

PROBLEMAS DE ALMOFADA

PENSADOS DURANTE HORAS DE VÍGILIA

Por

CHARLES L. DODGSON, M.A.

Estudante e antigo professor de matemática

da Christ Church, Oxford

PREFÁCIO À QUARTA EDIÇÃO

Aproveito esta oportunidade para explicar o *porquê* (tal como aparece na nota da pág. xix) de ter utilizado os símbolos \cap e \cup para representar as palavras “seno” e o “cosseno”.

O uso de *alguns* símbolos não precisa, suponho, de justificação, não mais do que o uso de + e – para representar “mais” e “menos”.

Estes símbolos em particular resultam da velha teoria de Trigonometria, na qual os senos, cossenos e etc. eram efetivamente *linhas*.

Neste diagrama, em que OP é a unidade de altura, PN é o seno do ângulo NOP e ON o seu cosseno. (imagem)

Em cada um dos meus símbolos mantive o semicírculo: no símbolo \cap , apenas desloquei PN para o centro; e, no símbolo \cup , prolonguei ON , levando-a um pouco para além da curva, de modo a evitar confusão com o símbolo existente para “semicírculo”.

Aproveito ainda para acrescentar uma espécie de corolário (pensado mais recentemente) para a solução do Problema 59 (ver p. 84).

Se forem dadas as alturas de a , b , c , estas devem, para que o Tetraedro seja possível, obedecer às seguintes condições:

- (1) Têm que formar os lados de um Triângulo: assim, a soma de dois lados deve ser maior do que o terceiro;
- (2) Os três ângulos deste triângulo têm que formar um ângulo *sólido*; assim, a soma de quaisquer dois destes ângulos deve ser maior do que o terceiro; assim, a soma de dois ângulos deve ser superior a 90° , logo, um deles (qualquer um) deverá ser inferior a 90° , conseqüentemente, o cosseno de qualquer um deles deverá ser superior a 0, isto é, $b^2 + c^2 - a^2$ deverá ser superior a 0 e assim sucessivamente. Assim, a , b , c devem ser tais que os *quadrados* de quaisquer dois deles são em conjunto maiores do que o *quadrado* do terceiro.

Por exemplo, as alturas 2, 3, 4 não serviriam uma vez que, apesar de cumprirem a primeira condição ($2 + 3 > 4$), ficam aquém da segunda pois, $2^2 + 3^2$ não é $> 4^2$.

C. L. D.

CH CH, Oxford.

Março, 1895.

PREFÁCIO À SEGUNDA EDIÇÃO

As principais alterações, feitas nesta segunda edição de “Problemas de Almofada”, são as seguintes:

- (1) Após o número que precede cada pergunta, resposta ou solução, são referenciadas as páginas que correspondem ao problema em questão.
- (2) Algumas das soluções foram reorganizadas e reproduziram-se diagramas de modo a que cada parte do texto possa ter visível o respetivo diagrama ilustrativo, poupando trabalho e evitando testar a paciência ao leitor ao ter que virar as páginas para trás e para a frente.
- (3) No título do livro, as palavras “noites em branco” foram substituídas por “horas de vigília”.

Esta última alteração foi feita de modo a aliviar a ansiedade de amáveis amigos que me escreveram exprimindo a sua solidariedade com o meu estado de saúde débil, acreditando que padeço de “insónia” crónica e que foi como um remédio para essa doença esgotante que recomendei cálculos matemáticos.

Receio que o título não tenha sido sabiamente escolhido e *era* certamente passível de sugerir um significado que não era minha intenção transmitir — que as minhas “noites” são muito frequentemente passadas *totalmente* “acordado”. Este não é de todo o caso, nunca sofri de “insónia” e as horas de vigília que passei à noite, foram muitas vezes o mero resultado de demasiadas horas dormidas na noite anterior! Nem foi como um remédio para a *vigília* que sugeri os cálculos matemáticos, mas sim como um remédio para os *pensamentos incómodos* suscetíveis de invadir uma mente inteiramente livre. Espero que o novo título possa expressar o meu significado mais claramente.

Expondo o assunto logicamente, os dois chifres do dilema no qual os meus amigos *supuseram* que eu me encontrava são o suportar de uma noite em claro e a adoção de uma qualquer receita para induzir o sono. Ora, de acordo com a minha experiência, tal receita não tem qualquer efeito, a não ser quando se está sonolento, e, provavelmente, os cálculos matemáticos adiariam o advento do sono invés de apressar a sua chegada.

O verdadeiro dilema, que tive de enfrentar é o seguinte: dado que o cérebro está numa condição tão vigilante que, faça o que fizer, é *certo* que permanecerei acordado na próxima hora ou mais, devo escolher uma de duas opções — sujeitar-me à autotortura infrutífera de perscrutar algum tópico inquietante, uma e outra vez, ou ditar a mim próprio algum tópico suficientemente cativante capaz de manter as preocupações à distância. É isso que um problema matemático *representa* para mim, e é benéfico mesmo que alongue

um pouco o período de vigília. Acredito que uma hora de cálculo é muito melhor para mim do que meia hora de preocupações.

Penso que o leitor irá interessar-se por ver uma solução curiosamente ilógica que foi proposta por um correspondente do *Educational Times* para o Problema 61, cujo enunciado é «Prove que ao pegar em qualquer um de 3 números, os quais não podem estar em *Progressão Aritmética*, e cuja soma é um múltiplo de 3, a soma dos seus quadrados é também a soma de outro conjunto de 3 quadrados, sendo que os dois conjuntos não têm fatores comuns.»

A solução proposta é a seguinte:

“Seja $3m$, $21m$, $30m$ os três números; então $3m + 21m + 30m = 3 \times 18m$.

E ainda, $(3m)^2 + (21m)^2 + (30m)^2 = (6m)^2 + (15m)^2 + (33m)^2$

$= (5m)^2 + (13m)^2 + (34m)^2 = (10m)^2 + (17m)^2 + (31m)^2$

$= (14m)^2 + (23m)^2 + (25m)^2$.”

Agora, se considerarmos α a propriedade «que não pode estar em *Progressão Aritmética*, e cuja soma é um múltiplo de 3», e β a propriedade daqueles cuja «soma dos quadrados é também a soma de outro conjunto de 3 quadrados, sendo que os dois conjuntos não têm fatores comuns», observamos que tudo o que este leitor conseguiu provar é que *certos números escolhidos* que têm a propriedade α também têm a propriedade β , mas isto não prova o meu teorema, nomeadamente, que *quaisquer conjuntos de números* com propriedade α também têm propriedade β . Se este argumento fosse disposto de forma silogística, depararíamos com uma Premissa Maior perfeitamente insustentável, nomeadamente, «que, o que é verdade para *certos números escolhidos* que têm a propriedade α é verdade para *quaisquer números* que tenham a propriedade α ».

C. L. D.

CH. CH., OXFORD.

Setembro, 1893.

INTRODUÇÃO

Quase todos os setenta e dois Problemas que se seguem são autênticos “Problemas de Almofada”, tendo sido resolvidos de cabeça enquanto estava deitado à noite sem dormir. (Registei as datas exatas de alguns). O nº 37 e um ou outro pertencem à luz do dia, tendo sido resolvidos durante uma caminhada solitária; mas cada um deles foi concebido, até ao último momento, antes de desenhar um único diagrama ou de escrever uma única palavra da solução. Em geral, escrevi a *resposta* em primeiro lugar e *depois* a pergunta e respetiva solução. Por exemplo, no nº 70, as primeiras palavras que escrevi foram «(1) por baixo no limite inferior, novamente para cima, para baixo outra vez e por aí fora; (2) aproximadamente 0.7 para baixo do limite inferior; (3) aproximadamente 18°18’; (4) aproximadamente 14°». Estas respostas não estão muito corretas, mas são pelo menos *genuínas*, resultantes *apenas* de trabalho *mental*. «Uma coisa pouco favorecida, mas bem minha!»¹

A razão pela qual publico estes Problemas com as respetivas soluções mentalmente trabalhadas *não* é certamente com o intuito de demonstrar poderes de cálculo mental. Os meus, tenho a certeza, não são por aí além, e não tenho qualquer dúvida de que há vários matemáticos capazes de produzir, mentalmente, soluções muito mais concisas e melhores. Não é para tais pessoas que destino o meu pequeno livro, mas antes para aquela classe muito maior de matemáticos comuns, que talvez nunca tenham experimentado este recurso, quando uma ocupação mental era necessária, e que, espero, se sentirão encorajados — ao verem o que pode ser feito, após um pouco de prática, por alguém de poderes matemáticos medianos — a tentarem esta experiência eles próprios e encontrarem nela tanto proveito e consolo quanto eu.

A palavra “consolo” poderá talvez soar desadequada, ligada a uma atividade tão inteiramente *intelectual*; mas penso que ficará claro para muitos que sabem bem o que é ser atormentado por um qualquer pensamento inquietante que nenhum esforço consegue reprimir. Uma e outra vez disse a mim próprio, deitado à noite, após um dia amargurado por um qualquer assunto vexatório, «*não* pensarei mais sobre isso! Já o repassei por completo, minuciosamente. Nenhum bem advirá de o reviver novamente. *Irei* pensar noutra coisa!» E em dez minutos dei por mim, novamente, a cismar no infeliz assunto, torturando-me, inutilmente, com velhas preocupações.

¹ N.T.: Shakespeare, William, 1564-1616; Vieira, Fátima, trad., *Como Vos Aprouver* (2008)

Ora não é possível — e penso que todos os psicólogos concordarão — qualquer seja o esforço de volição, concretizar a resolução «*Não* irei pensar nisto e naquilo». (Comprovado pelo simples truque, aplicado a uma criança, dizendo-lhe «Dou-te um tostão se ficares de pé naquele canto durante cinco minutos e não pensares em compota de morango *uma única vez*». Nunca nenhuma criança humana ganhou a tentadora aposta!) Mas é possível — felizmente — levar a bom porto a resolução «*Irei* pensar nisto e naquilo». Uma vez presa a atenção a um tema escolhido, veremos que o tema inquietante que desejamos abolir é *praticamente* anulado. Poderá voltar, de vez em quando — dar o ar de sua graça, por assim dizer — mas será tão friamente recebido e receberá tão pouca atenção que irá, passado algum tempo, deixar por completo de ser uma preocupação.

Talvez me arrisque, por um momento, a usar um tom mais sério e salientar que existem aflições mentais muito piores do que meras preocupações, para as quais uma ocupação mental envolvente poderá servir de remédio. Existem pensamentos cétricos que parecem, momentaneamente, desenraizar a mais inabalável fé; existem pensamentos blasfemos que vêm disparados sem convite para dentro das mais reverentes almas; existem pensamentos profanos que torturam com a sua presença odiosa, a fantasia que se almejava pura. Para os combater, algum *trabalho* mental é dos aliados mais úteis. Aquele “espírito impuro” da parábola, que trouxe consigo outras sete mais perversas do que ela própria, apenas o fez porque encontrou o quarto «varrido e guarnecido» e o seu dono sentado de mãos cruzadas e pousadas no colo; se o tivesse encontrado pleno de ação com o «zumbido frenético» do *trabalho* ativo, teria havido uma receção exígua para ela e as suas sete!

O meu objetivo — ao dar este encorajamento a outros — não seria tão bem atingido se me tivesse permitido, ao escrever as minhas soluções, *aprimorar* o trabalho feito de cabeça. Considerarei ser muito mais importante estabelecer *o que tinha sido realmente feito de cabeça*, do que fornecer soluções mais pequenas ou claras, o que talvez fosse muito mais difícil de fazer sem *papel*. Por exemplo, a soma de uma longa multiplicação (por exemplo, a multiplicação conjunta de dois números de 7 dígitos) seria sem dúvida mais bem feita em papel, começando pelas unidades, escrevendo 7 filas de números e adicionando colunas na maneira habitual. Mas seria de facto muito difícil — praticamente impossível para *mim* — fazer tal coisa de *cabeça*. A única possibilidade parece ser começar com os *milhões*, agrupando-os adequadamente, seguindo-se as centenas de milhares, somando o resultado ao anterior e por aí fora. Parece

frequentemente que o processo *mental* mais fácil se afigura decididamente longo e indireto quando disposto em papel.

Da primeira vez que tentei este projeto, tudo o que conseguia levar a cabo eram simples problemas geométricos e, mesmo com estes, tinha de fazer uma pausa de vez em quando de maneira a redesenhar o diagrama, o qual *persistia* em ser «apagado». No início evitei os problemas algebraicos devido ao facto irritante de que se um único coeficiente me escapasse da memória, não haveria outro recurso a não ser começar os cálculos todos outra vez. Mas rapidamente ultrapassei estas dificuldades e dei por mim a ser capaz de me lembrar de coeficientes numéricos bastante longos e também de reter, visualizando mentalmente, diagramas bastante complexos, até na medida de *conseguir ir* de uma parte para outra do diagrama. As letras dos diagramas revelaram-se de tal forma problemáticas de reter na memória que quase desisti de as usar e aprendi a reconhecer os pontos apenas pela sua *posição*. No meu manuscrito do nº53, encontrei a seguinte nota:

«Nunca me tinha proposto este problema antes da semana que acabava a 6 de abril de 1889. Tentei fazê-lo, por duas ou três noites, deitado acordado e finalmente consegui resolvê-lo na noite de 6 para 7 de abril. Todas as conclusões foram resolvidas mentalmente antes de qualquer uso de caneta e papel. Enquanto trabalhava nele, não dei *nomes* a nenhum ponto, exceto *A, B, C e P*, apenas pensei neles de acordo com as suas posições (ex.: “o pé da perpendicular de *P* em *BC*”»).

Se algum dos meus leitores se sentir inclinado a repreender-me por ter trabalhado demasiado uniformemente na região do senso-comum e sem nunca me ter aventurado a *sair dos eixos*, poderei orgulhosamente destacar o meu único problema em «Probabilidades Transcendentes» — um tema sobre o qual, penso eu, *muito* pouco foi ainda feito até pelos exploradores matemáticos mais intrépidos. Para o leitor fortuito poderá parecer anómalo e até paradoxal, mas gostaria que tal leitor se perguntasse honestamente a si mesmo «Não será a própria Vida um Paradoxo?»

Para dar ao leitor alguma ideia do processo de construção destes problemas, darei a biografia do nº63. A história deste, em grande medida, é a história de todos.

Começou durante a noite de 3 para 4 de setembro de 1890 e completei-o durante a noite seguinte. Ocorreu-me a ideia, pouco tempo antes, de que se poderia encontrar algo de interessante no tema a que posso chamar Sólidos «parcialmente regulares». Os Sólidos «regulares» são exasperadamente poucos em número e seria inútil procurar qualquer pergunta, com eles relacionada, que não tivesse já sido analisada exaustivamente; alguns dos Sólidos «parcialmente regulares» (ex.: cristais romboidais) também tiveram

provavelmente tratamento parecido, mas parecia haver espaço para a invenção de outros sólidos semelhantes.

Assim, idealizei um Sólido fechado em cima e em baixo por 2 quadrados iguais e paralelos, tendo os seus centros na mesma linha vertical e o superior torcido de maneira a que os seus lados fossem paralelos às diagonais do quadrado inferior. Depois, imaginei o quadrado superior elevado até que os seus cantos formassem os vértices de 4 triângulos equiláteros, cujas bases seriam os lados do quadrado inferior. O sólido, assim obtido, estava evidentemente enclausurado por 2 Quadrados e 8 Triângulos equiláteros e o Problema a que me propus era obter o seu *volume*.

Não houve grande dificuldade em provar que a distância entre os 2 Quadrados (considerando cada lado como igual a «2») era $2\frac{3}{4}$. Porém, assim que procurei por algum método Trigonométrico para calcular o Volume, o desespero rapidamente se apoderou de mim! Percebi que um Prisma calculável poderia ser cortado do meio do sólido, mas as projeções periféricas confundiam-me completamente. Passado um bocado, ocorreu-me a feliz ideia de tentar Geometria Algebraica e encarar cada face como a base de uma Pirâmide, tendo o seu vértice no centro do Sólido, o qual decidi estabelecer como a Origem. Vi de imediato que poderia calcular as coordenadas de todos os vértices, obtendo assim equações dos planos contendo as faces, o que permitia deste modo calcular as distâncias desde a Origem que seriam as alturas das Pirâmides. Para além disso, era evidente que uma Pirâmide de amostra seria suficiente. Nessa primeira noite determinei um valor para o volume, mas a coisa emaranhou-se e convenci-me de que estava errado.

Recomecei na noite seguinte e resolvi tudo desde o início. De manhã, a resposta estava clara na minha memória e escrevi-a de imediato; tendo escrito o Problema e a sua solução apenas mais tarde nesse dia tendo ficado bastante satisfeito por verificar que a prova escrita confirmava o resultado a que tinha chegado nas horas de escuridão.

Talvez não seja muito surpreendente que, quando chegou a altura de reescrever e organizar estes problemas para publicação, foi descoberta uma quantidade considerável de erros. Alguns tão maus ao ponto de estragarem as soluções em que ocorreram; omiti estes problemas na sua totalidade. Corrigi os outros nas soluções do capítulo III; mas para que não me seja atribuída uma total precisão enquanto alguém que computa, a qual estou totalmente ciente de não possuir, aqui está uma lista deles.

No nº7, no denominador « $2 \cap A$ », esqueci-me do «2».

No nº10, não reparei que as 3 moedas *também* poderão ser meia coroa e 2 xelins.

No nº13, na penúltima linha, coloquei « $2bc \cdot ca$ », em vez de « $4bc \cdot ca$ ».

No nº 32, dei o valor aritmético como «358520» em vez de «358550».

No nº 38, enganei-me no decimal, que disse ser 0,475 em vez de 0,478 e assim cheguei à resposta de 0,042 em vez de 0,044.

No nº 44, disse que o denominador teria a forma de $(10^n - 1) \cdot 10^m$. Este último valor é supérfluo, ou seja, $m = 0$.

No nº 50, cometi um erro perto do final, chegando a $\frac{41}{108}$ em vez de $\frac{50}{108}$.

No nº 55, coloquei «*tan*» em vez de «*sin*».

No nº 57, no último parágrafo, substituí o denominador comum « $a \cap B \cap C$ » por (o que eu imaginei ser o seu equivalente) « $2m$ ». Ao que parece sofria da ilusão de que « $a \cap B \cap C$ » era o mesmo que « $\cap A \cdot bc$ »!

No nº 70, secção (3), esqueci-me de somar 0,45, errando assim a resposta por meio grau. E, na secção (4), esqueci-me de somar 53, tendo mais uma vez errado a resposta por meio grau.

Em conclusão, permitam-me reconhecer o valioso apoio que recebi do Sr. F. G. Brabant, Mestre do Corpus Christi College, Oxford, que da forma mais cuidadosa e paciente reviu as minhas demonstrações, chegando primeiro a cada resultado de forma independente, tendo assim detetado vários erros que me escaparam. Para além disso, também facultou para o nº59 uma resposta bastante mais clara do que a minha: $\frac{abc}{3} \cdot \sqrt{\cap A \cap B \cap C}$.

É possível que outros erros nos tenham porventura escapado aos dois, aguardando assim o olhar incisivo de algum leitor crítico, para o qual a alegria da descoberta, e a superioridade intelectual que irá assim perceber nele próprio em relação ao autor deste pequeno livro, irão, espero, compensar em parte o tempo e esforço que a sua análise lhe poderá ter custado!

C. L. D.

CH. CH., Oxford.

Maio, 1893.

ÍNDICE

Capítulo I. Perguntas	
Capítulo II. Respostas	
Capítulo III. Soluções	

Classificação de ramos da matemática

Aritmética. Nº 31.

Álgebra:

Equações. Nº 8, 25, 39, 52, 68.

Séries. Nº 21, 32.

Equações indeterminadas. Nº 47.

Propriedades dos números. Nº 1, 14, 29, 44, 61.

Probabilidades. Nº 5, 10, 16, 19, 23, 27, 38, 41, 45, 50, 58, 66.

Geometria pura, plana Nº 2, 3, 9, 15, 17, 18, 20, 24, 26, 30, 34, 35, 36, 40, 46, 51, 57, 62, 64, 71.

Trigonometria:

Plano. Nº 4, 6, 7, 11, 12, 13, 18, 22, 28, 37, 42, 43, 48, 54, 55, 56, 57, 60, 65, 69.

Sólido. Nº 49, 59, 63, 70.

Geometria Algébrica:

Plano. Nº 53.

Sólido. Nº 67.

Cálculo diferencial:

Máximos e mínimos. Nº 33.

Probabilidades Transcendentes. Nº 72.

Problemas de Almofada

Capítulo I

Perguntas

1. (28)²

Determine uma fórmula geral para dois quadrados cuja soma seja igual a 2.

[27/3/84]

2. (X)

Num triângulo dado, trace uma linha paralela à base, de modo a que os segmentos laterais, interceptados entre esta e a base, sejam iguais à base.

3. (X)

Demonstre que, se os lados de um quadrilátero passarem pelos vértices de um paralelograma e se três deles forem atravessados por esses vértices, o quarto também será.

4. (X)

Trace, num triângulo acutângulo, um triângulo em que os lados perfazem, em cada um dos vértices, ângulos iguais aos lados do triângulo dado.

[19/4/76]

5. (X, X)

Um saco contém uma ficha que se sabe ser branca ou preta. É colocada uma ficha branca, chocalha-se o saco e é retirada uma ficha branca. Qual é a probabilidade de agora tirar uma ficha branca?

[8/9/87]

6. (X, X)

Dadas as alturas das linhas traçadas desde os vértices de um triângulo até aos pontos médios dos lados opostos, determine as medidas dos seus lados e ângulos.

7. (X, X)

² Os números entre parenteses indicam as páginas onde se pode encontrar as respetivas partes do problema.

Dados 2 lados adjacentes e o respetivo ângulo de um quadrilátero e sabendo que os ângulos das outras extremidades dos 2 lados são retos, calcule (1) os lados remanescentes e (2) a área.

[4 ou 5/89]

8. (X, X)

Alguns homens sentaram-se num círculo de maneira a que cada um tivesse dois vizinhos e um determinado número de xelins. O primeiro tinha 1 a mais do que o segundo, o qual tinha 1 a mais do que o terceiro, e assim sucessivamente. O primeiro deu 1 ao segundo, o qual deu 2 ao terceiro e assim sucessivamente, cada um dando mais 1 do que o que recebeu enquanto fosse possível. Houve então 2 vizinhos em que um dos quais tinha 4 vezes mais do que o outro. Quantos homens lá estavam? E quanto tinha o homem mais pobre inicialmente?

[3/89]

9. (X)

Dadas duas linhas que se encontram num ponto e dado um ponto dentro do ângulo nelas contido, trace duas linhas em ângulos retos em relação uma à outra desde o ponto dado, de modo a formar dois triângulos iguais com as linhas dadas e a linha que une a sua intersecção com o ponto dado.

[11/76]

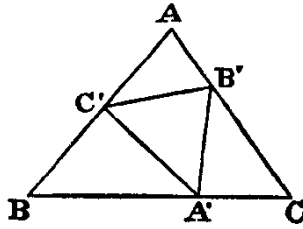
10. (X, X)

Uma mesa de bilhar triangular tem 3 bolsas, uma em cada canto, uma das quais tem espaço apenas para uma bola, enquanto as outras têm espaço para duas. Existem 3 bolas na mesa, cada uma contendo uma única moeda. A mesa está inclinada para cima de maneira a que as bolas rolem para um canto, que não sabemos qual é. A «expectativa» para o conteúdo das bolsas é de $2/6$. Que valores têm as moedas?

[8/90]

11. (X, X)

Um triângulo ABC tem inscrito nele outro triângulo $A'B'C'$ de modo a que $\angle BA'C' = \angle CB'A' = \angle AC'B' = \theta$; tornando os dois triângulos semelhantes. Calcule a proporção entre os lados homólogos e resolva para « $\theta = 90^\circ$ ».



É possível demonstrar que os triângulos são semelhantes da seguinte forma:

$$\angle C'A'B' + \angle B'A'C = \text{suplementar de } \theta,$$

$$\angle B'A'C + \angle A'CB' = \text{suplementar de } \theta;$$

\therefore estes pares são iguais; $\therefore \angle C'A'B' = C$.

Assim, $\angle A'B'C' = A$ e $\angle B'C'A' = B$.

Seja $C'A' = ka$; $\therefore A'B' = kb$ e $B'C' = kc$. Terá de se encontrar k .

[31/2/82]

12. (X, X)

Dado o semiperímetro e a área de um triângulo tal como o volume do cuboide cujas extremidades são iguais aos lados do triângulo, determine a soma dos quadrados dos seus lados.

[23/1/91]

13. (X, X)

Dados os raios de dois círculos que se intersectam e as distâncias entre os seus dois centros, calcule a área do quadrilátero formado pelas tangentes nos pontos de intersecção.

[3/89]

14. (X)

Prove que 3 vezes a soma de 3 quadrados é também a soma de 4 quadrados.

[2/12/81]

15. (X)

Demonstre que, se uma figura é tal que os ângulos opostos de qualquer quadrilátero inserido são suplementares, essa figura é um círculo.

