

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Estruturas Combinatórias associadas aos Coeficientes de Littlewood-Richardson

Mestrado em Matemática

Inês Martins Rodrigues

Dissertação orientada por:
Prof. Doutora Maria Manuel Correia Torres

2015

RESUMO

Os coeficientes de Littlewood-Richardson surgem inicialmente no contexto das funções de Schur. A primeira regra para os determinar foi apresentada por Littlewood e Richardson, nos anos trinta, e descreve-os como contando certos tipos de tableaux de Young enviesados. Contudo, só mais tarde, no final dos anos setenta, foi apresentada uma demonstração rigorosa, por Schützenberger e Thomas – baseada na teoria entretanto desenvolvida em torno de tableaux de Young, em particular a correspondência RSK e o *jeu de taquin*. Mais recentemente, a partir dos anos oitenta, têm sido apresentadas outras interpretações combinatórias para estes coeficientes, bem como demonstrações mais simples da regra de Littlewood-Richardson.

O objectivo desta dissertação passa por apresentar tanto uma abordagem clássica aos coeficientes de Littlewood-Richardson, como também expor várias outras interpretações mais recentes, tornando claras as correspondências entre elas. Destacamos os padrões de Gelfand-Tsetlin, as colmeias de Knutsen e Tao, e os triângulos de Berenstein-Zelevinsky.

Para além de uma breve referência a tableaux de Young e alguns dos seus algoritmos combinatórios mais importantes, nesta dissertação serão apresentadas os principais resultados relativos a funções de Schur; evidenciamos a sua relação com tableaux e observamos que formam uma base para a álgebra das funções simétricas. O produto de funções de Schur, bem como as funções de Schur indexadas por formas enviesadas, motivam a introdução dos coeficientes de Littlewood-Richardson, como sendo os coeficientes que aparecem numa combinação linear de outras funções de Schur.

Segue-se a apresentação da abordagem clássica à regra de Littlewood-Richardson: enunciada em termos de certos tipos de tableaux enviesados e demonstrada com recurso ao *jeu de taquin*. Será também apresentada uma demonstração mais recente, que se baseia nas involuções de Bender-Knuth, inicialmente utilizadas na demonstração da simetria das funções de Schur. Para concluir, serão apresentadas algumas estruturas combinatórias mais recentes que são também contadas pelos coeficientes de Littlewood-Richardson, estabelecendo-se bijecções entre elas.

Palavras-chave: Partições; tableaux de Young; funções simétricas; funções de Schur; coeficientes de Littlewood-Richardson.

ABSTRACT

The Littlewood-Richardson coefficients initially emerge in the context of Schur functions. The first rule to determine them was presented by Littlewood and Richardson, during the thirties, and describe them as counting certain types of skew Young tableaux. However, it was only in the late seventies that a rigorous proof was presented, by Schützenberger and Thomas – based on the theory regarding Young tableaux developed in the meantime, particularly the RSK correspondence and *jeu de taquin*. More recently, from the eighties, other combinatorial interpretations for these coefficients have been presented, as well as other simpler proof for the Littlewood-Richardson rule.

The purpose of this thesis is to present a classical approach to the Littlewood-Richardson coefficients, as well as expose other recent interpretations, making clear the correspondence between them. We will highlight the Gelfand-Tsetlin patterns, the Knutsen-Tao hives and the Berenstein-Zelevinsky triangles.

In this thesis, beside a brief reference to Young tableaux and its most important combinatorial algorithms, we will present the main results regarding Schur functions; we highlight their relation with tableaux and remark that they form a basis for the algebra of symmetric functions. The product of Schur functions, as well as the skew Schur functions, motivate the introduction of the Littlewood-Richardson coefficients, as the coefficients that arise in a linear combination of other Schur functions.

It follows the presentation to the classical approach to Littlewood-Richardson rule: we will enunciate it in terms of certain types of skew tableaux and prove it using *jeu de taquin*. It will also be presented a more recent proof, based on the Bender-Knuth involutions, that are used to prove the symmetry of Schur functions. To conclude, we will present some recent combinatorial structures that are also counted by Littlewood-Richardson coefficients, establishing bijections between them.

Keywords: Partitions; Young tableaux; symmetrical functions; Schur functions; Littlewood-Richardson coefficients.

AGRADECIMENTOS

Começo por expressar a minha gratidão à Professora Maria Manuel Torres, com quem tive o privilégio de trabalhar: não só por me ter apresentado este tema que tanto me interessou, mas também pelo seu apoio incansável ao longo da elaboração desta dissertação. Nas inúmeras horas que dedicou a este texto, o seu rigor científico e os inúmeros comentários pertinentes foram constantes, assim como a simpatia e o entusiasmo que a caracterizam.

Agradeço à minha família por todo o seu apoio. Um agradecimento muito especial à minha mãe e ao meu pai, que sempre me apoiaram de tantas formas ao longo do meu percurso académico — o vosso carinho e palavras de encorajamento foram fundamentais em vários momentos.

É importante uma palavra de agradecimento ao Grupo-4 de Klein. Agradeço também aos meus amigos pela força e paciência mostradas nos últimos tempos.

Por fim, agradeço ao Guilherme, a quem devo, em grande parte, este trabalho. Pela ajuda incansável, pelo carinho, pelas palavras de incentivo, por nunca me deixares desistir — e por muito mais do que poderia aqui deixar escrito. Obrigada.

PREFÁCIO

As funções de Schur são funções simétricas indexadas por partições, que formam uma base para a álgebra das funções simétricas. Os coeficientes de Littlewood-Richardson surgem inicialmente relacionados com as funções de Schur – são os coeficientes que aparecem no desenvolvimento nessa base quer do produto de funções de Schur, quer das funções de Schur enviesadas. Porém, as suas aplicações são mais vastas, ocorrendo também no contexto de representações de S_n e $GL_n(\mathbb{C})$, no cálculo de Schubert ou nos valores próprios de matrizes hermiticas.

A primeira formulação da regra de Littlewood-Richardson foi apresentada em 1934 por Littlewood e Richardson, estabelecendo que o coeficiente de uma função de Schur que aparece no produto de duas outras funções de Schur pode ser calculado em termos de certos tableaux. Embora a regra fosse enunciada como um teorema geral, a demonstração contemplava apenas casos muito simples. Em 1938, Robinson afirma ter demonstrado a regra; contudo, a sua prova era demasiado intrincada e continha várias falhas.¹

A regra de Littlewood-Richardson permaneceu sem demonstração até aos anos 70. Entretanto, foram feitos vários avanços na teoria dos tableaux de Young. Em particular, Schensted introduziu nos anos 60 uma construção com tableaux, que se provou ser equivalente à desenvolvida por Robinson em 1938, estabelecendo-se então a correspondência de Robinson-Schensted. No início dos anos 70, esta bijecção foi generalizada por Knuth, apresentando a correspondência RSK. Como consequência surgiram as primeiras demonstrações completas da regra de Littlewood-Richardson: em 1977, Schützenberger introduz o *jeu de taquin*, utilizando-o para demonstrar a regra, e em 1978, Thomas apresenta uma demonstração baseada na construção de Schensted.

A partir dos anos 80 surgem outras interpretações para os coeficientes de Littlewood-Richardson, assim como outras demonstrações mais simples da regra para os determinar. Em 1985, Gelfand e Zelevinsky apresentam uma generalização de uma construção dos anos 50, os padrões de Gelfand-Tsetlin, aos quais adicionam uma condição em

¹M. van Leeuwen faz uma resenha histórica da regra de Littlewood-Richardson mais completa e detalhada, que pode ser lida em [29]

termos de uma partição, formando os esquemas de Gelfand-Zelevinsky. Estas estruturas surgem com o propósito de estudar representações do grupo $GL_n(\mathbb{C})$. Em 1992, Berenstein e Zelevinsky introduzem os triângulos de Berenstein-Zelevinsky, com o intuito de estudar o produto tensorial de certos \mathfrak{sl} -módulos. Knutsen e Tao apresentam, em 1999, uma nova estrutura combinatória com o intuito de demonstrar a Conjectura de Saturação: as colmeias e o modelo *honeycomb*. Em 200, Fulton apresenta uma bijecção entre colmeias e uma subclasse de tableaux enviesados, os *contratableaux*. Todas estas estruturas são indexadas por três partições e são contadas pelos coeficientes de Littlewood-Richardson.

Simultaneamente, surgiram também novas demonstrações da regra de Littlewood-Richardson, como as de Gasharov (1998), Remmel e Shimozono (1998), e Stembridge (2002), que se baseiam em involuções com troca de sinais em tableaux. Gasharov e Stembridge recorrem às involuções de Bender-Knuth, que são também utilizadas para mostrar a simetria das funções de Schur.

Com esta dissertação pretendemos apresentar uma abordagem aos coeficientes de Littlewood-Richardson essencialmente baseada nas funções de Schur e na combinatória de tableaux de Young, que seja auto-contida e permita demonstrar a regra para os determinar, na sua formulação clássica. A partir deste contexto, pretendemos estabelecer ligações com a teoria mais recente, apresentando interpretações combinatórias alternativas para o cálculo dos coeficientes.

A organização da dissertação será a seguinte:

- No primeiro capítulo é feita uma breve introdução aos conceitos e resultados elementares relativos a partições e tableaux de Young, que serão utilizados nos capítulos seguintes. Apresentaremos os algoritmos que motivam a correspondência RSK e o *jeu de taquin*, tanto em termos de tableaux, como de palavras. Estas correspondências serão posteriormente utilizadas na demonstração clássica da regra de Littlewood-Richardson.
- O segundo capítulo diz respeito à álgebra das funções simétricas, apresentando algumas suas bases, com ênfase na base das funções de Schur, que serão definidas em termos de tableaux de Young. De seguida, apresentaremos a dedução da Identidade de Cauchy, que será utilizada no capítulo seguinte. Apresentamos ainda duas formulações alternativas das funções de Schur: a fórmula de Jacobi-Trudi e o quociente de alternantes.
- No terceiro capítulo apresentamos a formulação clássica da regra de Littlewood-Richardson, assim como duas demonstrações. A primeira demonstração baseia-se no *jeu de taquin*, e resulta essencialmente da teoria desenvolvida em torno de tableaux de Young; a segunda demonstração é mais recente e baseia-se nos trabalhos de Gasharov e Stembridge, recorrendo às involuções de Bender-Knuth.
- No quarto capítulo são apresentadas algumas estruturas combinatórias recentes que são contadas pelos coeficientes de Littlewood-Richardson: os triângulos de Littlewood-Richardson, os esquemas de Gelfand-Zelevinsky, as colmeias de Knutsen e Tao, e os triângulos de Berenstein-Zelevinsky. Serão também apresentadas algumas bijecções entre estas estruturas, obtendo-se assim outras formulações para os coeficientes de Littlewood-Richardson.

ÍNDICE

Agradecimentos	iv
Prefácio	vi
1 Noções preliminares	1
1.1 Partições e Tableaux de Young	1
1.2 Algoritmos de inserção e deslizamento em tableaux semistandard	4
1.2.1 Inserção nas linhas	4
1.2.2 Deslizamento e <i>jeu de taquin</i>	9
1.3 Palavras	12
1.3.1 Demonstração de unicidade	18
1.3.2 O monóide pláctico	21
1.4 O algoritmo RSK	21
2 Álgebra das funções simétricas	25
2.1 Breve introdução às funções geradoras	25
2.2 A álgebra das funções simétricas	26
2.3 Bases de Λ^k	28
2.4 Funções de Schur	31
2.4.1 Produto interno de Hall e a Identidade de Cauchy	34
2.4.2 Determinantes de Jacobi-Trudi	37
2.4.3 Quociente de alternantes de Schur	40
3 Regra de Littlewood-Richardson	43
3.1 Equivalência Dual	43
3.2 Regra de Littlewood-Richardson	46
3.2.1 Outra demonstração	50
4 Estruturas combinatórias associadas aos coeficientes de Littlewood-Richardson	55
4.1 Triângulos de Littlewood-Richardson	55
4.1.1 Matriz associada de um tableau	55
4.1.2 Triângulos de Littlewood-Richardson	58

4.2	Padrões de Gelfand-Tsetlin	61
4.2.1	Bijecção entre padrões GT e tableaux normais semistandard	63
4.2.2	Correspondência entre tableaux enviesados semistandard e padrões GT truncados	65
4.2.3	Bijecção entre tableaux LR e esquemas GZ	68
4.3	Colmeias	73
4.3.1	Correspondência entre Colmeias e Triângulos LR	75
4.3.2	Correspondência entre Colmeias e Esquemas GZ	78
4.4	Triângulos de Berenstein-Zelevinsky	85
4.4.1	Correspondência entre Colmeias e triângulos BZ	88
4.5	Colmeias e Contratableaux	94
4.5.1	Correspondência entre Colmeias e Contratableaux	95
4.5.2	Correspondência entre Contratableaux e Tableaux LR	97

Bibliografia

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo enunciamos os principais conceitos e resultados associados ao estudo dos Tableaux de Young. Os tableaux são objectos de grande importância em várias áreas da Combinatória. A sua importância no estudo das funções simétricas tornar-se-á clara nos capítulos seguintes.

Começamos por enumerar alguns conceitos básicos sobre partições e tableaux de Young. Seguidamente, será feita uma apresentação de dois algoritmos: a inserção e o deslizamento. Estes algoritmos dão origem a bijecções relevantes no estudo dos tableaux de Young, e, em particular, no estudo das funções simétricas e da regra de Littlewood-Richardson. Será ainda feita uma breve referência ao estudo das palavras associadas a um tableau, onde se define uma relação de equivalência.

As referências utilizadas são essencialmente [9], [10], [23] e [26]

1.1 Partições e Tableaux de Young

Nesta secção são apresentados alguns conceitos básicos sobre partições, diagramas e tableaux de Young. Os tableaux de Young, introduzidos por Young em 1900, são uma ferramenta importante na Combinatória, sendo especialmente relevantes na Teoria da Representação de S_n e $GL_n(\mathbb{C})$ e no estudo das funções simétricas.

Definição 1.1. Uma sequência $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ diz-se uma *partição* se:

1. $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$, para todo $1 \leq i \leq t$.
2. $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, para todo $1 \leq i < t$.

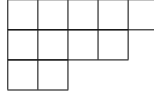
Observação 1. Chamamos *composição* a uma sequência $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ que satisfaça 1. da definição anterior. Em particular, as partições são composições com partes decrescentes em sentido lato.

Denotamos a soma dos elementos da partição por $|\lambda| = \sum_{i=1}^t \lambda_i$. Se $|\lambda| = m$, diz-se que λ é uma partição de m e escrevemos $\lambda \vdash m$. Identificamos partições que diferem por uma sequência de zeros. Aos elementos $\lambda_i \neq 0$ chamamos *partes* de λ . Chamamos *comprimento* de λ ao número de partes da partição e denotamo-lo por $l(\lambda)$. Outra notação para uma partição de m é $(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, m^{r_m})$, em que i^{r_i} significa que o

inteiro i aparece listado r_i vezes na sequência. Existe uma única partição de 0 , a *partição vazia*, que se denota por \emptyset .

