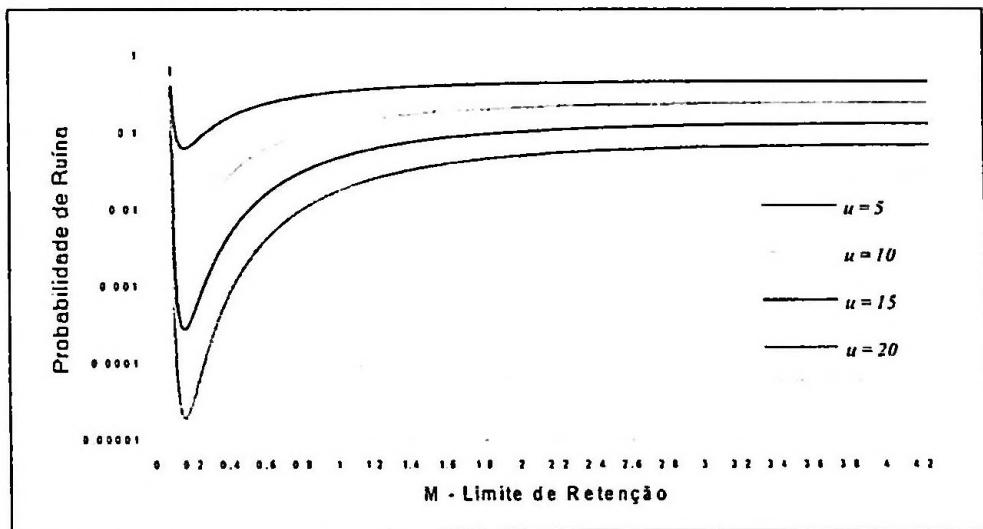


FIGURA 4.12 - $\Psi(u, M)$, quando $\theta = 0.15$ e $\xi = 0.11$.

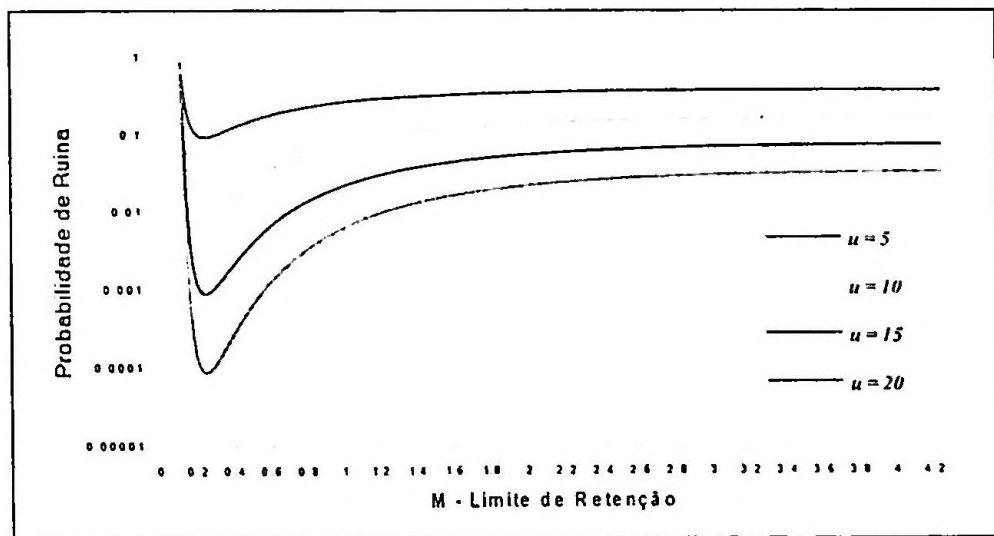


FIGURA 4.13 - $\Psi(u, M)$, quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.15$.

Tal como aconteceu quando o prémio de resseguro era calculado segundo o princípio do valor esperado, o valor de M , que minimiza a probabilidade de ruína, decresce à medida que u aumenta, e estes valores parecem convergir para o valor de M que maximiza o valor do coeficiente de ajustamento.

Mais uma vez, este comportamento sugere que, pelo menos para valores elevados de u , determinando o valor de M que maximize o coeficiente de ajustamento, é uma alternativa razoável e rápida para aproximar o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína $\Psi(u; M)$.

u	$\theta = 0.2/\xi = 0.15$			$\theta = 0.15/\xi = 0.11$		
	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$
5	0.362165	0.094024	0.097803	0.452967	0.064443	0.066344
10	0.157396	0.009197	0.009565	0.235956	0.004278	0.004402
15	0.068404	0.000900	0.000936	0.122912	0.000285	0.000292
20	0.029728	0.000088	0.000091	0.064027	0.000019	0.000019

TABELA 4.14

- (1) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, sem resseguro, calculada pela expressão (1.12).
- (2) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, incorporando o resseguro, nos limites óptimos de retenção M^* (que minimizam a probabilidade de ruína), constantes na TABELA 4.13.
- (3) - Majorante de Lundberg (1.10), onde $R(M^*)$ é o valor do coeficiente de ajustamento constante da TABELA 4.4.

A FIGURA 4.14 representa, para os montantes de reserva inicial u constantes na TABELA 4.13, os valores que $\Psi(u; M)$ e o majorante de Lundberg assumem como funções de M , quando $\theta = 0.15$ e $\zeta = 0.11$.

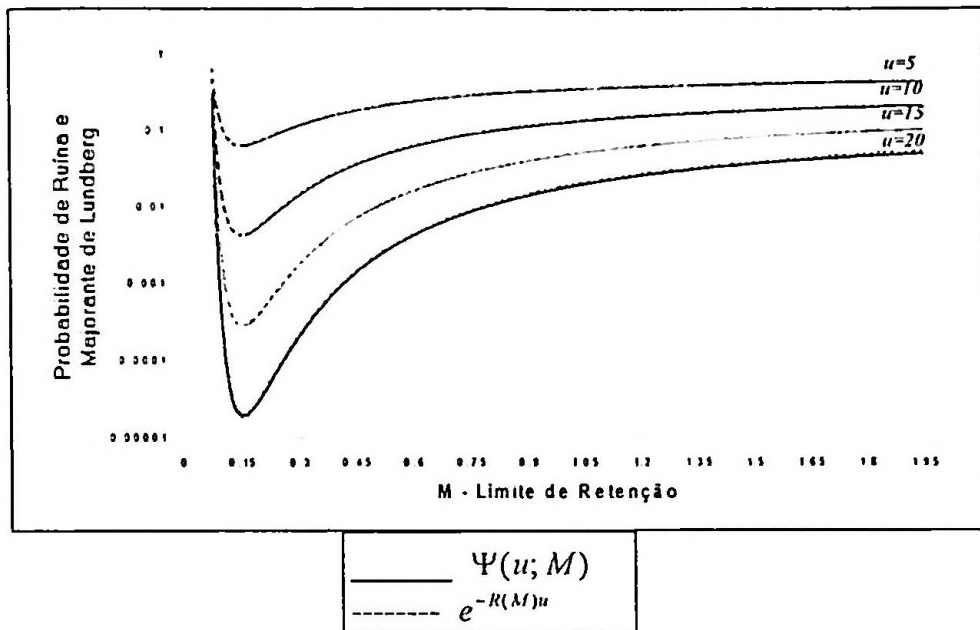


FIGURA 4.14

Da análise dos resultados da TABELA 4.14 e do comportamento de $\Psi(u; M)$ e de $e^{-R(M)u}$, ilustrados na FIGURA 4.14, podem-se tirar conclusões análogas às apontadas nos casos em que o prêmio de resseguro foi calculado segundo o princípio do valor esperado.

