UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Vida Risco – IBNR no âmbito da IFRS 17

Gonçalo Fernando Ferreira Esteves

Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Trabalho de Projeto orientado por:
Raquel João Fonseca
Paulo Fernandes Cruz

2022

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Dra. Raquel João Fonseca e Dr. Paulo Fernandes Cruz, por todo o apoio e conselhos incondicionais, pela imprescindível orientação e disponibilidade constante para a realização deste projeto.

À minha colega Dra. Elisabete Fernandes Pestana por toda a partilha de conhecimentos, paciência e pelos desafios que me lançava acreditando sempre que eu era capaz de superá-los.

Aos meus pais e irmão, por todo o carinho e nunca me deixarem esquecer os meus objetivos.

A todos os meus colegas de licenciatura e mestrado e amigos pelo apoio e disposição para me acompanhar neste percurso.

Agradeço também a todos aqueles que não mencionei, mas que de certa forma também contribuíram para a realização deste projeto.

Resumo

O contrato de seguro é um acordo através do qual a seguradora assume a cobertura de determinados riscos, responsabilizando-se a pagar o capital seguro em caso de ocorrência de sinistro, nos termos acordados.

É habitual dizer que as seguradoras desenvolvem um ciclo de produção invertido, na medida em que, os prémios são cobrados hoje para pagar sinistros que poderão eventualmente ocorrer no futuro.

Uma das principais preocupações da seguradora, e em particular dos atuários, é a de obter a melhor estimativa das provisões a constituir, tendo em conta todas as responsabilidades assumidas, sendo que o foco deste projeto é o de analisar, em particular, a provisão para sinistros.

A estimação das provisões para sinistros é fundamental na atividade de uma seguradora, na medida em que, caso a companhia não constitua provisões suficientes pode comprometer a sua solvência. Por outro lado, se as provisões forem excessivas poderá afetar a rentabilidade e competitividade no mercado.

Assim, numa vertente prática, recorrendo à base de dados de uma seguradora do Ramo Vida, com o objetivo de obter uma estimativa das reservas a constituir, será aplicado e analisado o método determinístico *Chain Ladder* com a aplicação de um fator cauda/*ultimate*, bem como o método *Grossing up*, de modo a testar a consistência dos resultados estimados. Contudo, de forma a contornar as limitações destes métodos, recorrer-se-á a modelos estocásticos, nomeadamente o método *Thomas Mack*.

Palavras-chave: Provisões para sinistros, Ramo Vida, IBNR, *Chain Ladder, Thomas Mack*

Abstract

The insurance contract is an agreement by which the insurer assumes coverage of certain risks, being responsible for paying the insurance company capital in case of occurrence of a claim, in the agreed terms.

It's usual to say that insurers develop an inverted production cycle, as premiums are charged today to pay claims that may eventually occur in the future.

One of the main concerns of an insurance company, mainly of the actuary, is to get the best estimation of claims reserves, considering all the responsibilities assumed.

The estimation of claims reserving is crucial in the activity of an insurer, since if the company doesn't constitute sufficient reserves, it may compromise its solvency. If the provisions are too excessive, it may affect the profitability and competitiveness in the market.

Therefore, in a practical aspect, using the data of an insurance company in Life business, with the objective of getting an estimate for outstanding claims, the deterministic *Chain Ladder* method will be applied and analyzed with the application of a tail/ultimate factor, as well as the *Grossing up* method, to test the authenticity of the results. However, in order to avoid the limitations of these methods, will be used stochastic models, in particular the *Thomas Mack* method.

Keywords: Claims reserving, Life Business, IBNR, *Chain Ladder, Thomas Mack*

Índice

Índice Figuras

Índice Tabelas

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

ASF Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões

IBNR *Incurred but not reported*

RBNS *Reported but not settled*

LRC *Liability for remaining coverage*

LIC *Liability for incurred claims*

i Ano de ocorrência

j Ano de desenvolvimento

$D_{i,j}$ Custo de sinistros acumulados que ocorreram no ano de ocorrência i que foram reportados no ano de desenvolvimento j

δ valor que o atuário considera para o cálculo do fator cauda/*ultimate*

EQM Erro Quadrático Médio

EP Erro Padrão

Glossário

Apólice: Documento que titula o contrato celebrado entre o Tomador de Seguro e a Seguradora, de onde constam as respetivas condições gerais, especiais, se as houver, e particulares acordadas;

Pessoa Segura: Pessoa de cuja vida, saúde, ou integridade física depende o pagamento do benefício garantido;

Beneficiário: Entidade, singular ou coletiva, a favor de quem reverte a prestação, decorrente de um Contrato de Seguro;

Tomador de Seguro: Entidade que celebra o Contrato de Seguro com a Seguradora, sendo responsável pelo pagamento do prémio;

Entidade Seguradora: Entidade legalmente autorizada a exercer a Atividade Seguradora e que subscreve com o Tomador, o Contrato de Seguro;

Sinistro: Evento ou série de eventos resultantes de uma mesma causa suscetível de fazer funcionar as garantias de um ou mais Contratos de Seguro;

Participação do sinistro: O Tomador de Seguro, o Segurado, a Pessoa Segura ou o Beneficiário devem participar o sinistro à Seguradora, com a maior brevidade possível, no prazo convencionado entre as partes ou na Lei;

Provisões técnicas: Somas obrigatoriamente inscritas no passivo do balanço de uma empresa de seguros ou de resseguros, tendo em vista permitir a regulação integral dos compromissos tomados pela empresa perante os Tomadores de Seguro e os Beneficiários dos contratos;

Prémio: Corresponde ao preço pago pelo Tomador de Seguro à Seguradora para contratação de seguro. O prémio é o custo da garantia do seguro.

Introdução

O contrato de seguro é um acordo através do qual a seguradora assume a cobertura de determinados riscos, responsabilizando-se a pagar o capital seguro em caso de ocorrência de sinistro, nos termos acordados. Por outro lado, o tomador de seguro terá de pagar à seguradora o prémio correspondente, isto é, o custo do seguro.

De acordo com a Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões, "em termos globais, a produção de seguro direto em Portugal registou, em 2021, um aumento de 34,2% face ao ano anterior, situando-se acima dos 13,3 mil milhões de euros. Para este crescimento foi significativo o acréscimo de 68,5% verificado no Ramo Vida.

No total do mercado, os Planos Poupança Reforma (PPR) registaram um crescimento de 61,2% face a 2020, mantendo o seu peso na estrutura do Ramo Vida, representando 24,7% da produção Total.

Os custos com sinistros de seguro direto do Ramo Vida aumentaram 12% face a 2020." (ASF, Relatório de Evolução da Atividade Seguradora, 2021)

Podemos ver na Figura 0.1 a evolução dos custos com sinistros neste ramo.

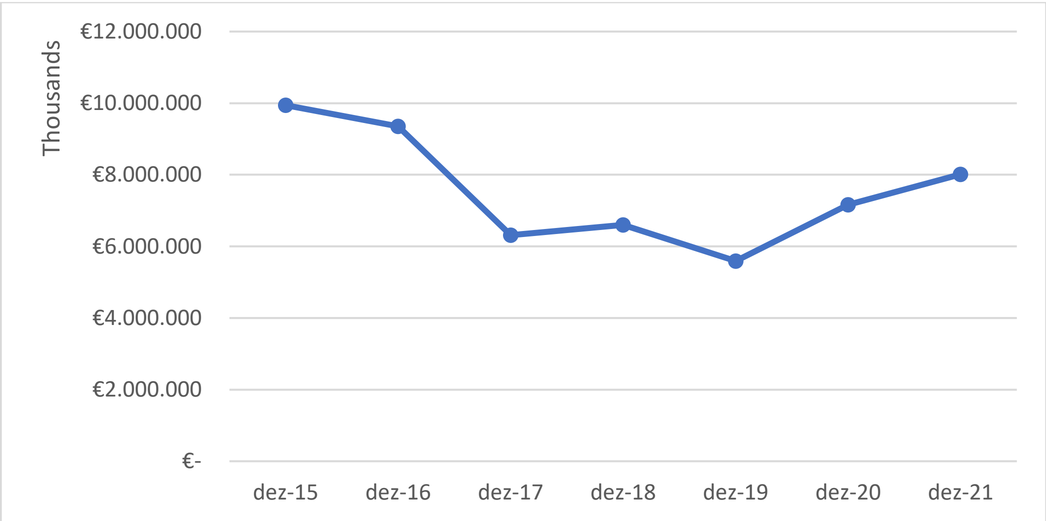

Figura 0.1:Mercado - Custos com sinistros de seguro direto em Portugal (Fonte: ASF – Análise 4ºTrimestre 2021)

Uma das principais preocupações da seguradora, e em particular dos atuários, é a de obter a melhor estimativa das provisões a constituir, tendo em conta todas as responsabilidades assumidas.

O técnico especializado na aplicação de cálculos e metodologias estatísticas, é designado por atuário, sendo que, as funções de um atuário Ramo Vida, na seguradora, estão de certa forma, relacionadas com a solvência, ou seja, a capacidade da seguradora cumprir os seus compromissos, calculado através da relação ativo/passivo.

As funções do atuário podem variar entre seguradoras e áreas, mas de grosso modo exerce as seguintes funções:

- Confirmar as provisões técnicas quanto à suficiência e adequabilidade, tendo por base modelos estatísticos;
- Delinear e analisar produtos, bem como, custos das responsabilidades e de gestão, prémio, emissão de apólices, gestão de sinistros, comissões, entre outros;
- Desenvolver relatórios atuariais;

- Desenvolver relatórios atuariais intercalares para os ramos mais relevantes;
- Apoiar na definição dos programas de resseguro. O atuário colabora na definição dos contratos de resseguro a executar, tendo em conta os riscos assumidos pela seguradora;
- Tratar a informação de suporte para auditoria externa.

Nas demonstrações financeiras de uma seguradora, é possível observar que as provisões técnicas são as que representam a maior componente das responsabilidades/passivo. Estas dividem-se em vários tipos, adiante citados no subcapítulo 1.1.1, sendo que o centro desta investigação recai sobre a análise das provisões para sinistros no Ramo Vida, mais concretamente nas coberturas relativas a morte e invalidez.

No caso das empresas mistas[1], apesar dos custos de sinistros do Ramo Vida não representarem a maior percentagem das provisões para sinistros da seguradora (normalmente pertence ao Ramo Não Vida), percebe-se que ainda tem montantes bastante elevados que necessitam de ser estudados e analisados.

Com a implementação da nova norma IFRS 17 com entrada em vigor a 1/1/2023, as seguradoras terão de se preparar para uma mudança relativamente ao reconhecimento, mensuração, apresentação e divulgação dos contratos de seguro. Para tal torna-se premente o tratamento de dados históricos de carteira para dar resposta à análise das responsabilidades que passarão a ser dividas em *Liability for Remaning Coverage* (LRC), que corresponde às responsabilidades de serviços futuros, e *Liability for Incurred Claims* (LIC), que corresponde às responsabilidades de serviços passados, que se subdividem em: sinistros que ocorreram mas que por sua vez ainda não foram reportados à seguradora, denominados por sinistros *Incurred But Not Reported* (IBNR), e sinistros ocorridos e reportados à seguradora, denominados por *Reported But Not Settled* (RBNS), tal como atualmente é composta a provisão para sinistros.

Com vista à estimação da provisão para sinistros IBNR são utilizados dois tipos de modelos, os determinísticos e os estocásticos. Neste projeto irão ser abordados os métodos determinísticos *Chain Ladder*, *Grossing up – average factors*, *Grossing up – worst case*. Com o intuito de obter medidas de erro e intervalos de confiança para essas estimativas irá utilizar-se o método estocástico *Thomas Mack*.

O presente projeto é constituído por 5 capítulos:

O capítulo 1 contém: contextualização da razão das estimações de provisões; tipos de provisões técnicas para além da provisão para sinistros em análise; o processo de sinistro, ou seja, tratamento do sinistro pela seguradora, desde a sua ocorrência/abertura até ao pagamento; tratamento de dados e construção da matriz *Run-Off*, com vista a aplicação dos métodos estatísticos para a estimação de provisões.

No capítulo 2 serão introduzidos os modelos determinísticos descritos acima, com e sem fator cauda/*ultimate*, bem como o método estocástico *Thomas Mack*, começando por expor os pressupostos necessários para a sua aplicação. Este método possibilita a obtenção de estatísticas de interesse, tais como intervalos de confiança e medidas de erro associadas às estimativas obtidas pelo método *Chain Ladder*.

O capítulo 3 contém a aplicação prática da teoria exposta anteriormente, permitindo uma breve análise e comparação entre os diferentes métodos utilizados.

O capítulo 4 comporta análises comparativas dos resultados obtidos entre os métodos expostos, e por fim no último capítulo apresentam-se as conclusões retiradas da elaboração deste projeto.

[1] Companhias de seguros que operam nos Ramos Vida e Não Vida

1. Enquadramento teórico

Ao longo deste capítulo serão apresentados conceitos referentes a este estudo, bem como o desenvolvimento de um processo de sinistro e o tratamento de dados.

1.1. Provisões Técnicas

A constituição e manutenção de provisões técnicas adequadas, é uma das decisões fundamentais na gestão de uma seguradora, permitindo assegurar o cumprimento dos compromissos resultantes dos contratos de seguro.

Tal como referido anteriormente, cabe a um atuário considerar se as provisões técnicas são adequadas e suficientes, efetuando uma avaliação global das provisões, de modo a avaliar a sua suficiência.