Definição 1.2. Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \vdash m$, com $n = l(\lambda)$, denotamos por $[\lambda]$ o *diagrama de Young* de forma λ , que consiste numa sequência de m caixas caixas dispostas em n linhas alinhadas à esquerda, em que, para $i = 1, \dots, n$, a linha i tem λ_i caixas.

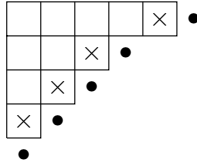
Exemplo 1.1. O diagrama de Young de forma $\lambda = (5, 4, 2)$ é dado por



As caixas de um diagrama de Young serão identificadas por um sistema de coordenadas semelhante ao das matrizes. Assim, designamos por (i, j) a caixa que está na linha i (a contar de cima) e na coluna j (a contar da esquerda).¹

Definição 1.3. Seja λ uma partição. Uma caixa $(i, j) \in [\lambda]$ diz-se um *canto interior* se o diagrama resultante da sua remoção for ainda um diagrama de Young. Uma caixa $(i, j) \notin [\lambda]$ diz-se um *canto exterior* se o diagrama resultante da sua adição a $[\lambda]$ for um diagrama de Young.

Exemplo 1.2. No diagrama seguinte, os cantos interiores estão assinalados com \times e os cantos exteriores estão assinalados com \bullet .



Lema 1.1. Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \vdash m$. Para $k \in \mathbb{N}$, seja

$$\lambda'_k = |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}|.$$

Então, $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{\lambda_1})$ é uma partição de m , à qual chamamos *partição conjugada* de λ .

Demonstração. É claro que $\lambda'_k \in \mathbb{N}_0$, para todo o k . Uma vez que se $\lambda_i \geq k + 1$, então $\lambda_i \geq k$, tem-se $\lambda'_{k+1} \leq \lambda'_k$. Logo λ' é partição. Seja agora $k > \lambda_1$. Então, como $\lambda_1 \geq \lambda_i$, para qualquer i , tem-se $|\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}| = |\emptyset| = 0$. Finalmente, note-se que $|\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}|$ corresponde à cardinalidade da coluna k de $[\lambda]$, pelo

$$\text{que } \sum_{i=1}^{\lambda_1} \lambda'_i = \sum_{j=1}^t \lambda_j = m. \quad \square$$

Definição 1.4. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ partições de m . Diz-se que λ *domina* μ , e escreve-se $\lambda \supseteq \mu$, se, para todo o $i = 1, \dots,$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

¹Vários autores utilizam o sistema de coordenadas cartesianas (trocando a ordem das coordenadas) para os diagramas de Young. Nesse caso, o diagrama anterior escrever-se-ia



Esta relação é uma ordem parcial no conjunto das partições. Enunciamos, sem demonstração, o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Dadas partições λ e μ , $\mu \trianglelefteq \lambda$ se e só se $\lambda' \trianglelefteq \mu'$.*

Definição 1.5. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ partições de m . Diz-se que μ é menor que λ pela *ordem lexicográfica*, e escreve-se $\mu \prec \lambda$, se existe um $j \in \{1, \dots, t\}$ tal que

$$\begin{cases} \mu_i = \lambda_i, & \text{para } i < j \\ \mu_j < \lambda_j \end{cases}$$

A ordem lexicográfica é uma ordem total no conjunto das partições.

Dadas partições $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ diz-se que $\mu \subseteq \lambda$ se, para todo $i = 1, \dots, t$, $\mu_i \leq \lambda_i$.

Definição 1.6. Dadas partições λ e μ tais que $\mu \subseteq \lambda$, o *diagrama enviesado* de forma λ/μ é o conjunto das caixas de $[\lambda]$ que não são caixas de $[\mu]$.

Quando $\mu = \emptyset$, diz-se que diagrama λ/μ é de forma *normal*.

Definição 1.7. Dado um diagrama de Young de forma normal ou enviesada, define-se o *tableau de Young* (ou simplesmente tableau) de forma λ (ou forma λ/μ) como uma função T que a cada caixa (i, j) associa uma letra de um alfabeto predefinido.

Podemos identificar T como um preenchimento das caixas do diagrama de Young com letras.¹ Geralmente, o alfabeto considerado será \mathbb{N} .

Denotamos por $T_{i,j}$ a entrada correspondente à caixa (i, j) , e por \emptyset o único tableau de forma \emptyset . Denotamos a forma do diagrama de um tableau T por $sh T$, e diremos que T é normal (respectivamente, enviesado) se a forma do seu diagrama é normal (respectivamente, enviesada). Definimos o *conteúdo* de T , que denotaremos por $cont T$, como sendo uma sequência $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, em que μ_i é igual ao número de entradas iguais a i em T , para $i = 1, \dots, n$.

Um tableau de Young T diz-se *fracamente crescente nas linhas* (respectivamente *estritamente crescente nas linhas*) se, $\forall i, j$, $T_{i,j} \leq T_{i,j+1}$ (resp. $T_{i,j} < T_{i,j+1}$) e *fracamente crescente nas colunas* (respectivamente *estritamente crescente nas colunas*) se, $\forall i, j$, $T_{i,j} \leq T_{i+1,j}$ (resp. $T_{i,j} < T_{i+1,j}$).

Definição 1.8. Um tableau de Young (normal ou enviesado) com n caixas diz-se *standard* se estiver preenchido com os números $\{1, \dots, n\}$ e for estritamente crescente nas linhas e nas colunas. Um tableau de Young diz-se *semistandard* se for fracamente crescente nas linhas e estritamente crescente nas colunas.

Exemplo 1.3. O tableau T é semistandard e o tableau Q é standard

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 9 \\ \hline 2 & 4 & 8 & \\ \hline 6 & & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

¹Alguns autores definem *tableau* como sendo um preenchimento de um diagrama com os números $\{1, \dots, |\lambda|\}$, sem repetições. Nesses casos, a definição aqui apresentada corresponde à definição de *tableau generalizado*.

1.2 Algoritmos de inserção e deslizamento em tableaux semistandard

Nesta secção serão estudados dois algoritmos combinatórios envolvendo tableaux semistandard: a inserção e o deslizamento. Veremos que estes algoritmos estão relacionados entre si e serão utilizados para definir um produto no conjunto dos tableaux de formas normais, criando o monóide plácido.

1.2.1 Inserção nas linhas

O algoritmo de inserção foi inicialmente desenvolvido por Schensted, durante os anos 60 ([24]). Sendo originalmente desenvolvido para tableaux standard, foi generalizado para o caso semistandard por Knuth, nos anos 70 ([16]). No que se segue, consideramos todos os tableaux preenchidos com números naturais.

Definição 1.9 (Inserção nas linhas). Seja T um tableaux de Young semistandard e x um número natural. Seja i o índice de linha de T e ponha-se $i = 1$. O tableau de inserção de x em T , $r_x(T)$, obtém-se a partir de T através seguinte procedimento:

1. Se x for maior ou igual do que todas as entradas na linha i , acrescente-se uma caixa no final dessa linha com etiqueta x .
2. Caso contrário, seja c a etiqueta mais à esquerda na linha i que seja estritamente maior do que x . Remova-se c e coloque-se x nessa caixa. Aumente-se i por uma unidade e repita-se o procedimento, tomando c como o elemento a ser inserido.

Exemplo 1.4. Consideremos o seguinte tableau $T =$

1	1	2	2
2	2	3	
3	3	4	
4			

Uma vez que 3 é maior do que qualquer entrada da primeira linha, a sua inserção em T resulta no tableau

$$r_3(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 3 & 4 & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}$$

Aplicamos agora o algoritmo de inserção com 1. Neste caso, existe uma entrada maior do que 1 na primeira linha. Assim, a colocação de 1 na primeira linha leva à remoção da entrada 2 da caixa (1, 3). Pelo mesmo motivo, colocar 2 na segunda linha obriga à remoção de 3, que será colocado na terceira linha, removendo 4. Por fim, como 4 é igual à única entrada da quarta linha, acrescenta-se uma caixa com etiqueta 4 no final desta linha. O tableau resultante é então

$$r_1(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & \\ \hline 4 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Teorema 1.1 (Knuth, [16]). *Seja T um tableau semistandard e x um número inteiro. Então, $r_x(T)$ é um tableau semistandard.*

Demonstração. Mostremos, em primeiro lugar, que $r_x(T)$ é efectivamente um tableau de Young, isto é, que o seu diagrama corresponde a uma partição. Temos de garantir que cada linha não tem mais caixas que a anterior. Se uma linha i tiver menos caixas que a linha anterior, o algoritmo acrescenta-lhe, quando muito, uma caixa. Logo, a linha $i - 1$ continua a ter mais (ou tantas) caixas que a linha i . Considere-se agora o caso em que as linhas $i - 1$ e i têm o mesmo número de caixas. A entrada removida da linha $i - 1$ será inserida na linha i . Como T é estritamente crescente nas colunas, essa entrada fica necessariamente abaixo ou à esquerda da caixa removida. Assim, nunca poderá ser colocada no final da linha.

Vejam agora que $r_x(T)$ é semistandard. Pela maneira como são construídas as linhas, é claro que serão fracamente crescentes. Suponhamos que, numa dada linha, a inserção de y leva à remoção de z . A entrada imediatamente abaixo de z , q tem de ser estritamente menor que y , uma vez que $z < q$ (porque T é estritamente crescente nas colunas) e $y < z$ (z é por definição a entrada mais à esquerda que é estritamente maior que y). Então, quando z for inserido na linha seguinte, terá necessariamente de ficar na mesma coluna ou numa coluna à esquerda. A entrada que ficar por cima da nova caixa de z , t é também estritamente menor que z , uma vez que $t \leq y < z$. \square

Observação 2. Por construção, a forma de $r_x(T)$ contém a forma de T .

Este processo é invertível, no sentido em que, dado um tableau juntamente com a *localização da caixa adicionada*, é possível recuperar o tableau original, bem como o elemento que foi inserido.

Definição 1.10 (Remoção nas linhas). Seja T um tableau e x uma entrada em T . Suponhamos que T foi obtido através de outro tableau por inserção de x , sendo (i, j) a caixa acrescentada. Seja s o índice de linha em T e ponha-se $s = i$. O tableau de remoção de x , $r_{(i,j)}^x(T)$ obtém-se a partir de T através do seguinte procedimento:

1. Remova-se a caixa (i, j) .
 - 1.1 Se $i = 1$, o algoritmo termina.
 - 1.2 Caso contrário, seja c a etiqueta de (i, j) e remova-se essa caixa e determine-se, na linha $s - 1$, a entrada b mais à direita que seja estritamente menor do que c . Substitua-se b por c . Diminua-se s uma unidade e repita-se o processo, tomando c como a entrada b substituída.

Exemplo 1.5. Considere-se o seguinte tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & 4 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

Vamos determinar o tableau correspondente à remoção de 2, assumindo que $(3, 3)$ foi a caixa acrescentada na sua inserção prévia. Removemos essa caixa e, uma vez que não se encontra na primeira linha, prosseguimos para a linha superior, sendo $(2, 4)$ a caixa pretendida, com etiqueta 3. Substituindo 3 por 4, prossegue-se finalmente para a primeira linha. A caixa determinada pelo algoritmo é agora $(1, 4)$, pelo que se obtém o tableau

$$r_{(3,3)}^2(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

A indicação da caixa acrescentada não é dispensável. A remoção de 2 em T tomando como caixa acrescentada $(2, 4)$ conduz ao tableau

$$r_{(2,4)}^2(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & 4 & & \\ \hline \end{array}$$

A inserção num tableau determina sempre um conjunto R de caixas, correspondentes aos elementos removidos e à caixa adicionada no final do algoritmo. Chamamos a este conjunto R um *caminho de remoção*. É evidente que um caminho de remoção tem, quando muito, uma caixa em cada linha sucessiva, começando na primeira linha.

Exemplo 1.6. Considere-se o tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}$$

A inserção de 1 determina o seguinte caminho de remoção

$$r_1(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

Definição 1.11. Sejam R e R' dois caminhos de remoção (num mesmo tableau), B e B' as respectivas caixas acrescentadas.

1. R diz-se *estritamente à esquerda* de R' se em cada linha que contenha uma caixa de R' , R tem uma caixa que está à sua esquerda.
2. R diz-se *fracamente à esquerda* de R' se em cada linha que contenha uma caixa de R' , R tem uma caixa que está à sua esquerda ou é igual à caixa de R' .

Estão implícitos na definição anterior os mesmos conceitos substituindo esquerda por direita.

Exemplo 1.7. Utilizando o tableau do exemplo anterior, o caminho de remoção determinado pela inserção de 2 em $r_1(T)$ está estritamente à direita do caminho de remoção associado a $r_1(T)$

$$r_1(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad r_2r_1(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

Lema 1.2 (Lema da remoção nas linhas, [10]). *Consideremos duas inserções sucessivas num tableau T , $r_x(T)$ e $r_{x'}(r_x(T))$, que resultam em caminhos de remoção R e R' , e caixas acrescentadas B e B' .*

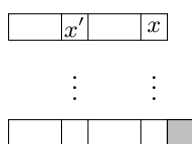
1. Se $x \leq x'$, então R está estritamente à esquerda de R' , e B está estritamente à esquerda e fracamente abaixo de B' .¹
2. Se $x > x'$, então R' está fracamente à esquerda de R , e B' está fracamente à esquerda e estritamente abaixo de B

Demonstração. 1. Caso x tenha sido acrescentado no final da primeira linha, então, como $x \leq x'$, x' é também acrescentado no final dessa linha e o resultado é trivialmente verdadeiro. Suponhamos agora que x não corresponde a uma caixa acrescentada na primeira linha, e que aí removeu y . Se x' for acrescentado no final da primeira linha o resultado é novamente trivial. Admita-se então que x' é inserido na primeira linha com a remoção de y' .

Tem-se que y' deve estar estritamente à direita de x , uma vez que os elementos nessa caixa e nas caixas à esquerda são menores ou iguais a x (se fosse $y = x'$, então $x' < y' = x$ e se y' estivesse à esquerda de x , então $x' < y' \leq x$). Como o tableau é semistandard, $y \leq y'$ e portanto o algoritmo pode continuar nas linhas seguintes.

Note-se que o caminho R não pode terminar acima do caminho R' . Como está estritamente à esquerda de R' e as caixas acrescentadas são necessariamente cantos exteriores, o resultado não seria um tableau, o que garante que B está fracamente abaixo de B' . Caso R' termine primeiro, como R não se desloca para a direita, vem que B deve estar estritamente à esquerda de B' .

2. Suponhamos que x é acrescentado no final da primeira linha. Como $x' < x$, a entrada x' tem necessariamente de ser inserida na primeira linha, removendo algum elemento. Logo, B' fica estritamente abaixo de B , que corresponde à caixa acrescentada pela colocação de x . Uma vez que a primeira linha tem originalmente tantas ou mais caixas que as linhas restantes, a caixa acrescentada por x ficará estritamente à direita de qualquer caixa já existente. Assim, caso o caminho R' contivesse uma caixa estritamente à direita de B , numa linha $k \neq 1$, essa linha ficaria com mais caixas do que a primeira, o que contraria a definição de diagrama de Young.