- Distribuição B:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < \frac{20}{25.917} \\ 10.992^{-1} [10^{-6} \cdot 25.917^3 \cdot x^3 - 10e^{20-25.917x} + 9.992] & ; \quad \frac{20}{25.917} \leq x \leq \frac{100}{25.917} \\ 1 & ; \quad \frac{100}{25.917} < x \end{cases}$$

B2.1 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Considerando as diferentes combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.5, a TABELA 4.15 apresenta, para diferentes montantes de reserva inicial u , os respectivos valores de M que minimizam as probabilidades $\Psi(u; M)$; a última linha contém o valor de M que nestas condições maximiza o coeficiente de ajustamento (M^* do critério de otimização anterior, TABELA 4.6).

u	M^*	
	$\theta = 0.1/\xi = 0.2$	$\theta = 0.2/\xi = 0.4$
1	2.205	1.450
5	1.055	1.015
10	1.030	0.995
15	1.025	0.990
$M^{\#}$	1.009	0.977

TABELA 4.15

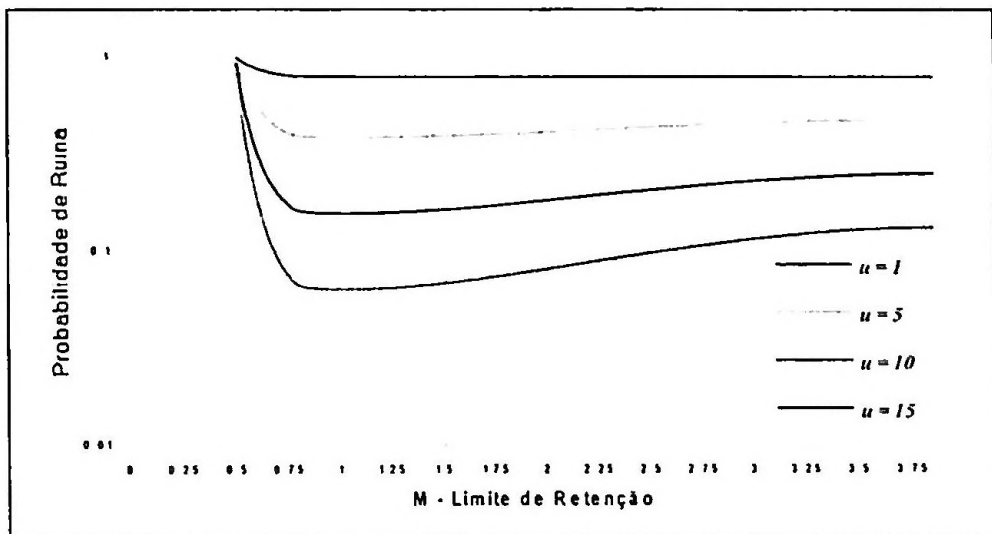


FIGURA 4.15 - $\Psi(u; M)$, quando $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$.

Novamente, o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína decresce à medida que u aumenta, e, tal como nos casos anteriores, estes valores parecem convergir para o valor de M que maximiza o valor do coeficiente de ajustamento.

u	$\theta = 0.1/\xi = 0.2$			$\theta = 0.2/\xi = 0.4$		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
	$\Psi(u)$	$\Psi(u; M^*)$	$e^{-R(M^*)u}$	$\Psi(u)$	$\Psi(u; M^*)$	$e^{-R(M^*)u}$
1	0.790949	0.790421	0.834769	0.644061	0.640722	0.708575
5	0.476407	0.384865	0.405352	0.255853	0.161950	0.178619
10	0.250119	0.156002	0.164310	0.078368	0.028926	0.031905
15	0.129720	0.063222	0.066603	0.022238	0.005160	0.005699

TABELA 4.16

- (1) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, sem resseguro, calculada pelo algoritmo de DICKSON e WATERS (1991).
- (2) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, incorporando o resseguro, nos limites óptimos de retenção M^* (que minimizam a probabilidade de ruína), constantes na TABELA 4.15.
- (3) - Majorante de Lundberg (1.10), onde $R(M^*)$ é o valor do coeficiente de ajustamento constante da TABELA 4.6.

A FIGURA 4.16 apresenta, para os vários montantes de reserva inicial u considerados, os valores de $\Psi(u; M)$ e do majorante de Lundberg $e^{-R(M)u}$ quando $\theta=0.1$ e $\xi=0.2$.

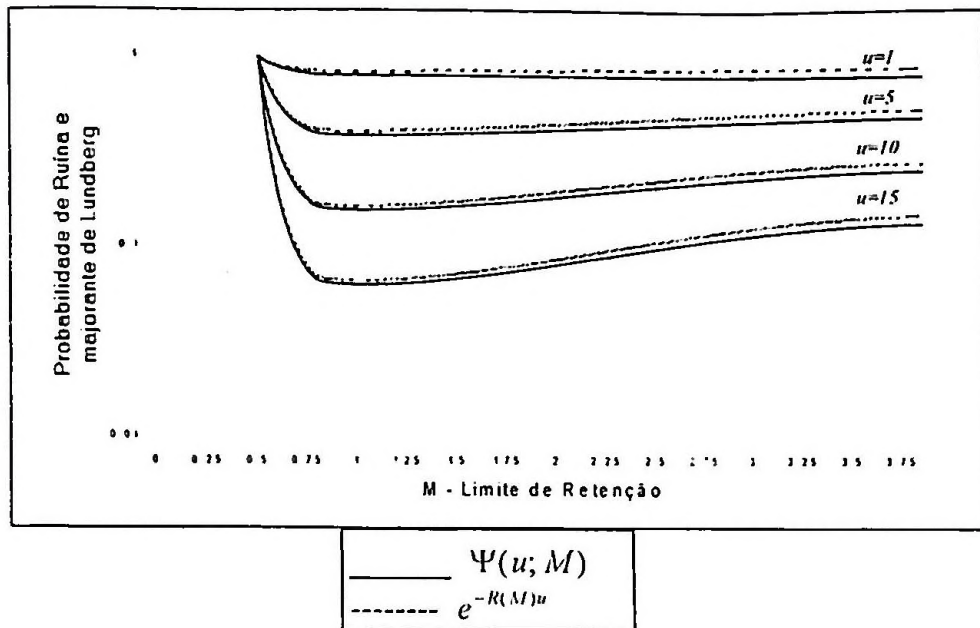


FIGURA 4.16 $\zeta=0.1$ e $\xi=0.2$.

Tal como nos casos anteriores, o comportamento de $\Psi(u; M)$ e de $e^{-R(M)u}$ são muito semelhantes, assumindo valores muito próximos nos limites óptimos de retenção.

B2.2 - O PRÉMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DA VARIÂNCIA

Considerando as diferentes combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.7, a TABELA 4.17 apresenta, para diferentes montantes de reserva inicial u , os respectivos valores de M que minimizam as probabilidades $\Psi(u; M)$.

Recorde-se que pela análise dos gráficos de $R(M)$, correspondentes aos casos agora em estudo, respectivamente FIGURA 4.7 e FIGURA 4.8, se verificou que em ambos os casos $R(M)$ tinha dois máximos relativos, M^r e M^0 . Assim, as duas últimas linhas da TABELA 4.7 referem-se a esses valores, onde M^r é o valor de M que nestas condições maximiza o coeficiente de ajustamento, constante na TABELA 4.8.

u	M^*	
	(1) $\theta = 1.0106/$ $\xi = 1.29585$	(2) $\theta = 0.4/\xi = 0.4$
1	2.015	0.410
2	1.530	0.405
3	1.490	0.400
4	1.465	0.400
5	1.450	0.400
M^0	1.397	1.336
$M^\#$	0.603	0.395

TABELA 4.17

Relativamente aos resultados da TABELA 4.17, é de assinalar que à medida que o valor da reserva inicial u aumenta, no caso (1), o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína parece tender para M^0 , enquanto que para o caso (2), o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína parece tender para $M^\#$.