Caso a seguradora não constitua provisões suficientes, pode deparar-se, futuramente, com problemas financeiros, que podem comprometer a sua solvência. Contudo, a constituição de provisões excessivas poderá afetar a sua rentabilidade e competitividade no mercado, na medida em que, a tarifação dos seus produtos poderá basear-se em estimativas pessimistas (Figura 1.1). Na estrutura do balanço da seguradora são evidenciadas as provisões técnicas, sendo que o passivo da respetiva seguradora é constituído, maioritariamente, pelas responsabilidades registadas através destas provisões.

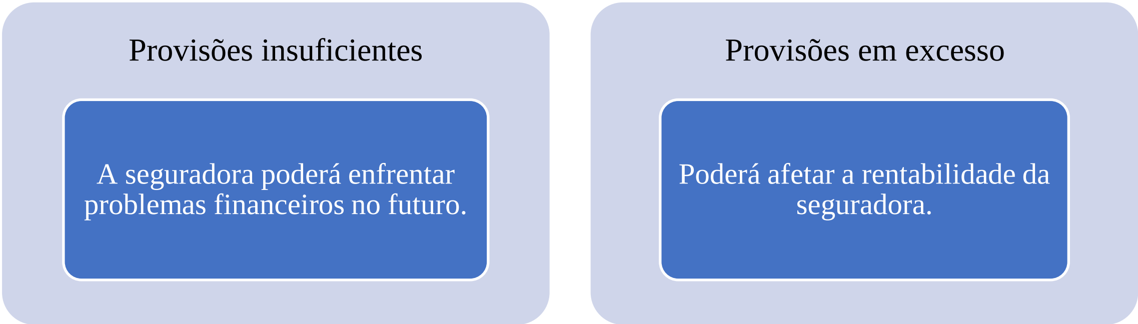

Figura 1.1: Provisões

1.1.1. Tipos de Provisões Técnicas

- Provisão para prémios não adquiridos (PPNA): A PPNA é sustentada na avaliação dos prémios emitidos até ao final do exercício, relativamente a cada um dos contratos de seguro em vigor, exceto os referentes ao Ramo Vida, a imputar ao exercício e/ou ao exercício seguinte. Esta provisão é registada para contratos com duração inferior a 12 meses.

- Provisões matemáticas: A provisão matemática corresponde ao valor estimado dos compromissos da seguradora, incluindo as participações nos resultados já distribuídas e após dedução do valor dos prémios futuros.

- Provisões técnicas de resseguro[2] cedido: As provisões são definidas aplicando o cálculo, contrato a contrato, a partir dos prémios brutos emitidos, relativos aos contratos vigentes, excetuando os casos específicos previstos na regulamentação. A sua aplicação deve ter em atenção as cláusulas presentes nos tratados de resseguro, correspondendo à parte dos resseguradores nos montantes brutos das provisões técnicas de seguro vida.

- Provisão para sinistros: A provisão corresponde aos custos com sinistros ocorridos e ainda por regularizar, isto é, a responsabilidade estimada para os sinistros ocorridos por pagar reportados ou não à seguradora.
  Os sinistros abertos, na maioria das situações, usufruem de uma reserva associada, sendo que a mesma será superior ou inferior ao montante final do sinistro, considerando que é normal, ao abrir a reserva, não conseguir prever com exatidão esta situação.
  No caso do Ramo Vida, o montante da indemnização é habitualmente conhecido. Por vezes o sinistro aberto é encerrado sem ressarcir o beneficiário (por exemplo, fraude).

[2] O resseguro é o "seguro de outro seguro". É um acordo entre a seguradora e resseguradora, em que esta aceita parte do risco.

1.2. Processo

O processo de um sinistro desenvolve-se conforme a Figura 1.2:

Figura 1.2: Processo

1. Ocorrência: Evento do sinistro;
2. Abertura/Reporte: O tomador de seguro/beneficiário reporta à seguradora a ocorrência do sinistro;
3. Pagamento de indemnizações: Respetivo pagamento, ou não, pela seguradora;
4. Encerramento: Encerramento do processo do sinistro.

Poderão existir possíveis reaberturas no processo do sinistro após o seu encerramento caso a seguradora assim o entenda.

1.3. Provisões para sinistros

A provisão para sinistros deve ser suficiente, em qualquer momento, para assegurar as responsabilidades pelos sinistros ocorridos, decorrentes dos contratos de seguro celebrados. Contudo, torna-se necessário recorrer a estimativas devido a envolver custos futuros, desconhecidos à data da avaliação.

O objetivo da provisão é acautelar a solidez financeira da seguradora, numa perspetiva de médio e longo prazo.

As provisões para sinistros dividem-se em dois tipos descritos na Figura 1.3:

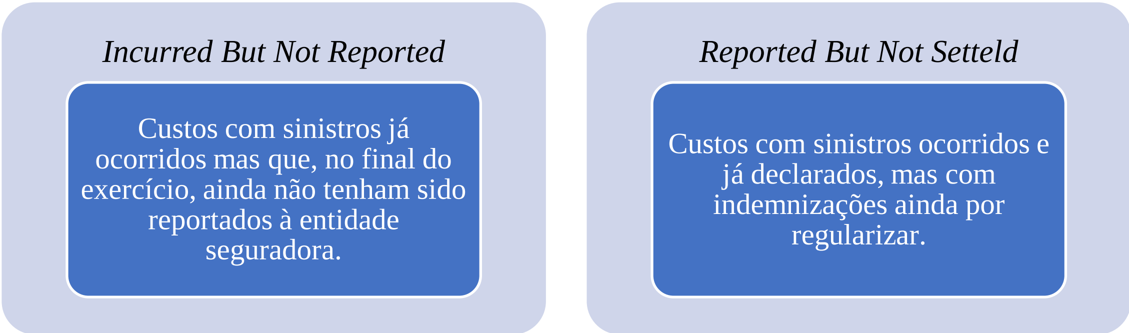

Figura 1.3: Tipos de provisões para sinistros

A provisão para sinistros IBNR é estimada com base na experiência passada, bem como, pela informação disponível e pela aplicação de métodos estatísticos.

1.4. Tratamento dos Dados

Atualmente, existem diversos métodos estatísticos, baseados em técnicas de projeção da sinistralidade, que possibilitam estimar o valor da provisão para sinistros, tendo em conta a experiência da seguradora.

A aplicação destes métodos está condicionada à disponibilidade de informação histórica de qualidade, bem como, à análise exploratória dos dados entre períodos de tempo. Alguns tipos destas análises serão descritos no decorrer do caso prático (Capítulo 3).

Desta forma, a utilização de métodos estatísticos torna-se uma ferramenta fundamental no que respeita à análise da adequação da provisão.

Ao analisarmos a estrutura histórica dos dados, estes são apresentados através de uma matriz triangular *Run-Off* incompleta, também conhecida por triângulo de desenvolvimento, tratando-se de um modo de representar a história das indemnizações pagas (Tabela 1.1). Assim, quanto mais antigo o ano de ocorrência de um sinistro, maior é a sua história.

Por "ano de ocorrência", entende-se o ano em que se verificou o sinistro, e "ano de desenvolvimento" respeita ao ano em que as indemnizações foram pagas.

De salientar que as indemnizações da mesma diagonal foram pagas no mesmo exercício, sendo que, os valores abaixo da diagonal principal são desconhecidos e mostram as futuras indemnizações respetivas a cada ano de ocorrência de sinistros. O objetivo dos métodos estatísticos é efetuar a estimação desses mesmos valores.

Existem diversos tipos de informação que podem ser analisados, tais como os sinistros pagos, sinistros ocorridos, número de sinistros pagos, média de sinistros, entre outros.

Esta matriz pode ser igualmente utilizada para valores acumulados de sinistros em cada ano, sendo necessário adicionar a cada ano de desenvolvimento o valor dos sinistros do ano anterior.

Dado que a finalidade deste projeto é estimar as reservas a constituir, atribuímos a variável $D_{i,j}$ como os custos dos sinistros acumulados que tiveram lugar no ano de ocorrência i, reportados no ano de desenvolvimento j. Por exemplo, $D_{2021,0}$ representa todos os custos dos sinistros associados a sinistros que ocorreram em 2021 e foram reportados à seguradora nesse mesmo ano presente; $D_{2020,2}$ representa todos os custos dos sinistros associados a sinistros que ocorreram em 2020, mas que apenas foram reportados à seguradora passados dois anos, ou seja, em 2022. Esta variável termina em n, tratando-se do último ano de ocorrência considerado para a investigação.

Tabela 1.1: Matriz Run-off

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	…	j	…	n-1	n
0	$D_{0,0}$	$D_{0,1}$		$D_{0,j}$		$D_{0,n-1}$	$D_{0,n}$
1	$D_{1,0}$	$D_{1,1}$		$D_{1,j}$		$D_{1,n-1}$	
…							
i	$D_{i,0}$	$D_{i,1}$		$D_{i,j}$			
…							
n-1	$D_{n-1,0}$	$D_{n-1,1}$					
n	$D_{n,0}$						

É fundamental ter em conta que a reduzida informação histórica poderá comprometer a significância estatística dos métodos utilizados. Por outro lado, a utilização de informação em excesso poderá tornar os resultados enviesados.

2. Metodologia

Baseados em técnicas de projeção da sinistralidade, com suporte na experiência passada, os métodos estatísticos permitem calcular o valor expectável dos custos futuros resultantes dos sinistros pendentes à data da avaliação, estimando assim, o valor da provisão para sinistros.

Atualmente, os modelos existentes para a estimação das provisões para sinistros podem ser divididos em modelos determinísticos e modelos estocásticos.

2.1. Modelos Determinísticos

Os modelos determinísticos partem do pressuposto base de que as evoluções passadas, demonstradas na matriz de informação histórica, continuam a ser verificadas no futuro. Apesar da sua antiguidade continuam a ser bastante utilizados, sendo o método de *Chain Ladder*, a técnica mais notória e aplicada.

A informação histórica é, de modo geral, agrupada numa matriz incompleta, de modo que, cada coluna exibe o ano de desenvolvimento e cada linha representa o ano da ocorrência dos sinistros. Ao existirem tantas colunas quantos anos que decorrem entre a ocorrência do sinistro e a respetiva regularização pela seguradora, os valores abaixo da diagonal principal da matriz, correspondem a períodos futuros, sendo assim desconhecidos. Portanto, o objetivo é executar a estimação desses mesmos valores, ou seja, estimar os valores abaixo da diagonal principal da Tabela 1.1.

A aplicação de um método determinístico fornece somente uma estimativa pontual da provisão para sinistros. Este método apresenta a desvantagem de não considerar a existência de uma medida de erro de estimação, não quantificando assim, o grau de incerteza ou variabilidade das estimativas obtidas.

2.1.1. Método *Chain Ladder*

Recorrendo a notas de apoio da unidade curricular *Risco em Seguros Vida e Não Vida* (AEGON, 2021), o método *Chain Ladder* é baseado na ideia de que através dos valores conhecidos das evoluções passadas podem-se estimar os valores dos pagamentos futuros. Este método é muito utilizado por ter a vantagem de ser muito simples e prático, sendo que considera que existe proporcionalidade entre os acontecimentos passados e os que decorrerão no futuro. Parte do pressuposto que existe independência entre os anos de ocorrência. Assume ainda que os fatores de desenvolvimento, utilizados para estimar os custos futuros, são os que apresentam a menor variância.

Seja $\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j}$, o valor acumulado das indemnizações pagas relativas ao ano de desenvolvimento j, exceto o último ano de custo de sinistros i conhecido associado a esse mesmo ano de desenvolvimento.

Defina-se ainda $\hat{f}_j$, como o fator de desenvolvimento para o ano de desenvolvimento j, como o quociente entre o valor de todas as indemnizações pagas acumuladas referentes ao ano de desenvolvimento j+1 e $\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j}$.

Desta forma, o fator de desenvolvimento para o ano de desenvolvimento j, do método *Chain Ladder*, apresenta-se por:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j}}, \text{ para } j \in \{0; \ldots; n-1\} \tag{2.1}$$

Ou seja,

Tabela 2.1: Exemplo de cálculo dos fatores de desenvolvimento

	Ano desenvolvimento $_j$						
Ano Ocorrência $_i$	0	1	2	…	n-2	n-1	n
0	$D_{0,0}$	$D_{0,1}$	$D_{0,2}$	…	$D_{0,n-2}$	$D_{0,n-1}$	$D_{0,n}$
1	$D_{1,0}$	$D_{1,1}$	$D_{1,2}$	…	$D_{1,n-2}$	$D_{1,n-1}$	
2	$D_{2,0}$	$D_{2,1}$	$D_{2,2}$	…	$D_{2,n-2}$		
…	…	…	…	…			
n-2	$D_{n-2,0}$	$D_{n-2,1}$	$D_{n-2,2}$				
n-1	$D_{n-1,0}$	$D_{n-1,1}$					
n	$D_{n,0}$ A	B C	D			E	F

$$\hat{f}_0 = \frac{B}{A};\ \hat{f}_1 = \frac{D}{C};\ \ldots;\ \hat{f}_{n-1} = \frac{F}{E}$$

A projeção dos custos dos sinistros acumulados para o ano de desenvolvimento seguinte, associado ao ano de ocorrência i, participados no ano de desenvolvimento j é dado por:

$$\widehat{D}_{i,j+1} = D_{i,j} * \hat{f}_j$$

Com base na equação abaixo, podemos estimar os custos totais relativos ao ano *i*:

$$\widehat{D}_{i,n} = D_{i,n-i} * \hat{f}_{n-i} * \hat{f}_{n-i+1} * \dots * \hat{f}_{n-1}$$

Seja a variável $\hat{R}_i$, a provisão a constituir para o ano *i*:

$$\hat{R}_i = \widehat{D}_{i,n} - D_{i,n-i}$$

E $\hat{R}$, as reservas totais a aprovisionar:

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_i$$

A Tabela 2.2 descreve estes cálculos.

