# Universidade de Lisboa

# Estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas: um estudo no 8.º ano de escolaridade

Artur Jorge de Campos Jesus

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientada pela

Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

coorientado pelo

Professor Doutor Carlos Manuel Ribeiro Albuquerque

2024

# Resumo

O presente relatório resulta da minha intervenção letiva numa turma do 8.º de escolaridade do Colégio Militar. A mesma decorreu no 2.º semestre do ano letivo 2023/2024, ao longo de 12 tempos letivos de 50 minutos. O estudo teve como objetivo compreender as estratégias e dificuldades dos alunos na resolução de sistemas de duas equações do 1.ºgrau a duas incógnitas.

As estratégias de ensino desenvolvidas são de cariz exploratório com discussões coletivas a partir da diversidade de tarefas propostas tendo tido em atenção o contexto real – modelação na construção das mesmas.

Recorri a diferentes recursos tecnológicos, apropriados aos tópicos matemáticos da unidade didática: calculadora, folha de cálculo – *Excel* e um programa de geometria dinâmica – *GeoGebra*. O trabalho desenvolvido em sala de aula foi individual e a pares, procurando promover a cooperação entre alunos, e tirando partido dos momentos de discussão coletiva.

A investigação é de natureza qualitativa com observação direta das aulas que lecionei no âmbito deste estudo. Adotando o papel de observador participante, a informação foi recolhida a partir do registo áudio e vídeo das discussões coletivas das aulas e da recolha das produções dos alunos ao longo da resolução das tarefas matemáticas, quer em papel quer em formato digital.

Da análise dos dados recolhidos podemos reconhecer estratégias que, por exemplo, recorriam às representações matemáticas, revelavam apropriações valiosos dos conceitos matemáticos que estavam a ser trabalhados e estratégias com as quais os alunos se mostravam criativos, mas nem sempre rigorosos. Pude ainda observar estratégias onde as dificuldades associadas eram reveladas na comunicação matemática, oral e escrita e na identificação, resolução e interpretação da representação geométrica e algébrica. Alguns alunos revelavam-se pouco críticos nas suas estratégias e em particular relativamente às respostas que iam obtendo num determinado contexto problemático.

**Palavras-chave:** estratégias; dificuldades; álgebra; sistemas de duas equações; 8.º ano

Abstract

The present report results from my teaching intervention in an 8th-grade class at the Colégio Militar. This took place in the second semester of the 2023/2024 school year, over the course of 12 teaching sessions of 50 minutes each. The study aimed to understand the strategies and difficulties of students in solving systems of two first-degree equations with two variables.

The teaching strategies developed were exploratory, involving collective discussions based on the diversity of tasks proposed, taking into account the real context – modeling in their construction.

I used various technological resources appropriate to the mathematical topics of the teaching unit: calculator, spreadsheet – Excel, and a dynamic geometry program – GeoGebra. The work carried out in the classroom was both individual and in pairs, seeking to promote cooperation among students and taking advantage of moments of collective discussion.

The research is qualitative in nature, with direct observation of the classes I taught as part of this study. Adopting the role of a participant observer, the information was collected from audio and video recordings of the collective class discussions and the collection of students' work during the resolution of mathematical tasks, both on paper and in digital format.

From the analysis of the collected data, we can recognize strategies that, for example, utilized mathematical representations, revealed valuable appropriations of the mathematical concepts being worked on, and strategies with which the students were creative but not always rigorous. I could also observe strategies where the associated difficulties were revealed in mathematical communication, both oral and written, and in the identification, resolution, and interpretation of geometric and algebraic representation. Some students were not very critical of their strategies and, in particular, regarding the answers they were obtaining in a given problematic context.

**Keywords:** strategies; difficulties; algebra; systems of two equations; 8th grade

# Agradecimentos

Começo por agradecer à Professora Doutora Hélia Oliveira pela forma como contribuiu para a minha formação pelo exemplo da sua constante disponibilidade, inteligência e sobretudo a entrega à causa pública naquilo que diz respeito à formação de professores.

Agradeço ao Professor Doutor Carlos Albuquerque a sua preocupada atenção que dedica à nossa formação enquanto futuros professores no contexto deste mestrado ensino.

Agradeço a amabilidade do Colégio Militar, na pessoa da professora Anabela Candeias, em receber os professores estagiários que têm assim a oportunidade de conhecer uma instituição ímpar na atenção que dedica à formação dos seus alunos.

Aos alunos do 8.º ano do Colégio Militar quero agradecer tudo aquilo que pude aprender com eles.

Agradeço a todos os colegas do curso que enriqueceram este percurso de dois anos. Em particular agradeço à minha querida colega de estágio, Maria Cominho, que me acompanhou neste ano mais desafiante, por todo o apoio e trabalho desenvolvido e sobretudo porque soubemos ter a coragem de ser leais um com outro num espírito de verdadeiros colegas.

Profundamente grato à Pi, que aceitou o desafio de tornar possível o improvável.

Profundamente grato à Teresa, a minha querida companheira que me incentivou a fazer este longo percurso e sobretudo pela inspiração que representa a sua extraordinária entrega à escola pública. Enquanto tivermos estes anjos azuis, a escola pública não cairá!

# Conteúdo

# Capítulo 1: Introdução

Neste primeiro capítulo apresento as motivações para a realização do presente estudo assim como o objetivo e as questões de investigação a que me propus responder.

## 1.1 Motivação e pertinência do estudo

A minha intervenção letiva supervisionada, que está na base do presente Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, ocorreu no Colégio Militar, em Lisboa, com uma turma do 8.º ano de escolaridade do 3.º ciclo do Ensino Básico.

A unidade didática na qual se enquadra o estudo incide no tema da Álgebra, tópico Expressões algébricas e equações e nos subtópicos Equações literais e Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas.

Os sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas relacionam aspetos importantes da Matemática como a Geometria, resolução gráfica, e a Álgebra, resolução analítica. A relação Álgebra-Geometria representou historicamente um avanço relevante na Matemática (Escada, 2000) e, nesse sentido, compreender as estratégias e as dificuldades nesta unidade contribuiu para a minha motivação para a realização do estudo de cariz investigativo. Por outro lado, esta unidade representa ainda uma boa oportunidade para promover a comunicação matemática dado o potencial da relação Álgebra-Geometria e, como sabemos, a comunicação matemática constitui-se como uma componente essencial da aula de ensino exploratório (Serrazina, 2018). É, também, uma unidade onde as tarefas podem desempenhar um papel central e dado que nas tarefas o aluno aprende em consequência da atividade que desenvolve e da reflexão que faz sobre elas (Canavarro, 2011), este é, assim, mais um fator motivacional que procura contribuir para refletir sobre o papel das tarefas no ensino exploratório.

Dado o enquadramento da unidade didática no tema da Álgebra, devo ainda referir o fato de os conhecimentos de Álgebra serem essenciais para permitirem o prosseguimento de estudos e possibilitar o acesso a um vasto leque de opções profissionais (Ponte, 2006); parece-me, portanto, que podemos entender a aprendizagem da Álgebra como um direito do aluno. Todavia, a questão é que parece persistir muitas vezes uma visão redutora da Álgebra associada apenas a uma manipulação simbólica. A Álgebra raramente é encarada como uma linguagem viva que promove conexões importantes, mas que, pelo contrário, surge frequentemente como uma linguagem onde as regras surgem como "truques" isolados numa linguagem simbólica sem vida.

## 1.2 Objetivo e questões de investigação

Neste estudo procurei compreender as estratégias e as dificuldades dos alunos do 8.º ano no subtópico sistema de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, procurando responder às questões:

i) Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução de sistemas de duas equações?
ii) Quais as principais dificuldades dos alunos evidenciadas pelos alunos na resolução de sistemas de duas equações?

O estudo decorreu da intervenção letiva da unidade didática indicada, no 2.º semestre do ano letivo 2023/2024, ao longo de 12 tempos letivos de 50 minutos no Colégio Militar, Lisboa.

# Capítulo 2: Enquadramento curricular e didático

O papel central da Álgebra no currículo da Matemática no ensino básico e secundário reflete bem a importante posição enquadrada pelo desenvolvimento histórico da Álgebra e na forma como este contribuiu para o enriquecimento da Matemática como um todo. Historicamente a Álgebra tem vindo a afastar-se das formulações em texto dando lugar a uma linguagem mais simbólica, mais representativa; neste sentido é interessante referir Pedro Nunes no seu *Libro Algebra* onde podemos identificar, seguindo o espírito do seu tempo, uma formulação mais textual na resolução de problemáticas algébricas.

Álgebra é uma tradução latina da palavra árabe, *al-jabr,* referida por volta do ano 825 (BC) pelo matemático Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi.

Importa referir que o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu por três estágios:

i) O retórico verbal que recorria ao texto, à palavra
ii) O sincopado onde se recorria ao uso de abreviações de palavras
iii) O simbólico onde a Álgebra é dotada de um simbolismo próprio onde as letras passam a ser entendidas como incógnitas e variáveis e desenvolve-se a noção de relação e função

A Álgebra surge no Egipto e na Babilónia, mas à Álgebra dos egípcios faltava a sofisticação da Álgebra babilónica mais desenvolvida e diversificada. Por sua vez, a Álgebra grega era mais geométrica que as anteriores. Diofanto, apesar da tradição mais geométrica grega, consegue dar um impulso à Álgebra grega seguindo a Álgebra babilónica e nesse sentido adota uma linguagem sincopada nas questões problemáticas que desenvolve e estuda. Na Europa a Álgebra assume uma linguagem mais simbólica a partir do século XVI, por exemplo, o uso do "=" criado por Robert Recorde (1557) começa, entre outros símbolos, a ser usado. Cardano em 1545 publica o *Ars Magna* e neste sentido dá um salto qualitativo relativamente à Matemática desenvolvida até então. No contexto histórico a Álgebra vai adquirindo, pouco a pouco, uma apresentação mais simbólica, abstrata e formal.

O simbolismo algébrico que permite resolver equações e problemas, identificar e estabelecer relações e generalizações é um aspeto essencial do poder da

Álgebra que segundo Gattegno (1970) é uma linguagem inerente ao pensamento matemático e por isso transversal. Reconhecido o potencial da linguagem simbólica, importa que os alunos o compreendam e se apropriem desse conhecimento.

Todavia importa considerar Kaput (1999) que entende que a Álgebra é ensinada como um conjunto de regras compartimentadas do resto da matemática e separadas da realidade quotidiana dos alunos o que leva a que os alunos não valorizem a importância da matemática e em particular da Álgebra no seu dia-a-dia.

Em Kieran (2006) identificam-se três grupos temáticos que enquadram a investigação na didática da Álgebra:

i) Transição da Aritmética para a Álgebra
ii) Utilização de ferramentas tecnológicas e o foco na representação e generalização
iii) Pensamento algébrico dos alunos no ensino básico

O primeiro ponto concentra a atenção na transição que se faz da Aritmética para a Álgebra, isto é, os alunos realizam trabalho algébrico recorrendo às regras aprendidas na Aritmética. O segundo ponto foca a investigação sobre a utilização da tecnologia no ensino-aprendizagem da Álgebra, tornado os alunos mais ativos na construção do seu conhecimento. O terceiro ponto, que surge na década de 90, foca-se no pensamento algébrico e no seu desenvolvimento envolvendo o recurso a tarefas. Para Kaput (1999), o pensamento algébrico manifesta-se quando, por conjeturas e argumentos, se estabelecem generalizações expressas numa linguagem cada de formalidade crescente. O autor, considera ainda que, os alunos devem ser incentivados a explorar situações aritméticas para que assim possam chegar à formalização de generalizações e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações funcionais.

## 2.1 Pensamento Algébrico

A Álgebra passou a ser entendido como um modo de pensar e neste sentido o pensamento algébrico assume um papel essencial a desenvolver, onde a Álgebra passa a ser mais do que resolver equações e manipular símbolos algébricos. Capacidades estas que devem ser desenvolvidas o mais cedo possível no currículo escolar.

O pensamento algébrico passa a ser interpretado como um aspeto essencial da promoção do ensino da Matemática onde se deve incluir o estudo das estruturas, simbolismo, da modelação e da variação, isto é, promover a compreensão de padrões, relações e funções; representar e analisar situações problemáticas recorrendo aos símbolos algébricos; usar a linguagem da modelação para se compreender relações quantitativas e finalmente promover a análise da variação em diversos contextos.

Os *Princípios e Normas para a Educação Matemática Escolar* NCTM (2007) refere que o pensamento algébrico acessível a todos os alunos é um desafio que se coloca ao ensino da Matemática e, por sua vez, nas Aprendizagens Essenciais refere-se que o pensamento algébrico assume uma importância considerável devendo ser entendido como uma competência a desenvolver o mais cedo no percurso escolar dos alunos. No pensamento algébrico dá-se atenção a objetos concretos e às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstrato (NCTM, 2000).

Como podemos ler em Ponte (2006), este considera que a expressão "pensamento algébrico" é importante do ponto de vista curricular porque ajuda a perceber que a Álgebra envolve uma forma própria de pensar, não se reduzindo à manipulação de símbolos, devendo por isso estar presente em toda a aprendizagem da Matemática. O autor refere ainda que o trabalho a desenvolver com os símbolos deve ser promovido e enriquecido por forma a que o estudo da Álgebra não se reduza à simples manipulação, levando por isso mesmo, à perda de significados importantes. O autor defende para isso que é necessário relacionar a Álgebra com outras áreas da Matemática, como a Modelação. Por sua vez, Mason (2008), refere que o pensamento algébrico facilita a resolução de problemas mais complexos do que os problemas que podem ser resolvidos pela Aritmética.

Se no passado a Álgebra privilegiava as representações simbólicas, atualmente o recurso à tecnologia proporciona outras representações para as relações algébricas e outras formas de operar sobre as mesmas, facto que leva a uma reflexão sobre o próprio conceito de pensamento algébrico. Kieran (1996) diz-nos que o pensamento algébrico pode ser interpretado numa abordagem às situações problemáticas quantitativas, evidenciando os aspetos relacionais das mesmas com recurso a ferramentas que não são necessariamente letras simbólicas.

A natureza do pensamento algébrico depende da experiência matemática dos alunos e num nível mais avançado, o raciocínio algébrico revela-se através de expressões simbólicas em vez de números. Os alunos que ainda não dominam as notações algébricas, as formas de pensamento mais geral sobre números, operações e notações, podem ser consideradas algébricas, como por exemplo, o uso do sinal de igual (Kieran, 2007). Pensar algebricamente, envolve assim, o conhecimento de várias formas de representação e implica, também, capacidade de mudança entre diferentes modos de representação, assim como, operar simbolicamente (Schoenfeld, 2008). Em Arcavi (2006), o pensamento algébrico abrange o trabalho com estruturas matemáticas e o uso mais simbólico na resolução de problemas, devendo-se aqui incluir o sentido de símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e manipular de forma criativa símbolos matemáticos. Este autor considera ainda que a rutura entre significados e o formalismo uma das principais dificuldades dos alunos na Matemática. Este investigador opta por escrever sobre *symbol sense,* isto é, sentido do símbolo, dado que os símbolos são os principais instrumentos da Álgebra. Acrescenta que o sentido do símbolo é apenas um caso particular de uma noção mais geral de atribuir sentido, *sense making*. Referir, segundo o autor, que o pensamento algébrico consiste em utilizar símbolos para representar, aplicar procedimentos formais e interpretar num determinado contexto problemático. Por sua vez, o sentido do símbolo, implica não só compreender os símbolos, mas também, ter a capacidade tanto de manipular como de entender expressões simbólicas; o sentido do símbolo, implica, ainda, ser capaz de selecionar e proceder a uma representação simbólica adequada, ter consciência de que os símbolos podem ter várias possibilidades de papéis a desempenhar. Ao selecionar uma possível representação simbólica, é importante, por vezes, reconhecer a insuficiência dessa mesma escolha e ter a capacidade de procurar uma mais adequada, tendo a capacidade de rever o significado dos símbolos ou comparar os resultados obtidos num determinado contexto problemático.

Podemos então dizer que o pensamento algébrico consiste na generalização de ideias matemáticas e na identificação de estruturas. A Álgebra pode ser assim entendida como a linguagem que expressa essas mesmas generalizações. Mason (1996), considera que a generalização pode surgir de diferentes formas e se os professores não promoverem nos alunos a expressão dessas generalizações então o pensamento algébrico não pode ser totalmente desenvolvido. Desta forma, a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico permite mais oportunidades aos alunos no estudo da Matemática e pode também servir para apoiar a transição para uma álgebra mais formal.

No 3.º ciclo e ensino secundário os alunos manifestam, por exemplo, pensamento algébrico quando identificam conexões entre representações algébricas e gráficas como no caso da nossa temática em estudo no âmbito da intervenção letiva supervisionada. O pensamento algébrico promove a que os alunos possam operar de forma mais adequada com quantidades desconhecidas em manifesto contraste som a aritmética que envolve quantidades conhecidas. O foco da Álgebra está no estudo das relações entre quantidades (as variáveis) e na capacidade de representar essas diferentes relações. Referir que existem diferentes abordagens ao desenvolvimento do pensamento algébrico tais como a aritmética generalizada ou o pensamento funcional, segundo Blanton e Kaput (2005). Estas abordagens não são necessariamente disjuntas e em determinado contexto poderão estar intrinsecamente relacionadas. O desenvolvimento do pensamento algébrico associado à aritmética generalizada passa por explorar propriedades e relações. Por exemplo, os alunos reconhecerem o sinal de igual nas equações como uma relação entre quantidades nos diferentes membros permite-lhes exprimir relações e propriedades mais gerais. Por sua vez o pensamento funcional relaciona-se com a análise de padrões, tanto numéricos como geométricos. Este pensamento associa-se também ao conceito de função como variação e relação. O desenvolvimento deste pensamento pode ser promovido, por exemplo, por questões que envolvam "máquina de funções" onde os alunos têm um *input*, a máquina de funções que o trabalha e devolve o *output* num processo relacional.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é importante porque leva os alunos a uma compreensão da Matemática que vai para além dos resultados específicos de cálculos e o uso de procedimentos na aplicação de fórmulas. Podemos dizer, em resumo, que pensamento algébrico consiste na capacidade de generalizar ideias matemáticas, na utilização e interpretação do simbolismo algébrico e na identificação de conexões e estruturas matemáticas.

## 2.2 Representações

As representações matemáticas assumem um papel importante nos documentos curriculares em particular no NCTM (2000), onde se refere que as representações promovem nos alunos a "oportunidade para compreender o poder e a beleza da Matemática e equipá-los para usar representações nas suas vidas pessoais" (p. 364). Ainda a partir do NCTM (2000) podemos dizer que as representações são ferramentas importantes na aprendizagem das ideias matemáticas e possibilitam a comunicação matemática adequada.

Vários autores defendem que as representações contribuem de forma importante para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática (por exemplo Bruner, 1966, NCTM, 2000).

Kaput (1989) diz-nos que as representações e a estrutura de símbolos é fundamental porque a Matemática é inerentemente representacional. Permito-me, a mim próprio, acrescentar que este aspeto inerentemente representacional confere o poder da abstração à Matemática que, por sua vez, se relaciona com o poder de generalizar o que contribui para a sua força.

Gafanhoto (2011) diz-nos da relação entre as tarefas matemáticas e as representações matemáticas. Como sabemos de Ponte (2006) a valorização da representação algébrica no estudo da álgebra, associada a procedimentos sem significado, contribui para os problemas de aprendizagem dos alunos neste domínio. As orientações curriculares para a Matemática, Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) têm vindo a chamar a atenção para que a diversidade de representações seja explorada de forma integrada, isto é, as representações verbais, numéricas, tabulares, gráficas e algébricas como promotoras de uma aprendizagem significativa da Álgebra. Neste ponto é importante referir o papel importante que os diferentes *software* podem desempenhar na promoção da aprendizagem da Álgebra, isto é, programas como o *GeoGebra* podem apoiar as tarefas desenvolvidas pelo professor e nesse sentido potenciar a aprendizagem dos alunos.

Friedleand e Tabach (2001) apresentam-nos quatro formas de representação essenciais ao ensino da Álgebra, acima referidas, e agora com mais detalhe:

i) representação verbal: associada à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados que foram obtidos, dando destaque à conexão da Matemática com outras áreas e com o quotidiano;
ii) representação numérica: é a representação mais natural aos alunos no início do estudo da Álgebra e precede qualquer outra representação;
iii) representação gráfica: relaciona-se mais com uma análise visual e proporciona uma imagem clara aos alunos numa função de variável real;
iv) representação algébrica: efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos e que permite justificar e generalizar.

Ao definir as tarefas para a aula, o professor tem a oportunidade de promover múltiplas representações que dessa forma podem contribuir para uma aprendizagem mais efetiva dos seus alunos de uma Álgebra mais significativa.

Na aprendizagem da Álgebra, o uso das representações mais elementares como sejam as representações pictóricas, numéricas e em linguagem natural são particularmente importantes na resolução de problemas algébricos simples (Koedinger, et al., 2008). Esta estratégia pode revelar-se facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato, por exemplo, na compreensão das equações. Importa ainda referir que o trabalho com vários tipos de representações promove uma melhor aprendizagem pois o recurso a uma única representação destaca apenas um aspeto do conceito matemático em causa, ou seja, quanto maior for o número de perspetivas, melhor será a perceção do conceito matemático em análise (Tripathi, 2008). De acordo com esta autora, existem evidências de que os alunos compreendem melhor os conceitos através de uma variedade de perspetivas e desenvolvem uma melhor flexibilidade no seu raciocínio na promoção de uma mudança entre as várias representações.

Apesar da relevância das representações, importa referir que estas não devem ser promovidas como um fim em si mesmas, mas como ferramentas complementares de comunicação representacional que auxiliam na resolução de problemas, isto é, as representações devem ser usadas para resolver problemas, comunicar e justificar (Greeno

& Hall, 1997). Importa referir que os alunos podem utilizar as representações sem compreenderem de fato o que estão a fazer e, nesse sentido, segundo os mesmos autores, as discussões em sala de aula podem ajudar os alunos a compreenderem melhor as ideias matemáticas associadas às sucessivas representações. No trabalho com as representações, os alunos devem ter a oportunidade de identificar vantagens e desvantagens das representações num determinado contexto problemático.

Vários autores, nomeadamente Ajose (1999), realçam o papel importante das representações visuais no processo de aprendizagem da Matemática. Para o autor, as representações visuais têm três ações na aprendizagem da Matemática: apoiam resultados que são essencialmente simbólicos (por exemplo, o recurso aos Diagramas de Venn), permitem encontrar formas de resolver conflitos entre intuições erradas e soluções corretas (por exemplo, o teste da reta vertical nas funções) e representam uma forma de apoiar os alunos a recuperar conhecimentos que podem passar despercebidos em resoluções mais formais.

Podemos ler em Duval (2011) que a atividade matemática apresenta duas facetas, uma em que se assume o ponto de vista mais matemático e a outra onde se assume o ponto de vista cognitivo. Desta forma, para se descrever a forma como se trabalha e pensa em Matemática é importante considerar que todo o objeto matemático possibilita um vasto leque de diferentes representações, embora seja importante destacar que o objeto não deve ser confundido com as suas possíveis representações.

Desenvolver diferentes perspetivas envolvendo múltiplas representações de um conceito matemático parece ser o caminho mais indicado no ensino da Matemática no sentido de promover aprendizagens mais significativas. Contudo, promover nos alunos o recurso a múltiplas representações matemáticas é um importante desafio que os professores devem ter em consideração.

## 2.3 Comunicação matemática

Desde há muito tempo que os documentos preconizam a comunicação matemática como uma das capacidades importantes a desenvolver pelos alunos. Devemos aqui entender a comunicação matemática na sua expressão oral e escrita associada a um domínio progressivo da linguagem matemática. Ponte (2007) diz-nos que os alunos devem ser capazes de expressar as suas ideias da mesma forma que devem interpretar as ideias dos outros e, desta forma, poderem participar na construção em discussão coletiva do conhecimento matemático.

Em Serrazina (2007) podemos ler que a comunicação matemática é uma componente essencial da aula de ensino exploratório. A comunicação oral é revelante nas discussões coletivas enquanto a comunicação escrita é revelada na realização de registos relativos a uma dada tarefa matemática. Desta forma é importante que estes momentos sejam promovidos pelo professor na sua planificação da aula.

*Os Princípios para Ação* (NCTM, 2017) consideram importante para o desenvolvimento da proficiência matemática a promoção de uma comunicação significativa que tenha por base questões pertinentes que podem ser promovidas pelo professor na dinâmica da discussão coletiva, dado que, desta forma, os alunos constroem uma compreensão compartilhada das ideias matemáticas o que permite uma compreensão mais profunda.

Ainda em Serrazina (2007) podemos ler que no processo de comunicação matemática as representações têm um papel importante no envolvimento dos alunos no discurso coletivo onde as representações visuais como os diagramas podem ser analisados, partilhados e e discutidos permitindo assim que outros possam aceder e discutir o pensamento do colega, aspeto importante naqueles alunos que revelam dificuldades na expressão oral.

## 2.4 Tarefas

Nas orientações curriculares, no ensino da Álgebra, as tarefas devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente.

A escolha de tarefas a trabalhar e o modo como se devem articular assumem um papel essencial no trabalho do professor-investigador. É necessário que o professor consiga envolver os alunos em tarefas de carácter exploratório e investigativo de modo a contribuir para o desenvolvimento das capacidades relacionadas com o pensamento algébrico (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007).

As tarefas, assumem ainda, particular referência nas Aprendizagens Essenciais para o 8.º ano articuladas com o Perfil do Aluno e em particular diz-se que na promoção da aprendizagem da Matemática a experiência matemática dos alunos deve desenrolar-se a partir de tarefas desafiantes (Canavarro et al., 2021).

O ensino que quer valorizar o papel ativo do aluno no processo de construção do seu conhecimento deve privilegiar as tarefas dado que as tarefas podem ser entendidas como um elemento organizador da aprendizagem dos alunos (Ponte, 2014). Desta forma, as tarefas propostas em sala de aula devem ter a capacidade de envolver os alunos na construção do seu próprio conhecimento.

Por outro lado e no seguimento, do parágrafo anterior, as tarefas devem ter a estrutura e a complexidade em atenção ao contexto onde serão trabalhadas pois a escolha da estrutura das tarefas a apresentar são aspetos centrais para a eficiência e natureza do processo ensino-aprendizagem da Matemática (Sullivan et al., 2013).

As tarefas a selecionar devem ter uma natureza diversa com diferentes graus de desafio e que segundo Ponte (2005) as duas dimensões fundamentais das tarefas são: o grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio relaciona-se com a dificuldade da questão e o grau de estrutura varia entre aberta e fechada. Ainda, segundo o autor, uma tarefa fechada é aquela onde a informação é dada e pedida de forma direta e clara enquanto a tarefa aberta comporta um certo grau de interpretação no que é pedido e dado, não direcionado o aluno num determinado sentido como faz a tarefa fechada. Por exemplo, segundo o autor, um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido enquanto um problema é uma tarefa fechada de desafio elevado enquanto uma investigação é uma tarefa aberta e de desafio elevado.

De acordo com NTCM (2017), o essencial é que a tarefa proporcione a oportunidade de o aluno se envolver ativamente, no raciocínio, na atribuição de sentido e no desenvolvimento de uma compreensão mais significativa.

## 2.5 Tecnologia na sala de aula

Importa aqui refletir o papel da tecnologia no contexto da sala de aula e de que modo pode contribuir para a promoção do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. O NCTM (2007) diz-nos que nos programas de ensino da matemática, o recurso às ferramentas tecnológicas deve ser regular, mas com responsabilidade. Na perspetiva da aula de cariz exploratório o recurso à tecnologia pode enriquecer as discussões coletivas. Por exemplo, os alunos podem analisar mais exemplos e formas de representação do que seria possível sem o apoio da tecnologia, o que permite uma investigação em sala de aula mais rica. Esta diversidade de exemplos e representações podem ser discutidas coletivamente onde os alunos podem refletir em conjunto com o professor determinadas estratégias permitindo desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. O NTCM (2007) refere ainda que um dos desafios mais importantes no ensino da Matemática refere-se ao papel que a demonstração e a justificação desempenham em ambientes tecnológicos.

O Princípio de Tecnologia enunciado pelo NTCM (2008) diz-nos que a tecnologia pode ser utilizada nos diferentes anos de escolaridade e em qualquer área do ensino da Matemática e nesse sentido os professores devem recorrer ao uso da tecnologia sempre que oportuno. A tecnologia pode promover uma visualização de ideias mais abstratas uma vez que permite trabalhar com diferentes representações do mesmo objeto matemático e nesse sentido promover um aprofundamento do conhecimento do aluno.

Embora saibamos as vantagens no uso da tecnologia em sala de aula, devo, contudo, chamar a atenção para que esta utilização não deve diminuir o papel do professor e sobretudo, este último deve evitar, que o uso da tecnologia em sala de aula esconda fragilidades nos conhecimentos matemáticos dos alunos pois, por exemplo, no uso do programa GeoGebra, uma coisa é resolver graficamente sistemas de duas equações com o apoio desse programa mas outra, bem diferente, é resolver o mesmo sistema graficamente sem esse apoio. Desta forma importa referir, mais uma vez, que a tecnologia e a teoria devem estar relacionadas e presentes na sala de aula e nesse sentido a tecnologia não deve substituir a compreensão dos conceitos e procedimentos a desenvolver, mas sim promover e potenciar uma aprendizagem mais significativa.

