Universidade de Lisboa

Desenvolvimento da escrita matemática na aprendizagem de funções: um estudo com alunos do 10º ano de escolaridade

Ana Gabriela Nascimento Passos

Mestrado em Ensino da Matemática do 3º. Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Orientado pela Prof.ª Doutora Ana Cláudia Henriques

Coorientado pela Prof.ª Doutora Maria Manuel Torres

2023

Resumo

Este relatório foi realizado no âmbito da minha prática de ensino supervisionada e tem como foco principal o estudo e o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos, na aprendizagem das Funções, numa turma do 10.º ano de escolaridade.

O objetivo deste estudo é compreender como os alunos do 10.º ano de escolaridade desenvolvem a escrita matemática na aprendizagem de Funções, utilizando resolução de problemas e estratégias que lhes permitam praticar e analisar os seus registos escritos. Nesse sentido, irei procurar responder a duas questões: (1) Que escrita matemática é evidenciada pelos alunos na aprendizagem de funções? (2) Em que medida a metodologia da resolução de problemas contribuiu na prática da escrita matemática dos alunos?

A intervenção letiva incidiu sobre as subunidades Generalização sobre Funções e Transformações do Gráficos de Funções, e contemplou um total de 9 aulas de 90 minutos, tendo sido iniciada a 27 de fevereiro e terminada a 17 de março.

Neste estudo utilizei a metodologia de investigação qualitativa e interpretativa e posicionei-me como observadora participante. Fiz ainda recolha de dados dos registos escritos dos alunos e, em alguns casos, dei feedback atempadamente, antes da recolha documental seguinte.

Nesta intervenção foram elaboradas três tarefas matemáticas, constituídas por problemas, cada uma atribuída em três aulas distintas, cujo objetivo é os alunos fundamentarem e explicarem de forma rigorosa as suas resoluções, assim como utilizar a língua portuguesa e a simbologia matemática corretamente. A análise de dados para este trabalho decorreu dos conteúdos das resoluções das tarefas, e de outros registos pertinentes nas restantes aulas.

Os resultados evidenciam uma melhoria na escrita matemática dos alunos, pela análise da sua completude, fundamentação, explicitação e o rigor das suas resoluções. Averiguei ainda que o método de resolução de problemas contribuiu para o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos.

Palavras-Chave: Escrita matemática, raciocínio matemático, aprendizagem matemática, problemas e funções.

Abstract

This report was carried out in the context of my supervised teaching practice and has as its main focus the study and development of students' mathematical writing, in the learning of Functions, in a grade 10 class, within the supervised teaching practice.

The aim of this study is to understand how students develop mathematical writing, using strategies that allow them to practice and analyze their written records. In this sense, I will try to answer two questions: (1) What mathematical writing is evidenced by students in learning functions? (2) To what extent does problem solving methodology contribute to students' mathematical writing practice?

The teaching intervention focused on the sub-units Generalities about Functions and Transformations of Function Graphs, and included a total of 9 lessons of 90 minutes, starting on February 27 and ending on March 17.

In this study I used the qualitative and interpretive research methodology and positioned myself as a participant observer. I also collected data from the students' written records and, in some cases, provided feedback in time before the next document collection.

In this intervention, three mathematical tasks were developed, consisting of problems, assigned in three different classes, with the objective of having the students substantiate and explain rigorously their resolutions, as well as use the Portuguese language and mathematical symbology correctly. The data analysis for this paper stemmed from the content analysis of the resolutions, and other relevant records in the remaining lessons.

The results show an improvement in the students' mathematical writing, by analyzing the completeness, reasoning, explicitness and rigor of their resolutions. I also verified that the problem solving method contributes to the development of students' mathematical writing.

Keywords: Mathematical writing, mathematical reasoning, mathematical learning, problems and functions.

Agradecimentos

Aos futuros leitores, gostaria de dedicar este momento especial para expressar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste relatório.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha companheira Maria. Durante todas as noites em que estive imersa na elaboração das aulas e da escrita deste relatório, esteve ao meu lado, a ouvir, a aconselhar e a incentivar-me com um amor incondicional. Obrigado por seres a minha rocha e minha maior fonte de apoio.

Gostaria também de expressar minha profunda gratidão à Professora Hélia Oliveira. A sua orientação, sabedoria e disposição para conversar comigo foram inestimáveis.

Além disso, gostaria de estender os meus agradecimentos a todos os meus colegas, amigos e familiares por todas as palavras de compreensão e pelos risos que me deram naqueles momentos mais desesperantes.

Quero agradecer às Orientadoras Prof. Maria Manuel Torres e Prof. Ana Cláudia Henriques que dedicaram o seu tempo e conhecimento para rever e avaliar este relatório. A sua experiência e contribuições críticas ajudaram a enriquecer o meu trabalho e melhorar a sua qualidade final.

Por fim, mas não menos importante, quero expressar a minha gratidão ao Professor Cooperante João Ferreira, que me ajudou imenso e dedicou o seu tempo e conhecimento na preparação e lecionação das minhas aulas. A Professora que sou agora, com o pouco tempo de experiência que tenho, a ele lhe devo. Obrigado por ser o meu melhor exemplo. A todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o desenvolvimento deste relatório, o meu mais profundo agradecimento.

Muito obrigado a todos!
Atenciosamente, Gabriela Passos

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

No presente trabalho escrito, farei menção às motivações pessoais e ao contexto que proporcionaram a escolha deste tema, assim como a ancoragem didática lecionada nesta intervenção. Abordarei também a relevância e pertinência do estudo de forma aprofundada, descrevendo os objetivos e as questões orientadoras para o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos.

Motivações pessoais

Este relatório foi realizado no âmbito da minha prática de ensino supervisionada, que realizei numa turma do 10.º ano de escolaridade. Para esta escolha houve alguns fatores contributivos, sendo estes a minha experiência e a de outros professores.

Inicialmente, trabalhei num centro de apoio ao estudo onde me via quase todos os dias a ajudar alunos, do 1º ao 9º ano de escolaridade, a várias disciplinas, sendo a matemática uma delas, e foi neste ambiente que me deparei com várias situações em que os alunos se recusavam a dar importância à escrita matemática. Quando os alertava de algo pouco claro, "vindo do nada", as suas respostas pouco variavam, em palavras, das seguintes: "Gabriela, isto está subentendido. Eu sei o que eu quis dizer" ou "isto é demasiado óbvio para escrever. Isto é fácil para ti então tu percebes o que eu estou a calcular, não preciso mudar" e por muito que batalhasse, a maioria aceitava modificar a sua escrita, não porque percebesse o seu objetivo, mas porque se sentiam obrigados a fazê-lo.

Também, ao longo das minhas intervenções letivas anteriores, pude analisar algumas resoluções de tarefas dos alunos, em contexto de sala de aula ou em casa, e verifiquei que a escrita matemática dos mesmos era pouco rigorosa, algo que debati com o Professor Cooperante que me confirmou ser algo comum a todos os alunos e que, em muitos casos, se deve à pouca insistência, em anos de escolaridade anteriores, na escrita matemática.

Assim, quando chegou a altura de decidir a problemática a desenvolver no estudo do meu relatório da prática de ensino supervisionada (RPES), relembrei estas e outras conversas, em momentos de partilha de experiências com outros colegas dos vários mestrados em ensino, que me despertaram um interesse especial em ajudar os alunos a descrever os seus raciocínios, e em aprofundar os meus conhecimentos aquando da prática letiva, ajudando-me na minha prática de ensino futura.

Outro fator que contribuiu para a escolha do tema deste trabalho é a sua incidência na planificação anual feita pelo Professor Cooperante. Numa primeira fase, foram-me propostas duas opções de subunidades didáticas a lecionar: uma incidia no tema da Geometria Analítica no Espaço e outra no tema das Funções. Outros temas, como a Estatística, foram descartados devido à sua tardia lecionação. Segundo a planificação anual elaborada previamente, lecionar uma subunidade relativa ao tema da Estatística não me permitiria fazer uma análise detalhada nem uma reflexão cuidada dos resultados obtidos para o RPES.

A unidade da Geometria Analítica no Espaço, por outro lado, teria a intervenção demasiado cedo, e por não me permitir explorar ao máximo a problemática da escrita matemática, foi descartada.

Assim, o tema das Funções foi o que melhor se adequou ao tempo que queria disponibilizar para a preparação da intervenção letiva, para a sua respetiva reflexão e elaboração do RPES.

A escolha da subunidade didática "Generalidades sobre Funções e Transformações de Gráficos de Funções", deveu-se à intenção de querer iniciar o tema das Funções na turma e tentar impedir que os alunos desenvolvessem maneirismos na sua escrita matemática. Se a escolha da subunidade didática tivesse sido diferente, teria corrido o risco de alguns alunos não terem os conteúdos iniciais de funções bem consolidados, o que constituiria um grande obstáculo ao desenvolvimento da sua escrita matemática. Além da sua presença nas Aprendizagens Essenciais (AE´s), a lecionação do tema das Funções é muito pertinente para este estudo uma vez que é aí que os alunos apresentam maior dificuldades, tanto na sua aprendizagem como na expressão escrita.

Relevância e pertinência do estudo

Os esforços para se conseguir uma coerência a nível da matemática do ensino secundário são particularmente desafiantes, dada a tradicional sequência de disciplinas e de tópicos. Além disso, é ainda outro obstáculo à aprendizagem dos alunos a escrita matemática. Tal constatação não requer demasiado aprofundamento, basta que observemos a escrita matemática dos alunos de uma dada turma para verificarmos a resistência dos estudantes à escrita matemática, em utilizá-la e em entender a sua importância, assim como a necessidade da mediação do professor.

Esta problemática não é, necessariamente, consequência da falta de conhecimento matemático e sim, em alguns casos, da incapacidade do aluno verbalizar o seu pensamento, o que o leva a apresentar dificuldades posteriores no encadeamento escrito de ideias. Contudo, para melhor falarmos desta problemática é necessário que entender o que é a escrita matemática.

Escrever matematicamente evidencia as tentativas dos alunos em explicitar os raciocínios e ideias que os levaram à resposta pretendida.

“A comunicação destas ideias é sempre uma tarefa exigente. No entanto, é-o ainda mais na escrita, dado que os alunos têm a oportunidade de reler, repensar e clarificar os seus textos” (Hoffman et al., citados por Martinho & Manrique, 2020, p.49).

Assim, os alunos deveriam ter a capacidade de comunicar de forma precisa o seu pensamento matemático, tanto oralmente como por escrito, assim como examinar o pensamento dos colegas e usar linguagem matemática, com o rigor que lhe advém, para desenvolver pensamentos e discussões matemáticas.

Infelizmente, os alunos não estão habituados a explicar as suas resoluções, principalmente quando estas estão corretas. De facto, é comum os professores solicitarem aos seus alunos para explicarem o seu raciocínio quando este está “incorreto” ou “incompleto”, o que acaba por desincentivar a necessidade de justificar problemas corretamente resolvidos.

Mais ainda, é hábito observar na escrita dos alunos a ausência de um processo de resolução com base em coerência, lógica e encadeamento de ideias. Estes preocupam-se, principalmente, em dar logo a resposta ao problema. Só após isso ponderam em explicitar algum passo e, quando o fazem, a fundamentação das suas respostas varia segundo vários critérios: correção, rigor, lógica ou coerência, o que leva a crer, a vários investigadores, que a intuição assume um papel decisivo na escrita matemática dos alunos, tornando-se um obstáculo ao desenvolvimento de respostas bem fundamentadas.

Portanto, é necessário ajudar os alunos a dar sentido à matemática e a melhorar o próprio discurso. Enquanto escrevem os alunos estão ativos, a pensar e a aprender sobre matemática (Burns citado por Martinho & Rocha, 2018, p.34), desenvolvem o seu pensamento bem como o uso da linguagem matemática, como seja, o uso de termos, diagramas, gráficos, esquemas, analogias e símbolos (NCTM citado por Martinho & Rocha, 2018, p.34). Para construir um texto, os alunos precisam examinar as suas ideias e refletir sobre o que já sabem, tomando consciência das suas dificuldades. Assim, os alunos escrevem para aprender e aprendem ao escrever matemática.

Nos registos escritos dos alunos são evidenciados processos como a justificação, demonstração e generalização de ideias, sendo estes princípios específicos para o desenvolvimento do raciocínio matemático e desenvolvê-lo permitir-nos-á tratar esta problemática uma vez que a escrita, com rigor, permite ao aluno rever e refletir sobre o que já sabe, fazendo-o tomar consciência das suas dificuldades e procurar melhorá-las.

Objetivos e questões do estudo

O objetivo deste estudo é compreender como os alunos do 10.º ano de escolaridade desenvolvem a escrita matemática na aprendizagem de Funções, utilizando resolução de problemas e estratégias que lhes permitam praticar e analisar os seus registos escritos.

Neste sentido, procurei responder às seguintes questões:

- Que escrita matemática é evidenciada pelos alunos na aprendizagem de funções?
- Em que medida a metodologia da resolução de problemas contribui na prática da escrita matemática dos alunos?

CAPÍTULO II - ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Neste capítulo faço um breve enquadramento curricular e didático, abordando a literatura, no que refere à escrita matemática, ao raciocínio matemático na escrita e quanto a tarefas que promovam a escrita matemática. Este enquadramento serviu de base para o trabalho desenvolvido na lecionação da unidade didática referida no capítulo anterior e para a elaboração das aulas da intervenção letiva.

Enquadramento curricular

Esta prática letiva foi desenvolvida segundo as indicações das Aprendizagens Essenciais de 2018 e o Programa e Metas Curriculares de 2015 (PMC).

As Aprendizagens Essenciais de Matemática enfatizam a aprendizagem de funções, um conceito central e fundamental. Os alunos são introduzidos à definição de funções, explorando a sua representação gráfica, domínio e contradomínio. São incentivados a compreender e analisar as propriedades das funções lineares, quadráticas e módulo e a resolver problemas que envolvam o uso de funções, com o objetivo desenvolver habilidades de modelagem matemática e raciocínio crítico. O estudo das funções no 10.º ano fornece uma base sólida para o avanço em tópicos mais avançados da matemática no ensino secundário.

Já no PMC de Matemática do Ensino Secundário, o estudo de funções é abordado com ênfase. Os alunos são encorajados a compreender a noção de função, identificar o domínio e contradomínio, interpretar e analisar gráficos de funções e relacionar diferentes representações. São ainda introduzidos aos conceitos de funções lineares, quadráticas e módulo, explorando as suas características e propriedades. A aprendizagem de funções no 10.º ano visa desenvolver habilidades de modelação matemática e promover o pensamento crítico dos alunos.

Ocasionalmente, foi feito uso do manual, mas não como recurso essencial para a intervenção letiva uma vez que a prática ensino-aprendizagem na turma foi predominantemente focada na utilização do GeoGebra e slides preparados pelos Professores, de modo a adaptar os conteúdos à turma, de acordo com as suas características. Foram também realizadas fichas de trabalho elaboradas pelos docentes com recurso a plataformas como o IAVE, a Escola Virtual e a Aula Digital.

A escrita matemática

O PMC apresenta o desenvolvimento da escrita matemática como um dos objetivos que traduzem o desempenho que os alunos devem evidenciar ao longo do Ensino Secundário, afirmando que "o aluno deve apresentar uma argumentação coerente […]. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação" (MEC, 2015, p.6). Incentiva ainda a utilização da escrita com rigor, "o aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente" (MEC, 2015, p.6) assim como a necessidade de o aluno saber demonstrar e justificar "o aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida […] deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível." (MEC, 2015, p.6).

Para uma comunicação escrita da matemática articulada e coerente é necessário que os alunos apresentem desempenhos que concorram a aquisição de conhecimento, para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a resolução de problemas.

Já nas Aprendizagens Essenciais do 10.º ano, a comunicação matemática é apresentada como uma prática importante para o ensino-aprendizagem, afirmando que "os estudantes devem ter oportunidades de descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática […] é fundamental que os estudantes se envolvam em discussões e atividades estimulantes e que não se sobrevalorizem as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes" (AE, 2018, p.3). Apesar da escrita matemática não ser mencionada explicitamente no documento curricular, fica subentendida a importância dada ao ato de escrever matemática.

Em ambos os documentos é visível a importância das respostas fundamentadas uma vez que estas consistem num ponto de partida para a reflexão dos alunos. No entanto, vários investigadores indicaram a intuição como um grande obstáculo a respostas bem fundamentas e, como consequência, origina maneirismos e lacunas recorrentes na escrita matemática dos alunos uma vez que estes não apresentam o processo de resolução seguido, preocupando-se primeiramente em dar a resposta ao problema, mostrando assim o seu descuido para com o processo da escrita das suas resoluções.

Assim, a atividade e mediação do professor é importante para uma reflexão acerca do conhecimento do aluno e, também, para o desenvolvimento das próprias compreensões. Cabe ainda ao professor a elaboração de estratégias que permitam, através do ato da escrita, a explicitação de conjeturas e conclusões e que possibilitem o aluno "clarificar, organizar e consolidar o pensamento […] e desenvolver o conhecimento matemático, a capacidade de resolver problemas […] alcançando uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos" (NCTM citado por Martinho & Rocha, 2018, p.34) através das várias representações matemáticas, como a numérica, simbólica, gráfica e verbal. Estas estratégias devem ir ao encontro do perfil de cada aluno, quando possível, não devendo ser elaboradas com um grau de exigência da formalização de respostas demasiado elevado, impedindo que o aluno desenvolva a sua escrita matemática.

Claro está que "os alunos que escrevem matemática com alguma frequência vão naturalmente progredindo na sua formalização, reconhecendo nela uma maior universalização e mesmo facilidade para comunicar" (NCTM citado por Martinho & Rocha, 2018, p.34). Contudo, nem todos os alunos têm a escrita matemática como uma prática recorrente. Assim, o professor deve permitir aos alunos que comecem por escrever as suas resoluções recorrendo às próprias palavras, enquanto não estão familiarizados com o rigor dos conteúdos. Eventualmente, o rigor e os símbolos deixarão de ser um obstáculo e passarão a ser mais um meio de comunicação natural dos alunos. Devemos permitir que o aluno erre, de forma a aprender a localizar os seus erros e os seus significados.

"O que se espera hoje, de acordo com essa visão, é conceber o erro como um meio de desenvolvimento. É importante que primeiro se entenda a situação que o motiva para depois procurar meios de superá-lo. Desse modo, é necessário que o professor busque conhecer e entender os erros cometidos pelos alunos nas atividades propostas." (Silva & Buriasco, 2005, p.501)

No entanto, não devemos considerar o erro como algo a sobrepor-se às resoluções corretas ou que o aluno deve, obrigatoriamente, errar para acertar e sim que o ato de errar deve ser encarado como uma vantagem no desenvolvimento da escrita matemática dos alunos.

Deixar que os alunos expliquem, inicialmente, as suas resoluções nas próprias palavras não significa, no entanto, que o podem fazer de qualquer forma. Existem conceitos base importantes na prática da escrita matemática que não devem ser descuradas "[…] devem também ser incentivados a redigir convenientemente as respostas, explicando de forma adequada o raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando uma utilização inapropriada de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas" (MEC, 2015, p.7).

Ainda assim, a prática da escrita não deve estar, única e exclusivamente, ao encargo do professor, devendo ser incentivada por todos os integrantes da sala de aula, através de momentos de trabalho de grupos e discussões coletivas, onde os alunos possam analisar e partilhar alterações às resoluções dos colegas uma vez que em grupo os alunos podem examinar as suas ideias e refletir sobre o que já sabem e o que ainda precisam saber visto que "quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, de variadas formas, demonstram uma compreensão mais profunda e uma capacidade fortalecida de resolução de problemas" (Fuson et al. & Lesh et al., citados por NCTM, 2017, p.24).

O raciocínio matemático na escrita

A importância do raciocínio matemático reside na sua capacidade de desenvolver habilidades cognitivas essenciais, como o pensamento lógico, a análise crítica, a resolução de problemas e a tomada de decisões informadas. Ora, o desenvolvimento da escrita matemática está intimamente relacionado com o raciocínio matemático. A escrita matemática é uma ferramenta que permite aos alunos expressarem as suas ideias, conceitos e procedimentos de forma clara e precisa e, por isso, desempenha um papel fundamental na comunicação matemática, tanto entre os próprios alunos como na transmissão de conhecimento para outros.

Ao desenvolver escrita matemática, os alunos são levados a organizar e a estruturar os seus pensamentos de maneira lógica e coerente, o que por sua vez aprimora o raciocínio matemático, uma vez que a escrita matemática exige a formulação de argumentos sólidos, a apresentação de provas e a justificação de resultados. Além disso, a escrita matemática incentiva a abstração e a generalização, duas habilidades fundamentais no raciocínio matemático. A escrita matemática permite que eles expressem padrões, relações e estruturas matemáticas de forma concisa e precisa, facilitando o desenvolvimento de argumentos e a resolução de problemas, promovendo a clareza e a coerência do pensamento.

Segundo Oliveira (2008, p.3), a expressão raciocínio matemático refere "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)". O raciocínio "é o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos e é a ferramenta para compreender a abstração" (Russel citado por Ponte et al., 2012, p.357).

O raciocínio matemático permite que os alunos identifiquem e compreendam padrões, estabeleçam conexões entre diferentes conceitos, apliquem regras e procedimentos para resolver problemas complexos e avaliem a validade de argumentos. Além disso, o raciocínio matemático ajuda a desenvolver a capacidade de abstração, a pensar de forma precisa e rigorosa, a formular e testar hipóteses, e a comunicar ideias de maneira clara e concisa e a desenvolver a escrita matemática dos alunos. A escrita matemática é desenvolvida quando os alunos utilizam processos de justificação, generalização e elaboração de conjeturas durante a comunicação matemática (oral e escrita) das suas respostas. Segundo o NCTM (2017, p.30), os alunos que desenvolvem, de forma articulada, a justificação das próprias ideias matemáticas e que raciocinam através das suas próprias explicações e as dos outros, acabam por adquirir uma compreensão profunda necessária para o seu sucesso. Ao incentivar a prática da escrita espera-se desenvolver no aluno um sentido crítico nas suas respostas.

Um tipo de raciocínio é o indutivo, que é baseado na observação de padrões e na formulação de hipóteses. Os alunos utilizam exemplos e evidências para fazer generalizações e inferências sobre uma situação ou um conjunto de dados matemáticos.

O raciocínio abdutivo desempenha um papel importante na matemática. Este tipo de raciocínio envolve a formulação de explicações plausíveis para determinados fenómenos matemáticos com base em informações limitadas. O aluno deve perceber que o raciocínio indutivo, caracterizado pela suposição de uma verdade universal através da observação de casos particulares, não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, que parte de um conhecimento amplo e chega a outro particular, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjeturas formuladas, mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las posteriormente.

Segundo Pólya (1954, citado por Ponte et al., 2012), a indução inicia-se muitas vezes através da observação, a partir da qual se desenvolvem conjeturas a testar posteriormente. Assim, deve ser sublinhada a estreita relação entre analogia e indução, "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (Oliveira citado por Ponte et al., 2012, p.357).

Já o raciocínio dedutivo envolve a aplicação de regras lógicas e a utilização de evidências para chegar a conclusões válidas. Podemos considerar o raciocínio dedutivo como sendo formal, comumente relacionado com as demonstrações e a lógica, sendo o ato de demonstrar, segundo Oliveira (2008, p.7) o encadeamento de asserções de forma lógica e a justificação desse encadeamento, isento de erros. O raciocínio dedutivo é, portanto, um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com conclusões necessárias e com um papel essencial na validação de conhecimento. Neste processo, os alunos partem de premissas e aplicam o raciocínio lógico para chegar a uma conclusão necessariamente verdadeira. Para este estudo, será o raciocínio mais utilizado, o que não invalida a utilização dos restantes tipos de raciocínio na lecionação de outros conteúdos que propiciem o seu uso.

