



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**

**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**MESTRADO: GESTÃO/MBA**

**DERIVADOS SOBRE ENERGIA ELÉCTRICA**

**ALCINO TIAGO CRUZ GONÇALVES**

**ORIENTADO POR:                    PROF. DOUTOR JOÃO LUIS CORREIA DUQUE**

**PRESIDENTE DO JURI:            PROF. DOUTOR JOÃO DA SILVA FERREIRA**

**VOGAIS:                              PROF. DOUTOR ANTÓNIO SARMENTO GOMES MOTA**

**PROF. DOUTOR JOÃO LUIS CORREIA DUQUE**

**MARÇO 2005**

---



## Abstract

This study applies some statistical procedures on data from Spanish/Iberian Electricity Market regarding a period from first January 1999 to thirty first March 2002 that lead to the following conclusions: during this period, in this market, we find that prices present the main characteristics attributed in previous literature – seasonality, mean reversion and jumps.

Furthermore, estimation, with statistic significance, to the rate of reversion and jump parameters was built. The results allowed us to use options on futures valuation model from Clewlow and Strickland (1999).

Keywords: Electricity prices, seasonality, mean reversion, jumps

JEL code: C13, C22, G10

## Resumo

Este estudo faz uma aplicação de algumas técnicas estatísticas ao mercado Espanhol/Ibérico da energia eléctrica no período de um de Janeiro de 1999 a trinta e um de Março de 2002 que permitem concluir que ele, neste período, apresenta as principais características, atribuídas na literatura, ao preço à vista daquele bem – sazonalidade; reversão para a média; existência de saltos.

Por outro lado, estimou-se um coeficiente de velocidade de reversão para a média bem como os parâmetros relativos aos saltos da série em estudo, para o mercado em estudo. Tais parâmetros, estatisticamente significativos, foram utilizados para valorizar opções sobre futuros sobre o activo, de acordo com o modelo de Clewlow e Strickland (1999).

## ÍNDICE

Agradecimentos .....	07
Lista de Quadros e Figuras .....	08
Capítulo 1 – Introdução.....	09
Capítulo 2 - Estudo da dinâmica dos preços à vista da electricidade..	12
2.1. Introdução.....	12
2.2. O comportamento dos preços da electricidade.....	13
2.2.1. Revisão da Literatura.....	13
2.2.1.1. Uma primeira aproximação para compreender a volatilidade dos preços da electricidade.....	13
2.2.1.2. Características dos preços da electricidade.....	15
2.3. Estudo dos preços da electricidade e modelos teóricos de dinâmica dos activos.....	19
Capítulo 3 - Valorização de opções sobre electricidade.....	28
3.1 – Introdução.....	28
3.2 – A valorização de opções sobre commodities – a noção de <i>Convenience Yield</i> .....	30
3.3 – Revisão da literatura.....	33
Capítulo 4 – Estudo empírico.....	44
4.1 – Apresentação dos dados.....	44
4.2 – Análise descritiva dos dados.....	45
4.3 – Estudo das características dos preços à vista.....	49
4.3.1. Estacionaridade e Sazonalidade .....	49
4.3.1.1. Estacionaridade.....	49



4.3.1.2. Sazonalidade.....	51
4.3.2. Reversão para a média e introdução de saltos.....	55
4.3.2.1. Reversão para a média.....	55
4.3.2.2. Estimação dos parâmetros do processo de saltos.....	59
<b>4.4 – Avaliação de opções.....</b>	<b>64</b>
4.4.1. Simulação de Monte Carlo.....	64
4.4.2. Apresentação dos Resultados.....	76
<b>4.5 – Gestão do Risco.....</b>	<b>80</b>
<b>Capítulo 5 – Conclusões e pistas para investigação futura .....</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>91</b>

**Aos meus dois pilares,  
Isabel e Deolinda**

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof Doutor João Duque, não só pelo acompanhamento científico constante, mas também por todo o apoio humano que me deu nas alturas em que os obstáculos se avolumavam e a força começava a faltar.

Ao Eng. Mário Paulo e à sua equipa na REN, pelos dados que me facultou e que me permitiram desenvolver este estudo, bem como pelos valiosos conhecimentos que tive oportunidade de absorver e que constituíram as minhas primeiras percepções deste complexo mercado.

A todos os Professores com quem tive o prazer de discutir alguns tópicos e com os quais pude crescer um pouco mais nos temas desta dissertação, em especial o Prof. Doutor Miguel Almeida do ISCTE.

Uma palavra de agrado aos meus colegas de trabalho e amigos, Inês Pinto, Cristina Silva, Pedro Matos, Ana Venâncio, Sofia Lourenço e Fernanda Sampaio pelo incentivo e paciência que souberam transmitir-me.

Aos meus amigos, com quem pude contar nos momentos de avanço e retrocesso nesta tarefa.

E por que os últimos serão os primeiros, à minha família, em especial à minha Mãe, Deolinda Cruz e à minha cara-metade, Isabel Bastos, que me providenciaram o ambiente ideal e a força necessária para que eu pudesse chegar aqui.

Sendo que a total responsabilidade do que aqui se apresenta é minha, um bem haja a todos.

## LISTA DE QUADROS E FIGURAS

Quadro I – Modelos de comportamento dos preços à vista .....	27
Quadro II – Modelos de aval. de opções sobre <i>forwards</i> .....	41
Quadro III – Estatística descritiva dos dados .... ..	45
Quadro IV – Teste de estacionariedade (Dickey – Fuller) .....	51
Quadro V – Regressão linear - sazonalidade (WEEKDAY) .....	52
Quadro VI – Regressão linear - sazonalidade (Day of the WEEK).....	54
Quadro VII – Regressão linear para estimar $\alpha$ . .....	56
Quadro VIII – Parâmetros do processo mean reverting .....	58
Quadro IX – Estimação iterativa dos parâmetros do proc. Jump dif.....	61
Quadro X – Regressão linear para estimar $\alpha$ num proc. com saltos .....	62
Quadro XI – Parâmetros do processo <i>mean reverting</i> com saltos .....	63
Quadro XII – Parâmetros do proc. <i>mean reverting</i> para simulação.....	69
Quadro XIII – Parâm. do proc. <i>mean reverting</i> c/ saltos – simulação .....	71
Quadro XIV – Resultados da 1ª simulação.....	72
Quadro XV – Simulação de Monte Carlo – opção sobre <i>forward</i> .....	73
Quadro XVI – Resultados da 2ª simulação.....	74
Quadro XVII – Simulação de Monte Carlo – opção s/ activo à vista .....	75
Quadro XVIII – Preço da opção de compra sobre o <i>forward</i> .....	79
Quadro XIX – Gregos .....	87
Figura I – Preço médio diário e sua variação .....	47
Figura II – Logaritmo natural do preço médio diário e sua variação .....	48
Figura III – Evolução do valor da <i>call</i> durante a 1ª simulação.....	73
Figura IV - Evolução do valor da <i>call</i> durante a 2ª simulação.....	75

## Capítulo 1 – Introdução

---

Neste capítulo pretende apresentar-se, em primeiro lugar, o problema que se propõe investigar, bem como a estrutura do presente estudo. Por outro lado, delinear-se-ão os objectivos propostos e o que podem os leitores esperar desta dissertação.

---

*“The importance of effective models of electricity prices is compounded by the fact that such models affect the accuracy of activities including the structuring, pricing, trading, risk management of physical and financial contracts and the valuation, risk management and choice of operating policies for generation and transmission assets. Standard derivative pricing models based upon the dynamic behavior of equity prices are necessarily inappropriate.”*

Johnson e Barz (1999)

Um número crescente de países tem levado a cabo um processo de reestruturação do seu sector eléctrico. Embora a velocidade e amplitude das reformas varie de país para país, tais processos (de liberalização) têm sido baseados na abertura dos sistemas eléctricos a uma maior competitividade onde tal é possível, nomeadamente na geração e distribuição deste bem. De facto, de acordo com directivas europeias, os países desta comunidade devem apresentar mercados eléctricos totalmente livres até 2007, sendo que em países como os E.U.A., o Reino Unido e toda a zona Nórdica já há muito encetaram tal processo. Por outro lado, são visíveis as consequências de tais

reformas, nomeadamente o surgimento de mercados organizados de negociação em bolsa e em mercado de balcão para transacção deste bem, assim como o aparecimento de contratos derivados sobre a electricidade.

De facto, os participantes nestes mercados enfrentam e enfrentarão elevado risco de mercado associado a volatilidades que atingem os 29%<sup>1</sup> diários quando índices internacionais de acções, para termos uma ideia relativa, apresentam apenas 20%, em termos anuais.

É neste contexto que os contratos derivados sobre energia eléctrica assumem importância vital enquanto instrumentos de cobertura de risco. Contudo, a curta história destes mercados liberalizados, tem impacto sobretudo na escassa literatura existente ao nível do comportamento dos preços deste activo bem como dos seus direitos contingentes, sendo que, para os profissionais, tal se revela limitador para a compreensão dos instrumentos de redução e cobertura de risco.

Assim, este estudo pretende, numa primeira fase, constituir uma sistematização do que já existe disponível na literatura sobre o tema, aplicando-o, numa segunda fase, ao mercado jovem da península ibérica, situado na Espanha (OMEL).

A estrutura desta dissertação consiste, inicialmente, na análise dos preços à vista da electricidade, (da revisão da literatura sobre os mesmos – cap.2); para em seguida sistematizar o que já foi estudado em termos de valorização de opções sobre este activo (cap.3). Finalmente, aplicar-se-á em estudo empírico sobre o referido mercado espanhol/Ibérico, o que ficou sistematizado, não só

---

<sup>1</sup> Conforme se pode constatar em Knittel e Roberts (2001).

para validar conclusões propostas nos estudos anteriores, mas com vista ao conhecimento mais aprofundado desse mercado. Foi incluído ainda neste capítulo, uma análise relativa aos parâmetros de gestão do risco dos contratos em análise.

As principais conclusões e pistas para investigação futura são apresentadas no capítulo 5.

## Capítulo 2 - Estudo da dinâmica dos preços à vista da electricidade

---

O presente capítulo tem por objectivos, por um lado, caracterizar sumariamente o mercado da electricidade e, por outro, apresentar uma revisão da literatura relativa ao comportamento dos preços à vista da energia eléctrica utilizando, para tal, as características geralmente aceites relativas ao preço deste bem como fio condutor.

---

### 2.1. Introdução

Até ao início dos anos noventa o sector da electricidade caracterizava-se, mundialmente, por uma forte integração vertical onde os preços eram fixados pelas entidades reguladoras, sendo estabelecidos como função dos custos de geração e distribuição, conduzindo, assim, a uma reduzida incerteza dos mesmos. Contudo, nos últimos anos, tem-se verificado, em diversos países, um processo de desregulamentação com vista à incorporação de maior competitividade quer na geração, quer na distribuição deste produto, nomeadamente pela privatização quer da produção, quer da distribuição. Assim, fruto destas reformas, o preço surge agora da interacção da oferta (geradores/produtores) com a procura (distribuidores) nas denominadas *pool*. Neste novo contexto, produtores competem para vender e distribuidores para comprar electricidade ao preço definido pela intersecção da oferta e da procura agregadas, definida hora a hora (ou de meia em meia hora) numa dada *pool* de mercado. Contudo, estes novos preços, fruto da desregulamentação encetada, apresentam uma elevada volatilidade, contrariamente ao que se verificava. De

facto, mesmo quando comparado com os mercados financeiros (acções, obrigações, etc.) ou até com outras *commodities*, o comportamento dos preços da electricidade apresenta maior complexidade e volatilidade.

Esta desregulamentação introduziu novos elementos de incerteza no sector, que levaram ao crescimento da importância de aspectos financeiros como a gestão do risco pela introdução de contratos de derivados nos mercados. A prová-lo, atente-se no surgimento de mercados de futuros e opções sobre electricidade nos mercados mais experientes de que são exemplo a Sidney Futures Exchange (Austrália), o Eltermin (Escandinávia) e o NYMEX (E.U.A.).

A caracterização e compreensão do comportamento dos preços da electricidade constituem, assim, elementos fulcrais quer para a avaliação dos activos reais associados quer para a valorização dos direitos contingentes. De entre as contribuições para este tema destacam-se Johnson e Barz (1999), Bhanot (2000), Lucia e Schwartz (2000) ou Knittel e Roberts (2001).

## 2.2. O comportamento dos preços da electricidade

### 2.2.1. Revisão da Literatura

#### 2.2.1.1. Uma primeira aproximação para compreender a volatilidade dos preços da electricidade

Existem várias razões para explicar a elevada volatilidade dos preços da electricidade. Provavelmente, a mais importante é a impossibilidade de armazenamento da mesma<sup>2</sup>, pelo que, choques quer do lado da procura, quer

---

<sup>2</sup> A Electricidade não pode ser fisicamente armazenada, de uma forma directa, obrigando a um balanceamento contínuo da produção e do consumo. Contudo, esta pode ser indirectamente

do lado da oferta, não poderão ser facilmente absorvidos pelo mercado conduzindo a um efeito imediato sobre o preço.

Por outro lado, as próprias características quer da procura quer da oferta são determinantes para a elevada volatilidade do preço. Efectivamente, a procura é extremamente inelástica, dado o carácter de bem essencial, e fortemente dependente das condições climatéricas. Por seu lado, também a oferta poderá contribuir para uma elevada volatilidade dos preços. Efectivamente, para reduzidos níveis de procura tendem a apresentar-se para negociação, produtores cujos custos marginais de produção são reduzidos, embora, à medida que a procura aumenta, surjam agentes do lado da oferta com custos marginais crescentes. Assim, dada a inelasticidade da procura, conjugada com as restrições relativas aos custos marginais do lado da oferta, tendem a verificar-se picos horários que provocam uma elevada volatilidade de curto prazo nos preços. Consequentemente, em mercados onde quer a curva da procura quer a curva da oferta tendem a apresentar elevadas inclinações, verifica-se que um ligeiro aumento na procura produz um incremento elevado no preço. Adicionalmente, dir-se-ia que, para níveis de procura mais elevados, apenas alguns dos produtores de maior dimensão poderão ter capacidade de resposta para a procura residual, pelo que, tenderão a surgir situações de mercado monopolista ou oligopolista.

---

armazenada através de esquemas hidroeléctricos ou pela constituição de reservas dos materiais geradores.

### 2.2.1.2. Características dos preços da electricidade

O principal objectivo deste ponto é a apresentação das ideossincracias do comportamento dos preços da electricidade, nomeadamente: a sazonalidade; a reversão para a média (*Mean reversion*); a volatilidade e os saltos que apresenta.

#### (a) Sazonalidade

A procura de electricidade é fortemente influenciada quer pelo nível das actividades económicas e empresariais quer pelas condições climáticas. De facto, estes são os dois factores que melhor explicam a elevada sazonalidade presente nos preços. Esta sazonalidade observa-se de diversas formas: ao longo do dia, semanalmente e ainda mensalmente.

A importância de padrões regulares nos preços tem sido analisada nomeadamente por Lucia e Schwartz (2000) e Bhanot (2000). Lucia e Schwartz (2000) propõem e estimam um modelo de factor único, *mean reverting*, com sazonalidade determinística para o mercado escandinavo (*NordPool*), demonstrando que os padrões sazonais verificados nos preços à vista da electricidade (*spot*) podem explicar parcialmente a estrutura de preços dos contratos de Futuros. Bhanot (2000) analisa os preços da energia eléctrica com base em dados de 12 mercados regionais dos Estados Unidos com vista ao estudo do comportamento sazonal e *mean reverting* das séries e das diferenças regionais entre elas.

Finalmente, de uma forma geral, os estudos propõem a utilização de Variáveis *Dummy* nos modelos para capturar quer a sazonalidade semanal, quer a anual.

(b) Reversão para a média (*mean reversion*)

Dado que aumentos da procura provocam um aumento do preço, criando, assim, incentivos económicos ao surgimento de Geradores/Produtores, os quais são, por sua vez, consumidores de maiores investimentos com vista ao aumento da oferta, parece razoável admitir a existência de algum grau de tendência para que os preços da electricidade voltem a convergir para a sua média. Por outro lado, também é argumentável que tal característica dos preços resulte do facto de as condições climatéricas serem em si mesmo um processo desse tipo. De facto, Knittel e Roberts (2001) defendem que o clima influencia os preços de forma indirecta pelo efeito que tem na procura. Dado que as condições meteorológicas apresentam um processo cíclico, com tendência para regressar à média, tal processo terá efeitos na procura e, em última instância, nos preços à vista.