Tabela 2.2: Provisões a constituir – Método Chain Ladder

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano n	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
0	$D_{0,n}$	*	*
1	$D_{1,n-1}$	$\widehat{D}_{1,n}$	$\widehat{D}_{1,n} - D_{1,n-1}$
…	…	…	…
i	$D_{i,n-i}$	$\widehat{D}_{i,n}$	$\widehat{D}_{i,n} - D_{i,n-i}$
…	…	…	…
n	$D_{n,0}$	$\widehat{D}_{n,n}$	$\widehat{D}_{n,n} - D_{n,0}$
Total	$\sum_{i=0}^{n} D_{i,n-i}$	$\sum_{i=0}^{n} \widehat{D}_{i,n}$	$\sum_{i=0}^{n} \widehat{D}_{i,n} - \sum_{i=0}^{n} D_{i,n-i}$

*Caso não se considere fator cauda/*ultimate*, as provisões a constituir serão 0 €. Uma vez que o ano foi dado como finalizado, não haverá mais sinistros a reportar à seguradora.

2.1.2. Método *Grossing Up*

Recorrendo a (Portugal, 1997) "Esta técnica é muitas vezes chamada de método do "iceberg", já que se baseia no princípio de que os sinistros pagos estão relacionados numa determinada proporção com o custo final dos sinistros, ou seja, a ponta do "*iceberg*" que é visível representa uma proporção deste último."

De entre as diversas variantes deste método serão aplicados neste projeto o *grossing up - average factors* e o *worst case*.

Seja $\hat{p}_{i,j}$, a proporção de sinistros pagos no ano de ocorrência i no ano de desenvolvimento j.

Assumindo que no primeiro ano de ocorrência o valor de $D_{0,n}$ é a totalidade de indemnizações a pagar referentes a este ano, então, $\hat{p}_{0,n} = 100\%$. Assim, podemos calcular a proporção de sinistros pagos em cada ano de desenvolvimento para este primeiro ano de ocorrência:

$$\hat{p}_{0,j} = \frac{D_{0,j}}{D_{0,n}}$$

Para calcular as proporções nos restantes anos de ocorrência, consideramos que os últimos valores acumulados do mesmo ano de desenvolvimento correspondem à média das proporções estimadas anteriormente, estimando as restantes percentagens em função desta, ou seja:

1. $\hat{p}_{1,n-1} = \hat{p}_{0,n-1}$;
2. $\hat{p}_{1,j} = \frac{D_{1,j}}{D_{1,n-1}} * \hat{p}_{1,n-1}$

Para o ano *i* = 2, ..., n, calculam-se da mesma forma:

3. $\hat{p}_{i,n-i} = média\left(\hat{p}_{0,n-i};\ \hat{p}_{1,n-i};\ \hat{p}_{i-1,n-i}\right)$;
4. $\hat{p}_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{D_{i,n-i}} * \hat{p}_{i,n-i}$

Aplicando as proporções estimadas da diagonal principal desta nova matriz aos custos acumulados referentes a esses mesmos anos de ocorrência e desenvolvimento (Tabela 1.1) poderemos retirar o valor das indemnizações previstas a pagar– *average factors.*

A título de exemplo, para o último ano considerado para investigação temos:

$$\widehat{D}_{n,n} = \frac{D_{n,0}}{\hat{p}_{n,0}}$$

Outra alternativa é a de considerar o pior dos casos registados. Partimos de uma perspetiva mais prudente admitindo que a percentagem de sinistros pagos relativamente ao seu custo final é ainda menor – *worst case.*

Nesta variante basta, no primeiro passo, substituir a média pelo mínimo.

Nos anos de ocorrência 0 e 1 mantem-se o mesmo formato:

1. $\hat{p}_{0,j} = \frac{D_{0,j}}{D_{0,n}}$;
2. $\hat{p}_{1,n-1} = \hat{p}_{0,n-1}$;
3. $\hat{p}_{1,j} = \frac{D_{1,j}}{D_{1,n-1}} * \hat{p}_{1,n-1}$

Nos anos posteriores basta substituir a média pelo mínimo:

4. $\hat{p}_{i,n-i} = mínimo(\hat{p}_{0,n-i};\ \hat{p}_{1,n-i};\ \hat{p}_{i-1,n-i})$;
5. $\hat{p}_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{D_{i,n-i}} * \hat{p}_{i,n-i}$

A Tabela 2.3 descreve de uma maneira mais prática como serão calculadas as proporções para este método.

Tabela 2.3: Proporções Grossing Up - worst case

	Ano desenvolvimento				
Ano Ocorrência	0	1	…	n-1	n
0	$\hat{p}_{0,0}$	$\hat{p}_{0,1}$		$\hat{p}_{0,n-1}$	$\hat{p}_{0,n}$
1	$\frac{D_{1,0} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}$	$\frac{D_{1,1} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}$		$\hat{p}_{0,n-1}$	
…					
n-1	$D_{n-1,0} * \frac{min\left(\hat{p}_{0,1}; \frac{D_{1,1} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}; \ldots\right)}{D_{n-1,1}}$	$\min\left(\hat{p}_{0,1}; \frac{D_{1,1} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}; \ldots\right)$			
n	$\min\left(\hat{p}_{0,0}; \frac{D_{1,0} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}; \ldots; D_{n-1,0} * \frac{min\left(\hat{p}_{0,1}; \frac{D_{1,1} * \hat{p}_{0,n-1}}{D_{1,n-1}}; \ldots\right)}{D_{n-1,1}}\right)$				

O cálculo das provisões a constituir é semelhante ao método de *Chain Ladder*, a diferença encontra-se nas indemnizações a pagar, uma vez que neste método foram estimadas com base nos fatores de desenvolvimento $\hat{f}_j$, e no método *Grossing up* utilizam-se as proporções estimadas na Tabela 2.3 (dependendo que variante esteja a ser usada). Como se pode observar na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Provisões a constituir - Método Grossing Up

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano n	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
0	$D_{0,n}$	$\frac{D_{0,n}}{\hat{p}_{0,n}}$	0
1	$D_{1,n-1}$	$\frac{D_{1,n-1}}{\hat{p}_{0,n-1}}$	$\frac{D_{1,n-1}}{\hat{p}_{0,n-1}} - D_{1,n-1}$
…	…	…	…
n	$D_{n,0}$	$\frac{D_{n,0}}{\hat{p}_{n,0}}$	$\frac{D_{n,0}}{\hat{p}_{n,0}} - D_{n,0}$
Total	$\sum_{i=0}^{n} D_{i,n-i}$	$\sum_{i=0}^{n} \frac{D_{i,n-i}}{\hat{p}_{i,n-i}}$	$\sum_{i=0}^{n} \frac{D_{i,n-i}}{\hat{p}_{i,n-i}} - \sum_{i=0}^{n} D_{i,n-i}$

2.2. Modelos Estocásticos

Os Modelos Estocásticos são desenvolvidos numa base estatística rigorosa, permitindo a obtenção de estimativas da provisão, bem como, a obtenção de medidas de erro associadas a essas estimativas. Devido ao crescente progresso na área computacional, estes modelos têm alcançado destaque.

Também possibilitam a construção de intervalos de confiança para a estimativa da provisão, sendo a sua principal vantagem, comparativamente, aos métodos determinísticos. Considerando o princípio da prudência a que o processo de provisionamento deve estar sujeito, a partir do respetivo intervalo de confiança, é possível escolher um valor para a provisão que se encontre num nível considerado adequado, empregando a medida de probabilidade como referência.

A utilização de testes de diagnóstico/pressupostos para avaliar a qualidade do ajustamento dos dados é outra vantagem destes modelos. Desta forma, a utilização de ferramentas mais sofisticadas possibilita analisar o grau de confiança que podemos atribuir aos resultados dados por cada modelo.

Os Modelos Estocásticos podem ser divididos em (Figura 2.1):

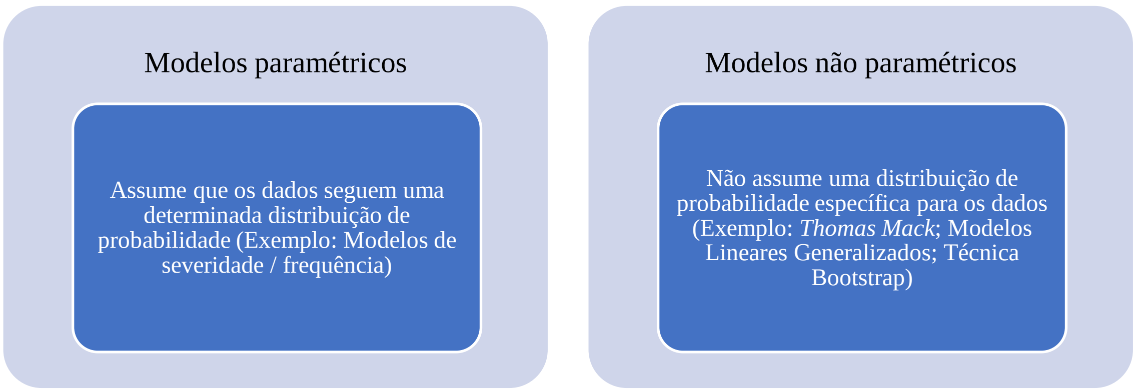

Figura 2.1: Tipos de modelos estocásticos

O método proposto por *Thomas Mack* será o método estocástico que vai ser estudado e analisado ao longo desta investigação.

2.2.1. Método *Thomas Mack*

O método proposto por *Thomas Mack* (Mack, 1993) baseia-se nas provisões estimadas pelo método de *Chain Ladder*. Ou seja, utiliza o valor das reservas a constituir estimado pelo modelo determinístico, porém o modelo estocástico proporciona a produção de mais informação, mais concretamente uma medida de erro que possibilita a construção de intervalos de confiança.

Para aplicar este método, é essencial testar primeiro os dados em estudo, nomeadamente:

1. Verificar a existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento;
$$E\left(D_{i,j+1} \middle| D_{i,0}, \dots, D_{i,j}\right) = D_{i,j} * f_j,\ 0 \leq i \leq n-1 \ \text{ e } \ 0 \leq j \leq n-2$$
2. Verificar a independência entre os diferentes anos de ocorrência;
As variáveis $\{D_{i,0}, \dots, D_{i,n}\}$ e $\{D_{k,0}, \dots, D_{k,n}\}$, de diferentes anos de ocorrência, $i \neq k$, são independentes
3. Verificar se os estimadores dos fatores de desenvolvimento obtidos são os que apresentam menor variância.
$$Var\left(D_{i,j+1} \middle| D_{i,0}, \dots, D_{i,j}\right\} = D_{i,j} * \sigma_j^2,\ 0 \leq i \leq n-1 \ \text{ e } \ 0 \leq j \leq n-2$$

Representam-se por $D_{i,j}$, os custos acumulados de sinistros associados ao ano de ocorrência i e ao ano de desenvolvimento j.

Através da análise destes três pressupostos podemos avaliar se o método é apropriado ao nosso conjunto de dados e, por conseguinte, assegura-nos uma maior credibilidade do processo de estimação.

Estes pressupostos são os mesmos que se aplicam ao método de *Chain Ladder*, apenas se assume que são cumpridos sem qualquer tipo de análise prévia.

Após o devido estudo destes pressupostos, caso sejam cumpridos/validados, podemos prosseguir para o cálculo do erro padrão e assim construir os ditos intervalos de confiança que permitem analisar os possíveis desvios em relação às reservas registadas relativas aos anos estudados.

Se as provisões para sinistros estiverem dentro do intervalo de confiança, podemos considerar que as provisões constituídas são adequadas para as responsabilidades assumidas. Caso os valores se encontrem abaixo do limite inferior, a seguradora deverá reforçar as provisões. No entanto, se os valores forem superiores ao limite superior, estamos perante um excesso de provisionamento, então é aconselhado que a seguradora liberte alguma provisão.

2.2.1.1. 1º Pressuposto – Proporcionalidade

O pressuposto de que $E\left(D_{i,j+1} \middle| D_{i,0}, \dots, D_{i,j}\right) = D_{i,j} * f_j$, $0 \le i \le n-1$ e $0 \le j \le n-2$ consiste na verificação da existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento. A fim de verificar esta existência de proporcionalidade, podemos construir o gráfico com os pares ordenados $(D_{i,j}; D_{i,j+1})$, sendo uma relação linear (passa na origem) com declive $\hat{f}_j$.

Seja o modelo de regressão:

$$Y_i = x_i * \hat{f}_j + \varepsilon_i,\ 0 \le i \le n-1 \qquad (2.2)$$

Em que $\hat{f}_j$ representa o coeficiente de regressão e ε_i o erro.

Caso os pares ordenados estejam relativamente próximos à reta composta pela equação (2.2), podemos considerar que os estimadores estão ajustados para o modelo. Por outro lado, se existirem desvios significativos rejeita-se a hipótese e aconselha-se a procurar estimadores que melhor se ajustem aos dados.

A validação deste pressuposto implica fazer também uma análise à correlação entre os fatores de desenvolvimento. Tendo por base o teste de *Spearman*, é possível verificar a inexistência de correlação entre estes fatores.