[3/91]

16. (X, X)

Existem dois sacos; um contém uma ficha que se sabe ser branca ou preta e o outro contém 1 branca e 2 pretas. É colocada uma ficha branca no primeiro saco, chocalha-se o mesmo e é retirada uma ficha branca. Que procedimento irá dar a maior probabilidade de

tirar uma ficha branca — tirar uma ficha de um dos dois sacos sem saber qual é qual ou juntar os conteúdos dos sacos num só e depois tirar uma ficha?

[10/87]

17. (X)

Num dado triângulo, trace uma linha paralela à sua base de modo a que, se, desde as suas extremidades, forem traçadas linhas paralelas aos lados que terminem na base, estas deverão, em conjunto, ter a altura da primeira linha.

[3/89]

18. (X, X)

Indique um ponto, na base de um dado triângulo, de modo a que, se a partir do mesmo se desenharem perpendiculares nos lados, a linha que liga as extremidades deva ser paralela à base. (1) Trigonometricamente. (2) Geometricamente.

[11/89]

19. (X, X)

Temos 3 sacos; um contém uma ficha branca e uma preta, outro contém duas brancas e uma preta e o terceiro, três brancas e uma preta. Não se sabe em que ordem os sacos estão colocados. É retirada uma ficha branca de um dos sacos e uma preta de outro. Qual a probabilidade de tirar uma ficha branca do último saco?

20. (X)

Marque na base de um triângulo um ponto de modo a que, se se desenhasse duas linhas a partir dele, terminando nos lados, uma sendo perpendicular à base e outra ao lado esquerdo, as mesmas devam ser iguais.

[5/88]

21. (X, X)

Some a série $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \dots$ até (1) n termos, até (2) 100 termos.

[7/4/89]

22. (X, X)

Dadas as 3 alturas de um triângulo, determine (1) os seus lados, (2) ângulos e (3) área.

[4/6/89]

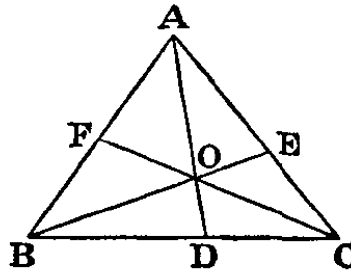
23. (X, X)

Um saco contém 2 fichas; sabe-se que cada uma é preta ou branca. São inseridas 2 brancas e uma preta e retiradas 2 brancas e uma preta. Posteriormente, é inserida uma branca e retirada uma branca. Qual é agora a probabilidade de conter 2 brancas?

[25/9/87]

24. (X, X)

Se, a partir dos vértices de um triângulo ABC , as linhas AD , BE e CF forem traçadas, intersectando em O , calcule a razão $\frac{DO}{DA}$ em termos das duas razões $\frac{EO}{EB}$ e $\frac{FO}{FC}$.



[5/86]

25. (X, X)

Se ε , α e λ representam frações próprias e se num hospital ε pacientes perderam um olho, α um braço e λ uma perna, qual é o mínimo número possível de pacientes a perder os três?

[7/2/76]

26. (X)

Inscruva um triângulo num triângulo dado; as suas áreas devem ter uma proporção de menos de uma unidade, os lados devem ser paralelos e os vértices devem ser equidistantes entre si.

[4/89]

27. (X, X)

Temos 3 sacos; cada um contém 6 fichas. Um contém 5 fichas brancas e uma preta, outro contém 4 brancas e 2 pretas e o terceiro contém 3 brancas e 3 pretas. São retiradas, ao acaso, 2 fichas, uma preta e uma branca, de dois dos sacos (não sabemos quais). Qual é a probabilidade de tirar uma ficha branca do último saco?

[4/3/80]

28. (X, X)

Se os lados de um triângulo, definidos por partição cíclica, forem divididos em proporção áurea e os seus pontos unidos, qual a proporção entre a área do triângulo assim formado e a área do triângulo dado?

[12/78]

29. (X)

Prove que a soma de 2 quadrados diferentes, multiplicada pela soma de 2 quadrados diferentes, resulta na soma de 2 quadrados em 2 maneiras diferentes.

[3/12/81]

30. (X)

Trace num triângulo uma linha paralela à base, de modo a que, se se desenhar linhas a partir das suas extremidades até à base, paralelas aos lados, estas devam ser em conjunto o dobro da primeira linha traçada.

[15/3/89]

31. (X, X)

No dia 1 de julho, o meu relógio de pulso marcava as 8 horas da manhã e o meu relógio de parede marcava as *8h04*. Fui com o relógio de pulso até Greenwich e, quando este marcava meio-dia, eram na verdade *12h05*. Nessa noite, quando o mesmo marcava as *18 horas*, o relógio de parede marcava *17h59*.

No dia 30 de julho, o meu relógio de pulso marcava as 9 horas da manhã e o relógio de parede marcava as *8h57*. Em Greenwich, quando o relógio de pulso marcava as *12h10*, eram na verdade *12h05*. Nessa noite, quando o relógio de pulso marcava as *19h*, o relógio de parede marcava as *18h58*.

Apenas dou corda ao meu relógio de pulso uma vez por jornada e costuma manter-se uniforme durante o dia; o relógio de parede nunca para e vai marcando o tempo de maneira uniforme.

Como poderei saber quando é que é realmente meio-dia no dia 31 de julho?

[14/3/89]

32. (X, X)

Some a série $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \dots$ (1) até n termos; (2) até 100 termos.

[7/4/89]

33. (X)

Inscreva num círculo dado o quadrilátero máximo com dois lados paralelos, um sendo o dobro do outro.

34. (X)

Trace 2 linhas desde um dado ponto, uma para o centro de um dado círculo e outra cortando desde o círculo um segmento contendo um ângulo igual àquele entre as linhas.

[21/12/74]

35. (X)

Descreva um círculo a partir de um triângulo dado, cortando cada lado em dois pontos de modo a que raios traçados perpendicularmente aos lados sejam divididos por esses lados em proporções determinadas.

[11/76]

36. (X)

Trace uma linha num triângulo dado desde um ponto num dos lados até um ponto no outro lado, perpendicularmente a um destes lados e igual à soma dos segmentos destes lados entre essa linha e a base.

[3/89]

37. (X, X)

Dois círculos interseccionam-se de tal maneira que a sua corda comum subtende ângulos de 30° e 60° nos seus centros. Que fração do círculo mais pequeno está contida no maior?

[12/91]

38. (X, X)

Temos 3 sacos, A , B e C . O A contém 3 fichas vermelhas, o B 2 vermelhas e uma branca e o C uma vermelha e 2 brancas. São escolhidos dois sacos, ao acaso, e é retirada uma ficha de cada, ambas vermelhas. As fichas são repostas e repete-se a experiência com os mesmos dois sacos, uma das fichas calhando ser vermelha. Qual a probabilidade de a outra também ser vermelha?

[3/76]

39. (X, X)

A e B começam às 6 horas da manhã do mesmo dia a andar ao longo de uma estrada na mesma direção, estando B 14 milhas à frente de A e cada um andando desde as 6h00 às 18h00 diariamente. A anda 10 milhas, em passo constante, no primeiro dia, 9 no segundo, 8 no terceiro e assim sucessivamente. B anda 2 milhas, em passo constante, no primeiro dia, 4 no segundo, 6 no terceiro e assim sucessivamente. Quando e onde é que se encontram?

[16/3/78]

40. (X)

Num dado triângulo, cujos ângulos de base são agudos, trace duas linhas, em ângulos retos relativamente à base, que juntas sejam iguais à linha desenhada desde o vértice, em ângulos retos relativamente à base, de modo a que (1) as mesmas sejam

equidistantes desde a linha desenhada até ao vértice e (2) que sejam equidistantes desde as extremidades da base.

[5/76]

41. (X, X)

O meu amigo traz-me um saco com quatro fichas em que cada qual é preta ou branca. Ele diz-me para tirar duas, que calham ser brancas. De seguida diz-me «queria ter-te dito, antes de começares, que havia pelo menos *uma* ficha branca no saco. No entanto, agora já o sabes sem que eu tenha tido de to dizer. Retira outra vez.»

- (1) Qual é agora a minha probabilidade de tirar uma branca?
- (2) Qual teria sido se ele não tivesse dito nada?

[9/87]

42. (X, X)

Se os ângulos de um dado triângulo fossem bissetados e duas linhas desenhadas através dos seus vértices em ângulos retos às bissetrizes de modo a formar um novo triângulo, qual a proporção da área deste novo triângulo em relação à área do triângulo dado?

[17/5/78]

43. (X)

Trace duas linhas, intersecadas, desde as extremidades da base de um dado triângulo terminando nos lados e formando, assim, um triângulo isósceles na base e um quadrilátero, igual ao mesmo, no vértice do ângulo.

[2/82]

44. (X)

Sendo a e b dois números primos entre si, determine um valor para n que faça $(a^n - 1)$ um múltiplo de b .

[18/3/81]

45. (X, X)

Se um número infinito de varas for partido, qual a probabilidade de encontrar pelo menos uma que esteja partida no meio?

[5/84]

46. (X)

Num dado triângulo, cuja base é dividida num determinado ponto, inscreva um triângulo com ângulos iguais aos ângulos dados e em que um dos seus vértices seja o ponto dado.

[19/11/87]

47. (X, X)

Resolva as seguintes 2 equações indeterminadas:

$$(1) \quad \frac{x}{y} = x - z;$$

$$(2) \quad \frac{x}{z} = x - y;$$

E determine os limites, se existirem, entre os quais os valores *reais* se situam.

[12/90]

48. (X)

Se se descreverem semicírculos nos lados de um dado triângulo, se as suas tangentes em comum forem traçadas e as suas alturas forem α, β, γ , prove que

$$\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right)$$

é igual ao semiperímetro do triângulo.

[9/2/81]

49. (X, X)

Sejam os lados de uma pirâmide quadrangular formados por quatro triângulos equiláteros, calcule a relação entre o seu volume e o tetraedro formado pelos triângulos.

[16/11/86]

50. (X, X)

Temos 2 sacos, H e K , cada um contendo 2 fichas, e sabemos que cada ficha é preta ou branca. É acrescentada uma ficha branca ao saco H , chocalha-se o saco e transfere-se uma ficha (sem olhar para a mesma) para o saco K ; o processo repete-se com uma ficha a ser transferida para o saco H . Qual é agora a probabilidade de tirar uma ficha branca do saco H ?

51. (X)

Trace uma linha desde um dado ponto num lado de um dado triângulo até ao outro lado de modo a que, se desde as suas extremidades forem traçadas linhas em ângulos retos à base, a sua soma deva ser igual à primeira.

[12/81]

52. (X, X)

Cinco pedintes sentaram-se num círculo e cada um amontoou, numa pilha à sua frente, os tostões que recebeu nesse dia. As cinco pilhas eram iguais.

Então, o mais velho e sábio deles começou a falar enquanto desdobrava um saco vazio.

«Meus amigos, deixem-me ensinar-vos um belo joguinho! Primeiro, declaro-me o “Número Um”; o meu vizinho do lado esquerdo é o “Número Dois” e assim sucessivamente até ao “Número Cinco”. Depois, coloco neste saco a totalidade dos meus ganhos do dia e passo-o à pessoa que se senta do lado esquerdo do meu vizinho à esquerda, ou seja, ao “Número Três”. O seu papel no jogo é tirar do saco e dar aos seus dois vizinhos a quantidade de tostões representativa dos seus nomes (isto é, deverá dar quatro tostões ao “Número Quatro e dois ao “Número Dois”), de seguida deverá colocar *dentro* do saco metade do que continha quando o recebeu e depois deverá passá-lo tal como eu o fiz, ou seja, à pessoa sentada do lado esquerdo do seu vizinho à esquerda, que será, obviamente, o “Número Cinco”. *Este* deverá proceder da mesma maneira e passá-lo ao “Número Dois”, a partir do qual o saco passará ao “Número Quatro” e para mim outra vez. Se algum dos jogadores não for capaz de prover da sua própria pilha a quantidade que deverá colocar no saco, poderá tirar o que falta de qualquer uma das outras pilhas *exceto da minha!*»

Os outros pedintes lançaram-se no jogo com bastante entusiasmo e na altura devida o saco voltou ao “Número Um”, que nele colocou os dois tostões que tinha recebido durante o jogo e o atou cuidadosamente com um cordel. Depois, disse «é um joguinho *mesmo* belo», levantou-se e saiu do local apressadamente. Os outros quatro pedintes entreolharam-se com semblantes pesarosos. Não restava nem um tostão a nenhum deles!

Quanto tinha cada um no início do jogo?

[16/2/89]

53. (X, X)

Numa mesa de bilhar triangular, é dado um ponto através das suas coordenadas trilineares. Uma bola, lançada a partir desse ponto, acerta nos três lados e volta ao ponto de partida. Determine, em termos das coordenadas trilineares e dos ângulos do triângulo, o ponto onde a bola acertou no segundo lado.

[6/4/89]

54. (X, X)

A partir de um triângulo dado, corte, com linhas paralelas aos lados, 3 triângulos, de modo a que o hexágono remanescente seja equilátero. Calcule também as alturas dos

seus lados em termos dos lados do triângulo e as proporções nas quais os lados desse triângulo estão divididos.

[18/4/86]

55. (X)

Dadas três torres cilíndricas num plano, marque um ponto no plano a partir do qual as torres devam parecer ter a mesma largura.

[20/12/74]

56. (X, X)

Construa um triângulo a partir das suas 3 alturas.

[27/6/84]

57. (X)

Num dado triângulo inscreva três quadrados cujas bases devem estar ao longo dos lados do triângulo e cujos lados superiores devem formar um triângulo;

(1) Geometricamente; (2) trigonometricamente.

[27/1/91]

58. (X)

São marcados três pontos, ao acaso, num plano infinito. Calcule a probabilidade de estes formarem os vértices de um triângulo obtusângulo.

[20/1/84]

59. (X)

Pegemos num tetraedro com cada aresta igual à sua oposta de modo a que as suas faces sejam todas (olhando a partir de fora) idênticas. Calcule o seu volume em termos das suas arestas.

[8/90]

60. (X)

Dado um triângulo ABC com a sua base BC dividida em D numa razão de m para n , determine os ângulos BAD e CAD .

[21/3/90]

61. (X)

Demonstre que, pegando nuns quaisquer 3 números, os quais não podem estar em Progressão Aritmética e cuja soma seja um múltiplo de 3, a soma dos seus quadrados será também a soma de outro conjunto de 3 quadrados em que os 2 conjuntos não tenham um termo comum.

[1/12/81]

62. (X)

Dadas duas linhas que se encontram num ponto e dado um ponto situado dentro do ângulo por elas formado, trace uma linha por esse ponto que forme com as linhas dadas o menor triângulo possível.

[12/76]

63. (X)

Dados 2 quadrados iguais, em planos horizontais diferentes, com os seus centros na mesma linha vertical, colocados de modo a que os lados de um sejam paralelos às diagonais do outro e a uma distância tal que, unindo vértices vizinhos, sejam formados 8 triângulos equiláteros, calcule o volume do sólido assim formado.

[3, 4/9/90]

64. (X)

Dado um triângulo e um ponto no seu interior tal que a sua distância de um dos lados é menor do que a distância de qualquer um dos outros, trace um círculo, com o tal ponto no centro, de modo a que as suas interseções nos lados sejam iguais aos lados de um triângulo retângulo.

[18/12/74]

65. (X)

Quantas formas existem para triângulos cujos ângulos são todos alíquotas de 360° ?

[5/89]

66. (X)

Existem 2 fichas num saco e tudo o que se começa por saber é que estas são brancas ou pretas. Após se ter repetido um certo número de vezes a extração de uma ficha e a sua reposição, a ficha sendo branca de todas as vezes, a probabilidade de extrair outra branca na próxima vez é $\frac{a}{a+\beta}$. Dado que a experiência é repetida mais m vezes e a ficha extraída é sempre branca, qual será então a probabilidade de a próxima a ser extraída ser branca?

[9/89]

67. (X)

Coloquemos um tetraedro regular com um vértice virado para baixo numa cavidade à sua medida e giremo-lo ao longo do seu eixo vertical num ângulo de 120° , levantando-o não mais do que o necessário, até encaixar novamente na cavidade. Indique o lugar geométrico de um dos vértices girados.

[27/1/72]

68. (X)

Cinco amigos acordaram fundar a empresa Sociedade de Vinhos Lda. Contribuíram com quantidades iguais de vinho, compradas ao mesmo preço. De seguida, elegeram entre eles um tesoureiro e um vendedor, vendendo o vinho 10% acima do seu valor de custo.

No primeiro dia o vendedor bebeu uma garrafa, vendeu algumas e deu os recibos ao tesoureiro.

No segundo dia não bebeu nenhuma, mas ficou com os lucros de uma das garrafas vendidas e deu o resto dos recibos ao tesoureiro.

Nessa noite o tesoureiro visitou as caves e contou o vinho que restava. «Isto dar-nos-á apenas 11 libras» murmurou para si mesmo enquanto saía das caves.

Ao terceiro dia o vendedor bebeu uma garrafa, ficou com os lucros de outra e deu o resto dos recibos ao tesoureiro.

Não restava mais vinho. A empresa teve uma reunião e descobriram, para seu desgosto, que os lucros (ou seja, os recibos que o tesoureiro tinha, menos o valor original do vinho) apenas chegavam a 6 centavos a garrafa em todo o inventário. Estes lucros acumularam-se em 3 somas iguais nos 3 dias (ou seja, os recibos do dia dados ao tesoureiro, menos o preço original do vinho retirado durante o dia, davam o mesmo valor de todas as vezes), mas é claro que apenas o vendedor sabia disto.

- (1) Quanto vinho tinham comprado?
- (2) A que preço?

[28/2/89]

69. (X)

De cada um dos ângulos de um triângulo ABC , por definição de partição cíclica, cortamos uma determinada fração própria, sendo os valores aritméticos das 3 frações representados por k , l e m . Partindo do princípio que o triângulo formado pelas linhas traçadas é semelhante ao primeiro eo ângulo formado pelas linhas traçadas a partir de B a C é igual a A e assim sucessivamente, determine k , l e m como funções semelhantes de uma única variável. Calcule também a razão de cada lado do segundo triângulo com os lados correspondentes do primeiro.

[8/89]

70. (X)

Coloquemos um tetraedro regular com uma face virada para a frente. Suponhamos que uma série de triângulos, iguais a essa face, construídos no plano dessa face e tendo

uma base em comum com ela, estão todos em torno do tetraedro até onde der. Determine (1) o lugar geométrico dos seus vértices; (2) a posição do vértice do triângulo cujo ângulo esquerdo da base tem uma amplitude de 15° ; (3) o ângulo esquerdo da base daquele que (com rotação à direita) cobre porções das quatro faces do tetraedro e cujo vértice coincide com os *seus* vértices; (4) o ângulo esquerdo da base daquele que (considerado do mesmo modo) ocupa todas as quatro faces e a face frontal e a direita uma segunda vez, e cujo vértice coincide com o vértice distal da base do tetraedro.

71. (X)

Posicione um hexágono num triângulo com os seus lados opostos iguais e paralelos e três deles posicionados ao longo dos lados do triângulo, de modo a que as suas diagonais se intersetem num dado ponto.

[14/14/74]

72. (X)

Um saco contém duas fichas, das quais nada sabemos a não ser que estas são pretas ou brancas. Determine as suas cores sem as tirar do saco.

[8/9/87]

Capítulo II

Respostas

5. (X)

Dois terços.

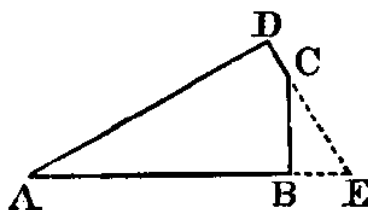
6. (X)

Chamando aos lados $2a$, $2b$ e $2c$, e às linhas α , β e γ , temos

$$a^2 = \frac{-a^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2}{9}$$

$$\sphericalangle A = \frac{5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2} \cdot \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}}$$

7. (X)



Sendo AB e AD os lados dados e B e D os \angle 's retos, e sendo $AB = b$, $AD = d$.

$$(1) BC = \frac{d-b}{\sphericalangle A}; CD = \frac{b-d}{\sphericalangle A}$$

$$(2) \text{área} = \frac{2bd - (b^2 + d^2)}{2 \sphericalangle A}$$

8. (X)

7 homens, 2 xelins.

10. (X)

2 florins e seis centavos ou meia coroa e 2 xelins.

11. (X)

A proporção pedida é igual a

$$\frac{\cap A \cap B \cap C}{\cap \theta (1 + \cup A \cup B \cup C) + \cup \theta \cap A \cap B \cap C}$$

Se $\theta = 90^\circ$, será igual a $\frac{\cap A \cap B \cap C}{1 + \cup A \cup B \cup C}$.

12. (X)

Se $s = \text{semiperímetro}$, $m = \text{área}$, $v = \text{volume}$; então

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cdot \left(s^2 - \frac{v}{s} - \frac{m^2}{s^2} \right)$$

13. (X)

Se $2M$ é igual à área do quadrilátero cujos vértices são os centros e os pontos de interseção; e se os seus lados são a e b e a diagonal que une os centros é c , a área pedida

é:

$$= \frac{32M^3}{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot (c^2 + a^2 - b^2)}$$

16. (X)

O primeiro procedimento dá uma probabilidade de $\frac{1}{2}$; o segundo, $\frac{5}{12}$. Assim, o primeiro é o melhor.

18. (X)

(1) Dividir a base BC , em E , de modo a que $\frac{BE}{EC} = \frac{\cap 2C}{\cap 2B}$.

(2) Construir em B e C os ângulos retos ABD e ACD ; traçar AD cortando BC em E , que é o ponto pedido.

19. (X)

Onze dezassete avos.

21. (X)

(1) $\frac{\overline{n \cdot n + 1} \cdot \overline{n + 4} \cdot \overline{n + 5}}{4}$

(2) 27.573.000.

22. (X)

Ao chamar às alturas dadas α , β e γ ; e k^2 à fração

$$\frac{2\alpha^2\beta^2\gamma^2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4 + \alpha^4\beta^4)}{4\alpha^4\beta^4\gamma^4},$$

$$(1) a = \frac{1}{ka}, \dots; (2) \cap A = k\beta\gamma, \dots; (3) \text{área} = \frac{1}{2k}.$$

23. (X)

Dois quintos.

24. (X)

$$\frac{DO}{DA} + \frac{EO}{EB} + \frac{FO}{FC} = 1; \text{ em que qualquer um pode ser calculado a partir dos outros dois.}$$

25. (X)

$$\varepsilon + \alpha + \lambda - 2.$$

27. (X)

Dezassete vinte e cinco avos.

28. (X)

$$7 - 3\sqrt{5}.$$

31. (X)

Quando o relógio marca as $12h02m29\frac{2}{8}\frac{7}{8}$ seg.

32. (X)

$$(1) \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+13)}{6};$$

$$(2) 358550.$$

37. (X)

$$\frac{4+\sqrt{3}}{12} - \frac{1+\sqrt{3}}{2\pi}, \text{ ou seja, aproximadamente } 0,044.$$

38. (X)

Quarenta e nove setenta e dois avos.

39. (X)

Encontram-se ao fim de 2 dias e 6 horas e ao fim de 4 dias; as distâncias são 23 milhas e 34 milhas.

41. (X)

(1) Sete doze avos. (2) Um meio.

42. (X)

$$\frac{abc}{2(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

45. (X)

0,6321207...

47. (X)

Um primeiro conjunto de valores é 0, 0, 0.

Um segundo conjunto é $x = y = 0$; z tem qualquer valor.

Um terceiro é $x = z = 0$; y tem qualquer valor.

E o quarto conjunto é $x = \frac{k^2}{k-1}$, $y = z = k$; em que k tem qualquer valor.

Se x tiver qualquer valor positivo inferior a 4, y e z não são reais.

49. (X)

Dois.

50. (X)

Dezassete vinte e sete avos.

52. (X)

2 libras, 18 xelins e 0 centavos.

53. (X)

A porção retirada do segundo lado é igual a

$$\frac{(\alpha \cap C + \gamma \cap A)(2\gamma \supset A + \beta)}{\alpha \supset C + \gamma \supset A + \beta} + \frac{\beta \supset A + \gamma \supset 2A}{\cap A}$$

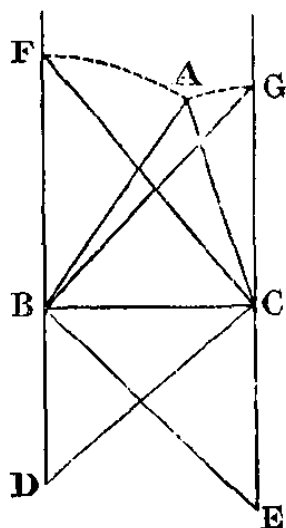
54. (X)

O lado AB deve ser dividido em D e G de modo a que

$$AD:DG:GB :: \frac{1}{a}:\frac{1}{c}:\frac{1}{b}$$

E o mesmo para os outros lados. Cada lado do hexágono é igual a $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

56. (X)



Traçar BC , CE e BD iguais às alturas dadas de modo a formar \angle 's retos em B e C e assim ter DB e EC . Traçar DC e traçar $CF \perp$ a ela. Traçar EB e traçar $BG \perp$ a ela. Com o centro em B , distância em BF , traçar um círculo, e com o centro em C e a distância em CG , traçar outro, ambos se cruzando em A ; traçamos os segmentos AB e AC . Pode-se demonstrar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo pedido. O resto da construção é obvio.