# Capítulo 3: Unidade Didática

A escolha da unidade didática, além das motivações já referidas, teve também em conta a planificação anual da escola cooperante e o calendário académico.

## 3.1 Caraterização da escola cooperante e da turma

Situado em Lisboa, no Largo da Luz, o Colégio Militar (CM) é uma instituição pública de ensino militar. Fundado, em 1803, pelo Marechal António Teixeira Rebelo (1750-1825), procura ser uma referência nacional. Está integrado na orgânica do Exército, tutelado pelo Ministério da Defesa Nacional, seguindo as diretrizes pedagógicas decorrentes do Ministério da Educação. De acordo com o projeto educativo da instituição, o Colégio Militar tem por missão assegurar uma formação sólida através do ensino regular. Ainda de acordo com o documento, o Colégio, enquanto instituição de ensino, visa desenvolver competências para que os alunos adquiram ferramentas que lhes permitam responder às exigências das sociedades atuais.

A prática de ensino supervisionada foi realizada numa turma do 8.º ano de escolaridade. A intervenção letiva contou com o envolvimento dos alunos nas tarefas propostas numa dinâmica favorável à aprendizagem. Os alunos revelaram-se interessados e participativos durante toda a intervenção letiva.

A turma onde foi feito o estudo de cariz investigativo é composta por 21 alunos, 9 raparigas e 12 rapazes em regime de internato e externato. A turma teve classificação de Bom atribuído nas reuniões intercalares pelo Conselho de Turma.

## 3.2 Ancoragem da unidade didática

De acordo com o documento das aprendizagens essenciais (Canavarro et al., 2021) os alunos devem prosseguir o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos, alargando e aprofundando assim o estudo das relações matemáticas.

A unidade didática escolhida surge enquadrada pelo documento das Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) no tema da Álgebra, tópico das Expressões Algébricas e Equações e subtópico dos Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas. Para o conteúdo a lecionar no contexto da experiência de ensino de cariz investigativo o tema da Álgebra contempla 20 tempos de 50 minutos segundo a planificação anual do Colégio Militar. O tema da Álgebra é composto pelo conteúdo dos polinómios, operações com polinómios, equações literais e sistemas de duas equações.

Para o conteúdo a lecionar no contexto da experiência de ensino de cariz investigativo o subtópico sistemas de equações contemplou 12 tempos letivos de 50 minutos.

Os objetivos de aprendizagem para o subtópico sistemas de duas equações de acordo com o documento suprarreferido são:

- Reconhecer sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas.

- Averiguar, algébrica ou geometricamente, se um determinado par ordenado é solução de um dado sistema de equações.

- Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e a geométrica.

- Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação.

- Descrever e explicitar a adequação das estratégias de resolução de problemas que envolvem sistemas de equações.

## 3.3 Estratégia de trabalho e avaliação

Como estratégia procurei aplicar o ensino exploratório, a discussão coletiva, o feedback e a diversidade de tarefas. Procurei desenvolver tarefas que fossem desafiadoras (NTCM, 2017) e diversificadas (Ponte, 2005) na sua natureza (carácter exploratório, investigativo, aberto) assim como na requisição de competências e capacidades relacionadas com diferentes estratégias de resolução e representações matemáticas.

Relativamente ao feedback é importante notar que este é referido como um dos fatores que mais contribuem positivamente para a aprendizagem (Dias & Santos, 2010).

Segundo Canavarro (2011), o ensino exploratório na Matemática deve ser caracterizado pelo fato de os alunos aprenderem através do trabalho sobre as tarefas que permitam o surgimento e a necessidade das ideias matemáticas que à *posteriori* serão sistematizadas em discussões coletivas. Este tipo de ensino pressupõe, assim, que os alunos possam trabalhar tarefas interessantes que permitam construir o conhecimento de uma forma que evidencie a necessidade ou a vantagem de uma determinada ideia, conceito ou procedimento matemático.

O trabalho em sala de aula por parte dos alunos foi desenvolvido de forma individual e a pares; a primeira opção foi privilegiada relativamente à segunda dado que assim foi mais fácil trabalhar no sentido de promover comportamentos mais interventivos e colaborativos numa dinâmica mais investigativa coletivamente. Tive, contudo, em consideração o incentivo à cooperação no contexto de uma avaliação formativa, isto é, os alunos que terminavam as tarefas mais rapidamente teriam a responsabilidade de escolher um ou mais colegas com mais dificuldades para ajudar.

Em termos gerais, a avaliação formativa tem como objetivo aspetos qualitativos da aprendizagem e não quantitativos, fornecendo dados que permitem adequar o ensino às dificuldades dos alunos (Lopes & Silva, 2012). A avaliação formativa ancorada em tarefas e enquadrada pela importância da Álgebra na promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico assume neste trabalho investigativo um papel importante. Ainda no contexto da avaliação formativa, fez-se a correção oral coletiva das tarefas e tive em atenção o questionar, isto é, era importante que os alunos se sentissem incentivados a perguntar para que assim, em permanente discussão coletiva, pudéssemos contruir o conhecimento: as perguntas devem voltar à sala de aula como um dos elementos centrais.

Recorri aos recursos tecnológicos *GeoGebra* e folha de cálculo *Excel* no sentido de explorar relações e representações num ambiente de geometria dinâmica assim como favorecer aprendizagens mais significativas uma vez que as ferramentas tecnológicas favorecem e ampliam a experiência matemática (Correia, 2022).

## 3.4 Aulas lecionadas

Na tabela seguinte (Tabela 3) apresento a planificação da unidade, com as datas das aulas, a duração das mesmas onde cada tempo equivale a 50 minutos, os objetivos de ensino e os recursos utilizados.

**Tabela 3:** Planificação da unidade didática

| Aulas | Objetivos de aprendizagem | Tarefas e outros recursos |
|---|---|---|
| **Aula 1**<br>6 de março<br>(2 tempos) | • Reconhecer fórmulas de outras áreas científicas e do contexto da Matemática, como equações literais, estabelecendo conexões com outras áreas do saber.<br>• Resolver equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas. | Tarefa 1:<br>*Equações Literais*<br>Parte 1<br>Folha de cálculo<br>*Excel* |
| **Aula 2**<br>7 de março<br>(1 tempo) | • Reconhecer e resolver equações literais do 1.º grau, com duas incógnitas em ordem a uma delas. | Tarefa 1:<br>*Equações Literais*<br>Parte 2 |
| **Aula 3**<br>8 de março<br>(1 tempo) | • Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. | Tarefa 2:<br>*No cinema* |
| **Aula 4**<br>13 de março<br>(2 tempos) | • Resolver problemas que envolvam sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. | Tarefa 3:<br>*Introdução ao método da substituição* |

| | | |
|---|---|---|
| | • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo ao método da substituição. | |
| **Aula 5**<br>20 de março<br>(2 tempos) | • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia. | Tarefa 4:<br>*Resolução gráfica e classificação de sistemas.* |
| **Aula 6**<br>21 de março<br>(1 tempo) | • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação.<br>• Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada. | Tarefa 5:<br>*Problema Geométrico.* |
| **Aula 7**<br>22 de março<br>(1 tempo) | • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica. | Tarefa 6:<br>*Assalto ao banco* |

| | | |
|---|---|---|
| | • Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. | |
| **Aula 8**<br>10 de abril<br>(2 tempos) | • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. | Tarefa 7: *Problemas finais sobre sistemas* |

## 3.4.1 Aula 1 - 6 de março de 2024

A primeira aula da minha intervenção teve a duração de 100 minutos e corresponde a dois tempos letivos. A aula teve por sumário - Início do estudo das Equações literais. Resolução da parte 1 da tarefa: “Equações Literais”.

Os objetivos principais consistiam no reconhecimento de fórmulas de outras áreas científicas no contexto da Matemática, através de equações literais, estabelecendo, dessa forma, conexões com outras áreas do saber. Pretendia-se, ainda, que os alunos resolvessem equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas. A primeira parte da tarefa requeria o recurso à folha de cálculo *Excel.* A intervenção decorreu numa dinâmica de questionamento onde íamos trabalhando a tarefa, promovendo a construção do conhecimento em conjunto, aspeto essencial para o professor estagiário.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, os alunos iniciaram a resolução a pares das questões 1 e 2, seguidas da discussão coletiva. Resolveu-se, ainda, coletivamente as questões 3 e 4 por forma a que os alunos tivessem um apoio extra nesta fase mais inicial da nova unidade didática.

Depois do intervalo a questão 5 e 6 foram resolvidas e pares e, em seguida discutidas coletivamente.

Os alunos mostraram-se colaborativos, curiosos e souberam contribuir uns com os outros para a construção do seu próprio conhecimento. A dinâmica de interação entre colegas foi promovida pelo professor estagiário no sentido de deixar a aula fluir o mais naturalmente possível, dando lugar às dúvidas e questões e procurando que os alunos não receassem estar a responder errado perante o olhar do outro.

Os alunos revelaram algumas dificuldades na interpretação dos enunciados. Em termos comportamentais, pelo facto de ter promovido um diálogo constante como centro da dinâmica da aula, a verdade é que esta estratégia revelou-se particularmente difícil para mim. Como tal, tive a necessidade de optar por manter a organização dos alunos em carteiras individuais para que pudesse promover e manter a dinâmica de diálogo constante como forma natural de construirmos conhecimento, uns com os outros. Revelou-se, no âmbito das dificuldades, exigente para os alunos o uso da folha de cálculo *Excel* nomeadamente o estabelecimento das fórmulas exigidas e a sua interpretação nas questões 5 e 6 da Tarefa 1 – Equações Literais (anexo 1). Pude, ainda, observar dificuldades em operar algebricamente sobre as equações literais assim como em justificar o que foi feito, sempre que lhes era pedido.

O professor estagiário, teve, contudo, o cuidado em procurar apoiar sem dirigir os alunos; promovendo assim a autonomia, a cooperação e a resolução das dificuldades mobilizando ferramentas próprias do aluno onde o professor era meramente um questionador, sugerindo possíveis caminhos.

### 3.4.2 Aula 2 – 7 de março de 2024

A segunda aula da minha intervenção teve a duração de 50 minutos e corresponde a um tempo letivo. A aula teve por sumário - Conclusão do estudo das Equações literais. Resolução da parte 2 da tarefa: “Equações Literais”. O objetivo principal era reconhecer e resolver equações literais do 1.º grau, com duas incógnitas em ordem a uma delas. A metodologia de trabalho nesta aula caracterizou-se por desenvolver trabalho de forma individual na resolução da tarefa e a discussão e sistematização de ideias em coletivo.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, os alunos iniciaram a resolução de forma autónoma das questões 1, 2 e 3 seguidas da discussão coletiva das mesmas.

Na resolução da questão 1 os alunos revelaram estratégias onde as dificuldades observadas relacionam-se com a justificação das equações não literais, na identificação correta das variáveis e das constantes envolvidas.

A atividade dos alunos em torno da questão 2, revela-nos como as dificuldades associadas à interpretação dos enunciados, isto é, interpretar aquilo que é dado e aquilo que é pedido, são dificuldades importantes.

Na questão 3 pude mais uma vez constatar nas diferentes estratégias que os alunos iam apresentando, uma dificuldade recorrente, isto é, operar algebricamente de forma adequada sobre as equações.

Mais uma vez, e como foi recorrente durante todo o processo interventivo, o professor estagiário, na presença de estratégias que revelavam dificuldades importantes por parte dos alunos, procurou apoiar os mesmos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorou discordâncias sempre que era pertinente. Teve, ainda, o cuidado em procurar apoiar sem dirigir os alunos; promovendo assim a autonomia, a cooperação e a resolução das dificuldades mobilizando ferramentas próprias do aluno onde o professor era meramente um guia, sugerindo possíveis caminhos.

### 3.4.3 Aula 3 – 8 de março de 2024

A terceira aula da minha intervenção teve a duração de 50 minutos e corresponde a um tempo letivo. A aula teve por sumário - Introdução aos sistemas de duas equações. Resolução da tarefa 2: “No cinema”. Tinha-se como objetivo resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. A metodologia de trabalho nesta aula caracterizou-se por trabalhar de forma individual na resolução da tarefa e a discussão e sistematização de ideias em coletivo; optei ainda por resolver a questão 1.2 coletivamente.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, os alunos iniciaram a resolução de forma autónoma das questões 1.1, 1.3 e 1.4 seguidas da discussão coletiva das mesmas com síntese final após a discussão da questão 1.4. A questão 1.2 foi resolvida coletivamente.

Esta tarefa tinha a particularidade de apresentar aos alunos os sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e procurei fazê-lo de uma forma que os alunos pudessem construir esse conhecimento num contexto próximo da sua própria experiência.

Registo mais uma vez as estratégias onde se revelavam as dificuldades na interpretação dos enunciados, isto é, o que é dado e o que é pedido a cada momento; esta dificuldade parece adquirir maior relevância à medida que o contexto da tarefa é mais elaborado tanto no texto como naquilo que é esperado do aluno. Registo, ainda, dificuldades relacionadas com o uso da folha de cálculo *Excel* e na interpretação dos resultados obtidos, tendo em conta o contexto do problema.

Nesta tarefa parece-me importante referir as estratégias que revelaram as dificuldades na interpretação da representação gráfica e no estabelecimento da sua relação com a representação tabular. Procurei nesta tarefa construir o conhecimento com os alunos por forma a estabelecer na síntese final a relação entre a representação geométrica e o estabelecimento mais algébrico dessa relação, formalizado, num sistema de duas equações.

### 3.4.4 Aula 4 – 13 de março de 2024

A quarta aula da minha intervenção teve a duração de 100 minutos e corresponde a dois tempos letivos. A aula teve por sumário - Resolução da tarefa 3: "Introdução ao método da substituição". O objetivo principal era resolver problemas que envolvessem sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação; resolver, ainda, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo ao método da substituição. A metodologia de trabalho nesta aula caracterizou-se por desenvolver trabalho de forma individual na resolução da tarefa e a discussão e sistematização de ideias em coletivo.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, os alunos iniciaram a resolução de forma individual da questão 1, situação 1 e 2, seguidas da resolução coletiva e síntese; nesta síntese pretendeu-se introduzir o método da substituição a partir das situações 1 e 2 da questão 1. Depois do intervalo, os alunos de forma individual resolveram a questão 2, situação 1 e 2, seguidas da resolução coletiva. Depois de introduzido o método da substituição na questão 1, pretendia-se agora que os alunos pudessem formalizar a informação num sistema de duas equações e procedessem à sua resolução segundo o método já referido.

Dado que na questão 1 os alunos tinham a liberdade de responder à questão sem recurso à formalização num sistema de duas equações, este aspeto levou a dúvidas curiosas por parte dos alunos, isto é, muitos procuravam resolver a segunda questão com recurso a estratégias mais simples tal como as usadas na primeira questão, isto é, sem recurso à linguagem mais formal. A questão aqui é que os alunos não se tinham apropriado da importância de ter um método estruturado que tanto respondesse às situações problemáticas mais simples como às mais complexas. Talvez a tarefa pudesse ter uma situação problemática intermédia entre o que era exigido aos alunos na questão 1 e aquilo que lhes era exigido na questão 2 por forma que a necessidade de ter um método mais estruturado como o método da substituição fosse mais claro.

Parece-me importante que os alunos compreendam a necessidade de formalizar mais, a determinada altura, a linguagem matemática, mas por outro lado, o recurso a essas ferramentas mais formais é uma ideia que tem de ser percebido como necessária e importante devendo por isso ser trabalhada com mais tempo.

### 3.4.5 Aula 5 – 20 de março de 2024

A quinta aula da minha intervenção teve a duração de 100 minutos e corresponde a dois tempos letivos. A aula teve por sumário - Resolução da tarefa 4: “Resolução gráfica e classificação de sistemas”. O objetivo principal era resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica e eestabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia. A metodologia de trabalho nesta aula caracterizou-se por desenvolver trabalho de forma individual na resolução da tarefa e a discussão e sistematização de ideias em coletivo.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, iniciou-se a resolução de forma coletiva da questão 1, seguida da resolução individual da questão 2 e discussão coletiva.

Parece-me importante referir o sentimento ambíguo que o uso da tecnologia em sala de aula me causou, isto é, se por um lado o seu uso parece ajudar os alunos, por outro, pareceu-me que a tecnologia teve a particularidade de esconder fragilidades importantes dos alunos que se revelariam sem o seu uso, nomeadamente na representação gráfica das retas traduzidas algebricamente nos sistemas de duas equações. Este aspeto reforça o papel que a tecnologia deve ter como complementar no processo ensino-aprendizagem.

### 3.4.6 Aula 6 – 21 de março de 2024

A sexta aula da minha intervenção teve a duração de 50 minutos e corresponde a um tempo letivo. A aula teve por sumário - Resolução da tarefa 5: "Problema Geométrico". O objetivo principal foi resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica; resolver problemas que envolvessem sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação e finalmente reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, compreendendo esta ciência como coerente e articulada. A metodologia de trabalho nesta aula foi a habitual.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, iniciou-se a resolução individual das questões 1.1 à 1.3 seguidas de discussão coletiva. As estratégias associadas a esta tarefa revelavam dificuldades associadas à interpretação do enunciado, isto é, o que é pedido e o que é dado a cada momento. Pude ainda observar, mais uma vez, as dificuldades associadas à manipulação algébrica e à comunicação matemática. Os alunos revelaram-se interessados e questionadores numa dinâmica de diálogo constante com o professor.

### 3.4.7 Aula 7 – 22 de março de 2024

A sétima aula da minha intervenção teve a duração de 50 minutos e corresponde a um tempo letivo. A aula teve por sumário - Resolução da tarefa 6: “Assalto ao banco”. Os objetivos principais da aula consistiam em resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, relacionando a resolução algébrica com a resolução geométrica. Procurou-se, ainda, resolver problemas que envolvam sistemas de duas equações em diversos contextos. A metodologia de trabalho nesta aula foi a habitual.

Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, iniciou-se a resolução coletiva da questão 1, seguida da resolução individual das questões 1.2 e 1.3 e da sua discussão coletiva. Na questão 1.1 os alunos revelaram estratégias onde sobressaíam dificuldades, nomeadamente, em compreender que aos 0 minutos, os ladrões encontravam-se naturalmente no banco e portanto a sua distância ao mesmo seria de 0 quilómetros e por isso o ponto (0,0) teria de fazer parte do gráfico que dizia respeito aos ladrões, isto é, a semirreta azul; como os polícias chegaram ao banco minutos depois de ter tocado o alarme, a sua distância ao banco nunca poderia ser de 0 quilómetros aos 0 minutos, pelo que a semirreta que dizia respeito aos polícias nunca poderia passar no ponto (0,0). Na questão 1.2 foi interessante poder observar que alguns alunos nas suas estratégias revelaram a dificuldade no reconhecimento que o tempo que os polícias demorariam a apanhar os ladrões e a distância percorrida podia ser determinada pela solução de um sistema de duas equações, embora, tal não fosse pedido pelo enunciado. Importa referir que a questão 1.3 não foi trabalhada porque a aula terminou antes de se iniciar a mesma por parte dos alunos, embora, tenha havido um aluno que a tenha iniciado e tenha apresentado uma proposta de resolução da mesma no fim da aula.

### 3.4.8 Aula 8 – 10 de abril de 2024

A oitava e última aula da minha intervenção teve a duração de 100 minutos e corresponde a dois tempos letivos. A aula teve por sumário - Resolução da tarefa: “Problemas finais sobre sistemas”. Os objetivos principais da aula consistiam em resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica; procurou-se, ainda, resolver problemas que envolvessem sistemas de equações, em diversos contextos. Apresentei um questionário (anexo 16) com o objetivo de aprofundar determinados aspetos relacionados com as estratégias e dificuldades que os alunos manifestariam em respostas com palavras próprias sem a preocupação de estarem erradas ou certas. Embora, importe referir, que este questionário não foi usado na análise dos dados.

A metodologia de trabalho nesta aula seguiu a das aulas anteriores. Depois da introdução da aula, onde procurei explicar e organizar o trabalho em sala de aula, iniciou-se a resolução individual da questão 1 e da questão 2 seguidas das discussões coletivas das mesmas. Pude observar tentativas de estratégias onde eram reveladas dificuldades, por parte dos alunos, em estabelecer um sistema de duas equações a partir do enunciado da questão 1. Observei, ainda, estratégias onde era reveladas dificuldades na interpretação do enunciado da questão 2, em particular, os alunos revelavam estratégias onde sobressaía a dificuldade em interpretar aquilo que lhes era dado no contexto da figura e relacionar essa informação com a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo.

# Capítulo 4: Métodos e Procedimentos

Neste capítulo são apresentados os métodos e procedimentos de recolha e análise dos dados. Serão aqui referidas e justificadas as opções metodológicas para a recolha de dados, indicando, ainda, os métodos e instrumentos de recolha e análise dos dados, devidamente justificados com a literatura. Por fim apresentarei as questões de natureza ética.

## 4.1 Opções metodológicas

O objetivo deste relatório é compreender as estratégias de resolução e dificuldades dos alunos do 8.º ano no tópico Sistemas de duas equações do 1.ºgrau com duas incógnitas no decorrer da aplicação de uma diversidade de tarefas ao longo de várias intervenções letivas. Procurarei analisar os processos de resolução dos alunos, em registos escritos, registos áudio e vídeo, assim como analisar os registos decorrentes da observação na sala de aula, por forma a responder ao objetivo em questão. Assim, no contexto da investigação sobre a minha prática letiva, a abordagem do estudo é de natureza qualitativa. Durante o estudo investigativo adotei o comportamento e a atitude de observador participante o que, segundo Bogdan e Biklen (1994), "é uma das estratégias representativas da investigação qualitativa" (p.16).

## 4.2 Participantes

Na investigação qualitativa, o grupo dos participantes deve apresentar, entre outras características, pequena dimensão, circunscrito e sem a ambição da representatividade (Bogdan & Biklen, 1994). Atendendo às características da turma, objeto do trabalho investigativo no âmbito deste relatório, ou seja, a sua dimensão reduzida, heterogeneidade, considerei todos os alunos como participantes do estudo, para que, assim, seja possível trabalhar sobre uma diversidade de resoluções e tarefas a aplicar o que pode permitir uma perspetiva geral que possibilite responder às questões de investigação. Embora considerasse os 21 alunos da turma, devo referir que, nos resultados em análise, nem sempre considerei estes 21 alunos dado que alguns não enviavam as suas resoluções no final da aula por diversas razões.

## 4.3 Recolha de Dados

De acordo com Ponte (2002) é a natureza das questões que determina os dados a recolher e nesse sentido, numa investigação qualitativa, os métodos mais usuais de recolha dos dados encontram-se a observação, a entrevista e a análise dos documentos produzidos pelos participantes. Ainda de acordo com o mesmo autor, independentemente da escolha, é essencial que os procedimentos para a recolha dos dados sejam sistemáticos, organizados e bem definidos, de modo a possibilitar uma interpretação eficiente. Desta forma e tendo em conta o objetivo do estudo e as questões investigativas, recorri à observação, à recolha e análise documental como métodos da recolha dos dados empíricos.

A observação direta decorreu durante as aulas que lecionei no âmbito deste estudo e foi acompanhada de alguns registos escritos que considerei pertinentes para *feedback* posterior aos alunos e para as discussões coletivas assim como constituem elementos de análise e reflexão para o próprio trabalho investigativo. Procedi ainda à recolha fotográfica de algumas resoluções dos alunos assim como à recolha em formato digital via *Teams* das resoluções da turma que me eram enviadas pelos próprios alunos. No processo de recolha e observação tive em atenção que "o mais importante não é recolher muitos dados, mas recolher dados adequados ao fim que se tem em vista e que sejam merecedores de confiança" (Ponte, 2002). Por outro lado, como forma de ultrapassar a dificuldade de desempenhar o duplo papel de professor e investigador tive em vista que os "relatos escritos daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150), no final de cada aula, devem ser os mais detalhados possíveis. Segundo Lüdke e André (2005), a observação participante permite obter informações normalmente inacessíveis através de outras técnicas.

A recolha de dados foi registada em formato áudio, vídeo e fotográfico; o processo de recolha decorreu naturalmente das produções feitas pelos alunos ao longo de todos os momentos da aula lecionada, isto é, resolução das tarefas e discussões coletivas. Importa referir que os alunos enviavam as suas resoluções, antes da correção e discussão coletiva das mesmas, para o professor estagiário via *Teams*, independentemente daquilo que tivessem feito quer em termos qualitativos quer em termos quantitativos, isto é, toda e qualquer informação produzida devia ser enviada ao professor estagiário.

A recolha documental a que me propus é uma forma de ter uma fonte de informação estável segundo Guba e Lincoln (1981) e que segundo Lüdke e André (2005, p. 39) os documentos constituem "uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador"

## 4.4 Questões de natureza Ética

Neste trabalho de carácter investigativo tenho em consideração as orientações da Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (CEIEF).

A participação dos alunos foi voluntária e os Encarregados de Educação foram antecipadamente informados sobre o objetivo do estudo, os dados recolhidos e as características dessa recolha por forma a ter obtido o seu consentimento devidamente informado como está em anexo (anexo 18).

Os Encarregados de Educação que não autorizaram a participação dos seus educandos, foram informados que não haveria qualquer recolha de dados desses alunos e que estes não seriam afetados na sua aprendizagem ou avaliação pelo fato de não integrarem o estudo.

Será tida em conta a confidencialidade e a privacidade dos dados recolhidos, das observações feitas e de qualquer registo de informação. A todos os alunos foram atribuídos nomes fictícios e os dados serão unicamente utilizados no âmbito do estudo de carácter investigativo.

Os protocolos entre o Instituto de Educação e a Escola cooperante foram respeitados, garantindo a responsabilidade e o respeito pelos participantes (Tuckman, 2005).

# Capítulo 5: Análise dos dados

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos ao longo do processo investigativo tendo em conta o objetivo e as questões de investigação, isto é, em cada secção serão analisadas as dificuldades e estratégias apresentadas pelos alunos nas suas resoluções escritas e, como complemento, quando apropriado, nas discussões coletivas entre mim e a turma. Apresentarei ainda em cada secção uma breve síntese sobre os vários aspetos analisados e discutidos em cada tarefa realizada.

Selecionei para a análise de dados as tarefas 2, 3, 4 e 6. A tarefa 2 foi escolhida dado que foi a tarefa que introduziu, com recurso ao *Excel,* os sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. A tarefa 3 introduz o método da substituição, a tarefa 4 aborda a resolução gráfica e a classificação dos sistemas, recorrendo ao *GeoGebra.* Finalmente, a tarefa 6, explora a relação algébrica e geométrica dos sistemas num contexto da modelação matemática.

## 5.1 Tarefa 2

Na tarefa 2, "No cinema" (Anexo 5) procurou-se introduzir os sistemas de duas equações recorrendo à folha de cálculo *Excel* para que desta forma os alunos pudessem adquirir alguma intuição que facilitasse o processo ensino aprendizagem deste novo tema matemático.

Antes da utilização da folha do cálculo propriamente dita, e apenas a partir do enunciado da tarefa, perguntei aos alunos qual era a sua expectativa sobre a opção mais vantajosa entre as duas que a tarefa apresentava. Pretendia assim que os alunos pudessem analisar com atenção a informação e estabelecer uma conjetura:

Professor: Antes de qualquer resolução qual acham que será a opção mais vantajosa?

Diversos alunos: A opção B.

Aluno A1: Eu acho que a longo prazo é a opção A.

Professor: Como assim?

Aluno A1: Se construirmos uma tabela íamos ver que ia ultrapassar porque temos as funções a aumentar…Não consigo explicar mais, mas é a A, eu tenho a certeza, só não sei explicar melhor.

Este discurso é importante porque revela-nos a estratégia expressa na resposta do aluno A1 quando refere que "a longo prazo é a opção A". Interessante que, em resposta ao meu pedido e sem qualquer resolução, o aluno A1 tinha em conta a estratégia que talvez a determinada altura a opção mais vantajosa fosse a opção A e assumir isso independentemente de a turma escolher a opção B que numa leitura mais simplista e imediata do enunciado a assumia como a mais vantajosa. Notemos que o aluno A1 procura justificar a sua potencial estratégia com uma tabela, "se construirmos uma tabela íamos ver que ia ultrapassar", revelando, assim, a apropriação da representação tabelar.

Já na questão 1.4, figura 1, o aluno A6 revela-nos a sua estratégia de resposta quando nos diz que "Como se pode ver no gráfico o preço total das sessões tinha uma subida mais acentuada na opção B, o que significa que a opção A é a mais barata".

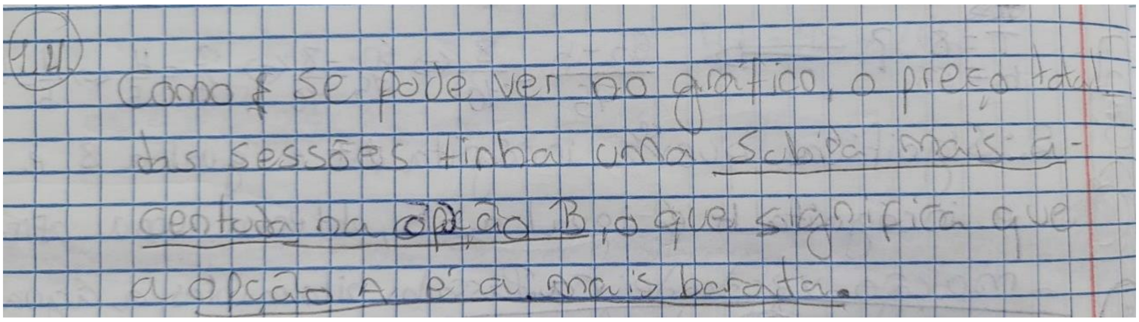



Figura 1: resolução do aluno A6 da questão 1.4

Notemos que nesta estratégia de resposta o conceito de declive está implícito na explicação do aluno embora este não o consiga expressar de forma clara, o que indicia dificuldade na sua comunicação matemática. O aluno podia ter desenvolvido mais e melhor esta justificação, referindo, por exemplo, o ponto de interseção e o que se podia observar antes dessa interseção e depois da mesma.