Para pormos em prática este teste, teremos de criar duas matrizes, R e S, com os elementos $r_{i,j}$ e $s_{i,j}$, respetivamente.

Estas matrizes são construídas a partir dos fatores de desenvolvimento individuais que são estimados da seguinte forma:

$$\hat{f}_{i,j} = \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}} \qquad (2.3)$$

Na Tabela 2.5 temos a matriz com os fatores de desenvolvimento individuais, com suporte na equação anterior.

Tabela 2.5: Matriz fatores de desenvolvimento individuais

	Ano desenvolvimento					
Ano Ocorrência	0	1	…	j	…	n-1
0	$\frac{D_{0,1}}{D_{0,0}}$	$\frac{D_{0,2}}{D_{0,1}}$		$\frac{D_{0,j+1}}{D_{0,j}}$		$\frac{D_{0,n}}{D_{0,n-1}}$
1	$\frac{D_{1,1}}{D_{1,0}}$	$\frac{D_{1,2}}{D_{1,1}}$		$\frac{D_{1,j+1}}{D_{1,j}}$		
…						
i	$\frac{D_{i,1}}{D_{i,0}}$	$\frac{D_{i,2}}{D_{i,1}}$		$\frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}}$		
…						
n-1	$\frac{D_{n-1,1}}{D_{n-1,0}}$					

A matriz com os elementos $r_{i,j}$, é construída tendo em conta cada ano de desenvolvimento j, em que se atribui um número de ordem (organizado por ordem crescente) em cada coluna com os fatores de desenvolvimento individuais, $\hat{f}_{i,j}$. Melhor dizendo, em cada coluna da matriz da Tabela 2.5 organizamos, por ordem crescente, os fatores de desenvolvimento individuais ao qual se atribui um número de ordem.

A matriz com os elementos $s_{i,j}$ é criada de forma similar, em que se utilizam os fatores de desenvolvimento individuais antecedentes, desprezando o último fator.

Ou seja,

- $r_{i,j}$ é o número de ordem atribuído ao fator de desenvolvimento individual $\hat{f}_{i,j}$;
- $s_{i,j}$ é o número de ordem atribuído ao fator de desenvolvimento individual $\hat{f}_{i,j-1}$.

O coeficiente de correlação de *Spearman*, T_j é estimado através de:

$$T_j = 1 - 6 \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{\left(r_{i,j} - s_{i,j}\right)^2}{(n-j)^3 - n + j}, 1 \leq j \leq n-3 \tag{2.4}$$

Em que T_j é um valor situado no intervalo]-1; 1[.

Caso esta variável tenha um valor mais próximo de zero, existirá menor correlação entre os fatores de desenvolvimento, isto é, verifica-se a inexistência de correlação dos mesmos.

Na ausência de correlações, representa-se por:

$$E(T_j) = 0, 1 \leq j \leq n-3$$

E,

$$Var(T_j) = \frac{1}{n-j-1} \tag{2.5}$$

A estimativa T é calculada com suporte da seguinte fórmula:

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n-3} (n-j-1) * T_j}{\sum_{j=1}^{n-3} (n-j-1)} \tag{2.6}$$

Com

$$E(T) = 0$$

E,

$$Var(T) = \frac{1}{\frac{(n-1)*(n-2)}{2}}$$

Visto que as variáveis $T_j's$ se aproximam da distribuição Normal, e como T é estimado pela soma ponderada das mesmas, podemos reconhecer que T também segue uma distribuição Normal. Caso o valor observado de T esteja no intervalo de confiança da equação (2.7), há evidências para afirmar a ausência de correlação entre os fatores de desenvolvimento.

$$\left] -\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{Var(T)}; \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{Var(T)}\right[\tag{2.7}$$

2.2.1.2. 2º Pressuposto – Independência

O pressuposto de que as variáveis $\{D_{i,0}, \dots, D_{i,n}\}$ e $\{D_{k,0}, \dots, D_{k,n}\}$, de diferentes anos de ocorrência, $i \neq k$, são independentes consiste na verificação da hipótese de independência entre os anos de ocorrência, ou seja, entre as linhas da matriz *Run-Off*. Para isso, considera-se novamente a matriz de fatores de desenvolvimento individuais da Tabela 2.5, os quais iremos dividir em dois conjuntos, um com os fatores mais elevados e outro com os mais baixos de cada ano j. O conjunto L (*Large factors*) é constituído pelos fatores mais elevados de cada ano j, e o conjunto S (*Small factors*) pelos mais baixos.

Uma vez que estes conjuntos possuem o mesmo número de elementos em cada ano de desenvolvimento, isto significa que nos anos em que se verifiquem um número ímpar no número de fatores de desenvolvimento terá que se desprezar o fator com valor mediano.

Simplificando,

- Conjunto de elementos L – contém metade dos fatores de desenvolvimento individuais mais elevados de cada ano de desenvolvimento j;
- Conjunto de elementos S – contém a restante metade com os fatores de desenvolvimento individuais mais baixos de cada ano de desenvolvimento j.

Considerando a Tabela 2.5, em que constam os respetivos fatores, seja o vetor C_j, a diagonal desta matriz:

- $C_0 = \{\hat{f}_{0,0}\}$;
- $C_1 = \{\hat{f}_{0,1}; \hat{f}_{1,0}\}$;
- …
- $C_{n-1} = \{\hat{f}_{0,n-1}; \hat{f}_{1,n-2}; \dots; \hat{f}_{n-1,0}\}$

Para cada C_j teremos de contabilizar o número de elementos dos conjuntos L e S. É expectável que o número de elementos nos dois conjuntos seja aproximadamente o mesmo, isto se existir independência entre os anos de ocorrência.

Seja L_j, o número de elementos de L que pertencem a D_j; S_j, o número de elementos de S em D_j; e Z_j, o mínimo entre L_j e S_j.

Caso

$$Z_j < \frac{L_j + S_j}{2}$$

então existe uma predominância de fatores de desevolvimento elevados ou baixos na diagonal j de fatores de desenvolvimento. Assim sendo, há evidências para afirmar que não existe independência entre os anos de ocorrência, no que se traduz na rejeição do pressuposto.

Note-se que, atendendo à hipótese que se quer testar, L_j e S_j têm distribuição Binomial de parâmetros $z = L_j + S_j$ e $p = 0{,}5$.

Seja *m*, o inteiro, aproximado por defeito de $\frac{z-1}{2}$.

A variável Z_j é dada por:

$$E(Z_j) = \frac{z}{2} - C_m^{z-1} * \frac{z}{2^z}$$

E por,

$$Var(Z_j) = \frac{z * (z-1)}{4} - C_m^{z-1} * \frac{z * (z-1)}{2^z} + E(Z_j) - [E(Z_j)]^2$$

Assim, a variável Z é dada da seguinte forma:

$$E(Z) = \Sigma_{j=0}^{n-1} E(Z_j)$$

E,

$$Var(Z) = \Sigma_{j=0}^{n-1} Var(Z_j)$$

Seja α, o nível de significância.

Assumindo uma aproximação à distribuição Normal, caso Z esteja dentro do intervalo, há evidências para afirmar que existe independência entre os anos de ocorrência.

$$]E(Z) - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{Var(Z)}; E(Z) + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{Var(Z)}[$$

2.2.1.3. 3º Pressuposto – Variabilidade mínima

Através da construção dos gráficos com os pares ordenados $\left(D_{i,j}, \frac{D_{i,j+1} - D_{i,j} * \hat{f}_j}{\sqrt{D_{i,j}}}\right)$, para cada ano de desenvolvimento j, podemos verificar se os estimadores dos fatores de desenvolvimento obtidos são os que apresentam menor variância.

$$Var\left(D_{i,j+1} \middle| D_{i,0}, \dots, D_{i,j}\right\} = D_{i,j} * \sigma_j^2, 0 \leq i \leq n-1 \ \text{ e } \ 0 \leq j \leq n-2$$

Sendo assim possível averiguar se existe algum tipo de tendência nos resíduos. Caso sejam aparentemente aleatórios, poderemos prosseguir com o método.

2.2.1.4. *Variabilidade das Reservas*

Após a análise e validação dos pressupostos estudados, passamos para a estimação do erro padrão e dos intervalos de confiança das provisões a constituir estimadas por meio do método *Chain Ladder*, descrito na subsecção 2.1.1..

Seja *D*, o conjunto de dados da Tabela 1.1 conhecido até ao último ano considerado para investigação.

Sendo o objetivo saber o erro que resulta da estimação, isto é, saber qual a diferença entre a estimativa $\widehat{D}_{i,n}$ e o valor que de facto se vai observar $D_{i,n}$ recorre-se ao Erro Quadrático Médio (EQM):

$$EQM(\widehat{D}_{i,n}) = E\left[\left(D_{i,n} - \widehat{D}_{i,n}\right)^2 \middle| D\right] \text{ , } D = \left\{D_{i,j} \middle| i + j \leq n + 1\right\}$$

Seja o estimador centrado $\hat{\sigma}_j^2$, a variância amostral do fator de desenvolvimento j.

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j} * \left(\frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}} - \hat{f}_j\right)^2 \text{ , } 0 \leq j \leq n-3 \tag{2.8}$$

Uma vez que não é possível o cálculo na equação (2.8) para $j = n - 2$, temos a seguinte estimativa:

$$\hat{\sigma}_{n-2}^2 = Min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^4}{\hat{\sigma}_{n-4}^2}; Min(\hat{\sigma}_{n-4}^2; \hat{\sigma}_{n-3}^2)\right) \tag{2.9}$$

Quando $\hat{f}_j = 1$, assume-se que não existe variabilidade, $\hat{\sigma}_j^2 = 0$, na medida em que não se espera que ocorram mais sinistros relativos a esses anos de ocorrência.

O $EQM(\widehat{D}_{i,n})$, é igual ao $EQM(\hat{R}_i)$, uma vez que:

$$EQM(\hat{R}_i) = E\left[\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| D\right] = EQM(\widehat{D}_{i,n}) = E\left[\left(D_{i,n} - \widehat{D}_{i,n}\right)^2 \middle| D\right]$$

Através da equação anterior, podemos assumir que:

$$E\hat{Q}M(\hat{R}) = E\hat{Q}M\left(\sum_{i=0}^{n} \hat{R}_i\right) = E\hat{Q}M\left(\sum_{i=0}^{n} \widehat{D}_{i,n}\right)$$

Podemos estimar $EQM(\widehat{D}_{i,n})$ e $E\hat{Q}M(\sum_{i=0}^{n} \widehat{D}_{i,n})$ através das equações:

$$EQM(\widehat{D}_{i,n}) = \widehat{D}_{i,n}^2 * \sum_{j=n-i}^{n-2} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} * \left(\frac{1}{\widehat{D}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-j-1} D_{i,j}} \right) \tag{2.10}$$

$$E\hat{Q}M\left(\sum_{i=0}^{n} \widehat{D}_{i,n}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(EQM(\widehat{D}_{i,n}) + \widehat{D}_{i,n} * \left(\sum_{j=i+1}^{n-1} \widehat{D}_{j,n}\right) * \sum_{k=n-i}^{n-2} \frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} * \left(\frac{1}{\sum_{l=0}^{n-k-1} D_{l,k}} \right) \right)$$

Assumindo a hipótese de normalidade de $\hat{R}_i$ e de $\hat{R}$, estimam-se os intervalos de confiança, com um nível de confiança $1 - \alpha$, para as estimativas das provisões, respetivamente,

$$\left]\hat{R}_i - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{E\hat{Q}M(\hat{R}_i)}; \hat{R}_i + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{E\hat{Q}M(\hat{R}_i)}\right[\tag{2.11}$$

$$\left]\hat{R} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{E\hat{Q}M(\hat{R})}; \hat{R} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) * \sqrt{E\hat{Q}M(\hat{R})}\right[$$

Caso as provisões a constituir estejam abaixo do limite inferior, a seguradora deverá reforçar as provisões. Por outro lado, caso estes valores sejam superiores ao limite superior, então existe um excesso de provisionamento, sendo aconselhado à seguradora reduzir alguma provisão. Se os valores das reservas estiverem presentes dentro do intervalo, podemos assumir que as provisões constituídas são apropriadas para as obrigações assumidas.

A vantagem deste método é poder avaliar a variabilidade da estimativa pontual obtida pelo método de *Chain Ladder*, atribuindo um grau de confiança às estimativas apresentadas.

2.3. Fator Cauda ou *Ultimate*

Relativamente aos anos de ocorrência dos sinistros em estudo, os pagamentos dos mesmos podem prolongar-se por vários anos de exercício, sendo necessário considerar estas situações na estimativa da evolução das indemnizações futuras, para que não se obtenha estimativas pouco ajustadas à realidade da seguradora.

O fator cauda f_n, corresponde ao valor das indemnizações previstas a pagar quando já não se espera que ocorram mais sinistros relativos a esses anos de ocorrência, ou seja, o último ano de desenvolvimento considerado.

Este fator pode corresponder a um valor que a seguradora aprovisionou, ou à multiplicação entre o custo médio dos sinistros e o número de sinistros em aberto, entre outras alternativas.

A metodologia para projetar os coeficientes de desenvolvimento proposta por (Neuhaus, 2004) é dada por:

$$\hat{f}_j = 1 + \delta\left(\hat{f}_{j-1} - 1\right), j > n - 1 \qquad (2.12)$$

Onde δ varia entre 0 e 1, escolhendo-se o valor que melhor se ajusta ao padrão dos coeficientes de desenvolvimento, $\hat{f}_j$, já estimados, para $j < n$. Caso se pondere utilizar um valor δ bastante próximo de 1, estamos a assumir que os sinistros irão prolongar-se durante mais anos, adotando assim uma característica mais preventiva/prudente. Se atribuirmos um valor mais próximo de 0, estamos a ser mais "dinâmicos", na medida em que os sinistros não se irão estender ao longo dos anos, criando assim uma matriz com menos anos de desenvolvimento.