57. (X)

(1) *Geometricamente*

Se descrevermos quadrados nos lados externos do triângulo dado e se prolongarmos os seus lados de modo a formarem um novo triângulo, e se os lados do triângulo dado se dividirem do mesmo modo que os do novo triângulo, as suas partes centrais serão as bases dos quadrados pedidos.

(2) *Trigonometricamente*

Se a, b e c forem os lados do triângulo dado e m a sua área, e se x, y e z forem os lados dos quadrados pedidos então,

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2m} + 1$$

58. (X)

$$\frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$

59. (X)

Se chamarmos a, b e c às alturas dos três pares de arestas e A, B e C aos \angle 's correspondentes em cada face, o volume é igual a

$$\frac{abc}{6} \cdot \sqrt{1 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 2 \sin A \sin B \sin C}$$

60. (X)

$$\cot BAD = \frac{(m+n) \cot A + n \cot B}{m}$$

$$\text{Do mesmo modo, } \cot CAD = \frac{(m+n) \cot A + m \cot C}{n}$$

63. (X)

Se cada lado do quadrado for igual a 2, o volume é igual a

$$\frac{8 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{2} + 1)}{3}$$

66. (X)

$$\frac{2^m \cdot (\alpha - \beta) + \beta}{2^m \cdot (\alpha - \beta) + 2\beta}$$

67. (X)

Se o centro da face horizontal for a origem e o eixo X passar por um dos vértices dessa face, o eixo Y for paralelo à aresta oposta dessa face e o eixo Z for perpendicular a essa face, e se chamarmos h à altura (medida para baixo) do tetraedro e a à interseção do eixo X , as equações do lugar geométrico são

$$(x + \sqrt{3} \cdot y) \cdot (h - z) = ah$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$

68. (X)

(1) 5 dúzias; (2) 8/4 a garrafa.

69. (X)

$$(1) k = \frac{\theta - B}{A}; l = \frac{\theta - C}{B}; m = \frac{\theta - A}{C}$$

(2) Chamando ao novo triângulo $A'B'C'$,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2 \sin \theta$$

70. (X)

(1) Para baixo pela aresta traseira, para cima outra vez e assim sucessivamente.

(2) Aproximadamente 0,7 descendo pela aresta traseira. (3) Aproximadamente 18,65°. (4) Aproximadamente 14,53°.

72. (X)

Uma é preta e a outra branca.

Capítulo III

Soluções

1. (X)

Seja u e v os números.

Então, $u^2 + v^2 = 2$.

Evidentemente, $(1 + k), (1 - k)$ é uma fórmula para os quadrados.

Mais ainda, se substituirmos 2 por $2m^2$ (o que não interferirá com o problema, uma vez que podemos dividir por m^2 e obter $\frac{u^2}{m^2} + \frac{v^2}{m^2} = 2$), a fórmula anterior converte-se em $(m^2 + k), (m^2 - k)$.

Ora, como se trata de *quadrados*, a sua semelhança com

$$(a^2 + b^2 + 2ab), (a^2 + b^2 - 2ab),$$

é evidente; pelo que o problema depende do já conhecido cálculo de a e b , em que

$(a^2 + b^2)$ é um quadrado; e podemos considerar $2ab$ igual a k .

Uma fórmula geral para isto é:

$$a = x^2 - y^2,$$

$$b = 2xy;$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2;$$

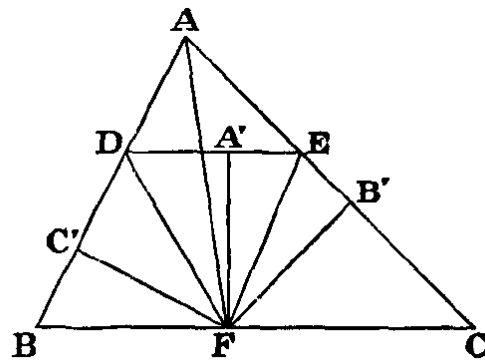
\therefore a fórmula $u^2 + v^2 = 2m^2$ converte-se em

$$(x^2 - y^2 + 2xy)^2 + (x^2 - y^2 - 2xy)^2 = 2(x^2 + y^2)^2;$$

$$\text{ou seja, } \left(\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2 - 2xy}{x^2 + y^2}\right)^2 = 2.$$

Q. E. F.

2. (X)



(Análise)

Seja ABC o triângulo e DE a linha pedida de modo a que

$$BD + CE = BC.$$

A partir de BC cortamos BF igual a BD , então $CF = CE$.

Traçamos DF e EF .

Ora, $\angle BDF = \angle BFD = \angle FDE$ (tal como em I. 29 de *Elementos* de Euclides);

semelhante a $\angle CEF = \angle FED$;

$\therefore \angle$'s BDE e CED são bisetados por DF e EF , e F é o centro do \odot circunscrito ao triângulo ADE .

Traçamos desde $F \perp BD, DE, EC$, sendo estas \perp iguais.

Assim, ao traçarmos AF , esta bisseta $\angle A$.

E assim temos a construção.

(Síntese)

Bissetar $\angle A$ com AF ; traçar desde F, FB' e $FC' \perp AC$ e AB ; traçar também $FA' \perp BC$ e igual a FB' , e através de A' traçar $DR \perp a FA'$, ou seja, $\parallel a BC$. DE é, então, a linha pedida.

\therefore os \angle 's em A', B' e C' são retos e $FA' = FB' = FC'$,

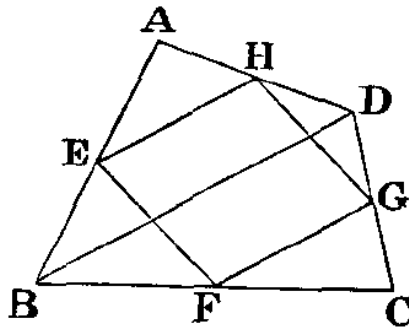
\therefore os \angle 's BDE e CED são bisetados por DF e EF .

Ora, $\angle BFD = \angle FDA'$; \therefore este $\hat{=}$ $\angle BDF$; $\therefore BF = BD$;

Do mesmo modo, $CF = CE$; $\therefore BC = BD + CE$.

Q.E.F.

3. (X)



Seja $ABCD$ o quadrilátero e os seus lados AB , BC e CD , bissetados pelos vértices do paralelograma $EFGH$.

Unimos BD .

\therefore , no triângulo BCD os lados BC e CD são bissetados em F e G , $\therefore FG$ é paralela a BD , mas EH é paralela a FG ;

$\therefore EH$ é paralela a BD ;

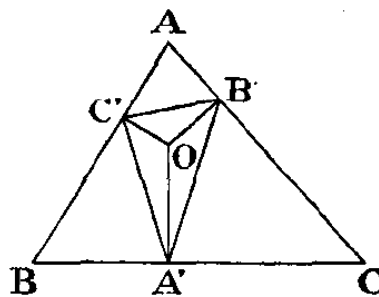
\therefore os triângulos AEH e ABD são semelhantes;

então AE é metade de AB ;

$\therefore AH$ é metade de AD .

Q. E. D.

4. (X)



Seja ABC o triângulo dado e $A'B'C'$ o triângulo pedido, de modo a que $\angle BA'C' = \angle CA'B'$, etc.

Evidentemente, $A'C'$ e $A'B'$ têm a mesma inclinação relativamente à linha traçada desde A' , \perp a BC ; e o mesmo se dá com as outras, ou seja, estas \perp 's bissetam os \angle 's em A' , B' e C' ;

\therefore cortam-se no mesmo ponto. Traçamo-las e cortamo-las em O , e chamamos 2α a $\angle C'A'B'$, e assim sucessivamente.

$$\text{Então, } (\beta + \gamma) = \pi - \angle B'OC' = A;$$

$$\therefore 2A = 2(\beta + \gamma) = \pi - 2\alpha;$$

$$\therefore \alpha = 90^\circ - A;$$

$$\therefore \angle BA'C' = A.$$

Do mesmo modo, $\angle BC'A' = C$.

\therefore o triângulo $BC'A'$ é semelhante ao triângulo BCS ; e o mesmo se aplica aos outros;

$$\therefore BA' = \frac{c}{a} \cdot BC' = \frac{c}{a} \cdot (c - AC') =$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \left(c - \frac{b}{c} \cdot AB' \right) =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b}{a} \cdot (b - CB') =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot CA' =$$

$$= \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} + a - BA'$$

$$\therefore 2BA' = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a} = \frac{2ca}{a} \overset{\text{arco}}{\text{B}};$$

$$\therefore BA' = c \overset{\text{arco}}{\text{B}};$$

$\therefore A'$ é o pé da \perp traçada desde A a BC . A partir daqui a construção é óbvia.

Q. E. F.

5. (X)

À primeira vista pode parecer que o estado do saco *depois* da operação é necessariamente idêntico ao seu estado *antes* da mesma; então a probabilidade seria a mesma que anteriormente, ou seja, $\frac{1}{2}$. No entanto, isso está errado.

As probabilidades, *antes* de acrescentar a ficha, de que o saco tivesse (a) 1 branca e (b) 1 preta, é de (a) $\frac{1}{2}$ e (b) $\frac{1}{2}$. Assim, as probabilidades, depois deste acrescento, de conter (a) 2 brancas e (b) 1 branca e 1 preta, são as mesmas, ou seja, (a) $\frac{1}{2}$ e (b) $\frac{1}{2}$. Então, as probabilidades, que estas duas situações dão ao acontecimento observado, de tirar uma ficha branca, são (a) certeza e (b) $\frac{1}{2}$. Assim, as probabilidades depois de tirar a ficha branca, de que o saco, antes de ela ser retirada, tivesse (a) 2 brancas e (b) 1 branca e 1 preta, são proporcionais a (a) $\frac{1}{2} \cdot 1$ e (b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; ou seja, (a) $\frac{1}{2}$ e (b) $\frac{1}{4}$; ou seja, (a) 2 e (b) 1.

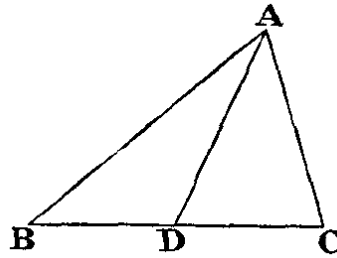
Assim, as probabilidades são $(a) \frac{2}{3}$ e $(b) \frac{1}{3}$. Logo, depois de se tirar uma ficha branca, as probabilidades de o saco agora conter $(a) 1$ branca e $(b) 1$ preta são $(a) \frac{2}{3}$ e $(b) \frac{1}{3}$.

Assim, a probabilidade de agora tirar uma ficha branca é $\frac{2}{3}$.

Q. E. F.

6. (X)

Chamemos aos lados $2a, 2b$ e $2c$, e às linhas em questão, α, β, γ .



Ora, $\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 0$;

$$\therefore \frac{\alpha^2 + a^2 - 4c^2}{2a\alpha} + \frac{\alpha^2 + a^2 - 4b^2}{2a\alpha} = 0;$$

$$\therefore 2\alpha^2 + 2a^2 - 4b^2 - 4c^2 = 0;$$

$$\therefore \alpha^2 = -a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Do mesmo modo, $\beta^2 = 2\alpha^2 - b^2 + 2c^2$;

$$\gamma^2 = 2\alpha^2 + 2b^2 - c^2.$$

Para eliminar b e c , multiplicamos l e m por k , de maneira a que,

$$2k - l + 2m = 0,$$

$$\text{e } 2k + 2l - m = 0;$$

$$\therefore 3(l - m) = 0; \text{ ou seja, } l = m;$$

$$\therefore 2k = -l = -m;$$

assim podemos considerar $k = -1, l = 2$ e $m = 2$;

$$\therefore -\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 = 9a^2;$$

$$\text{ou seja, } a^2 = \frac{-\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2}{9};$$

$\therefore BC$ (que é igual a $2a$) = $\frac{2}{3}\sqrt{-\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2}$, ..., o qual nos dá as alturas dos

lados.

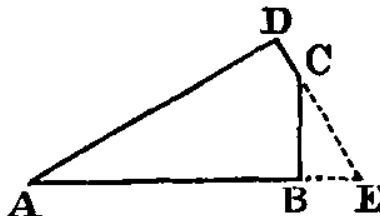
$$\text{Também, } \sphericalangle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 - 2\beta^2 - 2\gamma^2}{2 \cdot \sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2} \cdot \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}} =$$

$$= \frac{5\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{2 \cdot \sqrt{2\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2} \cdot \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}}; \text{ e igual para os outros \u00e2ngulos.}$$

Q. E. F.

7. (X)



Seja AB e AD os lados dados, B e D os \angle s retos e $AB = b$ e $AD = d$.

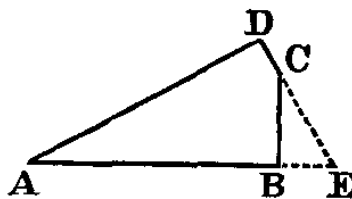
Prolongamos DC e AB at\u00e9 que se unam, resultando assim em E .

Ora, $AE = AD \cdot \sec A = d \sec A$;

\(\therefore\) $BE = d \sec A - b$.

E ainda, $BC = BE \cdot \tan E = (d \sec A - b) \cdot \cot A =$

$$= \frac{d - b \operatorname{csc} A}{\operatorname{csc} A};$$



do mesmo modo, $CD = \frac{b - d \operatorname{csc} A}{\operatorname{csc} A}$; o que responde \u00e0 (1).

E ainda, \u00e1rea = $\frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC + AD \cdot DC) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot (d - b \operatorname{csc} A) + d \cdot (b - d \operatorname{csc} A)}{\operatorname{csc} A} =$$

$$= \frac{2bd - (b^2 + d^2) \operatorname{csc} A}{2 \operatorname{csc} A}; \text{ o que responde \u00e0 (2).}$$

Q. E. F.

8. (X)

Seja m = n\u00famero de homens, k = n\u00famero de xelins do \u00faltimo homem (ou seja, o mais pobre). Ap\u00f3s uma volta, cada um fica com menos um xelim e a pilha que \u00e9 passada cont\u00e9m m xelins. Logo, ap\u00f3s k voltas, cada um fica com menos k xelins, j\u00e1 nada resta ao \u00faltimo homem e a pilha que \u00e9 passada cont\u00e9m mk xelins. Assim, o jogo acaba quando o \u00faltimo homem \u00e9 novamente chamado a contribuir para a pilha, que por sua vez cont\u00e9m

$(mk + m - 1)$ xelins, não restando nada ao penúltimo homem e o primeiro tendo $(m - 2)$ xelins.

É evidente que o primeiro e o último são os únicos 2 vizinhos cujas posses podem estar numa razão de 4 para 1.

Assim,

$$mk + m - 1 = 4(m - 2),$$

ou

$$4(mk + m - 1) = m - 2.$$

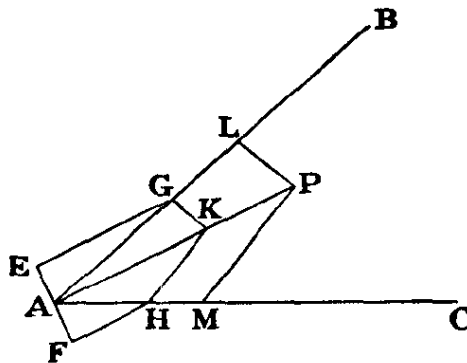
A primeira equação dá $mk = 3m - 7$, ou seja, $k = 3 - \frac{7}{m}$, só poderá ter a solução inteira de $m = 7$ e $k = 2$.

A segunda dá $4mk = 2 - 3m$, a qual, evidentemente, não tem uma solução inteira positiva.

Assim a resposta é 7 homens e 2 xelins.

9. (X)

Seja AB e AC as linhas dadas e P o ponto dado; traçamos AP .



Traçamos EAF através de A , \perp a AP e bissetada em A ; traçamos EG e FH a partir de E e F , paralelas a AP e encontrando-se com AB e AC em G e H ; traçamos KG e KH . Ficamos com o ângulo reto $\angle GKH$. Desde P , traçamos PL e PM , paralelas a KG e KH .

E, assim, o triângulo APL tem, comparativamente ao triângulo AKG , a mesma proporção que AP tem para AK ; o mesmo acontece com os triângulos APM e AKH . Também os triângulos AKG e AKH são iguais, partilhando a mesma base AK e tendo as alturas AE e AF iguais.

\therefore os triângulos APL e APM são iguais, e $\angle LPM$ é obviamente igual a $\angle GKH$; logo, é um ângulo reto.

Q. E. F.

10. (X)

Chamamos-lhes x, y e z e seja $x + y + z = s$.

A probabilidade de a bolsa ter 2 bolas é $\frac{2}{3}$ e, se assim acontecer, a «expetativa» é a média de

$$(y + z), (z + x), (x + y); \text{ ou seja, } \frac{2s}{3}.$$

A probabilidade de ter apenas uma bola é $\frac{1}{3}$ e, se assim acontecer, a «expetativa» é $\frac{s}{3}$.

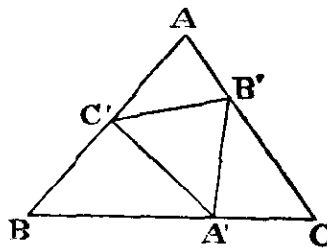
Logo, a «expetativa» total é igual a $\frac{4s}{9} + \frac{s}{9} = \frac{5s}{9}$.

$$\therefore \frac{5s}{9} = 30 \text{ centavos}; \therefore s = 54 \text{ centavos} = 4/6.$$

Assim, as moedas devem ser de 2 florins e seis centavos ou meia coroa e dois xelins.

Q. E. F.

11. (X)



$$\text{Ora, } \frac{BA'}{A'C'} = \frac{\cap(B+\theta)}{\cap_B}; \text{ e } \frac{A'C}{A'B'} = \frac{\cap\theta}{\cap_C}.$$

$$\therefore BA = \frac{\cap(B+\theta)}{\cap_B} \cdot ka; \text{ e } A'C = \frac{\cap\theta}{\cap_C} \cdot kb \text{ mas } BA' + A'C = a;$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= \frac{a}{\frac{a \cdot \cap(B+\theta)}{\cap_B} + \frac{b \cdot \cap\theta}{\cap_C}} = \frac{\cap_A}{\frac{\cap_A \cap(B+\theta)}{\cap_B} + \frac{\cap_B \cap\theta}{\cap_C}} = \\ &= \frac{\cap_A \cap_B \cap_C}{\cap_A \cap(B+\theta) \cap_C + \cap_B^2 \cap\theta} = \\ &= \frac{\cap_A \cap_B \cap_C}{\cap_A \cap_C (\cap_B \cap\theta + \cap_B \cap\theta) + (1 - \cap^2 B) \cap\theta} = \\ &= \frac{\cap_A \cap_B \cap_C}{\cap\theta \cap\theta (\cap_A \cap_C \cap_B - \cap^2 B) + \cap\theta \cap_A \cap_B \cap_C} = \\ &= \frac{\cap_A \cap_B \cap_C}{\cap\theta \cap\theta \cap_B (\cap_A \cap_C + \cap(A+C)) + \cap\theta \cap_A \cap_B \cap_C} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cap A \cap B \cap C}{\cap \theta (1 + \cup A \cup B \cup C) + \cup \theta \cap A \cap B \cap C}$$

Q. E. F.

COROLÁRIO: Seja $\theta = 90^\circ$; então $k = \frac{\cap A \cap B \cap C}{1 + \cup A \cup B \cup C}$.

12. (X)

Seja s = semiperímetro, m = área e v = volume.

Sabemos que $m = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$;

$$\therefore m^2 = s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c);$$

$$\therefore \frac{m^2}{s} = s^3 - s^2 \cdot (a + b + c) + s \cdot (bc + ca + ab) - abc =$$

$$= s^3 - 2s^3 + s \cdot (bc + ca + ab) - v;$$

$$\therefore \frac{m^2}{s^2} + \frac{v}{s} + s^2 = bc + ca + ab;$$

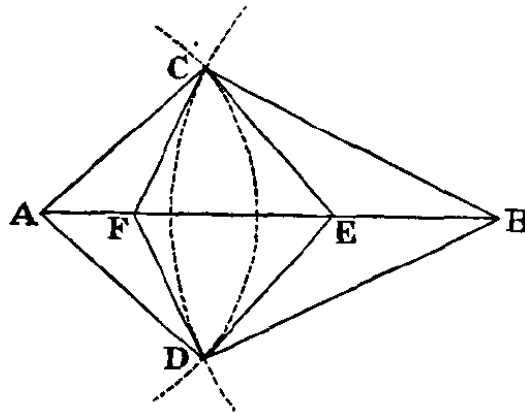
$$\therefore 2 \cdot \left(\frac{m^2}{s^2} + \frac{v}{s} + s^2 \right) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$$= 4s^2 - (a^2 + b^2 + c^2);$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cdot \left(s^2 - \frac{v}{s} - \frac{m^2}{s^2} \right).$$

Q. E. F.

13. (X)



Seja A e B os centros dos círculos; C e D os seus pontos de interseção e $CFDE$ o quadrilátero cuja área é pedida.

Seja a , b e c os lados do triângulo ABC e α , β e γ os seus ângulos.

Então, $CE = b \cdot \tan \alpha$ e $CF = a \cdot \tan \beta$.

Também, $\angle FCE = \angle ACE + \angle FCB - \gamma = \pi - \gamma$;

$$\therefore \cap FCE = \cap \gamma.$$

Assim, a área do triângulo FCE é igual a $\frac{1}{2} \cdot ab \cdot \tan a \cdot \tan \beta \cdot \cap \gamma$;

$$\therefore \text{área do quadrilátero} = \frac{ab \cap \alpha \cap \beta \cap \gamma}{\underbrace{\quad}_{\alpha} \underbrace{\quad}_{\beta}}.$$

Ora, considerando M a área do triângulo ABC , temos

$$\cap \alpha = \frac{2M}{bc}, \cap \beta = \frac{2M}{ca}, \cap \gamma = \frac{2M}{ab};$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{área do quadrilátero} &= ab \cdot \frac{8M^3}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{4bc \cdot ca}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = \\ &= \frac{32M^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}. \end{aligned}$$

Q. E. F.

14. (X)

Isto simplesmente exprime a identidade:

$$\begin{aligned} &3(a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= (a + b + c)^2 + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= (a + b + c)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 \end{aligned}$$

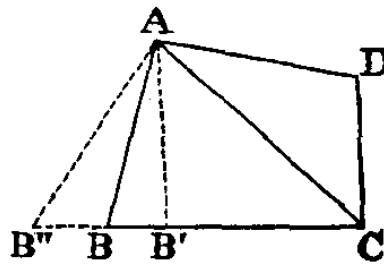
Q. E. D.

Exemplos numéricos (não feitos de cabeça)

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2) = 6^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2$$

$$3(1^2 + 3^2 + 7^2) = 11^2 + 4^2 + 6^2 + 2^2$$

15. (X)



Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito. Traçamos AC e circunscrevemos um círculo no triângulo ACD .

Ora, se este círculo não passar por B , cortará CB , ou o seu prolongamento, em B' ou B'' . Traçamos AB' e AB'' .

Assim, $\angle AB'C$, ou $\angle AB''C$, é suplementar a $\angle ADC$, $\therefore = \angle ABC$, o que é absurdo; \therefore este círculo passa por B .

O mesmo se pode comprovar para qualquer outro ponto na porção do perímetro dessa figura que esteja no mesmo lado de AC tal como o ponto D .

O mesmo será para a outra parte.

Logo, a figura é um círculo.

Q. E. D.

16. (X)

As probabilidades *a priori* dos estados possíveis do primeiro saco são $B, \frac{1}{2}$ e $P, \frac{1}{2}$. Assim, as probabilidades, após colocar uma ficha branca, são $BB, \frac{1}{2}$ e $BP, \frac{1}{2}$. As probabilidades que estes dão ao «acontecimento observado» são $1, \frac{1}{2}$. Logo, as probabilidades dos possíveis estados B e P , após o acontecimento, são proporcionais a $1, \frac{1}{2}$; ou seja, de 2 para 1, o que significa que os seus valores reais são $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

Ora, na primeira volta, a probabilidade de tirar uma ficha branca é $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; ou seja $\frac{1}{2}$.

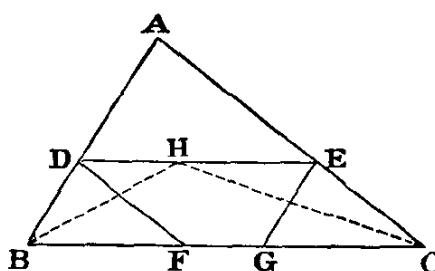
E, na segunda, as probabilidades dos estados possíveis de $BBPP$ e $BPPP$ são $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. Assim, a probabilidade de tirar uma B é $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{5}{12}$.