É importante que os alunos sejam expostos a diferentes tipos de processos de raciocínio matemático para desenvolver habilidades cognitivas mais abrangentes. Ao utilizar uma variedade de abordagens, os alunos tornam-se mais flexíveis na sua forma de pensar e resolvem problemas matemáticos com maior eficácia. O incentivo à exploração e ao desenvolvimento desses diferentes processos de raciocínio é essencial para o desenvolvimento da escrita matemática e para a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

Em suma, o desenvolvimento da escrita matemática está intrinsecamente ligado ao aprimoramento do raciocínio matemático. A escrita matemática promove a organização de pensamentos, a argumentação lógica, a abstração e a generalização, e estimula a reflexão e a resolução de problemas. É uma ferramenta essencial para a comunicação e o avanço do conhecimento matemático.

Tarefas que incentivem a escrita matemática

Sabendo o impacto que a prática da escrita matemática tem na aprendizagem dos alunos, é necessário elaborar estratégias e tarefas que permitam os alunos aprofundar a sua compreensão, fortalecer o seu raciocínio matemático e a resolução de problemas à medida que progridem na sua escrita "para que os alunos aprendam matemática com compreensão têm de existir oportunidades para eles se envolverem regularmente em tarefas que se centrem no raciocínio e na resolução de problemas e que viabilizem múltiplas abordagens e estratégias diversificadas de resolução" (NCTM, 2017, p.23).

Relativamente a estas tarefas, levantaram-me as seguintes questões: o grau de dificuldade deve ser elevado? Dever-se-á esperar, à partida, respostas bem fundamentas, com ideias lógicas bem articuladas e encadeadas? Para esta última questão precisamos ter em mente a importância que as tarefas, centradas na aprendizagem e na aplicação de procedimentos, têm, de facto, um lugar no currículo e são necessárias para desenvolver a fluência processual uma vez que, segundo Ponte (2005, p.1), os alunos aprendem através de dois fatores: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam. Segundo Ponte (2005, p.1) "uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade (…) a tarefa pode surgir de diversas maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno". Assim, é necessário oferecer aos alunos a oportunidade de praticarem conceitos simples, a utilização de fórmulas e o encadeamento das mesmas, pelo menos numa fase inicial pois “a fluência decorre e constrói-se com base na compreensão conceptual, no raciocínio estratégico e na resolução de problemas” (NCTM, 2017, p.42). Por isso, são necessárias questões focadas na memorização. Estas questões, para se aperceber da compreensão, têm de fazer parte de um questionamento que promova o raciocínio sendo estas também importantes para o professor saber as linhas de base do pensamento dos alunos.

Contudo, a fluência não pode ser caracterizada como algo simples. Um aluno fluente tem de ser capaz de “[…] escolher com flexibilidade métodos e estratégias para resolver problemas de contexto matemático, que compreenda e seja capaz de explicar as suas abordagens e de elaborar efetivamente respostas corretas em conformidade” (NCTM, 2017). Com essa finalidade, a elaboração de problemas, que segundo Ponte (2005) são caracterizadas como fechadas e de nível de dificuldade elevado, não deve ser descurada. De facto, a base da minha investigação é a elaboração de problemas que promovam o desenvolvimento da escrita matemática. “O professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta” (Pólya citado por Ponte, 2005, p.3). Tal é uma condição fundamental para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina.

Uma outra questão que se costuma levantar é o tipo de questões e tarefas a serem colocadas à turma: devem ser contextualizadas à vida real? Como é comum esperar-se um certo grau de fundamentação nas respostas dos alunos, as pessoas tendem a pensar que as questões colocadas à turma, com o intuito de praticarem a sua escrita matemática, devem ser abstratas. No entanto, é importante notar que nem todas as tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas exigem um contexto real, ou têm de ser totalmente abstratas. As tarefas que promovem a escrita matemática não podem estar inseridas em apenas dois extremos opostos, nem tampouco têm de ocupar toda uma aula ou várias aulas, “o que é determinante é que a tarefa proporcione a oportunidade de envolver ativamente os alunos no raciocínio, na atribuição de sentido e na resolução de problemas, para que desenvolvam uma compreensão profunda do que é matemática” (NCTM, 2017). Assim, a base principal para a conceção de tarefas que promovam a escrita matemática é a elaboração de questões que “[…] encorajem os alunos a explicar e refletir sobre o seu pensamento, ações consideradas como componentes essenciais do discurso matemático significativo” (NCTM, 2017), sendo este discurso oral e escrito. Assim, os alunos necessitam de ocasiões de prática em quantidade e dificuldade moderada e em tarefas cuidadosamente selecionadas. Após terem estabelecido uma base conceptual forte e de serem capazes de explicar a base matemática da estratégia ou do procedimento, poder-se-á partir para tarefas cujo grau de dificuldade seja superior e que exija dos alunos uma maior fundamentação das suas respostas. Nessa altura, "proporcionar aos alunos a prática num número reduzido de problemas, espaçados e distribuídos no tempo, e dar retorno sobre o seu desempenho apoia os resultados da aprendizagem" (Pashler et al., Rohrer et al., citados por NCTM, 2017, p.45).

Assim, esta prática será a base da minha investigação. Seguirei a metodologia da resolução de problemas, onde darei oportunidade aos alunos de praticarem um número reduzido de problemas, ao longo da intervenção letiva, com feedback atempado. Desta forma, espera-se que no fim da intervenção os alunos apresentem melhorias na sua escrita matemática. Esta melhoria poderá ser observada através da completude, da fundamentação utilizada, da explicitação e do rigor das resoluções. Todos estes processos serão trabalhados, ao longo da intervenção, num regime ensino-aprendizagem exploratório onde os alunos comunicarão com os seus pares e debaterão resoluções durante as discussões coletivas.

Ações do Professor no desenvolvimento da escrita matemática

> "Para se certificarem que os alunos vão ter oportunidade de se envolverem em pensamento de nível elevado, os professores devem regularmente selecionar e propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas" (NCTM, 2017, p.17)

Visando a intenção acima, de que forma deve um Professor agir com o objetivo de melhorar a escrita matemática dos alunos? Algumas ações que um professor pode adotar é o fornecimento de feedback contínuo, como mencionado anteriormente, que ajudam os alunos a desenvolverem as suas habilidades.

É também, essencial, que o Professor proponha práticas regulares de escrita, estimulando os alunos a expressarem os seus raciocínios por escrito. Esta tarefa não é fácil pois as tarefas matemáticas têm várias naturezas e tipologias, não exigindo sempre uma resposta necessitada de rigor, por exemplo, e por isso, não podemos habituar os alunos a uma só variedade de questões. Além disso, deve ainda incentivar a discussão de resoluções em sala de aula, promovendo a troca de ideias e ajudando nas argumentações dos seus raciocínios.

Uma outra ação do Professor que pode estimular o desenvolvimento da escrita matemática é aplicar a linguagem matemática em diferentes contextos, cativantes para os alunos e que os faça desenvolver uma compreensão mais aprofundada dos conceitos, Com isto, quero eu dizer, que o Professor não deve restringir-se sempre ao mesmo tipo de questões, com o mesmo contexto. Contudo, “é importante notar que nem todas as tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas exigem um contexto real, ou têm de ocupar toda uma aula ou várias aulas. O que é determinante é que a tarefa proporcione a oportunidade de envolver ativamente os alunos no raciocínio, na atribuição de sentido e na resolução de problemas, para que desenvolvam uma compreensão profunda do que é matemática” (NCTM, 2017, p.20).

O facto de elaborar tarefas que promovam o raciocínio e a escrita matemática, por si só, não garante que os alunos se envolvam de facto nela. Assim, o professor deve tomar como uma ação fulcral o apoio ao aluno, sem interferência no seu processo de pensamento de forma a garantir a sua autonomia de resolução.

Por fim, o professor deve fornecer recursos e materiais de apoio, na Classroom, no E-Schooling ou no Inovar, como modelos de resolução de problemas e guias de terminologia matemática. Esses recursos ajudam os alunos a sentirem-se mais confiantes e preparados para expressar as suas ideias matemáticas por escrito.

Todas estas ações, e não só, proporcionam um ambiente propício para o desenvolvimento da escrita matemática, capacitando os alunos para se tornarem comunicadores eficazes.

A avaliação no desenvolvimento da escrita matemática

> “A avaliação formativa pode ter um papel fundamental na melhoria das aprendizagens de todos os alunos. A sua utilização sistemática deve permitir que os alunos conheçam bem: a) o que têm de aprender no final de um dado período; b) a situação em que se encontram quanto às aprendizagens que têm de desenvolver; e c) os esforços que têm de fazer para aprenderem o que está previsto e descrito nos documentos curriculares.” (Domingos, 2020, p.3)

Caseiro & Gebran (2008, p.2) afirmam que a avaliação da aprendizagem tem servido quase exclusivamente como instrumento de verificação, seleção e classificação, onde não existe nenhuma atitude no sentido de reorientar a prática educativa.

Uma vez que um dos principais objetivos da Escola é o desenvolvimento de capacidades, habilidades e competências do Aluno, é inevitável que se supere a avaliação tradicional no sentido de se adotar a avaliação formativa.

Ora, para uma avaliação formativa eficaz e para que se cumpra objetivo da aprendizagem do aluno é necessário uma boa comunicação entre o aluno e o Professor pois é através da mesma que o aluno receberá feedback e poderá desenvolver, de forma mais profunda, os processos de aprendizagem.

Este tipo de avaliação é tipicamente pedagógico, dando principal importância à relação aluno – professor. O seu objetivo é apoiar a aprendizagem dos alunos e fornecer informações ao professor que o possibilitem apoiar os alunos. Desta forma, um aluno cuja escrita matemática se caracterize como fraca, ou até mesmo errada, pode desenvolvê-la com o auxílio constante e contínuo do Professor, que não deve limitar-se a dizer que está errado ou como deve escrever uma resposta. Ao contrário de outros tipos de avaliação, exige um tipo de comportamento em sala de aula, predominantemente ligado ao ensino exploratório, onde os alunos são mais ativos, participativos e têm um papel na sua aprendizagem e o professor toma uma posição, ainda que de sabedoria, mais secundária, com intenção de apenas auxiliar os alunos. A avaliação formativa procura evitar o protagonismo do professor, impedindo que as coisas sejam mais dependentes dos seus pensamentos e ações e que estas sejam provenientes dos alunos. Pode ser, portanto, entendida como uma prática de avaliação contínua cujo objetivo é desenvolver as aprendizagens.

No entanto, não devemos adotar unicamente a avaliação formativa em detrimento da avaliação sumativa. Apesar da necessidade de se evitar o seu uso único e exclusivo, a avaliação sumativa é muito vantajosa na aprendizagem dos alunos uma vez que pode ser utilizada como comparação de resultados e permite verificar se a metodologia adotada até então é eficiente ou se deve ser reajustada pelo Professor.

Assim, para se verificar uma melhoria na aprendizagem, e na escrita matemática dos alunos, as avaliações formativa e sumativa devem ser articuladas, ao invés de prejudicar a utilização de uma em detrimento da outra.

CAPÍTULO III- A UNIDADE DIDÁTICA

Caracterização da turma e da escola

O alvo deste estudo foi uma turma do 10º ano de escolaridade, do curso de Ciências e Tecnologias, sendo constituída por 28 alunos, 11 do sexo feminino e 17 do sexo masculino, não havendo nenhum elemento com Necessidades Educativas Especiais (NEE), nem repetentes. Assim, a idade dos alunos encontra-se entre os 15 e 16 anos.

Uma parte dos alunos é proveniente de escolas distintas, do ano letivo anterior, pelo que, no início do presente ano letivo, não conheciam nenhum elemento da turma. Aqueles que já eram estudantes do agrupamento vieram de turmas distintas, o que fez com que conhecessem poucos elementos da turma. Assim, no início do ano letivo a turma apresentou-se muito calma e respeitadora, algo que considerei dever-se ao facto de os próprios alunos serem estranhos aos colegas. Rapidamente a turma começou a fazer laços de amizade e atualmente a turma continua bastante calma e sossegada, algo que parece suceder apenas na disciplina de matemática. No entanto, a turma veio a desenvolver gosto na participação em aula e em trabalhar com os professores e colegas.

No geral, os alunos apresentam bastante vontade de aprender e participar nas aulas sem nunca perder a postura e o respeito que a sala de aula exige. São alunos faladores, mas não em demasia, criando um bom ambiente de trabalho.

A turma não apresenta dificuldades de aprendizagem uma vez que este é um conceito demasiado forte. No entanto, apresentam falta de pré-requisitos, e como tal, não conseguem entender alguns conceitos que estão relacionados com conteúdos anteriormente lecionados. Apesar da sua cooperação e participação ativa em sala de aula, os alunos não têm ritmo de trabalho e de estudo em casa.

Esta falta de sistematização em casa do que foi aprendido origina resultados pouco satisfatórios, que podem ser verificados pela Tabela 1 abaixo onde se encontram as classificações finais, do primeiro período, dos alunos à disciplina de matemática.

Como podemos verificar, nenhum elemento da turma apresentou uma classificação final superior a 17 valores.

Tabela 1

Classificação Final	Nº de alunos
$[0; 5[$	0
$[5; 9]$	7
$[10; 12]$	5
$[13; 14]$	6
$[15; 17]$	10
$[18; 20]$	0

Ancoragem da unidade didática

As subunidades temáticas lecionadas foram: Generalidades sobre Funções e Transformações de Gráficos de Funções, referentes ao tema das Funções. A intervenção letiva foi iniciada a 27 de fevereiro e finalizada a 17 de março, totalizando 9 aulas de 90 minutos.

No 3º ciclo do Ensino Básico, é realizada a introdução ao conceito de função, de sucessão e de algumas operações entre elas, sendo estudadas apenas as funções de proporcionalidade direta, inversa, funções afins e quadráticas.

Segundo o Programa e Metas Curriculares 2013, no 7.º ano há um primeiro contacto com a definição de função, entre os conjuntos A e B e dos conceitos "objeto", "imagem", "domínio", "conjunto de chegada", "contradomínio" e "variável", devendo os alunos aprender a usá-los corretamente.

A noção de igualdade entre funções é também introduzida neste nível de escolaridade, assim como a definição e caracterização de uma função afim, função linear e função constante. O tema das funções termina com a definição de uma função de proporcionalidade inversa.

Já no 8º ano de escolaridade, os alunos devem saber reconhecer, dada uma função $g: A \to B$, que o gráfico da função definida pela expressão $f(x) = g(x) + b$ se obtém por translação de vetor definido pelo segmento orientado de origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$ e extremidade de coordenadas $(0, b)$.

Os alunos são ainda introduzidos ao conceito de declive, à sua existência em todas as retas não verticais, e ao seu cálculo através de dois pontos A e B, com $x_A \neq x_B$, devendo reconhecer que duas retas não verticais são paralelas quando (e apenas quando) têm o mesmo declive, permitindo-lhes determinar a equação de uma reta paralela a outra dada e que passa num determinado ponto.

O 9º ano de escolaridade, por outro lado, tem como objetivo, no domínio das Funções, dar a conhecer aos alunos as equações de segundo grau, da forma $y = ax^2 + bx + c$. Os alunos devem saber interpretar graficamente soluções de equações de segundo grau, reconhecer que o seu conjunto solução é o conjunto das abcissas de interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y =- bx - c$.

Segundo o PMC 2015, os alunos do 10.º ano devem começar o domínio das Funções definindo o produto cartesiano de A por B como o conjunto $\{(a, b):\ a \in A\ e\ B \in B\} = A \times B$. Depois, deverão identificar corretamente a imagem de um conjunto C por f como $f(C) = \{y \in B:\ \exists x \in C:\ y = f(x)\}$, em que $f: A \to B$ e definir o seu gráfico, definido pelo conjunto de todos os pares ordenados do tipo $(a, f(x))$ com $a \in A$.

Posteriormente, deverão saber caracterizar funções, analisando o seu domínio Df, i.e. todos os elementos do conjunto A em que $f:\ A \to B$, e as limitações de cada expressão analítica.

De seguida, é introduzida a definição de função injetiva como $\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, a definição de função sobrejetiva como $\forall y \in B\ \exists x \in A,\ y = f(x)$ e a definição de uma função bijetiva, ou seja, simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Na subunidade seguinte, segundo o PMC 2015, os alunos devem aprender a relacionar propriedades geométricas dos gráficos com propriedades das respetivas funções. Aprenderão a identificar uma função real de variável real como «par» se, para

$\forall\, x \in D_f,\ -x \in D_f \ e\ f(-x) = f(x)$ reconhecendo, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.

Simultaneamente, aprenderão a identificar uma função real de variável real como «ímpar» se, para $\forall\ x \in Df$, $-x \in Df\ \ e\ \ f(-x) = -f(x)$ reconhecendo, dado um plano munido de um referencial ortonormado, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à origem do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro na origem do próprio referencial coincidir com o próprio gráfico.

Esta intervenção terminará com a aprendizagem dos alunos das transformações associadas ao gráfico de uma função (translação segundo um vetor $\vec{u}$, dilatação/contração vertical ou horizontal, reflexão de eixo Ox ou reflexão de eixo Oy).

Preparação das tarefas

Tendo em conta as orientações curriculares apresentadas e os objetivos por mim definidos, desenvolvi três tarefas principais, com grau de dificuldade crescente, para além de todas as outras tarefas de sintetização e memorização, denominadas **ficha C, E e questão aula.** Estas tarefas foram realizadas pelos alunos em três momentos distintos, na quarta, sétima e nona aula. Cada uma delas não conteve mais de três ou quatro problemas que necessitassem da escrita de textos matemáticos.

A primeira tarefa (ficha C) é caracterizada pelo seu nível de dificuldade exigente, em comparação com as tarefas anteriores (ficha A e ficha B), mas também por ser um ponto de partida para este estudo. Este primeiro objeto de estudo tem como objetivo ajudar os professores e investigadores, a entender a conceção dos alunos do poderá ser uma resposta satisfatória servindo de ponto de partida para o trabalho que quis desenvolver. Claro está que, apesar de já ter sido explicado como se deve proceder para responder corretamente a alguns problemas, durante a realização das fichas anteriores, os alunos tiveram a liberdade e autonomia para elaborar as suas resoluções.

Os problemas que constituíram estas tarefas variaram em grau de dificuldade e em natureza/tipologia, para que fosse possível estudar o desenvolvimento da escrita dos alunos.

Estas tarefas permitiram-me analisar o progresso dos alunos na escrita matemática, tomar conhecimento das suas dificuldades e que tipo de mediação por parte do professor é necessária perante essas mesmas dificuldades. Os alunos receberam feedback atempadamente, oral ou escrito, relativamente às tarefas realizadas.

Sabendo que apenas três momentos para praticar a escrita matemática não chegam para se notar qualquer tipo de desenvolvimento, ainda que seja fornecido feedback, é necessário oferecer oportunidades aos alunos de trabalharem os seus registos escritos, com os seus pares ou em grupo, nas restantes aulas, tornando assim a prática da escrita uma atividade recorrente. Esta resolução de problemas foi, sempre que possível e pertinente, auxiliada pela utilização de tecnologia e/ou plataformas tecnológicas, quer seja por parte do aluno quer seja por parte do professor.

Esta prática contínua ao longo das aulas permitiu responder à segunda questão, uma vez que foram observadas melhorias na escrita matemática dos alunos. Este facto será explorado nos próximos capítulos.

Avaliação

"[...] a avaliação surge como meio educativo, como instrumento que visa orientar a atividade pedagógica para promover o sucesso dos alunos (objetivo formativo), de modo que o aluno também tem o direito de intervir, participando na orientação e regulação de sua aprendizagem e no seu processo de formação" (Gomes, citado por Celestino, 2012, p.18)

As duas primeiras tarefas foram alvo de avaliação formativa. A terceira e última tarefa, foi alvo de avaliação sumativa, sendo esta inserida nos 15% da nota final dedicados a tarefas escritas, pesquisas e trabalhos individuais/grupo.

Para além disso, a observação direta das aulas permitiu-me avaliar o desenvolvimento na escrita e na capacidade de comunicação dos alunos, tendo ocorrido durante os momentos de trabalho autónomo, discussão coletiva e nos momentos de exposição teórica. As notas de campo que tive oportunidade de registar no final das aulas, e conversas com os professores cooperante e orientadores, permitiram-me complementar as informações que tinha sobre o desempenho dos alunos.

Trabalho em grupos

Sempre que possível foi utilizado o trabalho a pares. Os alunos aproveitaram essas oportunidades para aprender, melhorar e ajudar os colegas na aprendizagem da matemática.

Foi no trabalho a pares que, em intervenções anteriores, se viu a criatividade dos alunos na resolução de problemas matemáticos, algo pouco comum quando trabalham sozinhos. Anteriormente, quando podiam trabalhar a pares, os alunos aproveitavam também para recorrer a outros colegas de outros grupos para procurarem respostas, ouvir e analisar as de outros, num espírito competitivo, mas cooperativo e de entreajuda.

Assim, de modo a incentivar a argumentação de resoluções e o desenvolvimento da escrita matemática, o trabalho a pares, em momentos propícios, pareceu ser o modo ideal de trabalho, razão pela qual foi escolhido para a intervenção.

Trabalho coletivo

O trabalho coletivo, muitas vezes confundido com o trabalho a pares, é habitualmente utilizado de várias formas:

a) Na introdução de novos conteúdos à turma;
b) Na discussão entre Professor-Alunos, uma consequência do tópico anterior onde, ao ser introduzido um novo conteúdo, o professor pode proceder a questionamentos aos alunos;
c) Tirar dúvidas relativas a tarefas já realizadas anteriormente.

Nesta intervenção, o trabalho coletivo foi utilizado na resolução de problemas onde cada elemento da turma contribuiu para a sua resolução. Esta resolução foi realizada oralmente com o professor ou autonomamente, com participação e discussão coletiva posterior dos alunos.

O trabalho coletivo mostra várias vantagens, sendo uma delas a discussão rica que pode originar na turma e o facto de todos terem a possibilidade de ouvir e entender as dúvidas dos colegas, não estando estas cingidas apenas a grupos específicos de alunos.

Contudo, o trabalho coletivo não foi um modo de trabalho recorrente, uma vez que que torna complicada a tarefa de analisar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. O trabalho coletivo é também um obstáculo à análise das resoluções de todos os alunos, assim como a sua perceção relativamente ao conteúdo temático a ser trabalhado: o aluno respondeu porque sabe ou porque ouviu/leu a resposta de um colega? O aluno respondeu, ainda que erradamente, 23 porque achava que sabia a resposta ou existiu algum outro motivo? São questões que se levantam quando o trabalho coletivo é utilizado.

Recursos da Escola

Todas as salas de aula da escola participante estão equipadas com um quadro interativo (computador e projetor), um recurso importante para a realização da exposição teórica e a discussão de resoluções.

Estes equipamentos foram ainda essenciais na minha utilização do Geogebra, durante a subunidade das transformações do gráfico de funções, para ilustrar o tipo de transformações realizadas. Embora os alunos tenham realizado uma ficha de introdução às transformações dos gráficos de funções, a utilização do Geogebra em tempo real foi crucial para uma melhor compreensão dos alunos dos conteúdos abordados.

Tarefas e materiais utilizados

Para esta intervenção, utilizei, quando necessário, o manual escolar, Máximo 10. No entanto, os materiais principais utilizados foram as fichas de trabalho elaboradas pelos professores, os suportes teóricos em formato PowerPoint para a lecionação da subunidade didática, a calculadora e o GeoGebra, nomeadamente nos conteúdos referentes às transformações de gráficos de funções.