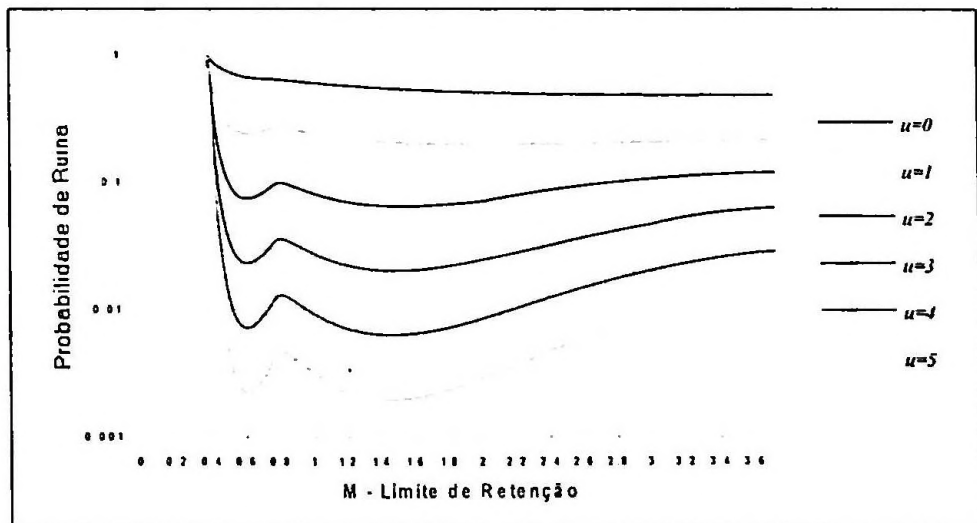


FIGURA 4.17 - $\Psi(u; M)$, quando $\theta = 1.0106$ e $\xi = 1.29585$.

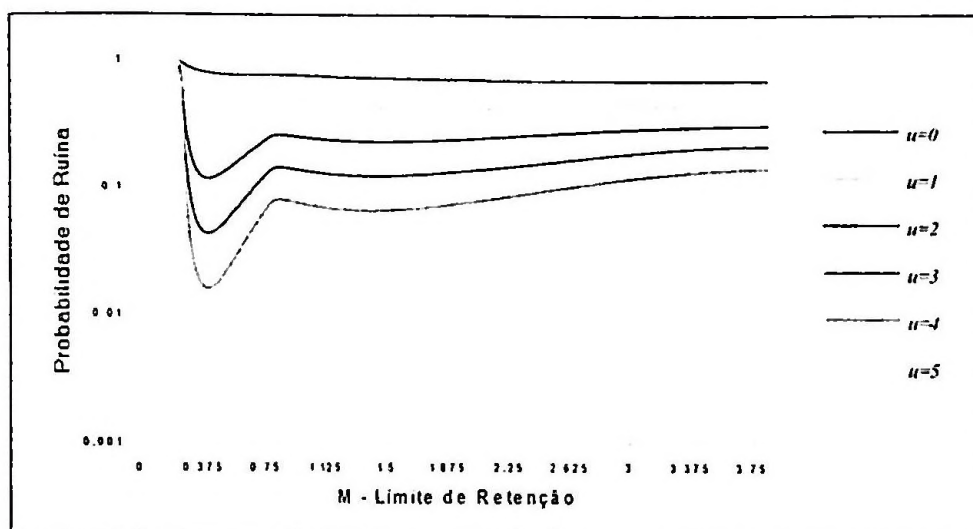


FIGURA 4.18 - $\Psi(u; M)$, quando $\rho = 0.4$ e $\xi = 0.4$.

θ/ξ	M^R	$R(M^R)$	M^O	$R(M^O)$
(1)				
1.0106/1.29585	0.603	1.1727	1.397	1.1682
(2)				
0.4/0.4	0.395	0.9979	1.336	0.6272

TABELA 4.18

Uma vez que, no caso (1) da TABELA 4.18, os valores de $R(M^R)$ e $R(M^O)$ são muito próximos, intuitivamente parece ser natural que o valor de M que minimiza a probabilidade de ruína tenda para o mais elevado entre M^R e M^O , escolha essa a que corresponderá um prêmio de resseguro menor e conseqüentemente a um lucro esperado superior.

u	$\theta = 1.0106/\xi = 1.29585$			$\theta = 0.4/\xi = 0.4$		
	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u; M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u; M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$
1	0.220433	0.199602	0.309530	0.456097	0.321027	0.368653
2	0.122548	0.064978	0.095809	0.314605	0.118450	0.135905
3	0.064916	0.020234	0.029656	0.216511	0.043678	0.050102
4	0.029512	0.006304	0.009179	0.142723	0.016106	0.018470
5	0.014469	0.001957	0.002841	0.095237	0.005939	0.006809

TABELA 4.19

(1) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, sem resseguro, calculada pelo algoritmo de DICKSON e WATERS (1991).

(2) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, incorporando o resseguro, nos limites óptimos de retenção M^* (que minimizam a probabilidade de ruína), constantes na TABELA 4.17.

(3) - Majorante de Lundberg (1.10), onde $R(M^*)$ é o valor do coeficiente de ajustamento constante da TABELA 4.8.

AS FIGURAS 4.19 e 4.20 ilustram, para os vários montantes de reserva inicial u considerados, o comportamento de $\Psi(u; M)$ e do majorante de Lundberg $e^{-R(M)u}$, em função de M .