Ainda na questão 1.4 podemos observar as estratégias expressas no seguinte discurso:

Professor: Tendo em conta apenas os gráficos aqui representados, qual é a opção mais vantajosa até ao ponto de interseção e porquê?

Aluna A2: É a opção B porque está por baixo; começa por baixo da outra.

Professor: Como assim?

Aluna A4: É a B porque está mais próxima do zero e depois fica por cima da outra reta.

Interessante notar que nestas estratégias de resposta há apropriações implícitas importantes feitas pelos alunos quando comparam os dois gráficos, isto é, os alunos revelam apropriações importantes da relação entre a representação gráfica e o contexto do enunciado, isto é, compreendem que "estar abaixo" indica-lhes que para o mesmo valor de sessões o custo é inferior, comparativamente com a representação que fica "acima". Importa ainda dizer que no contexto desta discussão, o professor estagiário, promovia a comparação da representação gráfica da questão 1.4 com a representação tabular da questão 1.1 por forma a que os alunos pudessem enriquecer as suas justificações.

A determinada altura perto do fim da aula encaminho a turma, em discussão coletiva, para a formalização do sistema de duas equações ao mesmo tempo que mantinha a projeção gráfica das duas opções a partir do *Excel*.

Estabelecido o sistema de duas equações decidi promover a intuição da relação entre a representação algébrica e a representação gráfica:

Professor: Existe alguma relação que podemos estabelecer entre este sistema de duas equações e a representação gráfica?

Aluno A1: Sim existe…. As expressões geradoras no sistema dão os gráficos.

Professor: Expressões geradoras? Concordam com esta designação de expressões geradoras utilizada pelo A1?

Aluna A5: São equações!

Insistindo ainda para que os alunos pudessem relacionar a interseção gráfica com a solução comum às duas equações estabelecidas no sistema, notei dificuldades que se relacionam com o reconhecimento dessa relação algébrica-geométrica que pretendia explorar com a turma, pelo que, a determinada altura sugeri a substituição nas equações pelas coordenadas do ponto de interseção por forma a apoiar o estabelecimento dessa relação. Interessante poder observar a reação dos alunos que se mantiveram como que suspensos por alguns minutos enquanto procuravam compreender o que se estava a revelar diante deles, a relação algébrica e gráfica traduzida no ponto comum às duas representações gráficas e nas afirmações verdadeiras traduzidas pelas duas equações do sistema.

Em síntese da análise desta tarefa e do trabalho desenvolvido pelos alunos parece-me claro que estes tendem a aderir mais às tarefas que tenham problemas que de alguma forma estejam de mais próximas do seu quotidiano. Este aspeto parece ser particularmente relevante nos alunos com maior dificuldade ou com um sentimento negativo relativamente à Matemática.

Nesta tarefa procurei analisar aquilo que mais sobressaiu no que diz respeito ao objetivo e às questões investigativas e nessa medida importa referir que os alunos revelaram estratégias que me indicaram a apropriação de conceitos e ideias matemáticas importantes, mesmo que implícitas na sua comunicação matemática mais frágil, ou seja, as dificuldades na comunicação matemática oral revelaram-se no decorrer da aula e de forma transversal à turma.

## 5.2 Tarefa 3

Nesta tarefa (Anexo 7) foram propostos problemas organizados em duas questões, cada uma com duas situações. Para as duas primeiras situações era solicitado aos alunos que descrevessem as estratégias de resolução seguidas. Nas duas últimas situações, era solicitado aos alunos que as escrevessem como sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas e a sua resolução, recorrendo ao método da substituição.

Nesta aula podemos dividir os alunos em dois grupos no que diz respeito ao tipo de resolução por que enveredaram: aqueles que procederam a resoluções mais estruturadas e organizadas no sentido de uma maior formalização e os que desenvolveram estratégias de resolução sem recorrerem à formalização da situação através de um sistema de equações.

Na questão 1 (situações 1 e 2), o aluno A1 apresenta-nos uma resolução onde revela uma tentativa de estabelecer algum formalismo, mas ainda pouco estruturada. Na situação 1 podemos observar que o aluno A1 estabelece de forma adequada duas equações que traduzem a situação 1 e que apesar de atribuir a cada valor da imagem a determinar uma incógnita, não o faz de forma explícita, isto é, não define de forma clara as incógnitas que atribuiu às figuras. Apresenta ainda uma solução para a situação 1 a partir das equações que estabeleceu, sem a justificar devidamente, isto é, estabelecidas as equações, apresenta de imediato a solução sem qualquer passo intermédio que justifique a sua conclusão.

Na situação 2 da questão 1, já mostra a explicitação das variáveis a atribuir e estabelece, mais uma vez, de forma adequada duas equações que traduzem a situação 2, mas, revela uma estratégia desorganizada e confusa a partir das mesmas, isto é, apresenta, por exemplo, a equação $2(43 - y) + 93 - 4x = 93$ que decorre por substituição das equações anteriores estabelecidas, mas que nada acrescenta à estratégia de resolução, pois é equivalente à equação $2y + 4x = 86$, que já tinha sido inicialmente estabelecida pelo aluno a partir do contexto problemático apresentado. O mesmo pode ser observado na equação $43 - y + \frac{93-4x}{3} = 43$ que decorre por substituição das equações anteriores, mas que é equivalente à equação $4x + 3y = 93$ que também já tinha sido estabelecida inicialmente pelo aluno A1 a partir das figuras apresentadas na situação 2 da questão 1. O aluno A1 revela-nos assim na sua estratégia uma tentativa interessante de tentar resolver o sistema estabelecido que traduzia a situação 2 recorrendo à substituição mas fá-lo de forma incorreta, o que não é de admirar dado que este método ainda não tinha sido apresentado à turma de forma estruturada. Não surpreende, portanto, que o aluno A1 revele dificuldade em organizar de forma clara a informação.

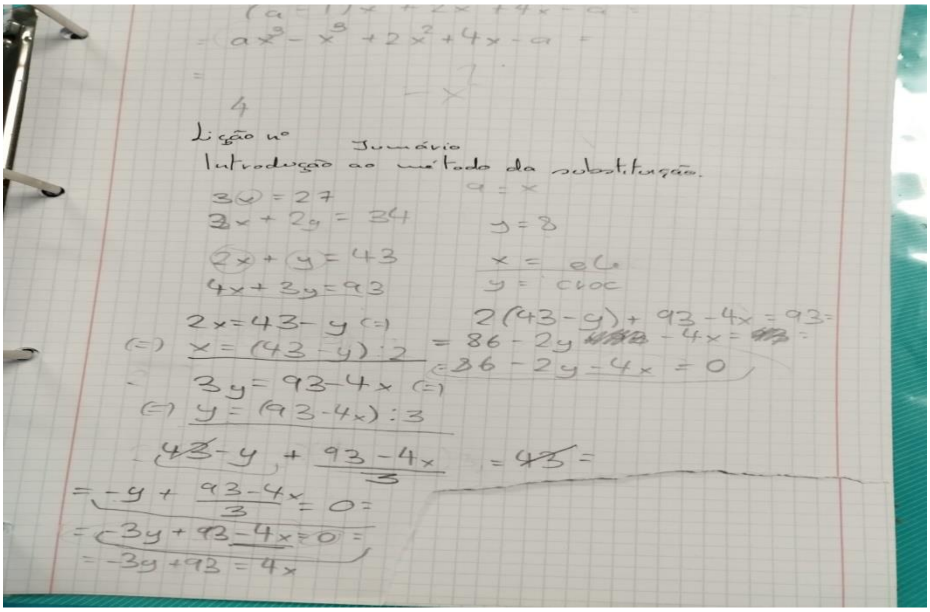



Figura 3: Resolução do aluno A1 da questão 1 – situações 1 e 2.

A aluna A10 mostra-nos resoluções mais estruturadas e justificadas comparando com a resolução do aluno anterior, sendo interessante observar a crescente formalização que a aluna vai apresentando nas suas estratégias à medida que a aula ia decorrendo e as discussões coletivas iam tomando forma, como teremos oportunidade de ver nas seguintes figuras e correspondente análise.

Na questão 1, situação 1, a aluna A10 apresenta uma resolução relativamente estruturada sem recorrer a uma estratégia mais formal no sentido de estabelecer sistemas de equações (Figura 4).

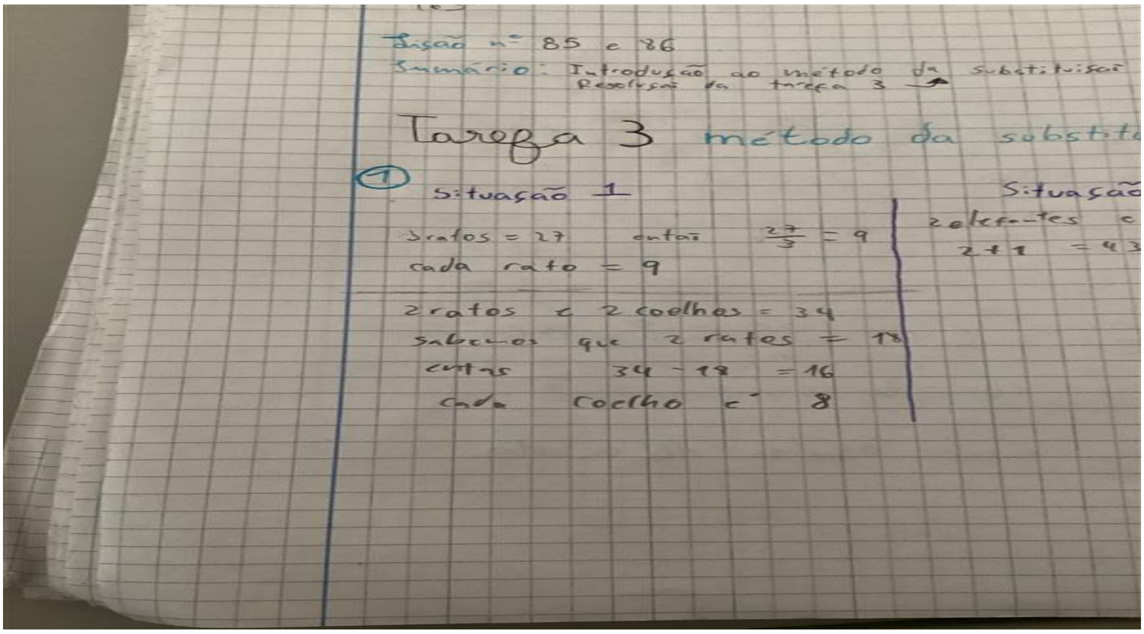



Figura 4: Resolução da aluna A10, questão 1 - situação 1.

Note-se que para a situação 1 a aluna A10 diz-nos que: “ratos = 27 então como $\frac{27}{3} = 9$, cada rato = 9”; diz-nos, ainda, que: “2 ratos e 2 coelhos = 34 e sabemos que 2 ratos = 18, então 34 – 18 = 16, cada coelho é 8”. A aluna A10 a partir da figura da situação 1, questão 1, consegue estabelecer uma estratégia aritmética numa comunicação matemática escrita devidamente justificada que lhe fornece uma resposta adequada à situação problemática.

Na situação 2 da questão 1, a aluna A10 já nos apresenta a incógnita y associada ao valor de cada crocodilo e, descoberto esse valor a partir do estabelecimento de uma equação e da sua resolução, conclui de seguida o valor de cada elefante recorrendo à igualdade: “Então cada elefante = $\frac{43-7}{2}$ = 18”. Curioso verificar que a aluna A10 não atribui agora nenhuma incógnita ao valor do elefante, mas estabelece uma igualdade que consegue traduzir de forma adequada a figura apresentada, isto é, recorre às representações como ferramenta que lhe permite estabelecer uma estratégia efetiva no contexto problemático em questão.

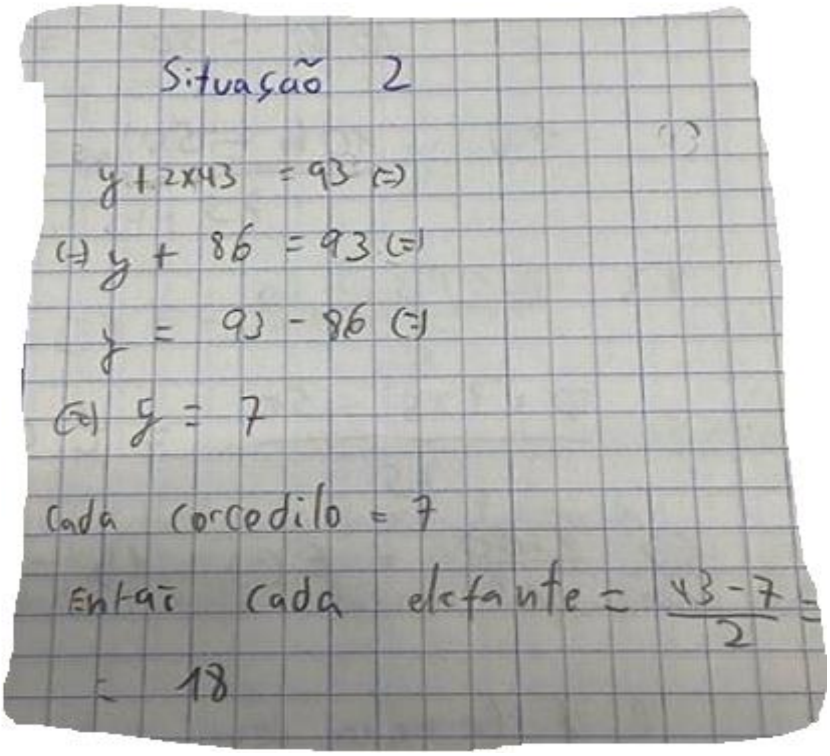



Figura 5: Resolução da aluna A10, questão 1 – situação 2.

No seguimento da crescente formalização acima referida, podemos finalmente observar a resolução mais formalizada e estruturada da mesma aluna, agora da situação 2 da questão 2 (Figura 6) e que correu depois da discussão coletiva e após ter sido apresentado e discutido o método da substituição com a turma.

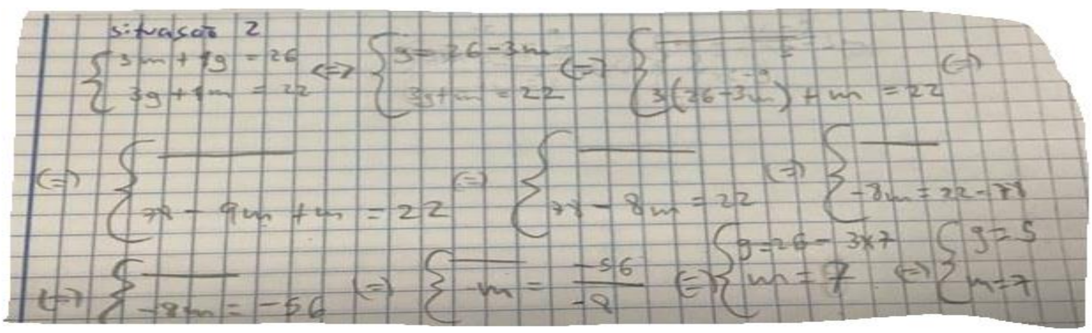



Figura 6: Resolução da aula A10, questão 2 - situação 2.

A aluna A10 começa por estabelecer o sistema de duas equações, embora não tenha explicitado as incógnitas atribuídas a cada elemento da figura da situação 2. De seguida, resolve a primeira equação em ordem a uma das incógnitas e substitui a mesma na segunda equação o que lhe permite ter uma equação a uma incógnita e dessa forma obtém o valor da mesma. Termina a resolução, substituindo o primeiro valor encontrado na primeira equação, embora não explicite o conjunto solução de forma mais clara. Apesar de não explicitar as incógnitas e de não apresentar o conjunto solução de forma também explícita, a aluna A10, estabelece, contudo, de forma adequada o sistema de duas equações, aplica o método da substituição de forma clara e opera sobre as equações de forma correta.

Interessante referir que alguns alunos que tinham resolvido as questões anteriores sem recurso a uma linguagem mais simbólica e sem recurso à linguagem algébrica, revelando estratégias apoiadas na aritmética e em relações mais simples, mantendo esse comportamento na questão 2, mesmo depois de ter sido apresentado o método da substituição e do enunciado da questão 2 pedir explicitamente a formalização em sistema. Este caso pode ser exemplificado pela resolução da mesma questão anterior do aluno A11 (Figura 7) e pelo seu discurso:

> Professor: Mas agora já podias ter recorrido a um sistema de duas equações e aplicado o método da substituição, tal como é pedido no enunciado.
>
> Aluno A11: Se consigo resolver assim porque é que tenho de fazer dessa maneira mais complicada?

É evidente nesta afirmação, e depois de se ter apresentado o método da substituição e do enunciado exigir a formalização do sistema, este e outros alunos não tinham compreendido a necessidade de se introduzir o método da substituição ou até mesmo de recorrerem aos sistemas de duas equações quando conseguiam responder às questões sem esses recursos matemáticos. Procurando dar *feedback* a esta dúvida, procurei justificar, junto de toda a turma, a necessidade de um método organizado e estruturado de resolução que possa ser usado em situações mais simples e nas mais complexas: a generalidade da linguagem matemática e da resolução algébrica.

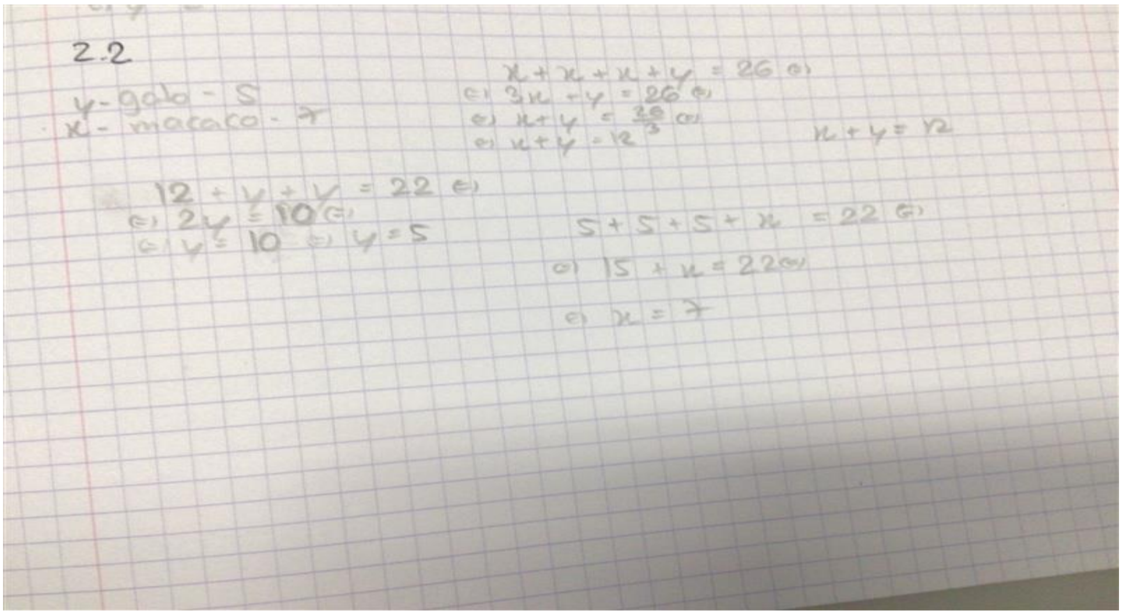



Figura 7: Resolução do aluno A11, questão 2 - situação 2.

Em síntese, nesta tarefa, os alunos de uma forma geral procuravam desenvolver estratégias recorrendo ao mínimo de formalização e mostrando mesmo alguma resistência a este aspeto da linguagem matemática, isto é, alguns alunos que tinham resolvido as primeiras situações recorrendo a estratégias mais simples, revelavam dificuldades quando se lhes pedia que respondessem recorrendo à formalização em sistemas de duas equações e na aplicação do método da substituição. Mesmo que essa formalização não fosse exigida, as estratégias apresentadas pelos alunos revelavam-se limitadas no que diz respeito à utilização das representações ou até mesmo na utilização e manipulação de uma linguagem mais simbólica.

Os alunos que optaram por estratégias mais formais mostravam dificuldades em explicitar as incógnitas a partir do enunciado, estabelecer as equações, operar algebricamente de forma correta e apresentar o conjunto solução no contexto do problema.

A aula com esta tarefa mostra-nos, também, a importância das discussões coletivas dado que alguns alunos revelavam progressivas melhorias na forma como iam estruturando e apresentando as suas respostas como é o caso da aluna A10.

## 5.3 Tarefa 4

A questão 1 da tarefa 4 (Anexo 9) pedia para se determinar algebricamente, recorrendo ao método da substituição, a solução do sistema que os alunos tinham resolvido graficamente na tarefa 2 "No cinema" (anexo 5). Comecei por recordar a resolução gráfica da tarefa 2 destacando o ponto de interseção das duas retas (8;52). Antes da turma iniciar a resolução algébrica, decidi perguntar qual seria o conjunto solução expectável para o sistema de equações agora que íamos proceder à resolução algébrica do mesmo sistema representado graficamente no quadro. Interessante poder observar que os alunos revelaram dificuldades em atribuir a mesma solução ao sistema, antes de iniciarem a sua resolução algébrica, ainda que com a representação gráfica presente no quadro.

Nesta questão 1, uma estratégia interessante que pude observar nalguns alunos relaciona-se com a resolução das duas equações em ordem a uma das incógnitas, isto é, apresentando o sistema a partir da tarefa 2: $\begin{cases} y = 6{,}5x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$. Dado este sistema, questionei os alunos sobre como deviam iniciar a sua resolução, ao que alguns alunos responderam que deviam resolver uma das equações dadas em ordem a $x$. Os alunos apresentam, assim, uma estratégia que revela a dificuldade em terem uma postura mais crítica perante a informação que lhes é dada num determinado contexto problemático. Esta situação levou-me, naturalmente, a uma breve discussão com a turma por forma a esclarecer esta questão.

Curioso, ainda, que durante as discussões coletivas pude observar a dificuldade que se relaciona com a substituição da variável na resolução algébrica do sistema, isto é, quando questionava os alunos sobre a justificação para este passo, estes não sabiam responder à minha questão, isto é, ainda não tinha compreendido que dessa forma obteriam uma equação apenas com uma única incógnita, ou seja, que lhes permitia determinar o valor de uma das incógnitas.

Importa referir ainda que, a generalidade dos alunos conseguiu encontrar a solução pretendida para a questão 1, embora, alguns alunos não definissem de forma explícita as incógnitas que atribuíam às duas opções apresentadas.

Relativamente à questão 2.1. pretendia-se que os alunos recorressem ao *GeoGebra* e verificassem através da representação gráfica se existia um número de sessões para o qual o custo da opção A e o da opção C fossem iguais, isto é, pretendia-se uma resolução gráfica da questão problemática apresentada e recorrendo ao programa de geometria dinâmica acima referido. Observemos as seguintes estratégias a que os alunos recorrem e que nos é revelada no seguinte discurso e a partir da representação gráfica no *GeoGebra*:

Professor: Será que existe um valor do número de sessões para o qual o custo da opção A e da opção C seja igual?

Aluna A5: Não, as retas não se cruzam.

Professor: Como sabes que não se intersectam?

Aluna A5: Porque são paralelas; basta olhar.

Professor: Ok…, mas como podemos justificar essa observação a partir das equações?

Aluno A8: Porque têm o mesmo declive.

Professor: Qual é esse declive?

Aluno A8: É o $3x$.

Nestas estratégias, expressas no discurso anterior, podemos identificar a dificuldade na identificação adequada do declive a partir das equações embora haja o reconhecimento, valioso, da relação da representação gráfica de retas paralelas e o mesmo declive. O aluno A8 identifica o declive como $3x$ mas devia ter referido apenas o coeficiente do monómio anterior.

Na questão 2.2 pretendia-se que os alunos verificassem algebricamente o resultado indicado na questão 2.1. A aluna A2 a partir da sua estratégia de resolução da questão 2.2, revela-nos dificuldades na aplicação do método da substituição, nomeadamente quando estabelecida a equação $y = 3x$, a aluna A2 faz a seguinte substituição na mesma equação: $3x = 3x$. Naturalmente que a afirmação é sempre verdadeira, em particular também é verdade para a concretização que a aluna faz para $x = 1$, substituindo, de seguida, este resultado na outra equação do sistema, o que lhe permitiu obter $y = 3 \times 1 + 28$.

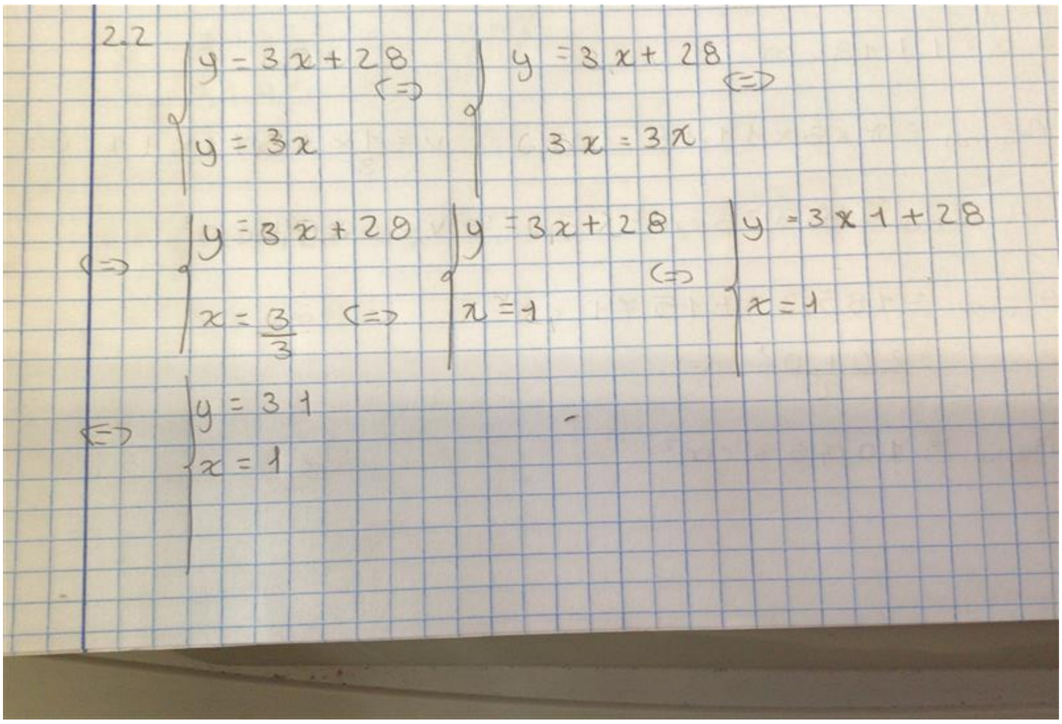


Figura 9: Resolução da aluna A2 da questão 2.2.

Notamos o aspeto curioso da aluna A2 em reconhecer na questão 2.1 que as “retas são paralelas…nunca se intersectam” (Figura 10) e apresentar, na questão 2.2, na resolução algébrica do mesmo sistema, o conjunto solução representado no par ordenado (1, 31), ou seja, a aluna A2 aceita o conjunto solução sem o confrontar com a sua própria conclusão anterior. Esta dificuldade em ser-se crítico relativamente aos valores obtidos num determinado contexto problemático foi uma dificuldade recorrente e transversal à turma.

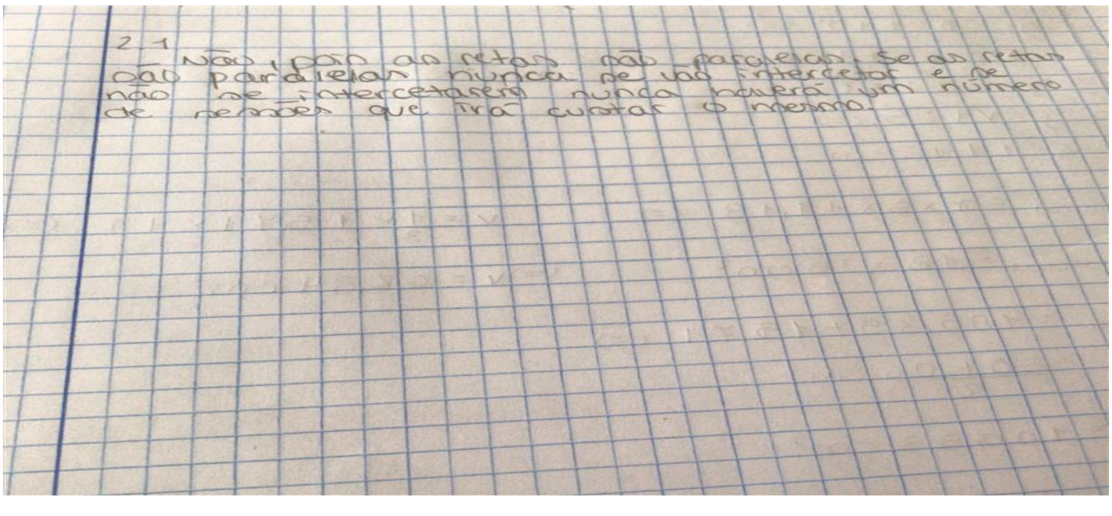


Figura 10: Resolução da aluna A2 da questão 2.1.