Ao nível da literatura relevante sobre este tema, a grande maioria dos artigos propõe modelos que incorporam esta característica para descrever o comportamento dos preços da electricidade (ver, por exemplo, Lucia e Schwartz, (2001); Bhanot, 2000; Escribano, Peña e Villaplana, (2002); Karsen e Husby, (2000); Knittel e Roberts, (2001)). Contudo, existem também alguns estudos que propõem modelos que não incorporam um processo *mean reverting* (De Vany e Walls, (1999)).

Johnson e Barz (1999) analisaram o ajustamento de um conjunto de mercados desregulamentados a processos *mean reverting* e *non-mean reverting*, com e sem saltos. De acordo com as suas conclusões, os mercados em análise eram melhor descritos por um processo *mean reverting* com saltos. Contudo, ambos

os estudos apresentam limitações, de acordo com Escribano et al, (2002), pois não apresentam testes de raiz unitária (*Unit Root Test*) nem a possibilidade de existência de uma volatilidade não constante. Neste último estudo os autores afirmam melhorar as conclusões dos anteriores pela introdução de testes de raiz unitária (nomeadamente o mais tradicional *Augmented Dickey Fuller*) e por incorporarem a hipótese de volatilidade estocástica.

### (c) Existência de saltos e volatilidade

A análise da evolução de preços da energia eléctrica permite facilmente detectar a existência de saltos. Uma das características destes saltos consiste no facto de os preços reverterem rapidamente para os níveis anteriores. Este comportamento pode ser descrito por um processo de Poisson tal como acontece num modelo de difusão com saltos. Assim, existem alguns estudos que fazem a aplicação de modelos de difusão com saltos a diversas séries de preços da electricidade. Exemplos disso são Johnson e Barz (1999) e Knittel e Roberts (2001), sendo que neste último caso, os autores incorporam uma intensidade dos saltos dependente do tempo. Contudo, e apesar das vantagens da introdução de saltos no estudo do comportamento dos preços da electricidade, existem algumas limitações na sua modelização através de processos de difusão com saltos, como argumentam Clewlow e Strickland (2000). A principal crítica advém da assunção de que todos os choques que afectam os preços tendam a desvanecer-se à mesma taxa, quando a simples intuição económica demonstra o contrário: para choques mais fortes parece evidente que as forças da procura e da oferta tendam a absorver mais

rapidamente estas variações no preço, enquanto para choques mais reduzidos é mais provável que os preços revertam aos níveis anteriores de forma mais lenta. Mesmo estatisticamente são apontadas limitações a este processo, na medida em que ele tende a capturar os saltos mais pequenos e frequentes nos dados. Por outro lado, outra das limitações referidas consiste no facto deste processo não detectar que existe maior probabilidade de sucederem saltos nos períodos em que a diferença entre a capacidade instalada do sistema (oferta máxima) e a procura, é pequena. Dado que a capacidade da oferta é convexa (isto é, com custos marginais crescentes), o efeito sobre os preços é maior quanto menor for a diferença entre essa capacidade e a procura, tal como acontece em períodos em que a última é elevada.

Outro aspecto relevante para o estudo do comportamento dos preços da electricidade é a possibilidade de existência de uma volatilidade do tipo estocástico, sendo a família dos modelos GARCH um dos processos mais populares para capturar a referida volatilidade condicional. Exemplos da aplicação de diferentes tipos de modelos (G)ARCH à compreensão dos preços da electricidade podem ser encontrados em Duffie et al (1998) e Knittel e Roberts (2001).

Em conclusão, pode afirmar-se que, em resultado da revisão da literatura específica sobre o tema, a modelização dos preços da energia eléctrica deverá conter (ou pelo menos, testar) a existência de sazonalidade, a possibilidade de reversão para a média, saltos e volatilidade estocástica com um comportamento do tipo GARCH.

### 2.3. Estudo dos preços da electricidade e modelos teóricos de dinâmica dos activos

Inicia-se esta análise introduzindo um modelo de base para modelizar a dinâmica dos preços da electricidade. Partindo deste modelo, é possível estender este estudo, introduzindo, numa primeira fase, a propriedade dos preços relativa à tendência para estes reverterem para a média de longo prazo e, posteriormente, adicionando-lhe os saltos que se verificam neste processo. Assim um modelo base para este activo poderá ser um passeio aleatório do tipo:

$$S_{\tau} = \mu + \varepsilon_{\tau}, \varepsilon_{\tau} \sim N(0, \sigma) \quad (2.1)$$

onde  $S_{\tau}$  representa o preço à vista,  $\mu$  e  $\sigma$  representam o valor esperado e a volatilidade dos preços à vista da electricidade e  $\varepsilon_{\tau}$  representa um processo normal estandardizado tal como é indicado. Assume-se, assim, que o valor esperado para o preço é o valor médio (de longo prazo) dos mesmos e que pode ser definido como o custo marginal da produção.

#### (a) Mean Reversion

O pressuposto de base na avaliação de activos em diversos mercados é o de que estes seguem um movimento geométrico Browniano empregue, por exemplo, no modelo de Black e Scholes (1973). Contudo, este movimento quando aplicado aos mercados de energia, leva os preços a atingirem valores absolutamente absurdos. De facto, evoluções dos preços consistentes com tal

processo são possíveis, no mercado da electricidade, apenas no curto prazo e para condições anormais, dado que, no longo prazo, a oferta tenderá a ajustar-se e os preços voltarão ao nível ditado pelos custos marginais de produção. Este processo de ajustamento do preço designa-se por reversão para a média e foi introduzido por Vasicek em 1977 para modelizar a dinâmica das Taxas de Juro.

Associado a este modelo aparece um movimento conhecido por processo Ornstein – Uhlenbeck por oposição ao movimento geométrico Browniano (GBM), sendo utilizado, por exemplo, para descrever a dinâmica dos preços das *commodities*. Dado que estas são consumíveis, do ponto de vista da teoria económica pode argumentar-se que o seu preço, no longo prazo, depende dos custos marginais de produção, apresentando, portanto, uma tendência para reverter para a média inconsistente com um GBM. A equação diferencial estocástica do tipo *mean reverting* mais comum é o referido processo Ornstein Uhlenbeck (OU):

$$\partial X(t) = \alpha(\mu - X(t))\partial t + \sigma X(t)\partial W(t), \quad \text{com } X(0) = x_0 \quad (2.2)$$

Onde  $\mu$  representa a média para a qual tende o processo estocástico  $X(t)$ , isto é, o valor médio de  $X$ ;  $\alpha$  constitui a velocidade de reversão para a média, (sendo que um valor elevado implica um processo em que a variável não se desvia muito da sua média);  $\sigma$  simboliza a volatilidade e  $\partial W(t)$  um processo de wiener.

O valor esperado do processo é  $\mu$  quando  $t$  tende para infinito e a sua variância depende essencialmente da taxa  $\alpha$  de regressão para a média:

$$E(X(t)) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\alpha t}$$

$$E(X(t)) = \mu, \text{ qd } t \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t})$$

$$\text{Var}(X(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \text{ qd } t \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

(b) Aplicações ao estudo da dinâmica dos preços da electricidade

Com vista à introdução desta característica (*mean reverting*) no estudo dos preços da electricidade, Clewlow e Strickland (2000) propõem a seguinte equação simplificada:

$$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S\partial Z \quad (2.5)$$

Sendo  $\partial Z$  um processo normal padronizado, com  $\partial Z = \varepsilon * \sqrt{\partial t}$ .

Como se pode verificar, neste processo o preço tende, no longo prazo, para a média dada por  $e^\mu$  à velocidade da taxa  $\alpha$  de regressão para a média, que se assume seja sempre positiva. Assim, se o preço à vista é superior à média, o

movimento será negativo, isto é, o preço tenderá a cair em direcção à referida média. Da mesma forma, se o preço à vista se encontra abaixo da média, tenderá a subir, indo ao seu encontro.

Tal como já foi referido anteriormente, a adesão dos preços a um processo de reversão para a média pode ser testada com recurso a um teste de estacionaridade, nomeadamente um teste de raíz unitária, de que é exemplo o de Dickey-Fuller.

Finalmente, Clewlow e Strickland (2000), propõem uma forma simples e robusta de determinação da taxa de regressão para a média através da utilização de uma regressão linear. Assumindo um processo simples de regressão para a média em que  $x = \ln S$ , tem-se:

$$\partial x = \alpha(\bar{x} - x)dt + \sigma \partial Z \quad (2.6)$$

discretizando tem-se:

$$\Delta x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (2.7)$$

onde  $\alpha_0 = \alpha * \bar{x} * \Delta t$  e  $\alpha_1 = -\alpha * \Delta t$

Isto implica que regredindo  $\Delta x_t$  em relação a  $x_t$  obtemos estimativas para  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  correspondentes aos termos de intersecção e inclinação da recta da regressão estimada, respectivamente. Dado que se conhece o intervalo de tempo entre as observações pode-se determinar  $\alpha$  e  $\bar{x}$ .

Resta acrescentar que este modelo por si só não capta na totalidade a dinâmica dos preços da electricidade, sendo esta bem mais complexa.

Efectivamente, vários factores constituem limitações a esta aproximação:

- a velocidade de reversão para a média pode ser diferente acima e abaixo do nível médio;
- no mercado da electricidade são mais prováveis movimentos acima do que abaixo do nível médio;
- observam-se, com frequência, picos de preço no mercado, os quais são rapidamente absorvidos, embora os processos *mean reverting* pressuponham uma correcção menos abrupta.

(c) a introdução de saltos na dinâmica dos preços

Tal como já foi referido, os preços da electricidade tendem a apresentar mudanças bruscas e inesperadas. Tais saltos são fruto de flutuações na procura e reduzida elasticidade da oferta, reflectindo rigidez no transporte e armazenamento deste bem.

Para incorporar tal característica, Clewlow e Strickland (2000) propõem um modelo simples que permite incorporar não só os saltos mas também o facto dos preços tenderem a reverter rapidamente aos seus níveis anteriores (revertendo para a média de longo prazo). Este modelo permite adicionar os saltos atrás descritos ao modelo anteriormente apresentado e pode ser enunciado da seguinte forma:

$$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S\partial Z + \kappa S\partial q \quad (2.8)$$

Sendo que  $\kappa$  corresponde à amplitude do salto proporcional, aleatório, determinado pelo logaritmo natural dos saltos proporcionais normalmente distribuídos:

$$\ln(1 - \kappa) \sim N\left(\ln(1 + \bar{\kappa}) - \frac{1}{2}\gamma^2, \gamma\right) \quad (2.9)$$

$$c/ \text{Prob}(\partial q = 1) = \phi \partial t$$

Onde  $\bar{\kappa}$  é o salto médio e  $\gamma$  é a volatilidade do salto. A frequência anualizada dos saltos é dada por  $\phi$ , que corresponde ao número médio de saltos por ano.

O processo que representa os saltos ocorridos é do tipo discreto, dado que estes não ocorrem continuamente mas sim em instantes específicos de tempo.

Assim sendo, na maior parte do tempo,  $dq$  (que representa um processo de Poisson), assume o valor zero, apenas assumindo o valor um quando ocorre um salto aleatório. Quando não se verifica qualquer salto está-se perante um processo idêntico ao apresentado no ponto anterior, isto é, apenas com tendência para reverter para a média, sendo apenas distinto deste quando ocorrem saltos. Tal é verdadeiro também quando os saltos são pequenos e muito frequentes, apresentando nesse caso pouco significado estatístico.

As rendibilidades obtidas nos saltos definidos na equação (2.8) são normalmente distribuídas e, portanto, simétricas quer quanto ao seu sinal quer quanto à sua amplitude. Contudo, verifica-se que, na realidade, este processo tende a ser positivamente enviesado (*skewness* positiva). Uma forma simples de ultrapassar esta limitação consiste em utilizar volatilidades diferentes para os saltos positivos e negativos. A determinação dos parâmetros deste processo

poderá ser efectuada, segundo sugerem os autores citados, por duas vias simples, (como primeira aproximação):

- Utilizando uma heurística denominada filtro recursivo (pela análise iterativa dos *outliers* das séries em estudo), ou;
- Utilizando um estimador de máxima verosimilhança.

No que diz respeito à primeira metodologia, esta consiste num processo iterativo que parte do pressuposto que os saltos são relativamente pouco frequentes. Assim, pode-se estimar a volatilidade dos preços à vista num ambiente com saltos, utilizando como aproximação o desvio padrão das rendibilidades. Partindo desta estimativa da volatilidade, devem procurar-se as rendibilidades superiores ao esperado – para uma dada probabilidade, na ausência de saltos, identificando, assim, estes casos extremos como saltos. Partindo da identificação dos *outliers* como saltos, recalcula-se uma nova estimativa para a volatilidade, baseada no desvio padrão da amostra devidamente expurgada dos referidos valores extremos. Logicamente, esta nova estimativa apresentará uma redução face à anterior. Num processo iterativo, utilizando a nova estimativa para a volatilidade, volta-se a identificar as rendibilidades que excedem o limite definido inicialmente (por exemplo três desvios padrões – 97% de probabilidade), assumindo-as novamente como *outliers* e conduzindo o processo da forma acima explicitada, até existir uma convergência nas estimativas para a volatilidade e não ser possível encontrar mais saltos novos. De acordo Clewlow e Strickland (2000), o processo é concluído tipicamente ao final de um máximo de dez iterações.

Um outro método estatístico, mais formal, para estimar os parâmetros associados ao processo dos saltos, consiste na utilização do método da máxima verosimilhança. Uma das propriedades empíricas indesejáveis deste método de estimação dos parâmetros reside no facto deste convergir para a componente dos saltos mais frequentes e de menor dimensão. Efectivamente, as rendibilidades das séries de preços da energia eléctrica podem ser caracterizadas como detendo diferentes componentes de saltos: desde elevada frequência com baixa volatilidade, até reduzida frequência mas de elevada volatilidade. Assim, interessa capturar essencialmente a componente saltos com reduzida frequência mas elevada volatilidade, ao invés do que permite obter este último método, tal como foi descrito.

Para concluir este capítulo, resta sintetizar o modelo mais simples do tipo *mean reversion jump-diffusion*, para os preços *spot* é descrito pela seguinte equação (Clewlow and Strickland, (2000)):

$$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S \partial Z + \kappa S \partial q \quad (2.10)$$

Onde:

$S$  = preço Spot

$\alpha$  = velocidade de reversão para a média

$\mu$  = valor médio de longo prazo de  $\ln S$  na ausência de saltos

$\sigma$  = volatilidade do preço spot

$\partial Z$  = processo de Wiener

$\kappa$  = salto com distribuição log-normal

$\bar{\kappa}$  = salto médio

$\gamma$  = desvio padrão do salto (volatilidade dos saltos)

$\partial q$  = processo de Poisson

Este modelo leva em conta as perturbações induzidas pela componente difusão ( $\sigma \cdot S \cdot \partial Z$ ) e saltos ( $K \cdot S \cdot \partial q$ ) no que diz respeito à tendência determinística do modelo [ $\alpha \cdot (\mu - \ln S) \cdot S \cdot \partial t$ ].

Uma última palavra, nesta secção, para referir a existência de modelos mais sofisticados do tipo *mean reversion jump-difusion* para os preços *spot*, que incorporam processos de salto, trocas de regime e volatilidade estocástica como os de Deng (1999) ou Deng (2000). Estes modelos têm uma solução analítica que requer a integração numérica de funções complexas.

Em jeito de síntese, apresenta-se abaixo o Quadro I, que resume por ordem crescente de complexidade, (e, conseqüentemente, com maior poder explicativo), os modelos de comportamento dos preços à vista apresentados neste capítulo:

**Quadro I – Modelos de comportamento dos preços à vista**

MODELOS	EQUAÇÃO
1. Passeio aleatório	$S_t = \mu + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$
2. Processo <i>mean reverting</i> simples	$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S \partial Z$
3. Processo <i>mean reverting</i> com saltos	$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S \partial Z + \kappa S \partial q$

## Capítulo 3 - Valorização de opções sobre electricidade

---

Nesta secção introduz-se uma revisão da literatura relativa à avaliação de opções sobre energia eléctrica. Inicialmente, discute-se a noção de *convenience yield* associada às *commodities* e faz-se uma análise comparativa da electricidade face a outros activos no que diz respeito aquele conceito. Termina este capítulo com a apresentação de alguns modelos de avaliação de opções sobre energia eléctrica apresentados na literatura.