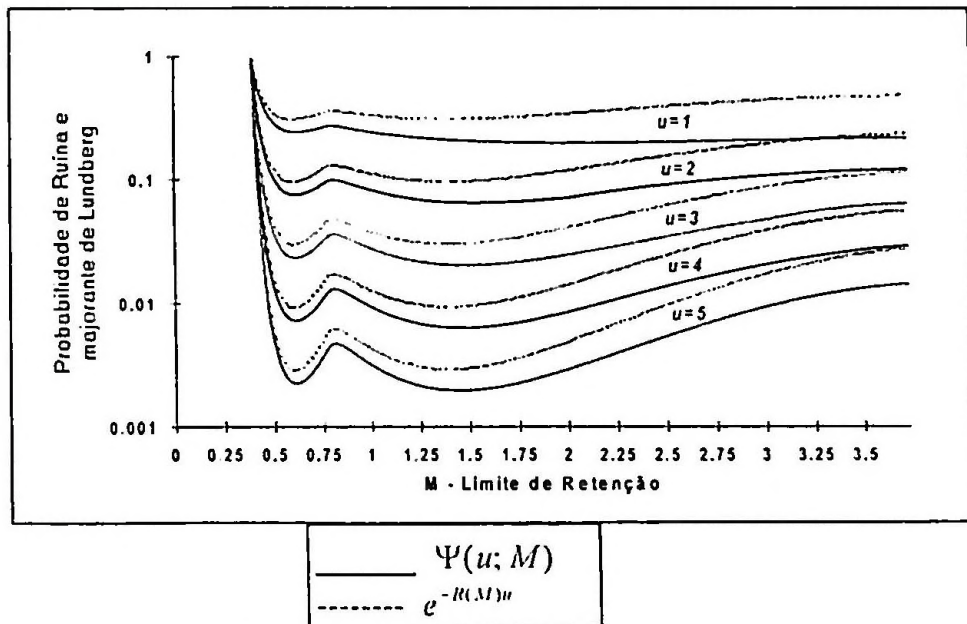


FIGURA 4.19 - $\theta = 1.0106$ e $\xi = 1.29585$

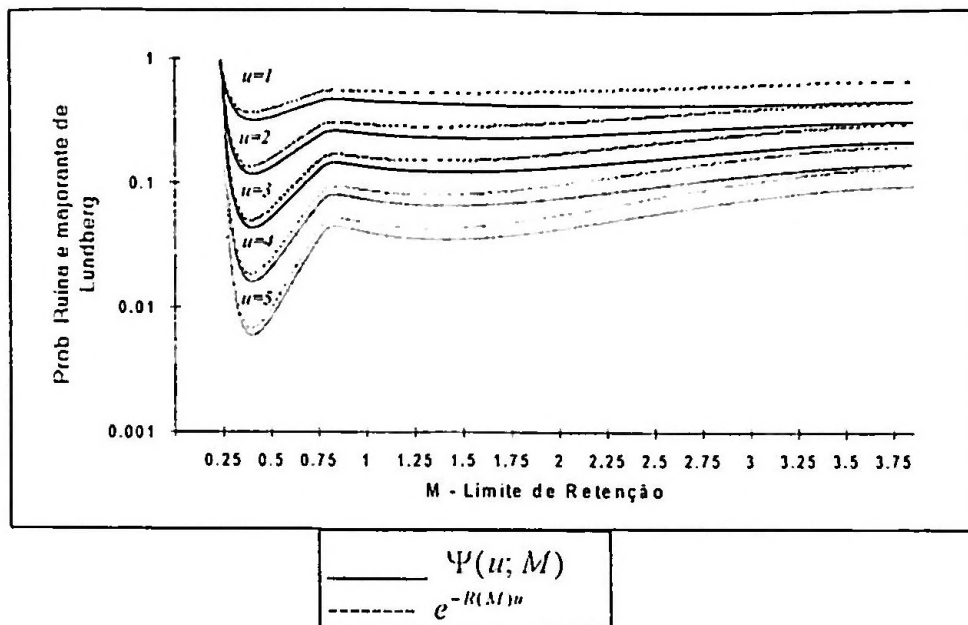


FIGURA 4.20 - $\theta = 0.4$ e $\xi = 0.4$

- Distribuição C: $G(x) = 1 - (1+x)^{-2}$, $x > 0$

C2 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Considerando as diferentes combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.9, a TABELA 4.20 apresenta, para diferentes montantes de reserva inicial u , os respectivos valores de M (M^*) que minimizam as probabilidades $\Psi(u; M)$; a última linha contém o valor de M que maximiza o coeficiente de ajustamento (M^r do critério de otimização anterior, TABELA 4.10).

u	M^*	
	$\theta = 0.1/\xi = 0.25$	$\theta = 0.2/\xi = 0.4$
10	4.23	2.445
20	4.01	2.385
30	3.945	2.365
40	3.915	2.355
50	3.895	2.35
$M^{\#}$	3.83	2.33

TABELA 4.20

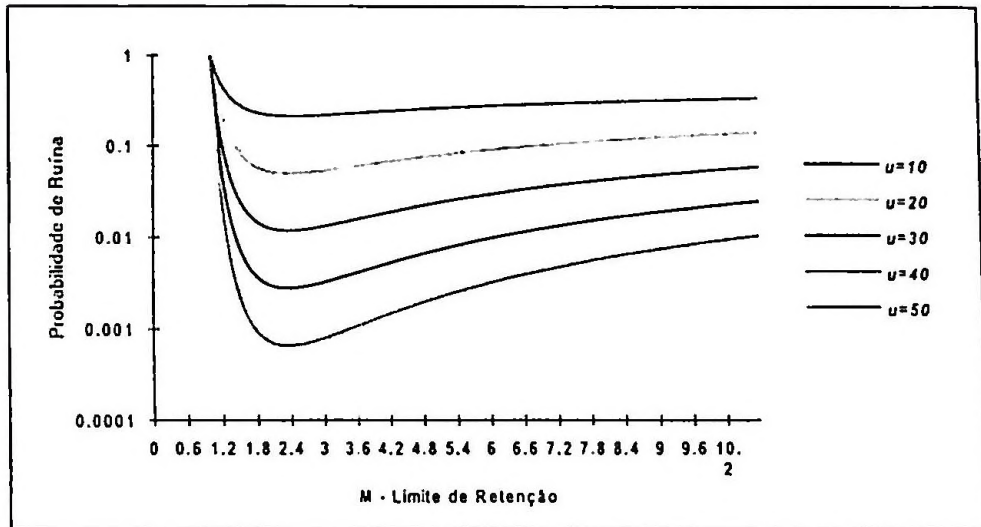


FIGURA 4.21 - $\Psi(u; M)$, quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.4$.

Da análise dos resultados constantes das TABELAS 4.20 e 4.21 e da FIGURA 4.22, verifica-se que também neste caso são válidas as observações efectuadas anteriormente para as situações já estudadas, quanto aos comportamentos de $M^{\#}$ e M^* e de $\Psi(u; M)$ e $e^{-R(M)u}$.

u	$\theta = 0.1/\xi = 0.25$			$\theta = 0.2/\xi = 0.4$		
	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$	(1) $\Psi(u)$	(2) $\Psi(u, M^*)$	(3) $e^{-R(M^*)u}$
10	0.627046	0.526521	0.558221	0.434997	0.214257	0.235275
20	0.498091	0.294163	0.311611	0.300490	0.50454	0.055354
30	0.411400	0.164216	0.173948	0.225022	0.011873	0.013023
40	0.347866	0.091656	0.097101	0.176873	0.002794	0.003064
50	0.299134	0.051153	0.054204	0.143850	0.000657	0.000721

TABELA 4.21

- (1) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, sem resseguro, calculada pelo algoritmo de DICKSON e WATERS (1991).
- (2) - Probabilidade de ruína, em horizonte infinito, incorporando o resseguro, nos limites ótimos de retenção M^* (que minimizam a probabilidade de ruína), constantes na TABELA 4.20.
- (3) - Majorante de Lundberg (1.10), onde $R(M^*)$ é o valor do coeficiente de ajustamento constante da TABELA 4.10.

A FIGURA 4.22 ilustra, para os valores de reserva inicial u considerados na TABELA 4.20, o comportamento de $\Psi(u; M)$ e do majorante de Lundberg como funções de M , quando $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.4$

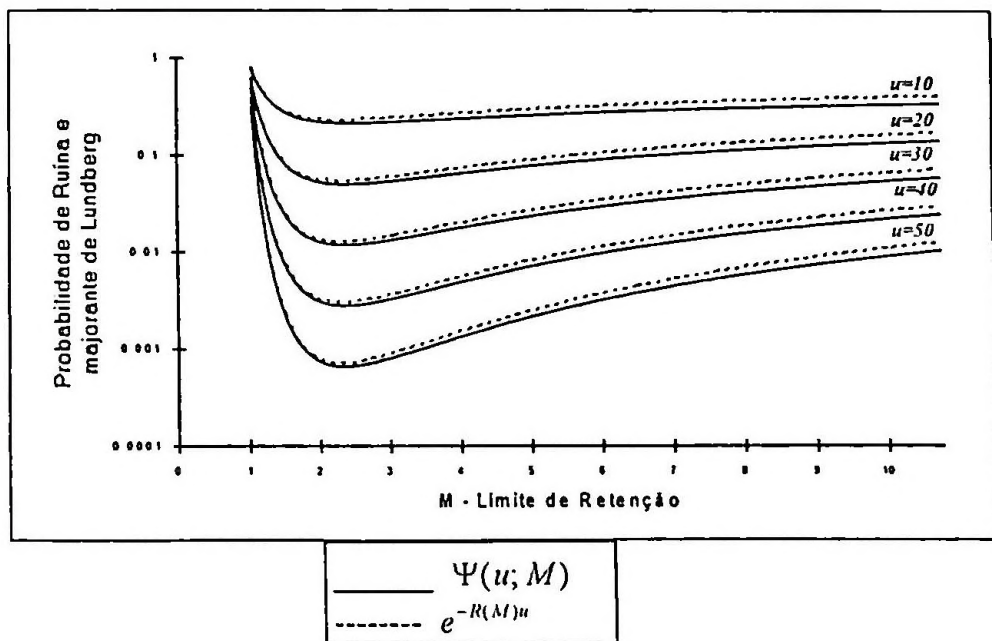


FIGURA 4.22

Verificou-se, pelo menos para os exemplos estudados, que o comportamento da probabilidade de ruína, $\Psi(u; M)$, e do majorante de Lundberg, $e^{-R(M)u}$, são muito semelhantes. Será interessante verificar se o mesmo acontece relativamente às probabilidades de ruína em horizonte finito, incorporando o resseguro *Excess of Loss* com limite de retenção M . É esse o objectivo da próxima secção.