Com o decorrer dos anos, esta fórmula tem a tendência de se aproximar de 1, então podemos dar como "terminado" o último ano relativo às indemnizações previstas a pagar quando o último fator de desenvolvimento projetado estiver bastante próximo do mesmo.

Esta última metodologia é a que irá ser analisada na aplicação prática.

3. Aplicação Prática

3.1. Dados

Os dados disponibilizados são referentes à realidade de uma seguradora, no entanto foram efetuadas alterações sobre os dados originais, de modo a garantir a confidencialidade da empresa.

Dado o volume de dados existente, recorreu-se à ferramenta *SAS Enterprise Guide 7.1* para tratar o universo de sinistros com a tipologia de IBNR, dos exercícios de 2015 a 2021, atendendo a que a informação histórica teve de ser uniformizada em função das alterações processuais ocorridas na seguradora ao longo do tempo.

Analisando a cadência de reporte de sinistros, verificou-se que o período médio de reporte de sinistros se situa em 180 dias, pelo que sinistros ocorridos a meio do ano apenas seriam reportados no início do ano seguinte. Deste modo, aplicou-se um “fator temporal” do qual todos os sinistros que tenham ocorrido perto do fim do exercício, mais concretamente a partir de outubro, e que tenham sido reportados com um prazo inferior a 120 dias são considerados custos de sinistros no ano de ocorrência. Exemplificando, um sinistro que tenha ocorrido em novembro de 2020 e foi reportado em janeiro de 2021, as reservas associadas a esse sinistro serão contabilizadas no ano 2020.

Ao longo deste estudo percebeu-se também que os sinistros que foram dados sem efeito ou recusados impactam bastante nos resultados obtidos. Para fazer face a este tipo de situações aplicou-se um ponderador à matriz de sinistros pagos, mais concretamente a média percentual dos sinistros que foram dados sem efeito com base nos anos de informação mais recentes. Por exemplo, atribuindo uma reserva de 10.000€ a um sinistro que ocorreu em 2019, reportado à seguradora nesse mesmo ano, e que por razões burocráticas tenha sido recusado apenas em 2021, fica associado um custo de -10.000 € de modo a anular a reserva.

Na Tabela 3.1, encontram-se os montantes dos sinistros pagos, sob a forma incremental.

Tabela 3.1: Matriz sinistros pagos incremental

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	17.693.135,11	3.029.062,28	856.475,86	566.302,31	323.340,43	207.336,59	242.887,88
2016	18.368.056,94	3.427.879,06	1.022.031,87	624.135,40	404.427,84	256.336,44	
2017	18.872.082,74	3.528.666,26	1.210.757,89	677.531,12	375.668,63		
2018	18.283.271,57	4.605.791,17	1.108.588,08	776.550,58			
2019	15.241.522,56	4.854.917,86	1.622.001,69				
2020	11.294.283,77	4.002.157,59					
2021	13.900.375,81						

Trata-se de um ramo em que a maior parte dos pagamentos está concentrada nos primeiros anos de desenvolvimento. Apesar dos diversos processos/burocracias, a seguradora é relativamente rápida a concluir os pagamentos, na medida em que grande parte dos montantes são pagos nos anos de desenvolvimento 0 e 1.

Na Tabela 3.2, são apresentados os montantes dos sinistros pagos, sob a forma acumulada.

Tabela 3.2: Matriz Sinistros pagos acumulados

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	17.693.135,11	20.722.197,39	21.578.673,25	22.144.975,56	22.468.315,99	22.675.652,58	22.918.540,46
2016	18.368.056,94	21.795.936,00	22.817.967,87	23.442.103,28	23.846.531,12	24.102.867,56	
2017	18.872.082,74	22.400.749,01	23.611.506,90	24.289.038,01	24.664.706,64		
2018	18.283.271,57	22.889.062,74	23.997.650,82	24.774.201,39			
2019	15.241.522,56	20.096.440,42	21.718.442,10				
2020	11.294.283,77	15.296.441,35					
2021	13.900.375,81						

3.2. Método *Chain Ladder*

Após a construção da matriz acumulada de montantes pagos, são calculados os valores dos fatores de desenvolvimento com recurso à equação (2.1).

A título de exemplo, temos o cálculo do primeiro fator de desenvolvimento $\hat{f}_0$:

$$\hat{f}_0 = \frac{20.722.197{,}39 + 21.795.936{,}00 + 22.400.749{,}01 + 22.889.062{,}74 + 20.096.440{,}42 + 15.296.441{,}35}{17.693.135{,}11 + 18.368.056{,}94 + 18.872.082.74 + 18.283.271{,}57 + 15.241.522{,}56 + 11.294.283{,}77} = 1{,}2351$$

Tabela 3.3: Fatores de desenvolvimento do método Chain Ladder

	Ano desenvolvimento					
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5
$\hat{f}_j$	1,2351	1,0539	1,0287	1,0158	1,0100	1,0107

Tal como observado na Tabela 3.3, na matriz de pagamentos incrementais o fator mais elevado encontra-se no primeiro ano de desenvolvimento, e a partir do 2º ano de desenvolvimento os fatores apresentam um valor muito próximo de 1, não havendo grandes variações relativas ao montante de pagamentos.

Seguidamente, multiplicam-se os fatores de desenvolvimento obtidos pela última diagonal da matriz de *Run-off* acumulada e assim sucessivamente até preencher o triângulo inferior da matriz de *Run-off* de montantes pagos (Tabela 3.4).

Tabela 3.4: Matriz sinistros pagos acumulados com indemnizações previstas a pagar

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	17.693.135,11	20.722.197,39	21.578.673,25	22.144.975,56	22.468.315,99	22.675.652,58	**22.918.540,46**
2016	18.368.056,94	21.795.936,00	22.817.967,87	23.442.103,28	23.846.531,12	**24.102.867,56**	24.361.042,90
2017	18.872.082,74	22.400.749,01	23.611.506,90	24.289.038,01	**24.664.706,64**	24.911.633,06	25.178.471,41
2018	18.283.271,57	22.889.062,74	23.997.650,82	**24.774.201,39**	25.165.419,01	25.417.358,22	25.689.613,59
2019	15.241.522,56	20.096.440,42	**21.718.442,10**	22.342.694,51	22.695.515,40	22.922.727,60	23.168.262,00
2020	11.294.283,77	**15.296.441,35**	16.121.459,50	16.584.838,04	16.846.734,71	17.015.392,86	17.197.651,46
2021	**13.900.375,81**	17.167.893,76	18.093.849,26	18.613.920,13	18.907.858,70	19.097.151,44	19.301.708,58

Para obter o valor das provisões a constituir basta subtrair a última coluna do ano de desenvolvimento pela diagonal principal (a *bold*).

Por exemplo, para 2021, estimou-se que os custos referentes a esse ano seriam 19.301.708,58 €, tendo a seguradora pago 13.900.375,81 €, isto significa que terá de aprovisionar cerca de 5.401.332,77 €.

Tabela 3.5: Provisões a constituir – Chain Ladder

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano de 2021	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
2015	22.918.540,46	22.918.540,46	-
2016	24.102.867,56	24.361.042,90	258.175,34
2017	24.664.706,64	25.178.471,41	513.764,77
2018	24.774.201,39	25.689.613,59	915.412,20
2019	21.718.442,10	23.168.262,00	1.449.819,90
2020	15.296.441,35	17.197.651,46	1.901.210,11
2021	13.900.375,81	19.301.708,58	5.401.332,77
Total	**147.375.575,31**	**157.815.290,40**	**10.439.715,09**

Segundo esta metodologia, estima-se que o valor necessário para fazer face a futuras responsabilidades de sinistros é de 10.439.715,09 € (Tabela 3.5 e Figura 3.1).

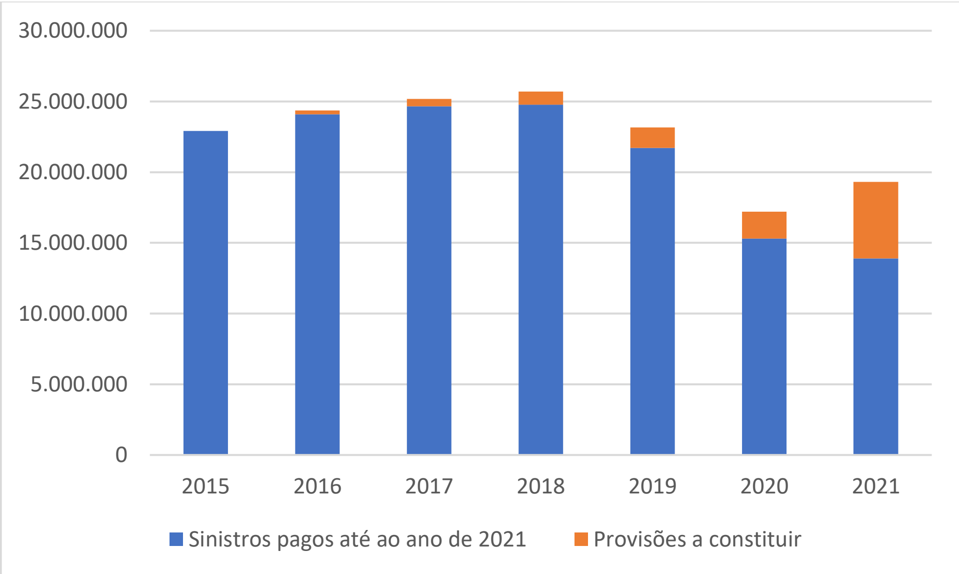

Figura 3.1: Provisões a constituir - Chain Ladder

3.3. *Grossing up*

Com recurso às equações que estão no capítulo 2.1.2 relativas ao método *Grossing up – average* é possível obter os resultados apresentados na Tabela 3.6:

Tabela 3.6: Proporções de sinistros pagos acumulados – Grossing up average

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	77,20%	90,42%	94,15%	96,62%	98,04%	98,94%	**100,00%**
2016	75,40%	89,47%	93,67%	96,23%	97,89%	**98,94%**	
2017	74,95%	88,97%	93,78%	96,47%	**97,96%**		
2018	71,17%	89,10%	93,42%	**96,44%**			
2019	65,79%	86,75%	**93,75%**				
2020	65,67%	**88,94%**					
2021	**71,70%**						

Aplicando as proporções da última diagonal da matriz à última diagonal da matriz acumulada dos valores dos sinistros pagos, obtemos as indeminizações previstas a pagar (Tabela 3.7).

A título de exemplo, temos os seguintes cálculos auxiliares das proporções:

$$\hat{p}_{2015,0} = \frac{17.693.135,11}{22.918.540,46} = 77,20\%$$

$$\hat{p}_{2018,3} = \frac{96,62\% + 96,23\% + 96,47\%}{3} = 96.44\%$$

$$\hat{p}_{2019,1} = \frac{20.096.440,42 * 93,75\%}{21.718.442.10} = 86.75\%$$

Tabela 3.7: Provisões a constituir - Grossing up average

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano de 2021	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
2015	22.918.540,46	22.918.540,46	-
2016	24.102.867,56	24.361.042,90	258.175,34
2017	24.664.706,64	25.177.892,80	513.186,15
2018	24.774.201,39	25.688.519,79	914.318,40
2019	21.718.442,10	23.165.342,33	1.446.900,23
2020	15.296.441,35	17.198.158,89	1.901.717,54
2021	13.900.375,81	19.387.159,07	5.486.783,26
Total	**147.375.575,31**	**157.896.656,23**	**10.521.080,92**

Recorrendo à Tabela 3.7, conclui-se que o valor a constituir das reservas e o estimado pelo método de *Chain Ladder* são bastante próximos.

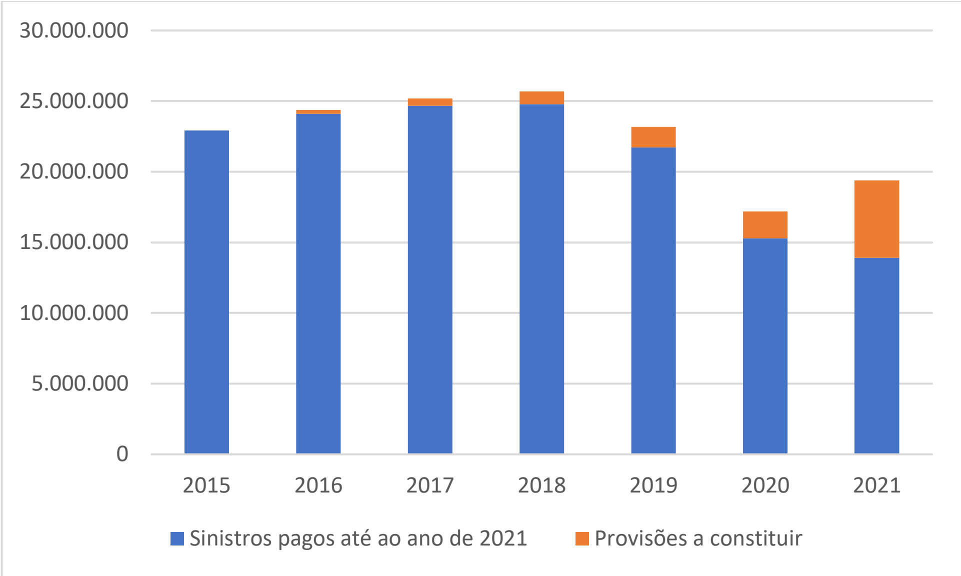

Figura 3.2: Provisões a constituir - Grossing up average

Considerando uma perspetiva mais prudente, podemos optar pelo método *Grossing up – worst case*.