---

### 3.1 – Introdução

A moderna teoria de avaliação de opções é provavelmente um dos maiores contributos para as finanças. O grande avanço deu-se no início dos anos setenta com os trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). O modelo Black-Scholes-Merton (BSM) afirma-se importante, não só como uma forma fácil e eficiente de avaliar as opções sobre acções, mas também por demonstrar o princípio da avaliação baseada na neutralidade face ao risco (isto é, de ausência de arbitragem). A sua análise demonstrou que é possível replicar o *payoff* de uma opção, através da detenção de uma quantidade do activo subjacente e de uma aplicação à taxa de juro sem risco. Assim, dado que o risco de transacção de uma opção pode ser completamente eliminado, o comportamento face ao risco, bem como as preferências dos participantes no mercado, tornam-se irrelevantes para o problema da avaliação das opções. Em tal mundo (neutro ao risco), é exigido a todos os activos o rendimento à taxa de

juro sem risco, sendo que a verdadeira taxa de rendibilidade esperada do activo se torna irrelevante.

Contudo, no mercado de energia eléctrica, o conceito de replicação perfeita de uma opção directa sobre o preço da energia eléctrica através da constante detenção do activo subjacente é irrealista. Tal acontece devido à incapacidade de armazenamento da mesma, que impossibilita o ajustamento contínuo da posição no activo subjacente. No entanto, várias são as opções que dependem dos preços dos contratos de futuro e não dos preços à vista. Assim, os contratos de futuros<sup>3</sup> podem ser utilizados para replicar posições em opções, permitindo a aplicação da abordagem de neutralidade face ao risco. Nos casos em que não é razoável a aplicação dos modelos de avaliação baseados na neutralidade face ao risco, é argumentável que o preço neutro ao risco pode constituir uma boa referência para comparação com outros métodos de avaliação. Uma outra abordagem segura e útil para a obtenção do preço da opção consiste no cálculo do valor da mesma de acordo com um modelo baseado no comportamento real dos preços de mercado.

Os pontos que se seguem pretendem dar conta da literatura relevante sobre a avaliação de opções sobre energia eléctrica.

---

<sup>3</sup> Quando a taxa de juro é constante e igual para todas as maturidades, como se assume neste trabalho, teoricamente os preços dos futuros são iguais aos preços *forward* com igual maturidade e, portanto, todas as considerações feitas sobre um dos tipos de contratos são válidas para o outro (ver Hull (2003)).

### 3.2 – A valorização de opções sobre commodities – a noção de *Convenience Yield*

De forma a introduzir a metodologia de avaliação de opções sobre energia eléctrica, é útil discutir primeiro os métodos de valorização utilizados para outras *commodities*, particularmente no que diz respeito a outras formas de energia. Nos parágrafos seguintes descreve-se a abordagem actual à valorização de opções sobre *commodities*, nomeadamente no que diz respeito ao conceito de *convenience yield*.

A noção de *convenience yield* foi introduzida pelos economistas Kaldor e Working que, entre outros tópicos, trabalharam sobre a teoria do armazenamento. No contexto das *commodities*, a *convenience yield* traduz o benefício da detenção dessa *commodity*, deduzido do seu custo de armazenamento. Na sua investigação, Brennan e Schwartz (1985) incorporaram a *convenience yield* na valorização de derivados sobre *commodities* e estabeleceram em particular que, o relacionamento que prevalece entre o preço *spot*  $S(t)$  e o preço de um futuro  $F(t,T)$  de um contrato com maturidade  $T$  é:

$$F(t, T) = S(t) e^{(r-y)(T-t)} \quad (3.1)$$

Onde  $r$  representa a taxa de juro sem risco e  $y$  a *convenience yield* associada à *commodity*. Ambas são assumidas como não estocásticas. Este relacionamento permite interpretar a *convenience yield* como um “pagamento de um rendimento” efectuado ao proprietário da *commodity*. Logo, admitindo

que o preço da *commodity* subjacente ao derivado segue um movimento geométrico Browniano, o modelo de Merton (1973) para opções sobre activos que pagam dividendos, fornece o preço de uma opção de compra *plain vanilla* sobre a *commodity* com preço S:

$$C(t) = S(t) e^{-y(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.2)$$

Onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)e^{-y(T-t)}}{X e^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

Onde X é o preço de exercício da opção e N(di), a probabilidade acumulada até di numa distribuição normal padronizada.

Contudo, e na medida do que foi referido anteriormente, a maior dificuldade que se apresenta na avaliação de opções sobre energia resulta do facto de esta não ser armazenável, criando assim obstáculos à introdução da referida *convenience yield* sobre esta *commodity*.

- (a) De acordo com a definição, *convenience yield* está associada à diferença entre duas quantidades: a rendibilidade positiva que advém da

detenção do activo e o seu custo de armazenamento. Dada a impossibilidade desse armazenamento, essas duas quantidades não podem ser especificadas.

- (b) Mais, o não armazenamento da electricidade leva à quebra da relação que prevalece em equilíbrio entre o preço à vista e o preço a futuro para os activos subjacentes (as acções, índices, etc.). O argumento de inexistência de arbitragem, necessário ao estabelecimento desta relação de equilíbrio, não é válido no caso da electricidade, na medida em que requer que o activo subjacente seja adquirido no momento  $t$  e detido até ao final do contrato de futuros.
- (c) Uma última consequência da incapacidade de armazenamento consiste no facto de tornar a utilização dos modelos de evolução dos preços à vista pouco úteis para a avaliação de opções. Dado que as estratégias de cobertura envolvem o activo subjacente, o *delta hedging* não pode ser implementado porque requer a aquisição e detenção da energia eléctrica por um determinado período de tempo.

Em conclusão, para o estabelecimento do preço das opções pode ser mais conveniente a utilização da evolução dos preços dos futuros como *inputs* dos modelos, ao invés de *outputs* dos mesmos, à semelhança de Cortazar e Schwartz (1994), Clewlow e Strickland (1999a) e (1999b).

### 3.3 – Revisão da literatura

O método clássico para a avaliação de derivados sobre activos baseia-se na criação de uma carteira que inclua tanto o activo subjacente como o contrato derivado. Contudo, a natureza não armazenável da electricidade oferece novos desafios aos métodos tradicionais de avaliação de derivados. De facto, a incapacidade de armazenamento daquele bem, leva à observação empírica de uma elevada reversão para a média, no curto prazo, inconsistente com a eficiência de mercados no caso de bens armazenáveis. Assim, os direitos contingentes sobre a electricidade tendem a ser avaliados pela replicação usando contratos de futuros, ao invés da tentativa de armazenar ou vender a descoberto electricidade no mercado a vista. Utilizando esta abordagem, é possível a construção de modelos baseados no argumento de ausência de arbitragem, com vista à avaliação dos contratos de derivados ultrapassando o argumento pouco plausível do armazenamento da electricidade.

Neste sentido, podem destacar-se actualmente duas correntes na literatura sobre avaliação de opções sobre energia eléctrica.

Uma primeira corrente parte da representação estocástica do activo à vista bem como de outras variáveis chave, como a *convenience yield* associada ao activo e à taxa de juro, para derivar o preço dos direitos contingente sobre a energia eléctrica consistentes com o processo desenvolvido pelo preço à vista. Exemplos disso são Gibson e Schwartz (1990) e Hilliard e Reis (1998). Contudo, um dos problemas da implementação destes modelos reside no facto de algumas das variáveis explicativas não poderem ser observadas, como a *convenience yield*. Por outro lado, a curva dos preços *forward* é uma função

endógena dos parâmetros do modelo e, portanto, não é necessariamente consistente com os preços *forward* observados no mercado.

Uma segunda corrente apresenta uma abordagem mais prática, baseada na modelização da curva dos preços *forward*. Tal acontece porque estes contratos são liquidados, apresentando preços facilmente observáveis. Destaca-se neste âmbito o trabalho de Cortazar e Schwartz (1994).

Assim, de acordo com Clewlow e Strickland (1999a), os modelos de utilização mais comuns para a avaliação de opções sobre electricidade, baseiam-se em Black (1976) e Schwartz (1997). Contudo, nenhum desses modelos tem em conta a existência de saltos. Estes podem ser categorizados da seguinte forma:

- Black (1976) – este modelo, de factor único, não inclui um processo *mean reverting*;
- Schwartz (1997) – consiste num modelo de índice único baseado num processo *mean reverting*;
- O modelo de dois factores de Schwartz (1997) é o desenvolvimento do modelo de Gibson e Schwartz (1990), em que o primeiro factor é o preço à vista e o segundo factor a *convenience yield* instantânea. O processo para este último factor é do tipo *mean reverting*;
- Ainda em Schwartz (1997) é possível encontrar um modelo de três factores – o preço à vista da electricidade, a *convenience yield* instantânea e a taxa de juro do mesmo tipo. Neste modelo, quer a *convenience yield*, quer a taxa de juro, apresentam características de reversão para a média.

Para estes quatro modelos, são apresentadas soluções analíticas, quer para a avaliação de futuros, quer para a avaliação de opções sobre contratos de futuros<sup>4</sup>. A principal diferença entre estes modelos, reside no formato da curva de volatilidade dos preços dos futuros. Assim, para opções de curta maturidade sobre contratos de futuros com maturidade longa, o modelo de Black (1976), parece poder ser usado com relativa segurança, uma vez que a curva da volatilidade é relativamente plana para maturidades mais longas. Contudo, quando a variância do preço dos futuros cai sobre uma zona menos plana da curva, então os modelos de Schwartz (1997) parecem ser os mais apropriados. O modelo de factor único parece ser o mais conveniente para opções de curta maturidade sobre futuros de maturidade igualmente curta. Já o modelo de dois factores parece ser apropriado para carteiras diversificadas de opções. Finalmente, de acordo com Clewlow e Strickland (2000), o modelo de três factores não apresenta melhorias significativas sobre os anteriores, dado que as flutuações da taxa de juro têm um reduzido impacto sobre os contratos de electricidade. Ainda de acordo com estes autores a inclusão de saltos nestes modelos conduz à perda de uma solução analítica para os mesmos.

Num outro artigo, Winsen (1998), sugere um modelo onde as variações do preço são normalmente distribuídas, mas em que o desvio padrão da função de distribuição das taxas instantâneas de rendibilidade é dado por  $\sigma (T-t)$  em vez de  $\sigma (T-t)^{1/2}$  tal como na solução de Black e Scholes (1973). A justificação para este ajustamento reside no facto do mesmo reproduzir o comportamento observado empiricamente para o desvio padrão, consistente com a tendência

---

<sup>4</sup> Ver Quadro II no final do capítulo.

de reversão para a média, encontrada nos preços da electricidade. Este modelo conduz-nos a uma equação de avaliação de opções semelhante à utilizada por Black e Scholes (1973) que, em termos práticos, é bastante eficiente e fácil de utilizar. No entanto, esta abordagem não oferece grande ajuda na compreensão do comportamento actual dos preços da electricidade, uma vez que não se baseia num modelo de preços da mesma.

Já Joy (1998), descreve um processo estocástico para os preços à vista da electricidade tendo em mente a curva *forward* deste mercado. O seu modelo pode ser representado da seguinte forma:

$$\partial F(t, T) / F(t, T) = v(t, T, F(t, T)) \partial z(t) + \sum_i \partial q(i) \quad (3.3)$$

onde,  $F(t, T)$  é o preço a futuro estabelecido no momento  $t$  para entrega em  $T$ ,  $v(t, T, F(t, T))$  é função de volatilidade no momento  $t$  do preço do *forward* / futuro admitindo a inexistência de saltos,  $\partial z(t)$  é um incremento num processo Browniano padronizado e  $\partial q(i)$  é um processo de Poisson independente com duração  $\partial(i)$ .

Uma versão deste modelo com múltiplos movimentos Brownianos, mas onde a volatilidade não depende do preço do *forward* e admitindo a inexistência de saltos foi proposta por Cortazar e Schwartz (1994) como um modelo de avaliação de opções sobre commodities, com a seguinte equação diferencial:

$$\partial F(t, T) / F(t, T) = \sum_i v_i(t, T, F(t, T)) \partial z(t); i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Uma característica importante dos modelos representados pelas equações (3.3) e (3.4) tem a ver com o facto de a forma da função de volatilidade  $v(.)$  estar directamente relacionada com o comportamento do preço à vista. Considere-se a seguinte equação:

$$\partial S(t) / S(t) = \alpha(\mu - \ln(S(t)))\partial t + v\partial Z \quad (3.5)$$

Na equação anterior o preço à vista reverte para a média de longo prazo a uma velocidade determinada pela taxa de reversão para a média,  $\alpha$  (que se assume ser positiva). Isto é, quando o preço à vista se encontra acima de  $\exp(\mu)$ , a evolução do preço à vista é negativa, o que tende a conduzir o preço para baixo em direcção a  $\exp(\mu)$ . De modo semelhante, quando o preço à vista está abaixo do seu nível de longo prazo, a evolução será positiva – forçando-o a subir em direcção ao seu nível de longo prazo. Este modelo foi analisado por Schwartz (1997) e os seus resultados demonstraram que este pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\partial F(t, T) / F(t, T) = v(t, T)\partial z(t) \quad (3.6)$$

onde,

$$v(t, T) = v.e^{-\alpha(T-t)}$$

O modelo simples apresentado na equação anterior é um caso especial do modelo de Joy (1998), sem saltos, e do modelo de Cortazar e Schwartz (1994), com  $n=1$ .

A reversão para a média do preço à vista reflecte-se no facto de a volatilidade dos preços *forward* diminuir à medida em que aumenta o tempo para a maturidade.

Ainda no que se refere ao modelo de Cortazar e Schwartz (1994), é possível através dele obter uma solução analítica para opções *plain vanilla* idêntica à fórmula de Black e Scholes (1973). Por exemplo, o preço de uma opção europeia de compra  $C(t)$  no momento  $t$ , com preço de exercício  $X$  e maturidade em  $T$ , é dada por:

$$C(t) = F(t, T) N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (3.7)$$

onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t, T)}{X}\right) + \frac{1}{2} w}{\sqrt{w}},$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{w},$$

$$w = \sum_i \left\{ \int_t^T v_i(t, T)^2 dt \right\}$$

Contudo, a não existência de curvas de preços *forward* fidedignas, leva a que os modelos tenham que ser estimados a partir do comportamento do preço à vista.

Clewlow e Strickland (2000) apresentam um modelo intuitivo, simples de implementar e com solução analítica. Este modelo relaciona-se com o modelo

de factor único baseado no comportamento dos preços à vista com *mean reversion*, originalmente introduzido por Schwartz (1997):

$$\partial S(t)/S(t) = \alpha(\mu - \ln S(t))\partial t + \sigma \partial Z \quad (3.8)$$

Neste modelo, o preço à vista tende a reverter para uma média de longo prazo constante,  $\mu$ , à taxa  $\alpha$ , onde  $S$  é o preço *spot* e  $t$  é o tempo. O problema deste modelo é que os preços *forward* são teóricos, determinados a partir do preço *spot* e pelos parâmetros do modelo, o que não implica que estejam necessariamente em concordância com os preços *forward* do mercado. O objectivo do ajustamento dos modelos de avaliação da energia eléctrica às curvas *forward* é importante na medida em que permite ao modelo incorporar a sazonalidade dos preços e assegurar que os preços das opções estão correctos face ao mercado. Num trabalho recente, Clewlow e Strickland (1999a) mostram que este modelo pode facilmente ser estendido para se tornar consistente com os preços de mercado dos contratos *forward*. Estes autores, mostram ainda que as opções europeias têm solução analítica fechada.