4.2 - RUÍNA EM TEMPO CONTÍNUO E HORIZONTE FINITO



Nesta secção, considera-se o efeito do resseguro *Excess of Loss* na probabilidade de ruína em tempo contínuo e horizonte finito, utilizando, para tal, alguns dos exemplos já analisados e mantendo válidas as hipóteses apresentados na secção anterior, com as devidas alterações para o estudo em questão.

Estas probabilidades foram calculadas utilizando o algoritmo descrito na secção 3.4.1.1 com o mesmo parâmetro de truncagem, ε , considerado na secção anterior.

Dado que o processamento do algoritmo em computador para o estudo destes casos, mesmo em sistemas informáticos centrais, é ainda bastante lento, utilizou-se como parâmetro da discretização do montante de indemnizações particulares, $\beta = 20$, uma vez que o principal objectivo foi o de estudar o comportamento de $\Psi(u, T; M)$ e do majorante de *Lundberg* $e^{-R(M)u}$ em função de M , para diferentes combinações de u e T .

Para tal, dada a função de distribuição das indemnizações particulares, princípio de cálculo do prémio de resseguro e combinação de coeficientes de carga de seguro directo e resseguro, calcularam-se as probabilidades de ruína, $\Psi(u, T; M)$, definida por (3.2), determinando para cada valor de reserva inicial u e períodos de tempo decorridos T , o valor do limite de retenção óptimo⁶, M^F , isto é, que minimiza essa probabilidade.

⁶ Dado que $\beta=20$, calcularam-se apenas as probabilidades $\Psi(u, T; M)$ para valores de M múltiplos de 0.05 .

- Distribuição A: $G(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$

A3.1 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Das combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.1, escolhendo apenas o caso em que $\theta = 0.1$ e $\xi = 0.2$, a TABELA 4.22 apresenta, para montante de reserva inicial $u = 10$ e para vários valores de T , o valor do limite de retenção M^* , que minimiza a probabilidade $\Psi(u, T; M)$ e o correspondente valor de $\Psi(u, T; M^*)$.

T	$\Psi(10, T; M^*)$	M^*
50	**	
100	**	
150	0.139351	0.70
200	0.186435	0.90
$\Psi(u)$	0.366264	
$\Psi(u; M^*)$	0.288555	M^* ↓ 1.585

TABELA 4.22

** A função $\Psi(u, T; M)$ é crescente com M .

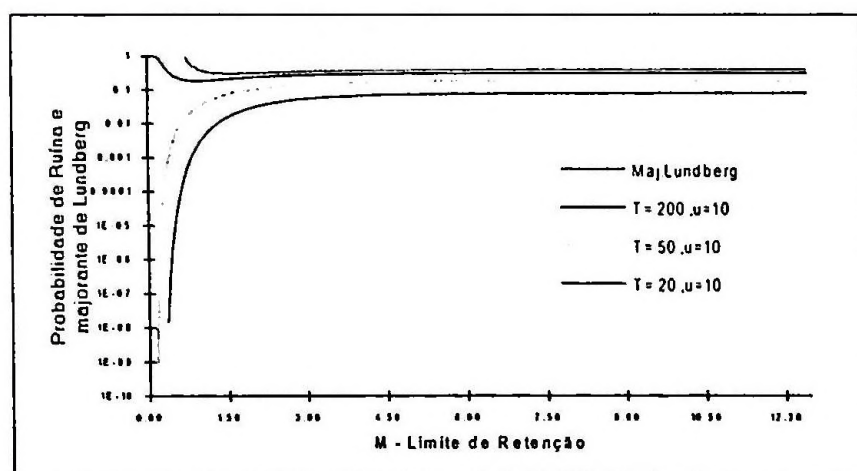


FIGURA 4.23

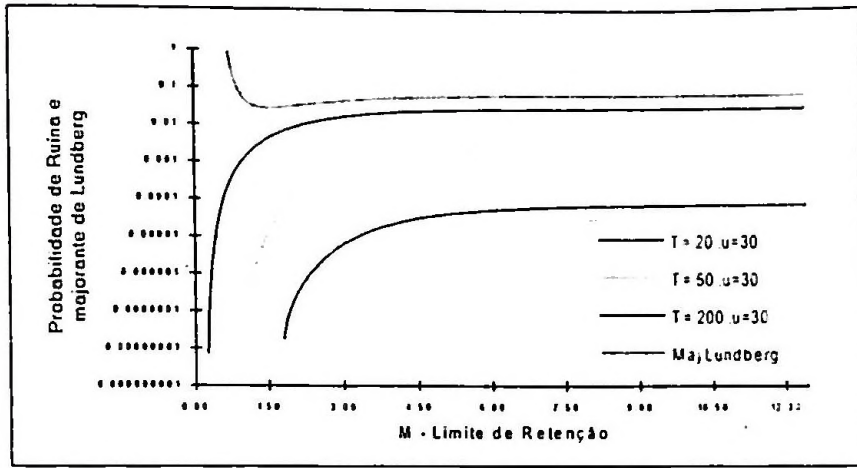


FIGURA 4.24

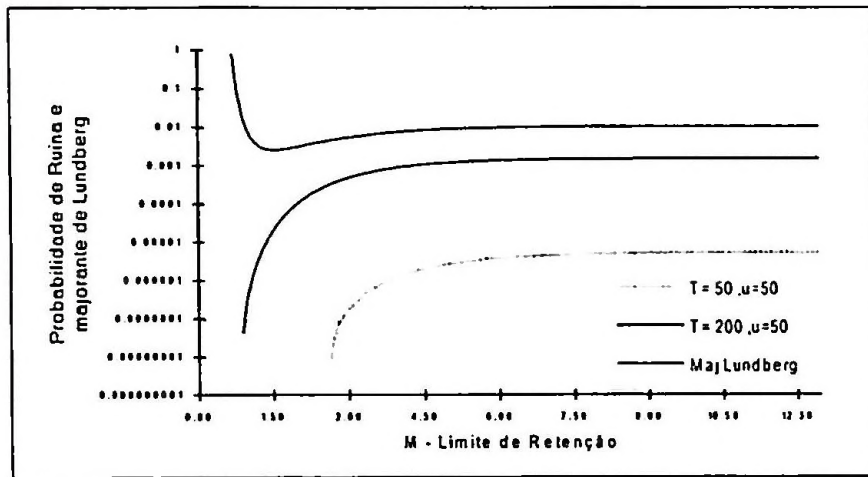


FIGURA 4.25

Note-se que, quando diminui o horizonte temporal, passa a ser possível ressegurar de modo a obter $\Psi(u, T; M)$ igual a zero, para uma dada combinação de u , T e M .

• Distribuição B:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & ; x < \frac{20}{25.917} \\ 10.992^{-1} [10^{-6} \cdot 25.917^3 \cdot x^3 - 10e^{20-25.917x} + 9.992] & ; \frac{20}{25.917} \leq x \leq \frac{100}{25.917} \\ 1 & ; \frac{100}{25.917} < x \end{cases}$$

B3.2 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DA VARIÂNCIA

Considerando as combinações de θ e ξ constantes da TABELA 4.7, vejamos os principais resultados obtidos em ambos os casos.