As três tarefas realizadas em grupo foram construídas propositadamente para esta intervenção letiva, de acordo com os objetivos de aprendizagem definidos. Em todas elas houve momento para trabalho autónomo e discussão coletiva, que se estendeu para as aulas seguintes.

A primeira tarefa, objeto de estudo – ficha C (Anexo 3) pretende fazer um aprofundamento do estudo das funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, representando uma oportunidade de aprendizagem na escrita de resoluções e na sistematização destes conceitos, que em geral se confundem. Tem ainda como objetivo introduzir várias tipologias de questões, para o mesmo conteúdo, e mostrar que a mesma questão poderá ser colocada de formas distintas e que, assim sendo, a resposta poderá ter uma natureza diferente.

A primeira questão é de natureza aberta, propositadamente, onde é pedido aos alunos que esbocem um gráfico de uma função que satisfaça apenas três condições. Dado que existem infinitas respostas possíveis, coube aos alunos analisar, num momento de partilha com a turma, as resoluções dos colegas e detetar as eventuais falhas.

A segunda e terceira questão são muito semelhantes em conteúdo e muito distintas na tipologia. Ambas trabalham os conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva e em que condições se aplicam. Contudo, na segunda questão, é pedido aos alunos que justifiquem (e esta justificação pode ocorrer de várias formas, que veremos no capítulo a seguir) a única opção correta. Já a terceira questão pede, além da justificação, a atribuição do valor lógico de cada afirmação tornando-a na mais enriquecedora da ficha uma vez que os alunos são deparados, pela primeira vez nesta unidade didática, com afirmações cuja prova do seu valor lógico poderá ser uma demonstração universal ou através de um contraexemplo. Esta questão serviu, essencialmente, para os alunos compreenderem que tipo de justificações são adequadas para cada afirmação.

A última questão pede aos alunos que mostrem duas afirmações. As funções são aplicadas a conjuntos finitos A e B de forma que, apesar da necessidade de se mostrar a universalidade das afirmações, os alunos possam recorrer a outro tipo de representações além da algébrica, como por exemplo a utilização de diagramas.

A segunda tarefa – ficha E (Anexo 5) tem o objetivo de aprofundar os conhecimentos dos alunos quanto às transformações do gráfico de funções, como estas ocorrem, a ordem em que acontecem e o seu significado. Acrescenta-se ainda, como objetivo principal, a compreensão, por parte do professor, da ideia que os alunos têm sobre o que é uma resposta satisfatória. Mais adiante veremos que alguns alunos acreditam que escrever "a função anda 2 unidades para a esquerda e 5 para baixo" é tanto ou mais aceitável que "o gráfico da função sofre uma translação segundo o vetor $(-2, -5)$". As questões três e cinco têm o objetivo de analisar a avaliação que os alunos fazem das suas respostas, de forma a podermos levá-los a entender de que modo as respostas têm significados e rigores distintos.

Já as questões um e dois são de aplicação direta da teoria, que havia sido ensinada na aula anterior, não exigindo resoluções por parte dos alunos.

As questões quatro e seis têm o propósito de levar os alunos a manipular expressões analíticas de funções de forma a obterem o resultado pretendido e/ou a averiguar se a função satisfaz injetividade ou paridade. Ao contrário da primeira tarefa, é pedido aos alunos que determinem, averiguem um conceito ou estudem uma dada função. Este tipo de questões não oferece pistas para uma possível resposta pelo que são obrigados a utilizar todas as ferramentas que aprenderam para a resolver, levando-os a possíveis resoluções distintas, que devem ser debatidas e corrigidas com os colegas (uma vez que não são questões de resposta aberta, ou seja, a resposta deve ser única).

Por fim, a terceira tarefa – questão aula (Anexo 6) pretende abordar conteúdos dados anteriormente, relativamente a esta unidade didática, e verificar se existe melhoria na escrita matemática dos alunos. As cinco fichas realizadas nesta intervenção foram ferramentas essenciais para a resolução desta questão aula, ainda que o seu grau de dificuldade equivalente. Esta questão aula tem uma avaliação sumativa, valendo 40 pontos, cuja nota deverá ser adicionada às notas de questões aula anteriores (de forma que a nota de cada aluno esteja cotada para 200 pontos).

Aulas lecionadas

A planificação inicial desta intervenção letiva contemplou nove aulas, decorridas entre os dias 27 de fevereiro e 17 de março, como está descrito na Tabela 2. As aulas foram preparadas de acordo a irem ao encontro da planificação de médio prazo, elaborada antes de intervenção e tendo em consideração os objetivos de aprendizagem e os propósitos do estudo em desenvolvimento.

Tabela 2: Planificação médio prazo (à priori)

FUNÇÕES: GENERALIDADE SOBRE FUNÇÕES			
Data	Tópicos	Notas	Objetivos
27 Fev (90min)	● Revisões; ● Produto cartesiano; ● Gráfico de uma função; ● Realização de uma ficha de trabalho (Ficha A)	Caso os alunos não terminem a ficha A em aula, será dada como trabalho de casa para os alunos.	● Identificar o produto cartesiano de dois conjuntos; ● Identificar o gráfico de uma função.
1 Mar (90 min)	● Sintetize da teoria lecionada na aula anterior através da correção da ficha A; ● Restrição de uma função a um conjunto; ● Função real de variável real; ● Caracterizar de uma função; ● Zeros de uma função; ● Sinal de uma função; ● Realização de uma ficha de trabalho (Ficha B)	Caso os alunos não terminem a ficha B em aula, será dada como trabalho de casa para os alunos.	● Os alunos devem saber caracterizar uma função, real de variável real, podendo esta estar restrita por um dado conjunto; ● Os alunos devem saber caracterizar o sinal de uma função, real de variável real; ● Os alunos devem saber determinar os zeros de uma função.

3 Mar (90 min)	• Sintetize da teoria lecionada na aula anterior através da correção da ficha B; • Função injetiva; • Função sobrejetiva; • Função bijetiva; • Resolução da primeira QA formativa (Ficha C)		• Caracterizar uma função, real de variável real, podendo esta estar restrita por um dado conjunto. • Caracterizar o sinal de uma função, real de variável real • Determinar os zeros de uma função.
6 Mar (90 min)	• Correção e discussão coletiva (com exposição de diferentes resoluções) da QA formativa realizada; • Função inversa; • Gráfico da função inversa; • Função par/ímpar; • Resolução de uma ficha de trabalho (Ficha D)	Caso os alunos não terminem a ficha D em aula, será dada como trabalho de casa para os alunos. Far-se-á uso do Geogebra para o ensino destes tópicos.	• Identificar, dados os conjuntos A e B, uma função injetiva e designar também uma tal função por «injeção de A em B». • Identificar, dados os conjuntos A e B, uma função como sobrejetiva e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada. • Designar uma tal função por «sobrejeção de A

			em B» ou por «função de A sobre B». ● Identificar, dados conjuntos A e B, uma função como bijetiva se esta é injetiva e sobrejetiva.
FUNÇÕES: TRANSFORMAÇÕES DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO			
8 Mar (90 min)	● Sintetize da teoria lecionada na aula anterior através da correção da ficha D; ● Translações do gráfico de uma função; ● Dilatação e contração do gráfico de uma função; ● Reflexões do gráfico de uma função; ● Resolução de uma ficha de trabalho (Ficha E)	Caso os alunos não terminem a ficha E em aula, será dada como trabalho de casa para os alunos. Far-se-á uso do Geogebra para o ensino destes tópicos.	● Identificar, dados conjuntos A e B, uma função par e ímpar; ● Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano. ● Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico

			relativamente à origem O do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro O coincidir com o próprio gráfico.
10 Mar (90 min)	● Sintetize da teoria lecionada na aula anterior através da correção da ficha E; ● Resolução de exercícios do manual; ● Resolução da segunda QA formativa (Ficha F).		● Entender como as transformações de gráficos de funções afetam os seus zeros.
13 Mar (90 min)	● Correção e discussão coletiva (com exposição de diferentes resoluções) da QA formativa realizada; ● Resolução e correção de uma ficha detrabalho (Ficha G).		● Idênticos aos objetivos específicos visados das duas aulas anteriores.
FUNÇÕES: MONOTONIA E EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO			
15 Mar (90 min)	● Função crescente e decrescente; ● Função crescente e decrescente em sentido lato; ● Função monótona;	Far-se-á uso do Geogebra para o ensino destes tópicos.	● Idênticos aos objetivos específicos visados das três aulas anteriores.

	• Função monótona em sentido lato. • Resolução e correção de uma ficha de trabalho (Ficha H).		
17 Mar (90 min)	• Resolução de exercícios; • Esclarecimento de dúvidas para a Questão-Aula; Realização da QA sumativa.		

O planeamento das aulas focou-se, principalmente, na elaboração de diferentes e das possíveis dificuldades que os alunos podiam apresentar na resolução de cada uma, assim como na preparação dos momentos de discussão.

Contudo, à medida que a intervenção ocorria, houve a necessidade de realizar alterações aos planos de aula de forma que estes se adaptassem ao ritmo da turma e a dificuldades que os alunos demonstraram no decorrer das aulas. Assim, a planificação a médio prazo não foi concretizada na sua plenitude tendo sido esta excluído a lecionação da terceira subunidade e os alguns conteúdos ausentes nas Aprendizagens Essenciais, como a função inversa de uma função bijetiva.

De seguida, desenvolverei descrições das aulas, recorrendo aos registos escritos dos alunos e àqueles que elaborei no final de cada aula, em discussão com os Professores Orientadores e Cooperante. Mencionarei ainda as razões pelas quais houve alterações aos planos de aula.

Aula 1 – 27 fevereiro de 2023

A primeira aula da intervenção letiva correu como havia sido planeado, tendo o seu plano de aula cumprido na íntegra (o tempo que previa para cada momento da aula foi devidamente cumprido).

Os alunos não terminaram a ficha dada (Anexo 1), algo que eu já tinha previsto, mas foi mandada para trabalho de casa a fim de ser corrigida na aula seguinte.

Não houve muita interação da turma no momento da exposição teórica. A turma costuma ser bastante participativa, mas apenas quando são dados conteúdos novos. A grande maioria da aula foi sobre revisões e, apesar de nenhum aluno se lembrar ao certo do que foi lecionado em anos anteriores, não tiveram grande vontade de participar uma vez que não estavam a abordar conteúdos novos. Assim, para combater um pouco o "aborrecimento", decidi deixá-los realizar a ficha em grupos, nos últimos 20 min da aula.

Quanto abordei a definição de gráfico de uma função usei exemplos e diagramas práticos, de forma que os alunos entendessem facilmente, algo que sucedeu e, portanto, foi positivo. No entanto, quando dei a definição de gráfico de uma função, notei que os alunos têm dificuldade em ler simbologia matemática e não sabem ler quantificadores (por exemplo). Assim, muito provavelmente, os alunos entenderam os exemplos, por ser visuais e bastante práticos, mas não sabiam ler as definições devido à sua simbologia matemática. Algo que não notei durante a aula, apenas quando houve um momento para reflexão da aula, mas que retifiquei nas aulas seguintes.

Aula 2 – 1 março de 2023

Contrariamente à primeira aula da intervenção, o plano da segunda aula não foi cumprido na íntegra. Apesar dos primeiros 25 min terem decorrido como previsto, a exposição teórica demorou mais do que o esperado pois desta vez os alunos foram bastante mais participativos e tendo colocado várias questões.

Assim sendo, a aula acabou por se atrasar e não terminei a exposição teórica, ainda que durante a mesma os alunos resolvessem exercícios de aplicação, pelo que não houve tempo de terminar a teoria e de se iniciar a resolução da ficha B.

Nesta aula, os alunos aprenderam a definição de função real, de variável real e a sua caracterização. Os alunos gostaram da aula, mas notei que houve dúvidas na mesma. Assim, surgiu a primeira alteração às planificações elaboradas, ou seja, todas as aulas planeadas foram dispostas para a aula seguinte.

Deste modo, para não acrescentar mais aulas à intervenção letiva, decidi não lecionar a função inversa e atrasar a aula seguinte (aula 3) em um dia. Desta forma, focar-me-ia em tirar todas as dúvidas que os alunos tivessem acerca do que foi dado nesta aula, terminaria a teórica e fá-los-ia realizar e terminar a ficha que era suposto terem iniciado (ficha B).

Em relação à primeira aula, li todas as definições em voz alta e de forma clara para os alunos entenderem. De facto, eles mostraram ter dificuldade em perceber o significado do quantificador universal, do símbolo de contém, a diferença entre pertencer e estar contido. Ler as definições permitiu aos alunos mostrar dificuldades na leitura matemática e permitiu-me, a mim, explicar-lhes o significado dos símbolos. Algo que não tinha feito na aula anterior, apesar de serem definições muito mais simples do que as definições desta aula. Assim, acredito que esta alteração no meu comportamento e na minha abordagem tenha sido positiva.

Os alunos mostraram-se muito mais participativos, acredito que um dos motivos tenha sido o facto de a matéria abordada ser nova para eles. Foram muito participativos, tanto oralmente (durante a exposição teórica) como durante a resolução de alguns exercícios. De facto, uma grande quantidade de alunos quis ir ao quadro resolver exercícios, de forma voluntária, não havendo necessidade de exigir a participação de ninguém. Havia necessidade, contudo, de sistematizar bem o que foi dado e resolver mais questões com outro nível de dificuldade, pois notei que ainda havia bastantes dificuldades e por isso tomei a decisão de utilizar a aula seguinte para esta sistematização.

Aula 3 – 3 março de 2023

Atendendo ao descrito anteriormente, nesta terceira aula da intervenção terminei a exposição teórica fazendo uma sistematização do que foi lecionado na aula anterior e introduzindo a caracterização de uma função real de variável real.

Ainda nesta aula, os alunos realizaram a ficha B (Anexo 2), demonstrando algumas dificuldades na caracterização de algumas funções, como $m(x) = \sqrt{x(x^2 - 1)}$ e $n(x) = \sqrt{x(x^2 + 2x + 1)}$. Os alunos mostraram entender que o interior da raiz deverá ser positivo (ou nulo) mas tiveram dificuldades em avançar, uma vez que não sabem resolver inequações de grau 3. Enquanto circulei pela sala, durante o trabalho a pares dos alunos, relembrei-os da importância da tabela de sinal, que já haviam aprendido anteriormente a utilizar aquando da aprendizagem de Polinómios. Como vários alunos estavam a levantar dúvidas sobre o mesmo tópico, decidi resolver uma das alíneas no quadro, para a turma. De seguida, os alunos continuaram a resolver a tarefa sem mostrar dúvidas semelhantes.

Os alunos mostraram também dificuldades em indicar o domínio e contradomínio de funções cujo gráfico cartesiano apresenta bolas abertas e fechadas, como na tarefa 3 da ficha B. Estas dificuldades são falha minha, uma vez que na exposição teórica não dei nenhum exemplo com gráficos semelhantes aos apresentados na tarefa. Assim, também houve a necessidade de explicar aos alunos como se analisa um gráfico cartesiano quanto ao domínio e contradomínio, antes de passarem à resolução das restantes alíneas.

Durante a aula, o trabalho autónomo foi interrompido para resolução, no quadro, de algumas alíneas, portanto não houve tempo para a discussão e correção da ficha. Esse momento ficou para a aula seguinte.

Aula 4 – 6 março de 2023

A primeira aula da segunda semana da intervenção, iniciou-se com a correção e esclarecimento de dúvidas relativamente à ficha B. De seguida, procedeu-se à exposição teórica acerca de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, que tomou a maior parte do tempo da aula. Durante a exposição, procurei sempre incentivar a participação ativa dos alunos, colocando questões à turma ou diretamente aos alunos. Os alunos mostraram bastantes dificuldades na demonstração de sobrejetividade de uma função e em entender o seu significado. Conseguiram, de um modo geral, entender que havendo elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum objeto, a função não pode ser considerada sobrejetiva. No entanto, a seu ver, qualquer função é sobrejetiva quando na sua caracterização substituímos o conjunto de chegada pelo contradomínio, por isso, não percebiam a necessidade de se provar a sobrejetivadade nem porque é que a definição existia. No último momento da aula, procedeu-se à realização da ficha C (Anexo 3) onde os alunos mostraram dificuldades na utilização de terminologia correta, como o uso dos termos objetos, imagens, gráficos de funções e retas. Mostraram ainda dificuldade na demonstração de uma afirmação. Em muitos casos, os alunos usam um exemplo para demonstrar a universalidade quando tal só é aplicável para demonstrar que uma afirmação é falsa. Durante o trabalho autónomo, fui auxiliando os alunos nesse sentido. Ainda assim, encontrei alguns desses erros no momento da análise mais detalhada da resolução dos alunos, em casa, pelo que no feedback escrito fiz também questão de esclarecer quando é correto utilizar um contraexemplo e quando é necessário fazer uma demonstração com objetos e imagens abstratos, que garanta ser verdade para qualquer um. Apesar de os alunos terem iniciado a ficha C não houve tempo suficiente para a terminarem pelo que o plano de aula não foi cumprido. Assim, decidi iniciar a aula seguinte com a continuação do trabalho autónomo. Um dos erros por mim cometidos foi de não ter recolhido as resoluções dos alunos no fim desta aula. Foi-me aconselhado pelos Professores Cooperante e Orientador a não permitir que os alunos levem as suas resoluções para casa, para não as alterarem, uma vez que o meu objetivo é analisar as resoluções em que não houve a intervenção de terceiros.

Aula 5 – 8 março de 2023

A 5.ª aula desta intervenção não decorreu de acordo com o plano de aula elaborado. Em parte, devido ao atraso da aula anterior. Iniciei a aula perguntando quem tinha resolvido a ficha C em casa e quem ainda precisava de tempo para terminar. Felizmente, nenhum aluno trabalhou na ficha em casa, pelo que aqueles que já haviam terminado tê-lo-iam feito na aula anterior e quem ainda necessitava de tempo para a resolver não havia tentado em casa devido aos trabalhos de casa de outras disciplinas. Desta forma, nenhuma resolução foi alterada em casa. Assim sendo, permiti que os restantes alunos se juntassem nos grupos da aula anterior e que terminassem de resolver a ficha, ainda que num curto espaço de tempo uma vez que queria prosseguir a aula conforme o plano elaborado. Dei cerca de 15 minutos aos alunos para terminarem a ficha e àqueles que já a haviam terminado, dei uma lista de exercícios do manual que podiam resolver. Posteriormente, passámos para a discussão das resoluções. Em cada questão chamei um (ou dois) alunos ao quadro para mostrarem a sua resolução e questionei a turma sobre se estaria correta, se mostrava o que era pedido no enunciado, etc.… O momento de discussão coletiva acabou por se tornar muito rico, os alunos foram muito participativos pelo que a correção da ficha tomou o restante tempo da aula, não havendo tempo para a lecionação da função par/ímpar, algo previsto no plano de aula. Durante a aula, percebi que não haveria tempo para introduzir o conceito de função par e ímpar, acabando por dar prioridade à discussão coletiva, de modo a não quebrar o rumo e a boa aprendizagem que estava a proporcionar. Assim, durante a aula e em conversa, com os Professores Cooperante e Orientadores, decidi lecionar a função par e ímpar depois das transformações do gráfico de funções, uma vez que os alunos abordariam as reflexões de eixo Ox e Oy e assim estabelecer relação com a noção de função par e ímpar. Desta forma, este contratempo acabou por se tornar uma boa alteração de planos.

Aulas 6 e 7– 10 e 13 março de 2023

Estas duas aulas decorreram conforme os planos elaborados (Anexo 12 e 13). Os alunos iniciaram o estudo ao subcapítulo Transformações do Gráfico de Funções com a realização da ficha D (Anexo 4). Anteriormente, havia sido informada pelo Professor Cooperante que os alunos costumam apresentar bastantes dificuldades no entendimento das transformações do gráfico de funções pelo que seria melhor elaborar uma tarefa introdutória, onde os alunos poderiam observar o que sucede ao gráfico das funções, tirando assim as suas conclusões, sem haver necessidade de eu os ajudar. Assim, em conjunto, elaborámos a ficha D, composta por 6 tarefas, cada uma dedicada a um tipo de transformação: translação horizontal, translação vertical, contração/dilatação horizontal, contração/dilatação vertical, reflexão de eixo Ox e reflexão de eixo Oy. Em cada uma das tarefas, era dado o gráfico de uma função f e os alunos teriam de preencher os dados acerca dessa função. Paralelamente, era pedido aos alunos que indicassem a mesma informação acerca de uma função cujo gráfico cartesiano era imagem do gráfico cartesiano da função f por meio de uma transformação geométrica, sem os alunos saberem do que se tratava. No fim, tiravam conclusões em formato de definições para cada tipo de transformação. Os alunos reagiram muito bem à forma como as aulas decorreram. A realização da ficha D foi em pequenos grupos (2 a 3 elementos) e a sua correção foi decorrendo ao longo da sua realização, ao invés de ser deixada para um último momento. Para cada tarefa, dei cerca de 10 a 15 min para a sua resolução e instruía os alunos a não avançarem mais na resolução da ficha uma vez que queria que tirassem primeiro as conclusões acerca de um tipo de transformações ao invés de avançarem sozinhos para as restantes. No fim desse tempo de resolução, prossegui para a sua correção deixando os alunos tirarem as suas conclusões sozinhos. No fim de cada conclusão, pedia aos alunos que as passassem para o seu caderno diário, pois eram as definições das transformações, e demonstrava aos alunos a transformação abordada no GeoGebra e só depois era permitido seguirem para a próxima tarefa. Durante a realização da ficha pude notar que os alunos tiveram mais dificuldades nas transformações realizadas no domínio das funções. Os alunos mostraram entender bem que $f(x) + a$ e $af(x)$ são alterações ao contradomínio através de translações verticais e contrações/dilatações verticais de coeficiente a. Contudo, quando confrontados com funções do tipo $f(x - a)$, os alunos mostraram dificuldades em entender que a translação horizontal está associada ao vetor $(a, 0)$ e não $(-a, 0)$. Também mostraram dificuldade em entender que $f(2x)$ é imagem do gráfico cartesiano da função f pela contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ ao invés de coeficiente 2. Isto demonstra que os alunos ainda são muito dependentes daquilo que observam, se veem um 2 então o coeficiente deve ser 2 e se veem $x + 2$ então o vetor associado à transformação deve ser (+2,0). Assim, o GeoGebra foi de grande utilidade para tirar as dúvidas à maior parte da turma. Na plataforma mostrei a relação entre os gráficos cartesianos de $f(x)$, $f(2x)$, f (1 2 x), $f(x + 2)$ e $f(x - 2)$. No entanto, houve alunos que apesar de perceberem a regra, não entenderam a razão pela qual os gráficos de deslocam, segundo eles, em sentidos opostos ao que pensam. Decidi começar por perguntar a imagem de um dado objeto pela função f, como por exemplo $f(2)$ e depois perguntei qual teria de ser o objeto x tal que $f(\frac{1}{2}x)$ tivesse a mesma imagem que $f(2)$, i.e, $f(\frac{1}{2}x) = f(2)$. Aqui, os alunos mostraram entender o objeto necessita ser 4, i.e, o dobro e que assim sendo, a transformação é uma dilatação e o coeficiente é 2. Realizei o mesmo tipo de questionamento para as restantes transformações e os alunos mostraram compreender a situação afirmando que "alterações no x são ao contrário, $f(x+2)$ é associado ao vetor $(-2,0)$ e $f(2x)$ é contração de coeficiente $\frac{1}{2}$ ". Após a realização e correção da ficha D, já na aula 7, introduzi a noção de função par e ímpar, não tendo surgido quaisquer dúvidas uma vez que haviam entendido bem as reflexões do gráfico de funções. Por fim, terminada a lecionação das transformações do gráfico de funções, e os conteúdos previstos para a intervenção letiva, os alunos iniciaram, na aula 7, a ficha E, tendo sido também realizada em pequenos grupos. Como previsto, a conclusão da realização da ficha ocorreu na aula seguinte pelo que, a fim de evitar cometer o erro anteriormente cometido, pedi aos alunos as suas resoluções, ficando com as mesmas até à aula seguinte onde voltaria a distribuí-las para terminarem a sua realização.