Logo, a *primeira* volta fornece a melhor probabilidade.

Q. E. F.

17. (X)

(Análise)



Seja ABC o triângulo dado e DE a linha pedida.

A partir de D e E , traçamos DF e EG , paralelas aos lados. Então, $DF + EG = DE$. Como BE é um paralelograma, $\therefore DB = EG$, do mesmo modo que $EC = DF$; $\therefore DB + EC = DE$. E assim está feita a construção.

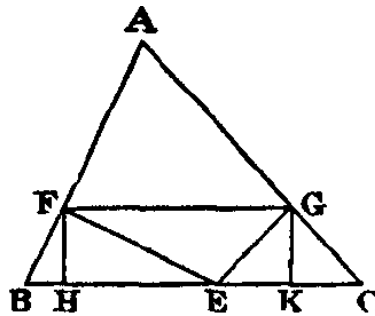
(Síntese)

Bissetamos os \angle s B e C com BH e CH , encontrando-se em H . A partir de H traçamos DE , paralela a BC ; e desde D e E traçamos DF e EG paralelas a AC e AB .

Sendo DE paralela a BC , $\therefore \angle DHB =$ alternado de $\angle HBF = \angle DBH$; $\therefore DB = DH$.
Do mesmo modo, $EC = EH$. $\therefore DB + EC = DE$. Como BE e DC são paralelogramas, $\therefore EG = DB$ e $DF = EC$, $\therefore DF + EG = DE$.

Q. E. F.

18. (X)



(1) Seja E o ponto pedido. A partir de E , traçamos EF e $FG \perp$ aos lados. Traçamos FG . A partir de F e G , traçamos FH e $GK \perp BC$. Seja BE, x e EC, y .

Ora, FH deve ser igual a GK .

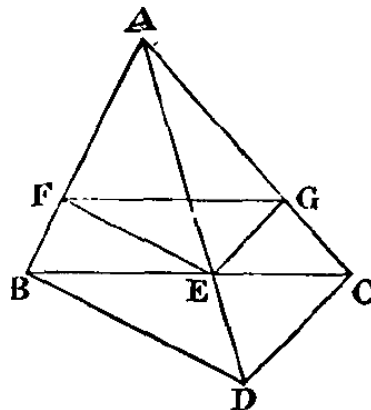
$$\begin{aligned} \text{E ainda, } EF &= x \cap B; \text{ e } FH = EF \cap FEH = \\ &= EF \triangle B = \\ &= x \cap B \triangle B; \end{aligned}$$

Do mesmo modo, $GK = y \cap C \triangle C$.

Mas como $FH = GK$, $\therefore x \cap B \triangle B = y \cap C \triangle C$;

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\cap 2C}{\cap 2B}.$$

Q. E. F.



(2) Traçamos a partir de B e C os ângulos retos ABD e ACD e traçamos AD cortando BC em E . Desde E traçamos EF e $EG \perp$ aos lados, e traçamos FG .

$$\therefore BD \text{ e } FE \text{ são } \perp \text{ a } AB, \therefore \text{ elas são } \parallel; \therefore AF : FB :: AE : ED$$

$$\therefore CD \text{ e } GE \text{ são } \perp \text{ a } AC, \therefore \text{ elas são } \parallel; \therefore AG : GC :: AE : ED$$

$$\therefore AF : FB :: AG : GC$$

$\therefore FG$ é paralela a BC .

Q. E. F.

19. (X)

Chamemos os sacos de A , B e C . A contém uma ficha branca e uma preta e o mesmo para os outros.

As probabilidades das ordens ABC , ACB , BAC , BCA , CAB e CBA são, *a priori*, $\frac{1}{6}$ para cada. Uma vez que elas são iguais, poderemos, em vez de multiplicar cada uma pela probabilidade que dá ao acontecimento observado, simplesmente presumir que essas probabilidades são proporcionais às probabilidades *depois* do acontecimento observado.

Essas probabilidades são:

$$\text{Para } ABC, \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$ACB, \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$BAC, \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$BCA, \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

$$CAB, \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

$$CBA, \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Logo, as probabilidades são proporcionais a 4, 3, 8, 4, 9 e 6, ou seja, são estes números divididos por 34.

Assim, a probabilidade de tirar uma ficha branca do saco que resta é

$$\frac{1}{34} \cdot \left(4 \times \frac{3}{4} + 3 \times \frac{2}{3} + 8 \times \frac{3}{4} + 4 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{2} \right) =$$

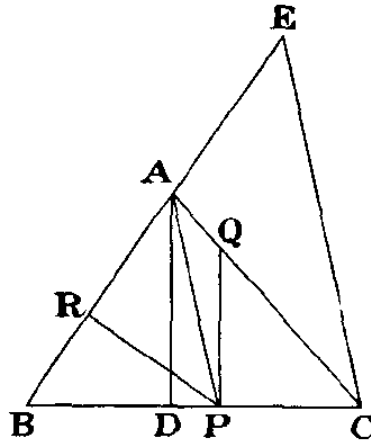
$$= \frac{1}{34} \times (3 + 2 + 6 + 2 + 6 + 3) =$$

$$= \frac{22}{34} =$$

$$= \frac{11}{17}$$

20. (X)

(Análise)



Seja ABC o triângulo dado e P o ponto pedido. Traçamos $PQ \perp BC$ e $PR \perp AB$. Assim, $PQ = PR$.

Portanto, $PC \tan C = PB \tan B$;

$\therefore PC : PB :: \tan B : \tan C$, (traçando $AD \perp BC$)

$$\therefore \frac{AD}{AB} : \frac{AD}{DC}$$

$$\therefore DC : AB$$

Assim temos a construção.

(Síntese)

A partir de A traçamos $AD \perp BC$. Prolongamos BA até E , fazendo AE igual a DC . Traçamos EC . Desde A traçamos AP paralela a EC , e desde P traçamos $PQ \perp BC$ e $PR \perp AB$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \frac{PQ}{PC} &= \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{DC} = \\ &= \frac{PR}{PB} \cdot \frac{AB}{AE} = \\ &= \frac{PR}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} = \frac{PR}{PC}, \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = PR.$$

Q. E. F.

21. (X)

O enésimo termo é $n \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+4}$;

\therefore o termo $(n+1)^\circ$ é $\overline{n+1} \cdot \overline{n+3} \cdot \overline{n+5} =$

$$= (n+1) \cdot (\overline{n+2} + 1) \cdot (n+5) =$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+5} + \overline{n+1} \cdot \overline{n+5} = \\
&= \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot (\overline{n+3} + 2) + \overline{n+1} \cdot (\overline{n+2} + 3) = \\
&= \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+3} + 2 \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} + \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} + 3 \\
&\quad \cdot \overline{n+1} = \\
&= \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+3} + 3 \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} + 3 \cdot \overline{n+1} \\
\therefore S &= \frac{\overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \cdot \overline{n+3}}{4} + n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} + \frac{8}{2} \cdot n \cdot \overline{n+1} + C \text{ e } C = 0. \\
\therefore S &= n \cdot \overline{n+1} \cdot \left(\frac{\overline{n+2} \cdot \overline{n+3}}{4} + \overline{n+2} + \frac{3}{2} \right) = \\
&= n \cdot \overline{n+1} \cdot \frac{\overline{n+2} \cdot \overline{n+3} + 4 \cdot \overline{n+2} + 6}{4} = \frac{n \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+4} \cdot \overline{n+5}}{4}
\end{aligned}$$

Q. E. F.

(2) S até 100 termos,

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 104 \cdot 105}{4} = 100 \cdot 101 \cdot 26 \cdot 105$$

Ora, $101 \cdot 105 = 10,605$;

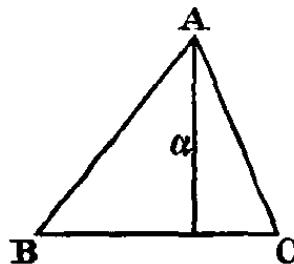
$$\therefore 101 \cdot 105 \cdot 13 = 130.000 + 7800 + 65 = 137,865;$$

e o dobro é $= 274,000 + 1730 = 275,730$;

$$\therefore S = 27,573,000.$$

Q. E. F.

22. (X)



Seja α, β e γ as alturas dadas.

$$\text{Ora, } \alpha\alpha = b\beta = c\gamma;$$

$$\therefore \alpha \cap A = \beta \cap B = \gamma \cap C;$$

$$\therefore \frac{\cap A}{\beta\gamma} = \frac{\cap B}{\gamma\alpha} = \frac{\cap C}{\alpha\beta} = k \text{ (por exemplo);}$$

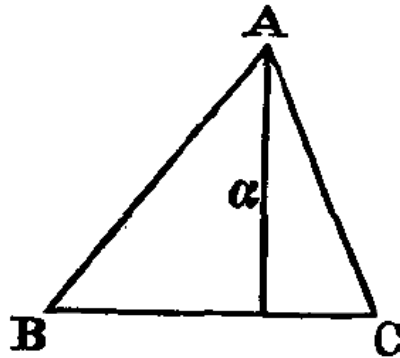
$$\therefore \cap A = k\beta\gamma, \cap B = k\gamma\alpha \text{ e } \cap C = k\alpha\beta.$$

$$\text{Ora, } \cap(A+B) = \cap C;$$

$$\therefore \cap A \cup B + \cap A \cap B = \cap C;$$

$$\therefore \cap A \cup B = \cap C - \cap A \cap B$$

$$\begin{aligned} \therefore \cap^2 A(1 - \cap^2 B) &= \cap^2 C + \cap^2 B(1 - \cap^2 A) - \\ 2 \cap C \cap A \cap B; \\ \therefore \cap^2 A - \cap^2 A \cap^2 B &= \cap^2 C + \cap^2 B - \cap^2 A \cap^2 B - \\ 2 \cap B \cap C \cap A; \\ \therefore \cap^2 A - \cap^2 B - \cap^2 C &= -2 \cap B \cap C \cap A; \\ \therefore, \text{ elevado ao quadrado,} \\ (\cap^4 A + \dots) - 2 \cap^2 A \cap^2 B - 2 \cap^2 A \cap^2 C &+ 2 \cap^2 B \cap^2 C = \\ 4 \cap^2 B \cap^2 C(1 - \cap^2 A); \\ \therefore (\cap^4 A + \dots) - 2(\cap^2 B \cap^2 C + \dots) &+ 4 \cap^2 A \cap^2 B \cap^2 C = 0; \\ \therefore, \text{ substituindo por } \cap A, \dots, \text{ e dividindo por } k^4, \\ (\beta^4 \gamma^4 + \dots) - 2\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot (\alpha^2 + \dots) &+ 4k^2 \alpha^4 \beta^4 \gamma^4 = 0; \end{aligned}$$



$$\therefore k^2 = \frac{2\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 (\alpha^2 + \dots) - (\beta^4 \gamma^4 + \dots)}{4\alpha^4 \beta^4 \gamma^4}.$$

Ora, $\cap A = K\beta\gamma$, ...; que é a resposta a (2).

E ainda, $a = b \cap C$; e do mesmo modo $\gamma = a \cap B$;

$$\therefore \alpha = \frac{\gamma}{\cap B} = \frac{\gamma}{\kappa\gamma\alpha} = \frac{1}{\kappa\alpha}, \dots; \text{ o que responde à (1).}$$

$$\text{E ainda, área} = \frac{bc \cap A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\kappa\beta} \cdot \frac{1}{\kappa\gamma} \cdot \kappa\beta\gamma = \frac{1}{2\kappa}; \text{ o que responde à (3).}$$

Q. E.

23. (X)

As probabilidades originais para os estados da bolsa são

$$\text{para } 2B \dots\dots\dots \frac{1}{4};$$

$$\text{para } 1B, 1P \dots\dots\dots \frac{1}{2};$$

$$\text{para } 2P \dots\dots\dots \frac{1}{4}.$$

\therefore as probabilidades após inserir 2 B e 1 P são,

para 4B, 1P $\frac{1}{4}$;

para 3B, 2P $\frac{1}{2}$;

para 2B, 3P $\frac{1}{4}$.

Agora as probabilidades, que dão ao acontecimento observado, de tirar 2 B e 1 P são 3, $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{10}$.

∴ as probabilidades, após este acontecimento, são proporcionais a $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{3}{40}$, ou seja, 2, 4 e 1. Logo, são $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$ e $\frac{1}{7}$.

Assim, as probabilidades são agora

para 2B $\frac{2}{7}$;

para 1B, 1P $\frac{4}{7}$;

para 2P $\frac{1}{7}$.

∴ as probabilidades, após acrescentar uma ficha B, são

para 3B $\frac{2}{7}$;

para 2B, 1P $\frac{4}{7}$;

para 1B, 2P $\frac{1}{7}$.

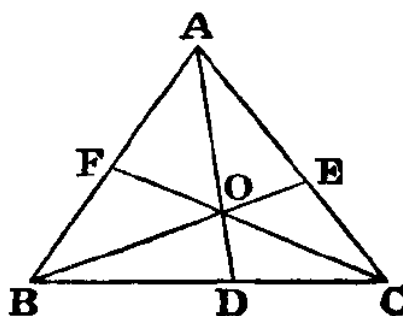
Assim, as probabilidades que estas dão ao acontecimento observado de agora tirar uma ficha B, são 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.

∴ as probabilidades, após este acontecimento, são proporcionais a $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{1}{21}$, ou seja, 6, 8, 1. Logo, são $\frac{6}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{1}{15}$.

Assim, a probabilidade de o saco conter agora 2 brancas é $\frac{6}{15}$, ou seja, $\frac{2}{5}$.

Q. E. F.

24. (X)



Como $\frac{DO}{OA} = \frac{\Delta DOC}{\Delta OAC} = \frac{\Delta DOB}{\Delta OAB} = \frac{\Delta OBC}{\Delta OCA + \Delta OAB}$; $\therefore \frac{DO}{DA} = \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC}$.

Do mesmo modo, $\frac{EO}{EB} = \frac{\Delta OCA}{\Delta ABC}$ e $\frac{FO}{FC} = \frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}$.

Logo, $\frac{DO}{DA} + \frac{EO}{EB} + \frac{FO}{FC} = 1$.

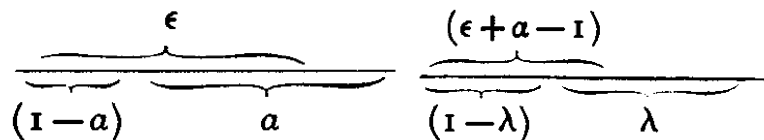
Q. E. F.

25. (X)

Seja O os que perderam um olho, B os que perderam um braço e P os que perderam uma perna.

O estado de coisas que dá o menor número possível daqueles que sendo O e B são também P , pode ser conhecido, evidentemente, organizando os pacientes numa fila de modo a que a classe OB possa começar num dos extremos e a classe P no outro, para que se possa contar a porção onde se sobrepõem; quanto mais pequena for a classe OB , mais pequena será esta porção comum; logo, temos que reduzir a classe OB ao mínimo.

Isto pode ser feito através da reorganização dos pacientes de modo a que a classe O possa começar num dos extremos da fila e a classe B no outro, e o menor número possível para a classe OB é a porção comum, ou seja, $(\epsilon - \overline{1 - \alpha})$, ou seja, $(\epsilon + \alpha - 1)$.



Então, tal como demonstrado, o menor número possível para a classe OBP é a porção comum, ou seja, $(\epsilon + \alpha - 1 - \overline{1 - \lambda})$, i.e. $(\epsilon + \alpha + \lambda - 2)$.

Q. E. F.

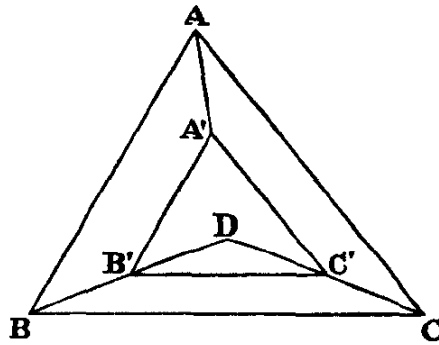
26. (X)

(Análise)

Seja ABC o triângulo dado e $A'B'C'$ o triângulo pedido; e que a proporção de $B'C'$ para com BC seja k , em que k é inferior a 1.

Uma vez que $BB' = CC'$ e BC e $B'C'$ são paralelos, poder-se-á comprovar facilmente, traçando perpendiculares desde B' e C' até BC , as quais devem ser necessariamente iguais, que os ângulos $B'BC$ e $C'CB$ são iguais.

Do mesmo modo, os ângulos $A'AC$ e $C'CA$ são iguais, tal como os ângulos $A'AB$ e $B'BA$.



Designemos por θ o $\angle B'BC$; então $\angle C'CB = \theta$;

$$\therefore \angle C'CA = C - \theta = \angle A'AC;$$

$$\therefore \angle A'AB = A - (C - \theta) = \angle B'BA.$$

Ora, $\angle B'BC + \angle B'BA = B$;

$$\therefore \theta + A - (C - \theta) = B;$$

$$\therefore 2\theta = B + C - A = 180^\circ - 2A;$$

$$\therefore \theta = 90^\circ - A.$$

Então, se prolongarmos BB' e CC' até D , o triângulo DBC será isósceles com um \angle vertical igual a $2A$.

Ora, se inscrevermos ABC num círculo e unirmos o seu centro com B e C , o triângulo assim formado irá cumprir as mesmas condições; logo, o centro deste círculo será D e assim temos a construção.

(*Síntese*)

Bissetamos os lados e traçamos perpendiculares até D . Unimos D aos vértices B e C . A partir de DB cortamos $DB' = k \cdot DB$. Traçamos $B'C'$ a partir de B' , paralela a BC .

Assim, prova-se facilmente que $B'C' = k \cdot BC$.

E, se traçarmos paralelas desde B' e C' a AB e AC , podemos facilmente comprovar que estas se cortam em DA e que as mesmas são respetivamente iguais a $k \cdot AB$ e $k \cdot AC$.

Q. E. F

27. (X)

Designa-se os sacos por A , B e C .

Se o saco remanescente é A , a probabilidade do acontecimento observado é igual a $\frac{1}{2}$ da probabilidade de tirar uma ficha branca do B e uma preta do C , mais $\frac{1}{2}$ da probabilidade de tirar uma preta do B e uma branca do C . Ou seja, seria igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

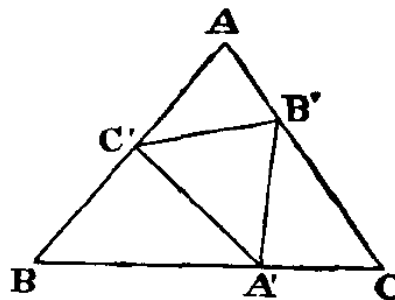
Do mesmo modo, se o saco remanescente for o B , então é igual a $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; se for o C , então é $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{36}$.

\therefore as probabilidades de o saco remanescente ser A , B ou C são expressas pela razão de $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} : \frac{7}{36}$, i. e., $9 : 9 : 7$. \therefore os seus valores são $\frac{9 \cdot 9 \cdot 7}{25}$.

Ora, se o saco remanescente for o A , a probabilidade de tirar uma branca é de $\frac{5}{6}$, \therefore a probabilidade neste caso é $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{25} = \frac{3}{10}$; de modo análogo para B é $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{6}{25}$; e para C , $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{50}$. E a probabilidade total de tirar uma ficha branca do saco remanescente é a soma destes, i. e., $\frac{15+12+7}{50} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}$.

28. (X)

Seja ABC o triângulo dado e sejam A' , B' e C' os seus lados divididos internamente em proporção áurea.



Seja M a área de ABC .

Se $BA' = x$, então $x^2 = a \cdot (a - x)$, i. e., $x^2 + ax - a^2 = 0$;

$\therefore x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$, sendo o outro resultado excluído pelos termos da pergunta.

Assim, a área do triângulo $AB'C'$ é

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot \left(b - \frac{b}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)\right) \cdot \sphericalcap A = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{5} - 1)(3 - \sqrt{5})bc \cdot \sphericalcap A = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (4\sqrt{5} - 8) \cdot M = (\sqrt{5} - 2) \cdot M \end{aligned}$$

O mesmo acontece para $BC'A'$ e $CA'B'$.

Assim, a soma destes 3 triângulos é igual a $3 \cdot (\sqrt{5} - 2) \cdot M$ e a área do triângulo $A'B'C'$ é igual a $(7 - 3\sqrt{5}) \cdot M$.

Q. E. F.

29. (X)

Isto pode-se deduzir a partir da identidade

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 =$$

$$\text{Ou } \left. \begin{aligned} &= a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc = \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc = \end{aligned} \right\}$$

i.e.

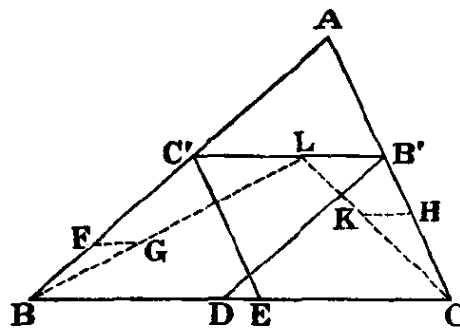
$$\text{Ou } \left. \begin{aligned} &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned} \right\}$$

Ora, se estes dois últimos sistemas são *idênticos*, então $(ac + bd)$ deve ser igual a $(ad + bc)$ pois não poderá ser igual a $(ac - bd)$; i.e., $a(c - d) - b(c - d)$ deve ser igual a 0; i.e., $(a - b) \cdot (c - d)$ deve ser igual a 0; i.e., um dos dois primeiros sistemas é a soma de 2 quadrados *idênticos*.

Assim, por oposição, se *cada um* dos sistemas originais consistir em 2 quadrados *diferentes*, o seu produto resulta na soma de 2 quadrados de 2 maneiras *diferentes*.

Q. E. D.

30. (X)



(Análise)

Seja ABC o triângulo e suponha-se que $B'C'$ está posicionada de modo a que $B'D$ e $C'E$, traçadas paralelamente aos lados, juntas sejam iguais a $2B'C'$.

De acordo com Euclides, I, 34, $B'D = C'B$ e $C'E = B'C$;

$$\therefore B'C + C'B = 2B'C'.$$

Assim, se dividirmos $B'L$ igual à metade de $B'C$, $C'L$ é igual à metade de $C'B$.

E assim tem-se a construção.

(*Síntese*)

Marcamos o ponto F em qualquer parte de BC' , traçamos $FG \parallel BC$ e igual a metade de BF ; traçamos BG .

Do mesmo modo, marcamos o ponto H em qualquer parte de CB' , traçamos $HK \parallel BC$ e igual a metade de HC ; traçamos CK .

Prolongamos BG e CK até se encontrarem em L ; através de L , traçamos $C'B' \parallel BC$; a partir de B' e C' , traçamos $B'D$ e $C'E \parallel$ aos lados.

$\therefore FG$ é igual a metade de FB ; \therefore , por serem triângulos semelhantes, $C'L$ é igual a metade de $C'B$; do mesmo modo, $B'L$ é igual a metade de $B'C$.

$\therefore C'B'$ é igual à soma de $C'B$ e $B'C$; i.e., $C'B + B'C = 2B'C'$.

No entanto, de acordo com I. 34 em *Elementos* de Euclides, $C'B = B'D$ e $B'C = C'E$; $\therefore B'D + C'E = 2B'C'$.

Q. E. F.

31. (X)

A 1 de julho, o relógio de pulso estava adiantado em relação ao relógio de parede por 5 mins. em 10 horas; i.e., $\frac{1}{2}$ min. por hora; i.e., 2 mins. em 4 horas. Assim, quando o relógio de pulso marcava o meio-dia, o de parede marcava 12h02m; i.e., o relógio de parede estava 3 mins. atrasado em relação à hora real, sendo a hora real 12h05m.

A 30 de julho, o relógio de pulso estava atrasado em relação ao relógio de parede por 1 minuto em 10 horas; i.e., 6 segundos por hora; i.e., 19 segundos em 3h10m. Assim, quando o relógio de pulso marcava as 12h10m, o de parede marcava 12h07m19s; i.e., o relógio de parede estava adiantado 2m19s em relação à hora real, sendo a hora real 12h05m.

Logo, o relógio de parede adianta-se à hora real por 5m19s em 29 dias; i.e., 319 segundos em 29 dias; i.e., 11 segundos por dia; i.e., $\frac{11}{24 \times 12}$ segundos em 5 minutos.

Assim, enquanto na hora real decorrem 5m, no relógio de pulso decorrem $5m\frac{11}{288}s$.

Ora, quando a hora real, no dia 31 de julho, é 12h05m, o relógio de parede está adiantado $2m19s+11s$; i.e., marca $12h7\frac{1}{2}m$. Logo, se a hora real for atrasada 5 minutos, o relógio deve ser acertado atrasando $5m\frac{11}{288}s$; i.e., deve ser atrasado para as $12h02m29\frac{277}{288}s$.

Assim, no dia 31 de julho, quando o relógio de parede indica esta hora, é na realidade meio-dia.