Ainda na questão 2.2 e sugerido no seguinte discurso podemos encontrar a seguinte estratégia que se relaciona com a interpretação da equação $0x = 28$:

Professor: O que podemos concluir desta resolução algébrica e relacionando-a com a representação gráfica anterior?

Aluna A3: Vai ser indeterminado porque dá $0x = 28$ e zero não é igual a 28, porque zero vezes o $x$ é zero.

Professor: Concordam com a classificação de indeterminada pela A3?

Aluna A10: Isso vai ser impossível!

Professor: Consegues explicar-nos melhor?

A partir daqui gera-se uma discussão coletiva na turma com alguns alunos a dizerem que $0x = 28$ era possível e determinado, enquanto outros diziam que assim o sistema era indeterminado e outros ainda impossível, mas sem conseguirem justificar devidamente o que afirmavam. Os alunos revelavam dificuldades em relacionar este resultado com o contexto da questão 2, ou seja, perante retas paralelas, a sua representação em sistema de duas equações dá-nos um sistema impossível e, portanto, no contexto do problema, não há um número de sessões para o qual o custo da opção A e da opção C seja igual.

Nestas questões que diziam respeito a sistemas de duas equações que não eram possíveis e determinados, através da tarefa proposta, notamos alguns aspetos que exprimem a necessidade de alguns alunos encontrarem uma solução a partir da resolução do sistema. Por exemplo, o aluno A12 na questão 3.2, que pedia para resolver um sistema possível e indeterminado algebricamente, atribui forçosamente uma solução ao mesmo como sendo a única (Figura 11). Note-se que o aluno A12 resolve de forma correta o sistema de duas equações e perante o resultado já simplificado $\begin{cases} x = x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$, o aluno apresenta o conjunto solução expresso no par ordenado (1; 31) como a solução única do sistema de duas equações da questão 3.

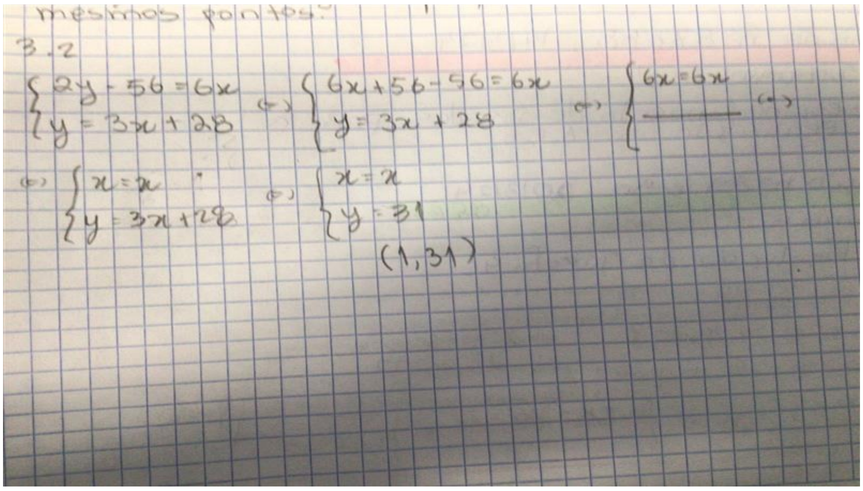



Figura 11: Resolução do aluno A12 da questão 3.2.

O aluno A12 revelou nesta estratégia a dificuldade em aceitar que um sistema indeterminado apresenta infinitas soluções bem determinadas. Tal dificuldade pode, ainda, ser revelado no seguinte diálogo:

Professor: Quantas soluções tem o nosso sistema e quais são?

Aluno A1: Infinitas.

Professor: Porquê?

Aluno A1: Porque as retas são as mesmas.

Professor: Explica-te melhor, por favor.

Aluno A1: As retas são coincidentes logo têm todos os pontos iguais.

Alguns alunos nas suas estratégias que envolviam justificações, faziam-no de forma adequada, evidenciando compreenderem os conceitos que estavam a ser trabalhados. Observemos a resolução do aluno A13 (Figura 12), que perante a questão 3.1, que pedia a representação gráfica do sistema indeterminado com o apoio do *GeoGebra* e a correspondente interpretação relativa à solução do sistema, diz-nos que "segundo o que conseguimos observar pelo GeoGebra, as duas retas situam-se no mesmo local, mas as equações são diferentes".

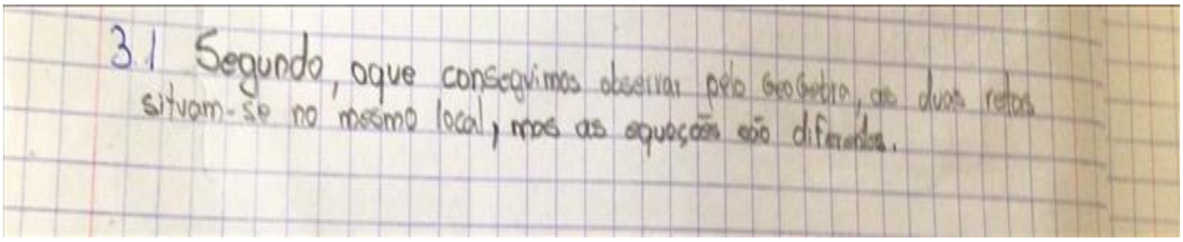



Figura 12: Resolução do aluno A13 da questão 3.1

O aluno A14 apresenta-nos na resposta à questão 2.2 uma estratégia curiosa para concluir algebricamente a impossibilidade de uma interseção entre as retas correspondentes às duas opções A e C da questão 2, uma vez que eram retas paralelas (Figura 13).

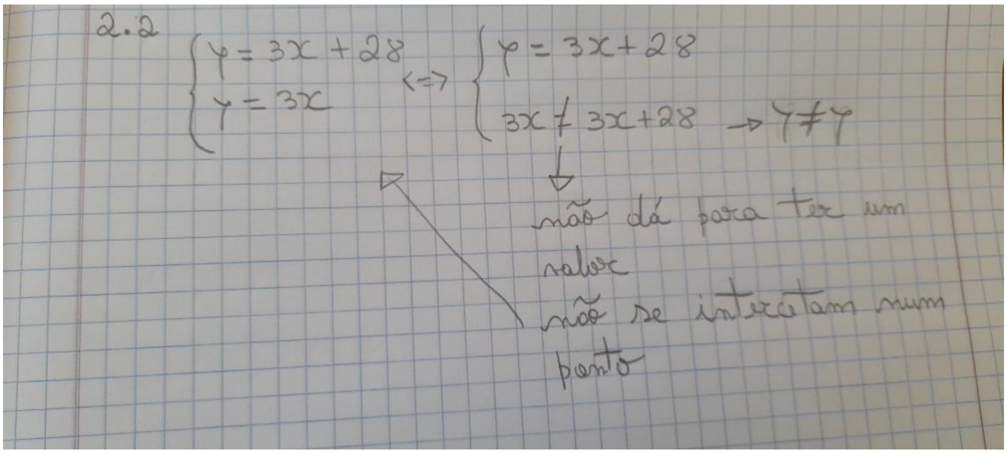



Figura 13: Resolução do aluno A14 da questão 2.2

É curioso o que o aluno A14 revela nesta estratégia, isto é, ao substituir $y$ na segunda equação do sistema por $3x + 28$, compreende que há uma diferença para qualquer concretização de $x$, isto é, $3x \neq 3x + 28$. O aluno A14 revela, ainda, interpretar a sua conclusão no contexto do problema de forma adequada, ou seja, não há um custo igual para as opções dadas na questão 2: "não dá para ter um valor…". Notamos que o aluno A14 revela-nos aspetos do pensamento algébrico, pois, dá atenção aos objetos matemáticos e às relações existentes entre eles.

Em síntese, esta tarefa revelou-se importante para identificar múltiplas estratégias e dificuldades. A relação resolução geométrica e resolução algébrica não estava ainda devidamente apropriada pela turma, fato que se reflete na questão por mim levantada sobre a expectativa que a turma tinha relativamente à solução algébrica que se ia obter.

Tudo isto, com a representação gráfica exposta no quadro e com destaque para o ponto de interseção.

Foi curioso, ainda, observar que exposto o sistema na forma, $\begin{cases} y = 6{,}5x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$, os alunos procuraram num primeiro passo resolver uma das equações em ordem a $x$ e só depois proceder à substituição. Talvez possa relacionar esta estratégia com a dificuldade de os alunos retirarem informação do próprio objeto matemático, isto é, lerem e interpretarem o que cada objeto matemático lhes diz a cada momento.

Pude, ainda, observar que nas estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, estes tendem a ver cada questão como isolada da anterior, como é caso do exemplo da aluna A2 na questão 2.1 e 2.2 da tarefa 4.

É curioso observar a estratégia que o aluno A14 apresentou, revelando aspetos do pensamento algébrico na atenção que deu aos objetos matemáticos e às suas relações, conseguindo raciocinar sobre essas relações de modo abstrato.

## 5.4 Tarefa 6

A tarefa 6 permite-nos uma análise de diferentes tipos de estratégias e dificuldades associadas às mesmas que também são observadas na tarefa 5. A escolha da tarefa 6, em análise, relaciona-se com o facto de esta apresentar um maior conjunto de informação de suporte à análise que faremos de seguida.

A questão 1.1 foi resolvida coletivamente, isto é, em discussão com a turma onde o centro da dinâmica de aula era questionar os alunos por forma a que fossem eles a responder de forma o mais autónoma possível. Nesta questão observemos o discurso da aluna A2 e a estratégia que nos apresenta, a partir da intervenção do aluno A8:

Professor: Qual acham que será a semirreta que corresponde aos ladrões e a semirreta dos polícias e porquê?

Aluno A8: Como diz que os polícias foram ao banco e depois seguiram os ladrões então a reta laranja é dos polícias.

Professor: Mas consegues explicar-nos melhor a tua conclusão?

O aluno A8 fica pensativo e a aluna A2 assume, então, uma posição de apoio ao colega.

Aluna A2: Eu concordo com o A8 porque os polícias chegam ao banco depois dos ladrões. Basta ver no gráfico.

Professor: Quanto tempo demoram os polícias a chegar ao banco?

Aluna A2: 10 minutos. Vê-se no gráfico da reta laranja.

Professor: Explica-te um pouco melhor.

Aluna A2: Quando marca 10 minutos os polícias estão mesmo no banco, por isso a distância é zero ao banco e vemos no gráfico da reta laranja então a outra é a dos ladrões.

A aluna A2 consegue responder à questão retirando informação do enunciado e da representação gráfica que lhe era apresentada, justificando claramente a sua resposta e resolvendo as dúvidas que alguns colegas sentiam. A partir daqui a turma concordou com a conclusão da aluna A2, mas vale a pena referir que a estratégia foi feita desta forma: os alunos concordavam com a explicação da aluna A2 e nessa medida identificavam a semirreta dos ladrões por exclusão das partes, não verificando posteriormente se essa semirreta de fato verificava as condições à situação dos ladrões, por exemplo, podiam referir que o tempo iniciava a partir do toque do alarme e que por essa mesma razão a semirreta correspondente aos ladrões iniciava a sua representação a partir da origem.

Por sua vez a aluna A15 apresenta-nos uma estratégia onde consegue identificar a semirreta dos ladrões como a semirreta de cor azul porque "os ladrões começam a fugir antes dos polícias" e, portanto, exige-se um tempo anterior que associa ao ponto (0,0) para a semirreta dos ladrões relativamente à dos polícias.

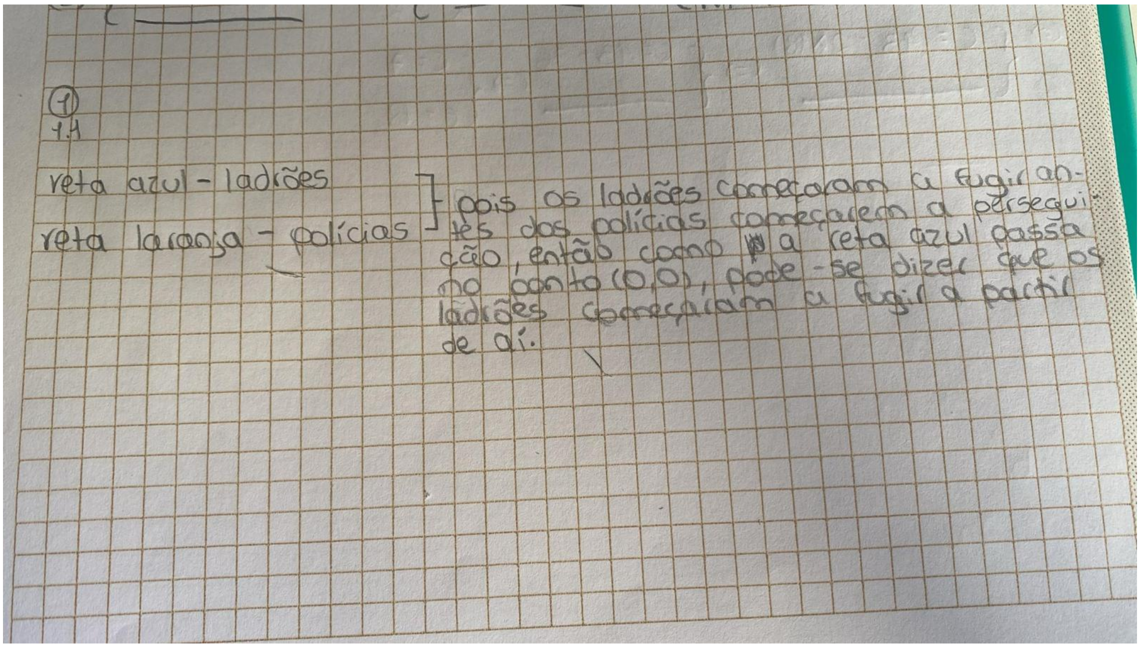



Figura 14: resolução da aluna A15 da questão 1.1.

A questão 1.2 foi interessante porque revela-nos, por um lado, estratégias curiosas, como a do aluno A3 da figura 14 e, por outro, lado revela-nos a dificuldade que alguns alunos tiveram em relacionar o ponto de interseção que representaria o tempo e a distância ao banco onde os ladrões seriam apanhados pela polícia, com o estabelecimento e resolução de um sistema de duas equações, embora esta situação não fosse exigida no enunciado.

Vejamos a estratégia do aluno A3 que diz que diz que "como não conseguia resolver fiz com a régua. Vi que 20 minutos = 5 cm e dos 20 minutos ao fim era 5 cm, por isso foi 40 minutos. Vi que 20 km = 1,5 cm e dos 20 km ao fim eram 3 cm por isso foi aos 60 km. Não consegui arranjar outra forma, só desenrasquei-me" (Figura 15).

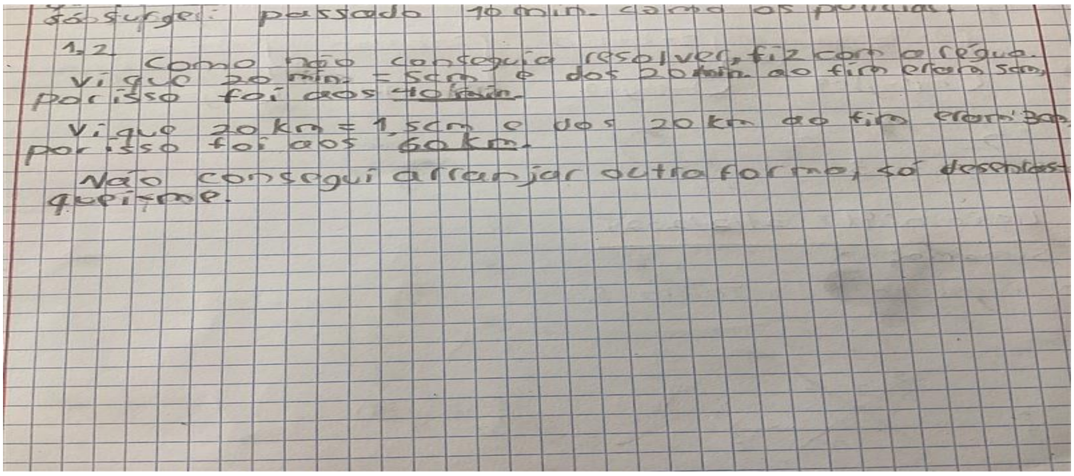


Figura 15: Resolução do aluno A3 da questão 1.2

O aluno diz-nos que “como não conseguia resolver fiz com a régua. Vi que 20 minutos = 5 cm e dos 20 minutos ao fim era 5 cm, por isso foi 40 minutos. Vi que 20 km = 1,5 cm e dos 20 km ao fim eram 3 cm por isso foi aos 60 km. Não consegui arranjar outra forma, só desenrasquei-me”.

De facto, o aluno apresenta um resultado que coincide com o esperado, contudo fá-lo recorrendo a uma estratégia que, por acaso de várias circunstâncias, lhe permitiu obter o valor correto. O aluno não compreendeu que esta resolução partiu de pressupostos poucos rigorosos. Procurei chamar a atenção à turma para esta resolução que o aluno A3 partilhou com outros colegas que a copiaram, no sentido de lhes mostrar que era pouco rigorosa e que a conclusão final, embora correta, resulta de várias circunstâncias que o aluno A3 assume e que, por coincidência, lhe permitiu obter a resposta.

Por sua vez o aluno A1, na mesma questão 1.2, recorre às representações gráficas para apoiar a sua estratégia de resolução e procura traduzir o problema num sistema de duas equações (Figura 16). Vejamos que o aluno A1 apresenta-nos as equações corretas que dizem respeito às retas suporte das semirretas dos ladrões e dos polícias tendo para isso determinado os declives e a ordenada na origem. Estabelecendo de seguida um sistema de duas equações, embora não o consiga resolver de forma adequada, pois, por exemplo, apresenta-nos $y = 30$, o que não corresponde ao valor correto, embora seja importante referir que o aluno apresenta também $\frac{1}{2}x = 20$, que uma vez resolvido, daria efetivamente, o valor certo para $x$. De notar que o aluno chega a colocar na sua representação gráfica o par ordenado (40, 30) para identificar a interseção das duas semirretas, contudo, deveria ter colocado (40, 60).

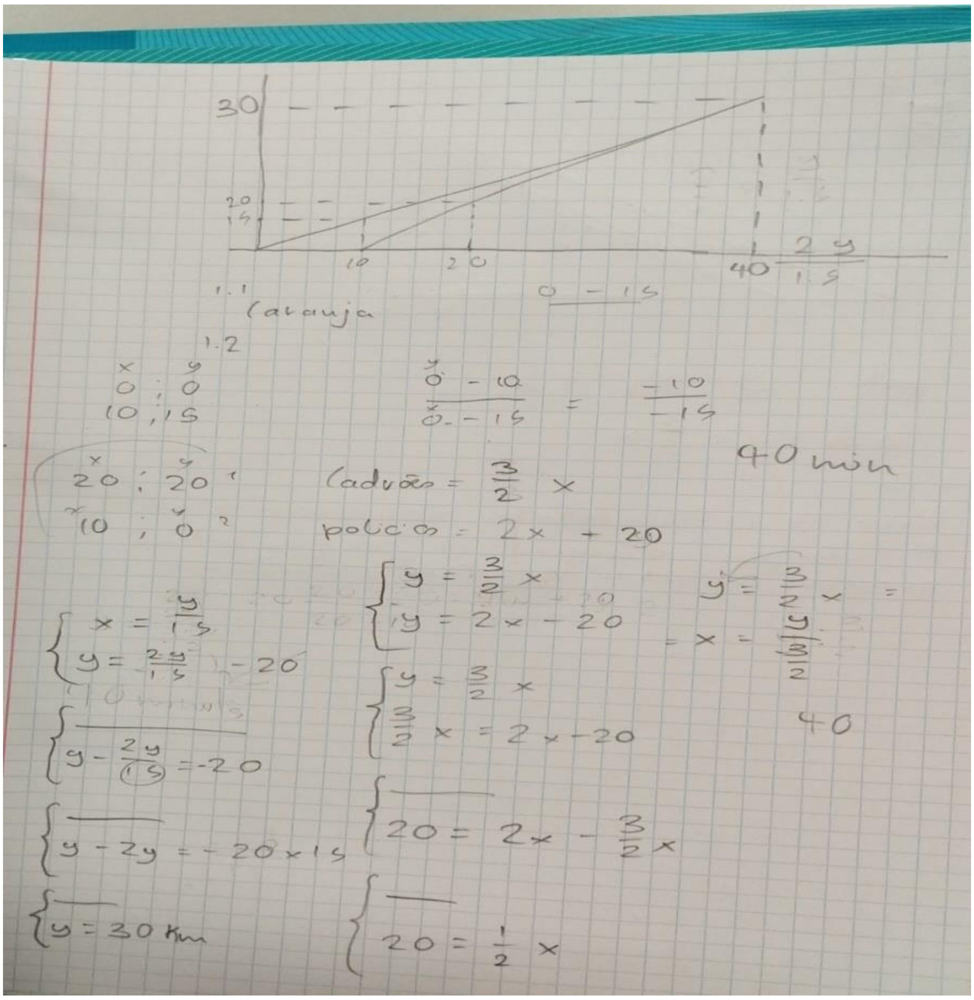


Figura 16: Resolução do aluno A1 da questão 1.2.

Registo a dificuldade, revelada no seguinte diálogo e a partir da questão 1.2.

Professor: Quando conseguimos associar sistemas de duas equações na sua forma algébrica a uma representação geométrica e considerando que o nosso sistema é possível e determinado, o que é que podemos observar na representação geométrica?

Aluno A8: As retas nunca se tocam.

Professor: Então e se tivermos um sistema impossível?

Aluno A8: É quando as retas estão uma em cima da outra.

É de assinalar, a partir deste diálogo, que a turma aceita estas respostas do aluno A8 de uma forma acrítica e só quando representei graficamente o caso impossível, determinado e indeterminado no quadro é que alguns alunos se mostraram críticos às respostas do colega A8. Esta questão é um exemplo revelador da importância das representações no processo ensino aprendizagem da matemática. De fato os alunos revelavam nas suas estratégias, dificuldades em se apropriar devidamente da relação entre os declives das representações geométricas e as respetivas classificações dos sistemas de duas equações.

> Professor: e como é que podemos relacionar a classificação que fizemos dos sistemas com a sua apresentação gráfica? Já tínhamos visto na tarefa 4, lembram-se?
>
> Aluno A14: os sistemas podem ser impossíveis e as retas são paralelas; se forem possíveis e determinados as retas cruzam-se e se forem indeterminados as retas encontram-se em cima uma da outra.
>
> Professor: mas como podemos relacionar a classificação que o A14 fez com o declive das retas?
>
> Aluno A14: nos sistemas impossíveis são paralelas logo têm o mesmo declive, nos sistemas possíveis e determinados os declives são diferentes e nos indeterminados podem ser iguais, mas também pode parecer que são diferentes.
>
> Aluna A2: nos indeterminados os declives não são iguais porque se não as retas eram paralelas e era impossível.

A turma entra numa discussão coletiva onde não se verifica um consenso sobre a relação entre o declive e a classificação dos sistemas no que diz respeito ao caso dos sistemas indeterminados.

A determinada altura durante a mesma discussão coletiva e depois de se ter esclarecido a relação declive e classificação dos sistemas, lembrei-me de questionar a turma:

> Professor: no contexto do nosso problema o que acham que representa o declive de cada uma das semirretas associadas aos polícias e aos ladrões?
>
> Aluno A8: o ponto de interseção.
>
> Professor: concordam com o colega?

A turma remete-se ao silêncio.

> Professor: reparem na forma como estamos a determinar o declive, isto é, estamos a fazer uma diferença entre distâncias sobre uma diferença entre tempos.

Concordam? Não conseguem relacionar esta informação com a disciplina de Físico-Química?

Aluno A16: é a velocidade.

Interessante observar neste discurso o aspeto promotor da aprendizagem que as sucessivas perguntas têm sobre os alunos, instigando-os assim à descoberta de forma mais ou menos autónoma. Esta confirmação ao longo da minha prática letiva foi essencial para consolidar o papel que as perguntas têm e devem ter no processo da dinâmica da sala de aula.

Termino referindo que a questão 1.3 não foi trabalhada na sala de aula uma vez que a aula terminou antes de se iniciar a mesma, embora o aluno A1 tenha tentado resolver a mesma, tendo sido o único aluno a iniciar essa questão e a apresentar uma resposta (Figura 17). O aluno A1 diz-nos que “Para os polícias nunca intercetarem os ladrões, k tinha obrigatoriamente de ser $\frac{3}{2}$ e b tem que ser qualquer número negativo que não o 0”. Não deixa de ser curioso que o aluno saiba reconhecer que o parâmetro b deveria ser inferior a zero e que associa o parâmetro k ao mesmo valor que o declive da semirreta dos ladrões, isto é, o aluno procurava aqui a noção de mesmo declive, retas paralelas logo não se intersectam.

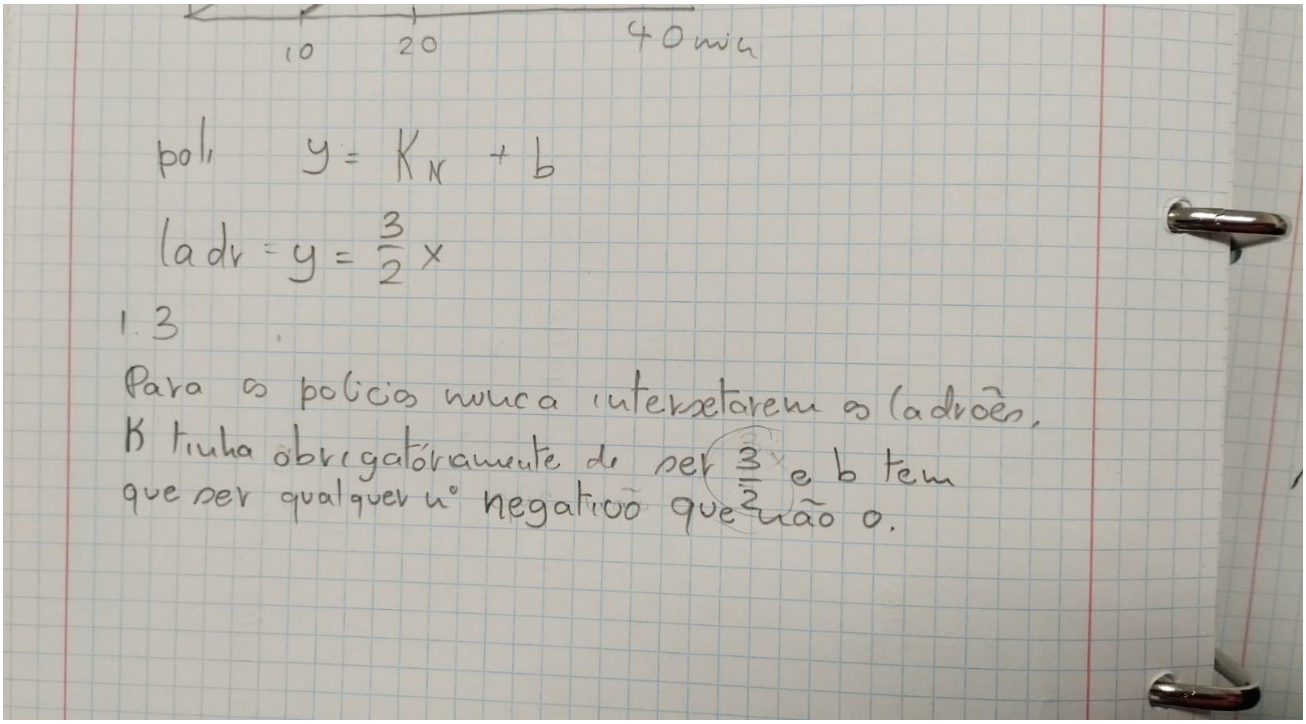



Figura 17: Resolução do aluno A1 da questão 1.3

Em síntese, nesta tarefa foi interessante poder observar o papel que as questões, como fator promotor da descoberta e da autonomia, tinham sobre os alunos, isto é, quando incentivados pelas perguntas que o professor lhes ia colocando por forma a que justificassem as suas resoluções, que clarificassem o seu pensamento, que se colocassem em causa adotando uma atitude crítica, os alunos revelavam uma capacidade de uns com os outros, construírem o seu próprio conhecimento. Este aspeto reforça a minha posição pessoal de defender a pergunta como o centro gravitacional da dinâmica da aula na construção do conhecimento, isto é, o conhecimento da matemática deve, também, fazer-se com os alunos nas questões que as discussões coletivas podem e devem promover.

Referir, ainda, o papel fundamental que as representações têm na promoção do conhecimento matemático como dei exemplo no discurso transcrito sobre a questão 1.2 entre mim e o aluno A8, isto é, assim que representei graficamente as diferentes representações correspondentes a sistemas impossíveis, indeterminados e determinados, a turma reage criticamente às respostas do colega A8, mas só o faz depois dessa representação lhes ter sido apresentada no quadro.