Na Tabela 3.8, com o auxílio das equações do capítulo 2.1.2, estão presentes as proporções baseadas nesta variante.

Tabela 3.8: Proporções de sinistros pagos acumulados - Grossing up worst case

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	77,20%	90,42%	94,15%	96,62%	98,04%	98,94%	**100,00%**
2016	75,40%	89,47%	93,67%	96,23%	97,89%	**98,94%**	
2017	74,90%	88,90%	93,71%	96,40%	**97,89%**		
2018	71,02%	88,91%	93,21%	**96,23%**			
2019	65,41%	86,25%	**93,21%**				
2020	63,68%	**86,25%**					
2021	**63,68%**						

Aplicando novamente estas proporções à última diagonal da matriz acumulada dos valores dos sinistros pagos obtemos as indemnizações previstas a pagar (Tabela 3.9 e Figura 3.3).

Tabela 3.9: *Provisões a constituir - Grossing up worst case*

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano de 2021	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
2015	22.918.540,46	22.918.540,46	-
2016	24.102.867,56	24.361.042,90	258.175,34
2017	24.664.706,64	25.196.871,35	532.164,71
2018	24.774.201,39	25.745.359,79	971.158,40
2019	21.718.442,10	23.300.160,09	1.581.717,99
2020	15.296.441,35	17.734.958,28	2.438.516,93
2021	13.900.375,81	21.827.199,50	7.926.823,70
Total	**147.375.575,31**	**161.084.132,38**	**13.708.557,07**

Considerando uma característica mais prudente, as provisões a constituir sobem cerca de 3 milhões de euros comparando com os resultados dos métodos expostos anteriormente.

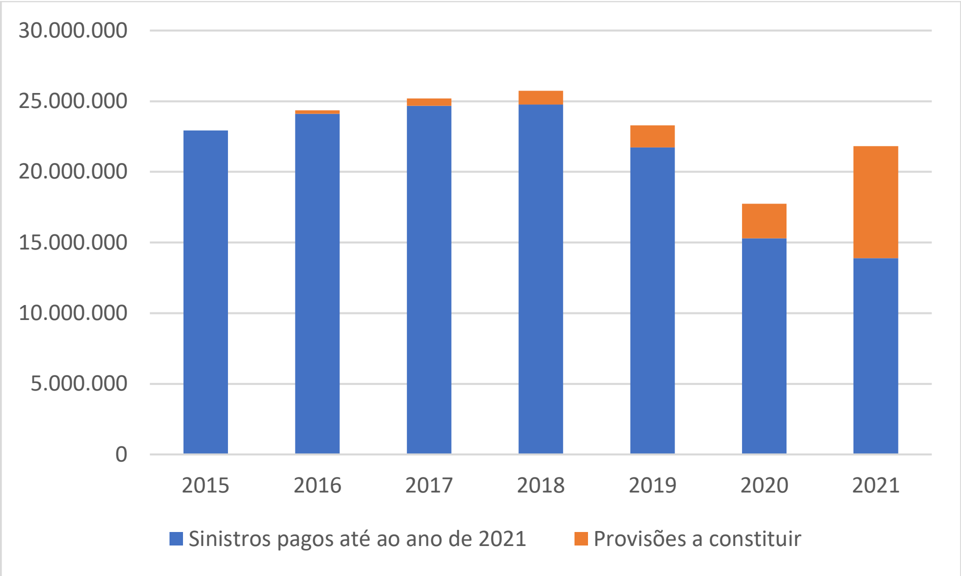

Figura 3.3: Provisões a constituir - Grossing up worst case

3.4. Fator Cauda

Considerando que a matriz fornecida não está encerrada, ou seja, que o número de anos de desenvolvimento considerado não é suficiente para os sinistros serem todos encerrados, surge a necessidade de se projetar os coeficientes de desenvolvimento.

Na aplicação da equação (2.12), serão consideradas quatro hipóteses para o parâmetro δ, $\hat{\delta} = \{0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9\}$.

Ao considerar um valor $\hat{\delta}$ mais elevado, por exemplo 0,9, assume-se uma característica mais prudente, na medida em que, demorará mais anos para finalizar os sinistros em cada ano de ocorrência.

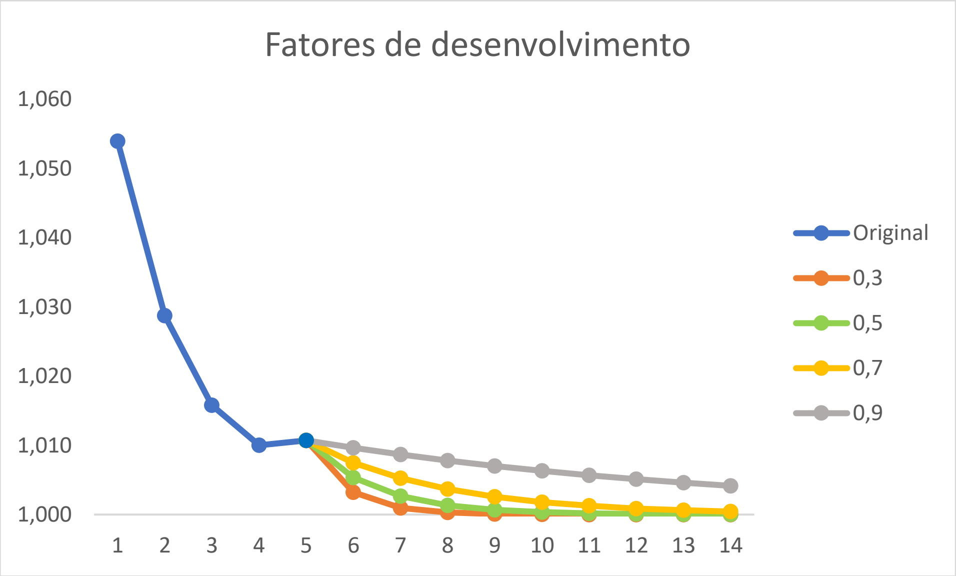

Figura 3.4: Fator cauda/ultimate

Considerando que o ano de ocorrência em 2015 e abertura em 2021 foi um ano com sinistros atípicos, visto que o coeficiente de desenvolvimento sobe ligeiramente face ao ano de desenvolvimento anterior (o que não é suposto), e seguindo as curvas geradas pelos fatores de desenvolvimento estimados pelo método de *Chain Ladder* (Figura 3.4), podemos concluir que a tendência da curva produzida quando $\hat{\delta} = 0{,}5$ é a que melhor se ajusta aos dados.

Analisando as restantes curvas geradas por:

- $\hat{\delta} = 0{,}3$, é pouco prudente, na medida em que os sinistros não iriam estenderem-se ao longo dos anos, muito pelo contrário, terminariam no próximo ano de desenvolvimento.

- $\hat{\delta} = 0{,}9$, já tem a característica oposta da anterior, bastante conservadora, uma vez que os sinistros vão alongar-se no decorrer dos anos, não permitindo à seguradora finalizar os custos relativos aos anos de ocorrência mais antigos.

- $\hat{\delta} = 0{,}7$, também seria uma boa opção, ficando a sua escolha a cabo do atuário, sendo que esta alonga-se mais no decorrer do tempo, o que se traduz num aumento das provisões a constituir. Assume uma característica mais prudente face a $\hat{\delta} = 0{,}5$.

Tabela 3.10: Fatores de desenvolvimento com delta 0,5 - Fator cauda

	Ano desenvolvimento								
Ano Ocorrência	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\hat{f}_j$	**1,00536**	**1,00268**	**1,00134**	1,00067	1,00033	1,00017	1,00008	1,00004	1,00002

Aplicando alguns exemplos com a metodologia proposta por (Neuhaus, 2004):

$$\hat{f}_6 = 1 + 0{,}5 * (1{,}01071 - 1) = 1{,}00536$$
$$\hat{f}_7 = 1 + 0{,}5 * (1{,}005361 - 1) = 1{,}00268$$

Com base na Tabela 3.10, verifica-se que o fator de desenvolvimento 9 está bastante próximo de 1, então podemos dar como "terminado" o custo total dos sinistros no ano de desenvolvimento 8, na medida em que já não se esperam mais sinistros relativos aos anos de ocorrência em estudo.

Isto significa que a matriz dos sinistros pagos terá mais 3 anos de desenvolvimento, ou seja, mais 3 colunas. Utilizando novamente o método de *Chain ladder* com estes novos fatores de desenvolvimento, obtemos a seguinte matriz (Tabela 3.11):

Tabela 3.11: Matriz sinistros acumulados com indemnizações previstas a pagar com fator cauda

	Ano desenvolvimento			
Ano Ocorrência	6	7	8	9
2015	**22.918.540,46**	23.041.285,23	23.102.986,31	23.133.919,46
2016	24.361.042,90	24.491.513,28	24.557.097,86	24.589.977,95
2017	25.178.471,41	25.313.319,69	25.381.104,94	25.415.088,32
2018	25.689.613,59	25.827.199,40	25.896.360,73	25.931.034,00
2019	23.168.262,00	23.292.344,20	23.354.717,58	23.385.987,78
2020	17.197.651,46	17.289.756,88	17.336.056,24	17.359.267,91
2021	19.301.708,58	19.405.082,69	19.457.046,57	19.483.098,09

Através dos custos finais de cada ano de ocorrência, é possível obter as provisões a constituir do mesmo, indicadas na Tabela 3.12.

Tabela 3.12: Provisões a constituir - Fator cauda

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano de 2021	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir
2015	22.918.540,46	23.133.919,46	215.379,01
2016	24.102.867,56	24.589.977,95	487.110,39
2017	24.664.706,64	25.415.088,32	750.381,67
2018	24.774.201,39	25.931.034,00	1.156.832,61
2019	21.718.442,10	23.385.987,78	1.667.545,68
2020	15.296.441,35	17.359.267,91	2.062.826,56
2021	13.900.375,81	19.483.098,09	5.582.722,28
Total	**147.375.575,31**	**159.298.373,52**	**11.922.798,20**

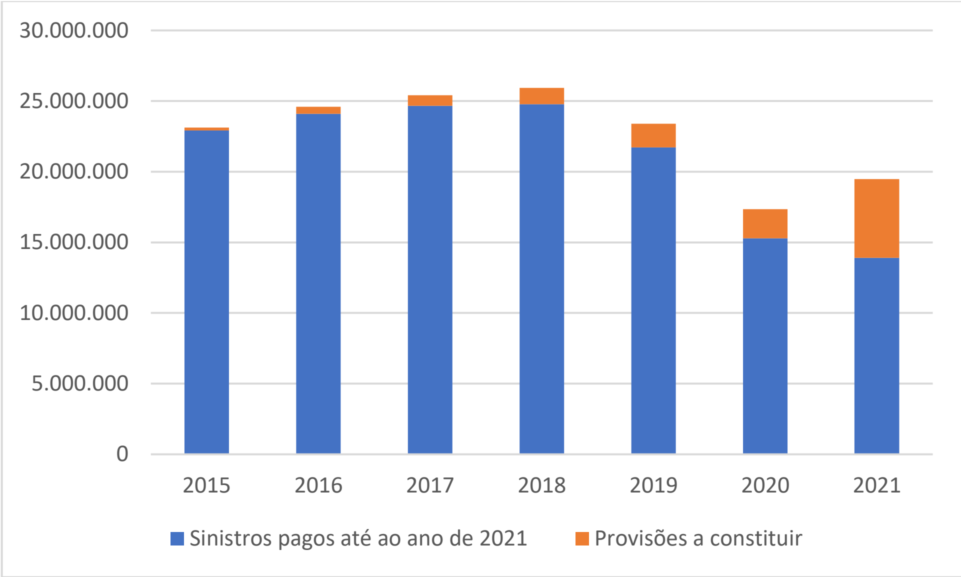

Figura 3.5: Provisões a constituir - Chain Ladder com fator cauda/ultimate

Na Figura 3.6 apresentam-se os efeitos do fator cauda/*ultimate* no método *Chain Ladder*.

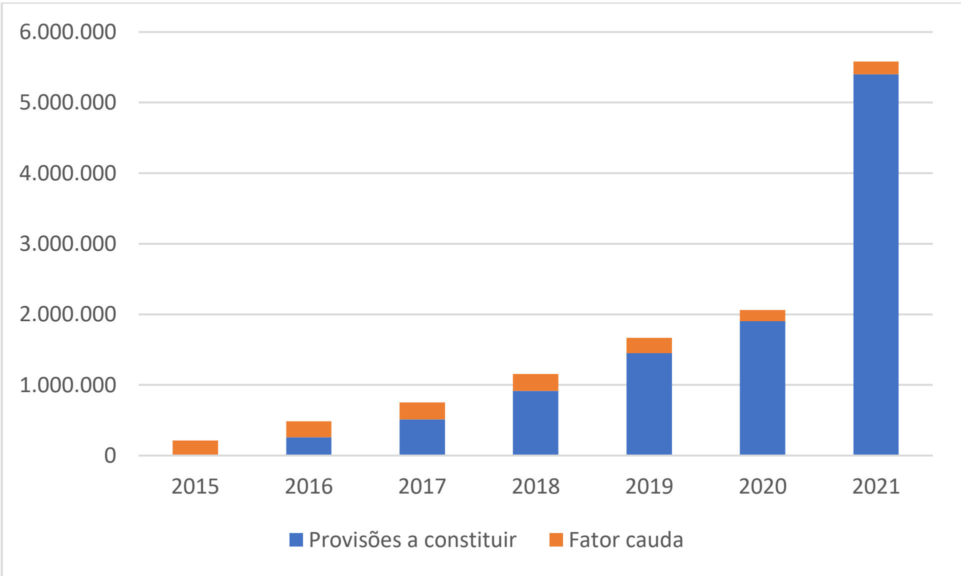

Figura 3.6: Efeito do fator cauda/ultimate no método Chain Ladder

3.5. Método de *Thomas Mack*

Antes da aplicação do método proposto por *Thomas Mack* teremos de verificar se o conjunto de dados é adequado através da análise dos três pressupostos.