Após a realização e correção da ficha D, já na aula 7, introduzi os alunos à função par e ímpar, não apresentando quaisquer dúvidas uma vez que haviam entendido bem as reflexões do gráfico de funções.

Por fim, terminada a lecionação das transformações do gráfico de funções, e os conteúdos previstos para a intervenção letiva, os alunos iniciaram, na aula 7, a ficha E, tendo sido esta também realizada em pequenos grupos. Como previsto, a conclusão da realização da ficha ocorreu na aula seguinte pelo que, a fim de evitar cometer o erro anteriormente cometido, pedi aos alunos as suas resoluções, ficando com as mesmas até à aula seguinte onde voltaria a distribuí-las para terminarem a sua realização.

Aula 8 – 15 de março de 2023

A 8.ª aula desta intervenção decorreu conforme o plano elaborado (Anexo 14). Iniciei a aula com uma breve síntese das transformações do gráfico de funções e indiquei que tinham a mesma na Classroom que deveriam usar como estudo (Anexo 16).

De seguida, distribuí as resoluções dos alunos e indiquei que deveriam continuar a realização da ficha E, iniciada na aula anterior. Durante a mesma, a maioria dos alunos apresentou mais dificuldades nas alíneas 3.1 e 5.1 onde era pedido que os alunos indicassem o conjunto de transformações geométricas necessárias para se obter o gráfico cartesiano de uma função através de outro. Além de algumas dificuldades que mostrarei no capítulo seguinte, referentes à escrita matemática dos alunos, demonstraram principalmente dificuldade em entender a importância da ordem em que ocorrem as transformações. A seu entender, se as transformações geométricas estavam correta então a função obtida estaria também correta. Assim, pedi aos alunos que indicassem como ficaria o gráfico da função g

caso este fosse uma translação vertical associada ao vetor (0,2) do gráfico da função f, ao que os alunos indicaram $f(x) + 2$. De seguida, instruí os alunos a realizarem uma reflexão de eixo O_x à função obtida, ao que me indicaram $-[f(x) + 2] =- f(x) - 2$ e que este seria o resultado de uma translação e reflexão.

De forma semelhante, pedi as mesmas transformações, mas realizadas numa ordem diferente, i.e, primeiro o gráfico cartesiano da função g será imagem do gráfico cartesiano da função f pela reflexão de eixo O_x, ou seja, $- f(x)$ e posteriormente a translação vertical associada ao vetor $(0, 2)$, ou seja, $- f(x) + 2$.

Em suma, os alunos concluíram que $- f(x) - 2 \neq - f(x) + 2$ pelo que a ordem das transformações geométricas realizadas ao gráfico cartesiano de uma função é decisiva para o resultado.

O restante da aula decorreu normalmente, tendo sido terminada com a total correção e discussão das resoluções dos alunos da ficha E.

Aula 9 – 17 de março de 2023

Na última aula da intervenção houve lugar para a resolução de exercícios do manual, escolhidos por mim, esclarecimento de dúvidas quanto ao que foi abordado anteriormente e a realização de uma Questão Aula sumativa acerca do que foi lecionado acerca de Funções, tendo a aula decorrido conforme o plano elaborado (Anexo 15).

As notas relativas a esta avaliação estão representadas na Tabela 3:

Tabela 3 – Classificações da Questão Aula

Classificação (numa escala de 0 a 40)	**Frequência absoluta**
$[0, 10[$	4
$[10, 20[$	4
$[20, 30[$	9
$[30, 40]$	11

Esta intervenção englobou as subunidades didáticas “generalidades sobre funções” e “transformação do gráfico de funções”, não havendo tempo, devido a todas as alterações e imprevistos mencionados anteriormente, para a lecionação da subunidade “monotonia e extremos de uma função”, algo previsto inicialmente.

Contudo, excluir a última subunidade didática permitiu-me observar e melhor analisar os processos desenvolvidos pelos alunos em relação à sua compreensão dos conteúdos temáticos e quanto à sua escrita matemática pelo que considero estas alterações como algo positivo.

Reflexão sobre as aulas lecionadas

Durante a lecionação das aulas, pude perceber diversas situações que me fizeram refletir e procurar constantemente melhorar a minha prática pedagógica. Gostaria de compartilhar algumas dessas reflexões, abordando diferentes aspetos que surgiram ao longo da intervenção.

Uma das primeiras aprendizagens que tive foi a de estar sempre preparada para alterações aos planos de aula, pois imprevistos podem ocorrer a qualquer momento. Por mais que um plano de aula meticulosamente planeado, imprevistos acontecem durante as aulas. É necessário ter flexibilidade e adaptar os planos de aula quando necessário, para garantir que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados mesmo diante dos imprevistos. No final, a sala de aula é um ambiente volátil e as necessidades dos alunos podem variar.

Outro ponto que me fez refletir é o desafio que tive, e ainda tenho, de antecipar todas as dificuldades que os alunos podem encontrar ao realizar tarefas. Como professora, aprendi que é importante ouvir atentamente as dúvidas dos alunos e procurar compreender as suas dificuldades individuais e coletivas. Desta forma, posso ajustar o meu em ensino em auxiliá-los da melhor maneira possível.

Ao longo do tempo, percebi que o trabalho em grupos traz benefícios significativos à aprendizagem dos alunos. A ficha C foi realizada individualmente, ao contrário das restantes tarefas seguintes, e pude notar uma participação mais ativa e uma discussão mais rica, quando os alunos trabalhavam em grupos. Tal foi também notado pelas Professoras Orientadoras que me aconselharam a manter o trabalho a pares nas aulas seguintes até ao fim da intervenção pois a colaboração entre os alunos permite que compartilhem conhecimentos, discutam ideias e aprendam uns com os outros. Além disso, o trabalho em grupo incentiva o desenvolvimento de habilidades sociais, como a comunicação e o trabalho em equipa estando estas habilidades inseridas nas áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória: informação e comunicação e relacionamento interpessoal. Outro aspeto que reconheço como necessário é o controlo adequado do tempo disponível para cada momento da aula. Se o tempo não for gerido com eficiência, corremos o risco de atrasar as aulas planeadas e, consequentemente, comprometer a aprendizagem dos alunos. Alguns alunos podem terminar as tarefas propostas mais cedo e acabar perdendo tempo precioso para a sua aprendizagem, uma vez que têm de esperar pelos restantes colegas para a discussão coletiva. Portanto, como professora, é fundamental estabelecer um equilíbrio entre as atividades propostas, garantindo que o tempo é utilizado de forma produtiva e que todos os alunos tenham oportunidade de participar ativamente na sua aprendizagem. 40 Outra estratégia que percebi ser eficaz é a elaboração de fichas pequenas, com três a quatro problemas, permitindo que os alunos tenham tempo suficiente para refletir e discutir as soluções da turma. Esta abordagem incentiva a participação de todos os alunos, promovendo uma discussão coletiva rica em ideias e tipos de resoluções. Além disso, fichas pequenas proporcionam aos alunos a oportunidade de explicar o seu raciocínio e compreender diferentes abordagens para resolver problemas. É também fundamental evitar propor tarefas mais difíceis do que aquelas abordadas na exposição teórica, como aconteceu em algumas aulas onde os alunos mostraram dificuldades na resolução das tarefas por apresentarem um grau de dificuldade superior às da exposição teórica. É importante garantir que o nível de dificuldade das tarefas seja adequado ao conhecimento e às habilidades dos alunos, proporcionando-lhes desafios progressivos que possam ser superados com apoio adequado. Por fim, também reconheço a importância de aprender com os meus erros. Durante o exercício da profissão, é possível cometer equívocos ou tomar decisões que não funcionem da melhor maneira. No entanto, encaro estas experiências como oportunidades de crescimento e aprimoramento. Ao refletir sobre os erros cometidos durante a intervenção, posso identificar pontos de melhorias e desenvolver estratégias mais eficazes para ajudar os alunos a compreenderem a matemática de maneira mais clara, envolvente e dinâmica.

CAPÍTULO IV – MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Neste capítulo, falarei das opções metodológicas adotadas para o desenvolvimento da investigação, fazendo referência aos participantes assim como dos métodos de recolha e análise de dados.

Por fim, apresento algumas considerações de natureza éticas relevantes.

Opções metodológicas

O objetivo deste estudo é compreender como os alunos do 10.º ano de escolaridade desenvolvem a escrita matemática na aprendizagem de Funções, utilizando resolução de problemas e estratégias que lhes permitam praticar e analisar os seus registos escritos.

Pretendeu-se observar, analisar e interpretar os seus processos desenvolvidos ao longo das aulas e da resolução de diferentes tarefas.

Desta forma, uma questão que se coloca na realização da investigação é a opção metodológica que o estudo assumirá. Esta tem de ir ao encontro do objetivo e questões de investigação.

O estudo é focado no desenvolvimento da escrita matemática dos alunos e na interpretação da mesma. Desta forma, a investigação tem uma natureza interpretativa, que procura captar a subjetividade dos alunos e explorar as suas perspetivas individuais.

“O que torna um estudo de natureza interpretativa ou qualitativa é uma questão de foco substantivo e intenção, e não uma questão de procedimentos para a recolha de dados” (Erickson, 1986, p.120)

As metodologias utilizadas nas investigações interpretativas podem incluir estudos de caso, entrevistas, observação participante e análise de dados. Estas distintas abordagens visam a obtenção de dados ricos e detalhados para permitir uma análise melhor e aprofundada do que se está a estudar.

Contudo, Erickson não pretende impor os significados do investigador aos de quem é observado — antes pelo contrário. Trata-se aqui de reconhecer o papel de mediação do investigador na explicitação dos significados daquele que observa, não devendo "ser apenas um detetor de sinais, cujos sentidos têm de estar permanentemente alerta para todas as alterações que se verificam no contexto do estudo. O investigador deve ser um intérprete ativo desses sinais" (Matos & Carreira, 1994, p.36).

Evidentemente, a aproximação aos pensamentos dos alunos nem sempre é totalmente conseguida e depende muito da interação aluno-professor. Ao investigador cabe captar as ideias dos alunos e entendê-las e, para isso, é necessário conhecê-los, criando uma ligação interpessoal.

No âmbito desta investigação, como se pretende responder a questões de natureza explicativa, do tipo "em que medida", e "como", que proporcionem uma descrição de algo sobre o qual não tenho, nem desejo ter, qualquer controlo, e que está bem identificado e delimitado, a opção metodológica tomada vai para a modalidade de estudo de caso qualitativo, tornando assim a investigação de natureza interpretativa.

Participantes

A população em estudo são os alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade da Escola Secundária Rainha D.Leonor, a qual tenho vindo a acompanhar no presente ano letivo. Desta investigação, assumi em simultâneo o papel de professora e investigadora. Neste estudo foram considerados como participantes, para além da investigadora, a totalidade dos alunos. Contudo, a dimensão da população é demasiado extensa, 28, para uma análise documental detalhada. Assim, escolhi uma amostra de **5** alunos da turma para apresentar na análise de dados, sendo estes cinco alunos de grupos de trabalho distintos.

Métodos de recolha de dados

Este estudo tem uma natureza intervencionista e terá uma abordagem qualitativa no sentido em que os dados recolhidos serão qualitativos.

Como método de recolha de dados, privilegiei a captação de fotografias, uma vez que o meu trabalho incide essencialmente na escrita matemática dos alunos. Em todas as aulas, sempre que possível e oportuno, foram tiradas fotografias aos registos escritos dos alunos de forma a conseguir analisar facilmente as suas resoluções. A captação de fotografias permitiu-me ainda fazer comparações de resoluções, partilhá-las com a turma e averiguar se houve um desenvolvimento na escrita matemática dos alunos.

Para este método, foram utilizados dois telemóveis, o meu e do meu colega da prática de ensino supervisionada.

A observação participante foi também um método utilizado para a tomada de notas durante a aula, quando possível, onde analisei os comportamentos, conhecimentos, opiniões e interações dos participantes. Estas notas não estiveram cingidas apenas ao momento da aula, sendo também redigidas num momento de reflexão posterior onde refiz diálogos e comportamentos observados em aula, procurando simultaneamente fazer uma análise e reflexão sobre as minhas aprendizagens e as dos alunos. Esta recolha documental foi uma outra fonte de dados para responder às questões orientadoras.

Recolha de Dados

Com o intuito de responder à minha primeira questão de investigação, utilizei como principal método de recolha de dados a observação participante, que me permitiu verificar e compreender, tempo real, que tipo de escrita é evidenciada pelos alunos aquando da resolução de problemas.

> "Por observação participante consideramos o método em que o observador participa na vida diária das pessoas que estuda, quer de forma aberta no seu papel de investigador (quer com alguma forma de papel disfarçado), observando o que acontece, ouvindo o que é dito, questionando pessoas, ao longo de um certo período de tempo." (Becker & Geer citado por Mónico et al., 2017, p.727)

Durante a intervenção, tornei-me parte do grupo/turma em estudo, participando ativamente nas atividades da turma, interagindo com os alunos e assumindo um papel, na maioria das vezes, privilegiado que me permitiu obter uma compreensão profunda das suas resoluções, crenças e perspetivas dos mesmo quanto à importância da matemática.

Esta abordagem permitiu-me capturar as dinâmicas em tempo real, i.e, as interações entre os alunos e dos mesmos para comigo e em que medida influenciou o desenvolvimento do conhecimento matemático do aluno. Permitiu-me ainda identificar desafios enfrentados pelos alunos e a examinar as estratégias de ensino adotadas por mim, de forma a poder melhorá-las.

Além da observação participante me ter auxiliado também na análise e compreensão do desenvolvimento da escrita matemática dos alunos, a recolha documental ao longo da intervenção letiva foi o principal método de recolha de dados que me auxiliou na resposta à segunda questão de investigação uma vez que a base da análise dos dados foram os registos escritos dos alunos das tarefas realizadas em aula.

As produções escritas dos alunos permitiram-me compreender de que forma os alunos utilizaram o meu feedback, oral ou escrito, para melhorar os seus registos nas tarefas seguintes. As tarefas foram sempre entregues em suporte papel, realizada em pares ou individualmente, tendo sido pedido aos alunos que entregassem a respetiva resolução numa folha à parte, com o seu nome.

Outro instrumento de recolha de dados utilizado foi o diário de bordo que envolveu o registo sistemático de observações da aula, de interações de alunos, do feedback do Professor Cooperante e das Orientadoras e de reflexões sobre as experiências pessoais da investigação.

Este instrumento foi particularmente útil para capturar informações subjetivas, perspetivas individuais, mudanças em comportamentos e outros aspetos que podem não ser tão facilmente acessíveis por outros métodos de recolha de dados.

Análise de Dados

Para a análise de dados, defini critérios de desempenho no que toca às resoluções escritas dos alunos, de acordo com as questões de investigação. Estes critérios foram divididos
em três níveis: um, dois, três, como é demonstrado na tabela abaixo.

Tabela 4 - Critérios e níveis de desempenho utilizados na análise da escrita matemática dos alunos, adaptado de (Pires et al., 2018, p. 29)

<table>
<tr><td rowspan="2">Clareza</td><td colspan="3">O aluno é claro nas suas ideias.
O aluno recorre ao vocabulário correto.
O aluno faz bom uso de representações visuais.</td></tr>
<tr><td>Nível 1 (N1):
As ideias do aluno são imprecisas, o vocabulário é incorreto ou incompreensível. As representações são inadequadas.</td><td>Nível 2 (N2):
As ideias são precisas, mas o aluno utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível. O aluno recorre a representações pouco adequadas.</td><td>Nível 3 (N3):
As ideias são precisas, assim como o vocabulário utilizado. O aluno recorre a representações adequadas.</td></tr>
<tr><td>Rigor e lógica matemática</td><td colspan="3">O aluno aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando fluência nos mesmos.</td></tr>
</table>

	É demonstrado o raciocínio e coerência nos registos escritos do aluno, com as ideias encadeadas de forma lógica.		
	Nível 1 (N1): O aluno revela pouco raciocínio e coerência nos seus registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias.	Nível 2 (N2): O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.	Nível 3 (N3): O aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.
Fundamentação e conhecimento matemático	O aluno justifica/demonstra/explica os seus processos e ideias. O aluno revela, de forma escrita, domínio dos conteúdos lecionados.		
	Nível 1 (N1): O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto.	Nível 2 (N2): O aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias. O aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes sobre o assunto.	Nível 3 (N3): O aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias e revela, frequentemente, dominar aspetos importantes sobre o assunto.

Além disto, com o objetivo de responder às questões dadas e desenvolver este trabalho, analisei as provas escritas dos alunos quanto ao tipo de resolução.

Cada uma das resoluções escritas dos alunos foi analisada separadamente da dos colegas. No entanto, no capítulo seguinte, apenas apresentarei alguns exemplos de forma a ilustrar a contribuição da resolução de problemas no desenvolvimento da escrita matemática.

Vale referir que nem todos os alunos apresentaram o mesmo tipo de desenvolvimento sendo que, em alguns casos, não houve uma evolução visível.

Questões de Natureza Ética

Para a realização deste trabalho, segui os princípios, objetivos e orientações de natureza ética presentes na Carta de Ética para a Investigação em Educação e Formação (CEIEF) do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Antes da intervenção letiva, fui informada pelo Professor Cooperante que, no início do ano letivo, os encarregados de educação assinaram um formulário de consentimento que permitia a recolha audiovisual e fotográfica dos educandos pelo que não houve a necessidade de elaborar um novo termo de consentimento.

Os dados recolhidos foram utilizados única e exclusivamente com o objetivo de me ajudar a responder às questões do estudo, não tendo utilizado informações/dados, reais e não fictícios, que não tenham sido recolhidos segundo os métodos anteriormente indicados.

Relativamente à confidencialidade e privacidade, assegurei que toda a informação que recolhi foi armazenada de forma segura e, além disso, os nomes dos participantes não são apresentados ao longo deste relatório.

CAPÍTULO V – ANÁLISE DE DADOS

Esta investigação tem por base uma análise de dados qualitativos, onde estes são recolhidos a partir das resoluções escritas dos alunos. A análise foi feita com o objetivo de responder às questões de investigação. De forma a compreender como se desenvolveu a escrita matemática dos alunos, foram analisadas as resoluções de três tarefas (de um total de cinco). Assim, neste capítulo, irei ilustrar as resoluções escritas de cinco alunos, de grupos de trabalho distintos, relacionando-as com os critérios definidos na Tabela 4.

Resultados (Aluno 1 – A1)

Figura SEQ Figura * ARABIC 1 – Alínea 3.1 da tarefa E

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que a função f tem exatamente três zeros: $-2, 3$ e 5.

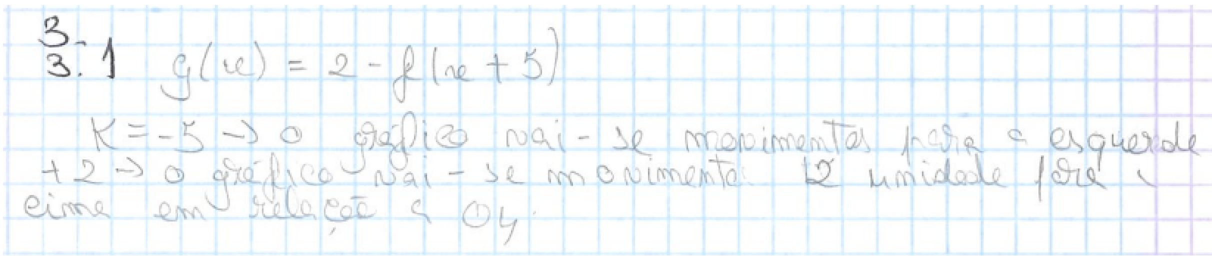
3.1. Considera a função *g* de domínio $\mathbb{R}$ e definida por $g(x) = 2 - f(x+5)$.
Indica as transformações geométricas que deves aplicar ao gráfico cartesiano de *f* para obteres o gráfico cartesiano de *g*.

Nesta questão, era pedido aos alunos que indicassem as transformações que se devem aplicar ao **gráfico** cartesiano de uma função f de modo que o resultado seja o gráfico cartesiano de uma outra função g. Com isto, era pretendido que os alunos mobilizassem os conteúdos aprendidos previamente e usassem terminologia matemática adequada, como por exemplo:
“…translação vertical associada ao vetor $(x, 0)$”, “…reflexão de eixo O_x” ou “contração horizontal de coeficiente α”.

Neste exemplo, em particular, esperava-se que os alunos entendessem, e demonstrassem esse entendimento por escrito, que $f_1(x) = f(x + 5)$ indica que o gráfico cartesiano da função f sofre uma translação horizontal associada ao vetor $(-5, 0)$, que $f_2(x) = - f(x + 5)$ mostra que o gráfico cartesiano de $f_1(x)$ sofreu uma reflexão de eixo O_x e, por fim, que ocorre uma translação vertical associada ao vetor $(0, 2)$ na função $f_3(x) = 2 - f(x + 5)$. Um exemplo de uma resolução poderia ser a seguinte:

O gráfico cartesiano da função g é imagem do gráfico cartesiano da função f pela translação horizontal associada ao vetor $(-5, 0)$, *seguida de uma reflexão de eixo O_x e, por fim, por uma translação vertical associada ao vetor* $(0, 2)$.

Figura 2 - Resolução



Analisando a resolução do aluno, podemos notar a ausência de terminologia adequada. Ainda que o aluno demonstre perceber que tipo de transformações sucedem no gráfico cartesiano da função f, estas são indicadas através da utilização de vocabulário rotineiro "andar para cima/baixo" ou "o gráfico movimenta-se para a esquerda/direita".

Assim, relativamente aos critérios da Tabela 4, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis.

<u>Clareza (N1):</u> O vocabulário é incorreto ou incompreensível. As representações são inadequadas (evidente na utilização de "$+\ 2 \rightarrow$").
<u>Rigor e Lógica (N1):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias. Contudo, não aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouca fluência nos mesmos.
<u>Fundamentação e conhecimento (N1):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto.

Houve, portanto, uma necessidade de auxiliar o aluno e fazê-lo entender onde poderia melhorar a sua escrita. Insisti na utilização de conceitos matemáticos, relembrando-o e fazendo a ligação dos mesmos ao que escreveram "se o gráfico de movimenta 2 unidades para cima, que transformação é essa?". Auxiliei, ainda, o aluno a entender que não é o gráfico cartesiano da função f que se movimenta, ou a própria função como vários alunos indicaram, pois, o gráfico da função é único e se o mesmo se altera, então a função por si representada seria diferente. É necessário indicar que o gráfico da nova função é uma **imagem** do gráfico da função original, após várias transformações.

Na última tarefa da intervenção, repeti a alínea anterior, apenas com uma alteração na expressão da função.

Figura 3 – Alínea 2.3 + Resolução da questão aula

2.3. Considera a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(2x - 1) - 3$.
Indica a transformação ou a sequência de transformações geométricas para obter o gráfico cartesiano de g a partir do gráfico cartesiano de h.

O gráfico g é a imagem do gráfico h segundo a translação horizontal pelo vetor (1,0) e pela contração horizontal pelo o coeficiente 2 e pela translação vertical pelo o vetor (0,-3).