$\theta = 1.0106 \text{ e } \xi = 1.29585$

A TABELA 4.23 apresenta, para vários valores de reserva inicial u e períodos de tempo T , o valor do limite de retenção M^F , que minimiza a probabilidade $\Psi(u, T; M)$ e o correspondente valor de $\Psi(u, T; M^F)$.

T	$\Psi(1, T; M^F)$	M^F	$\Psi(3, T; M^F)$	M^F	$\Psi(5, T; M^F)$	M^F
1	**		**		**	
50	0.191871	1.95	0.019253	1.50	0.001871	1.45
100	0.191871	1.95	0.019253	1.50	0.001871	1.45
150	0.191871	1.95	0.019253	1.50	0.001871	1.45
200	0.191871	1.95	0.019253	1.50	0.001871	1.45
$\Psi(u)$	0.220433	M^*	0.064916	M^*	0.014469	M^*
$\Psi(u; M^*)$	0.199602	2.015	0.020234	1.490	0.001957	1.450

TABELA 4.23

** A função $\Psi(u, T, M)$ é crescente com M .

Nas duas últimas linhas da TABELA 4.23 constam os valores da probabilidade de ruína em horizonte infinito, $\Psi(u)$ (TABELA 4.19), o limite de retenção ótimo M^* (limite de retenção M que minimiza a probabilidade de ruína $\Psi(u; M)$ -TABELA 4.17) e a probabilidade de ruína em horizonte infinito quando é ressegurado esse montante ótimo, $\Psi(u; M^*)$ (TABELA 4.19).

Não são valores directamente comparáveis com os agora calculados, uma vez que o parâmetro da discretização da distribuição das indemnizações particulares, β , não foi o mesmo em ambos os casos, servindo no entanto como indicador quanto ao comportamento de $\Psi(u; M)$ e de $\Psi(u, T; M)$.

Apesar da probabilidade de ruína em horizonte finito ser consideravelmente inferior à correspondente probabilidade de ruína em horizonte infinito para o mesmo nível de retenção e reserva inicial, é de registar a semelhança de comportamento de $\Psi(u; M)$ e $\Psi(u, T; M)$ ilustrado pelas FIGURAS 4.26, 4.27 e 4.28.

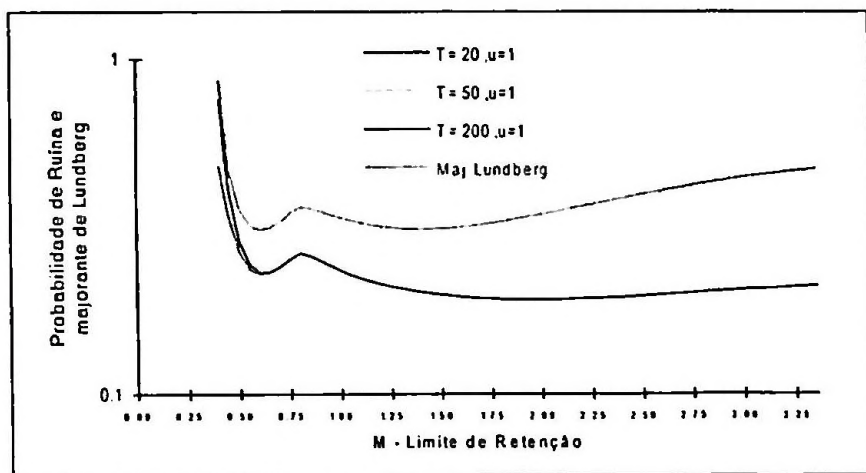


FIGURA 4.26

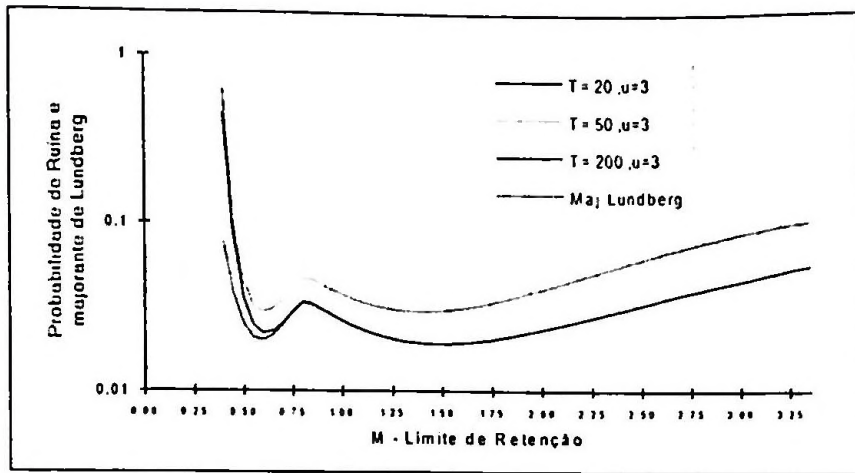


FIGURA 4.27

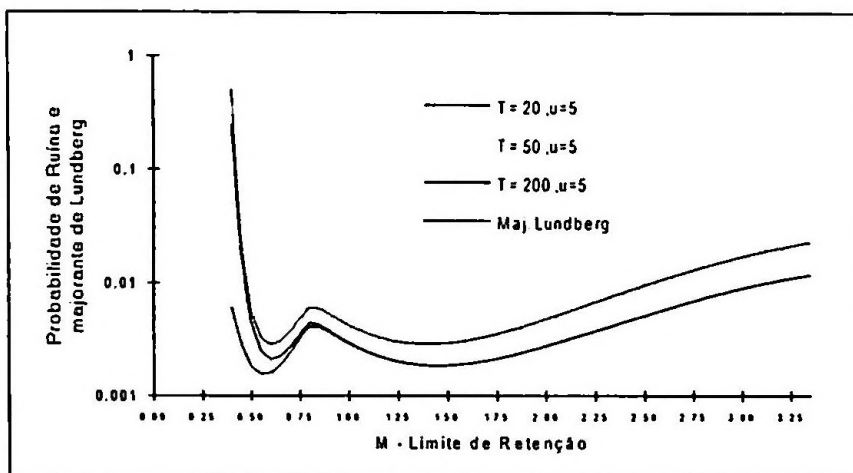


FIGURA 4.28

$$\theta = 0.4 \text{ e } \xi = 0.4$$

A TABELA 4.24 apresenta, para vários valores de reserva inicial u e vários valores de T , o valor do limite de retenção M^F , que minimiza a probabilidade $\Psi(u, T; M)$ e o correspondente valor de $\Psi(u, T; M^F)$.

T	$\Psi(1, T; M^t)$	M^t	$\Psi(3, T; M^t)$	M^t	$\Psi(5, T; M^t)$	M^t
1	**		**		**	
50	0.297415	0.40	0.033392	0.35	0.002556	0.30
100	0.305774	0.40	0.040704	0.40	0.005242	0.40
150	0.306868	0.40	0.041560	0.40	0.005587	0.40
200	0.307057	0.40	0.041718	0.40	0.005657	0.40
$\Psi(u)$	0.456097		0.216511		0.095214	
$\Psi(u; M^*)$	0.321027	M^*	0.043678	M^*	0.005939	M^*

TABELA 4.24

** A função $\Psi(u, T, M)$ é crescente com M .

Tal como na tabela anterior, nas duas últimas linhas da TABELA 4.24 constam os valores da probabilidade de ruína em horizonte infinito, $\Psi(u)$ (TABELA 4.19), o limite de retenção óptimo M^* (limite de retenção M que minimiza a probabilidade de ruína $\Psi(u; M)$ -TABELA 4.17) e a probabilidade de ruína em horizonte infinito quando é ressegurado esse montante óptimo, $\Psi(u; M^*)$ (TABELA 4.19).