1º Pressuposto – Proporcionalidade

Aplicando o primeiro pressuposto, é possível averiguar a linearidade, tendo por base a equação (2.2) que constrói os seguintes gráficos (Figura 3.7):

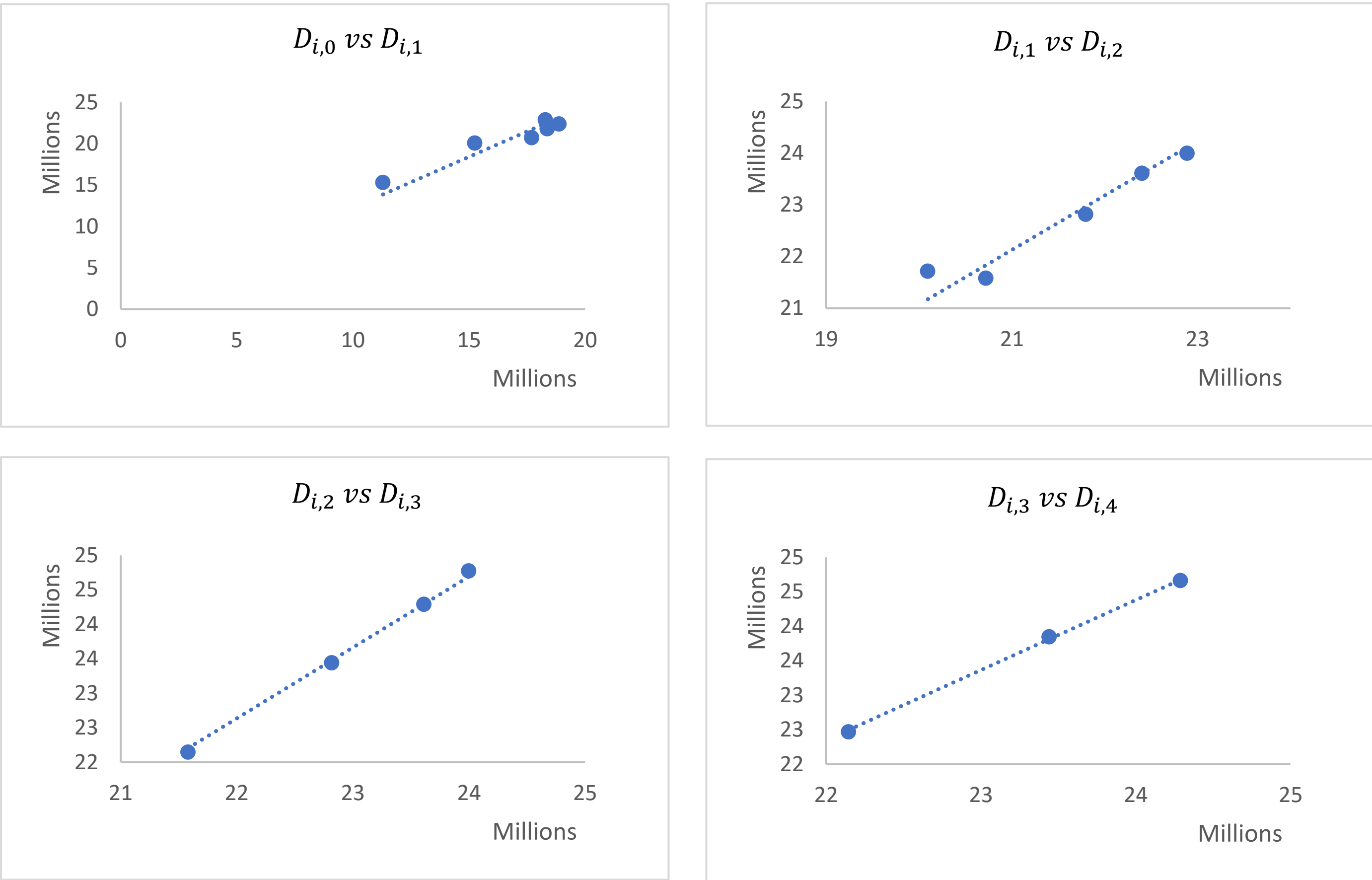

Figura 3.7: Gráficos para testar a linearidade

Não será necessário a construção do gráfico entre os anos de desenvolvimento 4 e 5, na medida em que este gráfico apenas teria 2 pontos, pelo que se assume linearidade.

A partir da Tabela 3.13, onde constam os fatores de desenvolvimento individuais, podemos criar as matrizes R e S (Tabela 3.14 e Tabela 3.15, respetivamente) a fim de analisar a ausência de correlação (através do teste de *Spearman*).

Tabela 3.13: Fatores de desenvolvimento individuais - Thomas Mack

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	1,1712	1,0413	1,0262	1,0146	1,0092	1,0107	
2016	1,1866	1,0469	1,0274	1,0173	1,0107		
2017	1,1870	1,0540	1,0287	1,0155			
2018	1,2519	1,0484	1,0324				
2019	1,3185	1,0807					
2020	1,3544						
2021							

Exemplificando os cálculos auxiliares destes fatores com o suporte da equação (2.3):

$$\hat{f}_{2017,2} = \frac{24.289.038,01}{23.611.506,90} = 1,0287$$

$$\hat{f}_{2020,0} = \frac{15.296.441,35}{11.294.283,77} = 1,3544$$

Tabela 3.14: Matriz R

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015		1	1	1	1	1	
2016		2	2	3	2		
2017		4	3	2			
2018		3	4				
2019		5					
2020							
2021							

Tabela 3.15: Matriz S

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015		1	1	1	1	1	
2016		2	2	2	2		
2017		3	4	3			
2018		4	3				
2019		5					
2020							
2021							

Com a construção destas matrizes, podemos calcular a variável T_j e a sua variância (Tabela 3.16), por meio das equações (2.4) e (2.5), respetivamente.

Tabela 3.16: Coeficientes de correlação de Spearman

	Ano desenvolvimento			
Ano Ocorrência	1	2	3	4
$\boldsymbol{T_j}$	0,9	0,8	0,5	1
$\boldsymbol{Var(T_j)}$	0,25	0,333333	0,5	1

Através da fórmula (2.6), obtém-se a estimativa T com um valor final de 0,80.

Na hipótese de ausência de correlações, temos que:

$$E(T) = 0$$

E,

$$Var(T) = 0{,}1$$

Assim sendo, não há evidências para afirmar a ausência de correlações, visto que a estimativa T não se encontra no intervalo de confiança a 95%, calculado através da equação (2.7).

]-0,6198; 0,6198[

Apesar deste pressuposto não se encontrar 100% validado devido à existência de correlação por parte dos fatores de desenvolvimento, iremos prosseguir com o método.

2º Pressuposto – Independência

Para validar a independência entre os diferentes anos de ocorrência teremos que construir a Matriz S e L (*Small factors* e *Large factors*).

Na Tabela 3.17, estão presentes os resultados obtidos com o agrupamento dos fatores em dois conjuntos, S e L.

Tabela 3.17: Matriz S e L

	Ano desenvolvimento						
Ano Ocorrência	0	1	2	3	4	5	6
2015	S	S	S	S	S	*	
2016	S	S	S	L	L		
2017	S	L	L	*			
2018	L	*	L				
2019	L	L					
2020	L						
2021							

Os resultados da matriz com asterisco (*) representam os valores que foram desprezados (valores medianos).

Na Tabela 3.18, encontram-se os valores respetivos a cada variável, sendo S_j e L_j a contagem dos elementos de cada diagonal dos Conjuntos S e L, respetivamente.

Tabela 3.18: Momentos das variáveis

j	S_j	L_j	Z_j	z	M	$E(Z_j)$	$Var(Z_j)$
0	1	0	0	1	0	0	0
1	2	0	0	2	0,5	0,5	0,25
2	3	0	0	3	1	0,75	0,1875
3	2	2	2	4	1,5	1,25	0,4375
4	1	3	1	4	1,5	1,25	0,4375
5	0	4	0	4	1,5	1,25	0,4375
Total			**3**			**5**	**1,75**

Uma vez que Z = 3 se situa dentro do intervalo de confiança a 95%,]2,407; 7,592[, há evidências para afirmar que existe independência entre os anos de ocorrência. Assim sendo, podemos prosseguir com a aplicação do modelo. Verifica-se também uma predominância de *Small factors* ou *Large factors*, uma vez que, $\frac{L_j+S_j}{2} \geq Z_j$.

3º Pressuposto – Variabilidade mínima

Neste pressuposto basta construir os gráficos de dispersão dos resíduos ponderados para cada ano de desenvolvimento (desvios entre os dados observados *vs.* estimados). Caso estes sejam aparentemente aleatórios poderemos prosseguir para a aplicação do modelo.

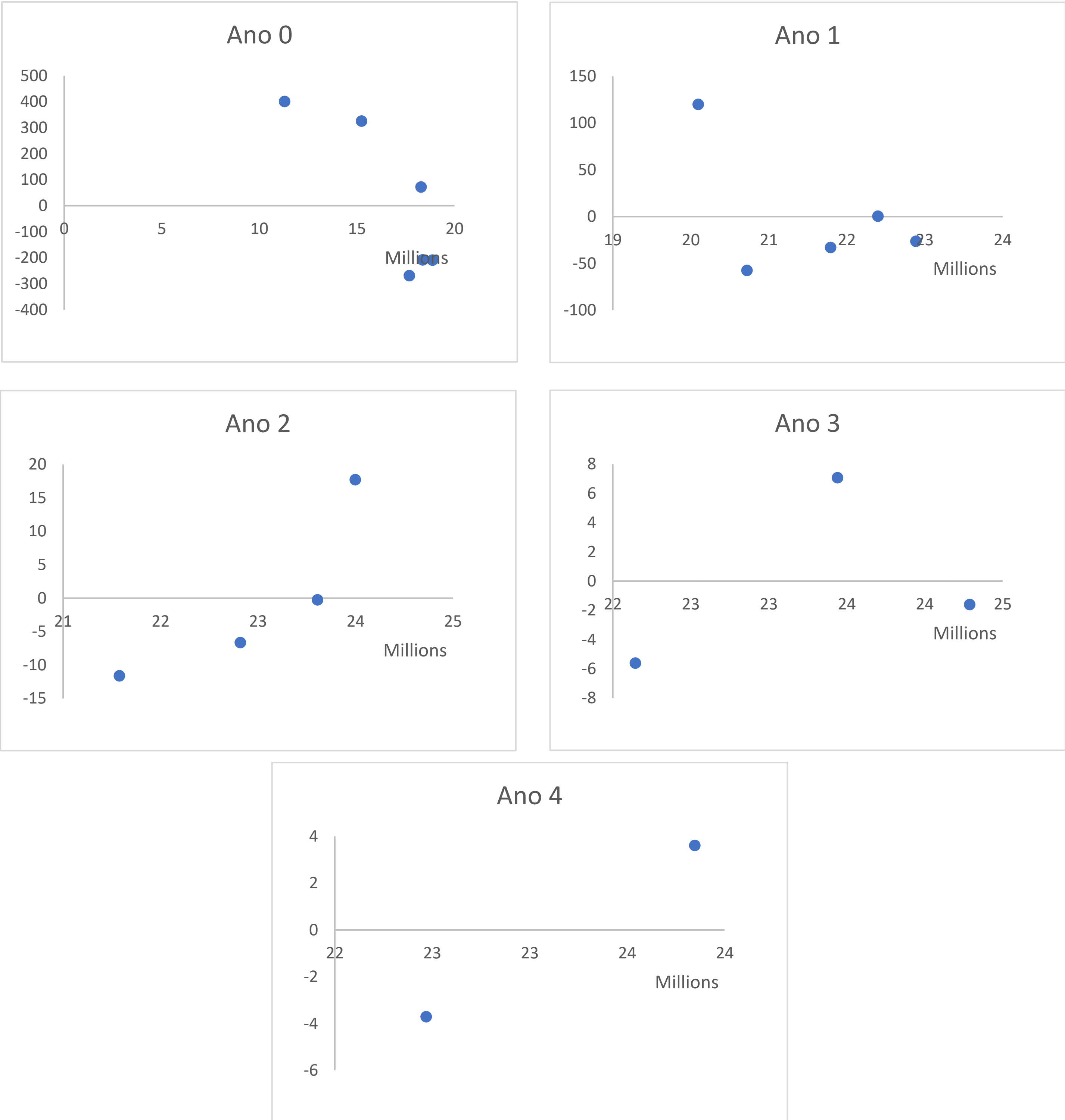

Figura 3.8: Gráficos para testar a variabilidade dos resíduos

Tal como referido anteriormente, o que se pretende neste pressuposto é a aleatoriedade dos resíduos.