# Capítulo 6: Conclusão

Neste capítulo apresentarei as principais conclusões do estudo a partir da análise dos dados e na sua relação com as questões de investigação e terminarei com uma reflexão sobre a prática letiva desenvolvida no âmbito deste relatório.

## 6.1. Principais conclusões

Neste subcapítulo apresentarei as principais conclusões tendo em conta as questões de investigação e a análise dos dados feita no capítulo anterior. As questões são as seguintes:

i) Quais as estratégias usadas pelos alunos na resolução dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas?
ii) Quais as principais dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução dos sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas?

Na tarefa 2 pude observar que os alunos procuraram, muitas vezes, explicar o seu raciocínio recorrendo aos aspetos mais próximos da sua própria experiência quotidiana e nesse sentido parece-me importante construir tarefas que promovam essa relação. Por outro lado, a tarefa 2, permitiu-me observar estratégias que recorriam às representações, como foi o caso do aluno A1 que procurou justificar-se com o recurso a uma representação tabelar, mas também, estratégias que faziam referência a conceitos essenciais como o declive assim como a comparação entre as representações gráficas promovidas na tarefa. A tarefa 2 permitiu-me, ainda, observar dificuldades relacionadas com a comunicação matemática, oral e escrita. Em particular, referir a dificuldade na comunicação matemática que se revelou recorrente e transversal à turma. É importante promover nos alunos a capacidade de se expressarem claramente numa comunicação matemática oral e escrita adequada, uma vez que, dessa forma o aluno consegue partilhar com a turma o seu pensamento, a sua estratégia, o seu raciocínio e dessa forma colabora com o professor na criação de uma dinâmica coletiva de aprendizagem significativa.

A tarefa 3 foi muito interessante porque se registou uma adesão importante por parte dos alunos da turma que se mostraram curiosos com esta proposta. Quanto ao modo como resolveram a tarefa observou-se que os alunos se distribuem entre aqueles que apresentavam resoluções mais estruturadas e organizadas no sentido de uma maior formalidade e os outros que recorriam a estratégias com um menor nível de formalização, isto é, este último grupo de alunos procurava desenvolver estratégias numa linguagem menos simbólica relativamente ao outro grupo. Importa, contudo, referir que nem por isso deixavam de apresentar estratégias efetivas na resposta que davam à questão problemática em causa. Relembremos, a aluna A10 que a partir da figura da questão 1, situação 1, consegue estabelecer uma estratégia aritmética numa comunicação matemática clara e justificada e dessa forma, e responde corretamente à questão colocada. No seguimento disto, importa referir, contudo, que alguns alunos que resolveram a questão 1, situação 1 e 2, recorrendo a estratégias apoiadas na aritmética e sem recurso à linguagem algébrica, procuravam manter essas estratégias, de relações mais simples, na questão 2, apesar do enunciado pedir a formalização em sistema de equações.

Referir, por último, as dificuldades dos alunos reveladas na ausência da explicitação das incógnitas, no estabelecimento correto dos sistemas de duas equações, ou seja, em traduzir o enunciado para a linguagem matemática e a operar algebricamente de forma correta.

Na tarefa 4 revelam-se estratégias onde as dificuldades se mostravam na identificação, resolução e interpretação da relação geométrica e algébrica dos sistemas de duas equações. Embora tenha enquadrado esta importância em termos históricos para que a turma se pudesse apropriar da importância desta relação, reconheço que esta dificuldade foi recorrente e transversal ao longo da minha intervenção letiva. Surpreenderam-me as dificuldades da turma quando levantei a questão sobre a expectativa que os alunos tinham relativamente à solução algébrica que se ia obter com o método da substituição e tendo presente no quadro a resolução geométrica da mesma questão.

Exposto o sistema na forma $\begin{cases} y = 6{,}5x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$, foi curioso observar-se a estratégia a que os alunos recorreram na aplicação do método da substituição, isto é, procuraram num primeiro passo resolver uma das equações em ordem a $x$ e só depois proceder à continuação da resolução seguindo os passos descritos num anexo que lhes tinha facultado anteriormente. É curioso que os alunos não conseguiram identificar que o passo de resolver em ordem a uma das incógnitas estava assegurado e nesse sentido podiam proceder à continuação da resolução. Este aspeto pode ser relacionado com um outro dado curioso, isto é, os alunos perante um sistema indeterminado, apresentavam uma solução particular como a solução do sistema não reconhecendo que estavam perante infinitas concretizações que tinham apenas de verificar a equação da reta. Perante um determinado objeto matemática num determinado contexto problemático os alunos revelam dificuldades em interpretar e responder de forma adequada sobre a informação que esse objeto matemático lhe revela.

Pude ainda observar que nas estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, estes tendiam a ver cada questão como isolada da anterior, como foi o caso do exemplo da aluna A2 na questão 2.1 e 2.2.

Na Tarefa 6 as estratégias revelavam dificuldades dos alunos que, perante uma representação gráfica que sugeria um sistema possível e determinado, não a relacionavam numa estratégia assente no estabelecimento de um sistema e na posterior resolução algébrica do mesmo que lhes permitisse identificar o conjunto solução como o ponto de interseção das duas semirretas e nessa medida responder à questão problemática.

Nesta tarefa foi interessante poder observar o papel que as questões, como fator promotor da descoberta e da autonomia, tinham sobre os alunos, isto é, quando incentivados pelas perguntas que o professor lhes ia colocando por forma a que adotassem uma atitude crítica, os alunos revelavam uma capacidade de uns com os outros, construírem o seu próprio conhecimento. Este aspeto reforça a minha posição pessoal de defender a pergunta como o centro gravitacional da dinâmica da aula na construção do conhecimento, isto é, o conhecimento da matemática deve, também, fazer-se com os alunos nas questões que as discussões coletivas devem promover.

Referir por último nas estratégias que os alunos iam desenvolvendo, o papel das representações na promoção do conhecimento matemático, isto é, incentivando os alunos a recorrerem a representações como forma de se apoiarem no ataque à questão problemática, pude observar, como é exemplo a resolução do aluno A1, que não só alguns alunos aderiam à sugestão como de facto contribuía para desenvolverem uma estratégia mais eficiente. Neste sentido e reforçando o papel das representações, referir o caso do discurso transcrito sobre a questão 1.2 entre mim e o aluno A8, isto é, assim que representei graficamente no quadro as diferentes representações correspondentes a sistemas impossíveis, indeterminados e determinados, a turma reage criticamente às respostas do colega A8 e dessa forma respondem adequadamente à questão.

## 6.2 Reflexão final

Chegados aqui creio ser importante não só fazer uma reflexão sobre o estudo realizado, mas também apresentar uma reflexão sobre o que a prática letiva de investigação contribuiu para a minha formação enquanto professor no contexto do mestrado ensino.

Relativamente à minha prática letiva creio que, muitas vezes, não dava o tempo suficiente às discussões coletivas entre os diferentes momentos. Compreendia, contudo, ao longo da prática letiva, que mais importante que terminar a tarefa era, sobretudo, ouvir os alunos com atenção, dando-lhes o tempo necessário. O que podemos aprender com as dúvidas dos alunos e partilhar com a turma, é muitíssimo mais importante do que apresentar tarefas ambiciosas no tempo que exigem, desta forma, que a turma corra atrás do relógio.

Pude observar como as dificuldades, sobretudo as relacionadas com a manipulação algébrica, parecem desmotivar os alunos e nesse sentido promover um sentimento negativo relativamente à Matemática.

Curioso observar que nas estratégias desenvolvidas pelos alunos se revelavam as próprias dificuldades que lhes estavam associadas, isto é, os alunos tendiam a apresentar estratégias que de alguma forma pudessem responder à questão problemática e essa resposta, desenvolvida numa estratégia, refletia as próprias dificuldades desse aluno e, portanto, há uma relação de duplo sentido nesta dialética estratégia-dificuldade.

Considero que a turma, de uma forma geral, reagiu bem à estratégia de um ensino-aprendizagem mais exploratório e que a mesma contribuiu positivamente para que os alunos aderissem às tarefas propostas com entusiasmo embora deva referir que alguns alunos insistissem para que lhes desse exercícios do manual, sobretudo os alunos com mais dificuldades. Sempre que apresentava uma nova tarefa os alunos revelavam entusiasmo e sobretudo esse comportamento era mais evidente nas discussões coletivas e numa dinâmica de questionamento, mas por outro lado, os alunos com mais dificuldades procuravam constantemente recorrer ao método que lhes era mais familiar, isto é, resolver exercícios a partir do manual. Foi bastante curioso observar este aspeto, ou seja, se por um lado grande parte da turma se mostrava entusiasmada, alguns alunos tendiam a resistir. Creio que esta resistência se deve ao facto de que as tarefas e a metodologia de cariz mais exploratório numa dinâmica de discussão e questionamento incitam os alunos a uma postura mais ativa na construção do seu próprio conhecimento e é essa exigência que se pode traduzir na resistência por parte dos alunos com mais dificuldades.

Independentemente de alguns alunos mostrarem-se resistentes a esta nova abordagem mais exploratória, é importante referir que pude observar como a diversidade das tarefas é importante para o processo ensino-aprendizagem da matemática porque a conjugação dessa diversidade com os momentos essenciais da discussão coletiva parecem contribuir para o enriquecimento da linguagem algébrica, uma melhor aprendizagem dos sistemas de equações, o desenvolvimento da comunicação matemática oral e escrita e promover uma atitude mais positiva relativamente à Álgebra.

Gostaria de terminar, partilhando, que este mestrado teve a particularidade de me fazer questionar as imensas certezas iniciais que tinha relativamente ao ensino da Matemática. Foi um processo intenso de questionamento que fiz a mim próprio no contexto da nova informação que este mestrado me ia facultando e nesse sentido também eu resistia à novidade pois, era mais confortável ter certezas asseguradas. O mestrado ensino representou, assim, um processo não só de descoberta, mas sobretudo de ter a particularidade de me colocar numa posição mais humilde e atenta às certezas que vamos construindo nesta extraordinária área que é o ensino.

# Referências


Ajose, S. A. (1999). *Discussant's comments: On the role of visual representations in the learning of mathematics*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-96). Morelos, Mexico: PME.

Arcavi, A. (2006). *El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*. In I. Vale et al. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Bruner, J. (1966). *Towards a theory of instruction*. Harvard University Press.

Cardoso, A. P., & Rego, B. (2017). *Metodologias de investigação na formação de professores: a investigação-ação e o estudo de caso. Olhares Sobre a Educação: Em Torno Da Formação de Professores, 21–33*

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P. (2021). Novas orientações curriculares de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática, 160*, 3-6.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Correia, P. (2022). Tecnologia relevante. *Revista Educação e Matemática, 163*, 12-14.

Dias, S., & Santos, L. (2010). O feedback e os diferentes tipos de tarefas matemáticas. In *Atas do XXI SIEM* (pp. 126–136). APM.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registos de representações semióticas.* PROEM.

Estrada, Maria Fernanda *et al* (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.

Fouche, K. (1997). Algebra for everyone: Start early. *Mathematics in the Middle School*, *2*(4), 226-229.

Friedland, A., & Tabach, M. (2001). *Promoting multiple representation in Algebra.*

Gafanhoto, A.P. (2011). *A adaptação das tarefas matemáticas: Como promover o uso de múltiplas representações.*

Gattegno, C. (1970) *What we owe children: the subordination of teaching to learning*. Routledge & Kegan Paul.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gowers, T. (2008). *Matemática, uma breve introdução*. Gradiva.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation*. Jossey Bass.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the teaching and learning of algebra* (pp. 167-194). NCTM.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *International Congress on Mathematical Education 8: Selected lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Instituto Piaget.

Lopes J., & Silva H. S. (2012). *50 técnicas de avaliação formativa.* Lidel.

Lüdke, M., & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.* EPU.

ME (2001). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Erlbaum.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (Traduzido do inglês). APM.

NCTM (2008). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. APM e IIE.

Perrenoud, P. (1999). Formar professores em contextos sociais em mudança, Prática reflexiva e participação crítica. *Revista Brasileira de Educação*, *12*, 5-12.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale et. al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp.5-27). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Secção de Educação Matemática.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J.P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.13-27). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Serrazina, M. L. (2018). Comunicação Matemática e Aprendizagens Essenciais. *Educação e Matemática*, 149-150.

Sullivan, P. Clarke, D. M. & Clarke, B. A. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer.

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de investigação em educação*. Fundação Calouste Gulbenkian.

# Anexos

# **Anexo 1:** Tarefa 1 - parte 1

| | | |
|---|---|---|
| COLÉGIO MILITAR<br><br>ANO LETIVO<br>2023/2024<br>**março 2024** | **COLÉGIO MILITAR**<br><br>**Tarefa 1 – Equações Literais**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________________ **TURMA** ____<br>**Nº**________ | |

**Parte 1: "Escalas de temperatura"**

> In New York, **winter typically lasts from December to February**. The weather can vary significantly throughout the season, but here are some general characteristics:
>
> 1. Temperature: Winters in New York can be quite cold, with average temperatures ranging from around 25°F to 40°F. However, temperatures can drop even lower during particularly cold spells.
>
> **https://justenergy.com/blog/winter-weather-in-new-york-cold-snow-and-more/**

Como podes verificar no excerto do blog, que se encontra acima, ao contrário de Portugal, os Estados Unidos utilizam uma outra escala para a temperatura atmosférica, que não a escala Celsius como estamos habituados, denominada de Fahrenheit (°F).

Na disciplina de Físico-Química é usual utilizar ainda uma outra escala para a temperatura denominada de Kelvin, $k$. Assim, podemos concluir que existem diferentes escalas para a temperatura, que se correspondem por meio das seguintes equações.

**1.** A relação entre graus Celsius, $C$, e graus Fahrenheit, $F$, pode ser definida pela equação:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

A relação entre graus Celsius, $C$, e Kelvin, $K$, é definida pela equação:

$$K = C + 273{,}15$$

1.1 Completa a seguinte frase:

Da disciplina de Físico-Química sabes que a água congela aos __°C e que entra em ebulição aos ___ °C.



Tarefa adaptada de Neves, M., Duarte, J., Martins, J., & Almeida, P. (2023). *MXOn do Professor Matemática 8.ºAno*. Porto Editora.

De acordo com o que preencheste anteriormente.

1.1.1. Comenta a seguinte afirmação: A água congela aos 0 °F.

1.1.2. Qual o valor correspondente do ponto de ebulição da água em Kelvin?

**2.** O ponto de fusão designa a temperatura a qual uma substância passa do estado sólido ao estado líquido. Sabe-se que o ponto de fusão do ferro é 1811 $K$. Determina o ponto de fusão na escala:

2.1. Celsius;
2.2. Fahrenheit.

**3.** Resolve, em ordem a $C$, a equação que relaciona os graus Celsius com os graus Fahrenheit.

**4.** Determina uma equação que relacione os graus Fahrenheit, $F$, com Kelvin, $K$.

**5.** Na folha de cálculo, "Tarefa 1 - Equações Literais.xlsx", podes encontrar uma tabela de conversão idêntica à da figura abaixo, que permite, a partir de um determinado valor de temperatura, indicar o valor correspondente na escala indicada.

À semelhança do exemplo, escreve nas células da coluna G as fórmulas que permitem fazer a conversão em função dos valores das células da coluna D. Caso a célula com o valor a converter não esteja preenchida, a célula correspondente para o valor convertido não deve apresentar qualquer valor.

**Exemplo:**

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | Valor a converter | | | Valor convertido | |
| 3 | | | **Celsius para Fahrenheit** | | °C | → | =SE(D3="";"";D3*9/5+32) | °F |
| 4 | | | **Fahrenheit para Celsius** | | °F | → | | °C |
| 5 | | | **Celsius para Kelvin** | | °C | → | | K |
| 6 | | | **Kelvin para Celsius** | | K | → | | °C |
| 7 | | | **Fahrenheit para Kelvin** | | °F | → | | K |
| 8 | | | **Kelvin para Fahrenheit** | | K | → | | °F |
| 9 | | | | | | | | |

**6.** Testa a tabela que construíste com os valores que achares mais convenientes.

2

Tarefa adaptada de Neves, M., Duarte, J., Martins, J., & Almeida, P. (2023). *MXOn do Professor Matemática 8.ºAno*. Porto Editora.

**Anexo 2:** Plano de aula da Tarefa 1 – parte 1

<table>
<tr><th colspan="2">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="3">COLÉGIO MILITAR<br>Fundado em 1803</td><td>Professora: Anabela Candeias</td></tr>
<tr><td>Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho</td></tr>
<tr><td>Ano: 8.º Turma: A/B</td></tr>
<tr><td>Lições nº 77 e 78/<br>nº 81 e 82</td><td rowspan="3">Sumário:<br>Início do estudo das Equações literais. Resolução da parte 1 da tarefa: “Equações Literais”.</td></tr>
<tr><td>Data: 06/03/2024</td></tr>
<tr><td>Duração:50 + 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tópico: Equações literais</td></tr>
</table>

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Reconhecer fórmulas de outras áreas científicas e do contexto da Matemática, como equações literais, estabelecendo conexões com outras áreas do saber.<br>• Resolver equações do 1.º grau, com duas incógnitas, em ordem a uma delas. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho a pares na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| Recursos | |
|---|---|
| Do Professor | Dos alunos |
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - "Equações literais"<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • *iPad*;<br>• Folha de cálculo<br>• Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita; |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| Estrutura da aula | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução a pares das questões 1 e 2 | 15 minutos |
| 3. Discussão coletiva sobre a questão 1 e 2 3 como introdução das Equações literais | 15 minutos |
| 4. Resolução coletiva da questão | 10 minutos |
| 5. Resolução coletiva da questão 4 | 5 minutos |

| Intervalo | |
|---|---|
| 6. Continuação da resolução coletiva da questão 4 | 20 minutos |
| 7. Resolução a pares da questão 5 e 6 | 15 minutos |
| 8. Discussão sobre a resolução da questão 5 e 6 | 15 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| **1. Introdução da aula** | **5 minutos** |
|---|---|

Registo do sumário e marcação de faltas.

Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa "Equações Literais".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

Formação dos pares para a resolução da tarefa.

| **2. Resolução a pares das questões 1 e 2** | **15 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| **Questão 1** | | |
| 1.<br>1.1<br>Da disciplina de Físico-Química sabes que a água congela aos 0°C e que entra em ebulição aos 100 °C.<br>1.1.1<br><u>Estratégia 1:</u> | - Interpretação do enunciado: o que é dado e o que é pedido.<br><br>-Preencher de forma correta os espaços em branco. | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do enunciado.<br><br>-Questionar e incentivar os alunos a responderem às suas próprias dúvidas, estimulando a sua |

| | | |
|---|---|---|
| Substituir C=0 na fórmula que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit e verificar que, nesse caso F=32≠0. Logo a afirmação é falsa.<br><br><u>Estratégia 2:</u><br><br>Substituir F=0 na fórmula que relaciona graus Celsius com graus Fahrenheit.<br><br>Resolver a equação do 1º grau em ordem a C e verificar que nesse caso, C=$-\frac{160}{9} \neq 0$ . Logo a afirmação é falsa.<br><br>1.1.2<br><br>O ponto de ebulição da água em Kelvin corresponde a 100 +273,15 = 373,15. | -Substituir adequadamente a informação dada no enunciado e compreender as relações estabelecidas entre as diferentes escalas.<br><br>- Resolver a equação do 1ºgrau a 1 incógnita e saber interpretar o resultado, sendo crítico relativamente ao que se afirma. | autonomia. No caso de ser necessário, pode ser incentivada uma pesquisa para preencher os espaços em branco.<br><br>- Incentivar os alunos a estabelecer relação com os conhecimentos da disciplina de físico-química.<br>- O professor pode questionar que de acordo com a equação $F = \frac{9}{5}C + 32$, será expectável que 0 °F correspondam a 0 °C?<br><br>- O professor deve questionar:<br>i) que equação relaciona as variáveis K e C?<br>ii) o resultado que obtiveste faz sentido na equação dada? |
| **Questão 2** | | |
| **2.**<br>**2.1**<br>$1811 = C + 273{,}15 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow$C= 1811-273,15=1537,85<br>R: 1537,85 °C<br><br>**2.2**<br><br>Sabendo-se da alínea 2.1 que 1811 K correspondem a 1573,85 °C então:<br><br>F = 9/5 × 1537,85 + 32 = 2800,13<br><br>R: 2800,13 °F | -Interpretar adequadamente o enunciado.<br><br>-Substituir adequadamente a informação dada no enunciado e compreender as relações estabelecidas entre as diferentes escalas.<br><br>-Saber relacionar as duas equações: dada a informação em | -Questionar e incentivar o trabalho colaborativo entre pares no sentido de responderem às suas próprias dúvidas com o apoio do professor<br><br>- O professor deve questionar:<br>i) que equação relaciona as variáveis K e C?<br>ii) que equação relaciona as variáveis K e F?<br>ii) os resultados que obtiveste em cada alínea fazem sentido nas equações dadas? |

| | | |
|---|---|---|
| | Kelvin, obter Fahrenheit de forma correta. | |

| | |
|---|---|
| **3. Discussão coletiva sobre as questões 1 e 2 como introdução das Equações literais** | **15 minutos** |

Vão ser corrigidas as questões 1 e 2 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Caso surjam ambas as estratégias de resolução para a questão 1.1.1, estas devem ser exploradas no coletivo, evidenciando a sua equivalência.

Introduzir a definição de Equação literal, utilizando como exemplo as equações da tarefa, identificando em diálogo com os alunos as variáveis envolvidas em cada uma das equações, solicitando que registem o seguinte no caderno.

$F = \frac{9}{5}C + 32$ variáveis: F e C

$K = C + 273{,}15$ variáveis: K e C

Equação literal: Uma equação literal é uma equação que tem mais do que uma variável.

Analisar o seguinte exemplo em interação com os alunos, aceitando as suas contribuições.

Por exemplo:

$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 a$ → Volume do cone Variáveis: V, $r$ e $a$ Constantes: $\frac{1}{3}\pi$

Questionar os alunos se o π é variável.

É uma equação literal porque tem mais do que uma variável.

| | |
|---|---|
| **4. Resolução coletiva da questão 3** | **10 minutos** |

Explicar que resolver uma equação em ordem a uma variável consiste em isolar essa variável num dos membros da equação, no primeiro ou no segundo membro. Por exemplo,

$F = \frac{9}{5}C + 32$ está resolvida em ordem a F

e

$K = C + 273{,}15$ está resolvida em ordem a K.

Questionar os alunos sobre a utilidade de escrever as equações desta forma.

Resolver a equação $F = \frac{9}{5}C + 32$ em ordem a C com o contributo dos alunos. Seguir com a resolução que seja mais intuitiva para os alunos.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| Resolução 1:<br>$F = \frac{9}{5}C + 32 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{5F}{5} = \frac{9}{5}C + \frac{160}{5} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 5F = 9C + 160 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 5F - 160 = 9C \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{5F-160}{9} = C \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow C = \frac{5F-160}{9}$<br><br>Resolução 2:<br>$F = \frac{9}{5}C + 32 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow F - 32 = \frac{9}{5}C \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow (F - 32) : \frac{9}{5} = \mathrm{C} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow (F - 32) \times \frac{5}{9} = \mathrm{C} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{5F-160}{9} = C \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow C = \frac{5F-160}{9}$ | - Dificuldade em resolver uma equação do 1º grau a em ordem a uma incógnita com denominadores. | - Relembrar os alunos a proceder de forma semelhante à resolução de equações já trabalhadas anteriormente. |

| 5. Resolução coletiva da questão 4 | 5 minutos |
|---|---|

Vão ser dados 5 minutos para os alunos terem um primeiro contacto com a questão 4, que será resolvida coletivamente no momento seguinte da aula.

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a resolução coletiva.

| Intervalo |
|---|

| 6. Continuação da resolução coletiva da questão 4 | 20 minutos |
|---|---|

A questão 4 vai ser resolvida coletivamente. O professor deve incentivar os alunos a participar, sendo a participação voluntária.

O professor deve promover uma adequada comunicação matemática.

Pedir sugestões aos alunos para resolver a questão 4 e seguir com a resolução que seja mais intuitiva para estes. Fazer as questões orientadoras a partir das estratégias do professor previstas para essa resolução.

Questionar os alunos sobre a possibilidade de haver uma resolução alternativa à apresentada. Se não surgir, o professor deve iniciar a outra resolução permitindo aos alunos prossegui-la coletivamente.

| Questão 4 | | |
|---|---|---|
| | **Dificuldades transversais** | **Respostas e estratégias do professor** |
| | - Interpretação do enunciado: o que é pedido. | - Sugerir o que se deve entender por relacionar variáveis, questionando, por exemplo, que variáveis estão a ser relacionadas em cada uma das equações dadas na tarefa e como se poderão |

| | | |
|---|---|---|
| | -Estabelecer a relação generalizada entre as variáveis F e K.<br><br>-Justificar adequadamente a sua estratégia de resolução.<br><br>- Operar algebricamente de forma correta sobre as equações. | relacionar as variáveis F e K.<br><br>-Promover a generalização da relação entre as variáveis, remetendo os alunos para o caso particular da questão 2.<br><br>-Promover uma adequada comunicação matemática no sentido de os alunos justificarem cada estratégia usada de forma válida.<br><br>- Caso seja necessário, recordar como se procede para operar algebricamente de forma correta. |

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| Resolução 1:<br>$K = C + 273{,}15 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow C = k - 273{,}15$<br><br>Substituir na equação<br>$F = \frac{9}{5}C + 32$<br>$F = \frac{9}{5}(k - 273{,}15) + 32$<br>$= \frac{9}{5}k - 491{,}67 + 32$<br>$= \frac{9}{5}k - 459{,}67$ | - Mobilizar os conhecimentos adquiridos nas questões e discussão anterior para escrever a equação que relaciona Kelvin e Celsius em ordem à variável C.<br><br>-Substituir de forma adequada na equação que relaciona Fahrenheit e Celsius. | -Questionar:<br>i) dado o valor da temperatura em Kelvin como obter o valor correspondente em Celsius;<br><br>ii) a partir do valor em Celsius, obtido da temperatura em Kelvin, $C = k - 237{,}15$, como farias para obter a temperatura em Fahrenheit? |
| Resolução 2:<br>Do exercício 3<br>$C = \frac{5F - 160}{9}$<br><br>Substituir na equação | -Mobilizar os conhecimentos adquiridos nas questões e discussão anterior em particular a | - Questionar:<br>a partir do valor da temperatura em Celsius, obtido da temperatura em Fahrenheit, |

| | | |
|---|---|---|
| $K = C + 273{,}15$<br>$K = \dfrac{5F - 160}{9} + 273{,}15 =$<br>$= \frac{5F-160}{9} + \frac{2458{,}35}{9} =$<br>$= \frac{5F+2298{,}35}{9}$ | relação estabelecida entre Celsius e Fahrenheit por forma a substituir/relacionar de forma correta as duas equações. | $C= \frac{5F-160}{9}$, como farias para obter a temperatura em Kelvin? |

| **7. Resolução a pares das questões 5 e 6** | **15 minutos** |
|---|---|

O professor deve enviar para o *Teams* da turma a folha de cálculo pré-preenchida, "Tarefa 1 - Equações Literais.xlsx", onde os alunos deverão preencher a tabela com as fórmulas adequadas.

Ler o enunciado da questão 5 em conjunto com os alunos, por forma a esclarecer quaisquer dúvidas de interpretação que possam surgir.

Antes de iniciar a resolução a pares da questão 5 e 6, o professor deve dedicar um momento prévio para a explicação da função SE da folha de cálculo, explicando a sua utilidade no contexto do enunciado.

=SE( teste lógico; valor se verdadeiro; valor se falso)

Se teste lógico verdadeiro então devolve valor se verdadeiro

Se teste lógico falso então devolve valor se falso

Fazer em conjunto a primeira linha da tabela, explicando o que deve ser preenchido no primeiro caso.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | Valor a converter | | | Valor convertido | |
| 3 | | | **Celsius para Fahrenheit** | | °C | → | =SE(D3="";"";D3*9/5+32) | °F |
| 4 | | | **Fahrenheit para Celsius** | | °F | → | | °C |
| 5 | | | **Celsius para Kelvin** | | °C | → | | K |
| 6 | | | **Kelvin para Celsius** | | K | → | | °C |
| 7 | | | **Fahrenheit para Kelvin** | | °F | → | | K |
| 8 | | | **Kelvin para Fahrenheit** | | K | → | | °F |
| 9 | | | | | | | | |

Após esta explicação inicial, os alunos devem resolver de forma autónoma as questões 5 e 6.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| **Questão 5** | | |
| **5.** | -Reconhecer para cada caso a fórmula adequada que permita converter o valor da temperatura de uma escala para a outra.<br><br>- Dificuldade na utilização da folha de cálculo. | - Utilizando o caso particular em que o aluno está a ter dificuldade, questionar qual a fórmula que permite colocar o valor a converter e obter o valor convertido na escala pretendida.<br><br>Exemplo:<br>Fahrenheit para Celsius<br>Questão: Qual a fórmula em que colocando o valor da temperatura em Fahrenheit vou obter a temperatura em graus Celsius?<br><br>- Promover o trabalho colaborativo entre pares, no sentido dos alunos se entreajudarem na utilização da folha de cálculo. Orientar os alunos sempre que necessário para o uso correto da ferramenta tecnológica. |
| **Questão 6** | | |
| **6.**<br>Por exemplo:<br>Utilizar os casos particulares das correspondências que já conhecem da resolução de questões anteriores para testar se a sua tabela está bem construída.<br><br>0°C terá de corresponder a 32°F e vice-versa<br><br>100°C terá de corresponder a 373,15 k e vice-versa (ou) | - Escolher os casos particulares mais adequados para testar a tabela de forma eficiente. | - Caso os alunos optem por casos particulares que ainda não tenham sido obtidos em questões anteriores, questionar sobre se existe uma maneira mais eficiente de obter uma correspondência que sabemos ser verdadeira, sugerindo de forma indireta os resultados obtidos anteriormente. |

| | | |
|---|---|---|
| 1811 K terá de corresponder a 1537,85 °C e vice-versa<br><br>1811 K terá de corresponder a 2800,13°F e vice-versa | | |

| **8. Discussão coletiva sobre as questões 5 e 6 no coletivo** | **15 minutos** |
|---|---|

Vão ser corrigidas as questões 5 e 6 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária.