Q. E. F.

32. (X)

O enésimo termo é $n \cdot (n + 4)$, \therefore o termo $(n + 1)^\circ$ é

$$(n + 1) \cdot (n + 5) = (n + 1) \cdot ((n + 2) + 3) = (n + 1) \cdot (n + 2) + 3(n + 1);$$

$$\therefore S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + C; \text{ e } C = 0;$$

$$\therefore S_n = n \cdot (n + 1) \cdot \left(\frac{n+2}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+13)}{6}.$$

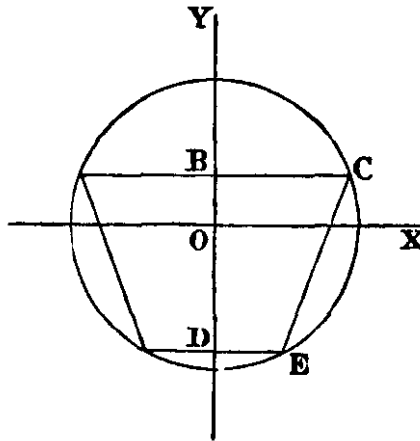
Q. E. F.

E ainda,

$$S_{100} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 213}{6} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 71}{2} = \frac{100 \cdot 7171}{2} = \frac{717100}{2} = 358550.$$

Q. E. F.

33. (X)



Seja $DE = x$; $\therefore BC = 2x$.

$$\text{Área} = 3x \cdot (\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2}) = \text{máx.}$$

$$\text{Seja } v = x \cdot (\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2}) = \text{máx.}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = \sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2} - x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{4}{\sqrt{r^2 - 4x^2}} \right) = 0;$$

$$\therefore (r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - 4x^2} + (r^2 - 4x^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} =$$

$$= x^2 \cdot (4\sqrt{r^2 - x^2} + \sqrt{r^2 - 4x^2});$$

$$\therefore (r^2 - 2x^2) \cdot \sqrt{r^2 - 4x^2} = -(r^2 - 8x^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$\therefore r^4 - 4(r^2x^2 + 4x^4) \cdot (r^2 - 4x^2) = (r^4 - 16r^2x^2 + 64x^4) \cdot (r^2 - x^2);$$

$$\therefore r^6 - 8r^4x^2 + 20r^2x^4 - 16x^6 = r^6 - 17r^4x^2 + 80r^2x^4 - 64x^6;$$

\therefore , omitindo r^6 e dividindo por x^2 ,

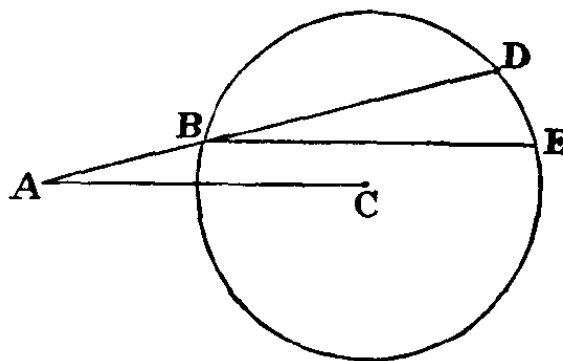
$$48x^4 - 60r^2x^2 + 9r^4 = 0; \text{ i.e., } 16x^4 - 20r^2x^2 + 3r^4 = 0;$$

$$\therefore \frac{x^2}{r^2} = \frac{20 \pm \sqrt{208}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{8}.$$

A outra solução não é admissível, embora isso não tenha sido fruto de trabalho estritamente mental.

Q. E. F.

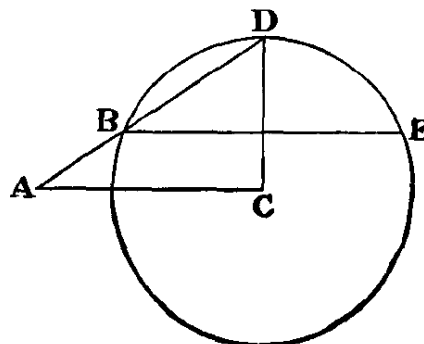
34. (X)



(Análise)

Seja A o ponto dado e C o centro do círculo dado. Traçamos AC e seja ABD a linha pedida. A partir de B traçamos a corda BE paralela a AC . Assim, $\angle DBE = \angle A$. Logo, o arco DE é igual ao arco BD ; i.e., o arco BE é bissetado por D ; i.e., D está na perpendicular a C .

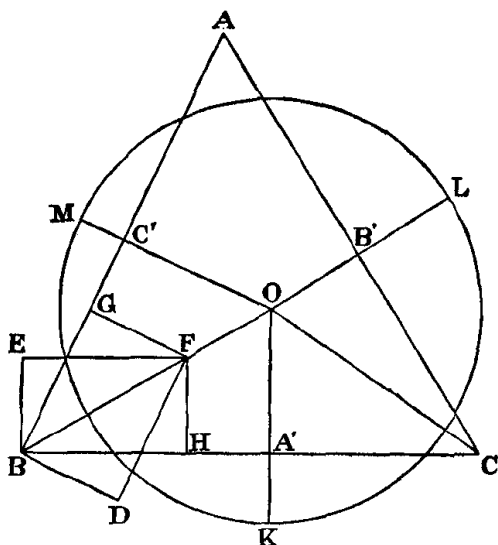
(Síntese)



Traçamos AC . A partir de C , traçamos CD perpendicular a AC . Traçamos AD cortando o círculo em B . Desde B , traçamos BE paralela a AC .

Comprova-se facilmente que o arco BD é igual ao arco DE . Assim, o arco BD subtende, no círculo, um ângulo $= \angle DBE = \angle A$.

35. (X)



Seja ABC o triângulo dado, e sejam $k : 1$, $l : 1$ e $m : 1$ as proporções entre os raios fora do triângulo e o raio (pressupõe-se que k , l e m sejam frações próprias).

A partir de B traçamos $BD \perp BA$ e $BE \perp BC$, fazendo com que BD tenha uma proporção para com BE de $1 - m : 1 - k$. Através de D , traça-se DF paralela a BA e EF paralela a BC , e traça-se BF . A partir de F , traçamos $FG \perp BA$ e $FH \perp BC$.

Logo, $FG : FH :: 1 - m : 1 - k$.

Do mesmo modo, traçamos CO de maneira a que as perpendiculares, traçadas a partir de qualquer um dos seus pontos até CA e CB mantenham a proporção $1 - l : 1 - k$, e prolongamos BF até que se una a ela em O .

A partir de O traçamos OA' , OB' e $OC' \perp$ aos lados.

Então, $OA' : OB' : OC' :: 1 - k : 1 - l : 1 - m$.

Prolongamos OA' até K , de modo a que $OK : OA' :: 1 : 1 - k$.

Descrevemos um círculo com centro em O e raio OK , e prolongamos OB' e OC' até que se unam em L e M respectivamente.

Então,

$$OK : OA' :: 1 : 1 - k$$

$$OA' : OB' :: 1 - k : 1 - l$$

$$\therefore OK : OB' :: 1 : 1 - l$$

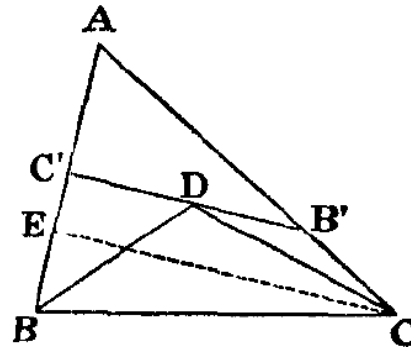
Do mesmo modo, $OK : OC' :: 1 : 1 - m$

Mas $A'K : OK :: OK - OA' : OK :: k : 1$

Da mesma maneira, $B'L : raio :: l : 1$ e $C'M : raio :: m : 1$.

Q. E. F.

36. (X)



(Análise)

Seja $B'C'$ a linha pedida e C' um ângulo reto.

Cortamos $C'D$ igual a $C'B$ e assim $DB' = B'C$.

Traçamos DB e DC , e temos $\angle DBC' = 45^\circ$ e $\angle B'DC = \angle B'CD$.

Traçamos $CE \perp AB$.

Assim, $\angle B'DC = \angle DCE$; $\therefore \angle B'CD = \angle DCE$.

(Síntese)

Assim temos a construção. Traçamos $CE \perp AB$: bissetamos $\angle ACE$; em B , $\angle ABD = 45^\circ$. Estas linhas unem-se em D . A partir de D traçamos $B'DC' \perp AB$.

Logo, $\angle C'DB = \pi - (\angle DC'B + \angle C'BD) = 45^\circ = \angle C'BD$; $\therefore C'D = C'B$.

E ainda, $\angle B'DC = \angle DCE = \angle DCB'$;

$\therefore DB' = B'C$ e $C'B' = BC' + CB'$.

Q. E. F.

Limites de possibilidade:

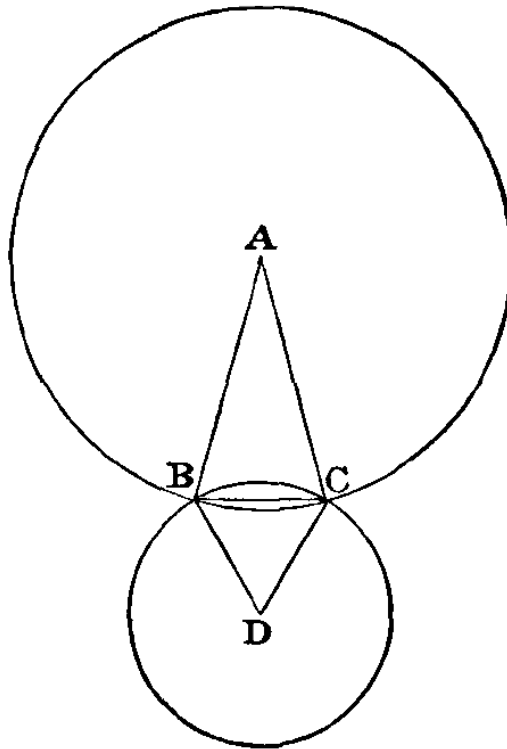
$\angle A$ não deve ser $> 90^\circ$;

$\angle B$ não deve ser $< 45^\circ$;

$\angle C$ não deve ser menor do que metade do complementar de A , i.e., não deve ser $<$

$$\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right).$$

37. (X)



Seja BC a corda comum e A e D os centros.

Seja $\angle A = 30^\circ$ e $\angle D = 60^\circ$.

Seja $BC (= DB = DC) = 1$ e $AB = x$.

Então,

$$\frac{\text{arco } A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}; \therefore \frac{1}{2x^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

\therefore as áreas dos círculos são $\pi \cdot (2 + \sqrt{3})$ e π ;

\therefore as áreas dos setores são $\pi \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$;

\therefore a sua soma é igual a $\pi \cdot \frac{4 + \sqrt{3}}{12}$.

E ainda, a área do triângulo ABC é $= \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$; e a área do triângulo

$$DBC = \frac{\sqrt{3}}{4}; \text{ assim a sua soma é } = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a porção do círculo mais pequeno, que está dentro do maior, é a diferença entre estas duas somas; $\therefore = \pi \cdot \frac{4 + \sqrt{3}}{12} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Logo, a sua proporção para a área do círculo mais pequeno é esta soma dividida por π ;

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{4 + \sqrt{3}}{12} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2\pi} \\ &= \frac{5,732}{12} - \frac{2,732}{\left(\frac{44}{7}\right)} = 0,478 - \frac{0,248}{\left(\frac{4}{7}\right)} \\ &= 0,478 - \frac{1,736}{4} = 0,478 - 0,434 = 0,044 \end{aligned}$$

Q. E. F.

38. (X)

Pegando, por ordem, o saco de onde se retirou esta ficha cuja cor desconhecemos, o saco de onde retirámos por duas vezes uma ficha vermelha e o saco remanescente, percebemos que existem seis possibilidades de ordenar A , B e C :

- | | |
|-----------|-----------|
| (1) ABC | (4) BCA |
| (2) ACB | (5) CAB |
| (3) BAC | (6) CBA |

A probabilidade do acontecimento observado é, no caso (1), $1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$; no (2), $1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$; no (3), $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$; no (4), $\frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$; no (5), $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$; e no (6), $\frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$.

Assim, as probabilidades de existências para estes 6 estados são proporcionais a 12, 3, 18, 2, 9 e 4. Logo, os seus valores reais são $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{3}{16}$ e $\frac{1}{12}$.

Então, a probabilidade de a ficha cuja cor não conhecemos ser vermelha é a soma de $\frac{1}{4} \times 1$, $\frac{1}{16} \times 1$, $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3}$, $\frac{1}{24} \times \frac{2}{3}$, $\frac{3}{16} \times \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{12} \times \frac{1}{3}$; i.e., $\frac{36+9+36+4+9+4}{9 \times 16} = \frac{98}{9 \times 16} = \frac{49}{72}$.

Q. E. F.

39. (X)

Seja x o número de dias. Então,

$$(2 \times 10 - \overline{x-1}) \cdot \frac{x}{2} = 14 + (2 \times 2 + \overline{x-1} \cdot 2) \cdot \frac{x}{2}$$

$$\text{i.e., } \frac{21x}{2} - \frac{x^2}{2} = 14 + x + x^2;$$

$$\therefore 3x^2 - 19x + 28 = 0; \therefore x = \frac{19 \pm 5}{6} = 4 \text{ ou } \frac{7}{3}.$$

A solução acima não teve em conta a *descontinuidade* da aceleração, ou do desaceleramento do passo, e é apenas a solução correta partindo do pressuposto de que o

aceleramento ou desaceleramento é *contínuo* de maneira a que coincida com os dados acima no final de cada dia. Assim, 4 é a resposta correta; mas $\frac{7}{3}$ apenas indica que o encontro ocorre *durante o terceiro dia*. Para encontrar a hora a que se dá, chamemos y ao número de horas.

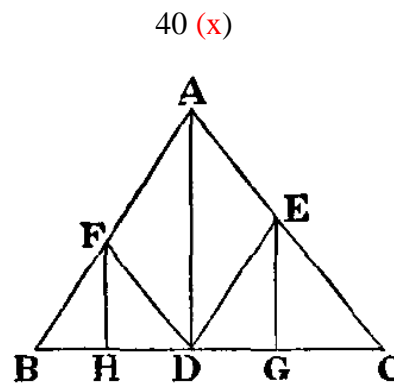
Ora, em 2 dias A chegou ao fim da milha 19 e B ao fim de $(14 + 6)$, i.e., 20.

$$\therefore 19 + y \cdot \frac{8}{12} = 20 + y \cdot \frac{6}{12}$$

$$\text{i.e., } y \cdot \frac{2}{3} = 1 + y \cdot \frac{1}{2}; \therefore y = 6.$$

Assim, encontram-se ao fim de 2 dias e 6 horas, e ao fim de 4 dias, e as distâncias percorridas são 23 milhas e 34 milhas.

Q. E. F.



(1) Seja ABC o triângulo dado e AD a linha a partir do seu vértice.

Traçamos DE e DF paralelas aos lados, e EG e $FH \perp BC$.

Assim, os triângulos FBD e EDC são idênticos a ABC ;

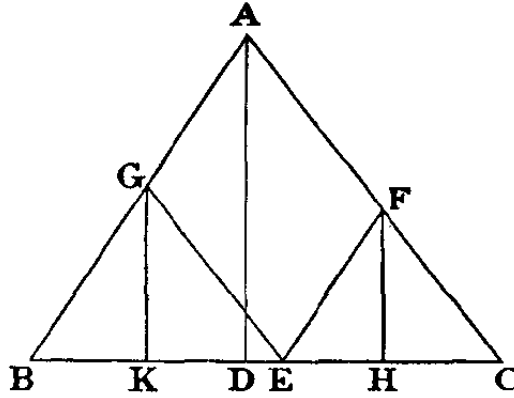
$$\therefore FH : AD :: BD : BC \text{ e } EG : AD :: DC : BC.$$

$$\therefore (FH + EG) : AD :: BC : BC; \therefore FH + EG = AD.$$

Também os triângulos AED e AFD são iguais e têm a mesma base que AD , \therefore as suas alturas são iguais; i.e., $DH = DG$.

Q. E. F.

(2) Seja ABC o triângulo dado e AD a linha a partir do seu vértice.



Concebemos $CE = BD$; traçamos EF e EG , paralelas aos lados, e FH e $GK \perp BC$. Assim os triângulos GBE e FEC são idênticos a ABC , $\therefore GK : AD :: BE : BC$ e $FH : AD :: EC : BC$.

$$\therefore (GK + FH) : AD :: BC : BC$$

$$\therefore GK + FH = AD$$

Também, $BK : BR :: BD : BC$

$$\therefore BK : DC :: EC : BC$$

$$:: HC : DC$$

$$\therefore BK = HC.$$

Q. E. F.

41. (X)

(1) Uma vez que, no começo, havia indubitavelmente pelo menos uma ficha branca no saco, as probabilidades *a priori* para os vários estados do saco — $BBBB$, $BBBP$, $BBPP$, $BPPP$ — eram $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

Estas teriam dado ao acontecimento observado as probabilidades $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0$.

Assim, as probabilidades, após o acontecimento, para os vários estados, são proporcionais a $\frac{1}{8} \cdot 1, \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}, \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$, i.e., $\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}$, i.e., 2, 3, 1. Logo, os seus valores reais são $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$.

Assim, a probabilidade de agora tirar uma branca é $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, i.e., $\frac{7}{12}$.

Q. E. F.

(2) Se não tivesse falado, as probabilidades *a priori* para os estados $BBBB$, $BBBP$, $BBPP$, $BPPP$, $PPPP$, seriam $\frac{1,4,6,4,1}{16}$. Estas teriam dado as probabilidades $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0$, ao acontecimento observado.

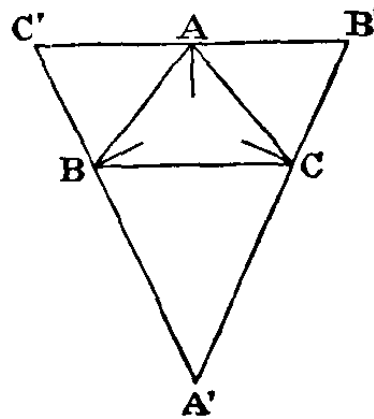
Deste modo, as probabilidades, após o acontecimento, para os vários estados, são proporcionais a $\frac{1}{16} \cdot 1, \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}$, i.e., 1, 2, 1. Assim, os valores reais são $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

Logo, a probabilidade de agora tirar uma branca é $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, i.e., $\frac{1}{2}$.

Q. E. F.

42. (x)

Seja ABC o triângulo dado. Bissetamos os ângulos e traçamos perpendiculares aos mesmos, formando o triângulo $A'B'C'$.



Ora, $\angle CBA' = 90^\circ - \frac{B}{2}$, aplicando-se o mesmo aos restantes.

$$\therefore A' = 180^\circ - (CBA' + BCA') = \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\therefore BA' = a \frac{\frac{C}{2}}{\frac{A}{2}}$$

$$\text{Do mesmo modo, } BC' = c \frac{\frac{A}{2}}{\frac{C}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore A'C' &= \frac{a \frac{\frac{2C}{2} + c \frac{2A}{2}}{\frac{A}{2} \frac{C}{2}}}{\frac{s-c}{ab} + c \frac{s(s-a)}{bc}} = \\ &= \frac{s-c+s-a}{\frac{B}{2}} = \frac{b}{\frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do mesmo modo, } A'B' = \frac{c}{\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \text{área de } A'B'C' = \frac{bc \frac{A}{2}}{2 \frac{B}{2} \frac{C}{2}}$$

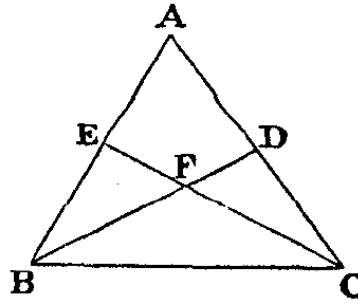
$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{área de } A'B'C'}{\text{área de } ABC} &= \frac{bc \frac{A}{2}}{2 \frac{B}{2} \frac{C}{2}} \cdot \frac{2}{bc \frac{A}{2}} = \\ &= \frac{\frac{A}{2}}{\frac{B}{2} \frac{C}{2} \cdot 2 \frac{A}{2} \frac{A}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Q. E. F.

43. (x)



Seja ABC o triângulo dado e BFD e CFE as linhas pedidas, de modo a que $FB = FC$ e o quadrilátero $AEFD =$ triângulo FBC . Designe-se o ângulo FBC por θ , o que bastará para o calcular.

Uma vez que o triângulo FBC é igual ao quadrilátero $AEFD$,

\therefore triângulo $DBC =$ triângulo AEC ,

$$= \text{triângulo } ABC - \text{triângulo } EBC;$$

\therefore triângulo $DBC +$ triângulo $EBC =$ triângulo ABC ;

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\cot \theta + \cot C} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\cot \theta + \cot B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\cot B + \cot C}$$

$$\therefore \frac{1}{\cot \theta + \cot C} + \frac{1}{\cot \theta + \cot B} = \frac{1}{\cot B + \cot C}$$

$$\therefore \frac{2 \cot \theta + (\cot B + \cot C)}{\cot^2 \theta + \cot \theta \cdot (\cot B + \cot C) + \cot B \cot C} = \text{idem}$$

$$\therefore \cot^2 \theta + \cot \theta \cdot (\cot B + \cot C) + \cot B \cot C =$$

$$= 2 \cot \theta \cdot (\cot B + \cot C) + (\cot B + \cot C)^2$$

$$\therefore \cot^2 \theta - \cot \theta \cdot (\cot B + \cot C)$$

$$-(\cot^2 B + \cot B \cot C + \cot^2 C) = 0$$

$$\therefore \cot \theta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\cot B + \cot C \pm \sqrt{(5 \cot^2 B + 6 \cot B \cot C + 5 \cot^2 C)} \right)$$

Q. E. F.

44. (X)

Seja k um número não divisível por 2 nem 5, i.e., um número primo de 10. Então, se convertermos $\frac{1}{k}$ a uma dízima periódica e esta a uma fração, os algarismos do denominador serão uma determinada quantidade de noves; i.e., terá a forma de $(10^n - 1)$. E como esta fração será igual a $\frac{1}{k}$ e esse k e 10 são primos entre si, tal como k e 10^n , o fator $(10^n - 1)$ deve ser um múltiplo de k .

Isto é evidentemente válido para qualquer outro sistema de notação. Assim, se a for a base do sistema de numeração e b um número primo de a , é possível encontrar um valor para n , o que fará de $(a^n - 1)$ um múltiplo de b .

Q. E. D.

Exemplos (não feitos de cabeça)

(1) Com base 10, determine um valor para n que faça de $(10^n - 1)$ um múltiplo de 7.

$$\frac{1}{7} = 0, \overset{\circ}{1}4285\overset{\circ}{7} = \frac{142857}{10^6 - 1}$$

Resposta: $n = 6$.

(2) Seja 8 e 9 os dois números dados.

Assumindo 8 como a base do sistema de numeração, obtemos $\frac{1}{9} = 0, \overset{\circ}{0}\overset{\circ}{7} = \frac{7}{8^2 - 1}$

Resposta: $n = 2$.

(3) Seja 7 e 13 os dois números dados.

Assumindo 7 como a base, obtemos $\frac{1}{13} = 0, \overset{\circ}{0}3524563142\overset{\circ}{1} = \frac{35245631421}{7^{12} - 1}$

Resposta: $n = 12$.

45. (X)

Divide-se cada vara em $(n + 1)$ partes, em que n é ímpar e os n pontos de divisão são os únicos pontos em que a vara se partirá, sendo todos igualmente frágeis.

A probabilidade de uma rutura é $\frac{n-1}{n}$;

\therefore a probabilidade de n ruturas é $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Ora, se $m = \frac{1}{n}$, então, quando $n = \frac{1}{0}$, $m = 0$;

\therefore a probabilidade de nenhuma vara se partir no meio é igual a $(1 - m)^{\frac{1}{m}}$, quando $m = 0$; i.e., quando se aproxima do limite $(1 - 0)^{\frac{1}{0}}$. E a resposta é $1 - (1 - 0)^{\frac{1}{0}}$.

Como $(1 + 0)^{\frac{1}{0}} = e$, se, na série e , chamarmos à soma dos termos ímpares a e b à dos termos pares, então $e = a + b$ e $(1 - 0)^{\frac{1}{0}} = a - b = 2a - e$.