É evidente a diferença entre a escrita matemática utilizada em ambas as questões, consequente de uma evolução do aluno no domínio dos conteúdos e da transmissão dos mesmos. Desta forma, considero que os níveis de desempenho nos critérios, anteriormente definidos, são os seguintes:

Clareza (N3): As ideias são precisas, assim como o vocabulário utilizado. O aluno recorre a representações adequadas.
Rigor e Lógica (N3): O aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias, aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando fluência nos mesmos.
Fundamentação e conhecimento (N2): O aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias. O aluno nem sempre revela domínio dos conteúdos. Tal é evidente na ordem das transformações geométricas que o aluno escreveu. Segundo este, a primeira transformação deveria ser a translação horizontal associada ao vetor $(1, 0)$ e posteriormente a contração horizontal de coeficiente 2 quando, na verdade, a primeira transformação a ser realizada deveria ser a contração horizontal e apenas depois deveria ocorrer a translação. Segundo a resolução do aluno, o gráfico cartesiano da função h deveria ser diferente do expectado.

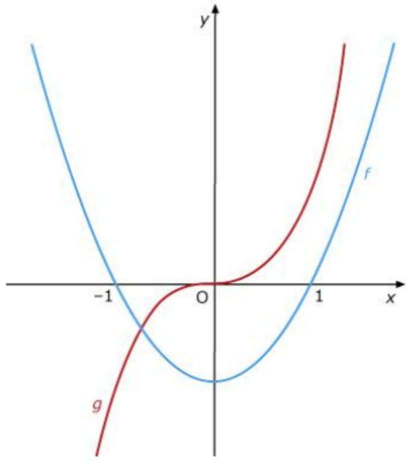
Resultados (Aluno 2 - A2)

Figura 4 - Alínea 2 da tarefa C

2. Na figura estão representados partes dos gráficos de duas funções f e g de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^3$.

Indica qual das afirmações seguinte é falsa, **justificando** a tua escolha.

(A) A função g é bijetiva.
(B) A restrição de f a $[0, +\infty[$ é uma função injetiva.
(C) As funções f e g são sobrejetivas.
(D) Apenas a função g é injetiva.



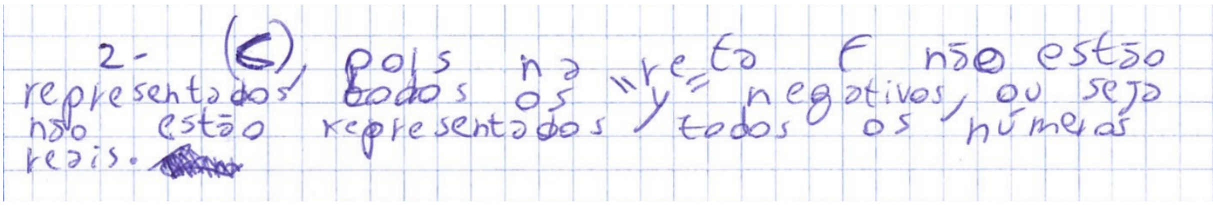
Na alínea 2 da tarefa C, era pedido aos alunos que indicassem qual das afirmações estaria incorreta e que justificasse a sua opção. Com isto, era pretendido que os alunos mobilizassem os conteúdos aprendidos previamente, acerca da injetividade e sobrejetividade, e usassem terminologia matemática adequada.

Em particular, esperava-se que os alunos entendessem, e demonstrassem esse entendimento por escrito, que se f fosse uma função sobrejetiva, então todo o elemento do seu contradomínio seria, obrigatoriamente, imagem de algum objeto do domínio. O aluno poderia utilizar linguagem simbólica (preferencialmente) ou linguagem corrente, desde que os termos utilizados esteja cientificamente corretos. Um exemplo de uma resolução poderia ser a seguinte:

A função não é sobrejetiva uma vez que $D'_f = [-1, +\infty[$ *e, portanto,* $-2 \notin D'_f$ *pelo que não existem nenhum objeto do domínio cuja imagem seja* -2.

Ou, simplesmente: $-2 \in B\ \nexists x \in D_f : f(x) = -2$.

Figura SEQ Figura * ARABIC 5 – Resolução



Analisando a resolução do aluno, podemos notar utilização de terminologia incorreta. Ainda que o aluno demonstre perceber que existem elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum objeto do domínio, i.e, não é sobrejetiva, mostrou dificuldades na transposição do seu raciocínio para o papel, a par de um certo desconhecimento.

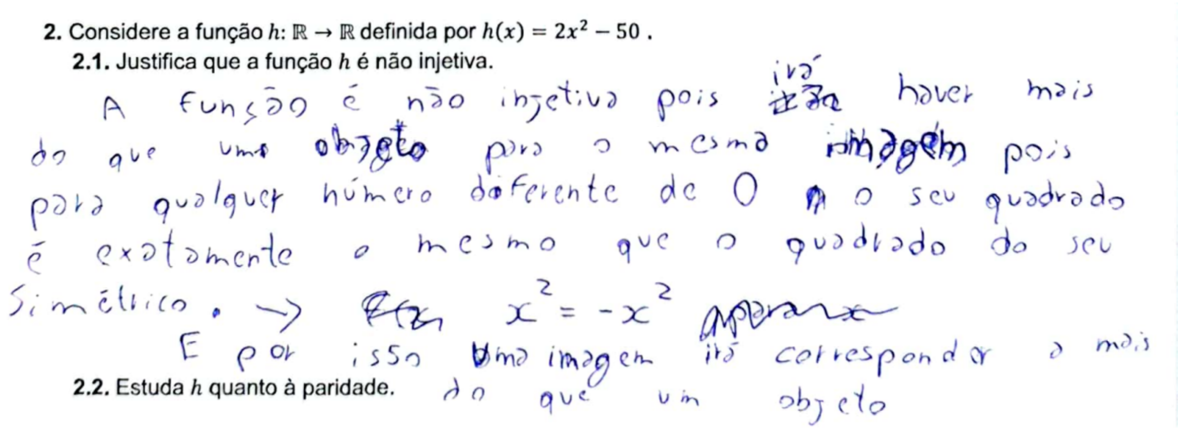
Assim, relativamente aos critérios da Tabela 4, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis.

<u>Clareza (N1):</u> O vocabulário é incorreto ou incompreensível. As representações são inadequadas (evidente na utilização de "todos os y").
<u>Rigor e Lógica (N1):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias. Contudo, não aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouca fluência nos mesmos.
<u>Fundamentação e conhecimento (N1):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto. Tal é evidente, por exemplo, quando o aluno denomina o gráfico cartesiano da função f como sendo uma reta, o que matematicamente não está correto uma vez que a sua representação gráfica é uma parábola.

Relativamente a esta tarefa, o seu feedback foi por escrito e submetido no classroom, num momento posterior à aula da sua realização. No feedback, explico que f não é uma reta e sim uma função. Explico ainda que a representação gráfica da função f é uma parábola e que uma reta é a representação gráfica de funções do tipo $y = mx + b$. Incentivo ainda a utilização da terminologia relativa a funções, i.e, utilizar "imagens" ao invés de "todos os y".

Na questão aula, foram colocadas questões que trabalhassem os mesmos conteúdos que a anterior de forma a verificar, ou não, o desenvolvimento da escrita matemática e uma melhor compreensão dos conteúdos lecionados até à data.

Figura SEQ Figura * ARABIC 6 – Alínea 2.1 + Resolução da questão aula



2. Considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x^2 - 50$.

2.1. Justifica que a função h é não injetiva.

A função é não injetiva pois irá haver mais do que uma objeto para o mesmo imagem pois para qualquer número diferente de 0 o seu quadrado é exatamente o mesmo que o quadrado do seu simétrico. → $x^2 = -x^2$

E por isso uma imagem irá corresponder a mais do que um objeto

2.2. Estuda h quanto à paridade.

Ainda que não seja tão evidente a diferença entre a escrita matemática utilizada em ambas as questões, como nos resultados evidenciados pelo aluno anterior, é possível notar, pelo menos, uma mudança na utilização dos termos matemáticos para representar elementos. O aluno utiliza a palavra "objeto" e "imagem" apesar de ainda sentir a necessidade de representar o seu raciocínio com linguagem corrente ao invés de linguagem simbólica, algo que tenho incentivado, mas sem sucesso. Desta forma, considero que os níveis de desempenho nos critérios, anteriormente definidos, são os seguintes:

<u>Clareza (N3):</u> As ideias são precisas, assim como o vocabulário utilizado. O aluno recorre a representações adequadas.

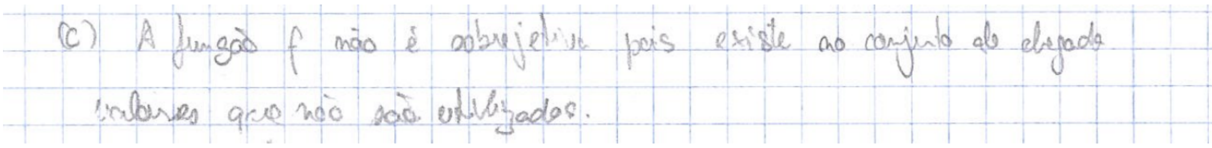
<u>Rigor e Lógica (N3):</u> Na resolução, notemos que o aluno se esqueceu da utilização de parêntesis. Onde está $x^2 = -x^2$ deveria estar $x^2 = (-x)^2$. Contudo, vemos que é clara a intenção do aluno, pelo resto da sua resolução, uma vez que fala de objetos simétricos terem a mesma imagem. Assim, ainda que não estando completamente correto do ponto de vista da escrita matemática, considero que o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias, aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando fluência.

<u>Fundamentação e conhecimento (N3):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias e domina aspetos importantes sobre o assunto.

Antes de avançarmos para os resultados seguintes, podemos fazer uma breve comparação entre os registos escritos evidenciados pelos alunos anteriormente mencionados. Inicialmente, apresentaram os mesmos níveis quanto aos critérios de desempenho, mas, na última tarefa, encontravam-se em níveis distintos o que não invalida o facto de ter existido um desenvolvimento na escrita matemática destes alunos.

Resultados (Aluno 3 – A3)

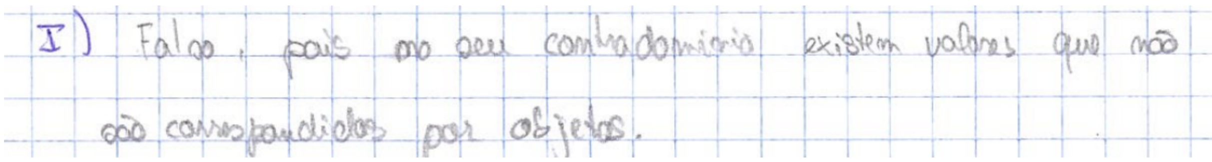
Figura 7 - Resolução


(c) A função f não é sobrejetiva pois existe no conjunto de chegada valores que não são utilizados.

Consideremos novamente o enunciado da figura 4. Este aluno, por sua vez, mostra-se pouco claro na sua resposta. Durante a aula, pedi que não apagasse o que escreveu, mas questionei-o "os valores não são utilizados? Em quê? Para quê? Qual a importância disso para verificar que é, ou não, sobrejetiva?".

Ainda na mesma tarefa, o aluno apresentou a seguinte resolução, na alínea 3 I, cujo objetivo era de os alunos justificarem o valor lógico da afirmação "a função g é sobrejetiva".

Figura SEQ Figura * ARABIC 8 - Resolução da alínea 3 I do aluno A3


I) Falso, pois no seu contradomínio existem valores que não são correspondidos por objetos.

Podemos verificar que o aluno mostrou ter dificuldades em distinguir contradomínio e conjunto de chegada e a sua importância na demonstração de sobrejetividade. Acrescentou, como não havia feito anteriormente, que há uma necessidade de haver elementos correspondidos por outros (o correto seria elementos do conjunto de chegada serem correspondência única de elementos do conjunto de partida) e não apenas "serem utilizados". Contudo, mostrou dificuldades em mobilizar esses mesmos conhecimentos, visíveis na utilização de contradomínio ao invés de conjunto de chegada.

Assim, relativamente aos critérios da Tabela 4, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis.

<u>Clareza (N2):</u> As ideias são precisas, mas o aluno utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível. O aluno recorre a representações pouco adequadas.

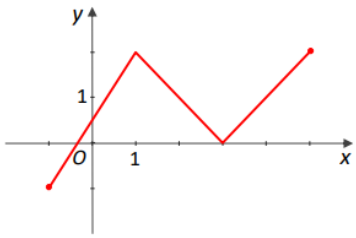
<u>Rigor e Lógica (N1):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias. Contudo, não aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouca fluência nos mesmos.

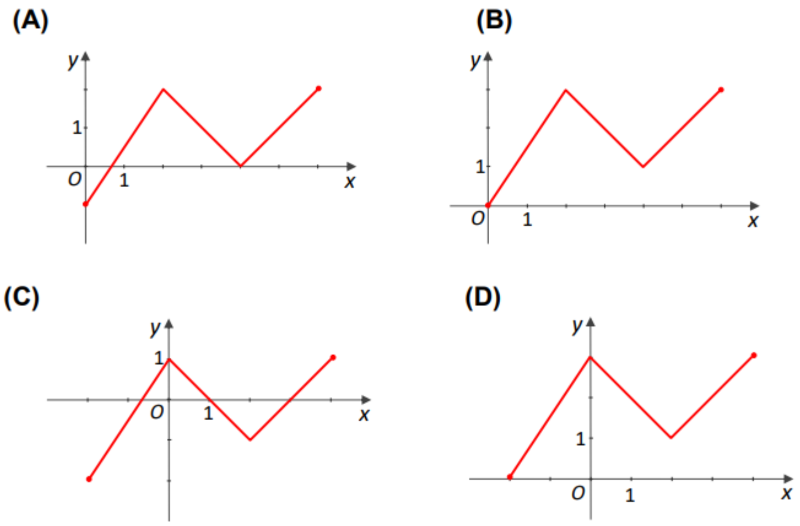
<u>Fundamentação e conhecimento (N1):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto.

A tarefa E, realizada duas aulas depois, por outro lado, trabalhava conteúdos distintos. No entanto, é possível notar desenvolvimento na escrita matemática do aluno.

Figura SEQ Figura * ARABIC 9 - Enunciado da tarefa E

1. Seja f a função cujo gráfico cartesiano está totalmente representado na figura ao lado.
Seja h a função definida por $h(x) = f(x+1) - 1$.
Indica, justificando, em qual das opções seguintes pode estar representada o gráfico cartesiano da função h?



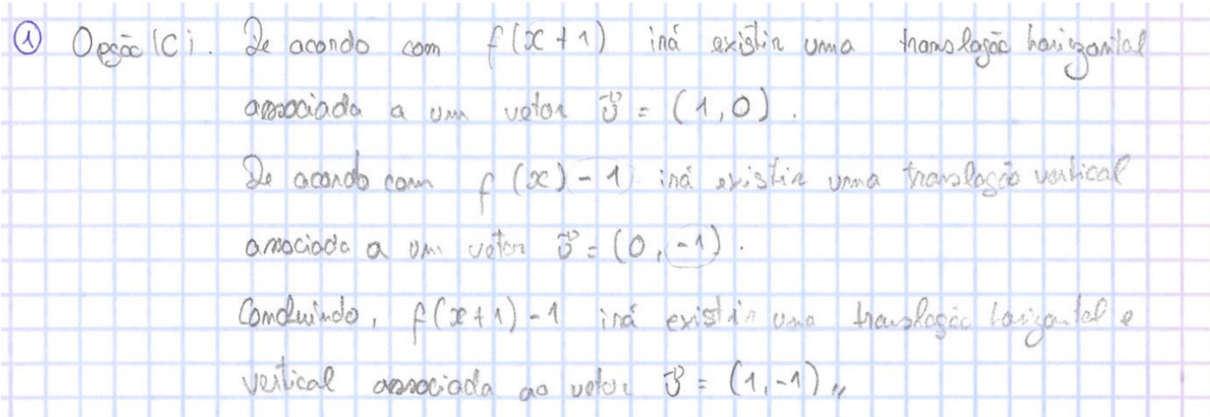


Nesta questão, era pedido aos alunos que indicassem as transformações que se devem aplicar ao **gráfico** cartesiano de uma função f de modo que o resultado seja o gráfico cartesiano de uma outra função h. Com isto, era pretendido que os alunos mobilizassem os conteúdos aprendidos previamente e usassem terminologia matemática adequada.

Neste exemplo, em particular, esperava-se que os alunos entendessem, e demonstrassem esse entendimento por escrito, que $f_1(x) = f(x+1)$ indica que o gráfico cartesiano da função f sofre uma translação horizontal associada ao vetor $(-1, 0)$, que $f_2(x) = f(x+1) - 1$ mostra que o gráfico cartesiano de $f_1(x)$ sofreu uma translação vertical associada ao vetor $(0, -1)$. Um exemplo de uma resolução poderia ser a seguinte:

O gráfico cartesiano da função h é imagem do gráfico cartesiano da função f pela translação horizontal associada ao vetor $(-\ 1,\ 0)$, *seguida de uma translação vertical associada ao vetor* $(0,\ \ -\ 1)$.

Figura 10 – Resolução da alínea 1 da tarefa E pelo aluno A3

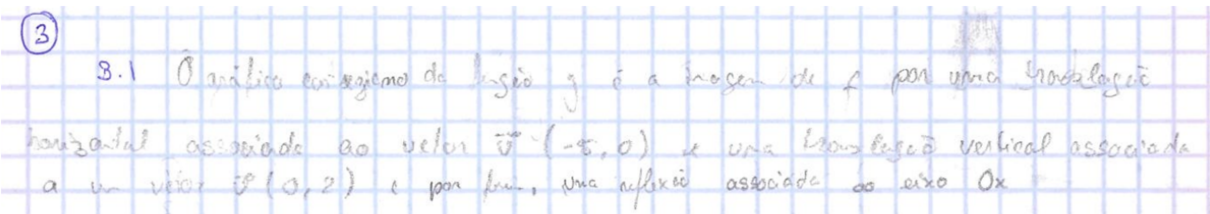

1 Opção (C). De acordo com $f(x+1)$ irá existir uma translação horizontal associada a um vetor $\vec{v}=(1,0)$.
De acordo com $f(x)-1$ irá existir uma translação vertical associada a um vetor $\vec{v}=(0,-1)$.
Concluindo, $f(x+1)-1$ irá existir uma translação horizontal e vertical associada ao vetor $\vec{v}=(1,-1)$.

Nesta resolução, percebemos que o aluno é mais rigoroso na escrita do seu pensamento, em comparação com as tarefas anteriores, ainda que os temas trabalhados sejam distintos.

Contudo, num momento durante a aula, questionei o aluno sobre "o que é que se mexe? Irá haver uma translação relativamente a quê?". Após feedback, o aluno ficou a entender a necessidade de dizer que o gráfico cartesiano das funções são imagens de gráficos cartesianos de outras funções através transformações, e não a função em si.

Na mesma tarefa, foi pedido aos alunos que indicassem as transformações geométricas que se devem aplicar ao **gráfico** cartesiano de uma função f de modo que o resultado seja o gráfico cartesiano de uma outra função g (figura 1).

Figura 11 – Resolução da alínea 3.1 da tarefa E


3
3.1 O gráfico cartesiano da função g é a imagem de f por uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(-5,0)$ e uma translação vertical associada a um vetor $\vec{v}(0,2)$ e por fim, uma reflexão associada ao eixo Ox

Note-se que, na mesma tarefa, o aluno alterou a sua escrita para uma mais rigorosa e correta. Nesta alínea, já refere que o gráfico cartesiano da função g é imagem do gráfico cartesiano de f, ainda que não utilizando as mesmas palavras. Isto demonstra não só a importância de problemas para incentivar a escrita matemática como também a importância de feedback para o desenvolvimento do pensamento do aluno.

De modo geral, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis, tendo em conta as duas resoluções e a melhoria evidenciada na figura 11.

Clareza (N3): As ideias são precisas, assim como o vocabulário utilizado. O aluno recorre a representações adequadas.

Rigor e Lógica (N3): O aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias.

Fundamentação e conhecimento (N2): O aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias. O aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes sobre o assunto.

Resultados (Aluno 4 – A4)

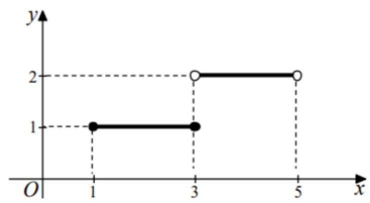
Figura SEQ Figura * ARABIC 12 – Alínea 3 da tarefa C

3. Considere as seguintes funções:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -3x + 4$
- $g: \{-1,\ 2,\ 3,\ 4\} \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, definida pela tabela:

x	-1	2	3	4
$g(x)$	5	2	6	1

- $h: [1,\ 5[\to \{1,\ 2\}$ cujo gráfico se representa na figura seguinte:



Indique, **justificando**, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações.

I) A função g é sobrejetiva

II) A função h é bijetiva

III) A função f é injetiva

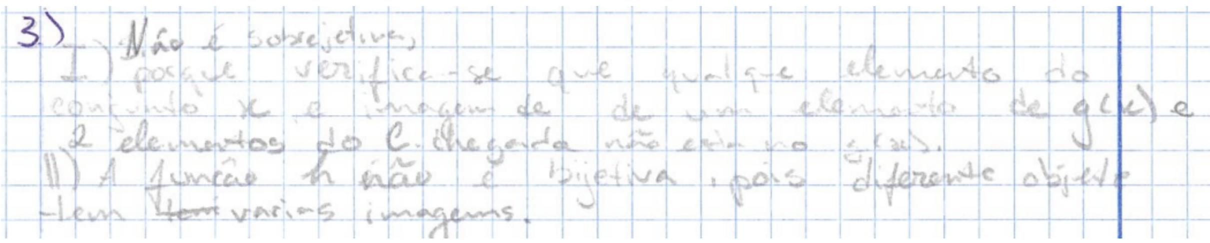
Na alínea 3 da tarefa C, pretendia-se que os alunos analisassem as diferentes funções, representadas também de formas distintas, e que justificassem o valor lógico das mesmas. O objetivo principal da tarefa era os alunos compreenderem e aplicarem bem o conceito de função injetiva e sobrejetiva, mobilizando os conhecimentos adquiridos de forma rigorosa e cientificamente correta.

Um exemplo de uma resolução da alínea 3 I poderia ser a seguinte:

A função g não é sobrejetiva uma vez que $D'_f = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$ *e, portanto,* $3,\ 4 \notin D'_f$ *pelo que não existe nenhum objeto do domínio cuja imagem seja* 3 *ou* 4.

Ou, simplesmente: $3 \in B\ \ \nexists x \in D_f : g(x) = 3$.

Figura SEQ Figura * ARABIC 13 - Resolução



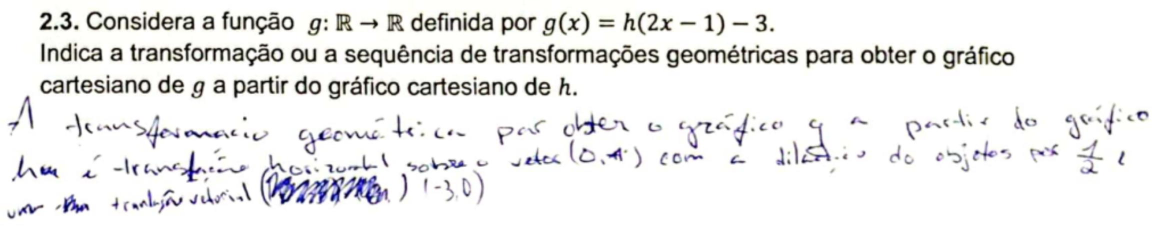
Analisando a resolução do aluno, podemos notar utilização de terminologia incorreta. O aluno usa "conjunto x" e "imagem de um elemento de $g(x)$" para referir-se a "conjunto dos objetos ou domínio" e "imagem de um elemento do contradomínio ou conjunto das imagens", respetivamente. Desta forma, ainda que consiga compreender a intenção do aluno, i.e. demonstrou perceber que existem elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum objeto do domínio, mostrou dificuldades na sua escrita, não sendo esta, de todo, criteriosa.