As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro. A par das apresentações das resoluções dos alunos, o professor pode ir escrevendo no quadro as fórmulas que em cada linha permitem converter o valor de temperatura de uma escala para a outra.

Celsius → Fahrenheit : $F = \frac{9}{5}C + 32$

Fahrenheit → Celsius: $C = \frac{5F-160}{9}$

Celsius → Kelvin : $K = C + 273{,}15$

Kelvin → Celsius: $C = k - 273{,}15$

Fahrenheit → kelvin: $K = \frac{5F+2298{,}35}{9}$

Kelvin → Fahrenheit: $F = \frac{9}{5}k - 459{,}67$

Recorrendo ao que foi feito pelos alunos no momento de resolução a pares da questão 6, o professor deve destacar a eficiência da resolução que utiliza os casos particulares das correspondências que já se conhecem das questões anteriores face às potenciais resoluções que utilizem outros valores que os alunos possam vir a testar.

Se os alunos terminarem as questões propostas para realizar em sala de aula num tempo menor que o previsto, o professor deve propor a resolução das questões das páginas 24 e 25 do Manual Escolar.

# **Anexo 3:** Tarefa 1 – parte 2

**Parte 2**

**1.** Identifica quais das equações seguintes são equações literais. Caso não consideres a equação como equação literal, explica porquê.

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$
b) $3xy = 2x + 1$
c) $2x + y = 5$
d) $2x + 1 = \pi$
e) $y = \frac{3-x}{2}$
f) $2b + a = 30$

Questão adaptada de
Conceição, A., & Almeida, M., (2023). *MSI8 – Matemática sob investigação 8.º ANO – ENSINO BÁSICO.* Areal Editores.

**2.** Uma torneira foi aberta para encher de água um depósito.
A altura h, em centímetros, da água no depósito e o tempo t, em minutos, que decorreu desde que a torneira foi aberta estão relacionados por:

$$\frac{h-5}{75} = \frac{t}{10}$$

2.1. Mostra que o par ordenado (t, h) = (8, 65) é solução da equação. Explica o significado desse facto.
2.2. Resolve a equação em ordem a t.
2.3. A torneira é fechada no instante em que a altura da água atingir 1,25 m. Quanto tempo deve estar a torneira aberta?

Questão retirada de
Costa, B., & Rodrigues, E., (2012). *Novo Espaço 8.ºAno*. Porto Editora.

**3.** Resolve cada uma das equações em ordem à letra indicada.

a) $a = (x-3)y$ em ordem a $x$ e com $y \neq 0$
b) $y = \frac{1}{2}(x-2) + 2y$ em ordem a $y$
c) $\frac{a-b}{3} - \frac{3a+2}{6} = b$ em ordem a $b$

**Alíneas Extra:**

d) $y = mx + b$ em ordem a $x$ com $x \neq 0$
e) $t = 2(10 - l - k)$ em ordem a $k$



f) $\frac{x+3}{2} - \frac{3(x+y)}{4} = \frac{y}{4}$ em ordem a $x$

## **Anexo 4:** Plano de aula Tarefa 1 – parte 2

| **Plano de Aula** | |
|---|---|
| | Professora: Anabela Candeias |
| | Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho |
| | Ano: 8.º Turma: B |
| Lição nº 83 | **Sumário**:<br>Conclusão do estudo das Equações literais. Resolução da parte 2 da tarefa: "Equações Literais". |
| Data: 07/03/2023 | |
| Duração:50 minutos | |
| Tema: Álgebra | |
| Tópico: Equações literais | |

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Reconhecer e resolver equações literais do 1.º grau, com duas incógnitas em ordem a uma delas. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| **Recursos** |
|---|

| Do Professor | Dos alunos |
|---|---|
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - "Equações literais -Parte 2"<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita; |

| **Avaliação** |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| **Estrutura da aula** | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução autónoma da questão 1 e 2 | 10 minutos |
| 3. Discussão coletiva das questões 1 e 2 | 10 minutos |
| 4. Resolução autónoma da questão 3 | 15 minutos |
| 5. Discussão coletiva da questão 3 | 10 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
|---|---|

Registo do sumário e marcação de faltas.

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| 2. Resolução autónoma da questão 1 e 2 | 10 minutos |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a discussão oral coletiva.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| **Questão 1** | | |
| **1.**<br>b) c) e) f)<br>Na alínea a), a única variável envolvida é a variável $x$.<br>Na alínea d), a única variável envolvida é a variável $x$. | - Distinguir de forma correta e justificada as equações literais daquelas que não o são, identificando corretamente as variáveis e constantes envolvidas. | - Promover a distinção entre variáveis e constantes, solicitando que identifiquem as variáveis envolvidas em cada equação.<br><br>- Chamar a atenção de que uma equação literal tem mais do que uma variável e portanto terá de existir mais do que um único valor a variar. Questionar em cada situação: Quantos valores estão a variar? |
| **Questão 8** | | |
| **2.**<br><br>**2.1.**<br>$\frac{65-5}{75}=\frac{8}{10}\Leftrightarrow\frac{12}{15}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$ | -Interpretar adequadamente o enunciado.<br><br>-Dada a equação, | - Apoiar na interpretação do enunciado sempre que o professor entender oportuno.<br><br>-Relembrar que ser solução |

| | | |
|---|---|---|
| A igualdade é verdadeira, portanto (8,65) é solução.<br><br>**2.2**<br><br>$\frac{h-5}{75}=\frac{t}{10}\Leftrightarrow\frac{10h-50}{75}=t$<br><br>**(ou)**<br><br>$\frac{10h-50}{750}=\frac{75t}{750}\Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow 10h-50=75t\Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow\frac{10h-50}{75}=t\Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow t=\frac{10h-50}{75}$ | verificar se o par ordenado (8,65) é solução.<br><br>-Saber interpretar a solução (8,65) no contexto do problema.<br><br>- Reconhecer que a unidade da variável $h$ são centímetros e como tal na questão 8.3 deve ser convertido 1,25m em centímetros. | implica uma igualdade verdadeira que decorre da substituição dos valores dados.<br><br>-Questionar os alunos sobre o significado das variáveis no contexto do problema. Questionar o que significa $t=8$ e $h=65$ ?<br><br>- O professor pode questionar sobre a unidade que é dada e se faz sentido no contexto da equação. |
| **2.3**<br><br>1,25 m = 125 cm<br><br>$\frac{125-5}{75}=\frac{t}{10}\Leftrightarrow\frac{8}{5}=\frac{t}{10}\Leftrightarrow t=16$<br><br>R: A torneira deve estar aberta 16 minutos.<br><br>(ou)<br><br>1,25 m = 125 cm<br><br>$t=\frac{10\times 125-50}{75}=$<br><br>$=\frac{1250-50}{75}=\frac{1200}{75}=16$<br><br>R: A torneira deve estar aberta 16 minutos. | -Substituir adequadamente a informação dada no enunciado e compreender as relações estabelecidas entre as variáveis $t$ e $h$.<br><br>- Interpretar o resultado, sendo crítico relativamente aos valores obtidos, tendo em conta os valores que a variável $t$ pode tomar. | - O professor pode questionar: Dada a altura, como podes saber o tempo correspondente?<br><br>-Caso seja necessário, o professor pode questionar se o resultado obtido faz sentido no contexto do problema. |

| **3. Discussão coletiva das questões 1 e 2** | **10 minutos** |
|---|---|

Vão ser corrigidas as questões 7 e 8 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Relembrar a partir das resoluções dos alunos a definição de equação literal, solicitando que estes distingam corretamente variáveis e constantes.

Destacar a eficiência na utilização da equação obtida na 8.2 na resolução da questão 8.3, comparativamente com outras potenciais resoluções.

Promover uma atitude crítica face aos resultados obtidos na resolução da questão 8.

| **4. Resolução autónoma da questão 3** | **15 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a discussão oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| **Questão 9** | | |
| **3.**<br>a)<br>$a = (x-3)y \Leftrightarrow$<br>$\frac{a}{y} = x - 3 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{a}{y} + 3 = x \ , y \neq 0$<br>b)<br>$y = \frac{1}{2}(x-2) + 2y \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow y - 2y = \frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow -y = \frac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2)$<br><br>c)<br>$\frac{a-b}{3} - \frac{3a+2}{6} = b \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \frac{2a-2b}{6} - \frac{3a+2}{6} = \frac{6b}{6} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow 2a - 2b - 3a - 2 = 6b \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow -8b = -2a + 3a + 2 \Leftrightarrow$ | -Resolver uma equação do 1º grau em ordem a uma incógnita com denominadores.<br><br>-Operar algebricamente de forma correta sobre as equações. | - Relembrar os alunos a proceder de forma semelhante à resolução de equações já trabalhadas anteriormente.<br><br>- Caso seja necessário, recordar como se procede para operar algebricamente de forma correta. |

| | | |
|---|---|---|
| $\Leftrightarrow -8b = a + 2 \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow b = -\dfrac{a+2}{8}$ | | |

| | |
|---|---|
| **5. Discussão coletiva da questão 3** | **10 minutos** |

Vai ser corrigida a questão 9 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Se os alunos terminarem as questões propostas para realizar em sala de aula num tempo menor que o previsto, o professor deve propor a resolução das alíneas extra e as questões das páginas 24 e 25 do Manual Escolar.

## **Anexo 5:** Tarefa 2

| | | |
|---|---|---|
| COLÉGIO MILITAR<br>Fundado em 1803 | **COLÉGIO MILITAR** | |
| ANO LETIVO<br>2023/2024<br>**março 2024** | **Tarefa 2 – Introdução aos Sistemas de Equações**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________________ **TURMA** ___<br>**Nº**_______ | |

**"No Cinema"**

**1.** Na bilheteira de um cinema a Salomé viu um cartaz com duas opções para a aquisição de bilhetes. Como a Salomé gosta muito de assistir a filmes no cinema, ficou a pensar que opção será mais vantajosa para este ano.

| Opção A | Opção B |
|---|---|
| Assinatura anual de 28 €, mais 3 € por cada sessão | 6,5 € por cada sessão |

1.1 Ajuda a Salomé a decidir qual das opções apresenta mais vantagem. Para te auxiliar na decisão, utiliza a folha de cálculo "Tarefa 2 – No cinema.xlsx", preenchendo a tabela, onde vais relacionar o número $x$ de sessões e o preço a pagar em cada opção. Apresenta uma sugestão à Salomé, justificando-a, com elementos da tabela.

1.2 A partir da tabela que construíste na questão anterior, representa graficamente com o auxílio da folha de cálculo, num mesmo referencial, as funções que descrevem a opção A e a opção B. Grava esse ficheiro.

1.3 Indica, a partir das representações gráficas anteriores, quais as coordenadas do seu ponto de interseção e o que representa esse ponto no contexto do problema.

1.4 Explica a sugestão que apresentaste em 1.1 agora através da representação gráfica das duas funções.

## **Anexo 6:** Plano de aula da Tarefa 2

<table>
<tr><th colspan="2">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Professora: Anabela Candeias</td></tr>
<tr><td>Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho</td></tr>
<tr><td>Ano: 8.º Turma: B</td></tr>
<tr><td>Lição nº 84</td><td rowspan="3">Sumário:<br>Introdução aos sistemas de duas equações.<br>Resolução da tarefa 2: “No cinema”.</td></tr>
<tr><td>Data: 08/03/2024</td></tr>
<tr><td>Duração: 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas</td></tr>
</table>

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| **Recursos** |
|---|

| Do Professor | Dos alunos |
|---|---|
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - "No cinema"<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita;<br>• *iPad*;<br>• Folha de cálculo. |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| **Estrutura da aula** | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução individual da questão 1.1 | 10 minutos |
| 3. Discussão coletiva da questão 1.1 | 10 minutos |
| 4. Resolução coletiva da questão 1.2 | 5 minutos |
| 5. Resolução individual das questões 1.3 e 1.4 | 10 minutos |
| 6. Discussão coletiva das questões 1.3 e 1.4 e síntese final | 10 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
|---|---|

Registo do sumário e marcação de faltas.

Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa “No cinema”.

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| 2. Resolução individual da questão 1.1 | 10 minutos |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a discussão oral coletiva.

<table>
<tr><th>Resolução</th><th>Possíveis dificuldades dos alunos</th><th>Respostas e estratégias do professor</th></tr>
<tr><th colspan="3">Questão 1.1</th></tr>
<tr><td>1.1<br>
<table>
<tr><th>nº de sessões</th><th>opc 1</th><th>opc 2</th></tr>
<tr><td>1</td><td>31</td><td>6,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>34</td><td>13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>37</td><td>19,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>40</td><td>26</td></tr>
<tr><td>5</td><td>43</td><td>32,5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>46</td><td>39</td></tr>
<tr><td>7</td><td>49</td><td>45,5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>52</td><td>52</td></tr>
<tr><td>9</td><td>55</td><td>58,5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>58</td><td>65</td></tr>
<tr><td>11</td><td>61</td><td>71,5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>64</td><td>78</td></tr>
<tr><td>13</td><td>67</td><td>84,5</td></tr>
<tr><td>14</td><td>70</td><td>91</td></tr>
<tr><td>15</td><td>73</td><td>97,5</td></tr>
<tr><td>16</td><td>76</td><td>104</td></tr>
</table></td>
<td>- Interpretação do enunciado: o que é dado e o que é pedido.<br><br>- Preencher a tabela com as fórmulas corretas, apoiando-se eventualmente nas expressões algébricas adequadas a cada situação.<br><br>- Tirar partido das funcionalidades da folha de cálculo para</td>
<td>- Apoiar na interpretação do enunciado sempre que o professor entender oportuno.<br><br>- Solicitar que os alunos escrevam a expressão algébrica que descreve cada uma das opções e/ou descrevam a fórmula adequada que lhes permite obter o custo, por exemplo, para uma sessão em cada um dos casos. E para duas sessões?<br><br>-Se o aluno optar por preencher a tabela sem recurso às fórmulas da</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| R: Até às 7 sessões por ano, a opção mais vantajosa é a opção 2.<br><br>Para ir a 8 sessões por ano, o custo de ambas a opção é igual.<br><br>A partir das 9 sessões por ano, a opção mais vantajosa é a opção 1. | preencher a tabela de forma eficiente.<br><br>- Dificuldade na utilização da folha de cálculo.<br><br>- Interpretar os resultados obtidos na tabela de forma adequada e tirar conclusões tendo em conta o contexto do problema. | folha de cálculo, o professor deve apoiar no sentido de mais tarde mostrar que existia uma opção mais eficiente utilizando os recursos da própria folha de cálculo.<br><br>- Promover o trabalho colaborativo entre pares, no sentido dos alunos se entreajudarem na utilização da folha de cálculo. Orientar os alunos sempre que necessário para o uso correto da ferramenta tecnológica.<br><br>-O professor deve sugerir que os alunos comparem os valores para cada opção pedindo-lhes a cada momento as suas observações e conclusões sobre o que será mais vantajoso. |

| 3. Discussão coletiva da questão 1.1 | 10 minutos |
|---|---|

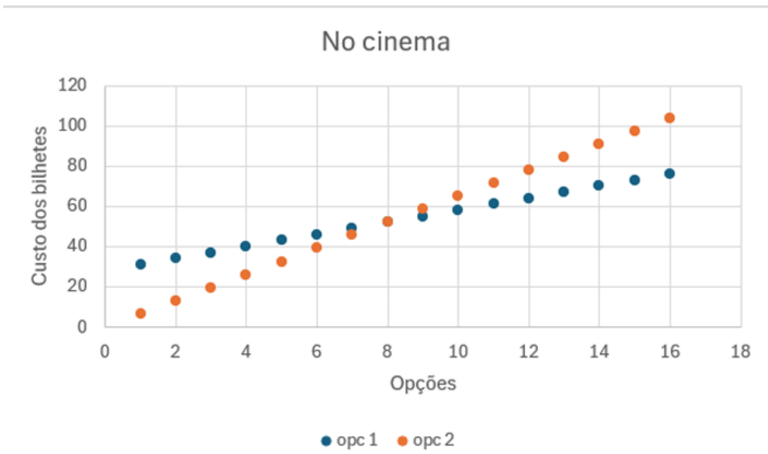
Vai ser corrigida a questão 1.1 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Explorar erros comuns que possam surgir, assim como comparar diferentes resoluções, destacando as mais eficientes.

| **4. Resolução coletiva da questão 1.2** | **5 minutos** |
|---|---|

O professor deverá projetar a folha de cálculo com a tabela da questão 1.1 preenchida e a partir daí resolver a questão 1.2 em conjunto com os alunos.

| Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|
| **Questão 1.2** | |
| - Dificuldade na utilização da folha de cálculo | - Esclarecer dúvidas relacionadas com a representação gráfica através da folha de cálculo. |
| **Resolução** | |
|   | |

| **5. Resolução individual das questões 1.3 e 1.4** | **10 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a discussão oral coletiva.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| **Questão 1.3** | | |
| **1.3**<br>O ponto de interseção dos dois gráficos é (8,52).<br>O número de sessões para o qual o custo da opção 1 e o custo da opção 2 são iguais.<br>Para assistir a 8 sessões, o custo de ambas opções são 52 euros. | - Determinar o ponto (8,52) como o ponto de interseção.<br><br>-Dar sentido ao ponto de interseção no contexto do problema, mobilizando as conclusões retiradas da questão 1.1, relacionando dessa forma ambas as representações (tabular e gráfica). | - Indicar explicitamente que podem utilizar a folha de cálculo para determinar as coordenadas dos diferentes pontos sobre as retas.<br><br>-Promover a relação entre a informação tabular e gráfica assim como as conclusões da questão 1.1 por forma a se atribuir sentido ao ponto de interseção. |
| **Questão 1.4** | | |
| **1.4**<br>À semelhança do que se observa na tabela da questão 1.1:<br>Verifica-se através da representação gráfica que o valor da função que representa o custo associado à opção 2, assume um valor menor até à 7ª sessão, isto é, para $x \leq 7$, visualiza-se que os pontos que representam o custo associado à opção 2, se encontram abaixo dos pontos associados à opção 1.<br>Para $x = 8$, o valor assumido por ambas as funções é igual a 52. As representações gráficas coincidem no ponto (8,52), pelo que neste caso, o custo é o mesmo.<br>E para $x \geq 9$, o valor assumido pela função que representa o custo da | -Interpretar a representação gráfica de ambas as funções, tendo em conta o contexto problema.<br><br>-Relacionar a representação gráfica com a representação tabular e com as conclusões retiradas na questão 1.1. | -Apoiar na análise dos gráficos por forma a que os alunos atribuam sentido à relação entre as representações gráficas e a informação tabular questionando o que verificam até ao ponto da interseção, no ponto de interseção, e depois desse ponto. |

| | | |
|---|---|---|
| opção 1 é menor, visualizando-se na representação gráfica que os pontos que representam o custo associado à opção 1, se encontram abaixo dos pontos associados à opção 2. | | |

| 6. Discussão coletiva das questões 1.3 e 1.4 e síntese final | 10 minutos |
|---|---|

Vão ser corrigidas as questões 1.3 e 1.4 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Explicitar com a contribuição dos alunos, cada equação relacionada com cada opção, relacionando-as com o que foi feito na folha de cálculo na questão 1.1.

$y = 3x + 28 \rightarrow$ custo em euros da opção A na compra de $x$ bilhetes

$y = 6{,}5x \rightarrow$ custo em euros da opção B na compra de $x$ bilhetes

Introduzir os sistemas de equações, estabelecendo a relação do ponto de interseção com a igualdade entre as duas equações, ou seja, qual é que é o número de sessões em que o custo dos bilhetes é igual, neste caso ambas as equações vão ser verificadas em simultâneo, isto é, para o mesmo valor de sessões resulta o mesmo custo.

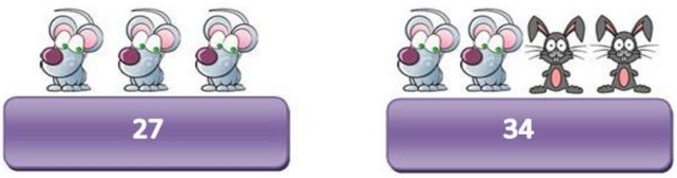
$$\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 6{,}5x \end{cases}$$

**Anexo 7:** Tarefa 3

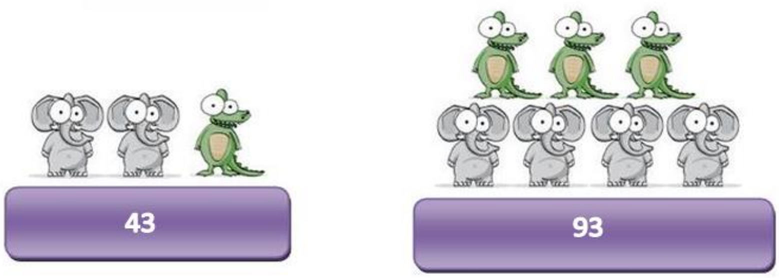
| | | |
|---|---|---|
| ANO LETIVO 2023/2024 **março 2024** | **COLÉGIO MILITAR** | |
| | **Tarefa 3 – Introdução ao método da substituição**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________________ **TURMA** ___<br>**Nº**________ | |

**1.** Para cada uma das situações seguintes determina o valor associado a cada animal. Explica todos os procedimentos que efetuares.

**Situação 1**




**Situação 2**

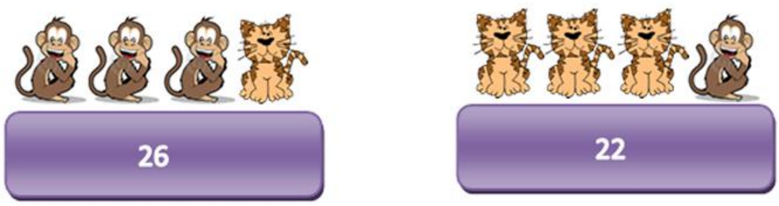



[1] Tarefa adaptada de Nobre, S. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano* [Tese de doutoramento]. Instituto de Educação. http://hdl.handle.net/10451/25071

**2.** Para cada uma das situações seguintes escreve um sistema de duas equações para determinar o valor associado a cada figura ou objeto e resolve-o usando o método da substituição.

**<u>Situação 1</u>**


**<u>Situação 2</u>**




2

Tarefa adaptada de Nobre, S. (2016). *O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano* [Tese de doutoramento]. Instituto de Educação. http://hdl.handle.net/10451/25071

## **Anexo 8 –** Plano de aula da Tarefa 3

<table>
<tr><th colspan="2">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Professora: Anabela Candeias</td></tr>
<tr><td>Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho</td></tr>
<tr><td>Ano: 8.º Turma: A/B</td></tr>
<tr><td>Lições nº 81 e 82/<br>nº 85 e 86</td><td rowspan="3">Sumário:<br>Resolução da tarefa 3: “Introdução ao método da substituição”.</td></tr>
<tr><td>Data: 13/03/2024</td></tr>
<tr><td>Duração:50 + 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas</td></tr>
</table>

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Resolver problemas que envolvam sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação;<br>• Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo ao método da substituição. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| Recursos | |
|---|---|
| Do Professor | Dos alunos |
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - "Introdução ao método da substituição"<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita; |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| Estrutura da aula | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 10 minutos |
| 2. Resolução individual da situação 1 da questão 1 | 10 minutos |
| 3. Discussão coletiva sobre a situação 1 da questão 1 | 10 minutos |
| 4. Síntese com introdução ao método da substituição a partir das resoluções da situação 1 e resolução coletiva da situação 2 | 20 minutos |
| **Intervalo** | |

| | |
|---|---|
| 5. Resolução individual da questão 2 | 25 minutos |
| 6. Correção coletiva da questão 2 | 25 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| 1. Introdução da aula | 10 minutos |
|---|---|

Registo do sumário e marcação de faltas.

Retomar o problema da aula anterior, escrevendo o sistema de duas equações que o traduz, promovendo a conexão entre o verificado graficamente e a resolução algébrica.

Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa "Introdução ao método da substituição".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

Formação dos pares para a resolução da tarefa.

| 2. Resolução individual da situação 1 da questão 1 | 10 minutos |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| **Questão 1: Situação 1** | | |
| **1.**<br>Situação 1:<br>Estratégia 1:<br>Recorrer à experimentação, substituindo valores para cada animal e através da tentativa e erro, determinar os valores que | - Interpretação da informação dada no enunciado.<br><br>- Estabelecer relações entre as informações presentes nas imagens e os valores a determinar. | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do enunciado.<br><br>-Apoiar no estabelecimento de relações entre as informações presentes nas imagens e os valores a |

| | | |
|---|---|---|
| satisfazem as condições do enunciado.<br><br>(ou)<br><br><u>Estratégia 2:</u><br><br>Em linguagem natural:<br><br>Como três cães somam 27 então cada cão tem o valor de 9.<br><br>Na outra figura temos que dois cães mais dois coelhos somam 34, e como dois cães somam 18, então os coelhos dão 16. Portanto cada coelho tem o valor de 8. | -Formalizar algebricamente as equações que podem descrever cada condição. | determinar, questionando em cada situação as condições que têm de ser garantidas.<br><br>-Questionar como se pode traduzir em linguagem simbólica as condições apresentadas no enunciado.<br><br>-Caso alguns alunos optem por recorrer à linguagem natural na resolução do problema, o professor pode incentivar o uso da linguagem simbólica. |
| <u>Estratégia 3:</u><br><br>$x$ - valor associado ao cão<br><br>$3x = 27 \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow x = \frac{27}{3} = 9$<br><br>o valor do cão é 9, portanto:<br><br>$y$ - valor associado ao coelho<br><br>$18 + 2y = 34 \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow 2y = 34 - 18 \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow 2y = 16 \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow y = \frac{16}{2} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow y = 8$ | -Estabelecer de forma adequada as substituições necessárias para resolver o problema. | - Questionar: Consegues relacionar de alguma forma a primeira condição com a segunda condição? |

| 3. Discussão coletiva sobre a situação 1 da questão 1 | 10 minutos |
|---|---|

Vai ser corrigida a situação 1 da questão 1 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Caso surjam, devem ser selecionadas diferentes resoluções para serem apresentadas neste momento. As resoluções devem ser apresentadas pelos alunos por ordem de formalismo crescente, de forma a atingir o propósito matemático da aula. O professor deve promover a comparação entre as diferentes resoluções, destacando as mais eficientes.

| **4. Síntese com introdução ao método da substituição a partir das resoluções da situação 1 e resolução coletiva da situação 2** | **20 minutos** |
|---|---|

(1) Sistema de duas equações a duas incógnitas

Incentivar os alunos a escrever um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que traduza a situação 1.

Obter o sistema de equações:

Seja,

$x -$ valor associado ao cão

$y - valor\ associado\ ao\ coelho$

$$\begin{cases} 3x = 27 \\ 2x + 2y = 34 \end{cases}$$

Resolver o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas recorrendo ao método da substituição em diálogo com os alunos, fazendo questões que remetam para a resolução que estes elaboraram na questão 1.

$$\begin{cases} 3x = 27 \\ 2x + 2y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{27}{3} \\ 2x + 2y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 2x + 2y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 2 \times 9 + 2y = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ 18 + 2y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 2y = 34 - 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 2y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = \dfrac{16}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}$$

$S = \{(9,8)\}$

Questionar como se pode verificar se o par ordenado obtido é de facto solução do sistema.

Verificar que o par ordenado (9,8) é solução do sistema inicial.

$$\begin{cases} 3 \times 9 = 27 \\ 2 \times 9 + 2 \times 8 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 = 27 \\ 18 + 16 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 = 27 \\ 34 = 34 \end{cases}$$

(2) Método de substituição para a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

1º Passo: Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas

2º Passo: Substituir, na outra equação, a incógnita pela expressão correspondente, obtendo-se assim uma equação com uma só incógnita.

3º Passo: Resolver a equação que tem só uma incógnita.

4º Passo: Substituir o resultado obtido na outra equação e escrever a solução.

5º Passo: Explicitar o par ordenado que é solução do sistema.