Q. E. F.

[N.B.: o que se segue *não* foi feito de cabeça.]

$$\text{Ora, } a = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2!} = 0,5$$

$$\frac{1}{4!} = 0,04166666 \dots$$

$$\frac{1}{6!} = 0,00138888 \dots$$

$$\frac{1}{8!} = 0,00002480 \dots$$

$$\frac{1}{10!} = 0,00000027 \dots$$

$$\therefore a = 1,5430806 \dots$$

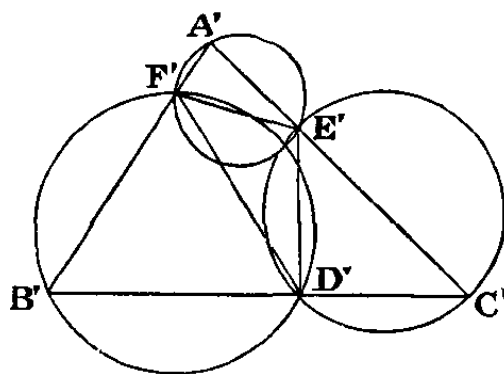
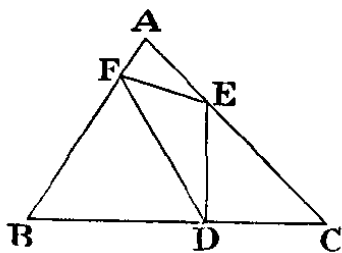
$$\therefore 2a = 3,0861612 \dots$$

$$e = 2,7182818 \dots$$

$$\therefore (1 - 0)^{\frac{1}{0}} = 0,3678793 \dots$$

$$\therefore \text{resposta} = 1 - (1 - 0)^{\frac{1}{0}} = 0,6321207 \dots$$

46. (X)

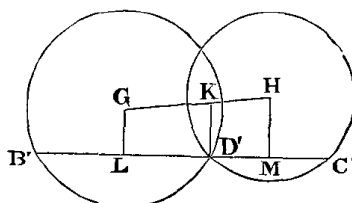


Seja ABC o triângulo dado e D o ponto dado.

Se construirmos um triângulo $D'E'F'$ com os ângulos iguais aos ângulos dados e tendo D' como o seu vértice fixo, poderemos resolver o problema se circunscrevermos ao triângulo $D'E'F'$ um triângulo idêntico a ABC .

Agora podemos traçar sobre $E'F'$, $F'D'$ e $D'E'$ os arcos de círculos que tenham ângulos iguais a A , B e C . Assim, resolvemos o problema se traçarmos nesses círculos uma linha $B'D'C'$, dividida na mesma proporção que BDC .

Este lema resolve-se da seguinte maneira: chamemos G e H aos centros dos círculos. Traçamos GH e dividimo-la em K , proporcional a BDC .



Traçamos KD' e, através de D , $B'D'C' \perp KD'$, e, a partir de G e H , GL e $HM \perp B'C'$. Assim facilmente se comprova que $LD' : D'M :: GK : KH :: BD : DC$.

Mas, $B'D'$ e $D'C'$ medem o dobro de LD' e $D'M$,

$\therefore B'D' : D'C' :: BD : DC$.

Q.E.F.

[A construção é agora óbvia: traçamos $B'F'$ e $C'E'$ e prolongamo-las até se unirem, no terceiro círculo (como se demonstra facilmente ser possível), em A' ; depois divide-se AB e AC em F e E , proporcionalmente a $A'F'B'$ e $A'E'C'$, traçando por último DE e DF .]

47. (X)

Numa primeira análise percebe-se que um conjunto de valores é $0, 0, 0$.

Subtraindo, temos $x \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) = y - z$;

$\therefore x = yz \cdot \frac{y-z}{z-y} = -yz$, a não ser que $y = z$, nesse caso $x = \frac{0}{0}$.

Ora, através de (1), $x = xy - yz$; \therefore , quando $y \neq z$, $x = xy + x$, então $xy = 0$, a não ser que x seja infinito.

Do mesmo modo, através de (2), $xz = 0$, exceto quando x é infinito.

Consequentemente, se x for finito e $y \neq z$, então x ou $y = 0$ e x ou $z = 0$; i.e., $x = 0$ ou $y = z = 0$. Mas esta última está excluída pela nossa hipótese. Assim, $x = 0$, por isso, $yz = 0$; i.e., y ou $z = 0$ e a outra variável pode ter qualquer valor.

Isto dá-nos mais 2 conjuntos de valores:

$x = y = 0$; z tem qualquer valor;

$x = z = 0$; y tem qualquer valor.

Agora temos que determinar o que acontece quando $y = z$.

Através de (1), $\frac{x}{y} = x - y$; $\therefore y^2 = x(y - 1)$; i.e., $x = \frac{y^2}{y-1}$.

Do mesmo modo, através de (2), $x = \frac{z^2}{z-1}$.

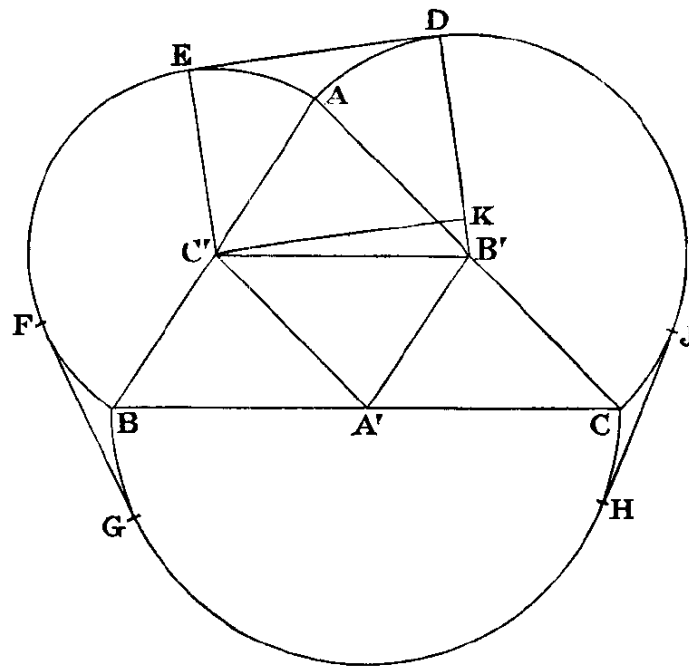
Isto dá-nos um quarto conjunto de valores: $x = \frac{k^2}{k-1}$, $y = z = k$, em que k tem qualquer valor.

Agora é evidente que y e z podem ter qualquer valor real, mas x está restringido pela equação $y^2 - xy + x = 0$, em que y não pode ser real, a não ser que $(x^2 - 4x) > 0$. Assim, x pode ter qualquer valor negativo e qualquer valor positivo que não seja inferior a 4, mas não pode ter qualquer valor positivo, inferior a 4, sem tornar y irreal.

Q. E. F.

48. (X)

Seja ABC o triângulo dado, A' , B' e C' os centros dos semicírculos e DE , FG e HJ , as tangentes comuns, de modo a que $DE = \alpha$, $FG = \beta$ e $HJ = \gamma$.



Traçamos $B'D$ e $C'E$, e, a partir de C' , $C'K \perp B'D$. Assim, $CK = \alpha$.

Designamos os lados do triângulo dado por $2a$, $2b$ e $2c$.

Então, $B'C' = a$ e $B'K = b - c$;

$$\therefore C'K = \sqrt{\{a^2 - (b - c)^2\}};$$

ou seja, $\alpha = \sqrt{\{(a - b + c) \cdot (a + b - c)\}};$

do mesmo modo, $\beta = \sqrt{\{(a + b - c) \cdot (-a + b + c)\}};$

e $\gamma = \sqrt{\{(-a + b + c) \cdot (a - b + c)\}};$

$$\therefore \frac{\beta\gamma}{\alpha} = -a + b + c;$$

$$\text{Do mesmo modo, } \frac{\gamma\alpha}{\beta} = a - b + c; \text{ e } \frac{\alpha\beta}{\gamma} = a + b - c;$$

\therefore a sua soma é igual a $a + b + c$, que é = semiperímetro de ABC .

Q. E. D.

49. (X)

Considere-se, como unidade, um lado de um dos triângulos.

Se cortarmos o tetraedro com um plano vertical que contenha uma das arestas oblíquas, a secção é um triângulo cuja base é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e os lados são $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1.

Assim, o cosseno do ângulo menor da base é

$$\left(\frac{3}{4} + 1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Portanto, o seu seno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ que é igual à sua altura, sendo esta a altura do tetraedro.

$$\text{Então, o volume do tetraedro é } \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Também a altura da pirâmide é igual à altura do triângulo cuja base é $\sqrt{2}$ e os lados 1, 1; i.e., igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore \text{volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}. \text{ Logo, a proporção pedida é}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{12}{\sqrt{2}} = 2.$$

Q. E. F.

50. (X)

Inicialmente, a probabilidade de o saco H conter

2 fichas B é	$\frac{1}{4}$
1 B e 1 P é	$\frac{1}{2}$
2 P é	1

Assim, após acrescentar uma B , a probabilidade de que contenha

3 B é	$\frac{1}{4}$
---------	---------------

$$\begin{array}{ll}
 2 B e 1 P \acute{e} & \frac{1}{2} \\
 1 B e 2 P \acute{e} & \frac{1}{4}
 \end{array}$$

Logo, a probabilidade de tirar uma B é

$$\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}; \text{ i.e., } \frac{2}{3}.$$

\therefore a probabilidade de tirar uma P é $\frac{1}{3}$.

Após transferir esta ficha (sem olhar para ela) para o saco K , a probabilidade de conter

$$\begin{array}{lll}
 3 B \acute{e} & \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} & \text{i.e., } \frac{1}{6} \\
 2 B e 1 P \acute{e} & \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} & \text{i.e., } \frac{5}{12} \\
 1 B e 2 P \acute{e} & \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} & \text{i.e., } \frac{1}{3} \\
 3 P \acute{e} & \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} & \text{i.e., } \frac{1}{12}
 \end{array}$$

\therefore a probabilidade de tirar uma B é $\frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{12} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}; \text{ i.e., } \frac{5}{9}$.

\therefore a probabilidade de tirar uma P é $\frac{4}{9}$.

Antes de transferir esta ficha para o saco H , a probabilidade de este conter

$$\begin{array}{lll}
 2 B \acute{e} & \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} & \text{i.e., } \frac{5}{12} \\
 1 B e 1 P \acute{e} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} & \text{i.e., } \frac{1}{2} \\
 2 P \acute{e} & \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} & \text{i.e., } \frac{1}{12}
 \end{array}$$

Assim, após a transferência da ficha, a probabilidade de o saco H conter

$$\begin{array}{lll}
 3 B \acute{e} & \frac{5}{12} \times \frac{5}{9} & \text{i.e., } \frac{25}{108} \\
 2 B e 1 P \acute{e} & \frac{5}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} & \text{i.e., } \frac{50}{108} \\
 1 B e 2 P \acute{e} & \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{12} \times \frac{5}{9} & \text{i.e., } \frac{29}{108} \\
 3 P \acute{e} & \frac{1}{12} \times \frac{4}{9} & \text{i.e., } \frac{4}{108}
 \end{array}$$

Logo, a probabilidade de tirar uma B é

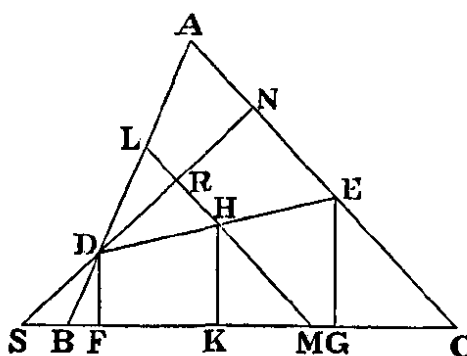
$$\frac{1}{108} \times \left(25 \times 1 + 50 \times \frac{2}{3} + 29 \times \frac{1}{3} \right); \text{ i.e., } \frac{17}{27}.$$

Ou seja, as probabilidades de isto acontecer são de 17 para 10.

Q. E. F.

51. (X)

Seja ABC o triângulo dado e D o ponto dado.



(Análise)

Chamamos DE à linha pedida. Traçamos DF e EG perpendiculares à base. A sua soma é igual a DE .

Bissetamos DE em H e traçamos HK perpendicular à base; assim, torna-se evidente que HK é a média aritmética de DF e EG , e é igual à metade da sua soma; i.e., é igual a metade de DE . Logo, um círculo, circunscrito com centro em H e raio HD , irá passar por E e K , tocando a base do triângulo em K .

Através de H , traçamos LHM paralela a AC . Assim, DA é evidentemente bissetado em L . E, ainda, LM passa pelo centro do círculo. Assim, se traçarmos $DN \perp LM$ (ou CA), será uma corda do círculo bissetada em R . Prolongamos ND até se unir na base com o prolongamento de S . Então, SND corta o círculo e SK toca-o em K . Mas S pode ser calculado e, assim, podemos pegar em SK de modo a que o seu quadrado seja igual ao retângulo formado por SD e SN .

(Síntese)

Traçamos $DN \perp AC$ e prolongamo-la até se unir na base com o prolongamento de S . Pegamos em SK de modo a que o seu quadrado seja igual ao retângulo formado por SD e SN .

Bissetamos DA em L e traçamos LM paralela a AC ; e traçamos KH perpendicular à base, unindo-se a LM em H . Traçamos DH e prolongamo-la até se unir a AC em E e traçamos DF e EG perpendiculares à base.

Uma vez que $DL = LA$ e LM é paralela a AC , $\therefore DH = HE = HK$; $\therefore DE = 2HK$.
 Mas, $DF + EG = 2HK$; $\therefore DF + EG = DE$.

Q. E. F.

[N. B. Esta demonstração está incompleta. Presumi, sem o provar, que $DH = HK$.
 Poderei comprová-lo da seguinte maneira: uma vez que o quadrado de SK é igual ao retângulo formado por SD e SN , então DN é uma corda de um círculo que toca a base em K . Portanto, LM , que o bisseta em ângulos retos, passa pelo centro. Mas HK também passa pelo centro; assim, H é o centro e por isso, $HD = HK$.]

52. (X)

Seja x o número de centavos que cada um tem inicialmente.

O nº 3 recebeu x , tirou $(2 + 4)$ e pôs $\frac{x}{2}$, pelo que o saco contém assim $(x \cdot \frac{3}{2} - 6)$.

Chamemos a a $\frac{3}{2}$.

O nº 5 recebeu $(xa - 6)$, tirou $(4 + 1)$ e pôs o suficiente para multiplicar por a o seu conteúdo quando o recebeu. O saco contém agora $(xa^2 - 6a - 5)$.

O nº 2 tirou $(1 + 3)$ e passou ao próximo $(xa^3 - 6a^2 - 5a - 4)$.

O nº 4 tirou $(3 + 5)$ e passou ao próximo $(xa^4 - 6a^3 - 5a^2 - 4a - 8)$.

O nº 1 pôs 2. O saco contém agora $5x$.

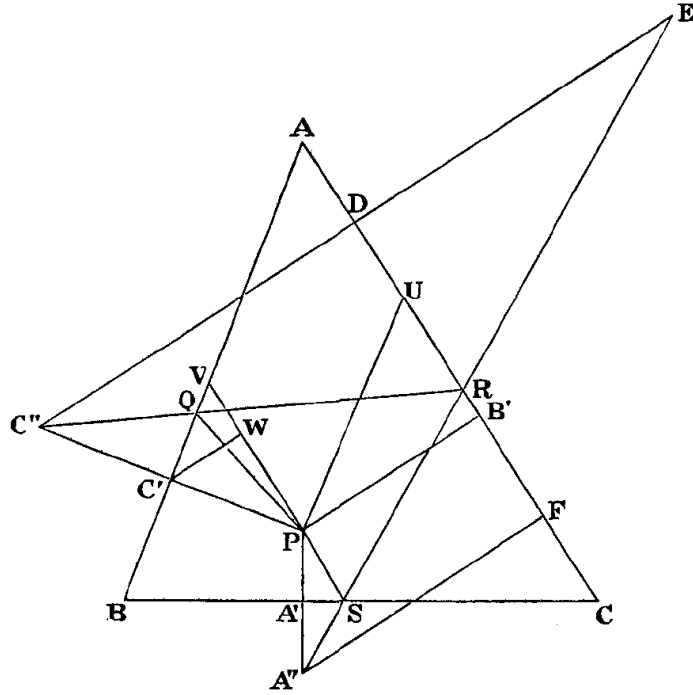
Então, $xa^4 - 6a^3 - 5a^2 - 4a - 6 = 5x$;

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{6a^3 + 5a^2 + 4a + 6}{a^4 - 5} = \\ &= \frac{(6 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^3) \cdot 2}{3^4 - 5 \cdot 2^4} = \\ &= \frac{(162 + 90 + 48 + 48) \cdot 2}{81 - 80} = 696 = 2 \text{ libras, } 18 \text{ xelins, } 0 \text{ centavos.} \end{aligned}$$

Q. E. F.

53. (X)

Seja ABC o triângulo dado e P o ponto dado. Denominamos as suas coordenadas trilineares por α , β e γ .



Traçamos PA' , PB' e PC' \perp s aos lados e, por isso, iguais a α , β e γ . Prolongamos PA' e PC' até A'' e C'' , de maneira a que $A'A'' = PA'$ e $C'C'' = PC'$. Traçamos $C''D \perp AC$ e prolongamo-la até E , fazendo $DE = C''D$. Traçamos EA'' , cortando AC em R e BC em S . Traçamos $C''R$, cortando AB em Q . Traçamos PQ e PS .

A trajetória da bola é evidentemente $PQRSP$, e temos, agora, de calcular a altura de AR .

$$\text{Ora, } AR = DR + AD = DR + AB' - DB'.$$

Primeiro, calculamos DR .

Traçamos PU e PV paralelas a AB e AC , $C'W \perp PV$ e $A''F \perp AC$.

Por semelhança de triângulos, $DR : RF :: DE : A''F :: C''D : A''F$;

$$\therefore DR : DF :: C''D : (C''D + A''F);$$

$$\therefore DR = \frac{DF \cdot C''D}{C''D + A''F}.$$

Ora, $\angle C'VP = A$; $\therefore \angle C'PV = 90^\circ - A$;

$$\therefore WP = \gamma \cap A; \therefore DB' = 2WP = 2\gamma \cap A.$$

Do mesmo modo, $B'F = 2\alpha \cap C$; $\therefore DF = 2(\alpha \cap C + \gamma \cap A)$.

E ainda, $C'W = \gamma \cup A$; $\therefore C''D = 2C'W + PB' = 2\gamma \cup A + \beta$.

Do mesmo modo, $A''F = 2\alpha \cup C + \beta$;

$$\therefore C''D + A''F = 2(\alpha \cup C + \gamma \cup A + \beta);$$

$$\therefore DR = \frac{(\alpha \cap C + \gamma \cap A) \cdot (2\gamma \cup A + \beta)}{\alpha \cup C + \gamma \cup A + \beta}.$$

Ora, $AB' = B'U + UA = B'U + PV =$
 $= \beta \cot A + \gamma \operatorname{cosec} A = \frac{\beta \sin(A+\gamma)}{\sin A};$

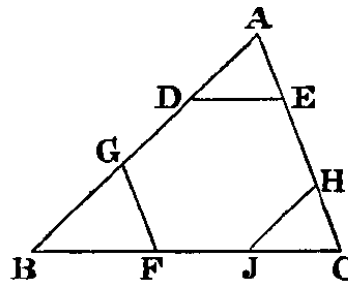
$$\begin{aligned} \therefore AB' - DB' &= \frac{\beta \sin(A+\gamma)}{\sin A} - 2\gamma \cot A = \\ &= \frac{\beta \sin(A+\gamma)(1-2\cot^2 A)}{\sin A} = \\ &= \frac{\beta \sin(A+\gamma) \sin 2A}{\sin A}. \end{aligned}$$

Ora, $AR = DR + AB' - DB';$

$$\therefore AR = \frac{\alpha \sin(C+\gamma) \sin A (2\gamma \sin(A+\beta))}{\alpha \sin(C+\gamma) \sin(A+\beta)} + \frac{\beta \sin(A+\gamma) \sin 2A}{\sin A}.$$

Q. E. F.

54. (x)



É evidente que o triângulo ADE é idêntico a ABC .

Seja k igual à razão de $\frac{DE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{AD}{c}$.

Ora, $DG = DE$; $\therefore DG = ka$; $\therefore GB = c - ka - kc$; $\therefore \frac{GB}{c} = 1 - k - k \cdot \frac{a}{c}$;

$\therefore GF$ (que equivale a $GB \cdot \frac{b}{c}$) $= b - kb - k \cdot \frac{ab}{c}$; mas, $GF = DE = ka$;

$\therefore b - kb - k \cdot \frac{ab}{c} = ka$; $\therefore bc = k \cdot (bc + ca + ab)$;

$\therefore k = \frac{bc}{bc+ca+ab} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{1}{m}$ (por exemplo).

Assim, $AD = \frac{c \cdot \frac{1}{m}}{1} = \frac{c}{m}$; $DG = \frac{1}{m} = \frac{c \cdot \frac{1}{c}}{m}$.

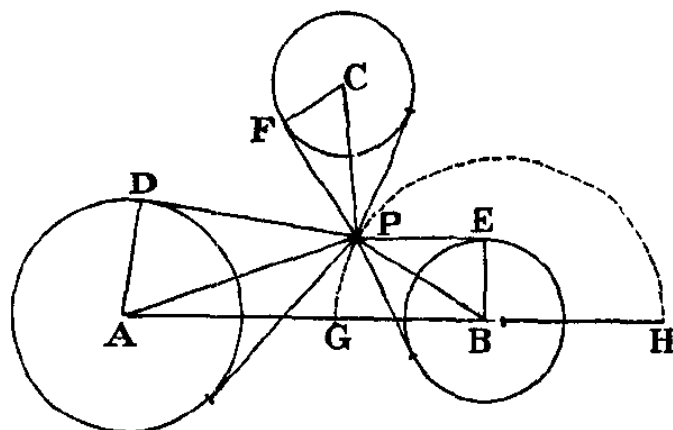
$\therefore GB$ (que equivale a $c - AD - DG$) $= \frac{c \cdot (m - \frac{1}{a} - \frac{1}{c})}{m} = \frac{c \cdot \frac{1}{b}}{m}$;

$\therefore AD : DG : GB :: \frac{1}{a} : \frac{1}{c} : \frac{1}{b}$.

E ainda, $DE = ka = \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Q. E. F.

55. (X)



Sejam A, B e C os centros das bases das torres, e a, b e c os seus raios. Suponhamos que P é o ponto pedido e, a partir deste, traçamos um par de tangentes para cada círculo e linhas até aos centros, o que irá, evidentemente, bissetar os ângulos formados pelos pares de tangentes.

Assim, os ângulos APD, BPE e CPF são iguais;

$$\therefore \sphericalangle APD = \sphericalangle BPE = \sphericalangle CPF; \text{ i.e., } \frac{a}{AP} = \frac{b}{BP} = \frac{c}{CP};$$

$$\therefore AP : BP : CP :: a : b : c.$$

Traçamos uma linha por A e B e nela marcamos os pontos G e H , de maneira a que $AG : GB :: AH : HB :: a : b$.

Assim, o semicírculo traçado entre G e H é o lugar geométrico de todos os pontos cujas distâncias, de A a B , são proporcionais a a e b .

Logo, se traçarmos uma linha BC e um semicírculo que deverá ser o lugar geométrico de todos os pontos cujas distâncias, de B a C , são proporcionais a b e c , a interseção destes dois semicírculos será o ponto pedido.

Q. E. F.

[Nota. Se representarmos algebricamente «o lugar geométrico de todos os pontos cujas distâncias (...)», este é evidentemente um círculo em que o centro está na linha AB e GH .]

56. (X)

Traçamos BC, CE e BD iguais às alturas dadas de maneira a formar ângulos retos em B e C , e prolongamos DB e EC . Traçamos DC e $CF \perp$ a ela. Traçamos EB e $BG \perp$ a ela. Circunscrevemos um círculo com centro em B e raio BF , circunscrevemos outro com centro em C e raio CG . Estes encontram-se em A e traçamos AB e AC .

Chamemos as alturas de ABC por α , β e γ .

Ora, $\alpha \cdot BC = \beta \cdot CA = \gamma \cdot AB =$ o dobro da área de ABC ; e ainda, considerando BC como a unidade, $BC = \frac{1}{BC}$, $CA = CG = \frac{1}{CE}$, $AB = BF = \frac{1}{BD}$;

$\therefore \frac{\alpha}{BC} = \frac{\beta}{CE} = \frac{\gamma}{BD}$; i.e., α , β , e γ são proporcionais às alturas dadas; logo, o triângulo ABC é idêntico ao triângulo pedido. O resto da construção é óbvia.

Q. E. F.

57. (X)

(1) *Geometricamente*

Seja ABC o triângulo dado.

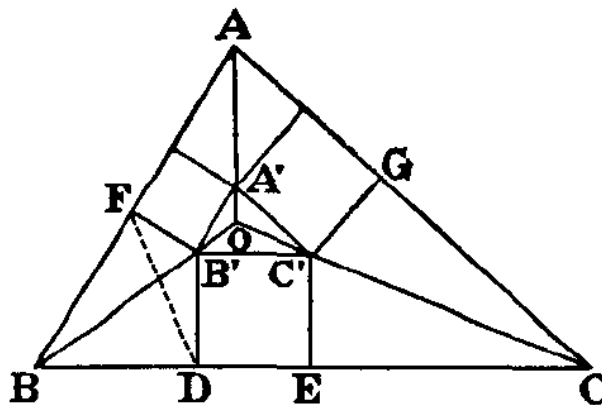
(Análise)

Suponhamos que os 3 lados superiores dos quadrados traçados formam o triângulo $A'B'C'$. Traçamos AA' , BB' e CC' .