Logo, o caminho R' fica fracamente à esquerda de B , a única caixa de R .

Suponhamos então que x é inserido na primeira linha, removendo alguma entrada y . Como $x > x'$, x' não pode ser acrescentado no final da linha, pelo que é inserido e remove y' .

Novamente, y' deve estar fracamente à esquerda de x (se estivesse estritamente à direita, x apareceria antes de x' , o que contradiz a hipótese de as linhas serem

¹Assume-se que uma caixa está à fracamente à esquerda de outra se estiver à sua esquerda ou se forem a mesma caixa. O mesmo se aplica substituindo esquerda por direita, acima, ou abaixo.

fracamente crescentes). Se $y' = x$, como $x < y$, vem que $y > y'$. Se y' estiver à esquerda de x , tem-se $y' \leq y$, visto que o tableau é semistandard. Mas como x levou à remoção de y , y é o elemento mais à esquerda que é estritamente maior que x , pelo que $y' \leq x$. Então, como $x < y$, resulta que $y > y'$. Em qualquer caso tem-se $y > y'$ e portanto o algoritmo pode continuar nas próximas linhas.

B' tem pelo menos uma caixa estritamente abaixo da caixa B . Se terminasse mais acima, ter-se-ia uma caixa acrescentada num local que não é canto exterior, visto que R está fracamente à sua direita. Também não pode terminar na mesma caixa, pois a etiqueta de B' teria de remover a de B . E caso terminasse ao mesmo nível e numa caixa à esquerda, B' deixaria novamente de ser canto exterior. Assim, B' fica fracamente à esquerda e estritamente abaixo de B . \square

Proposição 1.2. *Seja T um tableau de forma λ e considere-se*

$$U = r_{x_p} \dots r_{x_2} r_{x_1}(T)$$

com x_1, \dots, x_p números inteiros. Seja θ a forma de U .

Então, se $x_1 \leq \dots \leq x_p$ (respectivamente $x_1 > \dots > x_p$), não existem duas caixas de θ/λ na mesma coluna (respectivamente linha). Reciprocamente, suponhamos que U é um tableau de forma θ e que λ é um diagrama contido em θ , com p caixas em θ/λ . Se μ/λ não tiver duas caixas numa mesma coluna (respectivamente linha), então existe um único tableau T de forma λ e únicos $x_1 \leq \dots \leq x_p$ (respectivamente $x_1 > \dots > x_p$) tais que $U = r_{x_p} \dots r_{x_2} r_{x_1}(T)$

Demonstração. Suponhamos que numa dada coluna existem duas caixas. Como essas caixas não existiam em T são necessariamente caixas acrescentadas, B_i e B_j , que resultam da inserção de $x_i \leq x_j$. Mas pelo lema da remoção nas linhas, B_i tem de estar estritamente à esquerda de B_j .

Reciprocamente, suponhamos que θ/λ não tem duas caixas numa mesma coluna. Como o algoritmo de inserção é invertível, podemos aplicar o seu inverso em U com as caixas de θ/λ , começando na caixa mais à direita e avançando para a esquerda. Seja T o tableau obtido, e x_1, \dots, x_p as caixas removidas. Pelo lema da remoção nas linhas, $x_1 \leq \dots \leq x_p$.

A prova para o caso das linhas é análoga. \square

O algoritmo de inserção pode ser utilizado para definir um produto $T \cdot U$ entre tableaux. Sejam T e U tableaux e sejam x_1, \dots, x_p os elementos de U listados por ordem da esquerda para a direita e de baixo para cima. Define-se então,

$$T \cdot U := r_{x_p} \dots r_{x_1}(T) \tag{1.1}$$

Exemplo 1.8. Sejam $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}$ e $U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$

Então, inserindo ordenadamente em T as entradas 3, 2, 3, 1, 1, 1, obtém-se o tableau

$$T \cdot U = r_1 r_1 r_1 r_3 r_2 r_3(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

O resultado seguinte será demonstrado na secção 1.3.

Teorema 1.2. *O produto de tableaux definido anteriormente é associativo e tem como identidade o tableau \emptyset .*

1.2.2 Deslizamento e *jeu de taquin*

Nesta secção vamos apresentar o *jeu de taquin*, um procedimento que se baseia num algoritmo de deslizamento de caixas e transforma tableaux enviesados em tableaux normais. Este procedimento foi desenvolvido por Schützenberger, nos anos 70 ([25]).

Definição 1.12 (Deslizamento para a frente). Seja T um tableaux enviesado semistandard de forma λ/μ e seja c um canto interior de $[\mu]$. O tableau $j^c(T)$ obtém-se a partir T através do seguinte algoritmo:

1. Se c for canto interior de $[\lambda]$, o algoritmo termina.
2. Caso, contrário, seja $c = (i, j)$ e seja c' a caixa de $\min\{T_{i+1,j}, T_{i,j+1}\}$ (caso sejam iguais, encaramos $T_{i+1,j}$ como sendo o menor, e caso algum não esteja definido, escolhemos o outro). Deslizamos então a caixa de c' para a caixa c . Repete-se o algoritmo, fazendo agora $c = c'$.

É também comum dizer-se que se tem um *deslizamento horizontal* caso seja escolhida a caixa $T_{i,j+1}$ e um *deslizamento vertical* caso se escolha a caixa $T_{i+1,j}$

Exemplo 1.9. Consideremos o seguinte tableau semistandard de forma $(3, 2)/(3)$

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \times \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

O único canto interior de $[(3)]$ corresponde à caixa $(1, 3)$, que é também canto interior de $[(3, 2)]$. Assim, $j^{(1,3)}(Q) = Q$.

Consideremos agora o tableau semistandard de forma $(4, 3, 2)/2, 1$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Aplicamos o algoritmo de deslizamento para a frente na caixa $(1, 2)$. Como 1 é menor do que 2, a caixa $(1, 3)$ é "deslizada" para a posição $(1, 2)$. E como 1 é menor do que 3, a caixa $(1, 4)$ passa a ocupar a posição $(1, 3)$. Obtém-se então o tableau

$$j^{(1,2)}(T) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Proposição 1.3. *Seja T um tableau enviesado semistandard, de forma λ/μ e c um canto interior de $[\mu]$. Então, $j^c(T)$ é um tableau enviesado semistandard.*

Demonstração. Como a caixa acrescentada é um canto interior de μ e a caixa removida é um canto interior de λ , é claro que $j^c(T)$ continua um tableau enviesado. Mostremos agora que é semistandard, isto é, que o deslizamento mantém as linhas fracamente crescentes e as colunas estritamente crescentes. Têm-se naturalmente dois casos. Seja $c = (i, j)$ como no passo 2., e sejam $x = T_{i+1, j}$ e $y = T_{i, j+1}$.

...	b	v
a		y
u	x	...

1. $y < x$. Então c' é a caixa de y . Neste caso tem-se um deslizamento horizontal, pelo que as linhas continuam fracamente crescentes. E, sendo b a entrada da caixa $(i-1, j)$ e v a da caixa $(i-1, j+1)$, é claro que $b \leq v < y$, pelo que $b < y$ e $y < x$ (por ter sido escolhida para c').

...	b	v
a	y	
u	x	...

2. $x \leq y$. Logo, c' é a caixa de x . Tem-se agora um deslizamento vertical. As colunas continuam estritamente crescentes. Seja a a entrada da caixa $(i, j-1)$ e u a da caixa $(i+1, j-1)$. Então, $a < u \leq x \leq y$.

...	b	v
a	x	y
u		...

□

À semelhança da inserção, também o algoritmo de deslizamento para a frente é invertível, caso seja indicada qual a caixa removida. A sua inversa é designa-se por deslizamento para trás.

Definição 1.13 (Deslizamento para trás). Seja T um tableaux enviesado semistandard de forma λ/μ e seja c um canto exterior de $[\mu]$. O tableau $j_c(T)$ obtém-se de T do seguinte modo:

1. Se c for também canto exterior de $[\lambda]$ o algoritmo termina.
2. Caso, contrário, seja $c = (i, j)$ e seja c' a caixa de $\max\{T_{i-1, j}, T_{i, j-1}\}$ (caso sejam iguais, encaramos $T_{i-1, j}$ como sendo maior, e caso algum não esteja definido, escolhemos o outro). Deslizamos então a caixa de c' para a caixa c . Repete-se o algoritmo, fazendo agora $c = c'$.

Prova-se facilmente que $j_c(T)$ é um tableau enviesado e que os algoritmos de deslizamento para a frente e para trás são inversos um do outro.

Exemplo 1.10. Consideremos o tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Então, } j_{(2,3)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Dado T um tableau semistandard enviesado de forma λ/μ , é possível aplicar o deslizamento para a frente em qualquer um dos cantos interiores de $[\mu]$. Aplicando o algoritmo ao tableau resultante consecutivamente, até não existirem cantos interiores em $[\mu]$ que não sejam caixas de $[\lambda]$, obtém-se um tableau normal. Chamamos ao tableau obtido uma *rectificação* de T e ao processo *jeu de taquin*. Enunciamos um resultado importante que será demonstrado no final da secção 1.3.

Teorema 1.3. *Dado um tableau enviesado, qualquer escolha de cantos interiores para o processo de deslizamento origina a mesma rectificação.*

A rectificação de um tableau T semistandard enviesado fica assim bem definida e denota-se por $Rect(T)$. Se T for um tableau normal, tem-se $Rect(T) = T$.

O *jeu de taquin* está relacionado com o algoritmo de inserção, embora não seja para já evidente. Vamos definir um produto entre tableaux usando este algoritmo.

Sejam T e U tableaux normais, de formas $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$, com $l(\lambda) = l$ e $l(\mu) = k$. Vamos construir um tableau enviesado $T * U$ de forma $(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_1 + \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_l)/(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, que é formado por um rectângulo (correspondente à parte "vazia") com o mesmo número de colunas de T e o mesmo número de linhas de U , colocando T abaixo desse rectângulo e U à sua direita. Definimos então o produto

$$T \bullet U = Rect(T * U)$$

Exemplo 1.11. Sejam $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}$ e $U = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$. Então

$$T * U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & 2 & 3 & \\ \hline & & & & & 3 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & & & & & \\ \hline 3 & 3 & 3 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Aplicando a rectificação ao tableau $T * U$, obtém-se

$$T \bullet U = Rect(T * U) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

A seguinte proposição relaciona a inserção com o *jeu de taquin* e será demonstrada no final da secção 1.3

Proposição 1.4. *Sejam T e U tableaux normais e sejam x_1, \dots, x_p os elementos de U listados por ordem da esquerda para a direita e de baixo para cima. Então, $T \bullet U = Rect(T * U) = r_{x_p} \dots r_{x_1}(T) = T \cdot U$.*

1.3 Palavras

Nesta secção vamos estudar o conceito de palavra de um tableau. Definindo uma relação de equivalência, é possível estudar os algoritmos da secção anterior recorrendo a palavras. Em particular, demonstraremos os teoremas 1.2 e 1.3 e a proposição 1.4. As principais referências são [10] e [16].

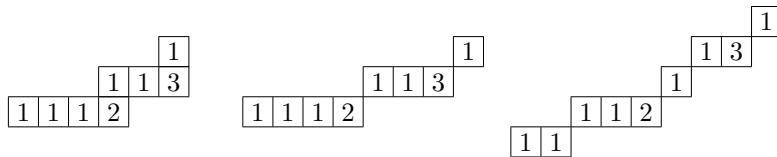
Consideramos um *alfabeto* como sendo um conjunto ordenado de letras. Uma *palavra* será uma sequência finita de letras. Dadas duas palavras w e w' , $w.w'$ denota a palavra obtida pela justaposição das palavras w e w' . Dada uma palavra w e uma letra i no seu alfabeto, denota-se por $N(i, w)$ o número de ocorrências da letra i em w . Para uma palavra $w = w_1 \dots w_n$, em que w_i são letras, define-se um seu *prefixo* como sendo qualquer sequência $v = w_1 \dots w_j$, para um certo $j \leq n$. Analogamente, um seu *sufixo* é qualquer sequência $u = w_j \dots w_n$, para algum $j \geq 1$.

Dado um tableau T define-se a sua *palavra*, que se denota por $w(T)$, como sendo a sequência das entradas das suas caixas, lidas de baixo para cima e da esquerda para a direita.

Exemplo 1.12. Seja $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array}$. Então, $w(T) = 322233111122$

É possível recuperar um tableau semistandard conhecendo a sua palavra, bastando separá-la sempre que uma letra for estritamente maior que a seguinte. No exemplo anterior, seria $w(T) = 3|22233|111122$.

Nem todas as palavras podem ser obtidas a partir de um tableau normal, uma vez que nem sempre é possível garantir que se tem colunas estritamente crescentes. Por exemplo, a palavra $w = 1121$ não pode ser palavra de nenhum tableau normal. Contudo, qualquer palavra pode ser obtida a partir de um tableau enviesado. Por exemplo, $w = 1112|113|1$ pode ser obtida a partir de



Vamos agora estudar os algoritmos de inserção e deslizamento em termos de palavras. Para tal, usaremos uma ferramenta importante, as relações de Knuth.

Suponhamos que temos um tableau T com apenas uma linha e que a inserção de x leva à remoção de x' . Então, $w(T) = ux'v$ em que u e v são palavras. Podemos afirmar que qualquer letra de u é menor ou igual do que x e que qualquer letra de v é estritamente maior do que x . Tem-se também $x < x'$. A palavra do tableau $r_x(T)$ é dada por $x'uxv$, uma vez que a letra x' é colocada na segunda linha. Esquemáticamente, tem-se

$$(u.x'.v).x \longrightarrow x'.u.x.v$$

Num tableau com mais do que uma linha, podemos considerar cada linha individualmente, e inserir numa linha o elemento removido na sua linha anterior.

Exemplo 1.13. Consideremos o tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

a inserção de 1 pode ser traduzida como

$$\begin{aligned} (4)(334)(223)(11\underline{22}).1 &\longrightarrow (4)(334)(22\underline{3}).2.(1112) \\ &\longrightarrow (4)(33\underline{4}).3.(222)(1112) \\ &\longrightarrow (4).4.(333)(222)(1112) \\ &\longrightarrow (44)(333)(222)(1112) = w(r_1(T)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Seguindo esta abordagem, Knuth ([16]) descreve o algoritmo de inserção em cada passo numa linha utilizando linguagem de programação, da seguinte forma.

1. Começamos por colocar x no final da primeira linha. Sejam y e z as duas últimas entradas dessa linha.
 - (a) Se $z \leq x$, o processo termina. Neste caso, não há remoção.
 - (b) Suponhamos que $x < z$. Neste caso, o algoritmo obriga à remoção de uma etiqueta x' . Se $z > x$ e também $y > x$, isto é, se $x < y \leq z$, trocar x e z , e repetir o processo, com as duas caixas adjacentes a x .