Resolução coletiva do sistema de duas equações que traduz a situação 2 da questão 1 através do método da substituição. Destacar que a resolução informal que poderia ter sido feita, nem sempre é possível, e como tal o processo de resolução algébrico através deste método pode ser aplicado em todas as situações.

$$\begin{cases} 2x + y = 43 \\ 4x + 3y = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ 4x + 3y = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ 4x + 3(43 - 2x) = 93 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ 4x + 129 - 6x = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ -2x = 93 - 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ -2x = -36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ x = \dfrac{-36}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2x \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 2 \times 18 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 43 - 36 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 18 \end{cases}$$

$S = \{(18,7)\}$

**Intervalo**

| **5. Resolução individual da questão 2** | **25 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|

| Questão 2 | | |
|---|---|---|
| **2.**<br>Situação 1:<br>Seja:<br>$x - valor\ do\ caderno\ em\ euros$<br>$y - valor\ do\ lápis\ em\ euros$ | - Escrever um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que traduza cada uma das situações. | - Questionar: Tendo em conta a situação, identifica as incógnitas que queremos determinar. Como é que elas se podem relacionar, tendo em conta o contexto do problema? |
| $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 2x + (8 - x) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ 2x + 8 - x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x = 14 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$ | -Mobilizar os conhecimentos dos momentos anteriores da aula, de forma a utilizar o método da substituição para resolver o sistema. | - Remeter os alunos para o que foi sintetizado no momento anterior da aula, incentivando à autonomia e cooperação entre os colegas. |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - 6 \\ x = 6 \end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases} \quad S = \{(6,2)\}$<br>Em alternativa os alunos podem escrever $x + y = 8$ em ordem a $x$ e substituir na equação $2x + y = 14$. | - Ser crítico relativamente aos valores obtidos, no contexto do problema. | - Questionar se os valores obtidos fazem sentido no contexto de cada situação.<br>-Incentivar à verificação se o par obtido é de facto solução do sistema.<br>- Enfatizar a interpretação da solução obtida no contexto do problema. |
| Situação 2:<br>Seja:<br>$x - valor\ associado\ ao\ macaco$<br>$y - valor\ associado\ ao\ tigre$<br>$\begin{cases} 3x + y = 26 \\ 3y + x = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 26 \\ x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(22 - 3y) + y = 26 \\ x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 66 - 9y + y = 26 \\ x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow$ | -Operar algebricamente de forma correta sobre as equações. | - Caso seja necessário, recordar como se procede para operar algebricamente de forma correta. |

| | | |
|---|---|---|
| $\Leftrightarrow \begin{cases} -8y = 26 - 66 \\ x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} -8y = -40 \\ x = 22 - 3y \end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-40}{-8} \\ x = 22 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 22 - 3 \times 5 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 7 \end{cases} \quad S = \{(7,5)\}$<br>Em alternativa, os alunos podem escrever $3x + y = 26$ em ordem a $y$, e substituir na equação $3y + x = 22$. | | |

| 6. **Discussão coletiva da questão 2** | **25 minutos** |
|---|---|

Vai ser corrigida a questão 2 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Se os alunos terminarem as questões propostas para realizar em sala de aula num tempo menor que o previsto, o professor deve propor a resolução da questão extra e as questões das páginas 27, 28 e 29 do Manual Escolar.

# **Anexo 9:** Tarefa 4

| | | |
|---|---|---|
| COLÉGIO MILITAR | **COLÉGIO MILITAR** | |
| ANO LETIVO 2023/2024 **março 2024** | **Tarefa 4 – Resolução gráfica e classificação de sistemas**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________________ **TURMA** ___<br>**Nº**_______ | |

1. Recorda a tarefa "No cinema".

   1.1. Determina algebricamente a solução do sistema de duas equações associadas às opções A e B dessa tarefa, recorrendo agora ao método da substituição.

2. Durante um período de tempo, a direção do cinema decidiu fazer uma promoção para atrair mais clientes, criando uma nova opção - opção C -, em que o bilhete para cada sessão custará 3€ e não terá o pagamento de uma anuidade.

   2.1. Recorrendo ao Geogebra, verifica através da representação gráfica se existe um número de sessões para o qual o custo da opção A e o da opção C sejam iguais. Explica o teu raciocínio.

   2.2. Verifica algebricamente o resultado que indicaste na alínea anterior e explica o teu raciocínio.

3. Considera o seguinte sistema de duas equações.

$$\begin{cases} 2y - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$$

   3.1. Representa graficamente o sistema anterior, no Geogebra. O que podes concluir relativamente à sua solução?
   3.2. Resolve algebricamente o sistema anterior. O que concluis?
   3.3. Explica a relação entre o que concluíste nas questões 3.1 e 3.2.

## **Anexo 10:** Plano de aula da Tarefa 4

<table>
<tr><th colspan="2">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Professora: Anabela Candeias</td></tr>
<tr><td>Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho</td></tr>
<tr><td>Ano: 8.º Turma: A/B</td></tr>
<tr><td>Lições nº 85 e 86/<br>nº 89 e 90</td><td rowspan="3">Sumário:<br>Resolução da tarefa 4: “Resolução gráfica e classificação de sistemas”.</td></tr>
<tr><td>Data: 20/03/2024</td></tr>
<tr><td>Duração:50 + 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas</td></tr>
</table>

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| **Recursos** |
|---|

| Do Professor | Dos alunos |
| --- | --- |
| ● Computador;<br>● Projetor;<br>● Quadro e giz;<br>● Grelhas de registo de participações;<br>● Tarefa - "Resolução gráfica e classificação de sistemas"<br>● Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | ● Cadernos Diários;<br>● Material de Escrita;<br>● Geogebra;<br>● *iPad.* |

| **Avaliação** |
| --- |
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>● da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>● dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| **Estrutura da aula** | |
| --- | --- |
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução coletiva da questão 1 | 10 minutos |
| 3. Resolução individual da questão 2 | 20 minutos |
| 4. Discussão coletiva sobre a questão 2 | 15 minutos |
| **Intervalo** | |
| 5. Resolução individual da questão 3 | 20 minutos |

| | |
|---|---|
| 6. Discussão coletiva da questão 3 | 15 minutos |
| 7. Síntese final sobre classificação de sistemas de duas equações | 15 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| | |
|---|---|
| **1. Introdução da aula** | **5 minutos** |

Registo do sumário e marcação de faltas.

Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa: "Resolução gráfica e classificação de sistemas".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| | |
|---|---|
| **2. Resolução coletiva da questão 1** | **10 minutos** |

A questão 1 vai ser resolvida coletivamente. O professor deve incentivar os alunos a participar, sendo a participação voluntária.

O professor deve promover uma adequada comunicação matemática.

Pedir sugestões aos alunos para resolver a questão 1 e seguir com a resolução que seja mais intuitiva para estes.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| **Questão 1** | | |
| **1.1**<br>$\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 6{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 6{,}5x = 3x + 28 \\ y = 6{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 6{,}5x - 3x = 28 \\ y = 6{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3{,}5x = 28 \\ y = 6{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow$ | - Relembrar o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas que traduzem cada uma das opções.<br><br>- Mobilizar os conhecimentos da aula anterior, de forma a utilizar o método da substituição para | - Se for necessário relembrar o problema aos alunos para que estes o formalizem através de um sistema de duas equações.<br><br>- Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo; |

| | | |
|---|---|---|
| $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{3,5} \\ y = 6,5x \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6,5x \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6,5 \times 8 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 52 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$S = \{(8,52)\}$ | resolver o sistema.<br><br>- Ser crítico relativamente aos valores obtidos, tendo em conta o contexto do problema.<br><br>- Estabelecer relação entre a resolução gráfica feita em aulas anteriores e a resolução algébrica do sistema, sendo crítico com os valores obtidos. | - Questionar se os valores obtidos fazem sentido no contexto do problema e se correspondem ao esperado, tendo em conta a resolução feita em aulas anteriores. |

| **3. Resolução individual da questão 2** | **20 minutos** |
|---|---|

Antes de se iniciar a resolução individual da questão 2, o professor deve partilhar com os alunos um código para uma sala no Geogebra, de forma a ter acesso às resoluções dos alunos às questões 2 e 3 da tarefa.

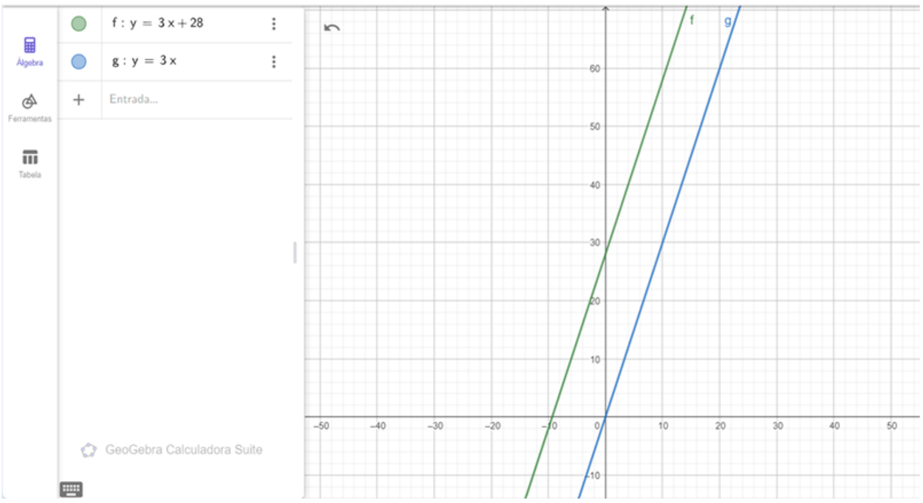
Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|
| **Questão 2** | |
| **2.1**<br>- Interpretação do enunciado: o que é dado e o que é pedido.<br><br>- Formalizar algebricamente através de um sistema de duas equações a nova situação, tendo em conta a opção C.<br><br>-Dificuldade na utilização da ferramenta | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do enunciado. Se for necessário, o professor deve ler em conjunto com os alunos o enunciado da questão 2.<br><br>- Solicitar que os alunos escrevam a expressão algébrica que descreve cada uma das opções a considerar neste caso. |

| | |
|---|---|
| Geogebra para introduzir as equações.<br><br>-Reconhecer que o ponto de intersecção das retas que representam o custo para cada opção, seria a solução do sistema de duas equações.<br><br>-Reconhecer e justificar que as retas que representam o custo da opção A e o custo da opção C são paralelas.<br><br>-Interpretar a representação gráfica, tirando conclusões tendo em conta o contexto do problema.<br><br>**2.2**<br>-Aplicar de forma adequada o método da substituição.<br><br>-Identificar que através da resolução algébrica se chega a uma equação impossível ($0x = 28$). | -Apoiar no uso do GeoGebra, podendo exemplificar com projeção onde o professor mostra a cada passo o que se pretende.<br><br>-Relembrar a questão 1.1 e a relação entre a resolução gráfica (ponto de interseção) e a resolução algébrica, sendo a solução determinada por um par ordenado.<br><br>- Questionar:<br>(i) Como podemos ter certeza que as retas não se intersectam?<br>(ii) O que é isso significa no contexto do problema?<br><br>-Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo;<br><br>- Questionar para que valor de $x$ a igualdade obtida é verdadeira, isto é, qual será o número que multiplicado por 0 dá 28. |

**Resolução**

**2.1**



Não existe um número de sessões para o qual o custo da opção A e da opção C seja igual uma vez que as retas não se intersectam em nenhum ponto. Isto verifica-se porque as reta que representam o custo para a opção A e para a opção C são paralelas (têm o mesmo declive).

**2.2**

$$\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3x = 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 28 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$S = \{ \}$$

Como o conjunto solução é vazio, não existe um nº de sessões em que as opções A e C sejam iguais, ou seja, as opções A e C têm sempre custos diferentes.

| **4. Discussão coletiva sobre a questão 2** | **15 minutos** |
|---|---|

Vai ser corrigida a questão 2 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Incentivar a apresentação de justificações válidas na apresentação de ambas as resoluções, promovendo o diálogo entre os alunos, assim como o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos.

Promover o estabelecimento de conexões entre a resolução gráfica e a resolução algébrica, procurando em cada momento que os alunos as comparem, reconhecendo-as como resoluções alternativas para o mesmo problema.

Identificar o sistema como impossível.

| Intervalo |
|---|

| 5. Resolução individual da questão 3 | 20 minutos |
|---|---|

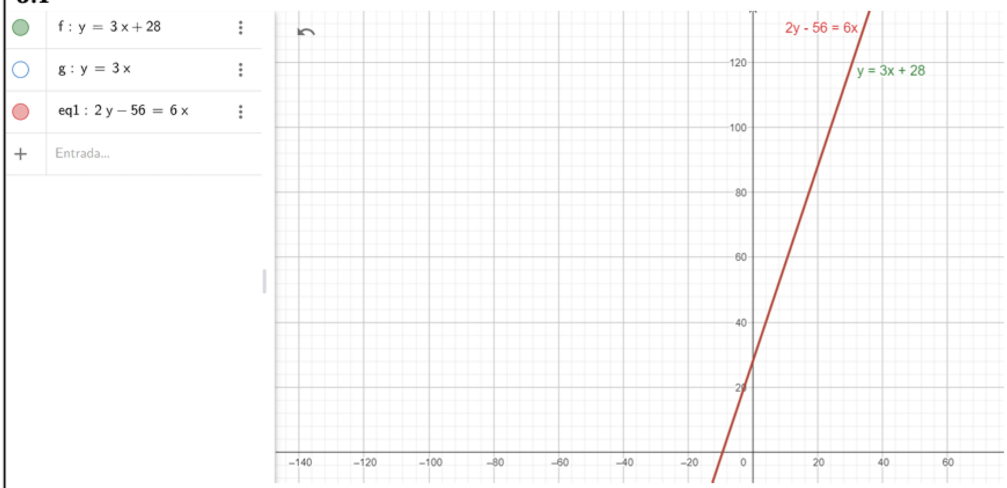
Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|
| **Questão 3** | |
| **3.1**<br>-Dificuldade na utilização da ferramenta Geogebra para introduzir as equações. | - Promover o trabalho colaborativo entre pares, no sentido dos alunos se entreajudarem na utilização do Geogebra. Orientar os alunos sempre que necessário para o uso correto da ferramenta tecnológica. |
| -Escrever a 2ª equação em ordem a y. | - Recordar como se pode proceder para escrever uma equação em ordem a uma das incógnitas. |
| -Interpretar a representação gráfica, identificando que existem infinitos pontos comuns às duas retas representadas. | -Solicitar aos alunos que identifiquem o ponto de interseção entre as duas retas representadas. |
| **3.2**<br>-Aplicar de forma adequada o método da substituição. | -Se for necessário, relembrar o método ou partes do mesmo. Questionar se no sistema dado já temos algum dos passos do método assegurado. |
| -Reconhecer que se tratam de equações equivalentes. | - Questionar se podemos obter a segunda equação a partir da primeira. |
| - Reconhecer que as equações são | |

| | |
|---|---|
| possíveis para todos os valores de $x$ e y que verificam $\begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$.<br><br>- Reconhecer que embora infinitas, nem todas os pares ordenados são soluções do sistema.<br><br>**3.3**<br><br>- Reconhecer a relação entre resolução gráfica e a resolução algébrica, reconhecendo-as como resoluções alternativas, em que se obtém a mesma solução. | -Questionar:<br>i) É possível determinar uma só solução como na questão 1.1?<br>ii) Qualquer par ordenado é solução do sistema? Neste caso, pode ser incentivada a experimentação, através de uma tabela.<br>iii) Remeter para a resolução gráfica feita na questão anterior.<br><br>-Promover a relação entre a resolução gráfica e a resolução algébrica questionado os alunos sobre o que se obtém em cada uma delas. |

**Resolução**

**3.1**




Como as retas são coincidentes, têm todos os pontos em comum, e como tal, todos os pontos que estão sobre a reta são solução do sistema.

**3.2**

$$\begin{cases} 2y - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(3x + 28) - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 56 - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$$

As equações são possíveis para todos os valores de $x$ e y que verificam $\begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$

**3.3**
Como as retas são coincidentes, têm todos os pontos em comum, e como tal, todos os pontos que estão sobre a reta verificam as equações do sistema. Assim, todos estes pontos são soluções do sistema.

| **6. Discussão coletiva da questão 3** | **15 minutos** |
|---|---|

Vai ser corrigida a questão 3 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Incentivar a apresentação de justificações válidas na apresentação de ambas as resoluções, promovendo o diálogo entre os alunos, assim como o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos.

Promover o estabelecimento de conexões entre a resolução gráfica e a resolução algébrica, procurando em cada momento que os alunos as comparem, reconhecendo-as como resoluções alternativas para o mesmo problema.

Identificar o sistema como possível indeterminado e verificar a partir da resolução gráfica que as equações do sistema são equivalentes.

$$\begin{cases} 2y - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6x + 56 \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{56}{2} \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

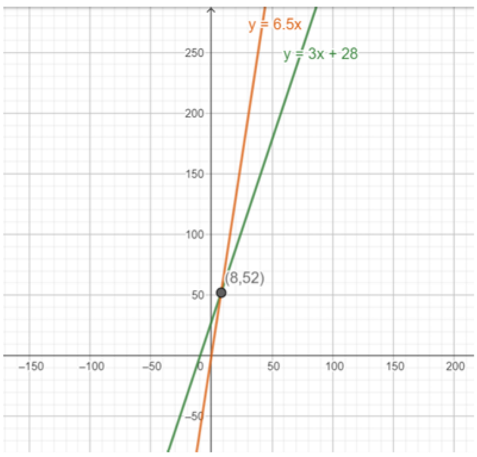
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 3x + 28 \end{cases}$$

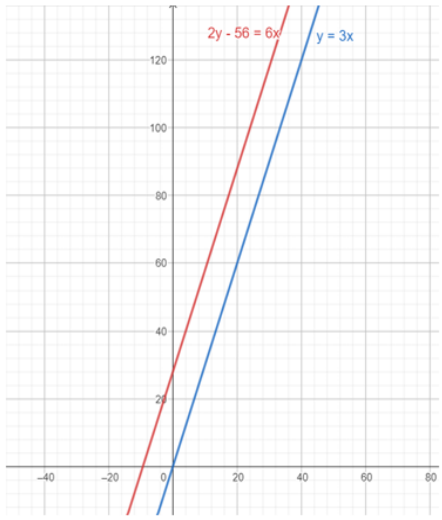
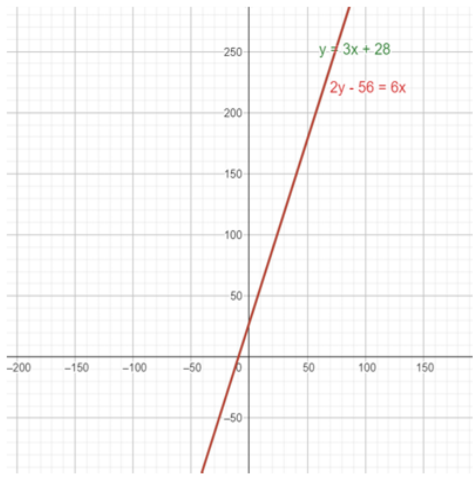
Destacar, recorrendo à representação gráfica, que como as retas são coincidentes, têm todos os pontos em comum, e como tal, todos os pontos que estão sobre a reta são solução do sistema.

Qualquer par ordenado é solução do sistema? Neste caso, pode ser incentivada a experimentação, através de uma tabela, promovendo a conexão entre representação gráfica e representação algébrica, no sentido de mostrar que embora existam infinitos pontos que são solução, esses não são arbitrários, pois são os que estão sobre a reta, verificando $y = 3x + 28$, identificando o sistema como possível indeterminado.

| **7. Síntese final sobre classificação de sistemas de duas equações** | **15 minutos** |
|---|---|

Entregar a seguinte tabela pré-preenchida com cada um dos casos resolvidos nas questões propostas.

| **Resolução algébrica** | **Resolução gráfica** | **Classificação do sistema** |
|---|---|---|
| $\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 6,5x \end{cases} \Leftrightarrow$ <br> … <br> $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 52 \end{cases}$ <br> $S = \{(8, 52)\}$ |   | |

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3x = 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 28 \\ y = 3x \end{cases}$<br><br>$S = \{\ \}$ |  | |
| $\begin{cases} 2y - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>…<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$<br><br>**Nota:**<br>As duas equações são equivalentes. |  | |

Questionar os alunos sobre diferenças entre cada uma das questões resolvidas, em particular, nas suas resoluções gráficas e resoluções algébricas, no sentido de compreenderem que as questões são qualitativamente distintas.

Preencher em diálogo com os alunos a última coluna da tabela, de forma a classificar os sistemas, de acordo com as suas resoluções (gráfica e algébrica) e obter a seguinte tabela.

<table>
<tr><th>Resolução algébrica</th><th>Resolução gráfica</th><th>Classificação do sistema</th></tr>
<tr><td>

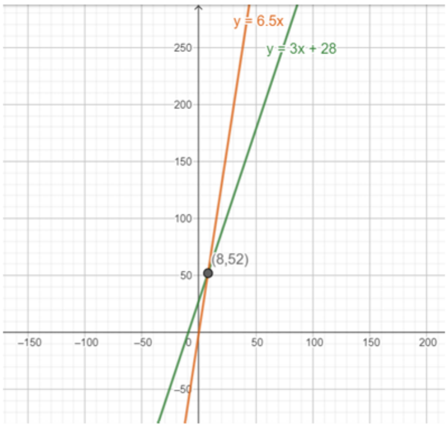
$\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 6,5x \end{cases} \Leftrightarrow$

…

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 52 \end{cases}$

$S = \{(8, 52)\}$

</td><td>




</td><td>

O sistema é **possível determinado**.

As duas retas intersetam-se num único ponto.

O sistema tem uma só solução.

</td></tr>
<tr><td>

$\begin{cases} y = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

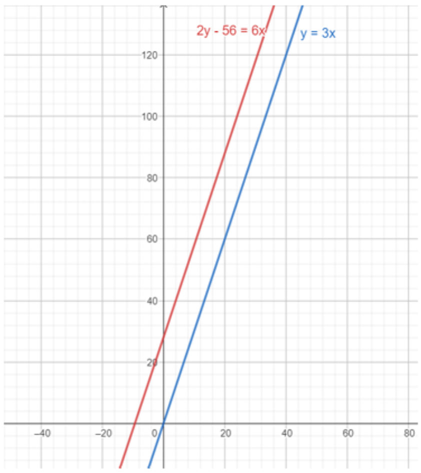
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3x + 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3x = 28 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 28 \\ y = 3x \end{cases}$

$S = \{\ \}$

</td><td>




</td><td>

O sistema é **impossível**.

As duas retas são estritamente paralelas (não têm nenhum ponto em comum).

</td></tr>
<tr><td>

$\begin{cases} 2y - 56 = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow$

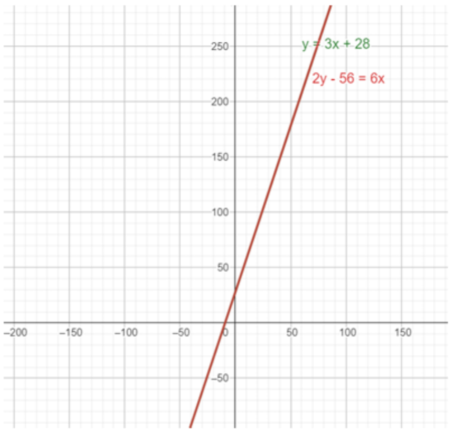
…

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6x \\ y = 3x + 28 \end{cases}$

**Nota:**
As duas equações são equivalentes.

$2y - 56 = 6x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 3x + 28$

</td><td>




</td><td>

O sistema é **possível indeterminado**.

As duas retas são coincidentes (têm todos os pontos em comum).

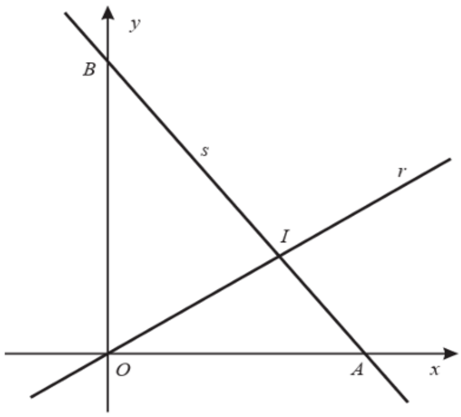
O sistema tem uma infinidade de soluções.

</td></tr>
</table>

**Anexo 11:** Tarefa 5

| COLÉGIO MILITAR | **COLÉGIO MILITAR** | |
|---|---|---|
| ANO LETIVO 2023/2024 **março 2024** | **Tarefa 5 – Problema Geométrico**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________ **TURMA** ____<br>**Nº**________ | |

1. Na figura, estão representadas, num referencial cartesiano, as retas $r$ e $s$.




Sabe-se que:

- A reta $r$ é definida pela equação $y = \frac{3}{5}x$
- O ponto $A$ é o ponto de interseção da reta $s$ com o eixo das abcissas e tem coordenadas $\left(\frac{15}{4}, 0\right)$
- O ponto $B$ é o ponto de interseção da reta $s$ com o eixo das ordenadas e tem coordenadas $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
- O ponto $I$ é o ponto de interseção das retas $r$ e $s$.

1.1. Qual é a medida do comprimento do segmento de reta $[\mathrm{OA}]$? E do segmento de reta $[\mathrm{OB}]$ ?

1.2. Determina a equação reduzida da reta $s$.

1.3. Indica qual dos dois triângulos, $[\mathrm{OIB}]$ ou $[\mathrm{OIA}]$, apresenta maior área. Justifica a tua resposta.

*Tarefa adaptada da Direção Geral da Educação. (2012). Teste Intermédio de Matemática.*[*https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EEspecial/ti_mat9_mai2012_el15.pdf*](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EEspecial/ti_mat9_mai2012_el15.pdf)

**Anexo 12:** Plano de aula da Tarefa 5

| **Plano de Aula** | |
|---|---|
| | Professora: Anabela Candeias |
| | Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho |
| | Ano: 8.º Turma: B |
| Lição nº 91 | **Sumário**:<br>Resolução da tarefa 5: "Problema Geométrico". |
| Data: 21/03/2024 | |
| Duração: 50 minutos | |
| Tema: Álgebra | |
| Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas | |

| **Objetivos de Aprendizagem** |
|---|
| • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação.<br>• Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada. |

| **Metodologia de Trabalho** |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| Recursos | |
|---|---|
| Do Professor | Dos alunos |
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - “Problema Geométrico”<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita; |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| Estrutura da aula | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução individual da questão 1.1 e 1.2 | 10 minutos |
| 3. Discussão coletiva sobre a questão 1.1 e 1.2 | 10 minutos |
| 4. Resolução individual da questão 1.3 | 15 minutos |
| 5. Discussão coletiva da questão 1. 3 | 10 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| **1. Introdução da aula** | **5 minutos** |
|---|---|

Registo do sumário e marcação de faltas.