O ajustamento aos dados do mercado da equação (3.8) pode ser conseguido através da introdução de parâmetros dependentes do tempo. Por exemplo, consegue tornar-se o processo consistente com a curva *forward* observada, tornando a média de longo prazo dependente do tempo:

$$\partial S(t)/S(t) = \alpha(\mu(t) - \ln S(t))\partial t + \sigma \partial Z \quad (3.9)$$

O modelo definido na equação anterior implica o seguinte comportamento da curva do preço *forward*:

$$\partial F(t, T) / F(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} \partial Z \quad (3.10)$$

onde  $F(t, T)$  é o preço do contrato *forward* com maturidade  $T$  observado no momento  $t$ . Além disso, a evolução da curva *forward* é uma função analítica do preço *spot* esperado no futuro, da curva *forward* inicial e dos parâmetros do modelo.

Outro resultado analítico obtido para o modelo apresentado pela equação (3.9) está relacionado com as opções europeias sobre *forwards*. Assim, de acordo com os referidos autores é possível apresentar uma solução analítica para o preço de uma opção *plain vanilla* sobre um *forward*:

$$C(t, T, s) = e^{-r(T-t)} [F(t, s) N(d_1) - X N(d_2)] \quad (3.11)$$

Onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t,s)}{X}\right) + \frac{1}{2} v(t,T,s)}{\sqrt{v(t,T,s)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{v(t,T,s)}$$

$$\text{com, } v(t, T, s) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left( e^{-2\alpha(s-T)} - e^{-2\alpha(s-t)} \right)$$

Mais uma vez, com vista à clarificação da revisão da literatura prévia realizada no presente capítulo, apresenta-se abaixo um quadro que pretende sintetizar os principais modelos focados no texto:

**Quadro II – Modelos de avaliação de opções sobre forwards de electricidade**

MODELOS	EQUAÇÃO
<b>A – MODELOS DE ÍNDICE ÚNICO</b>	(Preço à vista é a unica variável estocástica)
<b>Black (1976) ( com <math>r</math>, <math>\delta</math> e <math>\sigma</math> constantes)</b>	
- preço à vista	$\partial S = (r - \delta)S\partial t + \sigma S\partial Z$
- forward	$F(t, T) = S e^{(r - \delta)(T - t)}$
- opção sobre forward	Vide equação (3.2)
<b>Schwartz (1997) ( com <math>r</math> e <math>\sigma</math> constantes)</b>	
- preço à vista	$\partial S(t)/S(t) = \alpha(\mu - \ln S(t))\partial t + \sigma \partial Z$
- forward	$F(t, T) = \exp(e^{-\alpha(T-t)} \ln S + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) * \mu + \frac{\sigma^2}{4 * \alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}))$
- opção sobre forward	Vide equação (3.11)

MODELOS	EQUAÇÃO
<b>B – MODELO DE DOIS FACTORES</b>	(Variáveis estocásticas – preço à vista e <i>convenience yield</i> )
<b>Gibson e Schwartz (1990) e Schwartz (1997) ( com <math>r</math> e <math>\sigma</math> constantes)</b>	
- preço à vista	$\partial S = (r - \delta)S\partial t + \sigma S\partial Z$
- <i>convenience yield</i>	$\partial \delta = \alpha_\delta (\bar{\delta} - \delta) \partial t + \sigma_\delta \partial Z_\delta$
- forward	$F(t, T) = S \exp(-\delta \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}}{\alpha_\delta} + A(t, T))^5$
- opção sobre forward	$C(t, T, s) = e^{-r(T-t)} [F(t, s) N(h) - X N(h - \sqrt{w})]^6$

<sup>5</sup> Com  $A(t, T) = (r - \delta + \frac{\sigma_\delta^2}{2\alpha_\delta^2} - \frac{\sigma\sigma_\delta\rho_{S\delta}}{\alpha_\delta})(T - t) + \frac{1}{4} \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} \frac{1 - e^{-2\alpha_\delta(T-t)}}{\alpha_\delta^2} + (\delta\delta_\delta + \sigma\sigma_\delta\rho_{S\delta} - \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta}) \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}}{\alpha_\delta^2} e^{-\delta} = \bar{\delta} - \frac{\lambda_\delta}{\alpha_\delta}$

MODELOS

EQUAÇÃO

C – MODELO DE TRÊS FACTORES

(Variáveis estocásticas – preço à vista, *convenience yield* e taxa de juro)

Schwartz (1997) (com  $\sigma$  constante)

- preço à vista  $\partial S = (r - \delta)S\partial t + \sigma S\partial Z$

- *convenience yield*  $\partial \delta = \alpha_\delta \left( \bar{\delta} - \delta \right) \partial t + \sigma_\delta \partial Z_\delta$

- taxa de juro  $\partial r = \alpha_r \left( \bar{r} - r \right) \partial t + \sigma_r \partial Z_r$

- forward  $F(t, T) = S \exp \left( \delta \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}}{\alpha_\delta} + r \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} + D_0(t, T) \right)$

- opção sobre forward  $C(t, T, s) = e^{-r(T-t)} \left[ F(t, s) e^a N(h) - X N \left( h - \frac{w}{\sqrt{w}} \right) \right]$

6 Com  $h = \frac{\ln \left( \frac{F(t, s)}{X} \right) + \frac{1}{2} w^2}{\sqrt{w}} e$

$$w^2 = \sigma^2(T-t) - \frac{2\sigma\sigma_\delta\rho_{s\delta}}{\alpha_\delta} \left( (T-t) - \frac{e^{-\alpha_\delta(s-T)} - e^{-\alpha_\delta(s-t)}}{\alpha_\delta} \right) + \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} \left( (T-t) - \frac{2}{\alpha_\delta} (e^{-\alpha_\delta(s-T)} - e^{-\alpha_\delta(s-t)}) \right) + \frac{1}{2\alpha_\delta} (e^{-2\alpha_\delta(s-T)} - e^{-2\alpha_\delta(s-t)})$$

7 Com

$$D_0(t, T) = \frac{(\alpha_\delta \bar{\delta} + \sigma\sigma_\delta\rho_{s\delta})(1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}) - \alpha_\delta(T-t)}{\alpha_\delta^2} - \frac{\sigma_\delta^2(4(1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}) - (1 - e^{-2\alpha_\delta(T-t)}) - 2\alpha_\delta(T-t))}{4\alpha_\delta^3} - \frac{(\alpha_r \bar{r} + \sigma\sigma_r\rho_{sr})(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}) - \alpha_r(T-t)}{\alpha_r^2} - \frac{\sigma_r^2(4(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}) - (1 - e^{-2\alpha_r(T-t)}) - 2\alpha_r(T-t))}{4\alpha_r^3} + \sigma\sigma_r\rho_{sr} \left( \frac{(1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}) + (1 - e^{-\alpha_r(T-t)}) - (1 - e^{-(\alpha_\delta + \alpha_r)(T-t)})}{\alpha_\delta\alpha_r(\alpha_\delta + \alpha_r)} + \frac{\alpha_\delta^2(1 - e^{-\alpha_r(T-t)}) + \alpha_r^2(1 - e^{-\alpha_\delta(T-t)}) - \alpha_\delta\alpha_r^2(T-t) - \alpha_r\alpha_\delta^2(T-t)}{\alpha_\delta^2\alpha_r^2(\alpha_\delta + \alpha_r)} \right)$$

8 Com  $h = \frac{\ln \left( \frac{F(t, s)}{X} \right) + \alpha + \frac{1}{2} w}{\sqrt{w}} e$

Concluída a revisão da literatura relevante sobre o tema em estudo, apresenta-se no capítulo seguinte o estudo empírico do problema em análise.

$$w = \sigma(T-t) + 2\sigma \left[ \begin{aligned} & \frac{\sigma_r \rho_{sr}}{\alpha_r} \left( t - \frac{e^{-\alpha_r(s-t)}(e^{\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} - \frac{\sigma_\delta \rho_{s\delta}}{\alpha_\delta} \left( t - \frac{e^{-\alpha_\delta(s-t)}(e^{\alpha_\delta(T-t)} - 1)}{\alpha_\delta} \right) \right. \\ & + \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} \left( t + \frac{e^{-2\alpha_\delta(s-t)}(e^{2\alpha_\delta(T-t)} - 1)}{2\alpha_\delta} - 2 \frac{e^{-\alpha_\delta(s-t)}(e^{\alpha_\delta(T-t)} - 1)}{\alpha_\delta} \right) \\ & + \frac{\sigma_r^2}{\alpha_r^2} \left( t + \frac{e^{-2\alpha_r(s-t)}(e^{2\alpha_r(T-t)} - 1)}{2\alpha_r} - 2 \frac{e^{-\alpha_r(s-t)}(e^{\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} \right) \\ & \left. - 2 \frac{\sigma_\delta \sigma_r \rho_{\delta r}}{\alpha_\delta \alpha_r} \left( t - \frac{e^{-\alpha_\delta(s-t)}(e^{\alpha_\delta(T-t)} - 1)}{\alpha_\delta} - \frac{e^{-\alpha_r(s-t)}(e^{\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} - \frac{e^{-(\alpha_\delta + \alpha_r)(s-t)}(e^{(\alpha_\delta + \alpha_r)(T-t)} - 1)}{(\alpha_\delta + \alpha_r)} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

e

$$a = \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left( \sigma \rho_{sr} \left( t - \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} \right) \right) + \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left( t - \frac{e^{-\alpha_r(s-t)}(e^{\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} - \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_r(s-t)}(e^{\alpha_r(T-t)} - e^{-\alpha_r(T-t)})}{2\alpha_r} \right) - \frac{\sigma_\delta \rho_{\delta r}}{\alpha_\delta} \left( t - \frac{e^{-\alpha_\delta(s-t)}(e^{\alpha_\delta(T-t)} - 1)}{\alpha_\delta} - \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_\delta(s-t)}(e^{\alpha_\delta(T-t)} - e^{-\alpha_r(T-t)})}{\alpha_\delta + \alpha_r} \right)$$

## Capítulo 4 – Estudo empírico

No presente capítulo dá-se início ao estudo empírico desta dissertação. Numa primeira fase apresentam-se os dados, bem como a sua análise em termos descritivos. Pretende-se ainda, e no que diz respeito ao preço à vista, provar que apresenta as características descritas na literatura e determinar os parâmetros relativos a essas características - reversão para a média e existência de saltos. Esta secção termina com a avaliação dos direitos contingentes (opções) utilizando a simulação de Monte Carlo e comparando os resultados face aos valores obtidos de forma analítica, quando estes existem. Apresenta-se ainda uma análise relativa às variáveis instrumentais de gestão do risco – os Gregos.

---

### 4.1 – Apresentação dos dados

Os dados utilizados neste estudo dizem respeito ao preço da energia eléctrica transaccionada no mercado espanhol – OMEL. Foram obtidas 1186 séries diárias de vinte e quatro preços, um preço por hora, medidos em cêntimos de euro por Kw/hora (arredondados à terceira casa decimal), correspondentes ao período de 1 de Janeiro de 1999 a 31 de Março de 2002. Estes correspondem aos preços praticados para entrega no dia seguinte.

De forma a realizar o estudo proposto, e na sequência do que é feito na maior parte dos estudos analisados, simplificáram-se as séries trabalhando com 1186 preços correspondentes à média diária dos vinte e quatro preços referidos anteriormente.

Neste estudo trabalha-se não só directamente com a variável preços nos termos acima referidos, mas também com dois constructos – o logaritmo natural do preço e sua variação diária ( $\Delta \ln P(t) = \ln P(t) - \ln P(t-1)$ ).

#### 4.2 – Análise descritiva dos dados

O Quadro III, abaixo apresentado, resume a estatística descritiva da série dos preços médios diários à vista no OMEL:

**Quadro III – Estatística descritiva dos dados**

	Preço médio diário	Ln Preço	$\Delta \ln \text{Preço}$
<b>Nº observações</b>	1186	1186	1185
<b>Média</b>	3,07111	1,06498	0,00026 <sup>(9)</sup>
<b>Máximo</b>	10,37575	2,33947	0,89590
<b>Mínimo</b>	1,01262	0,01255	-1,01192
<b>Desvio Padrão</b>	1,13823	0,32893	0,19642 <sup>(9)</sup>
<b>Skewness</b>	1,87742	0,44800	0,42162
<b>Kurtosis</b>	5,71503	0,72622	2,60217

A análise dos dados apresentados permite ter uma primeira imagem da elevada volatilidade dos preços, com um máximo de 10,37575 e um mínimo de 1,01262. O preço médio no período em análise foi de 3,071 cêntimos de euro por Kw/h e atingiu o seu máximo em Janeiro de 2002.

<sup>9</sup> Anualizando estes valores para os 365 dias de negociação, obtem-se 0,0949 e 3,7526 de média e desvio-padrão, respectivamente.

Analisando a variação de  $\ln P(t)$ , enquanto boa aproximação à variação percentual do preço, verifica-se que a sua média pouco difere de zero, mas apresenta uma amplitude elevada entre um máximo de 0,896 e um mínimo de -1,012. De facto, estes números permitem uma primeira percepção das características atrás atribuídas ao preço da energia eléctrica: uma tendência para a estabilidade no preço, consubstanciada numa taxa de variação média de sensivelmente zero por cento, mas apresentando picos, quer com preços muito elevados, quer com quedas bruscas no mesmo.

Tendo em mente o desvio padrão das variáveis em análise, pode-se, uma vez mais, constatar a elevada volatilidade dos preços da electricidade. Efectivamente, a variação de  $\ln P(t)$  apresenta um desvio padrão diário de 0,196 que, anualizado, representa uma volatilidade de 375%.

Preços extremos são relativamente frequentes no OMEL. Este facto é reflectido na amostra pelo valor do coeficiente de achatamento (*Kurtosis*). Efectivamente, os 5,715 de *Kurtosis* obtidos para a série de preços médios diários são, do ponto de vista estatístico, significativamente diferentes de 3 (valor assumido por uma distribuição normal). Isto significa que preços extremamente elevados ou baixos têm maior probabilidade de ocorrência do que numa série com distribuição normal com a mesma variância.

Por outro lado, o sinal positivo do coeficiente de assimetria (*Skewness*) revela que valores extremamente elevados têm maior probabilidade de ocorrência do que valores extremamente reduzidos, apresentando um enviesamento à esquerda da amostra.

Para ter uma melhor percepção destas características, atente-se nas figuras abaixo relativas à evolução do preço médio diário e de  $\ln P(t)$  bem como das suas respectivas variações:

Figura I  
Preço Médio Diário e sua Var.