Ora, é evidente que, se prolongarmos BB' , as perpendiculares traçadas, desde qualquer ponto dela até AB e BC , serão proporcionais a $B'F$ e $B'D$.

O mesmo acontece com AA' e CC' .

Assim, estas 3 linhas unir-se-ão no ponto desde o qual as perpendiculares traçadas até aos lados de ABC são proporcionais a $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$.



Assim, se circunscrevermos quadrados em ABC e se prolongarmos esses lados de modo a formar um novo triângulo $A''B''C''$, este triângulo, com 3 quadrados, irá formar um diagrama totalmente idêntico àquele formado pelo triângulo ABC com 3 quadrados inscritos.

(Síntese)

Portanto, se circunscrevermos quadrados no triângulo dado, se prolongarmos os lados exteriores desses quadrados de modo a formar um novo triângulo, e se dividirmos os lados do triângulo dado do mesmo modo que aqueles do triângulo novo, as suas porções centrais serão as bases dos quadrados pedidos.

Q. E. F.

(2) *Trigonomericamente*

Sejam a , b e c os lados do triângulo dado e m a sua área; sejam x , y e z os lados dos quadrados pedidos.

É evidente que podemos circunscrever um círculo em redor do quadrilátero $BDB'F$.

Assim, $\angle B'BD = \angle B'FD$.

Ora, quanto ao triângulo $B'FD$, sabemos que

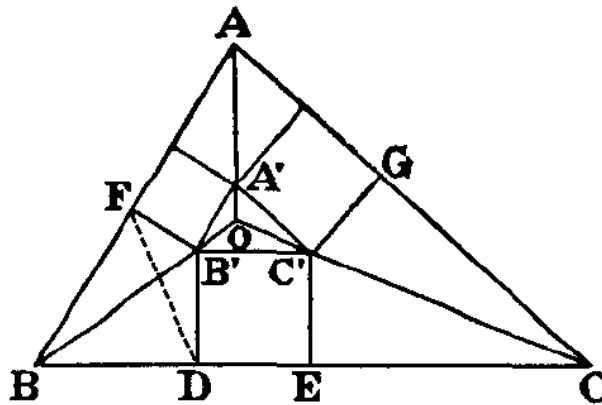
$$B'D \cap D = B'F \cap F; \text{ i.e., } x \cap (B' + F) = z \cap F;$$

$$\therefore x \cap B' \cup F + x \cup B' \cap F = z \cap F.$$

Ora, $\angle B$ é suplementar de $\angle B'$;

$$\therefore x \cap B \cup F = (z + x \cup B) \cap F;$$

$$\therefore \cot F = \frac{z+x \cup B}{x \cap B} = \cot B'BD.$$



Ora, $BD = x \cot B'BD; \therefore BD = \frac{z+x \cup B}{\cap B}$.

Do mesmo modo, $EC = \frac{y+x \cup C}{\cap C}$.

Mas, $BD + EC = a - x;$

$$\therefore \frac{z+x \cup B}{\cap B} + \frac{y+x \cup C}{\cap C} = a - x;$$

$$\therefore \frac{x \cap (B+C) + y \cap B + z \cap C}{\cap B \cap C} = a - x;$$

$$\text{i.e., } \frac{x \cap_{+A} + y \cap_{+B} + z \cap_{+C}}{\cap_B \cap_C} = a - x.$$

É então evidente que estes triângulos são idênticos: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Assim, ao multiplicarmos a última equação por uma ou outra destas frações iguais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a \cap_A + b \cap_B + c \cap_C}{\cap_B \cap_C} &= \frac{a^2}{x} - a \\ \therefore \frac{a \cap_A + b \cap_B + c \cap_C}{a \cap_B \cap_C} &= \frac{a}{x} - 1 \\ \therefore \frac{a}{x} &= \frac{a \cap_A + b \cap_B + c \cap_C}{a \cap_B \cap_C} + 1 \end{aligned}$$

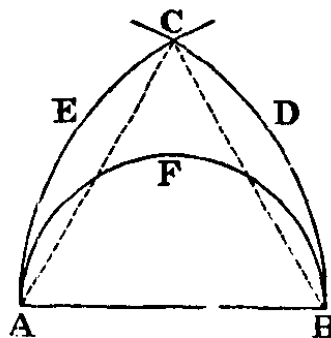
E, multiplicando numerador e denominador por alguma das frações iguais $\frac{a}{\cap_A}$, $\frac{b}{\cap_B}$, $\frac{c}{\cap_C}$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab \cap_C} + 1; \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2m} + 1 = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}. \end{aligned}$$

Q. E. F.

58. (X)

Podemos supor que os 3 pontos formam um triângulo, pois a probabilidade de que estejam alinhados é (praticamente) *nula*.



Seja AB o lado mais longo do triângulo, que é a sua base, e nele traçamos o semicírculo AFB . E ainda, com centros em A e B e os raios AB e BA , traçamos os arcos BDC e AEC , cortando-se em C .

É evidente que o vértice do triângulo não pode estar fora da figura $ABDCE$.

Mais ainda, se estiver inscrito no semicírculo, será um triângulo obtusângulo mas, se estiver na parte externa, será um acutângulo. (A probabilidade de que esteja na circunferência é praticamente *nula*.)

Assim a probabilidade pedida é igual à área do semicírculo/área da figura $ABDCE$.

Seja $AB = 2a$, então a área do semicírculo é igual a $\frac{\pi a^2}{2}$ e a área da figura $ABDCE$ é igual a $2 \times \text{sector } ABDC - \text{triângulo } ABC$; $= 2 \cdot \frac{4\pi a^2}{6} - \sqrt{3} \cdot a^2 = a^2 \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

$$\text{Assim, a probabilidade é } = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Q. E. F.

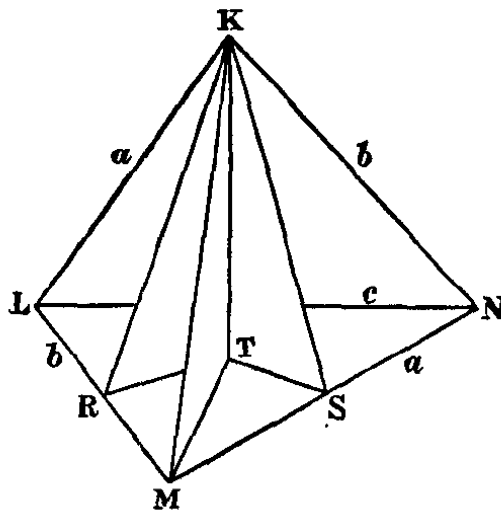
59. (x)

Seja $KL = MN = a$, $KN = LM = b$, $KM = LN = c$, e os ângulos LMK , MKL e KLM iguais a A , B e C ; o mesmo para os ângulos das outras faces.

Traçamos $KT \perp$ à face-base LMN . Traçamos também KR e KS perpendiculares a LM e MN . Traçamos TR , TM e TS .

É facilmente demonstrado que TRM e TSM são ângulos retos.

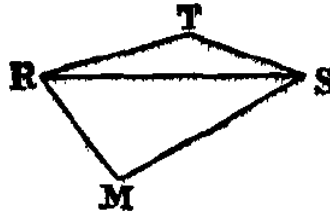
O volume pedido é $\frac{1}{3} \cdot KT \cdot LMN$. A área de LMN é claramente conhecida. Apenas precisamos da altura de KT . Ora, $KT^2 = KS^2 - TS^2$ e, evidentemente, $KS = c \cdot \sin B$. Assim, apenas precisamos da altura de TS .



Ora, isto requer um lema preliminar, que é ele próprio um belo problema:

Lema (1)

Dados, no quadrilátero $RMST$, os lados RM e MS e o $\angle RMS$, e sabendo que os ângulos TRM e TSM são retos, calcule TS .



Ora, $\frac{TS}{\sphericalangle_{TRS}} = \frac{TR}{\sphericalangle_{TSR}}$; também, $TS \sphericalangle_{TSR} + TR \sphericalangle_{TRS} = RS$;

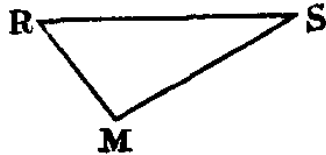
$$\begin{aligned} \therefore \frac{TS}{\sphericalangle_{TRS}} &= \frac{TS}{\sphericalangle_{TSR}} \\ &= \frac{TS \sphericalangle_{TSR} + TR \sphericalangle_{TRS}}{\sphericalangle_{TRS} \sphericalangle_{TSR} + \sphericalangle_{TSR} \sphericalangle_{TRS}} = \\ &= \frac{RS}{\sphericalangle_{RMS}} = \frac{MS}{\sphericalangle_{MRS}} \\ \therefore \frac{TS}{\sphericalangle_{MRS}} &= \frac{MS}{\sphericalangle_{MRS}}; \text{ i.e., } TS = MS \cot MRS. \end{aligned}$$

Q. E. F.

Assim, é necessário um segundo lema de modo a descobrir o valor da $\cot MRS$ (ou da $\tan MRS$, que cumpre o mesmo propósito e dará um problema mais bonito).

Lema (2)

Dados os lados RM e MS e o $\angle RMS$ do triângulo RMS , calcule a $\tan MRS$.



$$\tan MRS = \frac{\sphericalangle_{MRS}}{\sphericalangle_{MRS}} = \frac{RS \sphericalangle_{MRS}}{RS \sphericalangle_{MRS}} = \frac{MS \sphericalangle_{RMS}}{RM - MS \sphericalangle_{RMS}}.$$

Q. E. F.

Assim, no quadrilátero $RMST$ temos, através do lema (1), $TS = MS \cot MRS$; e, através do lema (2), $\cot MRS = \frac{RM - MS \sphericalangle_{RMS}}{MS \sphericalangle_{RMS}} = \frac{c \sphericalangle_{A-C} \sphericalangle_{B-C}}{c \sphericalangle_{B-C}} =$

$$\frac{\sphericalangle_{A-C} \sphericalangle_{B-C}}{\sphericalangle_{B-C}};$$

$$\therefore TS = \frac{c}{\sphericalangle_{B-C}} \cdot (\sphericalangle_{A-C} - \sphericalangle_{B-C}).$$

Ora, $KT^2 = KS^2 - TS^2$;

$$\therefore TS^2 = (c \sphericalangle_{B-C})^2 - \frac{c^2}{\sphericalangle_{B-C}^2} \cdot (\sphericalangle_{A-C} - \sphericalangle_{B-C})^2 =$$

$$= \frac{c^2}{\sphericalangle_{B-C}^2} \cdot \{(\sphericalangle_{B-C})^2 - (\sphericalangle_{A-C} - \sphericalangle_{B-C})^2\}.$$

Então, $KT = \frac{c}{\sphericalangle_{B-C}}$ multiplicado por

$$= \frac{(m+n)b \cdot \frac{A+na}{B}}{ma \cdot \frac{B}{B}};$$

$$\text{i.e., } \cot \theta = \frac{(m+n) \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{A+na \cot B}{B}}{ma} =$$

$$= \frac{(m+n)a \cot A + na \cot B}{ma} = \frac{(m+n) \cot A + n \cot B}{m}.$$

Do mesmo modo, $\cot \phi = \frac{(m+n) \cot A + m \cot C}{n}$.

Q. E. F.

COROLÁRIOS

- (1) $m \cot \theta - n \cot \phi = n \cot B - m \cot C$.
- (2) $\frac{\cot B + \cot \phi}{\cot C + \cot \phi} = \frac{m}{n}$.
- (3) Se o triângulo é equilátero,

$$\cot \theta = \frac{m+2n}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \phi = \frac{n+2m}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{\cot \theta}{\cot \phi} = \frac{mn+2n^2}{mn+2m^2}$$

$$\therefore \frac{\tan \theta}{\tan \phi} = \frac{mn+2m^2}{mn+2n^2}$$

i.e., se traçarmos $CD'B \perp$ a AD , $\frac{B'D'}{D'C} = \frac{mn+2m^2}{mn+2n^2}$,

por exemplo, se $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{B'D'}{D'C} = \frac{2}{5}$.

- (4) Seja $\tan A = 1$, $\tan B = 2$, $\tan C = 3$,

$$\text{então, } \cot \theta = \frac{m+n+n \cdot \frac{1}{2}}{m} = \frac{2m+3n}{2m}$$

$$\cot \phi = \frac{m+n+m \cdot \frac{1}{3}}{n} = \frac{3n+4m}{3n}$$

$$\therefore \frac{\tan \theta}{\tan \phi} = \frac{6mn+8m^2}{6mn+9n^2}.$$

A partir da qual, se tivermos $\frac{\tan \theta}{\tan \phi}$, podemos calcular o valor de $\frac{m}{n}$ a partir de uma equação de segundo grau.

Tentei vários valores para encontrar um que desse resultados lógicos para m e n e descobri que $\frac{2}{3}$ se aplica, pois leva-nos à equação de segundo grau

$$2(6mn + 9n^2) - 3(6mn + 8m^2) = 0$$

em que $(B^2 - 4AC)$ se converte, após dividir tudo por 6, em $(1^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3)$, i.e., 49.

A equação de segundo grau é $4m^2 + mn - 3n^2 = 0$, de onde $\frac{m}{n} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \frac{3}{4}$, a qual resolve o problema «dado um triângulo ABC com as tangentes dos seus ângulos iguais a 1, 2 e 3, divida BC em D , de modo a que, se se traçar AD e $CD'B'$ perpendicular a ela, a razão $\frac{B'D'}{D'C}$ possa ser $\frac{2}{3}$ ». A resposta é «divida-o de modo a que $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$ ».

61. (X)

Sabemos que a seguinte equação é verdadeira:

$$(a^2 + 4b^2 + 4c^2) + (4a^2 + b^2 + 4c^2) + (4a^2 + 4b^2 + c^2) = 9(a^2 + b^2 + c^2)$$

Então, $a^2 + b^2 + c^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} \cdot \{(a^2 + 4b^2 + 4c^2) + (4a^2 + b^2 + 4c^2) + (4a^2 + 4b^2 + c^2)\} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \{(a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8bc - 4ca - 4ab) + \\ &\quad + (4a^2 + b^2 + 4c^2 - 4bc + 8ca - 4ab) + \\ &\quad + (4a^2 + 4b^2 + c^2 - 4bc - 4ca + 8ab)\} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \{(-a + 2b + 2c)^2 + (2a - b + 2c)^2 + (2a + 2b - c)^2\} = \\ &= \left(\frac{-a + 2b + 2c}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a - b + 2c}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a + 2b - c}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Ora, $(-a + 2b + 2c) = 3(b + c) - (a + b + c)$, por isso, se $(a + b + c)$ for múltiplo de 3, $(-a + 2b + 2c)$ também o é, logo, $\frac{-a+2b+2c}{3}$ é um número inteiro, aplicando-se o mesmo às outras duas frações.

E ainda se pode comprovar que, se $\frac{-a+2b+2c}{3}$ for igual a a ou b ou c , então a , b e c podem estar em progressão aritmética.

Em primeiro lugar, seja $\frac{-a+2b+2c}{3} = a$;

então, $-a + 2b + 2c = 3a$; i.e., $b + c = 2a$.

Em segundo lugar, seja $\frac{-a+2b+2c}{3} = b$;

então, $-a + 2b + 2c = 3b$; i.e., $2c = a + b$.

Em terceiro lugar, seja $\frac{-a+2b+2c}{3} = c$;

então, $-a + 2b + 2c = 3c$; i.e., $2b = c + a$.

O mesmo se aplica às outras duas frações.

Assim, de modo inverso, se a , b e c não estiverem em progressão aritmética, os dois conjuntos de quadrados não têm termos comuns.

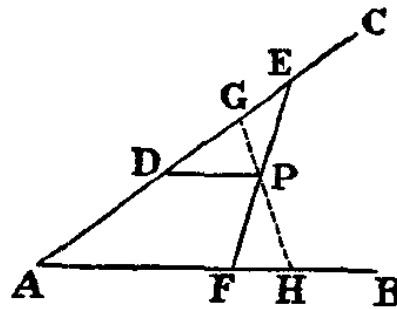
Q. E. D.

Exemplos numéricos (não feitos de cabeça)

a^2	b^2	c^2	$\left(\frac{-a + 2b + 2c}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2a - b + 2c}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2a + 2b - c}{3}\right)^2$
1^2	4^2	4^2	5^2	2^2	2^2
3^2	4^2	8^2	7^2	6^2	2^2
4^2	5^2	9^2	8^2	7^2	3^2

62. (X)

Seja AB e AC as linhas dadas e P o ponto dado.



Através de P , traçamos PD paralela a AB ; em DC cortamos DE igual a AD ; traçamos EP e prolongamo-la até cortar AB em F .

Uma vez que $AD = DE$ e que DP é paralela a AB , então $FP = PE$.

Traçamos GPH por P ; assim, $\angle PFH > \angle PEG$.

Como os triângulos PFH , PEG e $PF = PE$, $\angle FPH = \angle GPE$ e $\angle PFH > \angle PEG$, então, $PH > PG$ e triângulo $PFH >$ triângulo PGE .

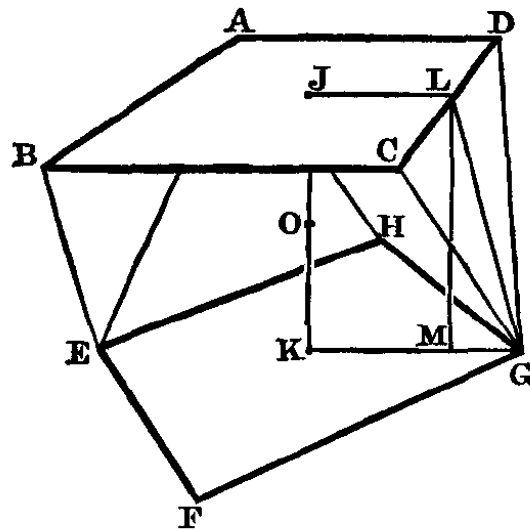
Somamos a cada um o quadrilátero $AFPG$; assim, triângulo $AGH >$ triângulo AEF .

E o mesmo se aplica a qualquer outra linha que passe por P .

Logo, AEF é o menor triângulo possível.

Q. E. F.

63. (x)



Seja cada lado do quadrado igual a 2.

Assim, $LG = \sqrt{3}$ e $MG = \sqrt{2} - 1$; $\therefore LM(=JK) = \sqrt{3 - (2 + 1 - 2\sqrt{2})} = 2^{\frac{3}{4}}$;

$\therefore OJ = OK = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$.

Seja O a origem, o eixo X paralelo a AD e o eixo Y paralelo a AB , e JK parte do eixo Z .

Seja

$$x \curvearrowright \alpha + y \curvearrowright \beta + z \curvearrowright \gamma - p = 0$$

a equação do plano que contém o triângulo CDG

em que p é a altura da perpendicular traçada desde O até este plano, encontrando-se com ele algures em LG .

Assim, podemos calcular p a partir da equação de LG no plano XZ , que será

$$x \curvearrowright \alpha + z \curvearrowright \gamma - p = 0$$

Ora, esta linha contém L , cujas coordenadas são $(1, \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}})$ e G cujas coordenadas são

$(\sqrt{2}, -\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}})$.

$$\therefore \curvearrowright \alpha + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \cdot \curvearrowright \gamma - p = 0$$

$$\text{e } \sqrt{2} \cdot \curvearrowright \alpha - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \cdot \curvearrowright \gamma - p = 0.$$

$$\therefore (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \alpha = \frac{2}{2^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \gamma = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \gamma.$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \alpha}{\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}} = \frac{\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \gamma}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{3}{4}}+3-2^{\frac{3}{4}}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \alpha = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \gamma = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore p = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3}}.$$

Assim, a área de $CDG = \sqrt{3}$; \therefore o volume da pirâmide cuja base é CDG e cujo vértice é O , é igual a $\frac{\sqrt{2}+1}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$; existindo 8 pirâmides como esta no sólido e cuja soma das mesmas é igual a $\frac{8(\sqrt{2}+1)}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$.

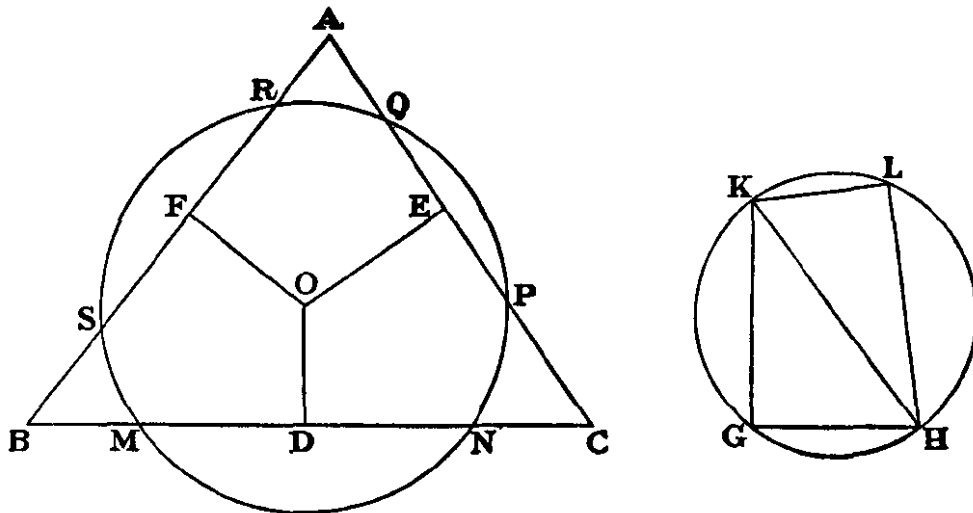
E ainda, o volume da pirâmide, cuja base é $ABCD$ e cujo vértice é O , é igual a $\frac{4}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$; existindo duas pirâmides assim no sólido em que a soma destas é igual a $\frac{8}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$.

Portanto, o volume do sólido é

$$\frac{8(2 + \sqrt{2})}{3 \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{8 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{2} + 1)}{3}$$

Q. E. F.

64. (X)



Seja ABC o triângulo dado e O o ponto dado. Seja a distância entre O e BC , representada por OD , menor do que qualquer uma das distâncias de O a CA e a AB , representadas por OE e OF , respetivamente.

Traçamos a linha GH igual a OE , e GK perpendicular a ela e igual a OF . Traçamos HK e circunscrevemos um círculo em redor do triângulo GHK e traçamos no interior do círculo KL igual a OD . Traçamos LH .

Uma vez que os quadrados de KL e LH são iguais aos quadrados de KG e GH , e que KL é menor do que KG ou GH , então LH é maior do que qualquer uma delas. Assim, um círculo com centro em O e raio igual a LH cortará cada uma das três linhas em dois pontos. Traçamos esse círculo. Assim,

$$\text{quadrados de } MD, DO = \text{quadrados de } PE, EO$$

$$\text{quadrado de } LH = \text{quadrados de } RF, FO$$

$$\therefore \text{quadrados de } MD, DO, LH = \text{quadrados de } PE, RF, EO, FO$$

$$\text{mas quadrados de } DO, LH = \text{quadrados de } KL, LH =$$

$$= \text{quadrados de } GH, GK = \text{quadrados de } EO, FO$$

$$\therefore \text{quadrado de } MD = \text{quadrados de } PE, RF$$

$$\therefore 4 \text{ vezes o quadrado de } MD = 4 \text{ vezes os quadrados de } PE, RF$$

$$\text{i.e., quadrado de } MN = \text{quadrados de } PQ, RS$$

Logo, MN, PQ, RS podem ser lados de um triângulo retângulo.

Q. E. F.

65. (X)

Ao determinar os ângulos $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ de 360° , devemos ter

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2};$$

uma equação indeterminada com 3 incógnitas.

Evidentemente, nenhuma delas pode ser tão pequena quanto 2.

(1) Seja $x = 3$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$.

Ora, se $\frac{1}{y} = \frac{k}{k+l} \times \frac{1}{6}$, $\frac{1}{z} = \frac{l}{k+l} \times \frac{1}{6}$. Assim, k apenas poderá ser 1, 2, 3 ou 6, e o mesmo se aplica a l .

[N. B. Supõe-se que as frações $\frac{k}{k+l}, \frac{l}{k+l}$ estejam simplificadas ao máximo.]

Seja $\frac{1}{y} \nless \frac{1}{2}$. Então, $\frac{k}{k+l} \nless \frac{1}{2}$.

Logo, os seus valores possíveis são

$$\frac{1}{2}, \text{ de modo que } \frac{l}{k+l} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}, \dots \dots \dots \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{4}, \dots\dots\dots \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5}, \dots\dots\dots \frac{2}{5} \\ \frac{6}{7}, \dots\dots\dots \frac{1}{7} \end{array}$$

Isto dá-nos 5 conjuntos de valores para $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{24}, \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}.$$

(2) Seja $x = 4$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ e, tal como anteriormente, k apenas poderá ser 1,

2 ou 4, e o mesmo se aplica a l . Assim, os valores possíveis para $\frac{k}{k+l}$ são:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}, \text{ de modo que } \frac{l}{k+l} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}, \dots\dots\dots \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5}, \dots\dots\dots \frac{1}{5} \end{array}$$

Isto dá-nos mais 3 conjuntos de valores para $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}.$$

(3) Seja $x = 5$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$. Assim, o denominador deve ter o fator 3 e k apenas poderá ser 1, 2, 5 ou 10, e o mesmo se aplica a l . Logo, os valores possíveis para $\frac{k}{k+l}$ são:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}, \text{ de modo que } \frac{l}{k+l} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}, \dots\dots\dots \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6}, \dots\dots\dots \frac{1}{6} \end{array}$$

Isto dá-nos 2 conjuntos de valores para $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}$$

mas o último já o tínhamos (um facto que escapou ao calculá-lo).