Assim, relativamente aos critérios da Tabela 4 considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis.

<u>Clareza (N1):</u> O vocabulário é incorreto ou incompreensível.
<u>Rigor e Lógica (N1):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias. Contudo, não aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouca fluência nos mesmos.
<u>Fundamentação e conhecimento (N2):</u> O aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias. O aluno nem sempre revela domínio dos conteúdos.

Relativamente a esta tarefa, o seu feedback foi por escrito e submetido no Classroom, num momento posterior à aula da sua realização. No feedback, explico a importância da utilização de terminologia correta e clara e que, ainda que se entenda o que o aluno quer explicar, a mesma não é matematicamente correta.

Figura SEQ Figura * ARABIC 14 – Alínea 2.3 + Resolução da questão aula



2.3. Considera a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(2x-1) - 3$.
Indica a transformação ou a sequência de transformações geométricas para obter o gráfico cartesiano de g a partir do gráfico cartesiano de h.

A transformação geométrica par obter o gráfico g a partir do gráfico h é transformação horizontal sobre o vetor (0,1) com a dilatação do objetos por $\frac{1}{2}$ e uma translação vetorial (~~[illegible]~~) (-3,0)

Ainda que o conteúdo trabalhado em ambas as questões seja diferente, podemos notar que a abordagem do aluno quanto à escrita de respostas é distinta. Este aluno não esteve presente na aula em que foi realizada a tarefa E, que trabalhava as transformações do gráfico de funções. Ainda assim, podemos comparar a sua resolução com as dos colegas anteriores, que necessitaram feedback e resolver mais problemas para vermos melhoria na escrita, e notar que os níveis de desempenho são iguais aos demais colegas. O aluno entende as transformações que ocorrem ao gráfico cartesiano de g, no entanto, não nota que a ordem das transformações origina gráficos cartesianos distintos e que, por isso, a primeira transformação a ocorrer deveria a contração horizontal de coeficiente ½ e posteriormente ocorre a translação associada ao vetor $(1, \ -3)$, além de utilizar o termo "translação vertical de vetor $(-\ 3, 0)$ ", o que representa uma translação horizontal.

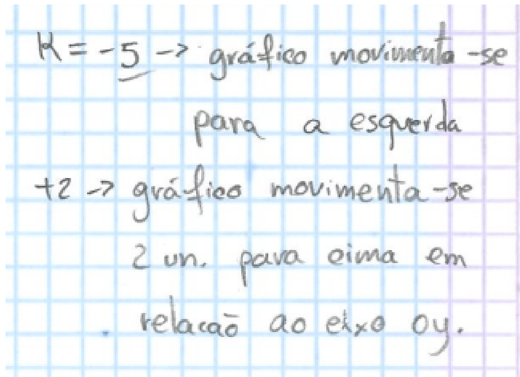
De modo geral, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis:

<u>Clareza (N2):</u> As ideias são precisas, mas o aluno utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível. O aluno recorre a representações pouco adequadas.
<u>Rigor e Lógica (N2):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.
<u>Fundamentação e conhecimento (N2):</u> O aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias. O aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes sobre o assunto.

Resultados (Aluno 5 – A5)

Consideremos, como ponto de partida para este aluno, o enunciado da figura 1 e a resolução do mesmo:

Figura SEQ Figura * ARABIC 15 – Resolução da alinea 3.1 da tarefa E

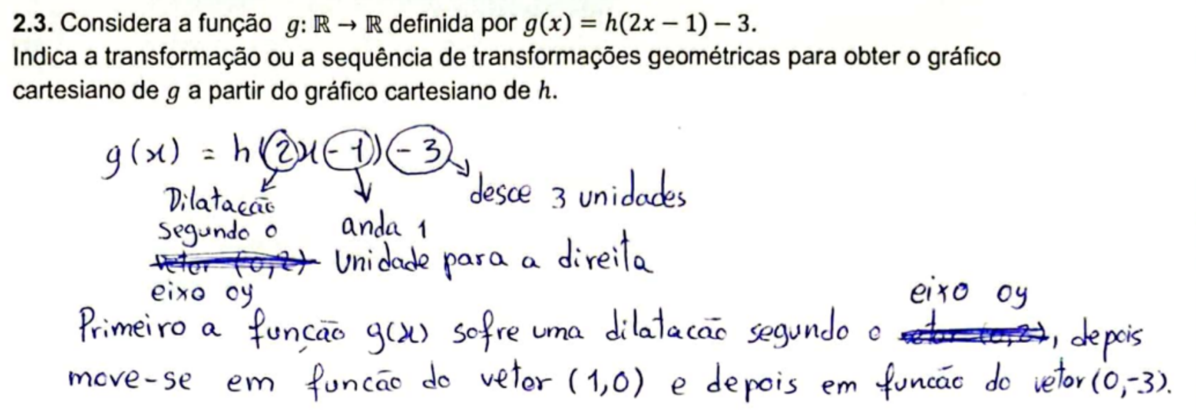


A realização da tarefa E foi a pares, tendo o Aluno 5 realizado a mesma com o Aluno 1. Assim, podemos ver que a escrita matemática de ambos apresentam as mesmas características, sendo o feedback oferecido ao Aluno 1 foi o mesmo para o Aluno 5.

<u>Clareza (N1):</u> O vocabulário é incorreto ou incompreensível. As representações são inadequadas (evidente na utilização de “+ 2→”).
<u>Rigor e Lógica (N1):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias. Contudo, não aplica corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouca fluência nos mesmos.
<u>Fundamentação e conhecimento (N1):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto.

Na última tarefa, foi apresentada uma questão semelhante à anterior. O enunciado e resolução da mesma estão na figura abaixo.

Figura SEQ Figura * ARABIC 16 – Enunciado + Resolução



2.3. Considera a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(2x - 1) - 3$.
Indica a transformação ou a sequência de transformações geométricas para obter o gráfico cartesiano de g a partir do gráfico cartesiano de h.

$g(x) = h(2x(-1))(-3)$

Dilatação segundo o ~~vetor (0,2)~~ eixo oy

anda 1 Unidade para a direita

desce 3 unidades

Primeiro a função g(x) sofre uma dilatação segundo o eixo oy ~~vetor (0,2)~~, depois move-se em função do vetor (1,0) e depois em função do vetor (0,-3).

Apesar da tarefa E ter sido realizada a pares e os alunos 1 e 5 terem apresentado a mesma resolução, foi a última tarefa que me permitiu compreender como os alunos desenvolveram a sua maneira de escrever matemática e a diferença entre os dois.

A resolução do Aluno 5 permite-nos observar a sua tentativa de utilizar a terminologia correta, em vez de utilizar as palavras "esquerda" e "direita" o aluno utiliza termos como "translação vertical/horizontal" e "dilatação". No entanto, é visível que ainda pouco domina o tema das transformações do gráfico de funções. O Aluno indica que o gráfico cartesiano de $f(ax)$, $a > 1$ é imagem do gráfico de $f(x)$ como sendo uma dilatação de eixo Oy quando esta transformação é na verdade uma contração de coeficiente $\frac{1}{a}$. O Aluno, portanto, não possui conhecimentos suficientes que o façam distinguir entre dilatação/contração e reflexões de eixos, acabando por misturar todos os conceitos.

Da mesma forma, o Aluno indica que a função $g(x)$ sofre uma dilatação, não mencionando o seu gráfico como sendo imagem do original, o que também demonstra dificuldades em compreender a base e o conceito do tema abordado.

Desta forma, relativamente aos critérios da Tabela 4, considero que a escrita evidenciada nesta resolução apresenta os seguintes níveis.

<u>Clareza (N2):</u> As ideias são precisas, mas o aluno utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível. O aluno recorre a representações pouco adequadas.

<u>Rigor e Lógica (N2):</u> O aluno revela algum raciocínio e coerência nos seus registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias.

<u>Fundamentação e conhecimento (N1):</u> O aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa, não revelando dominar aspetos importantes sobre o assunto.

Analisados estes cinco resultados podemos sintetizá-los na Tabela 5.

Tabela 5 - Resultados do estudo

	Clareza	Rigor e Lógica	Fundamentação e conhecimento
A1 (Antes)	N1	N1	N1
A1 (Depois)	N3	N3	N2
A2 (Antes)	N1	N1	N1
A2 (Depois)	N3	N3	N3
A3 (Antes)	N2	N1	N1
A3 (Depois)	N3	N3	N2
A4 (Antes)	N1	N1	N2
A4 (Depois)	N2	N2	N2
A5 (Antes)	N1	N1	N1
A5 (Depois)	N2	N2	N1

Relativamente ao critério rigor e lógica, notemos que os alunos iniciaram esta intervenção no menor nível possível, mostrando que não aplicam corretamente conceitos matemáticos, demonstrando pouco ou nenhuma fluência e com as ideias pouco encadeadas. Dos cinco resultados, três demonstraram nível máximo no que toca a este critério e os restantes dois apresentaram uma subida menor, para o nível 2. É neste critério que se nota um maior desenvolvimento na escrita dos alunos. Nos restantes critérios, vemos que todos os alunos aumentaram o nível no que toca à sua escrita matemática e as suas características, salvo exceção dos alunos A4 e A5 que mantiveram o nível quanto à fundamentação e conhecimento.

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E REFLEXÃO FINAL

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo realizado e principais conclusões obtidas, dando resposta às questões de investigação, e por fim uma reflexão do trabalho que desenvolvi.

Síntese do estudo

Este estudo foi realizado no âmbito da minha prática de ensino supervisionada e teve como foco principal o estudo e o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos, na aprendizagem das Funções, numa turma do 10.º ano de escolaridade, cuja intervenção letiva contemplou um total de 9 aulas de 90 minutos, tendo sido iniciada a 27 de fevereiro e terminada a 17 de março.

Um dos principais objetivos deste estudo foi compreender como os alunos do 10.º ano de escolaridade desenvolvem a escrita matemática na aprendizagem de Funções, utilizando resolução de problemas e estratégias que lhes permitam praticar e analisar os seus registos escritos.

Utilizei a metodologia de investigação qualitativa e interpretativa e posicionei-me como observadora participante, tendo sido a análise de dados para este trabalho decorrente dos conteúdos das resoluções das tarefas, e de outros registos pertinentes nas restantes aulas.

Para este estudo, e com os objetivos por mim definidos, elaborei duas questões de investigação, cujos resultados estão sintetizados a seguir.

Que escrita matemática é evidenciada pelos alunos na aprendizagem de funções?

Inicialmente, os alunos evidenciaram uma escrita matemática que carecia de clareza, rigor, lógica e fundamentação demonstrado pelos baixos níveis relativamente aos critérios de desempenho elaborados na Tabela 4. Os alunos utilizavam terminologia incorreta e relacionavam conceitos de forma incoerente e pouco ou nada precisa.

À medida que a intervenção foi decorrendo, os alunos, de forma progressiva e individual, foram aumentando os níveis de desempenho. Este desenvolvimento foi gradual em alguns alunos, que mostraram evolução de um nível em apenas um ou dois critérios. Noutros casos, os alunos apresentaram no fim da intervenção níveis máximos nos critérios de elaborados quando estes eram os menores possíveis inicialmente. Nestes casos, observou-se uma progressão notável na precisão e na estruturação das suas argumentações, indicando um desenvolvimento na capacidade de comunicar ideias matemáticas de maneira mais efetiva.

Em que medida a metodologia da resolução de problemas contribui na prática da escrita matemática dos alunos?

Ao longo da intervenção, com a constante resolução de questões que incentivavam os alunos a escrever, a raciocinar, as justificar e transmitir o seu pensamento para o papel, aumentaram a utilização de terminologia matemática adequada, mostrando-se mais confortáveis com a linguagem específica da disciplina assim como uma maior habilidade em organizar os seus pensamentos de forma clara e coerente ao escreverem respostas matemáticas.

Os resultados evidenciam uma melhoria na escrita matemática dos alunos, pela análise da sua completude, fundamentação, explicitação e o rigor das suas resoluções, demonstrando que o método de resolução de problemas contribui para o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos.

Os resultados obtidos são deveras importantes uma vez que oferecem destaque à evolução dos estudantes no uso adequado da linguagem matemática (ainda que não simbólica) para expressar suas ideias e solucionar problemas.

Reflexão final

A realização deste estudo sobre o desenvolvimento da escrita matemática foi extremamente gratificante e enriquecedora. Observar o progresso dos alunos ao longo do tempo, à medida que recebiam feedback construtivo e o aplicavam nos seus registos escritos, foi verdadeiramente satisfatório. Ver os alunos a ficar progressivamente mais proficientes na escrita matemática, na comunicação das suas ideias e desenvolverem habilidades fundamentais, como clareza, rigor, lógica e fundamentação, foi uma demonstração do poder do feedback adequado e na contínua resolução de problemas.

A importância deste estudo não pode ser subestimada. A escrita matemática é uma habilidade essencial para os alunos, pois capacita os alunos a expressar e a comunicar as suas ideias e raciocínios de forma precisa e coerente. Através da escrita matemática, eles aprendem a organizar os seus pensamentos e a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Ao fornecer feedback oportuno e individualizado, pude ajudar os alunos a identificar pontos fortes na escrita matemática e, ao mesmo tempo, apontar áreas de melhoria. Esta abordagem permitiu que entendessem onde estavam a cometer erros e como poderiam melhorar a sua escrita.

No entanto, é importante ressaltar que o feedback não deve ser excessivo, nem foi. A abordagem sintética adotada neste estudo, à medida que forneci conselhos simples, direcionados e individualizados, permitiu que os alunos assimilassem facilmente as orientações e as aplicassem imediatamente. Evitando críticas negativas ou genéricas, eles foram incentivados a melhorar, mantendo a motivação e o entusiasmo.

Este estudo trouxe grande satisfação ao observar o progresso dos alunos e reforçou a importância de fornecer feedback adequado para promover o desenvolvimento contínuo dos alunos no desenvolvimento da escrita matemática.

Além do feedback, a resolução de problemas também desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da escrita matemática dos alunos, como verificado neste estudo. Através da prática de resolver problemas matemáticos, os alunos foram desafiados a aplicar os seus conhecimentos e habilidades, o que exigiu uma comunicação clara e eficaz por meio da escrita.

Através da resolução de problemas, os alunos tiveram a oportunidade de expressar as suas ideias matemáticas, justificar os seus raciocínios e fornecer argumentos fundamentados. A resolução de problemas estimulou a reflexão sobre os processos e estratégias utilizados, levando a uma maior consciência da necessidade de uma escrita matemática organizada, coerente, rigorosa e bem fundamentada. Além disso, a resolução de problemas proporcionou aos alunos a oportunidade de identificar lacunas na sua compreensão e aplicação de conceitos matemáticos. Ao escrever as suas resoluções, tiveram que enfrentar desafios de expressão e precisão, o que os levou a refinar a escrita matemática e a procurar maior clareza e rigor.

Nesse sentido, a resolução de problemas mostrou-se uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento da escrita matemática, uma vez que promoveu a prática constante e a aplicação dos conhecimentos adquiridos. Através dessa abordagem, os alunos puderam aprimorar a sua habilidade de comunicar os seus pensamentos e raciocínios matemáticos de forma clara e estruturada.

Em suma, a combinação do feedback construtivo com a prática da resolução de problemas proporcionou um ambiente propício para o aperfeiçoamento contínuo da escrita matemática dos alunos, podendo este desenvolvimento ser analisado no capítulo anterior, o que nos permite tirar conclusões positivas acerca das respostas às questões da investigação.

Efetivamente, verificou-se uma melhoria na escrita matemática dos alunos, consequência de uma contínua resolução de problemas matemáticos. Este desenvolvimento ocorreu de formas distintas, variando de aluno para aluno e de critérios de desempenho, sendo estes independentes dos restantes, i.e, os alunos mostraram diferente evoluções para os diferentes critérios de desempenho.

De um modo geral, o desenvolvimento da escrita matemática dos alunos pode vir a apresentar vantagens no seu desempenho académico futuro. A capacidade de comunicar ideias matemáticas de forma clara e coerente, como por exemplo explicar que o gráfico cartesiano de uma função g é a imagem do gráfico cartesiano de f por meio de transformações geométricas e não "a função g é a função f movendo-se para a direita/esquerda", além de fortalecer a compreensão individual do aluno, prepara-o para enfrentar desafios mais complexos uma vez que o faz melhorar na organização dos seus pensamentos.

Estas conclusões ressaltam a importância de incentivar e promover o desenvolvimento da escrita matemática como parte essencial do processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

Aprendizagens Essenciais (AE). (2017). Lisboa: Direção Geral da Educação.

Bogdan, R. (2003). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Canavarro Teixeira, A. P. (2003). *Práticas de ensino da matemática: Duas professoras, dois currículos.* Universidade de Lisboa.

Captivo, M. T. (2018). *O contributo do feedback escrito na aprendizagem matemática de alunos do 12.º ano de escolaridade.* Universidade de Lisboa.

Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 de março de 2016. http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica

Caseiro, C. C. F., & Gebran, R. A. (2010). *Avaliação formativa: Concepção, práticas e dificuldades. Nuances: Estudos sobre Educação*, 15(16). https://doi.org/10.14572/nuances.v15i16.181

Celestino, A. S. (2012). *Funcionalidade Da Avaliação Em Matemática No Ensino Médio*. Instituto de Educação da Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologia.

Coutinho, C. (2008). A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: Questões relativas à fidelidade e validade. *Educação Unisinos*, 12(1): 5-15.

Erickson, F. (1986). Qualitative Methods in Research on Teaching. In M. Wittrockk (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed., pp. 119-161). New York: MacMillan. Fernandes, D. (2020). Avaliação Formativa. Universidade de Lisboa. Instituto de Educação.

Fernandes, D. (2006). *Para uma teoria da avaliação formativa*. Revista Portuguesa de Educação, 19(2), pp. 21-50.

Fernandes, D. (2020). *Avaliação Formativa*. Universidade de Lisboa. Instituto de Educação.

NCTM. (2017). Princípios para a Ação Assegurar a todos o sucesso em matemática. APM.

Hoffman, B. V. S. (2012). *O uso de diferentes formas de comunicação em aulas de matemática no ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Brasil.

Martinho, M. H., & Rocha, H. (2018). A escrita matemática e a intuição em Geometria. *Educação e Matemática*, 149, 34-38. https://hdl.handle.net/1822/76008

Martinho, M. H., Manrique, A. L., & Lopes, J. (2020). A comunicação matemática escrita de futuras professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental envolvendo o pensamento algébrico. *Quadrante*, Vol. 29, N.º 2, 47-67

Martinho, M. H., & Martins, L. G. (2021). Strategies, difficulties, and written communication in solving a mathematical problem. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 35, n. 70, 903-936

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática - problemas actuais. *Quadrante*, *3*(1): 19-53.

ME (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação.

MEC. (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário. Lisboa: MEC.

Mónico, L., Alferes, V., Parreira, P., & Castro, P. A. (2017). A Observação Participante enquanto metodologia de investigação qualitativa. *CIAIQ 2017*, (3), 724-733. https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2017/article/view/1447

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.

Pantaleon, K. V., Juniati, D., Lukito, A., & Mandur, K. (2018). The written mathematical communication profile of prospective math teacher in mathematical proving. *Journal of*

Physics: Conference Series, 947, 012070. https://doi.org/10.1088/1742-6596/947/1/012070

Pedroso, J. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação (DGE).

Phillips, E., & Crespo, S. (1996). Developing written communication in mathematics through math penpal letters. *Learning of Mathematics*, 16(1), 15-22.

Pimm, D. (1987) *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge and Kegan Paul

Pinto, R. d. O., & Rocha, M. S. P. d. M. L. (2011). A avaliação formativa: Reflexões sobre o conceito no período de 1999 a 2009. *Estudos em Avaliação Educacional*, 22(50), 553. https://doi.org/10.18222/eae225020111970

Pires, M. V., Costa, E. A. da., & Leite, C. P. (2018). Contributos para análise da comunicação (matemática) escrita dos alunos. *Educação e Matemática*, 149-150, 28-32. http://hdl.handle.net/10198/18862

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. C. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355–377. https://doi.org/10.5212/praxeduc.v.7i2.0003

Santos, L., & Semana, S. (2014). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 65–87. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9557-z

Silva, M. C. N., & Buriasco, R. L. C. d. (2005). Análise da produção escrita em matemática: Algumas considerações. *Ciência & Educação*, 11(3), 499-512

ANEXOS

Anexo SEQ Anexo * ARABIC 1 – ficha A

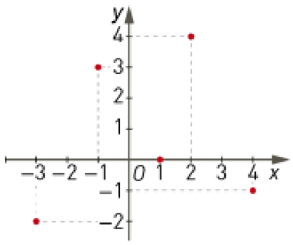
REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

FICHA DE TRABALHO **A**

1. Considere as funções f, g e h tais que:

- a função f encontra-se representada graficamente na figura;
- $G_g = \{(-3,5), (-1,2), (0,4), (1,-3), (2,-4), (4,6)\}$;
- h tem domínio $A = \{-3,-1,0,1,2,4\}$ e é tal que $h(x) = 2x - 4$.



1.1. Indique o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

1.2. Calcule:

a) $f(-3)+g(0)$ **b)** $f(1)-3f(2)$

c) $(g \times h)(1)$ **d)** $h(a)$, sabendo que $g(a)=2$.

2. Considere os conjuntos $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,4,9,16\}$

Seja *g* a função definida por: $G_g = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$.

2.1. Indique o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada de g.
2.2. Defina g por meio de uma expressão analítica.
2.3. Defina g através de um diagrama.

3. Considere os conjuntos $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{0,1,3,4\}$ e $C=\{-1,1,5,7\}$

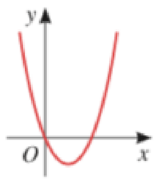
Sejam *f* e *g* funções tais que:

$$f: A \to B \qquad \text{e} \qquad g: B \to C$$
$$\quad x \to x^2 \qquad\qquad\quad x \to 2x-1$$

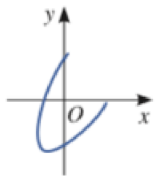
Determine o gráfico de cada uma das funções.

4. Indique qual das seguintes curvas representa o gráfico de uma função.

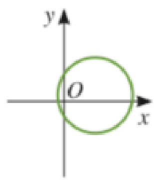
A.



B.



C.



5. Represente graficamente uma função f que satisfaça as seguintes condições:

- $D_f = [-2,5]$
- $D'_f = [-1,4]$
- $f(-2) > f(5)$
- $f(0) \times f(1) < 0$

6. Considere os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$.

6.1. O par ordenado $(\sqrt{2}, 1)$ pertence a $A \times B$? Justifique.
6.2. Represente em extensão $A \times B$.
6.3. Indique um elemento de $A^2 \times B^3$.

Anexo SEQ Anexo * ARABIC 2 – ficha B

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

FICHA DE TRABALHO **B**

1. Considere a função *f* de domínio IR definida analiticamente por $f(x)=x^2-2x$

1.1. Considere o conjunto $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Represente graficamente a restrição de *f* a *A*.

1.2. Indique o contradomínio de $f\,|_A$.

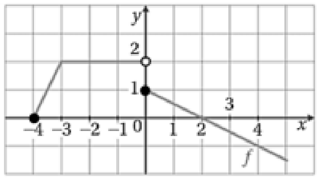
1.3. Represente por meio de uma tabela de $f\,|\{0,\ 2,\ 4\}$.