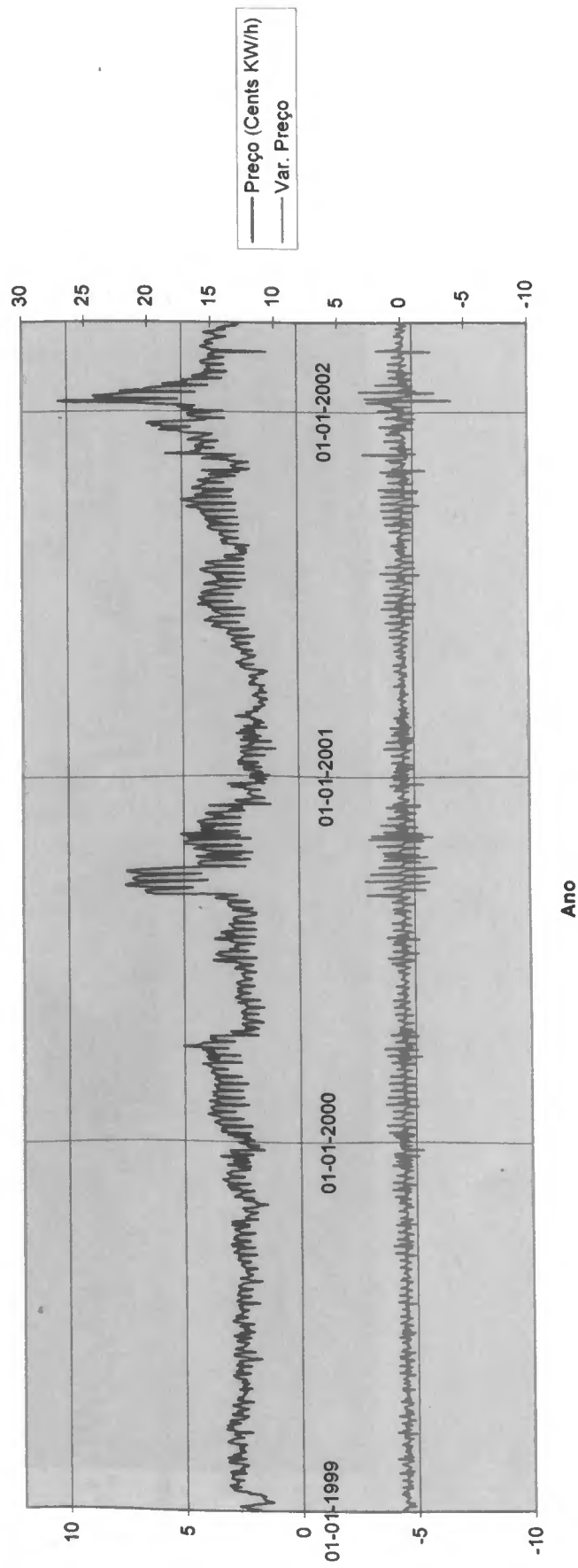
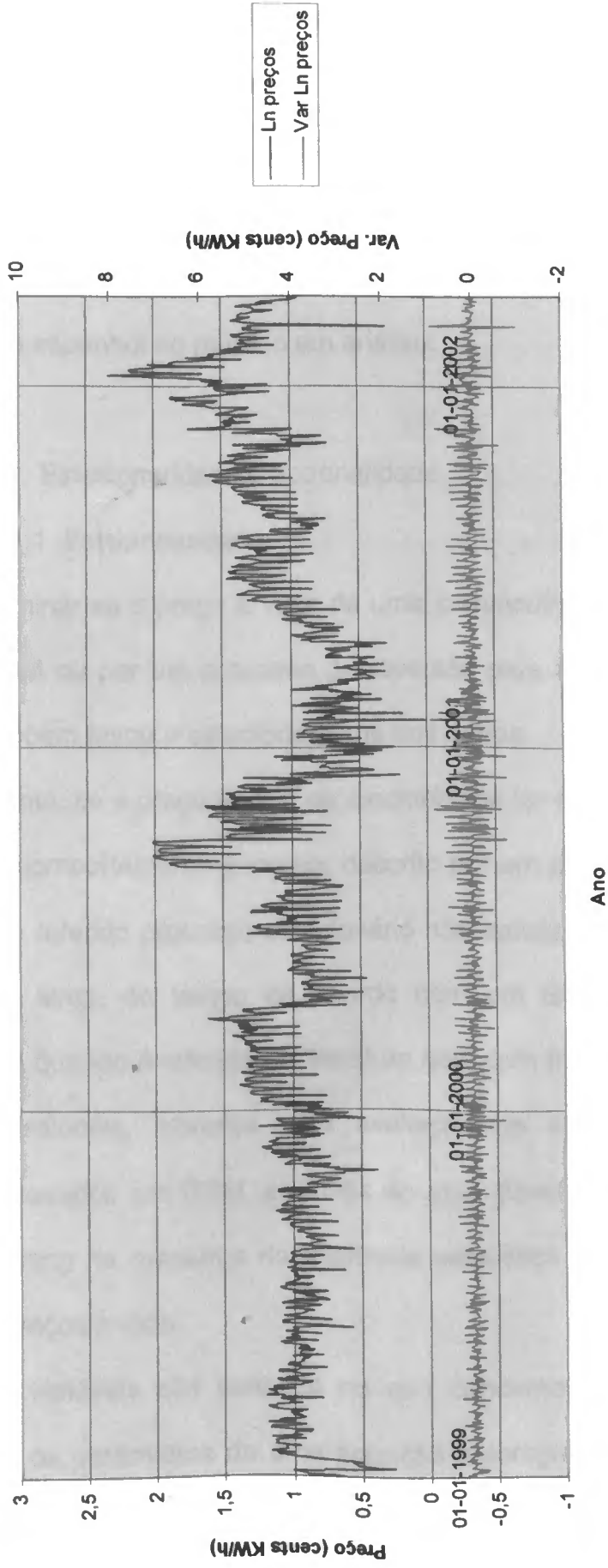


Figura II  
Ln Preço Médio Diário e sua Var.





### 4.3 – Estudo das características do preço à vista

No presente ponto pretende-se, por um lado, provar que a série em estudo apresenta as características descritas na literatura prévia – reversão para a média, existência de saltos e sazonalidade, por outro, determinar os valores dos parâmetros associados a essas características para os preços praticados no mercado espanhol no período em análise.

#### 4.3.1. Estacionaridade e Sazonalidade

##### 4.3.1.1. Estacionaridade

Para determinar se o preço à vista de uma *commodity* é melhor representado por um GBM ou por um processo de reversão para a média, Dixit e Pindyck (1994) propõem testar a estacionaridade dos dados.

Efectivamente, se o preço à vista da electricidade for estacionário, confirma-se que o seu comportamento é melhor descrito por um processo *mean reverting*, dado que o referido processo estacionário não apresenta uma tendência para crescer ao longo do tempo de acordo com um GBM. Tal assume maior importância quando é referido na literatura que, com frequência, são utilizados, pelos profissionais, modelos para avaliação de derivados sobre energia eléctrica baseados em GBM, ao invés da mais fiável utilização de processos *mean reverting* na presença de evidência estatística de estacionaridade nas séries de preços à vista

Assim, as variáveis são testadas no que concerne à sua estacionaridade analisando os parâmetros de uma equação autoregressiva obtida através do estimador dos mínimos quadrados ordinários (equação 4.1). Nesta equação, se

b for igual a 1, então  $X(t)$  tem uma raiz unitária e é não estacionário. Já quando b é menor do que 1 em termos absolutos, pode-se assumir o inverso.

$$X(t) = a + b X(t - 1) + \varepsilon(t) \quad (4.1)$$

Contudo, de forma a testar a estacionaridade, os termos da equação (4.1) têm que ser transformados de acordo com o teste de Dickey – Fuller apresentado na equação (4.2). De facto, este teste foi desenvolvido tendo presente que não era possível utilizar o teste t para rejeitar a existência de raiz unitária. A justificação para tal, reside no facto de que o parâmetro b, quando significativamente diferente de zero, surge enviado pelo método dos mínimos quadrados. Assim, se o parâmetro c estimado for significativamente negativo contra a hipótese nula do teste onde c é zero, assume-se que o processo é estacionário.

$$\Delta X(t) = a + cX(t - 1) + \varepsilon(t) \quad (4.2)$$

com  $b = c+1$

Os resultados do teste de estacionaridade de Dickey – Fuller apresentam-se no quadro abaixo:

## Quadro IV – Teste de Estacionariedade (Dickey Fuller)

Variável Dependente:		$\Delta \text{Ln Preço}$	
Nº de Observações		1184	
	Coeficiente	Standard Error	Estatística t
a	0,191	0,018	10,335
c	-0,179	0,017	-10,802
Estatística F			116,677
R <sup>2</sup>			0,090
R <sup>2</sup> Ajustado			0,089

O teste confirma que os preços à vista da electricidade no período em análise são integrados de ordem zero e, portanto, estacionários. Efectivamente, o parâmetro c estimado na equação (4.2) é significativamente negativo, implicando que um processo de reversão para a média oferece uma melhor descrição da evolução do preço do activo.

Tal abre caminho à aplicação, com segurança, de um processo *mean reverting* para descrever o comportamento do preço do activo, ao invés de um modelo baseado num GBM.<sup>8</sup>

## 4.3.1.2. Sazonalidade

Uma outra característica do preço à vista do activo, descrita na literatura, é a sazonalidade. De facto, os modelos descritos anteriormente podem ser implementados especificando uma função determinística dependente do tempo. Essa função tenta capturar componentes previsíveis no preço da electricidade, resultantes de regularidades no comportamento do mesmo ao

longo do tempo. Essa sazonalidade, tal como já foi referido, pode ser intra-diária, semanal ou mesmo durante determinadas épocas do ano. Para além disso, ela é em si um factor justificativo, na medida em que está na sua base, para a utilização de modelos baseados no pressuposto da reversão dos preços para a sua média de longo prazo.

No presente estudo analisa-se se existe uma componente sazonal relacionada com um aumento do preço nos dias úteis face aos fins-de-semana / feriados.

Para tal foi testado o seguinte modelo:

$$X(t) = \alpha + \beta D(t) \tag{4.3}$$

onde  $D(t)$  é uma variável *dummy* que assume o valor 1 se  $t$  for um dia útil e 0 se  $t$  for fim-de-semana / feriado.  $X(t)$  é o preço médio diário.

No quadro seguinte resume-se os resultados da regressão linear:

**Quadro V – Regressão Linear relativa à sazonalidade (WEEKDAY)**

Variável Dependente:		Preço Médio Diário	
Nº de Observações		1186	
	Coeficiente	Standard Error	Estatística t
Constante	2,564	0,056	45,754
<i>Dummy Holiday</i>	0,742	0,068	10,947
Estatística F			119,838
R <sup>2</sup>			0,092
R <sup>2</sup> Ajustado			0,091

Da análise dos resultados verifica-se que existe sazonalidade ao longo da semana, sendo que os dias úteis apresentam preços significativamente mais elevados do ponto de vista estatístico. Assim, o preço estimado para o modelo durante o fim de semana é de 2,564 cênt. de euro por KW/h, enquanto, durante um dia útil, a este preço acresce 0,742 cênt. de euro por KW/h, em média.

Com vista à extensão da análise da sazonalidade, procurou-se qual o padrão do preço à vista da electricidade no que concerne, especificamente a cada dia útil da semana (2<sup>a</sup> a 6<sup>a</sup> feira). Para tal utilizou-se o seguinte modelo:

$$X(t) = \alpha + \sum_i \beta_i D_i \quad (4.4)$$

com  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ , respectivamente 2<sup>a</sup> feira; 3<sup>a</sup> feira; 4<sup>a</sup> feira; 5<sup>a</sup> feira e 6<sup>a</sup> feira.

Esta segunda análise relativa à sazonalidade, com vista à detecção de diferenças estatisticamente significativas no comportamento dos preços médios diários relativas ao dia da semana, permite concluir que, embora com estatísticas  $t$  significativas para todas as variáveis *dummy*, não se pode falar em diferenças de preço ao longo da semana. De facto, mesmo ao nível da constante do modelo, que poderá representar o preço médio praticado no mercado ao fim de semana/feriado, não se verifica um impacto estatisticamente significativo pela partição detalhada dos dias da semana face à primeira regressão estudada. Assim, mantem-se nos 2,5 cent por Kw/h durante o fim de semana, com um acréscimo de 0,65 a 0,7 durante os dias

úteis. Sendo que, e apenas a título desta amostra, (sem qualquer significado estatístico), os dias da semana mais caros são a 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> feiras.

No quadro seguinte resumem-se os resultados desta segunda regressão linear:

**Quadro VI – Regressão Linear relativa à sazonalidade (DAY OF THE WEEK)**

Variável Dependente:		Preço Médio Diário	
Nº de Observações		1186	
	Coeficiente	Standard Error	Estatística t
Constante	2,5863	0,059	43,45
Dummy 2 <sup>a</sup> feira	0,6305	0,103	6,103
Dummy 3 <sup>a</sup> feira	0,6392	0,103	6,187
Dummy 4 <sup>a</sup> feira	0,7197	0,103	6,966
Dummy 5 <sup>a</sup> feira	0,7378	0,103	7,142
Dummy 6 <sup>a</sup> feira	0,6709	0,103	6,508
Estatística F			18,852
R <sup>2</sup>			0,07397
R <sup>2</sup> Ajustado			0,07005

Em conclusão, pode afirmar-se que os dados analisados apresentam, não só características de sazonalidade, mas também estacionaridade conducente à aplicação de um processo *mean reverting*.

Em consonância, no ponto seguinte propõe-se determinar os parâmetros do modelo explicativo do comportamento dos preços à vista da electricidade no mercado espanhol, no período em análise.

### 4.3.2 Reversão para a média e introdução de saltos

#### 4.3.2.1. Reversão para a média

Tal como já foi referido no capítulo 2, a taxa de reversão para a média do preço *spot* da electricidade pode ser estimada de uma forma simples, contudo de elevada robustez, através de uma regressão linear.

De facto, tendo em mente o processo *mean reverting* para o logaritmo natural do preço à vista descrito pela equação:

$$\partial x = \alpha(\bar{x} - x)\partial t + \sigma \partial Z \quad (4.5)$$

onde  $x$  representa o logaritmo natural do preço à vista, pode-se discretizá-lo obtendo a equação:

$$\Delta x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (4.6)$$

onde  $\alpha_0 = \alpha \bar{x} \Delta t$  e  $\alpha_1 = -\alpha \Delta t$

Consequentemente, regredindo  $\Delta x_t$  em relação a  $x_t$  obtêm-se estimativas para  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  correspondentes aos termos de intersecção e inclinação da recta da regressão estimada. Ponderando os termos assim determinados pelo intervalo de tempo entre as observações é possível determinar  $\alpha$  e  $\bar{x}$ . Desta forma tem-se:  $\alpha = -\alpha_1 / \Delta t$  e  $\bar{x} = -\alpha_0 / \alpha_1$ , sendo  $\Delta t = 1/n^o$  observações.

Aplicando a metodologia indicada, no quadro abaixo são sistematizados os resultados da regressão linear efectuada:

**Quadro VII – Regressão Linear para estimar coeficiente de reversão para a média**

Variável Dependente:		$\Delta \text{Ln Preço}$	
Nº de Observações		1185	
	Coeficiente	Standard Error	Estatística t
Constante	0,191	0,018	10,335
Ln Preço	-0,179	0,017	-10,802
Estatística F		116,677	
R <sup>2</sup>		0,090	
R <sup>2</sup> Ajustado		0,089	

Dos resultados apresentados estima-se um  $\alpha$  (coeficiente de reversão para a média) de 212,115 no período dos 3,25 anos em análise. A média de longo

prazo para a qual reverte o preço é de sensivelmente 2,91<sup>(10)</sup> cêntimos de euro por Kw/h. Este valor tem a particularidade de representar o ponto médio dos preços verificados ao fim de semana face aos dias úteis na amostra em análise, conforme foi apresentado no ponto anterior.

Aprofundando a análise desta variável, uma das características chave dos processos de reversão para a média é a sua “meia vida”, isto é, o tempo que o preço demora a reverter metade do caminho em direcção à média de longo prazo, partindo do seu nível actual e assumindo que entretanto não existem outros choques aleatórios.

Assim, admitindo a inexistência de aleatoriedade, pode focar-se a atenção unicamente na característica de reversão para a média, considerando, então, um processo *mean reverting* simples, em termos de  $X = \ln(S)$ :

$$\partial x = \alpha(\bar{x} - x)dt \quad (4.7)$$

A equação 4.7 pode ser resolvida integrando-a de  $X_0$  no momento zero até  $X_t$  no momento  $t$ :

$$\int_0^t (\bar{x} - x) = (\bar{x} - x)e^{-\alpha t} \quad (4.8)$$

<sup>10</sup> Correspondente à  $\exp(\bar{x})$  determinada na regressão linear obtida.

Pelo que, para determinar a “meia vida”,  $t_{1/2}$ , na qual a distância de  $x$  da sua média de longo prazo é metade da distância inicial, tem-se:

$$\frac{1}{2}(\bar{x} - x) = (\bar{x} - x)e^{-\alpha t_{1/2}} \quad (4.9)$$

Resolvendo em ordem a  $t_{1/2}$  obtem-se:

$$t_{1/2} = \ln(2) / \alpha \quad (4.10)$$

No caso da amostra em análise obteve-se uma “meia vida” de 3,87<sup>11</sup> dias. Assim, parece lógico assumir que, em termos médios, ao final de uma semana (7 dias), o preço retoma ao seu nível de longo prazo. Tal conclusão é reforçada, e concomitantemente validada, pela simples intuição económica dos ciclos semanais de actividade humana e empresarial.

Em súpula, o quadro seguinte apresenta os parâmetros estimados relativos à análise da adequabilidade do processo *mean reverting* ao comportamento da amostra em análise:

#### Quadro VIII – Parâmetros do processo *Mean reverting*

Parâmetro	Valor
$\alpha$	212,115
Meia vida dos choques no preço ( $t_{1/2}$ )	3,87233
$\bar{x}$	1,0670391
S médio	2,906760

<sup>11</sup> O valor obtido para  $t_{1/2}$  deve ser ponderado pelo período em análise (1185 dias) dado que os parâmetros determinados se referem a essa dimensão temporal.