É de registar, tal como aconteceu para o exemplo anterior, a semelhança de comportamento de $\Psi(u; M)$ e $\Psi(u, T; M)$ ilustrado pela FIGURAS 4.29, 4.30 e 4.31.

Note-se que, à medida que o montante de reserva inicial u cresce, e/ou o período de tempo T a que se refere $\Psi(u, T; M)$ decresce, a tendência é para um afastamento dos citados comportamentos.

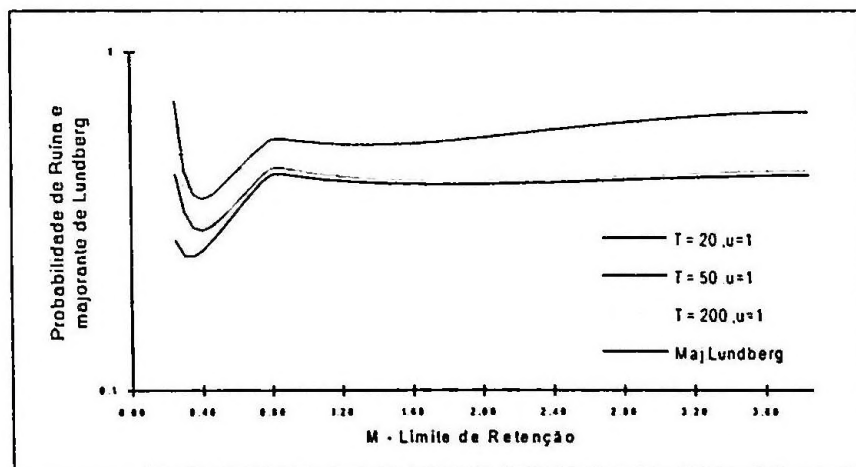


FIGURA 4.29

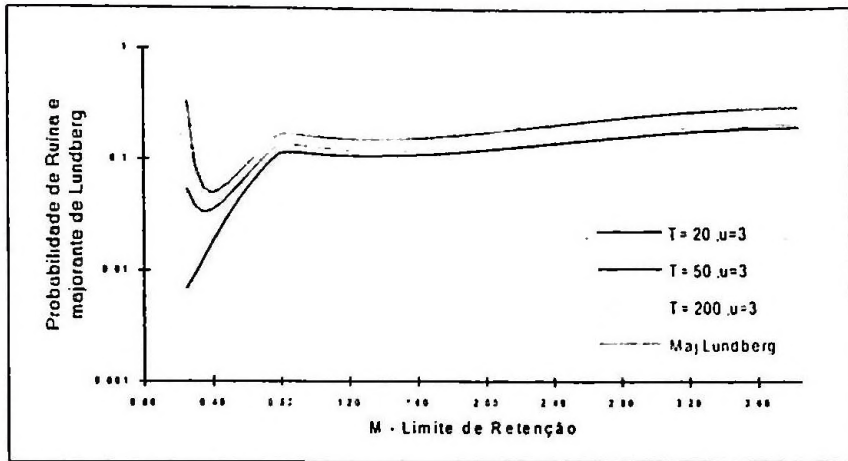


FIGURA 4.30

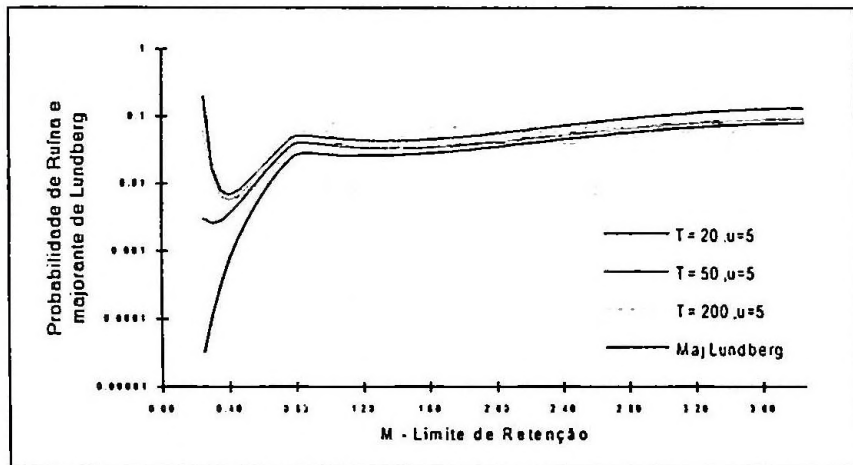


FIGURA 4.31

- Distribuição C: $G(x) = 1 - (1+x)^{-2} \quad .x > 0$

C3 - O PRÊMIO DE RESSEGURO É CALCULADO PELO PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Das combinações de θ e ξ , constantes da TABELA 4.9, escolhendo apenas o caso em que $\theta = 0.2$ e $\xi = 0.4$, a TABELA 4.25 apresenta, para o montante de reserva inicial $u=10$ e vários períodos de tempo T , o valor do limite de retenção M^F , que minimiza a probabilidade $\Psi(u, T; M)$ e o correspondente valor de $\Psi(u, T; M^F)$.

T	$\Psi(10, T; M^F)$	M^F
50	**	
100	0.105141	1.20
150	0.149115	1.65
200	0.171924	1.85
$\Psi(u)$	0.434997	M^*
$\Psi(u, M^*)$	0.214257	2.445