Os passos deste algoritmo podem então ser descritos como

$$\begin{aligned} ux'v_1v_2 \dots v_{q-1}v_q.x &\longrightarrow ux'v_1v_2 \dots v_{q-1}.x.v_q && (x < v_{q-1} \leq v_q) \\ &\longrightarrow ux'v_1v_2 \dots v_{q-2}.x.v_{q-1}v_q && (x < v_{q-2} \leq v_{q-1}) \\ &\dots \\ &\longrightarrow ux'xv_1 \dots v_q && (x < x' \leq v_1) \end{aligned}$$

2. Suponhamos agora que x remove x' . O algoritmo é então descrito por

$$\begin{aligned} u_1u_2 \dots u_{p-1}u_px'xv &\longrightarrow u_1u_2 \dots u_{p-1}x'u_pxv && (u_p \leq x < x') \\ &\longrightarrow u_1u_2 \dots u_{p-2}x'u_{p-1}u_pxv && (u_{p-1} \leq u_p < x') \\ &\dots \\ &\longrightarrow x'u_1 \dots u_pxv && (u_1 \leq u_2 < x') \end{aligned}$$

o que corresponde a passar sucessivamente x' pelas caixas à esquerda da caixa de x até ser colocando na linha seguinte.

Existem neste algoritmo duas transformações, que enunciamos de seguida.

Definição 1.14 (Transformações de Knuth). Dadas letras x , y e z definimos as seguintes transformações.

$$\begin{aligned} yzx &\xrightarrow{K_1} yxz, \text{ se } x < y \leq z. \\ xzy &\xrightarrow{K_2} zxy, \text{ se } x \leq y < z. \end{aligned}$$

As transformações anteriores, juntamente com as suas inversas, são chamadas *transformações de Knuth elementares*. Diz-se que duas palavras w e w' são *Knuth-equivalentes*, denotando-se $w \stackrel{K}{\equiv} w'$, se uma se pode obter a partir da outra por uma sequência finita de transformações de Knuth elementares e das suas inversas. É simples verificar que esta relação é uma relação de equivalência.

Então, o que acabou de se mostrar é que o algoritmo de inserção preserva a equivalência de Knuth, pelo que se têm os seguintes resultados. Com efeito, as transformações de Knuth elementares podem facilmente ser visualizadas nas seguintes inserções:

$$\text{Se } x < y \leq z, r_x\left(\begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline \end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline y & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Se } x < y \leq z, r_y\left(\begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline \end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline z & \\ \hline \end{array}$$

Proposição 1.5. *Dado um tableau T ,*

$$w(r_x(T)) \stackrel{K}{\equiv} w(T).x$$

Corolário 1.1. *Sejam T e U tableaux. Então,*

$$w(T \cdot U) = w(T).w(U)$$

Demonstração. Por indução no número de caixas de U , tem-se

$$w(T.U) = w(r_{x_p} \dots r_{x_1}(T)) \stackrel{K}{\equiv} w(T).(x_p \dots x_1) = w(T)w(U)$$

□

Embora não seja tão evidente como no caso da inserção, o deslizamento preserva também as transformações de Knuth. Nos casos mais simples é possível ver a transformação.

1. Se $x < y \leq z$,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & x \\ \hline y & z & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x & \\ \hline y & z & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & z & \\ \hline y & & \\ \hline \end{array}$$

Logo, $yzx \xrightarrow{K_1} yxz$.

2. Se $x \leq y < z$,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & y \\ \hline x & z & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & y & \\ \hline x & z & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & y & \\ \hline z & & \\ \hline \end{array}$$

Logo, $xzy \xrightarrow{K_2} zxy$.

Note-se que, num passo intermédio do deslizamento, não se tem necessariamente um tableau enviesado, podendo ter-se um tableau enviesado com uma caixa "vazia" que não seja um canto. Nesse caso, a palavra desta estrutura lê-se exactamente da mesma maneira, juntando as letras das caixas imediatamente à esquerda e direita da "caixa vazia".

Mostremos então que o deslizamento mantém a equivalência de Knuth. No caso de se tratar de um deslizamento horizontal, a palavra não é alterada, pelo que é trivialmente Knuth-equivalente a si própria. Interessa-nos então o caso em que o deslizamento é vertical, isto é,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & \cdots & u_p & & y_1 & \cdots & y_q \\ \hline v_1 & \cdots & v_p & x & z_1 & \cdots & z_q \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & \cdots & u_p & x & y_1 & \cdots & y_q \\ \hline v_1 & \cdots & v_p & & z_1 & \cdots & z_q \\ \hline \end{array}$$

Suponhamos que:

1. As sequências u_i , v_i , y_j e z_j são fracamente crescentes.
2. Para todo o i e j , $u_i < v_i$ e $y_j < z_j$.
3. $v_p \leq x \leq y_1$.

Sendo $u = u_1 \dots u_p$ e v , y e z definidas de modo análogo, queremos então mostrar que

$$v x z u y \stackrel{K}{=} v z u x y$$

Vamos fazer indução em p . Seja $p = 0$. Se y_1 for inserido numa linha com entradas x, z_1, \dots, z_q , então a entrada z_1 deve ser removida, uma vez que $x \leq y_1$ e $y_1 < z_1$, isto é, z_1 é a entrada mais à esquerda que é estritamente maior que y_1 . Vimos já que a inserção respeita a equivalência de Knuth, logo

$$x z_1 z_2 \dots z_q y_1 \stackrel{K}{=} z_1 x y_1 z_2 \dots z_q$$

e portanto

$$x z_1 z_2 \dots z_q y_1 \cdot y_2 \dots y_q \stackrel{K}{=} z_1 x y_1 z_2 \dots z_q \cdot y_2 \dots y_q \quad (1.3)$$

Vamos agora inserir y_2 na linha que tem x, y_1, z_2, \dots, z_q . Como $y_1 \leq y_2$ e $y_2 < z_2$, z_2 vai ser removido. Novamente pelo resultado da inserção,

$$x y_1 z_2 \dots z_q y_2 \stackrel{K}{=} z_2 x y_1 y_2 z_3 \dots z_q$$

e portanto

$$z_1 x y_1 z_2 \dots z_q y_2 y_3 \dots y_q \stackrel{K}{=} z_1 z_2 x y_1 y_2 z_3 \dots z_q y_3 \dots y_q \quad (1.4)$$

Continuando este processo, inserindo y_k na linha com $x, y_1, \dots, y_{k-1}, z_k, \dots, z_q$, como $y_{k-1} \leq y_k$ e $y_k < z_k$, o elemento removido é z_k , obtendo-se como anteriormente

$$x y_1 \dots y_{k-1} z_k \dots z_q y_k \stackrel{K}{=} z_k x y_1 \dots y_{k-1} y_k z_{k+1} \dots z_q$$

e conseqüentemente

$$z_1 \dots z_{k-1} x y_1 \dots y_{k-1} z_k \dots z_q y_k y_{k+1} \dots y_q \stackrel{K}{=} z_1 \dots z_{k-1} z_k x y_1 \dots y_{k-1} y_k z_{k+1} \dots z_q y_{k+1} \dots y_q \quad (1.5)$$

Assim, para $k = q$ tem-se

$$\begin{aligned} xzy &= xz_1 \dots z_q y_1 \dots y_q \stackrel{K}{=} z_1 x y_1 z_2 \dots z_q y_2 \dots y_q \\ &\stackrel{K}{=} z_1 z_2 x y_1 y_2 z_3 \dots z_q y_3 \dots y_q \\ &\dots \\ &\stackrel{K}{=} z_1 \dots z_q x y_1 \dots y_q = zxy \end{aligned}$$

Logo, $xzy \stackrel{K}{=} zxy$.

Seja agora $p > 0$, e suponhamos que se tem $vxzuy \stackrel{K}{=} vzxuy$ para palavras de comprimento $p - 1$. Sejam

$$\begin{aligned} u' &= u_2 \dots u_p \\ v' &= v_2 \dots v_p \end{aligned}$$

Tem-se evidentemente $vxzuy = v_1 v' x z u_1 u' y$. Insira-se u_1 na linha que tem v_1, v', x, z . Como $u_1 < v_1$, esta inserção remove v_1 . Logo,

$$v_1 v' x z u_1 \stackrel{K}{=} v_1 u_1 v' x z$$

e portanto

$$vxzuy = v_1 v' x z u_1 u' y \stackrel{K}{=} v_1 u_1 v' x z u' y$$

Por hipótese de indução,

$$v' x z u' y \stackrel{K}{=} v' z u' x y \tag{1.6}$$

Logo, $v_1 u_1 v' x z u' y \stackrel{K}{=} v_1 u_1 v' z u' x y$. Finalmente, a inserção de u_1 na linha v_1, v', z obriga à remoção de v_1 , pelo que

$$v_1 v' z u_1 \stackrel{K}{=} v_1 u_1, v' z \tag{1.7}$$

Logo, por (1.7), tem-se

$$v_1 u_1 v' z u' x y \stackrel{K}{=} v_1 v' z u_1 u' x y = vzxuy$$

Tem-se então, $vxzuy \stackrel{K}{=} vzxuy$. Para concluir a demonstração, note-se que este processo pode ser generalizado para qualquer deslizamento vertical, bastando concatenar à palavra prefixos e sufixos apropriados. Acabámos de mostrar o seguinte resultado.

Proposição 1.6. *Se um tableau enviesado se obtém de outro a partir de uma sequência de deslizamentos, então as suas palavras são Knuth-equivalentes.*

Podemos agora enunciar o teorema que nos vai ajudar a provar os resultados anteriores.

Teorema 1.4. *Toda a palavra é Knuth-equivalente à palavra de um único tableau.*

A existência de um tal tableau é trivial. Dada uma palavra $w = u_1 \dots u_p$, a palavra do seguinte tableau é Knuth-equivalente a w .

$$r_{x_p} \dots r_{x_2} r_{x_1}(\emptyset)$$

Chamamos a esta construção o *procedimento canónico* para a construção de um tableau que tenha a palavra Knuth-equivalente a uma palavra dada. A unicidade do teorema será provada na secção seguinte e assumiremos, para já, a sua veracidade.

Corolário 1.2. *Dado um tableau enviesado S , o único tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a $w(S)$ é $Rect(S)$. Mais, se S e S' forem tableaux enviesados, então*

$$Rect(S) = Rect(S') \iff w(S) \stackrel{K}{\cong} w(S').$$

Demonstração. Pela Proposição 1.6, $w(Rect(S)) \stackrel{K}{\cong} w(S)$ e pelo teorema 1.3, $Rect(S)$ é único. Suponhamos que $w(S) \stackrel{K}{\cong} w(S')$. Então,

$$w(Rect(S)) \stackrel{K}{\cong} w(S) \stackrel{K}{\cong} w(S') \stackrel{K}{\cong} w(Rect(S'))$$

e pela unicidade do teorema 1.4, $Rect(S) = Rect(S')$.

Reciprocamente, admita-se que $Rect(S) = Rect(S')$. Então,

$$w(S) \stackrel{K}{\cong} w(Rect(S)) = w(Rect(S')) \stackrel{K}{\cong} w(S').$$

□

Existe uma terceira forma de definir um produto de tableaux normais, que será coincidente com os produtos já definidos. Dados T e U tableaux normais, defina-se

$$T \diamond U = \text{o único tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a } w(T).w(U)$$

Corolário 1.3. *Dados T e U tableaux normais, tem-se*

$$T \cdot U = T \bullet U = T \diamond U$$

Demonstração. É suficiente verificar que $w(T \cdot U) \stackrel{K}{\cong} w(T).w(U) \stackrel{K}{\cong} w(T \bullet U)$.

1. Pelo corolário 1.1, tem-se que $w(T \cdot U) \stackrel{K}{\cong} w(T).w(U)$.
2. Uma vez que $T \bullet U = Rect(T * U)$, tem-se

$$w(T \bullet U) \stackrel{K}{\cong} w(Rect(T * U)) \stackrel{K}{\cong} w(T * U) = w(T).w(U).$$

□

1.3.1 Demonstração de unicidade

Vamos nesta secção mostrar a unicidade do tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a uma palavra dada (teorema 1.4). Note-se que, demonstrada a unicidade, ficam demonstrados os teoremas 1.2, 1.3, e a proposição 1.4.

Dada uma palavra $w = u_1 \dots u_p$, com letras em $\{1, \dots, n\}$. Seja $L(w, 1)$ o comprimento da sua maior subsequência fracamente crescente. Isto é, $L(w, 1) = l$, se l for o maior número natural tal que $i_1 < \dots < i_l$ e $u_{i_1} \leq \dots \leq u_{i_l}$.

Exemplo 1.14. Consideremos as palavras $w = 1112213414$ e $w' = 142122314$. As subsequências formadas pelos termos sublinhados são fracamente crescentes e de comprimento máximo

$$w = \underline{111}\underline{221}\underline{341}\underline{4}$$

$$w' = \underline{142}\underline{122}\underline{314}$$

$$w' = \underline{142}\underline{122}\underline{314}$$

Então, $L(w, 1) = 8$ e $L(w', 1) = 6$.

Defina-se agora $L(w, k)$, para $k > 0$, como sendo o maior número que se pode obter como soma de comprimentos de k subsequências de w fracamente crescentes e disjuntas.

Exemplo 1.15. Sendo novamente $w = 1112213414$ e $w' = 142122314$, tem-se

$$L(w, 2) = 10 \quad \underline{111}\underline{22}\underline{13}\underline{41}\underline{4}$$

$$L(w', 2) = 8 \quad \underline{142}\underline{122}\underline{314}$$

$$L(w', 3) = 9 \quad \underline{142}\underline{122}\underline{314}$$

sendo $L(w, k) = 10$ para $k > 2$ e $L(w', k) = 9$, para $k > 3$.

Consideremos agora palavras de tipo $w = w(T)$, sendo T um tableau semistandard normal de forma $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$.

Neste caso, a determinação de $L(w, k)$ é mais simples. A maior sequência fracamente crescente deve corresponder à primeira linha do tableau, pelo que $L(w, 1) = \lambda_1$. Do mesmo modo, o maior número que se obtém como soma de duas sequências fracamente crescentes disjuntas corresponde às sequências da primeira e da segunda linha, pelo que $L(w, 2) = \lambda_1 + \lambda_2$. Por indução, pode concluir-se que $L(w, k) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$.

Tem-se assim o seguinte resultado.

Lema 1.3. *Seja $w = w(T)$ com T tableau semistandard de forma λ . Então, para todo o $k \geq 1$,*

$$L(w, k) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

Lema 1.4. *Sejam w e w' palavras Knuth-equivalentes. Então, para todo o k ,*

$$L(w, k) = L(w', k)$$

Demonstração. É suficiente olhar para o caso em que w e w' diferem por uma relação de Knuth elementar. Suponhamos então que se tem um dos casos, com u e v palavras, e x, y e z letras quaisquer.

1. $w = u.yxz.v \stackrel{K}{=} u.yzx.v = w', (x < y \leq z)$.
2. $w = u.xzy.v \stackrel{K}{=} u.zxy.v = w', (x \leq y < z)$.