#### 4.3.2.2. Estimación dos parâmetros do processo de saltos

Em capítulos anteriores, os preços da electricidade foram caracterizados como apresentando saltos bruscos e inesperados. Tais alterações são fruto de flutuações na procura e reduzida elasticidade da oferta, motivada pela rigidez no transporte e armazenamento daquele bem.

Como anteriormente referido, Clewlow e Strickland (2000) propõem um modelo simples que permite analisar não só os saltos mas também o facto dos preços tenderem a reverter rapidamente aos seus níveis anteriores (e, eventualmente, para a sua média de longo prazo). O referido modelo permite melhorar, incorporando os saltos atrás descritos, o modelo anteriormente apresentado e pode ser enunciado da seguinte forma:

$$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S \partial Z + \kappa S \partial q \quad (4.11)$$

Sendo que  $\kappa$  corresponde à amplitude do salto proporcional, aleatório, determinado pelo logaritmo natural dos saltos proporcionais normalmente distribuídos:

$$\ln(1 - \kappa) \sim N\left(\ln\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right) - \frac{1}{2}\gamma^2, \gamma\right) \quad (4.12)$$

$$c/ \text{Prob}(\partial q = 1) = \phi \partial t$$

Onde  $\bar{\kappa}$  é o salto médio e  $\gamma$  é a volatilidade do salto. A frequência anualizada dos saltos é dada por  $\phi$ , que corresponde ao número médio de saltos por ano.

Estes saltos são representados por um processo do tipo discreto, dado que estes não ocorrem continuamente mas sim em instantes específicos de tempo. Assim sendo, na maioria dos dias de transacção,  $dq$  (que representa um processo de Poisson), assume o valor zero, apenas assumindo o valor um quando ocorre um salto aleatório. Quando não se verifica qualquer salto está-se perante um processo idêntico ao apresentado no ponto anterior, isto é, apenas com tendência para reverter para a média. Tal é verdadeiro também quando os saltos são pequenos e muito frequentes, apresentando nesse caso pouco significado estatístico.

A determinação dos parâmetros deste processo poderá ser efectuada, segundo sugerem os autores citados, de uma forma simples utilizando uma heurística denominada filtro recursivo (pela análise dos *outliers* das séries em estudo)<sup>12</sup>.

No que diz respeito a esta metodologia, consiste num processo iterativo que parte do pressuposto que os saltos são relativamente pouco frequentes. Assim, pode-se estimar a volatilidade dos preços à vista num ambiente com saltos, utilizando como aproximação o desvio padrão das rendibilidades. Partindo desta estimativa da volatilidade, devem procurar-se as rendibilidades superiores ao esperado – para uma dada probabilidade, na ausência de saltos, identificando, assim, estes casos extremos como saltos. Partindo da

---

<sup>12</sup> Mais uma vez se recorda que, alternativamente, se poderia utilizar um estimador de máxima verosimilhança para determinar aquele parâmetro. Contudo, tal como foi referido, este processo apresenta o inconveniente de detectar não os saltos de menor frequência e maior amplitude (e conseqüentemente, de maior interesse para a gestão do risco do activo em análise), mas sim os de menor amplitude e mais frequentes (de menor interesse para os intervenientes no mercado).

identificação dos *outliers* como saltos, recalcula-se uma nova estimativa para a volatilidade, baseada no desvio padrão da amostra devidamente expurgada dos referidos valores extremos. Logicamente, esta nova estimativa apresentará uma redução face à anterior. Num processo iterativo, utilizando a nova estimativa para a volatilidade, volta-se a identificar as rendibilidades que excedem o limite definido inicialmente em três desvios padrões – (97% de probabilidade), assumindo-as novamente como *outliers* e conduzindo o processo da forma acima explicitada, até existir uma convergência nas estimativas para a volatilidade e não ser possível encontrar mais saltos novos. Este processo, aplicado à amostra em estudo permitiu apurar os seguintes resultados, após a execução de três iterações:

**Quadro IX – Estimação iterativa dos parâmetros do processo *Jump diffusion***

Iteração	$\sigma$	Nº de saltos	$\phi$	$\kappa$ médio	$\gamma$
1	0,1777815008	16	4,92	-	-
2	0,1737287162	22	6,77	-	-
3	0,1718656694	25	7,70	0,208947891	0,656136117

Da análise dos resultados obtidos, identificaram-se entre 7 a 8 saltos anuais, correspondentes a 25 saltos observados ao longo do período da amostra, cuja amplitude média é positiva e se situa nos 0,21.

Assim, mais uma vez se constata que os valores apresentados são coerentes com a evidência económica de que subidas no preço são mais frequentes que

a sua redução, sendo a sua volatilidade bastante elevada (0,66). Este último aspecto vem apoiar a escolha do método utilizado, na medida em que são as alterações no preço de maior amplitude que interessam analisar e gerir enquanto fonte de risco.

Para concluir este ponto, resta parametrizar o modelo do tipo *mean reversion jump-diffusion* (Clewlow and Strickland, (2000)):

$$\partial S = \alpha(\mu - \ln S)S\partial t + \sigma S\partial Z + \kappa S\partial q \quad (4.13)$$

Assim, foram determinados os parâmetros deste modelo, uma vez obtida a sua componente saltos, realizando para tal uma nova regressão do logaritmo natural dos preços, desta feita, da série sem saltos:

**Quadro X – Regressão Linear para estimar coeficiente de reversão para a média num processo com saltos**

Variável Dependente:		Δ Ln Preço	
Nº de Observações		1160	
	Coeficiente	Standard Error	Estatística t
Constante	0,152	0,017	9,147
Ln Preço	-0,146	0,015	-9,832
Estatística F		96,659	
R <sup>2</sup>		0,077	
R <sup>2</sup> Ajustado		0,076	

É possível, assim, determinar as perturbações induzidas pela componente difusão ( $\sigma \cdot S \cdot \partial Z$ ) e saltos ( $K \cdot S \cdot \partial q$ ) bem como no que diz respeito à tendência determinística do modelo [ $\alpha \cdot (\mu - \ln S) \cdot S \cdot \partial t$ ].

No quadro seguinte apresentam-se os parâmetros obtidos com a amostra no que concerne a este modelo:

**Quadro XI – Parâmetros do processo *Mean reverting* com saltos**

Parâmetro	Valor
$\alpha$	169,3600
Vida média dos choques no preço (t ½)	4,7476
$\bar{x}$	1,0411
S médio	2,8323
$\kappa$ médio	0,208947891
$\gamma$	0,656136117
$\phi$	7,70

No ponto seguinte objectiva-se avaliar opções sobre energia eléctrica. Nesse sentido, são utilizados os parâmetros agora estimados com vista à determinação do preço de duas opções:

- a) opção de compra de estilo europeu sobre um *forward* assumindo um processo *mean reverting* simples, isto é, sem saltos;
- b) opção de compra de estilo europeu sobre o activo à vista assumindo um processo *mean reverting* com saltos.

#### 4.4 – Avaliação de opções

Neste ponto pretende-se determinar qual o melhor modelo para avaliar opções sobre energia eléctrica. Assim, numa primeira fase procede-se à simulação da evolução do activo subjacente (preço à vista da electricidade), com vista à determinação do valor dos seus direitos contingentes. Para tal, serão realizadas duas simulações de Monte Carlo, correspondentes a modelos distintos de dinâmica dos preços – um modelo de factor único, do tipo *mean reverting* simples, para determinar o preço de uma opção de compra europeia sobre um *forward* / futuro de energia eléctrica; um segundo modelo, de dois factores, correspondentes a um processo *mean reverting* com saltos, para avaliar uma opção de compra europeia sobre o activo à vista.

Numa segunda fase, são comparados os resultados obtidos na primeira simulação com os valores resultantes de dois modelos com formulação analítica (de fórmula fechada):

- a) modelo de Black (1976) para avaliação de opções sobre *commodities*, que assume uma tendência de crescimento do preço à vista de acordo com um processo GBM;
- b) modelo Clewlow e Strickland (1999a) que utiliza um processo *mean reverting* para descrever a evolução dos preços do activo subjacente.

##### 4.4.1 Simulação de Monte Carlo

###### (a) Introdução

Muitos dos problemas relacionados com o *pricing* de derivados advêm da falta de tratamento analítico, exigindo aproximações numéricas. São exemplos de

tais problemas, a avaliação de opções sobre múltiplas formas de energia ou a incorporação de múltiplos factores / efeitos na avaliação dos referidos direitos contingentes, tais como a existência de volatilidade estocástica ou saltos.

Uma das técnicas mais utilizadas na avaliação de derivados de tipologia europeia, devido à sua elevada flexibilidade, é a simulação de Monte Carlo<sup>13</sup>. De acordo com este método, o valor de uma opção pode ser calculado como a média de todos os *payoffs* obtidos na simulação de varias evoluções de variáveis aleatórias determinantes para a avaliação do derivado. Esta técnica é facilmente aplicável, quer a modelos de uma variável, quer a modelos multi-factoriais.

Assim, no final de cada simulação, é determinado o valor da opção ( $C_T$ ). Se  $C_{T,j}$  representar o *payoff* do direito contingente de acordo com a  $j$ -ésima simulação então, o valor de uma opção de compra europeia no vencimento e na simulação  $j$  é:

$$C_{T,j} = \text{Max}(0, S_{T,j} - X) \quad (4.14)$$

onde,  $S_{T,j}$  representa o preço à vista do activo subjacente, de acordo com a  $j$ -ésima simulação, no momento  $T$ , e  $X$  é o preço de exercício da opção.

Caso a referida opção tenha como activo subjacente, não o preço à vista, mas sim um *forward*/futuro basta substituir, na equação (4.14),  $S_{T,j}$  por  $F_{T,j}$  (preço do *forward* no momento  $T$  de acordo com a  $j$ -ésima simulação).

---

<sup>13</sup> Esta técnica foi utilizada pela primeira vez por Boyle (1977) para avaliar instrumentos financeiros.

Finalmente cada *payoff* é descontado, à respectiva taxa de juro  $r$ , para o momento zero:

$$C_{0,j} = e^{-rT} * C_{T,j} \quad (4.15)$$

assumindo  $r$ , taxa de juro, determinístico.

As simulações são repetidas  $M$  vezes, sendo  $M$  um valor elevado.<sup>14</sup>

A média dos *payoffs* obtidos para cada uma das simulações representa o preço estimado para a opção:

$$\hat{C}_0 = \frac{\sum C_{0,j}}{M} \quad (4.16)$$

Assim,  $\hat{C}_0$  é uma estimativa do verdadeiro valor da opção,  $C_0$ , mas com erro relativo ao facto de ser obtido através de uma média com base numa amostra gerada aleatoriamente. Para obter uma medida desse erro, *standard error*, tem-se:

$$SE(\hat{C}_0) = \frac{SD(C_{0,j})}{\sqrt{M}} \quad (4.17)$$

onde  $SD(C_{0,j})$  é o desvio padrão dos  $M$  valores simulados para a opção.

<sup>14</sup> Para este estudo empírico efectuaram-se 1000 simulações.

Contudo, interessa salientar ainda que, para obter uma estimativa suficientemente segura do preço da opção são necessários, não só um número considerável de simulações, mas também que, à semelhança da maioria das implementações da metodologia de Monte Carlo, sejam empregues métodos de redução da variância com o mesmo objectivo. Assim, optou-se por aplicar um procedimento de redução da variância antitético. Tal consiste na criação de um hipotético activo correlacionado de forma perfeitamente negativa com o nosso activo original. A sua implementação implica a simulação de uma variável antitética  $\bar{S}$ , no mesmo momento, para cada um dos passos. Por outras palavras, a evolução antitética é obtida pela substituição da variável normal padrão aleatória  $\varepsilon_i$  por  $-\varepsilon_i$  na equação utilizada na simulação do activo, sendo que ambos os processos têm o mesmo ponto de partida,  $X_0 = \bar{X}_0 = Ln(S_0)$ . O *payoff* da simulação corresponderá à média dos valores da opção de acordo com os dois processos:

$$C_{T,J} = \frac{Max(0, S_{T,J} - X) + Max(0, \bar{S}_{T,J} - X)}{2} \quad (4.18)$$

(b) Simulação de um processo *mean reverting*

A avaliação de um derivado, pelo recurso à técnica de simulação, requer um processo com duas fases:

1º - O preço da energia subjacente é simulado para o momento T;

2º - Determinada a estimativa para o preço à vista (ou do *forward* / futuro, caso seja este o activo subjacente da opção), na maturidade, é comparada com o preço de exercício da opção de forma a obter o seu valor.



A primeira fase do processo engloba simular um processo *mean reverting* com os parâmetros determinados nos pontos anteriores<sup>15</sup>, bem como a simulação de saltos no preço à vista.

Para tal, utiliza-se o modelo simples do tipo *mean reverting* para a evolução do preço à vista pode ser representado pela equação (4.19), em termos do logaritmo natural do preço,  $X = \ln S$ :

$$\partial x = \alpha(\mu - x)\partial t + \sigma \partial Z \quad (4.19)$$

discretizando, tem-se:

$$\Delta x_i = \alpha(\mu - x)\Delta t + \sigma \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (4.20)$$

Consequentemente, para simular a evolução do activo, de acordo com o processo *mean reverting*, deve começar-se por estimar os parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\Delta t$ , à semelhança do que se descreveu em pontos anteriores<sup>16</sup>. Em seguida são

<sup>15</sup> Na realidade, foram estimados novos parâmetros com base nos dados correspondentes ao período de 1 de Abril de 2001 a 31 de Março de 2002. Tal facto deve-se, em primeiro lugar, à observação dos dados da amostra, onde se verifica que o preço médio apresentou uma subida consistente e constante na última fase do período em análise, enviesando, consequentemente, os parâmetros necessários à determinação do valor da opção. Acresce a isto o facto de se pretender avaliar uma opção cuja maturidade é de um ano. Assim, procurou-se um paralelismo entre aquela maturidade e a amostra utilizada para a determinação dos referidos parâmetros.

<sup>16</sup> Vide 4.3.2.1., onde foram estimados os valores daqueles parâmetros para a totalidade do período da amostra.

gerados, repetidamente, números aleatórios,  $\varepsilon_i$ , com distribuição normal padrão, e a partir deles são determinados os novos preços à vista para cada intervalo de tempo da simulação.

Em jeito de súpula, apresentam-se, no quadro abaixo, as novas estimativas dos mencionados parâmetros no período de referência para a avaliação empírica da opção em análise:

**Quadro XII – Parâmetros do processo *Mean reverting* para simulação**

Parâmetro	Valor
$\alpha$	3,4675 <sup>(17)</sup>
$\mu$	3,55185
$\sigma$	0,1976
$\Delta t$	0,05

<sup>17</sup> A disparidade entre o valor deste parâmetro estimado no ponto 4.3.2.1. e a sua estimativa presente nesta parte do trabalho prende-se com o facto de esta ser uma variável dependente da amplitude do período a que se refere, isto é, a estimativa do  $\alpha$  agora apresentada representa a velocidade de reversão para a média do preço à vista da electricidade num período de 18 dias (relativos ao período de cada passo na simulação efectuada).

(c) Simulando saltos no preço à vista

Para simular um processo *mean reverting* com saltos é necessário recorrer ao modelo de base com aquelas características definidas por Clewlow e Strickland(2000), já anteriormente referido, e assim descrito:

$$\partial x = \alpha(\mu - x)\partial t + \sigma \partial Z + \kappa \partial q \quad (4.21)$$

onde  $x$  representa, uma vez mais, o logaritmo natural dos preços à vista e  $k$  a amplitude do salto proporcional, de acordo com uma distribuição de Poisson.

Este processo, onde se introduzem saltos na dinâmica dos preços à vista, pode ser discretizado da seguinte forma:

$$\Delta x_i = \alpha(\mu - x)\Delta t + \sigma \varepsilon_{1i} \sqrt{\Delta t} + (\bar{\kappa} + \bar{\gamma} \varepsilon_{2i})(u_i < \phi \Delta t) \quad (4.22)$$

onde  $\varepsilon_{1i}$  e  $\varepsilon_{2i}$  são variáveis aleatórias normalmente distribuídas e independentes e  $u_i$  é uma variável aleatória uniforme (0,1), igualmente independente. O termo  $(u_i < \phi * \Delta t)$  assume o valor um se a condição for verdadeira e zero se falsa. Isto permite gerar saltos aleatórios de acordo com a sua frequência média anual  $\phi$ . Quando ocorre um salto, a sua dimensão é igual à amplitude média dos saltos,  $\bar{\kappa}$ , acrescida de um montante aleatório normalmente distribuído,  $\varepsilon_{2i}$ , com desvio padrão  $\gamma$ .