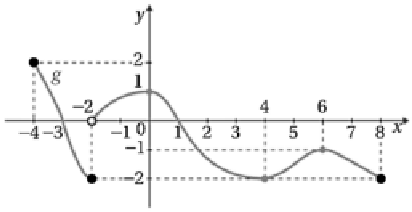
2. Caracterize cada uma das funções reais de variável real definidas por:

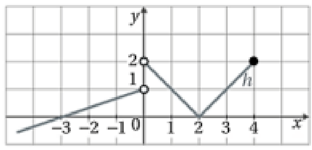
a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2-4}$ **b)** $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$ **c)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$

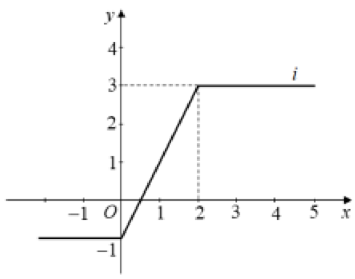
d) $f(x) = \frac{x+1}{x-x^2}$ **e)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2+4}$ **f)** $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$

3. Considere as funções f, g, h e i representadas nas figuras ao lado.









3.1. Indique o domínio, o contradomínio e os zeros de cada uma das funções.

3.2. Indique o conjunto-solução da equação $f(x) = 2$.

3.3. Indique os valores de *x*, tal que $g(x) = -2$.

3.4. Indique os valores de k para os quais a equação $i(x) = k$ é impossível.

3.5. Resolva, em IR, cada uma das condições:

- $h(x) \leq 1$
- $0 \leq h(x) < 2$
- $-1 < i(x) \leq 3$

3.6. Para que valores de k a equação $g(x) = k$ tem o maior número de soluções?

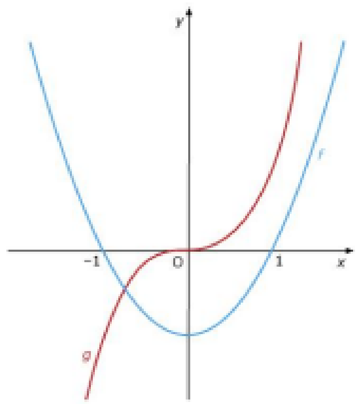
3.7. Determine para que valores de x se tem:

- $f(x) \geq 0$
- $g(x) < 0$
- $h(x) \leq 0$

Anexo SEQ Anexo * ARABIC 3 – Ficha C

1. Esboce o gráfico de uma função f, real de variável real, tal que:
- Tenha domínio $[0, 3[$;
- Tenha contradomínio $]-1{,}5[$;
- Não seja injetiva.

2. Na figura estão representados partes dos gráficos de duas funções f e g de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^3$.



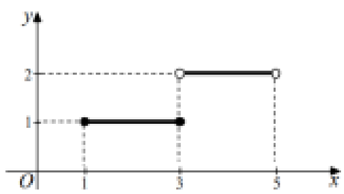
Indica qual das afirmações seguinte é falsa, **justificando** a tua escolha.

(A) A função g é bijetiva.
(B) A restrição de f a $[0, +\infty[$ é uma função injetiva.
(C) As funções f e g são sobrejetivas.
(D) Apenas a função g é injetiva.

3. Considere as seguintes funções:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -3x + 4$
- $g: \{-1,\ 2,\ 3,\ 4\} \rightarrow \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, definida pela tabela:

x	-1	2	3	4
$g(x)$	5	2	6	1

- $h: [1,\ 5[\rightarrow \{1,\ 2\}$ cujo gráfico se representa na figura seguinte:



Indique, **justificando**, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações.

I) A função g é sobrejetiva

II) A função h é bijetiva

III) A função f é injetiva

4. Considere os conjuntos:
- $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$
- $B = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$
- $C = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

e as funções f e g tais que:
- $f: A \rightarrow C$, definida por $f(x) = x - 1$
- $g: A \rightarrow B$, definida por $g(x) = x + 1$

Mostre que:

a) a função g é bijetiva.

b) a função f não é sobrejetiva

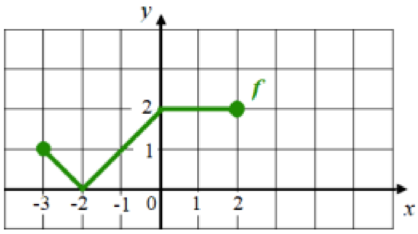
Anexo 4 – Ficha D

MATEMÁTICA A – 10.º ANO

FICHA DE TRABALHO **D**

TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS

1. Na figura está representado um referencial ortonormado xOy, e nele está a representação gráfica da função f, real de variável real, de domínio $[-3,2]$.

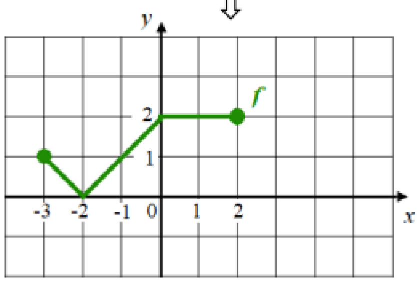


1.1. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica das funções do tipo $y = f(x)+k$, para o valor de k indicado:

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

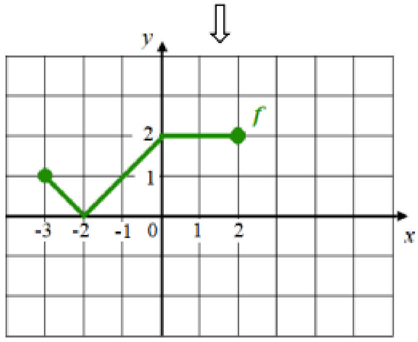
x	$g(x)=f(x)+1$
-3	
-2	
0	
2	

⇩



x	$h(x)=f(x)-3$
-3	
-2	
0	
2	

⇩



Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões altera-se / não se altera):

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x)=f(x)+1$			
$h(x)=f(x)-3$			

Com a variação do parâmetro k, e em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio das funções g e h ________________;
- o contradomínio das funções g e h ________________;

- os zeros das funções g e h _______________ .

CONCLUSÕES:

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + k$, é imagem do gráfico da função f pela **translação** _______________ (vertical / horizontal) associada ao vetor $\vec{u} = (\quad , \quad)$.

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(\quad , \quad) \in G_g$.

Em relação ao gráfico cartesiano de f, verifica-se também um deslocamento _______________________ (vertical / horizontal) de ______ unidades para:

- _____________ (a direita/a esquerda/cima/baixo), se $k > 0$;
- _____________ (a direita/a esquerda/cima/baixo), se $k < 0$.

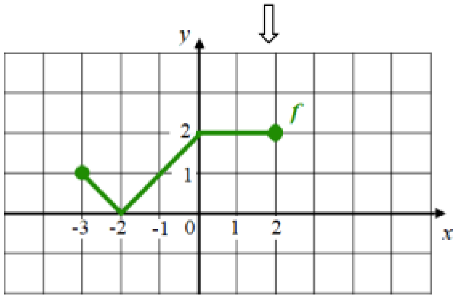
1.2. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica das funções do tipo $y = f(x-k)$, para o valor de k indicado:

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

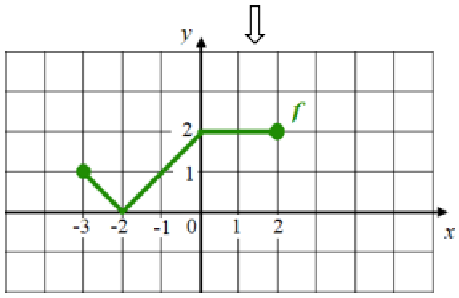
x	$g(x) = f(x+1)$
-4	
-3	
-1	
1	

x	$h(x) = f(x-2)$
-1	
0	
2	
4	

$\Downarrow$



$\Downarrow$



Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões altera-se / não se altera):

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x) = f(x+1)$			
$h(x) = f(x-2)$			

Com a variação do parâmetro k, e em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio das funções g e h _______________ ;

- o contradomínio das funções g e h ________________;
- os zeros das funções g e h ________________ .

CONCLUSÕES:
O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{x+k : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(x-k)$, é imagem do gráfico da função f pela **translação** ________________ (vertical / horizontal) associada ao vetor $\vec{u} = (\quad , \quad)$.

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(\quad , \quad) \in G_g$.

Em relação ao gráfico cartesiano de f, verifica-se também um deslocamento ________________________ (vertical / horizontal) de _______ unidades para:

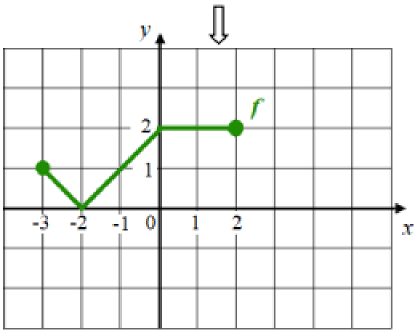
- ______________ (a direita/a esquerda/cima/baixo), se $k > 0$;
- ______________ (a direita/a esquerda/cima/baixo), se $k < 0$.

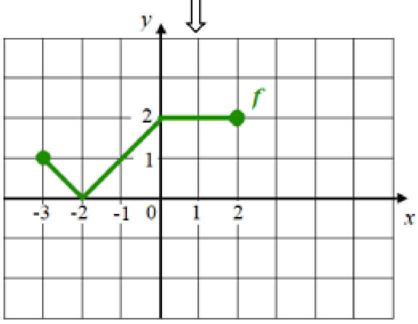
1.3. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica das funções do tipo $y = a \cdot f(x)$, $a > 0$, para o valor de a indicado:

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

x	$g(x) = 2f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

x	$h(x) = \frac{1}{2}f(x)$
-3	
-2	
0	
2	





Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões altera-se / não se altera:

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x) = 2f(x)$			
$h(x) = \frac{1}{2}f(x)$			

Com a variação do parâmetro a, e em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio das funções g e h ________________ ;
- o contradomínio das funções g e h ________________;
- os zeros das funções g e h ________________ .

CONCLUSÕES:
O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = a \cdot f(x)$, $a > 0$, é imagem do gráfico da função f por uma:

- **contração** ________________ (vertical / horizontal) de coeficiente a se $0 < a < 1$;
- **dilatação** ________________ (vertical / horizontal) de coeficiente a se $a > 1$.

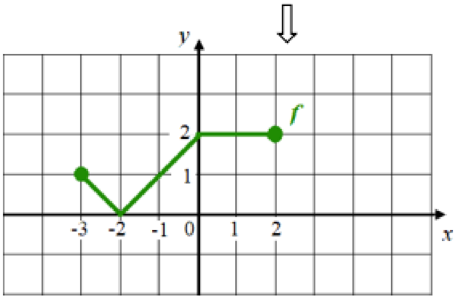
Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(\quad , \quad) \in G_g$.

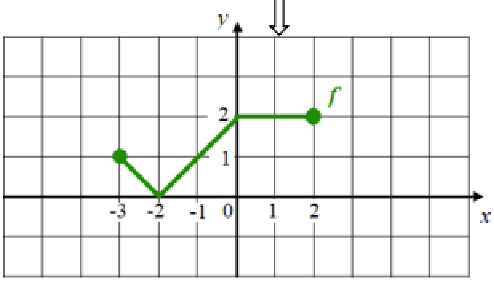
1.4. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica das funções do tipo $y = f(a \cdot x)$, $a > 0$, para o valor de a indicado:

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

x	$g(x) = f(2x)$
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	
1	

x	$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
-6	
-4	
0	
4	





Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões altera-se / não se altera:

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x) = f(2x)$			
$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$			

Com a variação do parâmetro a, e em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio das funções g e h ________________ ;
- o contradomínio das funções g e h ________________;

- os zeros das funções g e h ________________ .

CONCLUSÕES:

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(a \cdot x)$, $a > 0$, é imagem do gráfico da função f por uma:

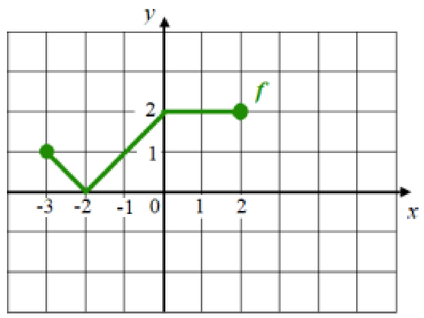
- **dilatação** ________________ (vertical / horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $0 < a < 1$;
- **contração** ________________ (vertical / horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $a > 1$.

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas (,   ) $\in G_g$.

1.5. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica para a função $g(x) = -f(x)$.

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

x	$g(x) = -f(x)$
-3	
-2	
0	
2	



Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões altera-se / não se altera:

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x) = -f(x)$			

Em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio da função g ________________ ;
- o contradomínio da função g ________________ ;
- os zeros da função g ________________ .

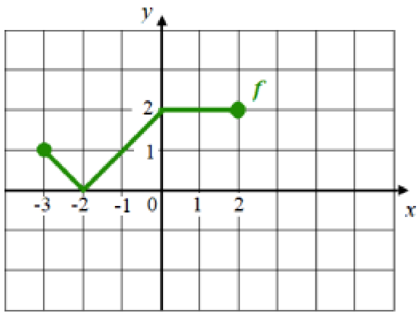
CONCLUSÕES:
O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é imagem do gráfico da função f por uma pela **reflexão de eixo** ________ (<u>Ox / Oy</u>).

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas (,) $\in G_g$.

1.6. Completa as seguintes tabelas e faz a representação gráfica para a função $g(x) = f(-x)$.

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
2	

x	$g(x)=f(-x)$
-2	
0	
2	
3	



Completa a tabela com as informações necessárias e as frases (usando as expressões <u>altera-se / não se altera</u>:

Função	Domínio	Contradomínio	Zeros
$f(x)$			
$g(x)=f(-x)$			

Em relação à função f, verifica-se que:

- o domínio da função g _________________ ;
- o contradomínio da função g _________________ ;
- os zeros da função g _________________ .

CONCLUSÕES:
O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é imagem do gráfico da função f por uma pela **reflexão de eixo** ________ (<u>Ox / Oy</u>).

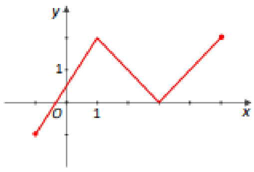
Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas (,) $\in G_g$.

Anexo 5 – Ficha E

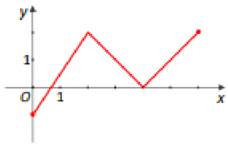
MATEMÁTICA A – 10.º ANO

FICHA DE TRABALHO E

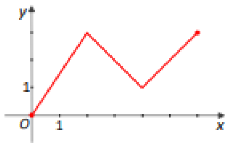
1. Seja f a função cujo gráfico cartesiano está totalmente representado na figura ao lado.
   Seja h a função definida por $h(x) = f(x+1) - 1$.
   Indica, justificando, em qual das opções seguintes pode estar representada o gráfico cartesiano da função h?



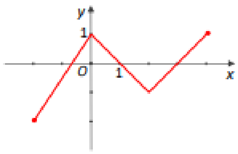
(A)



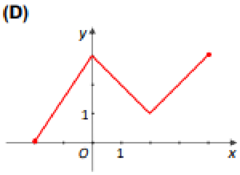
(B)



(C)



(D)



2. Dadas duas funções f e g, sabe-se que o gráfico cartesiano da função g obtém-se a partir do gráfico cartesiano da função f, aplicando-lhe uma translação de vetor $\vec{u}(-2{,}3)$.
   Define a função g, escrevendo-a na forma $f(x+a)+b$..

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
   Sabe-se que a função f tem exatamente três zeros: $-2, 3$ e 5.

   3.1. Considera a função *g* de domínio $\mathbb{R}$ e definida por $g(x) = 2 - f(x+5)$.
   Indica as transformações geométricas que deves aplicar ao gráfico cartesiano de *f* para obteres o gráfico cartesiano de *g*.

   3.2. Considera, agora, a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x-k), k \in \mathbb{R}$..
   Sabe-se que a soma dos zeros da função *h* é igual a 4.
   Determina o valor de k.

4. Sabe-se que h é uma função bijetiva tal que $h(5) = -1$.
   Determina, o conjunto-solução da equação $h(2x-1)+1=0$.

5. Sejam f e g duas funções afins, tais que $g(x) = -2x+3$.
   Sabe-se que $g(x) = -1 + f(x-2)$.

   5.1. Indica a transformação ou a sequência de transformações geométricas para obter o gráfico cartesiano de g a partir do gráfico cartesiano de f.

   5.2. Determina $f(-1)$.

6. Seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

   6.1. Averigua se h é injetiva.

   6.2. Estuda h quanto à paridade.

Anexo 6 – Questão Aula

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

Questão para avaliação - 4 (2.ºP)

Matemática A

Data: 17 de março | Professor: João Ferreira

Nome do aluno______________________________ N.º________ Turma______

Classificação (QA4)______________________________

Classificação Final________________Assinatura do Prof.____________Assinatura do EE____________

1. Considera a função f, definida em $\mathbb{R}$, tal que:

- $f(-5) = 1$
- $f(5) = 2$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -f(-x)$

Calcula $g(-5) - 3g(5)$

2. Considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x^2 - 50$.

2.1. Justifica que a função h é não injetiva.

2.2. Estuda h quanto à paridade.

2.3. Considera a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(2x - 1) - 3$.
Indica a transformação ou a sequência de transformações geométricas para obter o gráfico cartesiano de g a partir do gráfico cartesiano de h.

3. Considera as funções reais de variável real f e g definidas por $g(x) = 2x - 3$ e $f(x + 1) = g(x)$.
Mostra que $f(x) = 2x - 5$.

Anexo 7 – 1º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
~~27 de fevereiro 2023~~
Hora: 08:00 às 09:45</td><td>Funções: Generalidades sobre funções
SUMÁRIO:
▪ Revisões sobre funções
▪ Produto cartesiano de dois conjuntos, gráfico de uma função
▪ Resolução de uma ficha de trabalho (ficha A)</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Recordar o conceito de função
▪ Definir produto cartesiano de dois conjuntos
▪ Definir gráfico de uma função
▪ Resolução de uma ficha de trabalho (ficha A)</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Identificar o produto cartesiano de dois conjuntos
▪ Identificar o gráfico de uma função</td><td>▪ Identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função
▪ Representar graficamente uma função
▪ Perceber, dado um gráfico cartesiano, se este representa o gráfico de uma função.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação escrita matemática</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Definição de função
▪ Distinção entre domínio, contradomínio e conjunto de chegada.
▪ Análise gráfica de funções
▪ Formas de representação de uma função
▪ Resolver problemas envolvendo análise e interpretação gráfica</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ Ficha de trabalho
▪ Quadro branco
▪ Projetor</td><td>▪ Ficha de trabalho</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Exposição teórica</td></tr>
</table>

- Trabalho individual/pares

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em três momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Exposição teórica e exercícios de aplicação direta (70 minutos);
- Resolução da ficha de trabalho (15 minutos);

MOMENTO I (08:15-08:20)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

MOMENTO II (08:20-09:30)

Este momento terá início com a exposição do sumário.

A professora deverá fazer a exposição da teoria mencionada no sumário, utilizando suporte PowerPoint, devendo esta exposição ser complementada com exemplos e exercícios práticos do manual, de aplicação da teoria dada.

A professora deve procurar a participação ativa dos alunos nos momentos de exposição teórica e nos momentos dedicados à sua prática.

Por último, a professora deve entregar a ficha de trabalho aos alunos, indicando que dispõem dos últimos 15 minutos para a realizar. Deve também indicar que a ficha poderá continuar a ser resolvida na aula seguinte.

MOMENTO III (09:30-09:45)

Durante a realização da tarefa, a professora circula pela sala a fim de:

- Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa
- Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos

Anexo 8 – 2º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
<u>1 de março 2023</u>
Hora: 15:15 às 16:45</td><td>Funções: Generalidades sobre funções
SUMÁRIO:
▪ Correção da ficha de trabalho (ficha A)
▪ Restrição de uma função
▪ Função real de variável real
▪ Zeros de uma função
▪ Sinal de uma função
▪ Realização de uma ficha de trabalho (ficha B)</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Sintetize da teoria lecionada na aula anterior através da correção da ficha A
▪ Definir restrição de uma função a um conjunto
▪ Recordar a definição de variável numérica
▪ Definir função real de variável real
▪ Caracterizar funções reais de variável real aplicando os conhecimentos de álgebra, lógica e teoria dos conjuntos
▪ Definir zeros de uma função
▪ Caracterizar o sinal de uma função
▪ Resolução de exercícios.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Os alunos devem saber caracterizar uma função, real de variável real, podendo esta estar restrita por um dado conjunto.</td><td>▪ Definir, algebricamente e graficamente, a restrição de uma função a um conjunto e entender o seu significado
▪ Caracterizar uma função real de variável real</td></tr>
</table>

▪ Os alunos devem saber caracterizar o sinal de uma função, real de variável real ▪ Os alunos devem saber determinar os zeros de uma função.	▪ Determinar os zeros de uma função e entender o seu significado no estudo do sinal da função.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

- Comunicação escrita matemática
- Raciocínio matemático

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Aplicar os conhecimentos adquiridos na aula anterior

RECURSOS

Professor	Alunos
▪ Ficha de trabalho ▪ Quadro branco ▪ Projetor	▪ Ficha de trabalho

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Discussão coletiva de uma ficha de trabalho
- Exposição teórica
- Trabalho individual/pares

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Síntese da aula anterior / correção da ficha A (20 minutos)
- Exposição teórica (50 minutos)
- Realização da ficha de trabalho (15 minutos)

- **MOMENTO I (15:15-15:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (15:20-15:40)**

Este momento terá início com a exposição do sumário.

A professora deverá fazer uma síntese (oral ou escrita), através da correção da ficha de trabalho entregue na aula anterior, sobre os tópicos abordados na aula anterior, devendo procurar a participação ativa dos alunos.

Quando for o momento da correção da ficha de trabalho, a professora deve ter em conta as diferentes resoluções dos alunos (se existirem) e expor as que melhor se adequam ao objetivo da aula.

- **MOMENTO III (15:40-16:30)**

A professora deverá fazer a exposição da teoria mencionada no sumário, utilizando suporte PowerPoint, devendo esta exposição ser complementada com exemplos e exercícios práticos do manual, de aplicação da teoria dada.

A professora deve procurar a participação ativa dos alunos nos momentos de exposição teórica e nos momentos dedicados à sua prática.

Por último, a professora deve entregar a ficha de trabalho (ficha B) aos alunos, indicando que dispõem dos últimos 15 minutos para a realizar. Deve também indicar que a ficha poderá continuar a ser resolvida na aula seguinte.

- **MOMENTO IV (16:30-16:45)**

Durante a realização da ficha B, a professora circula pela sala a fim de:
➢ Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à resolução da tarefa
➢ Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos.