(4) Seja $x = 6$, então $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$. Assim, k apenas poderá ser 1 ou 3, e o mesmo se

aplica a l . Logo, os valores possíveis para $\frac{k}{k+l}$ são:

$$\frac{1}{2}, \text{ de modo que } \frac{l}{k+l} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{4}$$

Isto dá-nos 2 conjuntos de valores:

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$$

mas o último já o tínhamos (um facto que escapou ao calculá-lo).

É inútil dar valores maiores do que 6 a x pois estes dariam $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{3}$, de maneira que um ou outro deverá ser $> \frac{1}{6}$; i.e., ou y ou z devem ser < 6 e assim voltaríamos a obter os mesmos valores. Assim, temos 10 formatos diferentes.

Q. E. F.

Os 10 conjuntos de ângulos (não tenho a certeza de os ter feito a todos de cabeça) são:

- (1) $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$
- (2) $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$
- (3) $120^\circ, 45^\circ, 15^\circ$
- (4) $120^\circ, 36^\circ, 24^\circ$
- (5) $120^\circ, 513/7^\circ, 84/7^\circ$
- (6) $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$
- (7) $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$
- (8) $90^\circ, 72^\circ, 18^\circ$
- (9) $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$
- (10) $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

66. (X)

Seja $k = \frac{a}{\alpha + \beta}$. As fichas devem ser as duas brancas ou uma branca e uma preta.

Seja x a probabilidade do primeiro estado; assim a probabilidade do segundo é $(1 - x)$.

Logo, a probabilidade de tirar uma branca é $x \times 1 + (1 - x) \times \frac{1}{2}$,

$$\therefore x + \frac{1-x}{2} = k; \therefore x = 2k - 1; \therefore (1 - x) = 2 - 2k.$$

Agora, tiramos uma ficha que se revela ser branca. Então, a probabilidade do «acontecimento observado» no primeiro estado é 1 e no segundo, $\frac{1}{2}$.

Logo, as probabilidades da existência destes dois estados são proporcionais a $(2k - 1) \times 1$, $(2 - 2k) \times \frac{1}{2}$; i.e., são proporcionais a $2k - 1$, $1 - k$. Portanto, as probabilidades reais são $\frac{2k-1}{k}$, $\frac{1-k}{k}$ e a probabilidade de agora tirar uma branca é

$$\frac{2k - 1}{k} \times 1 + \frac{1 - k}{k} \times \frac{1}{2}$$

i.e.,

$$\frac{3k - 1}{2k}$$

Assim, o efeito de *uma* repetição da experiência foi a conversão de k em $\frac{3k-1}{2k}$.

Consequentemente, uma segunda repetição irá converter

$$\frac{3k-1}{2k} \text{ em } \frac{3 \times \frac{3k-1}{2k} - 1}{2 \times \frac{3k-1}{2k}}; \text{ i.e., em } \frac{7k-3}{6k-2}.$$

Temos agora de descobrir a lei (se é que existe) para a série

$$k, \frac{3k-1}{2k}, \frac{7k-3}{6k-2}$$

considerando estas como funções idênticas de 1, 2, 3.

Podemos escrever o primeiro e segundo termo na forma do terceiro:

$$\frac{k-0}{0 \times k - (-1)^0}, \frac{3k-1}{2k-0}, \frac{7k-3}{6k-2}$$

e, à primeira vista, podemos observar que cada um tem a forma

$$\frac{(2^n - 1) \times k - (2^{n-1} - 1)}{(2^n - 2) \times k - (2^{n-1} - 2)}$$

em que n indica a posição do termo.

Supondo que esta lei é válida até n termos, qual será o efeito de repetir a experiência uma vez mais?

Sabemos que converte k em $\frac{3k-1}{2k}$. Assim, a nova probabilidade será

$$\frac{3 \times \frac{(2^n - 1) \times k - (2^{n-1} - 1)}{(2^n - 2) \times k - (2^{n-1} - 2)} - 1}{2 \times \frac{(2^n - 1) \times k - (2^{n-1} - 1)}{(2^n - 2) \times k - (2^{n-1} - 2)}}$$

i.e.,

$$\frac{k \times (3 \cdot 2^n - 3 - 2^n + 2) - 3 \cdot 2^{n-1} + 3 + 2^{n-1} - 2}{(2^{n+1} - 2) \times k - (2^n - 2)}$$

i.e.,

$$\frac{(2^{n+1} - 1) \times k - (2^n - 1)}{(2^{n+1} - 2) \times k - (2^n - 2)}$$

i.e., o termo $(n + 1)^\circ$ da série seguirá a mesma lei. Mas sabemos que a lei é válida para o 1º, 2º e 3º termos. Logo, é válida universalmente.

Assim, após m repetições da experiência, a probabilidade de tirar uma branca será o termo $(m + 1)^\circ$ da série acima, i.e., será

$$\frac{(2^{m+1} - 1) \times k - (2^m - 1)}{(2^{m+1} - 2) \times k - (2^m - 2)}$$

Ora, se substituirmos k por $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, a probabilidade é

$$\frac{(2^{m+1} - 1) \times \alpha - (2^m - 1) \cdot (\alpha + \beta)}{(2^{m+1} - 2) \times \alpha - (2^m - 2) \cdot (\alpha + \beta)}$$

i.e.,

$$\frac{(2^{m+1} - 2^m)\alpha - (2^m - 1) \cdot \beta}{(2^{m+1} - 2^m)\alpha - (2^m - 2) \cdot \beta}$$

i.e.,

$$\frac{2^m \cdot (\alpha - \beta) + \beta}{2^m \cdot (\alpha - \beta) + 2\beta}$$

Q. E. F.

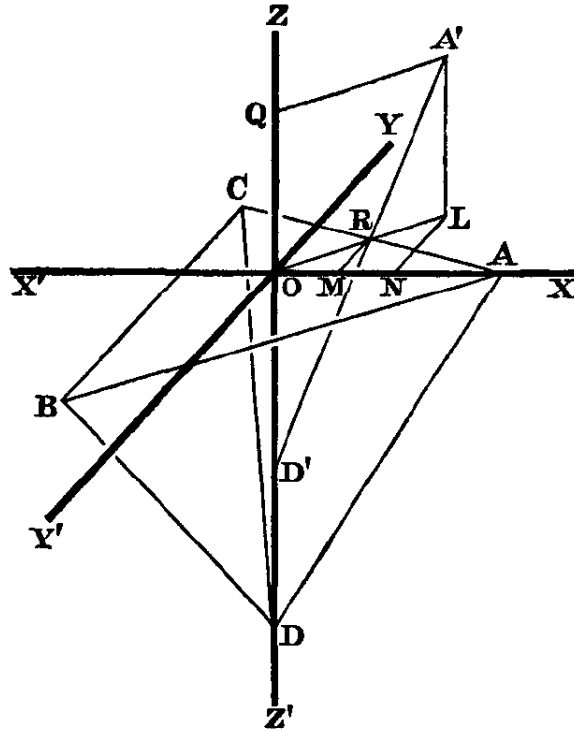
Exemplo: seja $\frac{9}{10}$ a probabilidade e repetamos a experiência por mais 5 vezes.

Ora, $\alpha = 9$, $\beta = 1$; então a probabilidade é agora

$\frac{32 \times 8 + 1}{32 \times 8 + 2}$ i.e.,

$$\frac{257}{258}$$

67. (X)



Seja $ABCD$ a cavidade. Rodamos o tetraedro até que o plano nele incluído, DOA , tome a nova posição de $D'QA$; a aresta DA , na sua nova posição, irá tocar no lado da cavidade AC em R . Traçamos $A'L \perp$ plano XY . Traçamos OR e prolongamo-la até L . Traçamos RM e LN , as coordenadas y de R e L .

Assim, as coordenadas de A' são ON, NL, LA' .

Chamamos OM e MR de x' e y' , e AO, OR e OD de a, a' e h' , e $\angle XOR$ de θ .

É evidente que o eixo vertical do tetraedro irá sempre coincidir com o eixo Z .

Conseqüentemente, A move-se na superfície de um cilindro, i.e.,

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1)$$

Ora, $\angle XAC = 150^\circ$,

$$\therefore \text{equação de } AC \text{ é } y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x - a); \text{ i.e., } x + \sqrt{3} \cdot y = a \quad (2)$$

Também a equação de OR é $\frac{x}{\sin \theta} = \frac{y}{\cos \theta} = \delta$,

$$\therefore, \text{ em } R, \frac{x'}{\sin \theta} = \frac{y'}{\cos \theta} = a' \quad (3)$$

\therefore , através de (2), $a' \cdot \sin \theta + \sqrt{3} \cdot a' \cdot \cos \theta = a$;

$$\therefore a' = \frac{a}{\sin \theta + \sqrt{3} \cdot \cos \theta} \quad (4)$$

E ainda, pela semelhança dos triângulos $D'QA'$, $D'OR$, $QA': QD' :: OR \cdot OD'$, i.e.,
 $a : h :: \frac{a}{\theta + \sqrt{3} \cdot \theta} : h - z; \therefore h - z = \frac{h}{\theta + \sqrt{3} \cdot \theta}$; mas, $\theta = \frac{x}{a}$ e $\theta = \frac{y}{a}$; \therefore
 $h - z = \frac{ah}{x + \sqrt{3} \cdot y}$; i.e., $(x + \sqrt{3} \cdot y) \cdot (h - z) = ah$ (5)

As equações (1) e (5) dão o lugar geométrico pedido.

Q. E. F.

68. (x)

Chamamos x , y e z aos números das garrafas tiradas nos 3 dias. Seja $10v$ centavos o custo de cada garrafa e, por isso, $11v$ centavos o preço de venda.

Assim, os recibos do tesoureiro nos 3 dias eram

$$(x - 1) \cdot 11v, y \cdot 11v - v, (z - 1) \cdot 11v - v$$

gerando como lucros (i.e., o que resta após deduzir o custo inicial das garrafas retiradas) $xv - 11v$, $yv - v$, $zv - 12v$. Assim, estas 3 quantidades são iguais.

Logo, $y = x - 10$ e $z = x + 1$.

\therefore o número total de garrafas, que é $(x + y + z)$, é igual a $3x - 9$.

Ora, como o lucro total é $(x + y + z) \cdot v - 24v$; i.e., $(3x - 33)v$, \therefore o lucro por garrafa é $\frac{(3x-33)v}{3x-9}$, que deverá ser igual a 6. \therefore , $(x - 11) \cdot v = (x - 3) \cdot 6$. E ainda, $z \cdot 11v = 11 \times 240$; i.e., $(x + 1) \cdot 11v = 11 \times 240$;

$$\therefore \frac{x-11}{x+1} = \frac{6(x-3)}{240};$$

$$\therefore (x + 1)(x - 3) = 40(x - 11);$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 40x - 440;$$

$$\therefore x^2 - 42x + 437 = 0.$$

$$\text{Ora, } 42^2 - 4 \times 437 = 1764 - 1748 = 16$$

$$\therefore x = \frac{42 \pm 4}{2} = 23 \text{ ou } 19$$

\therefore n° de garrafas = 60 ou 48, mas, como tem de ser um múltiplo de 5, \therefore n° de garrafas = 60. E ainda, $(x + 1) \cdot 11v = 11 \times 240$, i.e., $24v = 240$; $\therefore v = 10$; i.e., o vinho foi comprado a $\frac{8}{4}$ a garrafa e vendido a $\frac{9}{2}$ a garrafa.

Q. E. F.

69. (x)

1. Seja $\angle BAD = k \cdot A$, $\angle CBE = l \cdot B$, $\angle ACF = m \cdot C$.

$$\text{Então, } \angle ABE = (1 - l) \cdot B$$

Ora, $\angle BC'D = \angle C'AB + \angle C'BA$, i.e.,

$$k \cdot A + (1 - l) \cdot B = C \quad (1)$$

$$\text{Do mesmo modo, } l \cdot B + (1 - m) \cdot C = A \quad (2)$$

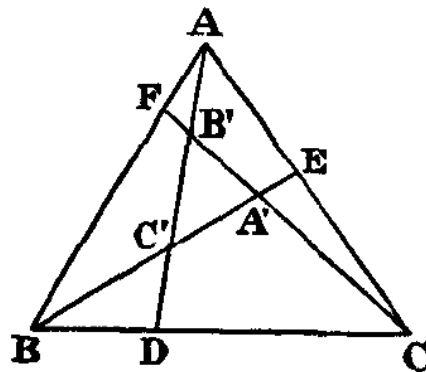
$$\text{e, } m \cdot C + (1 - k) \cdot A = B \quad (3)$$

A partir das equações (1) e (3), podemos calcular l e m em função de k , mas estas, juntamente com k , não serão funções semelhantes da variável única k . Esta deve ser uma determinada função de A , B , C e θ (por exemplo), l uma função semelhante de B , C , A e θ , e m uma função semelhante de C , A , B e θ , i.e., devemos ter

$$k = f(A, B, C, \theta)$$

$$l = f(B, C, A, \theta)$$

$$m = f(C, A, B, \theta)$$



Agora sabemos através de (1) que $kA - lB = C - B$, i.e.,

$$A \cdot f(A, B, C, \theta) - B \cdot f(B, C, A, \theta) = C - B$$

Vejam a seguinte experiência:

$$k \cdot A = xA + yB + zC + \theta$$

$$l \cdot B = xB + yC + zA + \theta$$

$$\text{então, } kA - lB = (x - z) \cdot A + (y - x) \cdot B + (z - y) \cdot C;$$

$$\therefore x - z = 0, \text{ i.e., } x = z$$

$$z - y = 1, \text{ i.e., } z = y + 1$$

Estas condições cumprir-se-ão se $y = 1$ e $x = z = 2$, de maneira que

$$kA = 2A + B + 2C + \theta$$

$$lB = 2B + C + 2A + \theta$$

O que dá $f(A, B, C, \theta)$, quer dizer, $\frac{2A+B+2C+\theta}{A}$.

Isto poderá ser simplificado ao eliminar $(A + B + C)$, que é constante, chegando assim a $k = \frac{A+C+\theta}{A}$; ou, simplificando ainda mais, voltando a subtrair 180° , $k = \frac{\theta-B}{A}$.

Do mesmo modo,

$$l = \frac{\theta - C}{B}$$

$$m = \frac{\theta - A}{C}$$

Q. E. F.

2. Vemos que $kA = \theta - B$, de maneira que $\angle ADC$ é, evidentemente, igual a θ , tal como os ângulos BEA e CFB .

Isto dá-nos uma construção geométrica: traçamos linhas desde A , B e C de modo a que cada uma faça o mesmo ângulo θ com o lado oposto.

3. Vejamos agora os limites entre os quais devem estar os valores de θ .

Sabemos que $kA = \theta - B$.

Ora, $kA \ngtr A$; $\therefore \theta - B \ngtr A$; i.e., $\theta \ngtr A + B$; i.e., $\theta \ngtr$ do suplemento de C , e claro que isto se verifica para *cada um* dos três ângulos A , B , C ; i.e., se A , B , C forem ordenados pela de maior para menor, $\theta \ngtr$ suplemento de A .

Também $kA \nless 0$. Logo, $\theta - B \nless 0$; i.e., $\theta \nless B$, e é claro que isto se verifica para *cada* ângulo.

Consequentemente, se A , B , C forem ordenados de maior para menor,

$$\theta \nless A \text{ e } \ngtr 180^\circ - A.$$

Q. E. F.

4. Temos, agora, que determinar a razão entre $B'C$ e BC .

No triângulo ABC' , cujos ângulos são $(\theta - B)$, $(180^\circ - \theta - A)$, $(180^\circ - C)$, temos

$$AC' = \frac{AB}{\sphericalangle AC'B} \cdot \sphericalangle ABC' = \frac{c}{\sphericalangle C} \cdot \sphericalangle (\theta + A) = \frac{a}{\sphericalangle A} \cdot \sphericalangle (\theta + A)$$

$$BC' = \frac{AB}{\sphericalangle AC'B} \cdot \sphericalangle BAC' = \frac{c}{\sphericalangle C} \cdot \sphericalangle (\theta - B) = \frac{a}{\sphericalangle A} \cdot \sphericalangle (\theta - B)$$

\therefore , por simetria, $AB' = \frac{a}{\sphericalangle A} \cdot \sphericalangle (\theta - A)$.

Ora, $AB' = AC' - AB'$; \therefore isso é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sphericalangle A} \{ \sphericalangle (\theta + A) - \sphericalangle (\theta - A) \} = \\ & = \frac{a}{\sphericalangle A} \cdot 2 \sphericalcap \theta \sphericalangle A = a 2 \sphericalcap \theta \end{aligned}$$

Assim, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2 \sphericalcap \theta$.

Q. E. F.

Antes de dobrar o plano que contém os triângulos, o lugar geométrico dos seus vértices é, evidentemente, uma linha paralela à sua base comum. Assim, se a base do tetraedro = 1, podemos imaginar um pedaço de papel cuja largura é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, unida à face frontal do tetraedro com rotação à direita. O lado superior deste pedaço de papel será, evidentemente, o lugar geométrico dos vértices. Este pedaço de papel pode ser, convenientemente, visto como estando dividido em triângulos equiláteros, posicionados com a base para cima e para baixo alternadamente, e é evidente que esses triângulos irão cobrir sucessivamente as faces do tetraedro seguindo a ordem «frente, lado direito, base, lado esquerdo, frente, etc.». O seu lado *superior*, constituído pelas bases dos triângulos que estão invertidos, irá seguir a trajetória que se segue. Denominando os triângulos que se seguem ao primeiro (que ocupa a face frontal do tetraedro) de α (base para cima), β (base para baixo), γ (base para cima), δ (base para baixo), ε (base para cima), e assim sucessivamente, o lugar geométrico será formado pelas bases α, γ , etc. Ora, α ocupará a face direita, com a sua base a coincidir com a aresta traseira do tetraedro; β ocupará a base do tetraedro, com a sua base a coincidir com a aresta frontal; γ ocupará a face esquerda, com a sua base a coincidir com a aresta traseira, e assim sucessivamente. Logo, o lugar geométrico desce pela aresta traseira, volta a subir, e assim sucessivamente. O que responde à pergunta (1).

Q. E. F.

Podemos agora, ao responder às outras três perguntas, considerar o pedaço de papel *antes* de ser dobrado e calcular as posições dos vértices ao longo do seu lado superior. Assim, convertem-se em problemas *planos*.

2. É-nos dado um triângulo retângulo cujo ângulo esquerdo da base é 15° e cuja altura é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Temos que calcular a sua base e depois, subtraindo metade da base do triângulo inicial (i.e., subtraindo $\frac{1}{2}$), conseguimos ter a distância, medida ao longo do lado superior do papel, desde o vértice do triângulo inicial até ao vértice do triângulo dado; e a partir daí conseguimos calcular quantas vezes devemos ir para baixo e para cima na aresta traseira para o alcançar. Chamamos x à base deste triângulo retângulo. Então, $\frac{\sqrt{3}}{2} \div x = \tan 15^\circ$ e designamos esta tangente por t . Então,

$$\frac{2t}{1-t^2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 1 - t^2 = 2\sqrt{3} \cdot t; t^2 + 2\sqrt{3} \cdot t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ (rejeitando o valor negativo)}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

Subtraindo $\frac{1}{2}$, temos $(\sqrt{3} + 1)$ como a distância pedida.

Ora, $\sqrt{3} = 1,7 \dots$; \therefore distância = 2,7...

Assim, devemos *descer* pela aresta traseira, subir e voltar a *descer* aproximadamente 7 vezes. Isto responde à questão (2).

(3) Temos que *descer* pela aresta traseira e subir outra vez; i.e., devemos usar as bases viradas para cima de α e γ . Assim, a base do triângulo retângulo pedido é $2\frac{1}{2}$. Logo, o ângulo base esquerdo pedido é

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{5}{2} \right); \text{ i.e., } \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Então, para o ângulo base pedido, temos $\frac{\sin}{\cos} = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $\therefore \frac{\sin}{\sqrt{3}} = \frac{\cos}{5} = \frac{1}{\sqrt{28}}$;

$$\therefore \sin = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{84}}{28} = \frac{\text{bastante superior a } 9}{28}; \quad \begin{array}{r} 7 \mid 9 \\ \hline 4 \mid 1,28 \dots \\ \hline 0,32 \dots \end{array}$$

Ora, assim de cabeça, $\sin^{-1} \cdot 3 = 17,45 \dots^\circ$

$$\sin^{-1} \cdot 4 = 23,57 \dots^\circ$$

e o ângulo pedido está aproximadamente a $\frac{1}{5}$ da distância entre eles. Mas a diferença é quase exatamente de 6° . Assim, temos de somar ao menor cerca de $1\frac{1}{5}$ graus, ou $1,20^\circ$. O total será aproximadamente $18,65^\circ$.

(4) Aqui o triângulo retângulo tem $3\frac{1}{2}$ de base. \therefore , o ângulo base pedido tem como

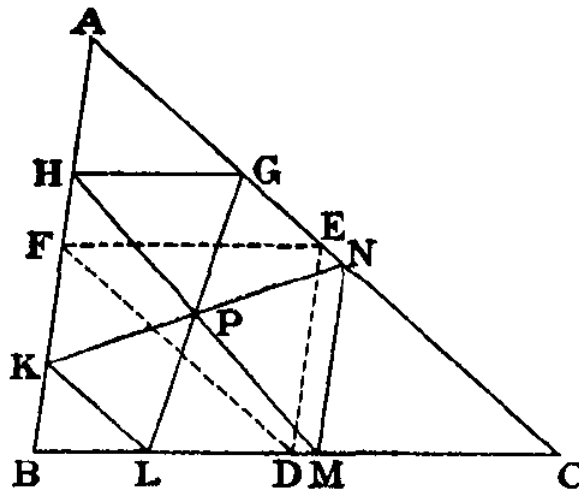
$$\text{tangente, } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{7}{2} \right); \text{ i.e., } \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \frac{\sin}{\sqrt{3}} = \frac{\cos}{7} = \frac{1}{\sqrt{52}}; \therefore \sin = \sqrt{\frac{3}{52}} = \text{quase } \sqrt{\frac{1}{17}} = \text{quase } \frac{\sqrt{17}}{17}$$

Ora, $\sqrt{17} = 4,12 \dots$ $\therefore \sin = 0,24 \dots$

Então $\sin^{-1} 0,2 = 11,53 \dots^\circ$; e devemos percorrer metade da distância até ao outro ângulo: $17,45 \dots^\circ$. A diferença é de cerca de 6° ; \therefore temos que somar 3° . Assim, a resposta é cerca de $14,53^\circ$.

Seja ABC o triângulo dado e P o ponto dado.



Bissetamos os lados de ABC em D, E, F ; unimos estes pontos. Em primeiro lugar, marcamos P dentro do triângulo DEF .

Traçamos HG paralela a BC , de maneira a que a sua distância a BC seja o dobro da distância de P a BC ; traçamos GP e HP , e prolongamo-las até BC em L e M . Traçamos LK paralela a AC ; traçamos KP e prolongamo-la até AC em N . Traçamos MN .

Uma vez que HG é paralela a LM ,

$\therefore GP = PL$ e $HP = PM$;

$\therefore KL$ é paralela a GN e $LP = PG$,

$\therefore KP = PN$; $\therefore MN$ é paralela a HK .

Agora, os triângulos PGH e PLM são iguais em todos os aspetos, $\therefore GH = LM$. Do mesmo modo, $KL = GN$ e $MN = HK$.

Se P estiver em FE e HG e LM desaparecem, e o hexágono converte-se num paralelograma.

Se P estiver em D , o hexágono converte-se na linha BC .

Se P estiver fora do triângulo DEF , o problema é impossível de solucionar.

Q. E. F.

72. (X)

Sabemos que, se um saco tiver 3 fichas, em que 2 são pretas e uma branca, a probabilidade de tirar uma preta será $\frac{2}{3}$, e qualquer outro estado de coisas não dará esta probabilidade.

Agora, as probabilidades de o saco dado ter (α) PP , (β) PB , (γ) BB , são $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, respetivamente.

Acrescentamos uma ficha preta.

Então, as probabilidades de o saco ter (α) *PPP*, (β) *PBP*, (γ) *BBP* são, tal como anteriormente, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

Logo, a probabilidade de agora tirar uma preta é

$$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Assim, o saco contém agora *PPB* (uma vez que qualquer *outro* estado de coisas *não* dará esta probabilidade).

Portanto, antes de acrescentar a ficha preta, o saco continha *PB*, i.e., uma ficha preta e uma branca.

Q. E. F.

FIM.