Uma vez que os gráficos da Figura 3.8 não aparentam qualquer tipo de tendência, podemos prosseguir para a estimação das provisões, bem como a construção do seu intervalo.

Medida de Variabilidade

Começa-se por estimar $\hat{\sigma}_j^2$**,** através da equação (2.8):

Tabela 3.19: Variância amostral de cada fator de desenvolvimento

j	0	1	2	3	4
$\hat{\sigma}_j^2$	86.199,28	4.868,64	164,27	41,98	26,78

Tendo como exemplo o ano de desenvolvimento 4:

$$\hat{\sigma}_4^2 = \frac{1}{6-4-1} * \left(D_{2015,4} * \left(\frac{D_{2015,5}}{D_{2015,4}} - \hat{f}_4 \right)^2 + D_{2016,4} * \left(\frac{D_{2016,5}}{D_{2016,4}} - \hat{f}_4 \right)^2 \right) = 26,78$$

Para o cálculo da variância amostral do fator de desenvolvimento 5 utiliza-se a equação (2.9).

$$\hat{\sigma}_5^2 = Min\left(\frac{26,78^2}{41,98}; Min(41,98; 26,78) \right) = 17,08$$

Tabela 3.20: Provisões a constituir - Thomas Mack

Ano Ocorrência	Sinistros pagos até ao ano de 2021	Indemnizações previstas a pagar	Provisões a constituir	Erro padrão
2015	22.918.540,46	22.918.540,46	-	-
2016	24.102.867,56	24.361.042,90	258.175,34	29.144
2017	24.664.706,64	25.178.471,41	513.764,77	43.899
2018	24.774.201,39	25.689.613,59	915.412,20	58.749
2019	21.718.442,10	23.168.262,00	1.449.819,90	88.002
2020	15.296.441,35	17.197.651,46	1.901.210,11	319.598
2021	13.900.375,81	19.301.708,58	5.401.332,77	1.357.222
Total	**147.375.575,31**	**157.815.290,40**	**10.439.715,09**	**1.417.360,59**

No cálculo auxiliar abaixo, podemos ver como é que a equação (2.10) contribui para a obtenção da medida de erro (Tabela 3.20), neste caso para o ano 2017.

$$EQM(\widehat{D}_{2017,n}) = 25.178.471,41^2 * \left(\frac{26,78}{1,01^2} * \left(\frac{1}{24.664.706,64} + \frac{1}{22.468.315,99 + 23.486.531,12} \right) + \frac{17,08}{1,0107^2} * \left(\frac{1}{24.911.633,06} + \frac{1}{22.675.652,58} \right) \right) = 1.927.112.149,49$$

Que por sua vez,

$$EP(\widehat{D}_{2017,n}) = \sqrt{EQM(\widehat{D}_{2017,n})} = 43.899$$

O erro padrão associado à provisão estimada é de 1.417.360,59 €, o que representa 13,58 % do valor total da reserva estimada.

Tabela 3.21: Intervalo de provisões a constituir

Ano Ocorrência	Provisões a constituir	Limite Inferior	Limite Superior
2015	-	-	-
2016	258.175,34	201.054,15	315.296,53
2017	513.764,77	427.724,31	599.805,23
2018	915.412,20	800.266,28	1.030.558,13
2019	1.449.819,90	1.277.339,15	1.622.300,65
2020	1.901.210,11	1.274.809,54	2.527.610,68
2021	5.401.332,77	2.741.226,53	8.061.439,01
Total	**10.439.715,09**	**7.661.739,38**	**13.217.690,80**

Por meio da equação (2.11) conseguimos contruir o intervalo da reserva total:

$$]10.439,715,09 - 1,96 * 1.417.360,59; 10.439,715,09 + 1,96 * 1.417.360,59[$$

Há evidências para afirmar, com 95% de confiança, que o valor da reserva se encontra no intervalo]7.661.739 €; 13.217.691 €[(Tabela 3.21).

4. Discussão de Resultados

Com o intuito de comparar os resultados obtidos através dos métodos anteriormente utilizados, a Tabela 4.1 contém os custos das provisões a constituir para sinistros do Ramo Vida para cada ano de ocorrência, sem considerar o fator cauda, isto é, os sinistros estão encerrados ao fim de 6 anos de desenvolvimento.

Tal como referido anteriormente, o montante total da provisão situa-se por volta dos 10,5 milhões de euros, não considerando o método *Grossing up – worst case*, visto que apresenta uma característica prudente, apresentando assim um custo bastante diferente dos montantes estimados pelo método *Chain Ladder* e *Grossing up – average factors.*

Aplicando o método estocástico *Thomas Mack*, sabemos que os montantes situam-se com 95% de confiança entre] 7.661.739 €; 13.217.691 €[. O valor do limite superior é relativamente próximo do método *Grossing up – worst case*. Podemos então assumir que os resultados deste método não são dispares dos restantes.

Considerando o fator cauda, tendo uma característica pouco conservadora, visto que se assumiu um valor delta ligeiramente baixo, conclui-se que teriam que se adicionar mais 3 anos de desenvolvimento para os sinistros se encontrarem encerrados. Com base neste fator e aplicando o método de *Chain Ladder*, resulta num montante total no valor de 11.922.798,20 €.

De realçar que todos os cálculos foram efetuados em *Microsoft-Excel* e no *Software R*.

A Tabela 4.1 contém as provisões a constituir estimadas por cada modelo determinístico abordado.

Tabela 4.1: Provisões a constituir sem fator cauda

Ano Ocorrência	*Chain Ladder*	*Grossing up – average factors*	*Grossing up – worst case*
2015	-	-	-
2016	258.175,34	258.175,34	258.175,34
2017	513.764,77	513.186,15	532.164,71
2018	915.412,20	914.318,40	971.158,40
2019	1.449.819,90	1.446.900,23	1.581.717,99
2020	1.901.210,11	1.901.717,54	2.438.516,93
2021	5.401.332,77	5.486.783,26	7.926.823,70
Total	**10.439.715,09**	**10.521.080,92**	**13.708.557,07**

5. Conclusão

Na sequência deste estudo e com vista a uma aplicação prática no âmbito de IFRS17, pretendeu-se que o método a aplicar para o cálculo IBNR tivesse em conta não os dados contabilísticos de custos com sinistros agregados do ano por data de ocorrência e de reporte, mas sim a Base de Dados dos custos com sinistros em que a carteira do Ramo de Vida Risco incorreu, sendo passível de agregação pelos portfólios definidos para dar resposta à nova norma contabilística.

Deste modo e pelo volume de dados existente, recorreu-se à ferramenta *SAS*, para tratar o universo de sinistros com a tipologia de IBNR, dos exercícios de 2015 a 2021, atendendo a que a informação histórica teve de ser uniformizada em função das alterações processuais ocorridas na seguradora ao longo do tempo.

Através da utilização dos métodos estatísticos é possível obter uma estimação das provisões para sinistros. Na seleção de um método, existem vários fatores a considerar, nomeadamente os anos que entram para a análise, a inflação (não se adequa no ramo em estudo), a dimensão do ramo, a existência de sinistros atípicos, entre outros.

Tradicionalmente, a seguradora em análise utiliza o método *Chain Ladder* para calcular as provisões para sinistros IBNR.

Por forma a analisar a consistência de métodos foram explorados os métodos *Grossing up* e *Chain Ladder*, sendo que a opção de cálculo recaiu sobre este último, uma vez que foi possível aplicar o método estocástico *Thomas Mack*, atribuindo assim uma medida de erro para as provisões estimadas, bem como a adição de um fator cauda/*ultimate* com vista em perceber quantos mais anos de desenvolvimento seriam necessários para que não houvesse mais sinistros a reportar à seguradora.

Relativamente à aplicação prática, conclui-se que a provisão deve situar-se em torno dos 10,5 milhões de euros, resultado obtido pelos métodos de *Chain Ladder* e *Grossing-up (average)*. Considerando a inclusão do fator cauda/*ultimate*, este valor sobe para os 11,9 milhões de euros. No método de *Thomas Mack* obteve-se um intervalo de] 7.661.739 €; 13.217.691 €[de reservas a constituir, com um erro de 14% .

Como proposta para análises futuras propõe-se a estimação das provisões a constituir utilizando outras metodologias determinísticas, como por exemplo o método *Bornhuetter-Ferguson*, e outras metodologias estocásticas, como a técnica de *Bootstrap* ou *Double Chain Ladder*, entre outros. Propõem-se também uma revisão dos fatores de desenvolvimento para melhorar a qualidade da estimação da medida de erro, bem como a construção dos intervalos de confiança em relação ao método de *Thomas Mack*, uma vez que que se verificou correlação entre os fatores de desenvolvimento individuais.

Finalizando o ano 2022, os custos referentes ao ano respetivo, devem ingressar na matriz para esta ficar atualizada, na medida em que irá influenciar as provisões a constituir.

Em suma, o método *Chain Ladder* apresentou um valor global de IBNR que por análise do seu consumo no ano de 2022 se verificou suficiente.

Bibliografia

AEGON, S. (2021). *Notas de apoio da unidade curricular: Risco em Seguros Vida e não Vida.*

Alves, A. M. (2011). *Provisões para Sinistros: Estudo do Mercado Segurador Português.* Instituto Superior de Estatística e Gestão da Informação.

ASF. (s.d.). Obtido de 88A9858C-9C7C-4673-9086-4698FBA3EFD0.htm (asf.com.pt)

ASF. (2021). *Relatório de Evolução da Atividade Seguradora*. Obtido de asf.com.pt: https://www.asf.com.pt/ISP/Estatisticas/seguros/estatisticas_trimestrais/historico/REAS_4T2021.pdf

Borguinho, H. (2003). *Provisões para Sinistros Não Vida - Metologias de Estimação.* Obtido de asf.com.pt.

Castro, F. d. (2015). *Provisão para sinistros: Estudo de uma Companhia de Seguros Espanhola.*

Conceição, C. S. (2014). *Modelos Determinísticos e Estocásticos Aplicados ao Cálculo de Provisões para Sinistros.* Faculdade Ciências e Tecnologia.

Costa, D. S. (2016). *Metodologias de Estimação de Provisões para Sinistros do Ramo Não Vida.* Faculdade de Ciências.

Fidelidade. (2021). *Notas de apoio da unidade curricular: Atividade Seguradora.*

Mack, T. (1993). Distribuition-Free Calculacion of the Standard Error of Chain-Ladder Estimates. ASTIN Bulletin.

Mack, T. (1999). The Standard Error of Chain-Ladder Reserve Estimates. ASTIN Bulletin.

Neuhaus, W. (2004). On the estimation of outstanding claims.

Portugal, L. (1997). *Provisões para Sinistros.* ACTUARIAL.

Anexos

Resultados *R-Studio*

Fator cauda

Cálculo da previsão dos fatores de desenvolvimento através da equação (2.12)

```
> delta(0.3)
 [1] 1.010700 1.003210 1.000963 1.000289 1.000087 1.000026 1.000008 1.000002 1.000001 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000 1.000000
> delta(0.5)
 [1] 1.010700 1.005350 1.002675 1.001337 1.000669 1.000334 1.000167 1.000084 1.000042 1.000021 1.000010 1.000005 1.000003 1.000001
> delta(0.7)
 [1] 1.010700 1.007490 1.005243 1.003670 1.002569 1.001798 1.001259 1.000881 1.000617 1.000432 1.000302 1.000212 1.000148 1.000104
> delta(0.9)
 [1] 1.010700 1.009630 1.008667 1.007800 1.007020 1.006318 1.005686 1.005118 1.004606 1.004145 1.003731 1.003358 1.003022 1.002720
```

Nota: O primeiro fator (1,01700) é o fator de desenvolvimento 5

Thomas Mack

Desvio padrão dos fatores de desenvolvimento

```
> mack$sigma
[1] 293.597141  69.775619  12.816801   6.479318   5.174886   4.133065
```

Fatores de desenvolvimento

```
> mack$f
[1] 1.235067 1.053935 1.028743 1.015791 1.010011 1.010711 1.000000
```

Matriz acumulada com as indemnizações previstas a pagar

```
> mack$FullTriangle
      dev
origin        0        1        2        3        4        5        6
     1 17693135 20722197 21578673 22144976 22468316 22675653 22918540
     2 18368057 21795936 22817968 23442103 23846531 24102868 24361043
     3 18872083 22400749 23611507 24289038 24664707 24911633 25178471
     4 18283272 22889063 23997651 24774201 25165419 25417358 25689614
     5 15241523 20096440 21718442 22342695 22695515 22922728 23168262
     6 11294284 15296441 16121460 16584838 16846735 17015393 17197651
     7 13900376 17167894 18093849 18613920 18907859 19097151 19301709
```

Provisões a constituir e erro padrão

```
MackChainLadder(Triangle = matriz, est.sigma = "Mack")

       Latest Dev.To.Date   Ultimate       IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
1 22,918,540       1.000 22,918,540          0         0      NaN
2 24,102,868       0.989 24,361,043    258,175    29,144   0.1129
3 24,664,707       0.980 25,178,471    513,765    43,899   0.0854
4 24,774,201       0.964 25,689,614    915,412    58,749   0.0642
5 21,718,442       0.937 23,168,262 1,449,820    88,002   0.0607
6 15,296,441       0.889 17,197,651 1,901,210   319,598   0.1681
7 13,900,376       0.720 19,301,709 5,401,333 1,357,222   0.2513

                     Totals
Latest:    147,375,575.31
Dev:                 0.93
Ultimate:  157,815,290.40
IBNR:       10,439,715.09
Mack.S.E     1,417,360.59
CV(IBNR):            0.14
```