Enviar a tarefa pelo *Teams*. Apresentação da tarefa: "Problema Geométrico".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| **2. Resolução individual da questão 1.1 e 1.2** | **10 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| | **Questão 1.1** | |
| **1.1**<br>$\overline{OA} = \frac{15}{4}$ u.m<br><br>$\overline{OB} = \frac{9}{2}$ u.m | - Interpretação do enunciado: o que é dado e o que é pedido.<br><br>- Determinar as medidas do comprimento dos segmentos de reta $[OA]$ e $[OB]$ através das coordenadas dos pontos A e B. | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do enunciado. Se for necessário, o professor deve ler em conjunto o enunciado com os alunos.<br><br>- Questionar: Que informações podemos retirar a partir das coordenadas do ponto A e do ponto B? |
| | **Questão 1.2** | |
| **1.2**<br><br>$y = ax + b$<br><br>$A = \left(\frac{15}{4}, 0\right)$ ; $B = \left(0, \frac{9}{2}\right)$ | - Recordar o que se entende por equação reduzida de uma reta. | - Questionar coletivamente se alguém se recorda o que se entende por equação reduzida de uma reta. Caso nenhum aluno se recorde, o professor deve relembrar |

| | | |
|---|---|---|
| $a = \dfrac{\frac{9}{2} - 0}{0 - \frac{15}{4}} = \dfrac{\frac{9}{2}}{-\frac{15}{4}} = -\dfrac{36}{30} =$<br>$= -\dfrac{6}{5}$ | | que a equação reduzida de uma reta é da forma $y = ax + b$. Questionar ainda o significado de cada parâmetro, de forma a mobilizar conhecimentos anteriores. |
| A ordenada na origem resulta do enunciado, $B = \left(0, \frac{9}{2}\right)$ e da observação da representação gráfica.<br><br>$b = \dfrac{9}{2}$ | - Mobilizar os conhecimentos anteriores para determinar a equação reduzida da reta $s$ através das coordenadas dos pontos A e B. | - Questionar coletivamente se alguém se recorda como pode ser determinada a equação reduzida de uma reta. Caso nenhum aluno se recorde, o professor deve revisitar a matéria. |
| Portanto,<br><br>$s: y = -\dfrac{6}{5}x + \dfrac{9}{2}$ | - Ser crítico relativamente aos valores obtidos para os parâmetros $a$ e $b$, tendo em conta a representação gráfica da reta $s$ . | - Questionar se os valores obtidos para os parâmetros fazem sentido tendo em conta a representação gráfica da reta $s$. |

| **3. Discussão coletiva sobre a questão 1.1 e 1.2** | **10 minutos** |
|---|---|

Vão ser corrigidas as questões 1.1 e 1.2 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Promover relações e conversões entre as diferentes representações (algébrica-gráfica) relativas às mesmas ideias matemáticas.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos. Por exemplo:

- Se algum aluno obtiver uma equação reduzida para a reta $s$ que não faça sentido, tendo em conta a sua representação gráfica, o professor deve questionar a turma se os valores obtidos para os parâmetros fazem sentido.

| **4. Resolução individual da questão 1.3** | **15 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

<table>
<tr><th>Resolução</th><th>Possíveis dificuldades dos alunos</th><th>Respostas e estratégias do professor</th></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Questão 1.3</td></tr>
<tr><td>1.3<br>$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ y = -\frac{6}{5}x + \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ \frac{3}{5}x = -\frac{6}{5}x + \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}x = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ \frac{6}{10}x + \frac{12}{10}x = \frac{45}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ \frac{18}{10}x = \frac{45}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$</td><td>-Reconhecer que as coordenadas do ponto $I$, ponto de interseção entre as restas $r$ e $s$, determinam a altura dos triângulos $[OIB]$ e $[OIA]$.<br><br>- Mobilizar os conhecimentos de aulas anteriores para estabelecer e resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas, de forma a determinar as coordenadas do ponto $I$.<br><br>- Ser crítico relativamente aos valores obtidos para as coordenadas do ponto $I$, tendo em conta a sua representação gráfica.</td><td>- Solicitar que os alunos identifiquem a altura dos triângulos $[OIB]$ e $[OIA]$.<br><br>- Remeter os alunos para os conceitos trabalhados nas aulas anteriores, questionando como se pode determinar o ponto de interseção entre duas retas. Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo;<br><br>- Questionar se os valores obtidos para as coordenadas do ponto $I$ fazem sentido tendo em conta a sua representação gráfica.</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ 18x = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ x = \frac{45}{18} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$<br>$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$<br>Portanto,<br>$altura_{\text{[OIA]}} = \frac{3}{2}$<br>$altura_{\text{[OIB]}} = \frac{5}{2}$<br><u>Estratégia 1:</u><br>$A_{\text{[OIA]}} = \frac{\frac{15}{4} \times \frac{3}{2}}{2} =$<br>$= \frac{45}{16}$<br>$A_{\text{[OIB]}} = \frac{\frac{9}{2} \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{45}{8}$<br>R: Como $\frac{45}{8} > \frac{45}{16}$ podemos concluir que $A_{\text{[OIB]}} > A_{\text{[OIA]}}$. | - Reconhecer que a ordenada do ponto $I$, corresponde à altura do triângulo $[OIA]$ e que a sua abcissa corresponde à altura do triângulo $[OIB]$.<br><br>- Operar com números racionais.<br><br>- Justificar de forma válida que $A_{\text{[OIB]}} > A_{\text{[OIA]}}$. | - Questionar: Que informações podemos retirar a partir das coordenadas do ponto $I$ que se podem relacionar com os triângulos?<br><br>- Caso seja necessário, o professor deve relembrar como se procede para operar com números racionais.<br><br>- Questionar: Pelas figuras dos triângulos podemos ter a certeza que $A_{\text{[OIB]}} > A_{\text{[OIA]}}$ ? |

| | | |
|---|---|---|
| Estratégia 2:<br><br>Como<br>$\frac{5}{2} > \frac{3}{2}$ temos<br>$altura_{\,[\mathrm{OIB}]} > altura_{\,[\mathrm{OIA}]}$ ;<br><br>Como<br>$\frac{9}{2} > \frac{15}{4}$ temos<br><br>$base_{[\mathrm{OIB}]} > base_{\,[\mathrm{OIA}]}$ ;<br><br>Pelo que a $A_{\,[\mathrm{OIB}]} > A_{\,[\mathrm{OIA}]}$ . | | |

| | |
|---|---|
| **5.** Discussão coletiva da questão 1.3 | 10 minutos |

Vai ser corrigida a questão 1.3 coletivamente. O professor deve ter em conta as feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos. Por exemplo:

- Se algum aluno obtiver coordenadas para o ponto $I$ que não façam sentido, tendo em conta a sua representação gráfica, o professor deve questionar a turma se os valores obtidos fazem sentido.

- Um erro comum que pode explorado a partir das resoluções dos alunos será identificar incorretamente a ordenada do ponto $I$, como a altura do triângulo $[OIB]$ e a sua abcissa como a altura do triângulo $[OIA]$.

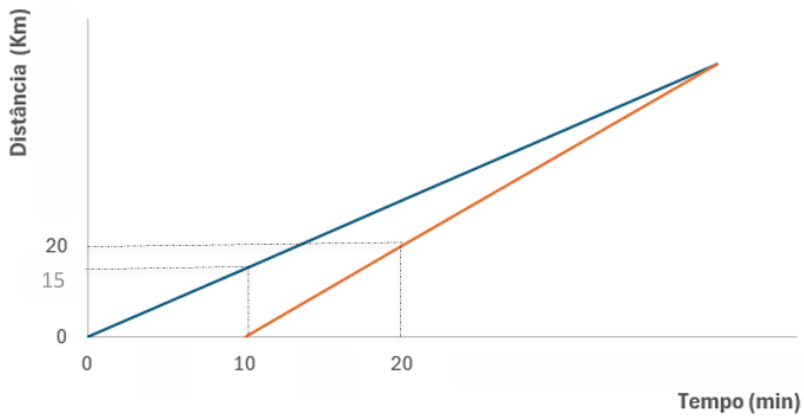
- Se algum aluno justificar que $A_{\,[\mathrm{OIB}]} > A_{\,[\mathrm{OIA}]}$, pela aparência dos triângulos, o professor deve incentivar a apresentação de justificações

# **Anexo 13:** Tarefa 6

| | | |
|---|---|---|
| ANO LETIVO<br>2023/2024<br>**março 2024** | **COLÉGIO MILITAR**<br>**Tarefa 6 – Problema "Assalto ao banco"**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________________ **TURMA** ____<br>**Nº**________ | |

**"Assalto ao banco"**

1. Dois ladrões assaltaram um banco e fugiram. Minutos depois, alertados pelo alarme, chegou uma patrulha da polícia ao banco e, de imediato, partiu em perseguição dos ladrões, seguindo o mesmo trajeto. O gráfico seguinte representa a distância (em Km) a que se encontram do banco quer os polícias, quer os ladrões, ao fim de um certo período de tempo (medido em minutos).




1.1. Indica a reta que diz respeito aos polícias e a que diz respeito aos ladrões. Justifica a tua resposta.

1.2. Quanto tempo demoraram os polícias a apanhar os ladrões? Qual foi a distância percorrida?

1.3. Considera agora que a equação correspondente aos polícias é $y = kx + b$, com $k$ e $b$ dois números reais. Para que valores de $k$ e de $b$, os polícias nunca apanham os ladrões? (Nota: Para te auxiliar na tua resposta, podes recorrer ao Geogebra)

**Anexo 14:** Plano de aula da Tarefa 6

| Plano de Aula | |
|---|---|
| | Professora: Anabela Candeias |
| | Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho |
| | Ano: 8.º Turma: B |
| Lição nº 92 | **Sumário**:<br>Resolução da tarefa 6: "Assalto ao banco". |
| Data: 22/03/2024 | |
| Duração: 50 minutos | |
| Tema: Álgebra | |
| Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas | |

| Objetivos de Aprendizagem |
|---|
| • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação. |

| Metodologia de Trabalho |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| Recursos | |
|---|---|
| Do Professor | Dos alunos |
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - "Assalto ao banco"<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano)<br>• Geogebra | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita; |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| Estrutura da aula | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução coletiva da questão 1.1 | 5 minutos |
| 3. Resolução individual da questão 1.2 | 10 minutos |
| 4. Discussão coletiva sobre a questão 1.2 | 10 minutos |
| 5. Resolução individual da questão 1.3 | 10 minutos |

| | |
|---|---|
| 6. Discussão coletiva da questão 1. 3 | 10 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| | |
|---|---|
| **1. Introdução da aula** | **5 minutos** |

Registo do sumário e marcação de faltas.

Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa: "Assalto ao banco".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| | |
|---|---|
| **2. Resolução coletiva da questão 1.1** | **5 minutos** |

A questão 1.1 vai ser resolvida coletivamente. O professor deve incentivar os alunos a participar, sendo a participação voluntária.

O professor deve promover uma adequada comunicação matemática.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| | **Questão 1.1** | |
| **1.1**<br>Como passados 0 minutos, os ladrões encontravam-se no banco, a sua distância ao banco era 0 Km, por isso o ponto (0,0) terá de fazer parte do gráfico que diz respeito aos ladrões. Assim, a reta que diz respeito aos ladrões é a reta azul.<br><br>Como os polícias chegaram ao banco minutos depois de ter tocado o alarme, a sua distância ao banco nunca poderia ser 0km passados 0 minutos, pelo que a reta que diz respeito aos polícias nunca poderia passar no ponto (0,0). Assim a reta | -Interpretação do gráfico, tendo em contexto do problema. | - Ler enunciado em conjunto com os alunos, de forma que estes se familiarizem com o contexto do problema.<br><br>-Questionar: Como é que as informações dadas no enunciado se traduzem nos gráficos? O que distingue os polícias dos ladrões relativamente à distância ao banco? |

| | | |
|---|---|---|
| que diz respeito aos polícias é a reta laranja. | | |

| 3. **Resolução individual da questão 1.2** | **10 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| | **Questão 1.2** | |
| **1.2**<br><br>Reta que diz respeito aos ladrões:<br><br>Passa nos pontos (0,0) e (10, 15)<br><br>$y = ax + b$<br><br>$a = \frac{15-0}{10-0} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$<br><br>Como a reta passa na origem $b = 0$<br><br>Reta dos ladrões: $y = \frac{3}{2}x$<br><br>Reta que diz respeito aos polícias:<br><br>Passa nos pontos (10,0) e (20, 20)<br><br>$y = ax + b$<br><br>$a = \frac{20-0}{20-10} = \frac{20}{10} = 2$ | -Interpretação do enunciado: o que é pedido.<br><br>- Reconhecer que o tempo que os polícias demoraram a apanhar os ladrões e a distância percorrida podem ser determinados pela solução de um sistema de duas equações.<br><br>-Identificar as coordenadas dos pontos necessários para determinar as equações reduzidas das retas dadas.<br><br>- Mobilizar os conhecimentos anteriores | - Remeter os alunos para a análise do gráfico, solicitando que estes identifiquem no gráfico quando é que os polícias apanham os ladrões.<br><br>- Remeter os alunos para os conceitos trabalhados nas aulas anteriores, questionando como se pode determinar o ponto de interseção entre duas retas.<br><br>-Recordar que os pontos sobre os gráficos correspondem a pares ordenados, em que no eixo das abscissas está representada a variável independente, e no eixo das ordenadas, a variável dependente.<br><br>- Questionar coletivamente se alguém se recorda como |

| | | |
|---|---|---|
| $y = 2x + b$<br><br>Usando o ponto (10,0), fica<br><br>$0 = 10 \times 2 + b \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow 0 = 20 + b \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow b = -20 \Leftrightarrow$<br><br>Reta dos polícias:<br>$y = 2x - 20$<br><br>Para determinar o tempo, em minutos, que os polícias demoraram a apanhar os ladrões e a distância percorrida é necessário resolver o seguinte sistema.<br><br>$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 20 = \frac{3}{2}x \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{3}{2}x = 20 \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{2}x - \frac{3}{2}x = \frac{40}{2} \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 2x - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 2 \times 40 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$<br><br>$S = \{(40,60)\}$<br><br>R: Os polícias apanharam os ladrões após 40 minutos de ter tocado o alarme, e encontravam-se a 60 km do banco. | para determinar a equação reduzida das retas.<br><br>- Ser crítico relativamente às equações obtidas, tendo em conta a representação gráfica das retas.<br><br>-Estabelecer e resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas, de forma a determinar o tempo, em minutos, que os polícias demoraram a apanhar os ladrões e a distância percorrida por ambos.<br><br>- Interpretar a solução do sistema de duas equações, tendo em conta o contexto do problema. | pode ser determinada a equação reduzida de uma reta. Caso nenhum aluno se recorde, o professor deve revisitar a matéria.<br><br>- Questionar se as equações obtidas fazem sentido, tendo em conta a representação gráfica das retas.<br><br>- Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo;<br><br>- Remeter para o enunciado e para a representação gráfica, por forma a dar sentido à solução do sistema. |

| | |
|---|---|
| **4. Discussão coletiva da questão 1.2** | **10 minutos** |

Vai ser corrigida a questão 1.2 coletivamente. O professor deve ter em conta as feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos. Por exemplo:

- Se algum aluno obtiver uma equação reduzida para as retas que não faça sentido, tendo em conta a sua representação gráfica, o professor deve questionar a turma se os valores obtidos para os parâmetros fazem sentido.

Deve ser explorada coletivamente a interpretação da solução obtida para o sistema de duas equações, tendo em conta o contexto do problema.

| **5. Resolução individual da questão 1.3** | **10 minutos** |
|---|---|

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| Resolução | Possíveis dificuldades dos alunos | Respostas e estratégias do professor |
|---|---|---|
| **Questão 1.3** | | |
| **1.3**<br>R:<br>No contexto do problema, assume-se que os polícias vão sempre ter ao banco após suar o alarme, e partem em perseguição | - Compreender que tendo em conta o contexto do problema terá de se verificar b $<0$ e $K > 0$. | -Dado o contexto do problema, questionar se b pode assumir qualquer valor? Se não puder, que valor não pode assumir neste caso e porquê? E o valor de k? |

| | | |
|---|---|---|
| dos ladrões, o que significa que $b < 0$ e $K > 0$.<br><br>Os polícias nunca apanham os ladrões no caso, em que a velocidade a que se deslocam é inferior ou igual à dos ladrões, ou seja, para $0 < K \leq \frac{3}{2}$. | - Compreender que para qualquer valor de $b$ com $b < 0$, os polícias nunca apanham os ladrões para $0 < K \leq \frac{3}{2}$.<br><br>- Caso os alunos optem por utilizar o Geogebra poderão ter dificuldade na utilização desse *software*. | -Questionar em que caso os polícias nunca apanhariam os ladrões. Promover a experimentação através do Geogebra.<br><br>- Promover o trabalho colaborativo entre pares, no sentido dos alunos se entreajudarem na utilização do Geogebra. Orientar os alunos sempre que necessário para o uso correto da ferramenta tecnológica. |

| **6. Discussão coletiva da questão 1.3** | **10 minutos** |
|---|---|

Vai ser corrigida a questão 1.3 coletivamente. O professor deve ter em conta as feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos.

Caso algum aluno opte por resolver a questão através da experimentação no Geogebra deve apresentar a sua resolução.

Por fim, o professor pode explorar coletivamente a representação gráfica do sistema no Geogebra, fazendo variar os parâmetros $k$ e $b$ , por forma a contribuir para uma análise dos diferentes cenários.

# **Anexo 15:** Tarefa 7

| COLÉGIO MILITAR<br>ANO LETIVO 2023/2024<br>**abril 2024** | **COLÉGIO MILITAR**<br>**Tarefa 7 – Sistemas de Equações**<br>**Disciplina Matemática - 8º ano**<br>**NOME:** ______________________ **TURMA** ___<br>**Nº**______ | |
|---|---|---|

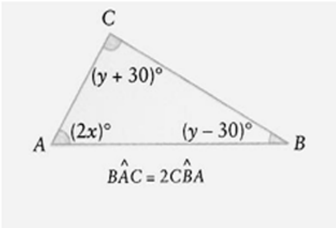
1. Um grupo de amigos participou numa atividade de recolha de plásticos e metais, numa praia. Os materiais recolhidos foram colocados em sacos diferenciados. Os plásticos foram colocados em sacos de 50 litros e os metais foram colocados em sacos de 30 litros.
   No final do dia, verificaram que encheram 24 sacos, num total de 1040 litros.

   1.1. Escreve um sistema de duas equações que te permita determinar o número de sacos de cada tipo que o grupo de amigos encheu nesse dia.
   1.2. Resolve esse sistema utilizando o método que considerares mais adequado e classifica-o.

*Questão adaptada da Direção-Geral da Educação. (2023). Prova de aferição 8.º ano*

2. Considera o triângulo na figura e os dados acerca da amplitude de cada um dos seus ângulos internos.

   2.1. Determina a amplitude de cada um dos seus ângulos internos.




*Questão adaptada de Nobre, S. (2016). O desenvolvimento do pensamento algébrico: uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano [Tese de doutoramento]. Instituto de Educação. http://hdl.handle.net/10451/25071*

**Questão extra:**

1. Relativamente à questão 2, sobre os ângulos internos do triângulo $[ABC]$, resolve graficamente esse sistema sem recurso ao GeoGebra.

# **Anexo 16:** Questionário

**Questionário**

Responde às seguintes questões:

1. Considera cada um dos seguintes sistemas. Como os classificarias sem efetuar qualquer cálculo? Justifica a tua resposta.

1.1 $\begin{cases} 0x = 26 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} 0x = 0 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$

2. Quantas soluções tem um sistema indeterminado? Quais são essas soluções? Consegues dar um exemplo para apoiar as tuas respostas?

3. O que entendes pela resolução gráfica de um sistema de duas equações? Procura dar exemplos que apoiem a tua resposta.

4. Quais as principais dificuldades que tens na resolução de um sistema de duas equações?

**Anexo 17:** Plano de aula da Tarefa 7

<table>
<tr><th colspan="2">Plano de Aula</th></tr>
<tr><td rowspan="3">COLÉGIO MILITAR<br>Fundado em 1803</td><td>Professora: Anabela Candeias</td></tr>
<tr><td>Professores estagiários: Artur Campos<br>Maria Cominho</td></tr>
<tr><td>Ano: 8.º Turma: A/B</td></tr>
<tr><td>Lição nº 91 e 92/<br>nº 93 e 94</td><td rowspan="3">Sumário:<br>Resolução da tarefa: “Problemas finais sobre sistemas”</td></tr>
<tr><td>Data: 10/04/2024</td></tr>
<tr><td>Duração: 50 + 50 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tópico: Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas</td></tr>
</table>

| Objetivos de Aprendizagem |
|---|
| • Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo a diferentes representações, relacionando a resolução algébrica e geométrica.<br>• Resolver problemas que envolvam sistemas de equações, em diversos contextos, descrevendo as estratégias de resolução seguidas e fundamentando a sua adequação.<br>• Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas, e compreender esta ciência como coerente e articulada. |

| Metodologia de Trabalho |
|---|
| • Trabalho individual na resolução da tarefa;<br>• Discussão e sistematização de ideias em coletivo. |

| Recursos | |
|---|---|
| Do Professor | Dos alunos |
| • Computador;<br>• Projetor;<br>• Quadro e giz;<br>• Grelhas de registo de participações;<br>• Tarefa - “Problemas finais sobre sistemas”<br>• Manual Escolar (MX Matemática 8.ºano) | • Cadernos Diários;<br>• Material de Escrita;<br>• *iPad.* |

| Avaliação |
|---|
| Avaliação de cariz formativo, através da observação direta:<br>• da participação oral dos alunos, com recurso ao preenchimento de uma grelha utilizada ao longo das aulas;<br>• dos momentos de trabalho autónomo e resolução das tarefas, com feedback oral. |

| Estrutura da aula | |
|---|---|
| **Momentos da aula** | **Duração** |
| 1. Introdução da aula | 5 minutos |
| 2. Resolução individual da questão 1 | 15 minutos |
| 3. Discussão coletiva sobre a questão 1 | 15 minutos |
| 4. Resolução individual da questão 2 | 15 minutos |
| **Intervalo** | |

| | |
|---|---|
| 5. Discussão coletiva sobre a questão 2 | 15 minutos |
| 6. Preenchimento do questionário pelos alunos | 35 minutos |

## Desenvolvimento da Aula

| | |
|---|---|
| **1. Introdução da aula** | **5 minutos** |

Registo do sumário e marcação de faltas.

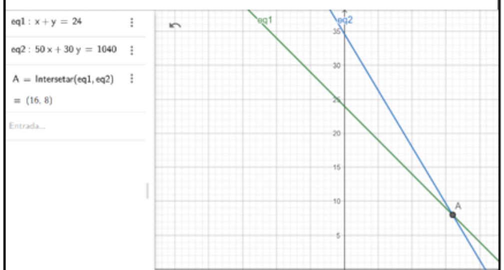
Enviar a tarefa pelo *Teams.* Apresentação da tarefa: "Problemas finais sobre sistemas".

Explicar o que se vai fazer e o modo como vai decorrer a aula.

| | |
|---|---|
| **2. Resolução a pares da questão 1** | **15 minutos** |

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| **Questão 1.1** | | |
| **1.1**<br>Seja<br>$x$- *o número de sacos de* 50 *litros*<br>$y -$ *o número de sacos de 30 litros*<br>$\begin{cases} x+y=24 \\ 50x+30y=1040 \end{cases}$ | - Interpretação do enunciado: o que é dado e o que é pedido.<br><br>-Estabelecer um sistema de duas equações a partir do enunciado. | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do enunciado. Se for necessário, o professor deve ler em conjunto o enunciado com os alunos.<br><br>-Questionar: Que condições é que se devem verificar? |

| Questão 1.2 | | |
|---|---|---|
| **1.2**<br>$\begin{cases} x+y=24 \\ 50x+30y=1040 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y \\ 50(24-y)+30y=1040 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y \\ 1200-50y+30y=1040 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y \\ -20y=-160 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y \\ y=\frac{-160}{-20} \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-y \\ y=8 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=24-8 \\ y=8 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=8 \end{cases}$<br>$S=\{(16,8)\}$<br><br>O sistema tem uma única solução, portanto é possível determinado.<br><br>**R:** Foram cheios 16 sacos de 50 litros e 8 sacos de 30 litros.<br><br><u>resolução alternativa:</u><br><br>As retas intersetam-se no ponto (16,8).<br><br>$S=\{(16,8)\}$<br><br>O sistema tem uma única solução, portanto é possível determinado. | -Identificar as incógnitas de forma a estabelecer o sistema de duas equações.<br><br>- Resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas, de forma a determinar o número de sacos de lixo de 50L e o número de sacos de lixo de 30L utilizados na atividade na praia.<br><br>-Ser crítico relativamente aos resultados obtidos, tendo em conta o contexto do problema.<br><br>- Interpretar a solução do sistema de duas equações, tendo em conta o contexto do problema. | -Questionar: "Tendo em conta o problema apresentado, o que queremos determinar?"<br><br>- Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo;<br>- No caso dos alunos optarem pela resolução gráfica, o professor pode apoiar na interpretação da representação gráfica;<br><br>- Questionar se os valores obtidos fazem sentido, tendo em conta o contexto do problema.<br><br>-Promover a relação entre a atribuição das incógnitas de acordo com o enunciado e os valores obtidos. |

| | |
|---|---|
| **3. Discussão coletiva sobre a questão 1** | **15 minutos** |

Vão ser corrigidas as questões 1.1 e 1.2 coletivamente. O professor deve ter em conta as observações feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Caso surjam diferentes resoluções (gráfica-algébrica), o professor deve promover relações e conexões entre as diferentes representações relativas às mesmas ideias matemáticas. Caso não surjam, deve ser o professor a apresentar uma resolução alternativa e pedir que os alunos exprimam tais relações.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos. Por exemplo:

- Se algum aluno obtiver valores para as incógnitas que não façam sentido no contexto do problema, o professor deve questionar a turma no coletivo sobre os mesmos.

| | |
|---|---|
| **4. Resolução da questão 2** | **15 minutos** |

Observar os alunos, tomando as notas necessárias sobre as suas opções, justificações, maiores dificuldades e outros aspetos que possam ser importantes para a correção oral coletiva.

| **Resolução** | **Possíveis dificuldades dos alunos** | **Respostas e estratégias do professor** |
|---|---|---|
| **Questão 2.1** | | |
| **2.1** | - Interpretação do enunciado: o | - Esclarecer dúvidas que surjam da leitura do |

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} y+30+y-30+2x=180 \\ 2x=2(y-30) \end{cases}$<br><br>$\begin{cases} y+30+y-30+2x=180 \\ 2x=2(y-30) \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2x=180 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2(y-30)=180 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2y-60=180 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y=180+60 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y=240 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{240}{4} \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y=60 \\ x=y-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br><br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y=60 \\ x=60-30 \end{cases} \Leftrightarrow$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} y=60 \\ x=30 \end{cases}$<br><br>$S=\{(30,60)\}$ | que é dado e o que é pedido.<br><br>- Mobilizar conhecimentos de anos anteriores sobre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.<br><br>-Estabelecer um sistema de duas equações a partir do enunciado.<br><br>-Resolver o sistema recorrendo ao método da substituição;<br><br>- Ser crítico relativamente aos valores obtidos como solução do sistema de acordo com o enunciado do problema. | enunciado. Se for necessário, o professor deve ler em conjunto o enunciado com os alunos.<br><br>-Questionar: Que condições é que se devem verificar tendo em conta os ângulos internos do triângulo da figura.<br><br>- Se for necessário, relembrar o método da substituição ou partes do mesmo;<br><br>- Questionar se os valores obtidos fazem sentido, tendo em conta o problema. |

**Intervalo**

| **5. Discussão coletiva sobre a questão 2** | **15 minutos** |
|---|---|

Vai ser corrigida a questão 2 coletivamente. O professor deve ter em conta as feitas em tempo de trabalho autónomo e incentivar os alunos a participar, tanto na apresentação das resoluções como na discussão coletiva, sendo a participação voluntária. As resoluções podem ser projetadas através do *iPad* de cada aluno, podendo o professor ter de complementar, se necessário, com explicações adicionais no quadro.

Na presença de dificuldades, ajudar os alunos a ultrapassá-las, com a contribuição da turma, assim como explorar discordâncias sempre que for pertinente.

Através da resolução dos alunos, relembrar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, de modo a promover relações entre as diferentes ideias matemáticas por forma a reconhecer esta ciência como coerente e articulada.

Explorar e colocar à discussão erros matemáticos comuns que possam surgir nas resoluções, assim como incentivar o pensamento crítico na análise dos resultados obtidos. Por exemplo:

- Se algum aluno obtiver valores para as incógnitas que não façam sentido no contexto do problema, o professor deve questionar a turma no coletivo sobre os mesmos. Neste caso o professor pode, ainda, incentivar a experimentação, no sentido de se verificar que os valores não fazem realmente sentido.

| | |
|---|---|
| **6. Preenchimento do questionário pelos alunos** | **35 minutos** |

Este momento da aula será dedicado ao preenchimento de um questionário pelos alunos.

Se os alunos terminarem as questões propostas para realizar em sala de aula num tempo menor que o previsto, o professor deve propor a resolução das questões: Manual Escolar:

- Páginas 46, 47 e 48

## **Anexo 18:** Autorização Encarregados de Educação

Exmo.(a) Senhor(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade de Lisboa, encontro-me a realizar o meu estágio profissional, na turma do seu educando, sob a supervisão da Profª Anabela Candeias, professora de Matemática titular da turma. Com vista à elaboração do meu relatório final de estágio, será necessário proceder à recolha de alguns elementos relativos às atividades de ensino-aprendizagem. Neste sentido, venho solicitar a autorização para a participação do seu educando neste trabalho que se integra nas atividades normais da disciplina e requer a recolha de trabalhos escritos durante as aulas, de eventuais registos áudio/vídeo de alguns momentos das aulas e, eventualmente, na realização de pequenas entrevistas de caráter informativo sobre os trabalhos produzidos em sala de aula.

Todo o trabalho será supervisionado pela Profª Anabela Candeias e todos os direitos e interesses dos alunos serão salvaguardados e respeitados. Será garantida o anonimato da identidade do seu educando, garantindo, sob compromisso de honra que a informação recolhida será utilizada apenas no âmbito do meu trabalho académico. Desta forma, apelo à sua colaboração, permitindo a participação do seu educando.

Agradeço desde já a colaboração prestada, solicitando o preenchimento da seguinte autorização que deverá ser entregue à professora de Matemática.

Atenciosamente<br>
O professor estagiário,<br>
Artur Jorge de Campos Jesus

---

Eu, Encarregado de Educação________________________________________ do(a) aluno(a) ________________________________________ n.º ___ da Turma do 8.º B, autorizo o(a) meu(minha) educando(a) a participar no estudo supracitado.

Assinatura:

____________________________________________________________________

Data:____ / 02/ 2024

# **Anexo 19:** Autorização Diretor Colégio Militar

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO — ULISBOA

Exmo. Senhor Diretor do Colégio Militar

No âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontramo-nos, no presente ano letivo 2023/2024, a realizar a prática de ensino supervisionada, na disciplina de Matemática, nas turmas A e B do 8.º Ano, sob a supervisão da Profª Anabela Candeias, Professora Titular de Matemática destas turmas, na Vossa instituição. Com vista à elaboração do relatório final da prática de ensino supervisionada que incidirá sobre as aulas lecionadas, vimos solicitar a Vossa autorização para a realização de uma recolha de dados durante as aulas lecionadas, através de registos escritos, áudio/vídeo de alguns momentos das aulas e, eventualmente, da realização de entrevistas breves aos alunos de caráter informativo sobre os trabalhos produzidos em aula.

Todo o nosso trabalho será supervisionado pela Profª Anabela Candeias e todos os direitos e interesses dos alunos serão salvaguardados e respeitados. A fim de preservar a integridade dos alunos e, assegurando a melhor ética profissional, a identidade destes será preservada e a informação recolhida será utilizada apenas no âmbito do nosso trabalho académico.

Agradecemos desde já a Vossa colaboração e todas as oportunidades formativas que, como estudantes e futuros professores, nos estão a ser proporcionadas na Vossa instituição.

Juntamos em anexo os pedidos de autorização a entregar aos encarregados de educação dos alunos das turmas onde o nosso trabalho vai incidir.

Lisboa, 08/02/2024

Atenciosamente,

Os professores estagiários

Artur Jorge de Campos Jesus

____________________________________

Maria do Carmo Ribeiro Cominho

____________________________________