Tem-se obviamente que $L(w, k) \geq L(w', k)$. Qualquer família com k seqüências disjuntas retiradas de w' determina a mesma família em w , com possivelmente uma seqüência maior (pois $x < z$).

Para mostrar a outra desigualdade, suponhamos que temos k subsequências disjuntas de w . Vamos a partir daí construir k subsequências disjuntas de w' , com o mesmo número de letras. No caso em que se obtêm as mesmas subsequências o resultado é trivial. Considere-se então o caso em que não se obtêm as mesmas subsequências, isto é, o caso em que uma das subsequências de w inclui x e z – a subsequência de w' deixa de ser crescente.

Seja então $u_1.x.z.v_1$ uma subsequência de w fracamente crescente (com u_1 e v_1 subsequências de u e v , possivelmente vazias). Existem dois casos.

1. Suponhamos que não existe mais nenhuma subsequência de w fracamente crescente na qual apareça y . Assim, podemos considerar as subsequências $u_1.y.z.v_1$, no caso da primeira transformação, ou $u_1.x.y.v_1$, no caso da segunda transformação. Ambas são subsequências de w' fracamente crescentes.
2. Suponhamos agora que existe outra subsequência de w fracamente crescente que inclua y . Seja $u_2.y.v_2$ essa seqüência. Nesse caso, fazem-se as seguintes correspondências, no caso da primeira transformação de Knuth,

$$\begin{array}{ccc} w & & w' \\ u_1.x.z.v_1 & \longrightarrow & u_2.y.z.v_1 \\ u_2.y.v_2 & \longrightarrow & u_1.x.v_2 \end{array}$$

e no caso da segunda transformação,

$$\begin{array}{ccc} w & & w' \\ u_1.x.z.v_1 & \longrightarrow & u_1.x.y.v_2 \\ u_2.y.v_2 & \longrightarrow & u_2.z.v_1 \end{array}$$

Em qualquer um dos casos as subsequências obtidas são fracamente crescentes, e no seu todo, têm as mesmas entradas.

□

Lema 1.5. *Sejam w e w' palavras Knuth-equivalentes e sejam w_0 e w'_0 as palavras obtidas ao remover as maiores p letras e as menores q letras de cada uma delas, para qualquer p, q . Então, w_0 e w'_0 são Knuth-equivalentes.*

Demonstração. Por indução, basta provar que as palavras obtidas ao remover as maiores ou menores letras de w e w' são ainda Knuth-equivalentes. Consideremos o caso em que se removem as maiores letras, sendo o outro caso simétrico. Novamente, é suficiente analisar o caso em que w e w' diferem por uma transformação de Knuth, isto é,

1. $w = u.yxz.v \stackrel{K}{\cong} u.yzx.v = w', (x < y \leq z)$.
2. $w = u.xzy.v \stackrel{K}{\cong} u.zxy.v = w', (x \leq y < z)$.

Se as letras removidas não forem x , y ou z , mantém-se evidentemente a Knuth-equivalência. Caso contrário, a letra removida é necessariamente z e nesse caso as palavras ficam iguais. \square

Estamos finalmente em condições de provar a unicidade do tableau cuja palavra é igual a uma palavra dada. Vamos mostrar que, se w for Knuth-equivalente a $w(T)$, sendo T um tableau de forma normal, então T é univocamente determinado por w . A demonstração é feita por indução no comprimento da palavra $w(T)$ (e consequentemente no número de caixas de T).

Se $w = u$, com u letra, então o único tableau cuja palavra é igual a x é \boxed{u} . Seja agora $w = u_1 \dots u_k$, com $k > 1$, e admita-se que o resultado é verdadeiro para $k - 1$. Pelos lemas anteriores, a forma λ de T é determinada por w , tendo-se

$$\lambda_k = L(w, k) - L(w, k - 1)$$

Seja x a maior letra que aparece em w e seja w_0 a palavra que se obtém removendo a ocorrência de x em w que esteja mais à direita. Seja também T_0 o tableau que se obtém de T removendo a caixa mais à direita com entrada x . Tem-se então $w(T_0) = w(T)_0$. Pelo lema anterior, tem-se que $w_0 \stackrel{K}{\cong} w(T_0)$. Por hipótese de indução, T_0 é o único tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a w_0 . Como são conhecidas as formas de T e de T_0 , a *única* possibilidade para T é ser obtido a partir de T_0 colocando x na caixa vazia.

Podemos agora demonstrar os teoremas 1.2, 1.3 e a proposição 1.4. Foi já visto que as três definições de produto de tableau coincidem, uma vez que têm a mesma palavra, que deve ser Knuth-equivalente à palavra de um único tableau.

Uma vez que o deslizamento preserva a Knuth-equivalência, qualquer escolha de cantos interiores implica que, para cada deslizamento, as palavras se mantenham Knuth-equivalentes. No final, serão então Knuth-equivalentes à palavra de um único tableau, ao qual chamaámos *rectificação*. Assim, o processo de *rectificação* de um tableau enviesado é independente da escolha de cantos interiores.

Finalmente, dados tableaux T , U e V , $T \cdot (U \cdot V)$ é o único tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a $w(T).w(U \cdot V)$. Como $w(U \cdot V) \stackrel{K}{\cong} w(U).w(V)$, tem-se

$$w(T).w(U \cdot V) \stackrel{K}{\cong} w(T).w(U).w(V) \stackrel{K}{\cong} w(T \cdot U).w(V)$$

Como $(T \cdot U) \cdot V$ é o único tableau cuja palavra é Knuth-equivalente a $w(T \cdot U).w(V)$, vem que $(T \cdot U) \cdot V = T \cdot (U \cdot V)$, provando-se assim a associatividade do produto de tableaux.

1.3.2 O monóide pláctico

Seja $F = \{1, \dots, n\}^*$ o monóide livre no alfabeto $\{1, \dots, n\}$, isto é, o monóide formado pelas sequências finitas de elementos de $\{1, \dots, n\}$, com a operação de concatenação usual e a palavra vazia como identidade.

Tem-se que a Knuth-equivalência é também uma relação de congruência, uma vez que

$$w \stackrel{K}{\equiv} w' \wedge v \stackrel{K}{\equiv} v' \longrightarrow wv \stackrel{K}{\equiv} w'v \stackrel{K}{\equiv} w'v'$$

Assim, o quociente $M_n = F/K$, em que K denota a relação de Knuth-equivalência, é um monóide, ao qual chamamos *monóide pláctico*. Tem-se o seguinte epimorfismo canônico

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\eta} & M_n \\ w & \mapsto & [w]_K \end{array}$$

O conjunto dos tableaux semistandard normais com entradas em $\{1, \dots, n\}$ juntamente com o produto definido anteriormente é um monóide, que é isomorfo ao monóide pláctico, com a correspondência

$$T \mapsto [w(T)]_K$$

que é bijectiva, uma vez que, dada uma classe de Knuth-equivalência, qualquer sua palavra é Knuth-equivalente à palavra de um único tableau normal semistandard. Podemos associar a este monóide o seu anel de monóide R_n , ao qual chamamos *anel dos tableaux*. Existe um morfismo entre R_n e $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, que aplica um tableau T normal semistandard num monómio x^T . No capítulo seguinte, ficará clara a relevância desta correspondência.

1.4 O algoritmo RSK

O algoritmo de inserção estudado na secção 1.2 permite estabelecer duas importantes bijecções: a correspondência de Robinson-Schensted, entre permutações de S_n e pares de tableaux standard com forma $\lambda \vdash n$, introduzido por Robinson ([22]) e reformulado por Schensted ([24]); e a correspondência de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), entre permutações generalizadas e pares de tableaux semistandard de forma normal, que corresponde a uma generalização da primeira para tableaux semistandard, desenvolvida por Knuth ([16]). Iremos estudar com mais detalhe a correspondência RSK, na medida em que será utilizada para demonstrar a identidade de Cauchy no capítulo 3, que será relevante para o estudo dos coeficientes de Littlewood-Richardson.

Definição 1.15. Uma *permutação generalizada* é uma matriz de duas linhas com entradas em \mathbb{N}

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

cujas colunas $\begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$ estão ordenadas pela ordem lexicográfica, tomando $\begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix} = (i_k, j_k)$. Denotamos $\hat{\pi} = (i_1, \dots, i_n)$ e $\check{\pi} = (j_1, \dots, j_n)$.

Podemos encarar $\tilde{\pi}$ e $\hat{\pi}$ como tableaux com uma linha, pelo que faz sentido considerar os seus conteúdos. Enunciamos então o seguinte teorema (Knuth, [16])

Teorema 1.5 (Correspondência RSK, [16]). *Existe uma bijecção entre permutações generalizadas e pares de tableaux de Young semistandard com a mesma forma,*

$$\pi \xleftrightarrow{\text{RSK}} (T, U)$$

com $\text{cont } \tilde{\pi} = \text{cont } T$ e $\text{cont } \hat{\pi} = \text{cont } U$.

Demonstração. Demonstramos em primeiro lugar que a correspondência $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (T, U)$ é uma aplicação.

Seja $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ uma permutação generalizada. Vamos criar uma sequência de pares de tableaux semistandard $(T_0, U_0) = (\emptyset, \emptyset), (T_1, U_1), \dots, (T_n, U_n) = (T, U)$ em que os elementos j_1, \dots, j_n são inseridos pelo algoritmo de inserção nos tableaux T_i , enquanto os i_1, \dots, i_n são colocados nos U_i .

Seja então $(T_0, U_0) = (\emptyset, \emptyset)$ e, assumindo que se construiu (T_{k-1}, U_{k-1}) , ponha-se

$$T_k = r_{j_k}(T_{k-1})$$

$U_k =$ tableau no qual se coloca i_k na caixa (i, j) onde terminou a inserção.

1. Pela definição de U_k , os tableaux T_k e U_k têm a mesma forma, para todo o k . É também claro que $\text{cont } T = \text{cont } \tilde{\pi}$ e $\text{cont } U = \text{cont } \hat{\pi}$.
2. T é um tableau semistandard, uma vez que o algoritmo de inserção mantém as linhas fracamente crescentes e as colunas estritamente crescentes, como já foi visto. U é também semistandard. As suas linhas são fracamente crescentes, uma vez que $\hat{\pi}$ é uma sequência fracamente crescente. As colunas de U devem ser estritamente crescentes. Suponhamos que existiam elementos iguais $i_k = i_l$, como $k < l$, que estão na mesma coluna. Pela ordem lexicográfica de π tem-se que $j_k \leq j_l$. O lema da remoção nas linhas afirma que a caixa acrescentada pela inserção de j_k deve estar estritamente à esquerda da caixa acrescentada pela inserção de j_l , o que contraria a hipótese de i_k e i_l estarem na mesma coluna.

Por exemplo, consideremos a permutação generalizada

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tem-se então

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$T_6 = T$
\emptyset	$\boxed{1}$	$\boxed{1 \ 2}$	$\boxed{1 \ 2 \ 3}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & \end{array}$
U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	$U_6 = U$
\emptyset	$\boxed{1}$	$\boxed{1 \ 1}$	$\boxed{1 \ 1 \ 1}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \end{array}$

Logo,

$$\pi \xrightarrow{RSK} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

É usual designar-se o tableau U por *tableau de registo*.

Mostremos agora que a aplicação $\pi \xrightarrow{RSK} (T, U)$ tem inversa.

Como foi visto anteriormente, o algoritmo de inserção é invertível, caso seja indicada a caixa acrescentada. Os tableaux U_k contêm precisamente a informação sobre as caixas acrescentadas a cada passo. O algoritmo consiste então em determinar uma sequência $(T, U) = (T_n, U_n), (T_{n-1}, U_{n-1}), \dots, (T_0, U_0) = (\emptyset, \emptyset)$ e colocar a informação daí retirada na forma de permutação generalizada.

Sejam então $(T_n, U_n) = (T, U)$. Assumindo a construção de (T_k, U_k) vamos determinar i_k, j_k e (T_{k-1}, U_{k-1}) .

1. Em U_k , determine-se a caixa (i, j) com maior entrada, que esteja o mais à direita possível. Essa caixa, por construção, deve corresponder à caixa que foi acrescentada pelo algoritmo de inserção. Assim, seja U_{k-1} o tableau obtido por U_k removendo a caixa (i, j) e ponha-se $i_k = (U_k)_{i,j}$.
2. Para obter T_{k-1} , faça-se o processo inverso da inserção, considerando $(i, j) = (i^k, j^k)$ como a caixa acrescentada, obtendo-se $T_{k-1} = r_{(i,j)}^{x_k}(T_k)$ para um certo elemento x_k . Ponha-se então $j_k = x_k$.

Por construção, é claro $i_1 \leq \dots \leq i_n$. Caso $i_k = i_{k+1}$, então i_k tem de estar à direita de i_{k-1} . O lema da remoção nas linhas garante então que $j_k \leq j_{k+1}$. \square

É possível associar a cada permutação generalizada uma matriz com entradas inteiras e não negativas¹. Dada uma permutação generalizada π defina-se então $M = M(\pi)$, sendo

$$M_{i,j} = \text{número de ocorrências de } \binom{i}{j} \text{ em } \pi.$$

Exemplo 1.16. À permutação generalizada $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ associamos a matriz

$$M(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trata-se de um processo facilmente revertível, pelo que se tem uma bijecção entre permutações generalizadas e o conjunto de matrizes com entradas inteiras e não negativas, e que não têm colunas ou linhas finais de zeros. Esta última condição deve-se ao facto de uma linha ou coluna com zeros não trazer qualquer informação adicional sobre π . Note-se ainda que a soma das entradas da linha i de $M(\pi)$ dá-nos o número de i 's em $\hat{\pi}$, enquanto a soma da coluna j dá o número de j 's. Tem-se então o seguinte corolário.

¹Tal já é feito com permutações, que se associam facilmente a matrizes-(0,1)

Corolário 1.4. *Existe uma bijecção entre pares de tableaux de Young semistandard com a mesma forma e matrizes com entradas inteiras não negativas, sem colunas ou linhas finais de zeros*

$$M \xleftrightarrow{RSK} (T, U)$$

tal que $\text{cont } T$ e $\text{cont } U$ correspondem à soma das linhas e colunas de M , respectivamente.

Dada uma permutação generalizada π definimos a sua inversa π^{-1} como sendo a permutação generalizada tal que

$$M(\pi^{-1}) = (M(\pi))^T$$

Exemplo 1.17. Sendo π como no exemplo anterior, tem-se

$$(M(\pi))^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(\pi^{-1})$$

$$\text{pelo que } \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se o seguinte teorema, também chamado Teorema da Simetria, que se deve a uma generalização de Knuth ([16]) de um resultado de Schützenberger.

Teorema 1.6 (Teorema da Simetria). *Seja π uma permutação generalizada e suponhamos que $\pi \xleftrightarrow{RSK} (T, U)$. Então,*

$$\pi^{-1} \xleftrightarrow{RSK} (U, T).$$

ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES SIMÉTRICAS

Neste capítulo serão apresentados alguns dos principais resultados acerca da álgebra das funções simétricas, com especial ênfase nas funções de Schur.