Anexo 9 – 3º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
<u>3 de março 2023</u>
Hora: 08:15 às 9:45</td><td>Funções: Generalidades sobre funções
SUMÁRIO:
▪ Continuação da aula anterior.
▪ Resolução de exercícios.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Continuação da exposição teórica iniciada na aula anterior;
▪ Resolução e discussão da ficha B.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Os alunos devem saber caracterizar uma função, real de variável real, podendo esta estar restrita por um dado conjunto.
▪ Os alunos devem saber caracterizar o sinal de uma função, real de variável real</td><td>▪ Definir, algebricamente e graficamente, a restrição de uma função a um conjunto e entender o seu significado.
▪ Caracterizar uma função real de variável real.</td></tr>
</table>

▪ Os alunos devem saber determinar os zeros de uma função.	▪ Determinar os zeros de uma função e entender o seu significado no estudo do sinal da função.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Comunicação escrita matemática ▪ Raciocínio matemático

CONHECIMENTOS PRÉVIOS
▪ Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções

RECURSOS	
Professor	**Alunos**
▪ Ficha de trabalho ▪ Quadro branco ▪ Projetor	▪ Ficha de trabalho

METODOLOGIA DE TRABALHO
▪ Exposição teórica ▪ Trabalho autónomo/pares

AVALIAÇÃO
▪ Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em três momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Continuação da exposição teórica, iniciada na aula anterior (25 minutos)
- Resolução e discussão de uma ficha de trabalho (60 minutos)

 MOMENTO I (08:15-08:20)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

 MOMENTO II (08:20-08:25)

A professora deverá continuar a exposição da, utilizando suporte PowerPoint, devendo esta exposição ser complementada com exemplos e exercícios práticos do manual, de aplicação da teoria dada.

A professora deve procurar a participação ativa dos alunos nos momentos de exposição teórica e nos momentos dedicados à sua prática.

Deverá ainda tentar responder a todas as questões colocadas pelos alunos.

➢ **MOMENTO IV (9:20-9:45)**
Durante a realização da ficha B, a professora circula pela sala a fim de:
➢ Apoiar os alunos, através do questionamento, em eventuais dificuldades inerentes à
resolução da tarefa
➢ Observar as diferentes respostas dadas pelos alunos.

Anexo 10 – 4º Plano de Aula

PLANO DE AULA	
ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR Matemática 10º Ano <u>6 de março 2023</u> Hora: 08:15 às 9:45	**Funções: Generalidades sobre funções** **SUMÁRIO:** ▪ Correção da ficha de trabalho (ficha B) ▪ Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva ▪ Realização da primeira questão-aula (QA) formativa

TÓPICOS
▪ Esclarecimento de dúvidas acerca da ficha B, realizada na aula anterior. ▪ Definir função injetiva

<table>
<tr><td colspan="2">

- Definir função sobrejetiva
- Definir função bijetiva
- Resolução da primeira QA (ficha C).

</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>

- Reconhecer funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

</td><td>

- Identificar, dados os conjuntos A e B, uma função como «injetiva» se para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (ou, de modo equivalente $f(x_1) = f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1 = x_2$) e designar também uma tal função por «injeção de A em B».
- Identificar, dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ como «sobrejetiva» se para todo o y pertencente a B, existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$ e reconhecer que uma função é sobrejetiva se e somente se coincidirem os respetivos contradomínio e conjunto de chegada e designar também uma tal função por «sobrejeção de A em B» ou por «função de A sobre B».
- Identificar, dados conjuntos A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ como «bijetiva» se esta é «injetiva» e «sobrejetiva».

</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- Comunicação escrita matemática
- Raciocínio matemático

</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções

</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>

- Ficha de trabalho
- Quadro branco
- Projetor

</td><td>

- Ficha de trabalho

</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- Exposição teórica

</td></tr>
</table>

- Trabalho individual

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.
- Será ainda avaliado, formativamente, a resolução da ficha C de cada aluno com o objetivo de proporcionar feedback quanto aos seus registos escritos (esta avaliação é posterior ao horário da aula).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Correção de algumas questões da ficha B (15 minutos)
- Exposição teórica e exercícios de aplicação direta (30 minutos);
- Resolução da primeira QA-formativa (ficha C) (25 minutos);
- Discussão e correção da QA-formativa (15 minutos).

- **MOMENTO I (08:15-08:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (08:20-08:35)**

Este momento terá início com a exposição do sumário.

A professora deverá fazer uma síntese (oral ou escrita), através da correção da ficha de trabalho entregue na aula anterior, sobre os tópicos abordados na aula anterior, devendo procurar a participação ativa dos alunos.

- **MOMENTO III (08:35-09:05)**

A professora deverá fazer a exposição da teoria mencionada no sumário, utilizando suporte PowerPoint, devendo esta exposição ser complementada com exemplos e exercícios práticos do manual, de aplicação da teoria dada.

A professora deve procurar a participação ativa dos alunos nos momentos de exposição teórica e nos momentos dedicados à sua prática.

Por último, a professora deve entregar a QA aos alunos, indicando que dispõem de 20 minutos para a realizar. Deve também indicar que a tarefa deve ser resolvida numa folha à parte (ou no próprio enunciado) de forma que os alunos possam receber feedback quanto aos seus registos escritos.

- **MOMENTO IV (09:05-09:30)**

Realização da primeira QA-formativa (ficha C).

No final deste momento, dever-se-á pedir aos alunos que não alterem as suas resoluções aquando da discussão coletiva. **MOMENTO V (09:30-09:45)** Discussão coletiva da ficha C.

Anexo 11 – 5º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
8 de março 2023
Hora: 15:15 às 16:45</td><td>Funções: Generalidades sobre funções
SUMÁRIO:
▪ Realização da ficha C – 1ª QA formativa
▪ Função par/ímpar.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Realização, correção e discussão coletiva (com exposição de diferentes resoluções) da QA formativa realizada;
▪ Função par/ímpar.</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Os alunos devem ter consolidado os conhecimentos referentes a funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;

▪ Os alunos devem saber distinguir função ímpar de função par assim como reconhecer os gráficos dessas mesmas funções.</td><td>▪ Idênticos aos da aula 4.
▪ Identificar uma função real de variável real f como função «par» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$.
▪ Identificar uma função real de variável real f como função «ímpar» se, para todo o $x \in D_f$, $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.
▪ Justificar, dada uma função real de variável real ímpar f, que se $0 \in D_f$, então $f(0) = 0$.
▪ Reconhecer, dado um plano munido de um referencial ortogonal, que uma dada função é par se e somente se o eixo das ordenadas for eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.

▪ Reconhecer, dado um plano munido de um referencial cartesiano, que uma dada função é ímpar se e somente se o respetivo gráfico cartesiano for «simétrico relativamente à</td></tr>
</table>

	origem *O* do referencial», isto é, se e somente se a imagem do gráfico pela reflexão central de centro *O* coincidir com o próprio gráfico.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

- Comunicação escrita matemática
- Raciocínio matemático

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções.

RECURSOS

Professor	Alunos
▪ Ficha de trabalho ▪ Quadro branco ▪ Projetor	▪ Ficha de trabalho

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Exposição teórica
- Trabalho autónomo

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.
- Será ainda avaliado, formativamente, a resolução da ficha C de cada aluno com o objetivo de proporcionar feedback quanto aos seus registos escritos (esta avaliação é posterior ao horário da aula).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Realização da ficha C (35 minutos)
- Discussão coletiva da ficha C (30 minutos)
- Exposição teórica e exercícios de aplicação direta (20 minutos);

- **MOMENTO I (15:15-15:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (15:20-15:55)**

Este momento terá início com a exposição do sumário.

A professora deve indicar que os alunos dispõem de 35 minutos para realizar a ficha C, autonomamente.

Sempre que possível, devem ser tiras possíveis dúvidas aos alunos sem, no entanto, induzir os alunos à resposta mais completa. É objetivo desta ficha analisar os tipos de respostas que os alunos dão, estando estas mais completas ou não.

Durante este momento, deve-se circular pela sala a fim de observar possíveis resoluções que possam ser discutidas no momento posterior.

- **MOMENTO III (15:55-16:25)**

Este momento será dedicado à discussão coletiva da ficha C.

Devem ser partilhadas resoluções pelos próprios autores. Estas resoluções devem ter sido selecionadas pelo Professor no momento anterior.

Os alunos devem ser avisados que não devem fazer alterações às suas resoluções. Devem ser encorajados a utilizar o caderno diário para a correção e discussão da ficha.

Durante este momento, a professora deve procurar a participação ativa dos alunos.

Deverá ainda tirar fotografias às resoluções dos alunos, sempre que possível e pertinente.

- **MOMENTO IV (16:25-16:45)**

A professora deverá fazer a exposição da teoria mencionada no sumário, utilizando suporte PowerPoint, devendo esta exposição ser complementada com exemplos e exercícios práticos do manual, de aplicação da teoria dada.

A professora deve procurar a participação ativa dos alunos nos momentos de exposição teórica e nos momentos dedicados à sua prática.

Anexo 12 – 6º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
<u>10 de março 2023</u>
Hora: 08:15 às 9:45</td><td>Funções: Transformações do gráfico de funções

SUMÁRIO:
▪ Transformações do gráfico de funções;

▪ Realização da ficha D;

▪ Síntese da matéria abordada na ficha D.</td></tr>
</table>

TÓPICOS
▪ Realização da ficha D (parte dela); ▪ Síntese da matéria abordada na ficha D.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	
GERAL	**ESPECÍFICOS**
▪ Obter a imagem de uma função por uma translação; ▪ Identificar dilatação e contração vertical do gráfico de uma função; ▪ Identificar dilatação e contração horizontal do gráfico de uma função; ▪ Identificar reflexões do gráfico de uma função.	▪ Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função *g* definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0,c)$. ▪ Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real *c* e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida por $g(x) = f(x-c)$ no conjunto $D_g = \{x + c :\ x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano f pela translação de vetor $\vec{u}(0,c)$. ▪ Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação do plano ϕ que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).

<table>
<tr><td></td><td>▪ Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

▪ Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação do plano ϕ que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).

▪ Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{ \frac{x}{a} : x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

▪ Entender como as transformações de gráficos de funções afetam os seus zeros.</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação escrita matemática
▪ Raciocínio matemático</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

- Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções

</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>

- Ficha de trabalho
- Quadro branco
- Projetor
- GeoGebra

</td><td>

- Ficha de trabalho

</td></tr>
<tr><th colspan="2">METODOLOGIA DE TRABALHO</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- Aprendizagem de teoria através da realização de uma ficha de trabalho
- Trabalho autónomo

</td></tr>
<tr><th colspan="2">AVALIAÇÃO</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESENVOLVIMENTO DA AULA</th></tr>
<tr><td colspan="2">

A aula será dividida em cinco momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Realização das questões 1.1 e 1.2 da ficha D (sobre translações do gráfico de funções) (25minutos)
- Síntese (20 minutos)
- Realização das questões 1.3 e 1.4 da ficha D (sobre dilatação e contração do gráfico de funções) (25 minutos)
- Síntese (15 minutos)

- **MOMENTO I (08:15-08:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (08:20-08:45)**

Os alunos deverão realizar as questões 1.1 e 1.2 (de forma autónoma e sem ajuda) da ficha D. Nestas questões serão introduzidos às translações verticais e horizontais do gráfico de funções.

O Professor deverá circular pela sala, controlando o tempo e verificando que os alunos estão a compreender o que está a ser feito.

- **MOMENTO III (08:45-09:05)**

</td></tr>
</table>

Neste momento, o Professor deverá fazer a síntese da teoria com a qual os alunos se depararam na realização das questões anteriores.

Deverá ser procurada a participação ativa dos alunos uma vez que estes, nesta aula, são os principais intervenientes na sua aprendizagem.

O GeoGebra será utilizado como uma ferramenta na síntese e consolidação das transformações do gráfico das funções abordadas nas questões anteriores.

MOMENTO IV (09:05-09:30)

Os alunos deverão realizar as questões 1.3 e 1.4 (de forma autónoma e sem ajuda) da ficha D. Nestas questões serão introduzidos às contrações e dilatações verticais e horizontais do gráfico de funções.

O Professor deverá circular pela sala, controlando o tempo e verificando que os alunos estão a compreender o que está a ser feito.

- **MOMENTO V (09:30-09:45)**

Neste momento, o Professor deverá fazer a síntese da teoria com a qual os alunos se depararam na realização das questões anteriores.

Deverá ser procurada a participação ativa dos alunos uma vez que estes, nesta aula, são os principais intervenientes na sua aprendizagem.

O GeoGebra será utilizado como uma ferramenta na síntese e consolidação das transformações do gráfico das funções abordadas nas questões anteriores.

Anexo 13 – 7º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
13 de março 2023
Hora: 08:15 às 9:45</td><td>Funções: Transformações do gráfico de funções
SUMÁRIO:
▪ Conclusão da ficha D.
▪ Realização da 2ª QA-formativa (Ficha F)</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Conclusão da ficha D e da teoria referente às transformações do gráfico de funções;
▪ Realização da 2ª QA-formativa (Ficha E)</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
▪ Identificar, dada uma função, se esta é par ou ímpar.</td><td>Os mesmos objetivos presentes no 5º e 6º planos de aula (uma vez que as três aulas incidem no subdomínio das transformações do gráfico de funções)</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação escrita matemática
▪ Raciocínio matemático</td></tr>
<tr><th colspan="2">CONHECIMENTOS PRÉVIOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Alunos</th></tr>
<tr><td>▪ Ficha de trabalho
▪ Quadro branco
▪ Projetor</td><td>▪ Ficha de trabalho</td></tr>
</table>

▪ GeoGebra	

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Aprendizagem de teoria através da realização de uma ficha de trabalho
- Trabalho individual

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.
- Será ainda avaliado, formativamente, a resolução da ficha C de cada aluno com o objetivo de proporcionar feedback quanto aos seus registos escritos (esta avaliação é posterior ao horário da aula).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Realização das questões 1.5 e 1.6 da ficha D (sobre reflexões de eixo O_x e O_y do gráfico de funções) (25minutos)
- Síntese (20 minutos)
- Realização da ficha E (2ª QA-formativa) (40 minutos)

MOMENTO I (08:15-08:20)

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

MOMENTO II (08:20-08:45)

Este momento terá início com a exposição do sumário.

Os alunos deverão realizar as questões 1.5 e 1.6 (de forma autónoma e sem ajuda) da ficha D. Nestas questões serão introduzidos às reflexões de eixo O_x e O_y do gráfico de funções.

O Professor deverá circular pela sala, controlando o tempo e verificando que os alunos estão a compreender o que está a ser feito.

MOMENTO III (08:45-09:05)

Neste momento, o Professor deverá fazer a síntese da teoria com a qual os alunos se depararam na realização das questões anteriores.

Deverá ser procurada a participação ativa dos alunos uma vez que estes, nesta aula, são os principais intervenientes na sua aprendizagem.

O GeoGebra será utilizado como uma ferramenta na síntese e consolidação das transformações do gráfico das funções abordadas nas questões anteriores.

➢ **MOMENTO IV (9:05-9:45)**
Realização da 2ªQA-formativa, de forma autónoma.

Sempre que possível, devem ser tiras possíveis dúvidas aos alunos sem, no entanto, induzir os alunos à resposta mais completa. É objetivo desta ficha analisar os tipos de respostas que os alunos dão, estando estas mais completas ou não.

No final da aula, os alunos deverão entregar as suas resoluções para serem analisadas num momento posterior com o objetivo de se dar feedback.

Anexo 14 – 8º Plano de Aula

<table>
<tr><th colspan="2">PLANO DE AULA</th></tr>
<tr><td>ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR
Matemática 10º Ano
15 de março 2023
Hora: 15:15 às 16:45</td><td>Funções: Transformações do gráfico de funções
SUMÁRIO:
▪ Conclusão da ficha E.
▪ Resolução de exercícios do manual.</td></tr>
<tr><th colspan="2">TÓPICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Síntese da teoria acerca das transformações do gráfico de funções.
▪ Conclusão da ficha E referente às transformações do gráfico de funções;
▪ Resolução de exercícios</td></tr>
<tr><th colspan="2">OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM</th></tr>
<tr><th>GERAL</th><th>ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td>▪ Resolver problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real.
▪ Identificar, dada uma função, se esta é par ou ímpar.</td><td>Os mesmos objetivos presentes no 5º e 6º planos de aula (uma vez que as três aulas incidem no subdomínio das transformações do gráfico de funções)</td></tr>
<tr><th colspan="2">CAPACIDADES TRANSVERSAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Comunicação escrita matemática
▪ Raciocínio matemático</td></tr>
</table>

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções

RECURSOS

Professor	Alunos
▪ Ficha de trabalho ▪ Quadro branco	▪ Ficha de trabalho

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho pares

AVALIAÇÃO

- Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo.
- Será ainda avaliado, formativamente, a resolução da ficha E de cada aluno com o objetivo de proporcionar feedback quanto aos seus registos escritos (esta avaliação é posterior ao horário da aula).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Finalização da realização da ficha E (30 minutos)
- Correção da ficha de trabalho (55 minutos)

- **MOMENTO I (08:15-08:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (08:20-08:55)**

Realização da 2ªQA-formativa, de forma autónoma.

Sempre que possível, devem ser tiras possíveis dúvidas aos alunos sem, no entanto, induzir os alunos à resposta mais completa. É objetivo desta ficha analisar os tipos de respostas que os alunos dão, estando estas mais completas ou não.

No final da aula, os alunos deverão entregar as suas resoluções para serem analisadas num momento posterior com o objetivo de se dar feedback.

- **MOMENTO III (08:55-09:45)**

Este momento será dedicado à discussão coletiva da ficha E.

Devem ser partilhadas resoluções pelos próprios autores. Estas resoluções devem ter sido
selecionadas pelo Professor no momento anterior.

Os alunos devem ser avisados que não devem fazer alterações às suas resoluções. Devem ser encorajados a utilizar o caderno diário para a correção e discussão da ficha. Durante este momento, a professora deve procurar a participação ativa dos alunos. Deverá ainda tirar fotografias às resoluções dos alunos, sempre que possível e pertinente.

Anexo 15 – 9º Plano de Aula

PLANO DE AULA	
ESCOLA SECUNDÁRIA RAINHA D. LEONOR Matemática 10º Ano 17 de março 2023 Hora: 08:15 às 09:45	**Funções: Transformações do gráfico de funções** **SUMÁRIO:** ▪ Resolução de exercícios do manual. ▪ Esclarecimento de dúvidas para a questão aula. ▪ Realização da QA – Sumativa.
TÓPICOS	
▪ Resolução de exercícios	
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	
GERAL	**ESPECÍFICOS**
▪ Resolver problemas envolvendo generalidades sobre funções e transformações geométricas de gráficos de funções.	

CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Comunicação escrita matemática ▪ Raciocínio matemático

CONHECIMENTOS PRÉVIOS
▪ Conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores relativamente ao domínio das funções

RECURSOS	
Professor	**Alunos**
▪ Ficha de trabalho ▪ Quadro branco	▪ Ficha de trabalho

METODOLOGIA DE TRABALHO
▪ Trabalho individual.

AVALIAÇÃO
▪ Avaliação formativa: vão ser avaliadas a participação e o interesse do aluno, durante o trabalho autónomo. ▪ Será ainda avaliada, de forma sumativa, a resolução da QA (valendo esta 40 pontos).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será dividida em quatro momentos, correspondendo respetivamente a:

- Entrada inicial dos alunos (5 minutos)
- Resolução de exercícios e esclarecimento de dúvidas (65 minutos)
- Realização da QA (20 minutos)

- **MOMENTO I (08:15-08:20)**

Este momento terá início com a entrada inicial dos alunos.

- **MOMENTO II (08:20-08:55)**

Os alunos deverão realizar exercícios selecionados previamente pela professora, de forma autónoma.

Sempre que possível, devem ser tiradas dúvidas aos alunos sem, no entanto, induzir os alunos à resposta mais completa. É objetivo analisar os tipos de respostas que os alunos dão, estando estas mais completas ou não.

Alertar para o feedback escrito dado anteriormente, no que toca aos registos escritos dos alunos, chamando a atenção para erros cruciais que não devem ser cometidos.

No final da aula, os alunos deverão entregar as suas resoluções para serem analisadas num momento posterior.

- **MOMENTO III (08:55-09:45)**

Realização da QA-sumativa, de forma autónoma.

Anexo 16 – Síntese das Transformações do Gráfico de Funções

TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

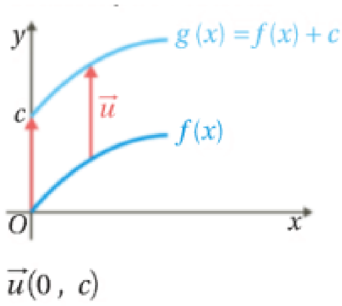
Translação vertical do gráfico de uma função

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + k$, é imagem do gráfico da função f pela **translação vertical** associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(x, y + k) \in G_g$.

Em relação ao gráfico cartesiano de f, verifica-se também um deslocamento **vertical** de k unidades para:

- cima, se $k > 0$;
- baixo, se $k < 0$.



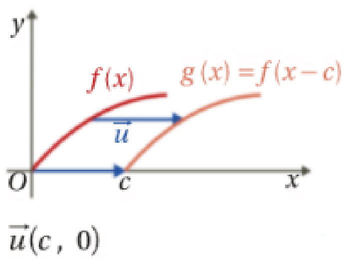
Translação horizontal do gráfico de uma função

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{x + k : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(x - k)$, é imagem do gráfico da função f pela **translação horizontal** associada ao vetor $\vec{u}(k, 0)$

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(x + k, y) \in G_g$.

Em relação ao gráfico cartesiano de f, verifica-se também um deslocamento **horizontal** de k unidades para:

- direita, se $k > 0$;
- esquerda, se $k < 0$.

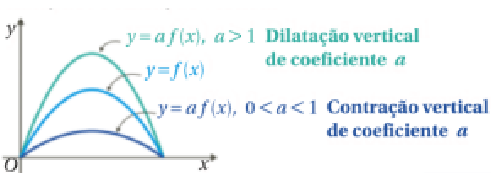


Dilatação/Contração vertical do gráfico de uma função

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = af(x), a > 0$, é imagem do gráfico da função f por uma:

- **contração vertical** de coeficiente a se $0 < a < 1$;
- **dilatação vertical** de coeficiente a se $a > 1$.

Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(x, ay) \in G_g$.

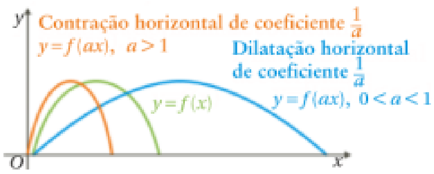


Dilatação/Contração horizontal do gráfico de uma função

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax), a > 0$, é imagem do gráfico da função f por uma:

- **dilatação horizontal** de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $0 < a < 1$;
- **contração horizontal** de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $a > 1$.

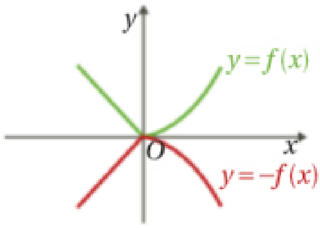
Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{a}x, y\right) \in G_g$.



Reflexão de eixo O_x

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$, é imagem do gráfico da função f por uma **reflexão de eixo O_x**.

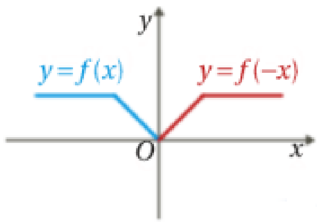
Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(x, -y) \in G_g$.



Reflexão de eixo O_y

O gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$, é imagem do gráfico da função f por uma **reflexão de eixo O_y**.

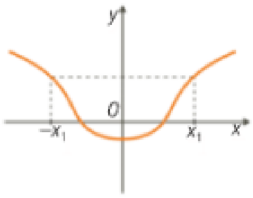
Assim, se o ponto de coordenadas $(x, y) \in G_f$, então o ponto de coordenadas $(-x, y) \in G_g$.



Função par

Uma função, f, real de variável real é **par**, se e somente se para todo o x pertencente ao domínio de f, $-x$ também pertence e $f(x) = f(-x)$.

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)$$



Função ímpar

Uma função, f, real de variável real é **ímpar**, se e somente se para todo o x pertencente ao domínio de f, $-x$ também pertence e $-f(x) = f(-x)$.

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge -f(x) = f(-x)$$