A introdução deste novo factor explicativo para a dinâmica dos preços à vista – a existência de saltos – obriga a uma nova estimativa dos parâmetros relativos

ao processo *mean reverting*, bem como, das variáveis relativas a esta nova característica. Estes parâmetros estimados são apresentados no quadro abaixo:

**Quadro XIII – Parâmetros do processo *Mean reverting* com saltos para simulação**

Parâmetro	Valor
$\alpha$	5,742598
$\mu$	3,4065
$\sigma$	0,1722
$\Delta t$	0,1
k	0,234817819
$\gamma$	0,732739052

Uma vez determinados os referidos parâmetros do modelo, são geradas as três variáveis aleatórias  $\varepsilon_{1i}$ ,  $\varepsilon_{2i}$  e  $u_i$  que permitem obter o preço à vista simulado para cada intervalo de tempo, e, conseqüentemente, o valor da opção.

(d) Apresentação do trabalho empírico

Tal como já foi referido, objectiva-se a avaliação de duas opções, sendo que para tal foram efectuadas duas simulações, respectivamente:

- uma com vista à determinação do preço de uma opção de compra europeia sobre um *forward* de energia eléctrica (utilizando um processo *mean reverting* simples);

- outra para avaliar uma opção de compra europeia sobre o activo à vista (utilizando um processo *mean reverting* com saltos).

Assim, aplicar-se-à, em primeiro lugar, a simulação de Monte Carlo para avaliar uma opção de compra europeia, com vencimento a seis meses ( $T=0,5$ ), sobre um contrato *forward* com maturidade a um ano ( $s=1$ ) e com preço de exercício de 34 cêntimos de euro por Mw/h ( $X=34$ ).

Para obter a estimativa do preço da *call*,  $C$ , basta que se determine a média dos *payoffs* simulados para a opção à data de vencimento, devidamente descontados à taxa de juro sem risco.

Efectivamente, pretende-se avaliar uma opção *at-the-money* sobre um *forward*, (implicando um  $X=34$ ), cujas maturidades são de seis meses para a opção e um ano para o *forward*. Para tal, assumem-se dez passos, logo  $\Delta t=0,05$ , e taxa de juro constante a 5%.

A estimativa da simulação de Monte Carlo para o valor da *call* é de 0,94 com *standard error* de 0,00085:

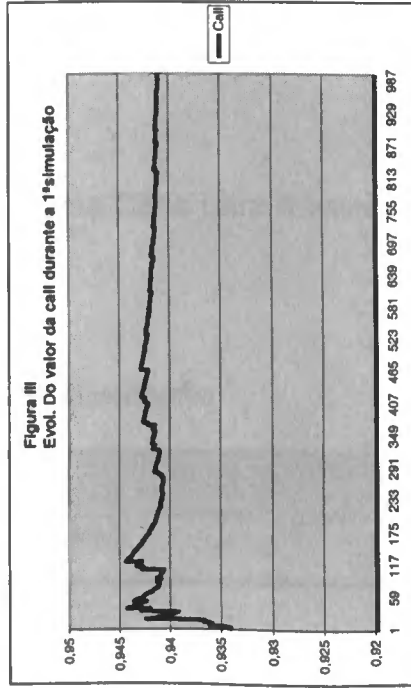
#### Quadro XIV – Resultados da 1ª simulação

Valor da <i>call</i>	<i>Standard Error</i> (SE)
0,941060352	0,000845122

No quadro XV é apresentada uma tabela representativa de uma simulação. É apresentada, também, uma figura que apresenta a convergência do valor da opção ao longo das simulações efectuadas. No ponto seguinte, serão comparados os resultados obtidos nesta primeira simulação, com o valor da *call* em análise quando determinado a partir de duas fórmulas analíticas.

### Quadro XV – Simulação de Monte Carlo – opção sobre *forward*<sup>18</sup>

M	1000										Resumo			
t	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5			
e	0,072239	0,829841	0,862008	-0,63653	-0,92319	1,111189	-1,20118	-1,55889	0,711325	0,638406				
-e	-0,07224	-0,82984	-0,86201	0,636531	0,923192	-1,11119	1,201179	1,558892	-0,71132	-0,63841				
xt	3,535145	3,541233	3,57974	3,612992	3,574267	3,529589	3,582546	3,524151	3,460074	3,507415	3,543327			
xt bar	3,535145	3,53485	3,501131	3,471837	3,513834	3,561216	3,510495	3,570738	3,636343	3,590264	3,555396			
											St	F(t;s)	CT	
												34,58178	34,92043	0,920427
												35,00169	34,99495	0,994946



<sup>18</sup> A primeira linha da tabela da simulação mostra o tempo, nas segunda e terceira linhas temos uma variável normal padrão, gerada aleatoriamente, bem como a sua inversa, respectivamente. As quarta e quinta linhas apresentam o logaritmo natural do preço à vista da electricidade para cada um dos momentos simulados, bem como o seu antitético, nos termos atrás referidos, respectivamente. Na maturidade da opção é apresentado o preço à vista, representado por ST bem como o preço do forward e avaliado o payoff da opção, CT. O valor do forward é estimado de acordo com a equação (4.28).

Efectuou-se uma segunda simulação para avaliar uma opção de compra europeia, com vencimento dentro de um ano ( $T=1$ ), sobre o preço à vista da electricidade, e com preço de exercício de 34 cêntimos de euro por Mw/h ( $X=34$ ).

Nesta segunda simulação utilizou-se como modelo descritivo do comportamento dos preços um processo *mean reverting* com inclusão de saltos.

Avaliou-se uma opção *at-the-money* sobre o activo à vista (implicando um  $X=34$ ), cuja maturidade é de um ano. Assumem-se dez passos, logo  $\Delta t=0,1$ , e taxa de juro constante a 5%.

A estimativa da simulação de Monte Carlo para o valor da *call* é de 1,155 com *standard error* de 0,1957:

#### Quadro XVI – Resultados da 2ª simulação

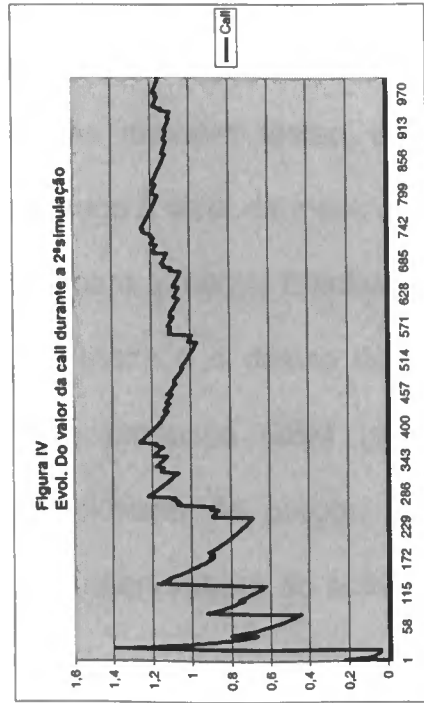
Valor da <i>call</i>	<i>Standard Error</i> (SE)
1,155174082	0,195697297

No quadro XVII é apresentada uma tabela representativa de uma simulação. É apresentada, uma vez mais, outra figura que apresenta a convergência do valor da opção ao longo das simulações efectuadas para a avaliação desta segunda opção.

Esta segunda opção apresenta um preço mais elevado, na medida em que a introdução da hipótese de saltos na dinâmica do preço à vista acrescenta risco aquele activo.

### Quadro XVII – Simulação de Monte Carlo – opção sobre activo à vista<sup>19</sup>

M	3										Resumo		
t	0	0,1	0,2	0,3	0,34	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	St	CT
$\epsilon_1$		-0,32699	-0,37024	1,342642	-0,08528	-0,18616	-0,51321	1,972212	0,865673	2,375655	-0,6549067	34,69461	0,694606
$\epsilon_2$		-0,44077	-1,36599	1,992958	-0,56649	0,086129	-0,23426	2,835368	1,251979	0,880907	1,3321642	3,5465842	0,7989441
ul		0,943968	0,335673	0,1489	0,909574	0,029939	0,951567	0,369335	0,97586	0,85342	0,7989441	3,638382	0,97586
jump		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3,60346	0
xt bar	3,535145	3,485617	3,448644	3,488242	3,461487	3,736459	3,621957	3,636033	3,60346	3,638382	3,5465842	34,69461	0,694606



<sup>19</sup> A primeira linha da tabela da simulação mostra o tempo, nas segunda e terceira linhas temos duas variáveis normal padrão, geradas aleatoriamente. A quarta linha apresenta uma variável uniforme (0,1) gerada também aleatoriamente. A penúltima linha analisa a condição  $(u_i < \phi * \Delta t)$  que assume o valor um se for verdadeira e zero se falsa. A última linha apresenta o preço à vista, simulado em cada passo, obtido de acordo com a equação (4.22).

## 4.4.2 Apresentação dos resultados

Simulado o comportamento do activo à vista subjacente à opção em análise, bem como os valores daí resultantes para os seus direitos contingentes (quer o *forward* quer a opção), interessa validar os resultados obtidos recorrendo a uma comparação dos mesmos com dois modelos de solução analítica para a avaliação de opções – Black (1976) baseado num processo GBM e Clewlow e Strickland (1999a) baseado em Schwartz(1997), cuja base é um processo *mean reverting*.

Pretende-se assim, não só comparar os valores obtidos na simulação com os resultantes nos referidos modelos, mas também testar, uma vez mais, a hipótese de que o comportamento do preço à vista da electricidade ser melhor descrito por um processo com reversão para a média. Efectivamente, à medida que aumenta a maturidade da opção, maior é o desvio do preço do direito contingente, avaliado com base num processo GBM (que pressupõe a existência de uma tendência de crescimento do preço), face à avaliação baseada num processo OU (onde o comportamento do activo apresenta uma tendência para reverter para a média).

## (a) Modelo de Black (1976)

O processo mais vulgarmente utilizado para descrever a dinâmica do preço à vista de uma *commodity* é descrito pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\partial S = (r - \delta)S\partial t + \sigma S\partial Z \quad (4.23)$$

Esta equação apresenta o processo de avaliação neutro ao risco do preço à vista da energia,  $S$ , onde  $r$  e  $\delta$  são constantes, representando respectivamente a taxa de juro e a *convenience yield*.  $\sigma$  é a volatilidade do preço do activo medida pelo desvio padrão.

Black (1976) demonstra que, de acordo com o processo acima descrito, o preço do futuro, equacionado em função do preço à vista na maturidade  $s$ , satisfaz a relação do *cost-of-carry*:

$$F(t, T) = S e^{(r - \delta)(T-t)} \quad (4.24)$$

Adicionalmente, uma aplicação do lema de Itô pode ser utilizada para demonstrar que a volatilidade dos preços dos futuros é constante e igual à volatilidade do preço à vista:

$$\sigma_{F(t,T)} = \sigma \quad (4.25)$$

onde  $\sigma_{F(t,T)}$  é a volatilidade do preço do futuro com maturidade em  $s$ .

Black (1976) desenvolveu ainda uma fórmula fechada para avaliar opções europeias sobre futuros ( $X$  representa o preço de exercício da opção, avaliada no momento  $t$ , com maturidade no momento  $T$ , sobre um contrato de futuros cuja maturidade é  $s$ ):

$$C(t, T, s) = e^{-r(T-t)} \left[ F(t, s) N(h) - X N(h - \sigma\sqrt{T-t}) \right] \quad (4.26)$$



onde,

$$h = \frac{\ln\left(\frac{F(t,s)}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

(b) Modelo de Clewlow e Strickland (1999a) baseado em Schwartz (1997)

Um modelo de factor único mais realista foi introduzido por Schwartz (1997), no qual este assume que os preços à vista seguem um processo *mean reverting*:

$$\partial S(t)/S(t) = \alpha(\mu - \ln S(t))\partial t + \sigma \partial Z \quad (4.27)$$

Assim, aplicando as condições apropriadas a Schwartz (1997), é possível obter a formulação analítica do preço de um *forward* com maturidade em  $s$  descrita pela equação:

$$F(t, T) = \exp\left(e^{-\alpha(T-t)} \ln S + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) * \mu + \frac{\sigma^2}{4 * \alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)})\right) \quad (4.28)$$

Clewlow e Strickland (1999a) demonstram que, para o modelo de factor único de Schwartz (1997), o preço da *call* europeia com maturidade em  $T$  sobre um contrato de futuros com vencimento em  $s$  pode ser obtido através da equação:

$$C(t, T, s) = e^{-r(T-t)} \left[ F(t, s) N(h) - X N(h - \sqrt{w}) \right] \quad (4.29)$$

com,

$$h = \frac{\ln\left(\frac{F(t,s)}{X}\right) + \frac{1}{2} w}{\sqrt{w}}$$

$$w = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left( e^{-2\alpha(s-T)} - e^{-2\alpha(s-t)} \right)$$

(c) Comparação dos preços da opção

Apresentados os modelos com formulação analítica para avaliação da opção de compra europeia sobre um *forward*, procede-se à comparação dos resultados obtidos face à simulação descrita.

No quadro, abaixo apresentado, resume-se o preço do referido direito contingente para os diversos modelos em comparação:

**Quadro XVIII – Preço da opção de compra sobre o *forward***

	Valor
Monte Carlo	0,941060352 <sup>(20)</sup>
Clewlöw e Strickland	0,895832
Black	8,305749

Da análise dos dados apresentados, constata-se que:

- o valor da opção resultante do modelo de Clewlöw e Strickland (1999a) não é significativamente distante do obtido através da utilização da simulação de Monte Carlo. De facto, ambos pressupõem um processo *mean reverting* para

<sup>20</sup> Tal como já foi referido, a estimativa obtida pela simulação de Monte Carlo para esta opção apresenta um SE de 0,0008.

descrever a dinâmica do preço à vista da electricidade, sendo o valor dos parâmetros associados ao referido processo o mesmo para as duas metodologias;

- o modelo de Black (1976) produz um preço da opção fortemente distante, cerca de oito a nove vezes superior, das outras duas metodologias. Tal deve-se ao facto deste modelo assumir um processo GBM, que produz uma estimativa do preço do *forward*, na maturidade da opção, irrealisticamente elevado. De facto, os preços da electricidade tendem a reverter para uma média de longo prazo, relativamente estável, sendo perturbados apenas pela possibilidade de existência de saltos. Assim sendo, este activo comporta-se de forma estacionária, incongruente com um processo GBM, com tendência crescente.

### 4.5 – Gestão do Risco

Os derivados são, em si, uma forma relativamente acessível dos agentes que laboram no mercado de energia eléctrica, se protegerem do risco contido naquele activo e já anteriormente analisado.

Contudo, a transacção de opções sem qualquer posição no activo de base para cobrir, levam à detenção do risco naquelas contido. Assim, nestes casos, a melhor forma de gerir aquele risco, passa pela construção de carteiras com posições inversas sobre a mesma opção para anular o seu risco – a compra de opções de compra, acompanhada pela venda de opções do mesmo tipo.

No entanto, este modelo de cobertura pode não ser executável, na medida em que tal não seja lucrativo. Nestes casos, pode-se, alternativamente, construir uma opção sintética cujo resultado seja o mesmo.

Desta forma, interessa conhecer a sensibilidade do valor da opção às diversas variáveis, cuja variação tem impacto no mesmo. Este impacto é medido por uma família de indicadores a que se dá o nome de GREGOS:

#### a) DELTA

O delta de uma opção representa o impacto no valor dessa opção, resultante de uma pequena variação no preço do activo subjacente.

Este indicador apresenta o número de unidades do activo subjacente a transaccionar numa carteira, conjuntamente com a respectiva opção, que permite anular os efeitos de uma pequena variação no preço do mesmo. A esta estratégia dá-se o nome de *delta hedging*<sup>21</sup>.