Começamos por fazer uma curta referência às funções geradoras. Na secção seguinte será feita a construção da álgebra das funções simétricas, sendo apresentadas algumas das suas bases, das quais se destacam as funções de Schur. Serão então apresentados alguns resultados importantes relativos a estas funções, bem como algumas formulações alternativas.

As principais referências utilizadas ao longo deste capítulo são [10], [19], [20], [23] e [26].

2.1 Breve introdução às funções geradoras

Dada uma família de inteiros $(a_n)_{n \geq 0}$, a sua *função geradora* é dada por

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Se a família $(a_n)_{n \geq 0}$ corresponder à enumeração de determinados objectos combinatorios, diz-se que $f(x)$ é a função geradora desses objectos.

Exemplo 2.1. $f(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{4}{n} x^n = (1+x)^4$ é a função geradora dos subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplo 2.2. $f(x) = \sum_{n \geq 0} p(n) x^n$ é a função geradora das partições de $n \in \mathbb{N}$, onde $p(n)$ denota o número de partições de n .

Note-se que esta série de potências é uma *soma formal*, no sentido em que são irrelevantes as questões de convergência já que nunca se substitui x . Denotamos por $\mathbb{Z}[[x]]$ o anel das séries de potências formais. A análise da função geradora de uma família de objectos fornece informações sobre as suas propriedades. Como veremos

mais à frente, existem casos em que se conhece a função geradora, sem ser conhecida uma fórmula explícita para $(a_n)_{n \geq 0}$.

Seja S uma família de objectos enumerada por $(a_n)_{n \geq 0}$. Um método para determinar uma função geradora que descreva a família S consiste em associar a cada objecto um elemento de $\mathbb{Z}[[x]]$ e considerar a sua soma ao longo de S . Define-se um *peso* de S como sendo uma função $wt : S \rightarrow \mathbb{Z}[[x]]$. A *função geradora de peso* de S é dada por

$$f_S = \sum_{s \in S} wt(s)$$

Geralmente, dado $s \in S$, considera-se o peso dado por $wt(s) = x^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ apropriado.

Analisemos de novo o exemplo das partições. Seja S o conjunto de todas as partições de n e, para $\lambda \in S$, considere-se o peso definido por $wt(\lambda) = x^{|\lambda|}$. Então,

$$f_S(x) = \sum_{\lambda \in S} x^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} x^n = \sum_{n \geq 0} p(n)x^n$$

Euler provou a seguinte identidade envolvendo a função geradora das partições

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

2.2 A álgebra das funções simétricas

Consideremos uma família de n variáveis independentes $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n$ e o anel de polinómios $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Diz-se que um monómio $x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_k}^{\lambda_k}$ tem *grau* n se $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Um polinómio diz-se *homogéneo* de grau n se todos os seus monómios tiverem grau n .

Existe uma acção natural de S_n em $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, dada por $\pi f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$, para $\pi \in S_n$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Um polinómio f diz-se *simétrico* se $\pi f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$, para toda a permutação $\pi \in S_n$. Isto é, se for invariante para a acção de S_n .

Seja Λ_n o anel dos polinómios simétricos nas indeterminadas x_1, \dots, x_n . Λ_n é um subanel de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ e tem-se que

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k \tag{2.1}$$

sendo Λ_n^k o anel dos polinómios simétricos homogéneos de grau k (Λ_n^0 consiste no polinómio nulo). Note-se que o produto de um polinómio de Λ_n^k por elementos de \mathbb{Z} é ainda um polinómio simétrico e homogéneo de grau k . Assim, Λ_n^k e Λ_n são \mathbb{Z} -módulos. Note-se que Λ_n é ainda uma álgebra. Mais, trata-se de uma álgebra graduada, uma vez que o grau do produto de dois polinómios será igual à soma dos seus graus.

Seja λ uma partição tal que $l(\lambda) \leq n$. Defina-se

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} x_1^{\lambda_{\pi(1)}} \dots x_n^{\lambda_{\pi(n)}}$$

O polinómio m_λ é simétrico. Com efeito, dado $\sigma \in S_n$, tem-se

$$\begin{aligned} m_\lambda(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \sum_{\pi \in S_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_{\pi(1)}} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_{\pi(n)}} = \sum_{\pi \in S_n} x_1^{\lambda_{\pi\sigma^{-1}(1)}} \dots x_n^{\lambda_{\pi\sigma^{-1}(n)}} = \\ &= \sum_{\tau \in S_n} x_1^{\lambda_{\tau(1)}} \dots x_n^{\lambda_{\tau(n)}} = m_\lambda(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Prova-se que os polinómios m_λ são linearmente independentes. E como qualquer f em Λ_n^k é soma de monómios, basta agrupar os que correspondem a uma mesma partição. Assim, o conjunto $\{m_\lambda : l(\lambda) \leq n \wedge \lambda \vdash k\}$ forma uma \mathbb{Z} -base para Λ_n^k . E por (2.1), o conjunto $\{m_\lambda : l(\lambda) \leq n\}$ é uma \mathbb{Z} -base de Λ_n .

Vamos agora generalizar para o caso em que temos *infinitas* variáveis. Seja $n \leq m$ e consideremos o morfismo $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ que aplica x_i em x_i , para $i \leq n$, e x_j em 0, para $n < j \leq m$. Este morfismo pode ser restringido a Λ_m , obtendo-se $\rho_{m,n} : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$, em que $\rho_{m,n}$ aplica $m_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ em $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$, se $l(\lambda) \leq n$, ou em 0, caso $n < l(\lambda) \leq m$. $\rho_{m,n}$ é claramente um epimorfismo, uma vez que $\rho_{m,n}(m_\lambda(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$.

Considere-se agora a restrição de $\rho_{m,n}$ a Λ_m^k . Vamos obter um morfismo

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \rightarrow \Lambda_n^k$$

que é sobrejectivo se $k \geq 0$ e $m \geq n$, e bijectivo se $m \geq n \geq k$. Tem-se evidentemente que $\rho_{m,m}^k = id_{\Lambda_m^k}$ e $\rho_{m,n}^k \circ \rho_{l,m}^k = \rho_{l,n}^k$, para $l \geq m \geq n$.

Assim, o par $(\Lambda_m^k, \rho_{m,n}^k)$ é um sistema inverso (de anéis), admitindo um limite inverso

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k.$$

Os elementos de Λ^k são as seqüências $f = (f_n)_{n \geq 0}$ com $f_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ polinómio simétrico homogéneo de grau k e tal que $f_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n)$, para $n \leq m$.

Como $\rho_{m,n}^k$ é isomorfismo para $m \geq n \geq k$, a projecção $\rho_n^k : \Lambda^k \rightarrow \Lambda_n^k$ é isomorfismo. Assim, Λ^k admite uma \mathbb{Z} -base $\{m_\lambda : \lambda \vdash k\}$ tal que $\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$. Chamamos às funções m_λ (em Λ^k tendo portanto infinitas variáveis) as *funções simétricas monomiais*¹.

Seja agora $\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k$. Λ é um módulo livre gerado pelas funções simétricas monomiais correspondentes a todas as partições λ . Chamamos a Λ a *álgebra das funções simétricas*. À semelhança das estruturas para um número finito de variáveis, também Λ^k e Λ são módulos, sendo Λ uma álgebra graduada.

¹Os elementos de Λ^k não são necessariamente polinómios, pois contêm somas formais infinitas. Por este motivo, utiliza-se a terminologia *função*.

2.3 Bases de Λ^k

Considere-se novamente o anel Λ^k das funções simétricas de grau k . Vimos que $\{m_\lambda : \lambda \vdash k\}$ é uma sua \mathbb{Z} -base. Existem outras bases, que estudaremos de seguida.

Definição 2.1. 1. A função soma de potências simétrica de grau k é dada por

$$p_k = m_{(k)} = \sum_{i \geq 1} x_i^k.$$

2. A função simétrica elementar de grau k é dada por

$$e_k = m_{(1^k)} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

Convencionou-se que $e_0 = 1$.

3. A função simétrica completa de grau k é dada por

$$h_k = \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

Convencionou-se que $h_0 = 1$ e $h_k = 0$, para $k < 0$.

Exemplo 2.3. Para $k = 4$, tem-se

$$p_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots$$

$$e_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_5 x_6 + \dots$$

$$h_4 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + \dots + x_1^2 x_2 x_3 + \dots$$

Note-se que as funções simétricas elementares e_k são a soma de todos os monómios livres de quadrados de grau k . Assim, podemos considerá-la como uma função geradora para partições com k partes distintas. Seja $S = \{\lambda : l(\lambda) = k\}$, com $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, com $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$, e considere-se o peso $wt(\lambda) = x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_k}$. Então, $e_k(x_1, x_2, \dots) = f_S(x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 2.1. *Têm-se as seguintes funções geradoras*

$$1. E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t)$$

$$2. H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

Definição 2.2. Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, define-se $p_\lambda = p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_n}$. As funções e_λ e h_λ definem-se de modo semelhante.

Lema 2.1. *Seja λ uma partição. Dada uma matriz A denotamos por $\text{row}(A)$ a sequência das somas das suas linhas, e por $\text{col}(A)$ a sequência das somas das suas colunas. Então, em Λ^k ,*

$$1. e_\lambda = \sum_{\mu \vdash k} D_{\lambda, \mu} m_\mu, \text{ em que } D_{\lambda, \mu} \text{ é igual ao número de matrizes-}(0, 1) \text{ A tais que } \text{row}(A) = \lambda \text{ e } \text{col}(A) = \mu.$$

2. $h_\lambda = \sum_{\mu \vdash k} A_{\lambda,\mu} m_\mu$, em que $A_{\lambda,\mu}$ é igual ao número de matrizes A com entradas em \mathbb{N} tais que $\text{row}(A) = \lambda$ e $\text{col}(A) = \mu$.

3. $D_{\lambda,\mu} = D_{\mu,\lambda}$ e $A_{\lambda,\mu} = A_{\mu,\lambda}$

Demonstração. 1. Como m_λ é base de Λ^k , temos $e_\lambda = \sum_{\mu \vdash k} D_{\lambda,\mu} m_\mu$. Para obter um termo de e_λ , considere-se a matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

e escolham-se (sem repetições), na linha 1, λ_1 entradas, na linha 2, λ_2 entradas, e assim sucessivamente. Seja $x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} \dots = x^\mu$ o produto das entradas escolhidas. Então, substituindo por 1 as entradas escolhidas e por 0 as restantes, obtém-se uma matriz-(0,1) A em que claramente $\text{row}(A) = \lambda$ e $\text{col}(A) = \mu$. Reciprocamente, dada uma matriz-(0,1) nessas condições, ela corresponde a um termo de e_μ .

2. De modo análogo, para obter um termo de h_λ , escolhem-se na mesma matriz λ_i entradas na linha i , podendo existir repetições (que se consideram diferentes para efeitos de contagem). Sendo $x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} \dots = x^\mu$ o produto das entradas escolhidas, substituam-se as entradas escolhidas pelo número de vezes que foram escolhidas (e as restantes por 0). As entradas da matriz são obviamente naturais e tem-se por construção $\text{row}(A) = \lambda$ e $\text{col}(A) = \mu$. Também como anteriormente, dada uma matriz nessas condições é possível corresponder-lhe um termo de h_λ .

3. É resultado do facto de $\text{row}(A) = \text{col}(A^T)$ e $\text{col}(A) = \text{row}(A^T)$. □

Proposição 2.2. *Sejam $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$ e $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots$ indeterminadas independentes. Têm-se as seguintes identidades:*

1. $\prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda, \mu} D_{\lambda,\mu} m_\lambda(\mathbf{x}) m_\mu(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda} m_\lambda(\mathbf{x}) e_\lambda(\mathbf{y})$.
2. $\prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda, \mu} A_{\lambda,\mu} m_\lambda(\mathbf{x}) m_\mu(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda} m_\lambda(\mathbf{x}) h_\lambda(\mathbf{y})$.

Demonstração. Mostremos a primeira identidade. A segunda tem uma demonstração análoga. Para obter um monómio $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots y_{j_1}^{\beta_1} y_{j_2}^{\beta_2} \dots$ em $\prod_{i,j \geq 1} (1 + x_i y_j)$, construa-se uma matriz-(0,1) $A = (a_{i,j})$ com um número finito de 1's tal que

$$\prod_{i,j \geq 1} (x_i y_j)^{a_{i,j}} = \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta$$

Mas como $\prod_{i,j \geq 1} (x_i y_j)^{a_{i,j}} = \mathbf{x}^{\text{row}(A)} \mathbf{y}^{\text{col}(A)}$, resulta que o coeficiente do monómio em questão no produto é igual ao número de matrizes-(0,1) com $\text{row}(A) = \alpha$ e $\text{col}(A) = \beta$, isto é, $D_{\alpha,\beta}$. A segunda parte resulta do lema 2.1. □

Teorema 2.1. *Os seguintes conjuntos são \mathbb{Z} -bases de Λ^k*

1. $\{p_\lambda : \lambda \vdash k\}$.
2. $\{e_\lambda : \lambda \vdash k\}$.
3. $\{h_\lambda : \lambda \vdash k\}$.

Demonstração. 1. Seja $C = (c_{\lambda,\mu})$ a matriz de p_λ em termos da base m_λ . A demonstração fica concluída se encontrarmos uma ordem que torne C triangular e sem zeros na diagonal principal. Isto garante a invertibilidade de C , o que prova que p_λ é uma base. Afirmamos que

$$p_\lambda = c_{\lambda,\lambda} + \sum_{\mu \triangleright \lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu$$

com $c_{\lambda,\lambda} \neq 0$. Ora, tem-se que $p_\lambda = (x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_2} + \dots)(x_1^{\lambda_2} + x_2^{\lambda_2} + \dots) \dots (x_1^{\lambda_i} + x_2^{\lambda_i} + \dots)$, pelo que, se $x_1^{\mu_1} \dots x_r^{\mu_r}$ aí aparece, tem-se necessariamente que cada μ_i é soma de alguns λ_j . Assim, a partição μ , tendo partes maiores ou iguais a partes de λ , é maior (pela ordem de dominação) que λ . Assim, o menor termo a aparecer deve ser m_λ

2. Mostremos que $D_{\lambda,\mu} \neq 0$ para $\mu \leq \lambda'$ e que $D_{\lambda,\lambda'} = 1$. Suponhamos que $D_{\lambda,\mu} \neq 0$. Pelo que acabámos de ver, existe uma matriz-(0,1) A tal que $\text{row}(A) = \lambda$ e $\text{col}(A) = \mu$. Seja A' a matriz tal que $\text{row}(A') = \lambda$ e tal que $A'_{ij} = 1$ para $1 \leq j \leq \lambda_i$, isto é, com os 1's alinhados à esquerda. Para cada i , o número de 1's nas primeiras i colunas de A' é maior ou igual ao número de i 's nas primeiras i colunas de A . Então,

$$\mu = \text{col}(A) \leq \text{col}(A') = \lambda'.$$

Como A' é a única matriz-(0,1) tal que $\text{row}(A') = \lambda$ e $\text{col}(A') = \lambda'$, vem que $D_{\lambda,\lambda'} = 1$.