TABELA 4.25

** A função $\Psi(u, T; M)$ é crescente com M .

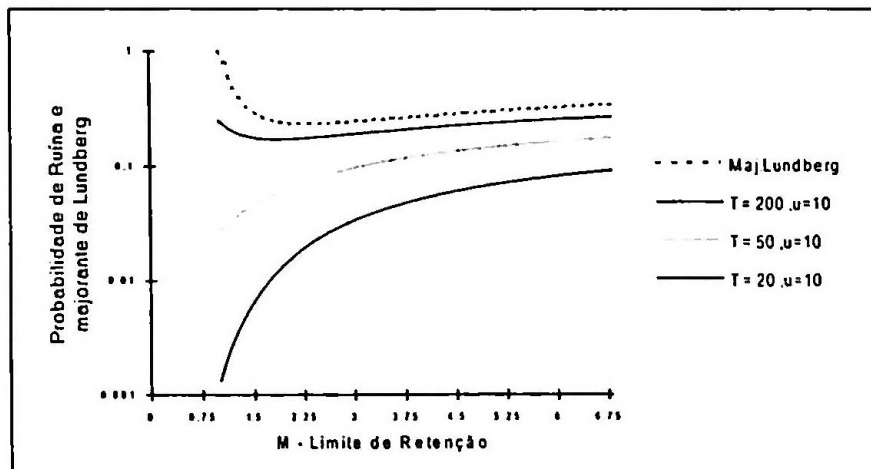


FIGURA 4.31

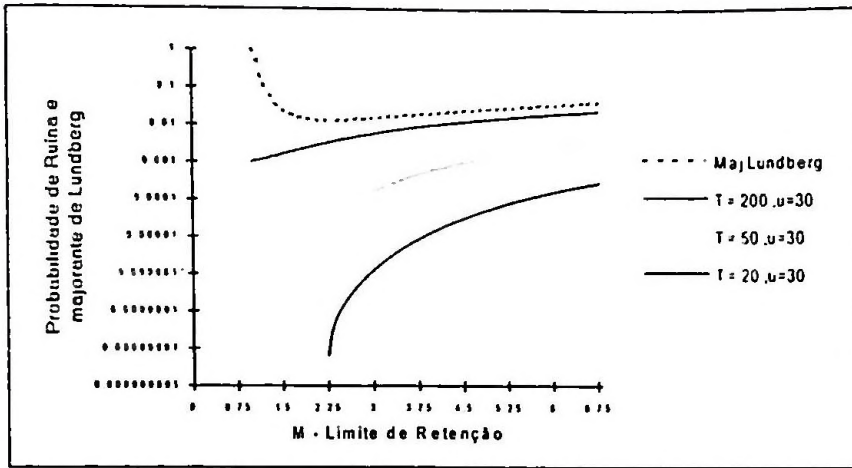


FIGURA 4.32

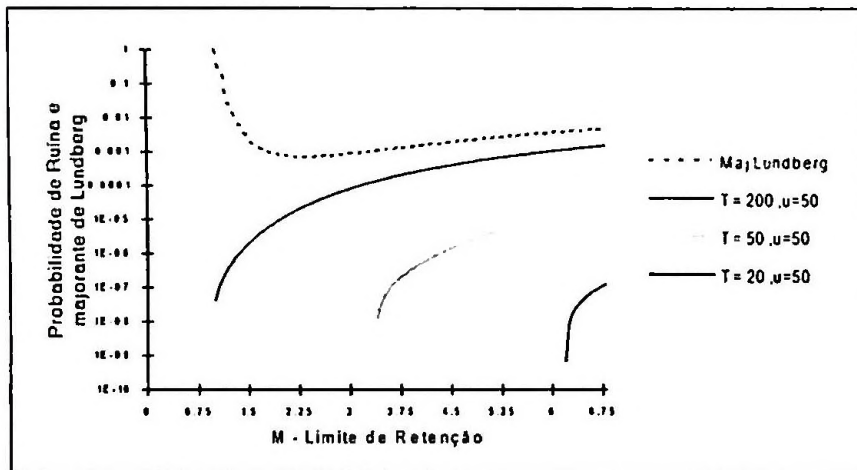


FIGURA 4.33

CONCLUSÃO

Com menor ou maior dificuldade, os algoritmos estudados para o cálculo da probabilidade de ruína são adaptáveis ao resseguro *Excess of Loss*, sendo substancialmente mais fácil para o caso do resseguro *Quota-Share*.

Adaptar estes algoritmos, para incorporar o resseguro foi parte essencial deste trabalho, permitindo fazer um breve estudo prático sobre o efeito do resseguro na probabilidade de ruína, nomeadamente do tipo *Excess of Loss*, tanto em horizonte infinito (de mais fácil tratamento devido aos meios técnicos requeridos e tempo dispendido) e horizonte finito (com processamento muito lento, apesar do estado actual de desenvolvimento dos computadores, necessitando de um sistema informático com maiores recursos e maior prioridade do que aquele que esteve disponível para a realização deste trabalho).

Relativamente ao estudo prático efectuado, verificou-se que, quando o prémio de resseguro é calculado pelo princípio do valor esperado, os resultados e conclusões obtidas são consistentes com os de DICKSON e WATERS (1994), isto é, em horizonte infinito o limite de retenção que minimiza a probabilidade de ruína tende para o limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento, à medida que o montante de reserva inicial aumenta, notando-se ainda que a probabilidade de ruína em horizonte infinito tem um comportamento muito semelhante ao do majorante de *Lundberg*. Donde, para valores elevados de reserva inicial, determinando o limite de retenção que maximiza o coeficiente de ajustamento é um método razoável e bastante rápido para obter um indicador do limite de retenção que minimiza a probabilidade de ruína.

Verificou-se ainda que, para as distribuições estudadas, quando o prémio de resseguro é calculado pelo princípio do valor esperado, existe grande semelhança de comportamentos entre a probabilidade de ruína em horizonte infinito, em horizonte finito e majorante de *Lundberg* como funções do limite de retenção.

No entanto, quando o prêmio de resseguro não é calculado pelo princípio do valor esperado e $R(M)$ não é unimodal (exemplo da Distribuição B, quando o prêmio de resseguro é calculado pelo princípio da variância), pode acontecer que, mesmo para valores elevados de reserva inicial, a probabilidade de ruína e o majorante de *Lundberg*, como funções do limite de retenção, se comportem de forma diferente, verificando-se que o limite de retenção que minimiza a probabilidade de ruína possa ser substancialmente diferente daquele que maximiza o coeficiente de ajustamento.

É de realçar que, nos exemplos estudados, para o resseguro *Excess of Loss*, quando $R(M)$ não era unimodal como função de M , constatou-se que, em geral, $\Psi(u, T; M)$ e $\Psi(u; M)$ também não o eram.

Para um estudo desta natureza, o ideal seria considerar mais distribuições, utilizando vários princípios para o cálculo dos prêmios de resseguro, escolhendo um valor para o parâmetro de discretização β mais elevado, e acertando o valor do parâmetro de truncagem ϵ de forma a minorar o erro cometido de acordo com o pretendido.

Este trabalho revelou ser de extrema importância dispor não só de um sistema informático bastante potente, como também de uma 'área' disponível suficientemente grande para a criação dos ficheiros de resultados, devido, por um lado, à grande morosidade de processamento dos algoritmos e por outro, ao tamanho dos ficheiros criados.

Chegado a este ponto e depois de ter percorrido todo um caminho que me despertou para problemas que antes desconhecia, verifico que o prazo disponível passou a correr, ficando, portanto, a sensação de que muito mais poderia ter sido feito, principalmente em horizonte finito.

BIBLIOGRAFIA

ANDREADAKIS, M., WATERS, H.R. (1980) The effect of reinsurance on the degree of risk associated with an insurer's portfolio, *ASTIN Bulletin* 11, 119-135.

BEARD, R.E., PENTIKÄINEN, T. AND PESONEN, E. (1984) *Risk Theory, The Stochastic Basis of Insurance*, 3rd Edition, Chapman and Hall, London New York.

BOWERS, N.L., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, D.A. and NESBITT, C.J. (1986) *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Chicago.

CENTENO, L. (1986) Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient, *Insurance: Mathematics and Economics* 5, 169-182.

CENTENO, L. (1991) An Insight into the Excess of Loss Retention Limit, *Scand. Actuarial J.* 2, 97-102.

CENTENO, L. (1992) Texto apresentado nas Provas Públicas de Agregação do grupo III de disciplinas (Matemática) do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

CENTENO, L. (1995) Excess of Loss Reinsurance and the Probability of Ruin in Finite Horizon, *ISEG, Technical University of Lisbon*.

DAYKIN, C.D., PENTIKÄINEN, T. and PESONEN, E. (1994) *Practical Risk Theory of Actuaries*, Chapman and Hall, London.

DE VYLDER, F. and GOOVAERTS, M.J. (1988) Recursive Calculation of Finite-Time Ruin Probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics* 7, 1-8.

DICKSON. D.C.M. and WATERS. H.R. (1991) Recursive Calculation of Survival Probabilities. *ASTIN Bulletin* 21, 199-221.

DICKSON. D.C.M. and WATERS. H.R. (1994) Reinsurance and Ruin, *University of Melbourne. CAS. Research Paper Series*.

GERBER. H.U. (1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.

MURTEIRA, B.J.F. (1990) *Probabilidades e Estatística*, Vol. I, McGraw-Hill.

PANJER, H.H. (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions, *ASTIN Bulletin* 12, 22-36.

PANJER, H.H. (1986) Direct Calculation of Ruin Probabilities, *The Journal of Risk and Insurance* LIII, 521-529.

WATERS, H.R. (1979) Excess of Loss Reinsurance Limits, *Scand. Actuarial J.*, 37-43.

WATERS, H.R. (1983) Some mathematical aspects of reinsurance, *Insurance: Mathematics and Economics* 2, 17-26.