Assim, no caso de uma opção de compra com o modelo de Clewlow e Strickland (1999a) tem-se<sup>22</sup>:

$$\frac{\partial C(t, F, X, T, s)}{\partial F(t, s)} = e^{-rT} N(h) \quad (4.30)$$

<sup>21</sup> O delta hedging de uma opção envolve a posição em (- Δ) unidades do activo subjacente.

Por exemplo, para construir esta estratégia quando se detém uma posição curta (venda) sobre uma opção de compra deve-se adquirir Δ unidades do activo subjacente.

<sup>22</sup> Vide equação (4.29).

Na análise empírica efectuada obteve-se um delta de 0,56, o que significa que uma variação de 1% no preço do *forward* provoca um acréscimo de 0,56% no preço da opção. A proximidade deste valor de 0,5 indica uma opção *at-the-money*. Efectivamente, o delta tende a variar entre zero (para opções *deep-out-of-the-money*) e um (quando a opção se encontra *deep-in-the-money*).

#### b) GAMMA

Este indicador mede a sensibilidade do delta a variações no preço do activo subjacente. Efectivamente, o *Delta Hedging* apenas se apresenta eficiente para variações muito reduzidas do preço do activo de base. Quando as alterações daquele preço apresentam maior amplitude, a estratégia de *hedging* baseada no delta revela-se ineficiente, na medida em que este último indicador se altera, provocando um desajuste entre a variação do activo subjacente e a cobertura utilizada pela detenção de (- Δ) unidades do activo subjacente.

Assim, é fundamental conhecer e analisar o Gamma da opção, enquanto medida de impacto naquela estratégia. Este indicador corresponde à segunda derivada parcial do valor da opção em ordem ao preço do activo subjacente, definida nos seguintes termos:

$$\frac{\partial^2 C(t, F, X, T, s)}{\partial F^2(t, s)} = \frac{e^{-rT} n(h)}{F(t, s)\sqrt{w}} \quad (4.31)$$

onde  $n(\cdot)$  representa a função densidade de uma distribuição normal padrão.

Para a análise efectuada foi obtido um gamma de 0,2, isto é, uma variação de 1% no preço do *forward* provoca um aumento de 0,2% no delta da opção. Um gamma muito elevado, ao invés de um de valor mais reduzido, obriga a uma revisão mais frequente da estratégia de *Delta Hedging*.

Finalmente, a construção de uma carteira neutra (coberta) em relação ao Gamma envolve a transacção inversa noutra opção com Gamma igual, dado que o activo subjacente (quer seja o activo à vista quer seja um futuro sobre este) apresenta o valor 0 para aquele grego.

### c) THETA

O Theta de uma opção corresponde à taxa de variação do preço da opção à medida que o tempo para o vencimento (maturidade) diminui.

Esta é uma variável que, pela sua natureza, não faz sentido cobrir. Contudo deve ser objecto de análise enquanto medida descritiva para a análise da evolução da carteira.

O Theta é dado por:

$$\frac{\partial C(t, F, X, T, s)}{\partial t} = \frac{C(t, s + \Delta t) - C(t, s - \Delta t)}{2\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} \quad (4.32)$$

Este indicador tem como referência o ano pelo que, há interesse em determinar um theta equivalente com referência ao dia, bastando para tal dividir o valor obtido pelo número de dias de transacção.

Para a opção em análise foi obtido um theta diário de (-0,0034), isto é, a opção vale menos 0,34% por cada dia diminuído à sua maturidade.

d) VEGA

O vega de um *portfolio* corresponde à taxa de variação do preço da opção para uma variação pequena da volatilidade do activo subjacente.

Este indicador corresponde à derivada parcial do valor da opção relativa à volatilidade, isto é:

$$\frac{\partial C(t, F, X, T, s)}{\partial \sigma} = \frac{C(\sigma_F + \Delta_{\sigma_F}) - C(\sigma_F - \Delta_{\sigma_F})}{2\Delta_{\sigma_F}} \Bigg|_{\Delta_{\sigma_F} \rightarrow 0} \quad (4.33)$$

O Vega de uma opção europeia é sempre positivo, sendo que um valor elevado do mesmo representa uma elevada sensibilidade do preço da opção a variações pequenas da volatilidade do activo subjacente.

Para a opção de compra sobre um forward em análise foi obtido um vega de 0,87, representando uma sensibilidade relativamente forte do valor daquela opção a variações na volatilidade do forward.

e) RHO

O Rho mede a sensibilidade do valor da opção face a variações na taxa de juro, e pode ser determinado da seguinte forma:

$$\frac{\partial C(t, F, X, T, s)}{\partial r} = \frac{C(r + \Delta_r) - C(r - \Delta_r)}{2\Delta_r} \Bigg|_{\Delta_r \rightarrow 0} \quad (4.34)$$

Relativamente ao mercado de derivados sobre energia eléctrica, é geralmente aceite que esta variável tem pouco impacto sobre o valor das opções. Tal facto é justificável, economicamente, lembrando que o activo em análise não é armazenável pelo que se torna impossível avaliar o impacto da taxa de juro sobre uma estratégia de detenção (ou venda a descoberto) do activo subjacente.

Assim, foi obtido um Rho de (-0,45) para a opção em análise, consistente com a literatura existente. De facto, face a outras opções sobre activos financeiros, verifica-se que este indicador se apresenta bastante reduzido. Dele se conclui que um aumento (absurdo e exagerado) de 1% na taxa de juro provoca uma redução de apenas 0,0045%<sup>23</sup> no preço da opção.

f) ALFA

Aos tradicionais gregos acima apresentados acrescenta-se a análise da sensibilidade do preço da opção a variações de outra variável com impacto no mesmo – o coeficiente  $\alpha$  de velocidade de reversão do preço do activo de base para a sua média de longo prazo.

Esta medida de sensibilidade pode ser sistematizada da seguinte forma:

$$\frac{\partial C(t, F, X, T, s)}{\partial \alpha} = \frac{C(\alpha + \Delta_\alpha) - C(\alpha - \Delta_\alpha)}{2\Delta_\alpha} \Big|_{\Delta_\alpha \rightarrow 0} \quad (4.35)$$

<sup>23</sup> Uma alteração de 1% (0,01) na taxa (p. Exº de 5% para 6%), provoca uma alteração no preço da opção de  $0,01 \cdot 0,45 = 0,0045$ .

Este “grego” pode revestir-se de particular interesse nos períodos de maior e mais prolongado desequilíbrio entre a procura e a oferta no mercado<sup>24</sup>, na medida em que a capacidade de correcção do preço diminui, levando a uma velocidade de reversão para a média inferior que provocará um aumento do preço da opção.

Na análise empírica efectuada foi determinado um valor para este indicador de (-0,46), representando uma sensibilidade não desprezível do preço da opção a variações no coeficiente de reversão do preço do activo subjacente para a sua média de longo prazo.

Em síntese, apresenta-se no quadro abaixo os valores obtidos para os gregos acima analisados relativamente à opção de compra de estilo europeu sobre em *forward* de energia eléctrica:

#### Quadro XIX – GREGOS

GREGO	Valor
DELTA	0,55942247
GAMMA	0,20009242
THETA	-1,248993
VEGA	0,865984
RHO	-0,447916
ALFA	-0,459161

<sup>24</sup> Nomeadamente quando a procura excede a oferta num valor reduzido que inviabiliza um aumento desta última devido a custos de start-up ou expansão de capacidade elevados.

## Capítulo 5 – Conclusões e pistas para investigação futura

---

Este ponto pretende apresentar as principais conclusões da dissertação, bem como eventuais pistas para melhorar a investigação em análise no futuro. São ainda apresentadas as limitações do presente estudo.

---

Notícias recentes dão conta dos avanços e retrocessos na construção do verdadeiro mercado ibérico de electricidade – MIBEL. Tal mercado tem uma importância fulcral para o desenvolvimento das duas economias – portuguesa e espanhola. De facto, desde a desregulamentação encetada nos anos 90, várias têm sido as regiões a promover a construção de *pools* com vista ao aumento da competitividade, quer do lado da oferta, quer do lado da procura, bem como a uma melhor gestão do risco associada à livre transacção da energia eléctrica. É neste contexto que esta dissertação pode ajudar a melhor compreender, por um lado, a dinâmica dos preços à vista desta energia, e por outro, promover uma melhor compreensão dos instrumentos derivados sobre electricidade, para que os seus mercados se tornem mais líquidos e, portanto, mais fidedignos.

Concomitantemente, as grandes limitações deste estudo residem, por um lado, na “juventude” do mercado em análise – OMEL, com consequências ao nível da fiabilidade dos parâmetros estimados, por outro, embora se objective avaliar os instrumentos derivados da energia eléctrica no mercado espanhol, a inexistência de contratos de opções transaccionados em bolsa, não permite validar os resultados empíricos obtidos.

No que respeita às principais conclusões a retirar do estudo aqui apresentado, enumeram-se:

1º - Demonstra-se que os preços da electricidade no mercado espanhol, no período entre 1 de Janeiro de 1999 e 31 de Março de 2002, apresentam estacionaridade e, conseqüentemente, serão melhor descritos por um processo com reversão para a média. Efectivamente, os dados analisados permitem concluir que a energia eléctrica tende a reverter a um preço de longo prazo num período médio de sensivelmente sete dias.

2º - Nas séries em análise foi possível detectar sazonalidade estatisticamente significativa que permite afirmar que os preços da energia eléctrica são mais elevados nos dias úteis do que ao fim-de-semana / feriados. Tal conclusão é coerente com o contexto económico, dado que, nos dias úteis o funcionamento de empresas e instituições permite elevar a procura daquela energia e, conseqüentemente, o seu preço.

3º - Foram apresentados parâmetros estatisticamente significativos relativos a um padrão *jump diffusion* que permitem concluir que o preço à vista da electricidade no mercado espanhol, para o período em análise, apresenta um número médio de sete a oito saltos por ano, sendo a amplitude média desses saltos positiva. Tal característica é concordante com a literatura relevante analisada que propõe que os saltos positivos, isto é, acima do nível médio, são mais frequentes do que os de sinal negativo (ou pelo menos de maior amplitude). Tal é coerente com a assimetria positiva detectada nesta amostra, como noutras estudadas e referidas nos estudos existentes, relativa ao mercado OMEL.

4º - A determinação de parâmetros estatisticamente relevantes para um processo *mean reverting jump diffusion*, apontam para a utilização de modelos que assumam essas características para avaliar direitos contingentes (nomeadamente, opções), em detrimento dos mais clássicos utilizados na avaliação de opções sobre activos financeiros. Efectivamente, embora os agentes destes jovens mercados continuem a utilizar o modelo analítico de Black, Scholes e Merton para avaliar opções sobre energia eléctrica, esta dissertação apresenta evidência empírica de que tal modelo apresenta valores absurdamente elevados na avaliação dos referidos derivados. Assim, as características do activo subjacente exigem modelos específicos que incluam tais atributos de que é exemplo Clewlow e Strickland (1999a).

5º - Uma análise dos gregos, com vista à gestão do risco associado à transacção de opções, permite identificar, de forma corente com a revisão da literatura, que aqueles derivados apresentam reduzida sensibilidade à evolução da taxa de juro. Já no que concerne à evolução quer do preço do activo subjacente quer da sua volatilidade, aquele derivado apresenta alguma exposição às suas variações que devem ser monitorizadas e devidamente cobertas. Acresce "neste mercado um risco associado à capacidade dos agentes de absorverem os choques verificados no preço do activo. Assim, é necessário analisar, igualmente, a sensibilidade do preço da opção a variações no coeficiente de reversão para a média, sendo a relação entre estas duas variáveis de natureza inversa, isto é, uma diminuição nesta última provoca um aumento de preço da opção.

Finalmente, resta salientar que muitas são as pistas para investigação futura resultantes da análise desta dissertação.

Ficaram por testar várias características atribuídas ao comportamento do preço da electricidade, nomeadamente a existência de volatilidade estocástica. No estudo da Sazonalidade, não foram aprofundados outros padrões determinísticos do activo à vista, nomeadamente a nível intra-diário e no que concerne aos efeitos resultantes das condições climatéricas, isto é, o comportamento das séries no Inverno face ao verão.

Por outro lado, o presente estudo pode ser estendido com vista à separação da amostra tendo presente os preços nos períodos *on-peak* e *off-peak*. Efectivamente, a literatura prévia refere a existência de parâmetros distintos para aqueles dois períodos.

Por último, várias foram as pistas, para além das apresentadas neste capítulo, que foram referidas ao longo do texto como presentes na literatura analisada e que poderão ser alvo de estudo em investigações futuras.

## Bibliografia

Black, F. e Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, pp. 637-659.

Black, F. (1976) The pricing of commodity contracts, *Journal of Financial Economics*, vol. 3, pp. 637-659.

Bhanot, K. (2000) Behaviour of power prices: implications for the valuation and hedging of financial contracts, *Journal of Risk*, vol 2, nº 3, pp. 43-62.

Boyle, P. (1977) Options: a Monte Carlo approach, *Journal of Financial Economics*, nº 4, pp. 323-338.

Brennan, M. e Schwartz, E. (1985) Evaluating natural resource investments, *Journal of Business*, 58, 2 (April), pp.135-157.

Clelow L, e Strickland, C. (1999a) Valuing energy options in a one-factor model fitted to forward prices, *working paper*, University of Technology, Sydney.

Clelow L, e Strickland, C. (1999b) A multi-factor model for energy derivatives risk management, *working paper*, University of Technology, Sydney.

Clelow, L. e Strickland, C. (2000) *Energy derivatives: Pricing and Risk management*, Lacima Publications, London.

Cortazar, G. e Schwartz, E. (1994) The valuation of commodity contingent claims, *The Journal of Derivatives*, vol 1, No 4, pp 27–39.

De Vany, A. e Walls, W. (1999) Cointegration analysis of spot electricity prices: insights on transmission efficiency in Western US, *Energy Economics*, 21, pp.435-488.

Deng, S. (1999) Stochastic models of energy commodity prices and their applications: mean reversion with jumps and spikes, *working paper*, Georgia Institute of Technology.

Deng, S. (2000) Pricing electricity derivatives under alternative stochastic spot price models, *proceedings of the 33<sup>rd</sup> Hawaii International Conference on System Sciences*.

Dixit, A. e Pindyck, R. (1994) *Investment under uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey."

Duffie, D., Gray, S. e Hoang, P. (1998) Volatility in energy prices, *Managing Energy Price Risk*, 2<sup>nd</sup> edition, Risk Publications.

Escribano, A., Peña, J.I. e Villaplana, P. (2002) Modelling electricity prices: international evidence, *working paper*, Universidad Carlos III, Madrid.

Gibson, R. e Schwartz, E. (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims, *Journal of Finance*, vol. 45, nº3, pp. 959-976.

Hilliard, J. E. e Reis, J. (1998) Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33, nº 1, pp. 61-86.

Hull, J. (2003) *Options, Futures, and other Derivatives*, Prentice Hall, 5<sup>Th</sup> edition, New Jersey.

Johnson, B. e Barz, G. (1999) Selecting stochastic process for modeling electricity prices, *Energy Modeling and Management of Uncertainty*, Risk Publications.

Joy, C. (1998) Targeting physical power, *Energy Power Risk Management*, Electricity Report, vol. 3, nº 5, September, pp 18-20.

Karsen, K. F. e Husby, E. (2000) A joint state-space model for electricity spot and futures prices, Norwegian Computing Center, report nº 965.

Knittel, C. e Roberts, M. (2001) An empirical examination of deregulated electricity prices, *UCEI Working Paper-087*,  
<http://www.ucei.berkeley.edu/ucei/pdf/pwp087.pdf>

Lucia, J e Schwartz, E. (2000) Electricity prices and power derivatives: evidence from the Nordic power exchange, *Working Paper*, UCLA.

Merton, R. (1973) Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, spring, pp.141-183.

Merton, R. (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, January-March, pp.125-144.

Schwartz, E. (1997) The stochastic behaviour of commodity prices: implications for valuation and hedging, *Journal of Finance*, vol 52, nº 3, pp 923–973.

Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, nº 5, pp. 177 – 188.

Winsen, J. (1998) Fewer swaps, higher volatility, *Energy Power Risk Management*, Electricity Report, vol. 3, nº 5, September, pp. 14-16.