Sejam $\lambda^{(1)} \leq \dots \leq \lambda^{(p(k))}$ as partições de k ordenadas pela ordem de dominação. Então, $(\lambda^{(p(k))})' \leq \dots \leq (\lambda^{(1)})'$. Consideremos a matriz $(D_{\lambda,\mu})$ com as linhas ordenadas pela primeira ordenação e as colunas pela segunda ordenação. Assim, a matriz será triangular superior e com 1's na diagonal, pelo que é invertível, provando assim que $\{e_\lambda : \lambda \vdash k\}$ é base de Λ^k .

3. É suficiente mostrar que h_λ gera a base e_μ , uma vez que existem $p(k)$ funções h_λ e $\dim \Lambda^k = p(k)$. Basta então ver que cada e_n é um polinómio em h_k . Pela proposição anterior,

$$H(t)E(-t) = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) \prod_{j \geq 1} \frac{1}{(1 + x_j t)} = 1.$$

Tem-se então

$$1 = H(t)E(-t) = \sum_{n \geq 0} h_n(\mathbf{x}) t^n \sum_{m \geq 0} e_m(\mathbf{x}) (-1)^m t^m$$

pelo que se retirarmos os coeficientes de t^n de ambos os lados, obtém-se

$$0 = \sum_{r=0}^n (-1)^r h_{n-r} e_r$$

Assim, $e_n = h_1 e_{n-1} + h_2 e_{n-2} + \dots$

□

2.4 Funções de Schur

Nesta secção iremos estudar uma outra base de Λ^k , o conjunto das funções de Schur, que têm relevância no contexto das representações de grupos lineares.

Dada uma composição $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ existe um monómio correspondente em $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$

$$\mathbf{x}^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_l^{\mu_l}$$

Dado T um tableau de forma λ e conteúdo μ é também possível associar-lhe um peso,

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^\mu = \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T_{i,j}}$$

Por exemplo, sendo $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 1 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$, então $\mathbf{x}^T = x_1^3 x_2 x_3 x_4^2$

Definição 2.3. Seja λ uma partição. A *função de Schur* associada a λ é dada por

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots) = \sum_T \mathbf{x}^T$$

em que a soma é indexada pelos tableaux semistandard de forma λ .

Definição 2.4. Sejam λ e μ partições, com $\mu \subseteq \lambda$. A *função de Schur enviesada* de forma λ/μ é dada por

$$s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots) = \sum_T \mathbf{x}^T$$

em que a soma é indexada pelos tableaux semistandard enviesados de forma λ/μ .

Exemplo 2.4. Considere-se $\lambda = (2, 1)$. Os tableaux semistandard de forma λ com entradas em $\{1, 2, 3\}$ são

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Assim, a função de Schur associada à partição $(2, 1)$ em Λ_3 é

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$$

Exemplo 2.5. Sejam $\lambda = (2, 1, 1)$ e $\mu = (1)$. Os tableaux semistandard enviesados de forma λ/μ são

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Assim, a função de Schur enviesada de forma $(2, 1, 1)/(1)$ em Λ_3 é

$$s_{(2,1,1)/(1)} = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3$$

Proposição 2.3. *As funções de Schur e as funções de Schur enviesadas são simétricas.*

Para demonstrar este resultado, vamos introduzir uma ferramenta importante, as involuções de Bender-Knuth, apresentadas inicialmente em [2]. Estas involuções actuam sobre o conteúdo de tableaux semistandard (normais ou enviesados) e, consequentemente, são utilizadas para mostrar a simetria das funções de Schur.

Seja T um tableau semistandard com entradas em $\{1, \dots, n\}$ e fixemos um par $(i, i + 1)$ com $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Cada coluna de T contém, ou um par $(i, i + 1)$, ou apenas uma ocorrência de i ou $i - 1$, ou nenhuma ocorrência destas letras. Diz-se que os pares $(i, i + 1)$ que aparecem numa mesma coluna são *fixos*, e que as restantes entradas de i e $i + 1$ (i.e., aquelas onde na sua coluna não existem ocorrências de $i + 1$ e i , respectivamente) são *livres*.

Exemplo 2.6. No seguinte tableau, estão assinaladas as entradas livres para o par $(2, 3)$.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Note-se que todas as entradas livres num tableau semistandard devem aparecer em colunas consecutivas. Caso aparecesse um par fixo entre duas entradas livres consecutivas, ter-se-ia

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & i & b \\ \hline i+1 & i+1 & i+1 \\ \hline \end{array}$$

com $a < i < b$. Como o tableau é semistandard, ter-se-ia $b < i + 1$.

Definição 2.5 (Involuções de Bender-Knuth, [2]). Seja T um tableau semistandard com entradas em $\{1, \dots, n\}$ e fixemos um par $(i, i + 1)$, com $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Definimos as aplicações $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ entre tableaux semistandard da mesma forma, em que, para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, o tableau $\sigma_i(T) = T'$ é construído do seguinte modo:

1. Se $T_{k,j} \neq i, i + 1$ ou se $T_{k,j}$ não pertencer a um par fixo, $T'_{k,j} = T_{k,j}$.
2. Caso contrário, e uma vez que as entradas livres devem aparecer em colunas consecutivas, suponhamos que numa dada linha k aparecem s_k ocorrências de i , seguidas de t_k ocorrência de $i + 1$, formando uma sequência de $s_k + t_k$ caixas. A sequência correspondente na linha k de T' deve ser preenchida com t_k ocorrências de i e com s_k ocorrências de $i + 1$.

Exemplo 2.7. Com o tableau do exemplo anterior, tem-se

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\sigma_2} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Lema 2.2. *Seja T um tableau semistandard com entradas em $\{1, \dots, n\}$. Então, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, as aplicações σ_i são involuções, às quais chamamos involuções de Bender-Knuth, e o tableau $\sigma_i(T)$ é semistandard e com a mesma forma de T .*

Demonstração. Por construção, é evidente que $\sigma_i^2 = id$, para qualquer $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Pela definição de entrada livre, o tableau $\sigma_i(T)$ é semistandard e tem a mesma forma de T . \square

Podemos agora provar a proposição 2.3.

Demonstração. Uma vez que qualquer permutação é composição de transposições, é suficiente mostrar que

$$(i, i+1)s_\lambda(\mathbf{x}) = s_\lambda(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

A acção das involuções de Bender-Knuth num tableau corresponde à aplicação de uma transposição $(i, i+1)$ ao seu conteúdo, pelo que acção (2.2) do grupo simétrico mantém invariantes as funções de Schur. \square

Dadas λ partição e μ composição, definimos os *números de Kostka* $K_{\lambda, \mu}$ como sendo o número de tableaux semistandard de forma λ e conteúdo μ . Dadas partições λ e μ tais que $\mu \subseteq \lambda$ e ν composição, os *números de Kostka enviesados* são iguais ao número de tableaux semistandard de forma λ/μ e conteúdo ν .

Proposição 2.4. *Sejam λ e μ partições, tais que $\mu \subseteq \lambda$. Então,*

$$\begin{aligned} s_\lambda &= \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda, \mu} m_\mu \\ s_{\lambda/\mu} &= \sum_{\nu} K_{\lambda/\mu, \nu} m_\nu \end{aligned}$$

Demonstração. Pela definição de função de Schur, tem-se

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu} \mathbf{x}^\mu$$

em que a soma é ao longo de todas as composições μ de $|\lambda|$. Como s_λ é simétrica, podemos então considerar a soma nas partições, tendo-se então

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu} m_\mu. \tag{2.3}$$

Mostremos agora que $K_{\lambda, \mu} = 0$ se $\lambda \not\trianglelefteq \mu$ e que $K_{\lambda, \lambda} = 1$. Se $K_{\lambda, \mu} \neq 0$, considere-se um tableau T semistandard de forma λ e conteúdo μ . Como T é estritamente crescente nas colunas, todas as ocorrências de $1, \dots, i$ devem estar nas linhas $1, \dots, i$, pelo que

$$\mu_1 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$$

isto é, $\mu \trianglelefteq \lambda$. Se $\lambda = \mu$, então existe um único tableau semistandard de forma e conteúdo λ , o tableau cuja linha i tem todas as entradas iguais a i . \square

Dadas partições λ e μ e uma composição ν , definimos os *números de Kostka enviesados* $K_{\lambda/\mu, \nu}$ como sendo iguais ao número de tableaux semistandard de forma λ/μ e conteúdo ν . Assim, tem-se uma identidade análoga a (2.3)

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} K_{\lambda/\mu, \nu} m_{\nu} \quad (2.4)$$

Corolário 2.1. *O conjunto $\{s_{\lambda} : \lambda \vdash k\}$ é uma \mathbb{Z} -base de Λ^k .*

Uma vez que Λ^k é um anel, o produto de duas funções de Schur é uma função simétrica. Assim, dadas partições μ e ν , o produto $s_{\mu} s_{\nu}$ está em Λ^k , pelo que pode ser escrito na base $\{s_{\lambda} : |\lambda| = |\mu| + |\nu|\}$

$$s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} c_{\mu, \nu}^{\lambda} s_{\lambda} \quad (2.5)$$

Os coeficientes $c_{\mu, \nu}^{\lambda}$ são chamados *coeficientes de Littlewood-Richardson*. No capítulos seguintes, serão apresentadas algumas interpretações combinatórias destes coeficientes.

2.4.1 Produto interno de Hall e a Identidade de Cauchy

Nesta secção vamos estudar alguns resultados sobre o único produto interno que torna as funções de Schur numa base ortonormada e concluir que os coeficientes de Littlewood-Richardson estão relacionados com as funções de Schur enviesadas.

Considere-se em Λ^k a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k \times \Lambda^k \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$\langle h_{\lambda}, m_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda, \mu} \quad (2.6)$$

para quaisquer partições λ e μ .

Lema 2.3. *A forma bilinear definida por (2.6) é um produto interno, ao qual chamamos produto interno de Hall.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a forma bilinear é simétrica e definida positiva para uma qualquer base de Λ^k . Tem-se

$$\begin{aligned} \langle h_{\lambda}, h_{\mu} \rangle &= \langle h_{\lambda}, \sum A_{\mu, \nu} m_{\nu} \rangle \\ &= \sum A_{\mu, \nu} \langle h_{\lambda}, m_{\nu} \rangle \\ &= \sum A_{\mu, \nu} \delta_{\lambda, \nu} = A_{\mu, \lambda} \end{aligned}$$

e pelo lema 2.1, $A_{\mu, \lambda} = A_{\lambda, \mu}$.

Tem-se ainda $\langle h_{\lambda}, h_{\lambda} \rangle = A_{\lambda, \lambda} \geq 0$ e claramente $\langle 0, 0 \rangle = 0$. E se $\langle h_{\lambda}, h_{\lambda} \rangle = 0$, pela definição de $A_{\lambda, \lambda}$ tem-se $\lambda = \emptyset$, pelo que $h_{\lambda} = 0$. \square

Note-se que o produto interno de Hall torna duais as bases $\{h_{\lambda}\}$ e $\{m_{\lambda}\}$. O seguinte resultado apresenta uma condição necessária e suficiente para que duas bases de Λ^k sejam duais uma da outra. Em particular, permite também determinar se uma dada base é ortonormada. A sua demonstração é simples e será aqui omitida, podendo ser encontrada em [26] ou [19].

Proposição 2.5. *Sejam f_λ, g_μ bases de Λ^k . Então, $\langle f_\lambda, g_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$ se e só se $\sum_\lambda f_\lambda(\mathbf{x})g_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1-x_i y_j}$.*

Vamos agora deduzir uma identidade semelhante às da proposição 2.2, envolvendo as funções de Schur – a identidade de Cauchy. Para tal, traduzimos para a linguagem das funções geradoras os resultados do capítulo anterior referentes à correspondência RSK. Esta identidade estabelece uma relação entre funções de Schur normais e enviesadas.

Sejam $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$ e $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots$ famílias de indeterminadas independentes. Dada uma permutação generalizada π , vamos associar-lhe um peso do seguinte modo:

$$wt(\pi) = \mathbf{x}^{\hat{\pi}} \mathbf{y}^{\tilde{\pi}}$$

Por exemplo, dado $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtém-se

$$wt(\pi) = x_1^3 x_2 x_3^2 y_1^3 y_2^2 y_3$$

Note-se que se $\binom{i}{j}$ ocorrer k vezes na permutação generalizada, o monómio $x_i^k y_j^k$ ocorre no peso, pelo que a função geradora vem dada por

$$\sum_{\pi} wt(\pi) = \prod_{i,j \geq 1} \sum_{k \geq 0} x_i^k y_j^k = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1-x_i y_j}$$

Defina-se agora, para pares de tableaux semistandard da mesma forma,

$$wt(T, U) = \mathbf{x}^U \mathbf{y}^T = \mathbf{x}^{cont U} \mathbf{y}^{cont T}$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \sum_{T,U} wt(T, U) &= \sum_{\lambda} \left(\sum_{sh U=\lambda} \mathbf{x}^U \right) \left(\sum_{sh T=\lambda} \mathbf{y}^T \right) \\ &= \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}) s_{\lambda}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Uma vez que a correspondência RSK preserva os conteúdos, tem-se que

$$\sum_{T,U} wt(T, U) = \sum_{\pi} wt(\pi).$$

Assim, fica deduzida a seguinte igualdade, conhecida como *identidade de Cauchy*.

Teorema 2.2 (Identidade de Cauchy).

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}) s_{\lambda}(\mathbf{y}) = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1-x_i y_j}.$$

Corolário 2.2. *A base das funções de Schur $\{s_{\lambda}\}$ é uma base ortonormada, isto é, $\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$*

Vamos agora mostrar a relação entre funções de Schur normais e enviesadas. Começamos por enunciar um lema.

Lema 2.4. Consideremos $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots$ indeterminadas independentes (e independentes de x_1, x_2, \dots). Então,

$$s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} s_\mu(\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y})$$

Demonstração. Podemos encarar $s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como a enumeração dos preenchimentos do diagrama de forma λ com letras do alfabeto $\{1 < 2 < \dots < 1' < 2' < \dots\}$. As letras da forma i' são maiores que qualquer letra da forma j pelo que as letras j vão formar um tableau μ no canto superior esquerdo de λ (e portanto, contido em λ). As letras i' vão preencher a parte correspondente a λ/μ . Assim, $\sum_{\mu \subseteq \lambda} s_\mu(\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y})$ é a função geradora para estes tableaux. \square

Uma vez que as funções de Schur enviesadas são simétricas, também é possível representá-las na base das funções de Schur normais. Na proposição que se segue, veremos que os coeficientes que aparecem nesse desenvolvimento são os coeficientes de Littlewood-Richardson, definidos em (2.5).

Proposição 2.6. Sejam λ, μ e ν partições tais que $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$. Então,

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu, \nu}^{\lambda} s_{\nu}. \quad (2.7)$$

Demonstração. Seja $\mathbf{z} = z_1, z_2, \dots$ um família variáveis independentes (e independentes de \mathbf{x} e \mathbf{y}). Tem-se, pelo lema 2.4 e pela identidade de Cauchy,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \mu} s_\mu(\mathbf{x}) s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y}) s_\lambda(\mathbf{z}) &= \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) s_\lambda(\mathbf{z}) \\ &= \prod_{i, j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i z_j} \frac{1}{1 - y_i z_j} \\ &= \left(\sum_{\mu} s_\mu(\mathbf{x}) s_\mu(\mathbf{z}) \right) \left(\sum_{\nu} s_\nu(\mathbf{y}) s_\nu(\mathbf{z}) \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu} s_\mu(\mathbf{x}) s_\nu(\mathbf{y}) s_\mu(\mathbf{z}) s_\nu(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{\lambda, \mu, \nu} s_\mu(\mathbf{x}) s_\nu(\mathbf{y}) c_{\mu, \nu}^{\lambda} s_\lambda(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Como as funções de Schur são uma base, dados λ e μ tem-se, para todo o \mathbf{y} ,

$$s_{\lambda/\mu}(\mathbf{y}) = \sum_{\nu} c_{\mu, \nu}^{\lambda} s_\nu(\mathbf{y}).$$

\square

Note-se ainda que, uma vez que o produto interno de Hall torna ortonormada a base das funções de Schur, é possível afirmar que

$$c_{\mu, \nu}^{\lambda} = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle \quad (2.8)$$

2.4.2 Determinantes de Jacobi-Trudi

Nesta secção será apresentada uma outra definição das funções de Schur, utilizando determinantes envolvendo as bases h_λ e e_λ . Estes determinantes foram apresentados pela primeira vez por Jacobi, nos anos 40, tendo sido simplificados mais tarde por Trudi ([23]).

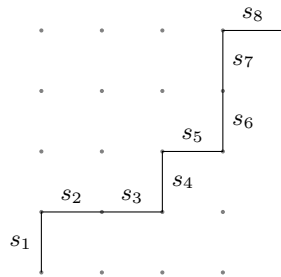
Teorema 2.3. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ uma partição. Então,*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})$$

$$s_{\lambda'} = \det(e_{\lambda_i - i + j})$$

A prova que é de seguida apresentada baseia-se num método apresentado por Lindström (1973), que foi também descoberto independentemente por Gessel e Viennot. A ideia principal desta demonstração é que tanto tableaux como determinantes podem ser encarados como caminhos em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

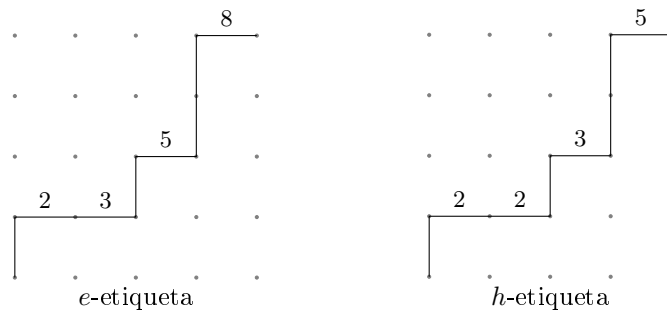
Demonstração. Consideremos o reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e consideremos os caminhos, possivelmente infinitos, $p = s_1 s_2 \dots$, em que cada passo s_i tem comprimento unitário e se desloca para Norte, ou para Este.



Vamos etiquetar os passos que vão para Este, de duas maneiras:

e-etiqueta: $L(s_i) = i$.

h-etiqueta: $\check{L}(s_i) = (\text{número de } s_j \text{ para Norte anteriores a } s_i) + 1$.



É necessário agora estender $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com pontos no infinito. Para cada $x \in \mathbb{Z}$, acrescentemos um ponto (x, ∞) acima de todos os pontos na linha vertical de abcissa x . Assume-se que um caminho só pode atingir um ponto (x, ∞) se tomar infinitos

passos consecutivos para Norte. Se um caminho p se iniciar num ponto u e terminar num ponto v , escrevemos $u \xrightarrow{p} v$.

As duas etiquetas anteriores vão dar origem a dois pesos dos caminhos. Se p for um caminho com um número finito de passos, defina-se

$$\mathbf{x}^p = \prod_{s_i \in p} x_{L(s_i)}$$

$$\check{\mathbf{x}}^p = \prod_{s_i \in p} x_{\check{L}(s_i)}$$

Note-se que, pela definição de $L(s_i)$, dado um caminho $p = s_1, s_2, \dots$ tem-se sempre $L(s_1) < L(s_2) < \dots$. Analogamente, tem-se $\check{L}(s_1) \leq \check{L}(s_2) \leq \dots$. Assim,

$$e_n = \sum_p \mathbf{x}^p$$

$$h_n = \sum_p \check{\mathbf{x}}^p$$

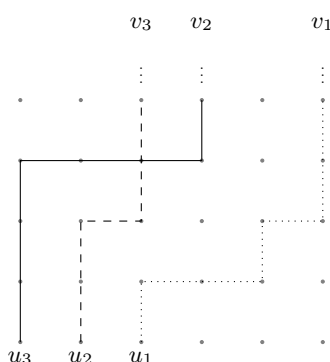
em que as somas são ao longo de caminhos $(a, b) \xrightarrow{p} (a+n, \infty)$, a partir de um ponto inicial (a, b) fixo.

Fixem-se u_1, \dots, u_l e v_1, \dots, v_l pontos iniciais e finais, respectivamente. Considere-se a família de caminhos $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_l)$ em que, para cada i , $u_i \xrightarrow{p_i} v_{\pi(i)}$, para alguma permutação $\pi \in S_l$. Novamente, podemos definir pesos para esta família:

$$\mathbf{x}^{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^l x^{p_i}$$

$$\check{\mathbf{x}}^{\mathcal{P}} = \prod_{i=1}^l \check{x}^{p_i}$$

Defina-se também o *signal* de \mathcal{P} , como sendo $(-1)^{\mathcal{P}} = \text{sgn}(\pi)$.



Neste exemplo, tem-se $(-1)^{\mathcal{P}} = \text{sgn}(1, 2) = -1$.

Estamos agora em condições de mostrar que $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})$. A demonstração para $s_{\lambda'}$ é análoga.

Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ uma partição e definam-se os seguintes pontos iniciais e finais:

$$u_i = (1 - i, 0).$$

$$v_i = (\lambda_i - i + 1, \infty).$$

Com esta escolha, tem-se

$$h_{\lambda_i - i + j} = \sum_{u_j \xrightarrow{p} v_i} \tilde{\mathbf{x}}^p$$

pelo que o determinante vem dado por

$$\begin{aligned} \det(h_{\lambda_i - i + j}) &= \sum_{\pi \in S_l} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^l h_{\lambda_i - i + \pi(i)} \\ &= \sum_{\pi \in S_l} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^l \sum_{u_{\pi(i)} \xrightarrow{p} v_i} \tilde{\mathbf{x}}^p \\ &= \sum_{\pi \in S_l} \operatorname{sgn}(-\pi) \prod_{j=1}^l \sum_{u_j \xrightarrow{p} v_{\pi^{-1}(j)}} \tilde{\mathbf{x}}^p \\ &= \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \tilde{\mathbf{x}}^{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

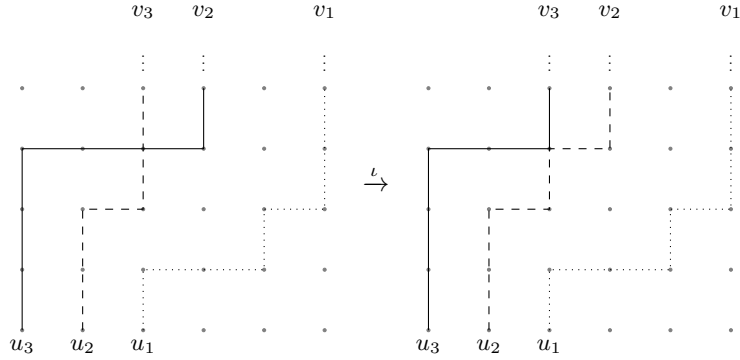
Vejam agora que todos os termos em $\sum_{\mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \tilde{\mathbf{x}}^{\mathcal{P}}$ correspondentes a caminhos que se intersectam (i.e., caminhos que tenham pelo menos um ponto em comum) vão ser cancelados. Vamos construir uma involução que conserve pesos, $\mathcal{P} \xrightarrow{\iota} \mathcal{P}'$, tal que se $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ (o que corresponde aos 1-ciclos de ι), então \mathcal{P} não tem caminhos que se intersectem, e caso $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ (correspondente aos 2-ciclos), então \mathcal{P} e \mathcal{P}' têm sinais contrários. A ideia da construção é, caso \mathcal{P} contenha caminhos que se intersectem, escolher dois e trocar as suas partes finais, isto é, as partes após o ponto de intersecção.

Então, dado \mathcal{P} , defina-se $\iota(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$ do seguinte modo:

1. Se $p_i \cap p_j = \emptyset$, para todo i, j , então $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
2. Caso contrário, encontrar o menor i tal que o caminho p_i intersecta um outro caminho. Seja v_0 a primeira intersecção (isto é, a que estiver mais a sudoeste) de p_i . Seja p_j um caminho que contenha v_0 . Caso existam vários, escolha-se p_j de modo a que j seja minimal. Defina-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &= \mathcal{P} \text{ com } p_i \text{ e } p_j \text{ substituídos por } p'_i \text{ e } p'_j \text{ respectivamente} \\ &\text{com } p'_i = u_i \xrightarrow{p_i} v_0 \xrightarrow{p_j} v_{\pi(j)} \text{ e } p'_j = u_j \xrightarrow{p_j} v_0 \xrightarrow{p_i} v_{\pi(i)} \end{aligned}$$

No exemplo anterior, obtém-se



Com esta construção, $\iota^{-1} = \iota$, pelo que ι é efectivamente uma involução. As famílias livres de intersecções são fixas. Nas famílias com intersecções, trocar dois pontos finais corresponde a compor π com uma transposição, que tem sinal negativo, alterando assim o sinal. Os pesos são também preservados, uma vez que todos os caminhos começam na mesma linha horizontal. Resta então mostrar que $s_\lambda = \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \tilde{\mathbf{x}}^{\mathcal{P}}$, em que a soma é agora ao longo das famílias livres de intersecções.

Pela maneira como foram escolhidos os pontos iniciais e finais, uma família \mathcal{P} vai ser livre de intersecções se e só se $\pi = id$. Então, $(-1)^{|\mathcal{P}|} = 1$ e $u_i \xrightarrow{p_i} v_i$, para todo o i . Mostremos que estas famílias estão em bijecção com os tableaux semistandard.

Dada \mathcal{P} , basta considerar as h -etiquetas do i -ésimo caminho e colocá-las por ordem fracamente crescente na linha i de um diagrama de Young T . Pela maneira como são escolhidos os pontos iniciais e finais, é claro que T vai ter forma λ – como existem l caminhos, o diagrama terá l linhas, e como a linha i tem tantas caixas como a distância-Este percorrida, resulta em $(\lambda_i - i + 1) - (1 - i) = \lambda_i$ caixas. As linhas são, por construção, fracamente crescentes. E as colunas são estritamente crescentes, uma vez que, para garantir que não existam intersecções nos caminhos, a j -ésima viragem para Este do caminho p_{i+1} tem de estar acima da correspondente no caminho p_i .

Dado um tableau T semistandard, é também simples construir \mathcal{P} . Os pontos iniciais e finais são definidos como anteriormente. E os caminhos obtêm-se usando as entradas de T como h -etiquetas.

Tem-se então

$$\det(h_{\lambda_i - i + j}) = \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}|} \tilde{\mathbf{x}}^{\mathcal{P}} = s_\lambda(\mathbf{x}).$$

□

2.4.3 Quociente de alternantes de Schur

Vamos agora apresentar a definição original de polinómio de Schur apresentada por Schur, em 1901, que envolve um quociente de dois determinantes.

Consideremos novamente o anel dos polinómios simétricos em l variáveis, Λ_l , com $l \geq l(\lambda)$, para determinada partição λ . Foi visto que Λ_l era o conjunto dos polinómios

de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_l]$ fixos pela acção de S_l , $\pi f(x_1, \dots, x_l) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(l)})$. Diz-se que um polinómio $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_l]$ é *anti-simétrico* se $\pi f = \text{sgn}(\pi)f$, isto é, se $f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(l)}) = \text{sgn}(\pi)f(x_1, \dots, x_l)$. Dado um monómio $\mathbf{x}^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_l^{\mu_l}$, com μ composição, é possível torná-lo anti-simétrico.

Definição 2.6. Seja μ uma composição e considere-se o monómio $\mathbf{x}^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_l^{\mu_l}$. O seu *alternante* é dado por

$$a_\mu(x_1, \dots, x_l) = \sum_{\pi \in S_l} \text{sgn}(\pi) \pi \mathbf{x}^\mu$$

Tem-se que a_μ é efectivamente anti-simétrica. Dada $\pi \in S_l$,

$$\begin{aligned} \pi a_\mu(x_1, \dots, x_l) &= a_\mu(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_l} \text{sgn}(\sigma) \sigma(x_{\pi(1)}^{\mu_1} \dots x_{\pi(l)}^{\mu_l}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_l} \text{sgn}(\sigma) x_{\pi\sigma(1)}^{\mu_1} \dots x_{\pi\sigma(l)}^{\mu_l} \\ &= \sum_{\tau \in S_l} \text{sgn}(\pi^{-1}) \text{sgn}(\tau) x_{\tau(1)}^{\mu_1} \dots x_{\tau(l)}^{\mu_l} \\ &= \text{sgn}(\pi) a_\mu(x_1, \dots, x_l) \end{aligned}$$

Também é possível escrever

$$a_\mu = \det(x_i^{\mu_j}) \tag{2.9}$$

com $1 \leq i, j \leq l$, uma vez que se tem

$$\begin{aligned} \det(x_i^{\mu_j}) &= \sum_{\sigma \in S_l} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^l x_i^{\mu_{\sigma(i)}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_l} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^l x_{\sigma^{-1}(j)}^{\mu_j} \\ &= \sum_{\tau \in S_l} \text{sgn}(\tau) x_{\tau_1}^{\mu_1} \dots x_{\tau_l}^{\mu_l} \\ &= \sum_{\tau \in S_l} \text{sgn}(\tau) \tau \mathbf{x}^\mu \end{aligned}$$

Considerando a composição $\delta = (l-1, l-2, \dots, 1, 0)$, define-se o *determinante de Vandermonde* como sendo

$$a_\delta = \det(x_i^{l-j}) = \prod_{1 \leq i < j \leq l} (x_i - x_j)$$

Se λ for uma partição com duas partes iguais, o determinante em (2.9) tem com duas colunas iguais, pelo que $a_\lambda = 0$. Assim, consideremos apenas as partições que têm todas as partes distintas, que serão todas da forma $\lambda + \delta$, com λ partição arbitrária (somadas componente a componente). Se num alternante se tiver $x_i = x_j$, então vamos ter duas linhas iguais. Assim, $a_{\lambda+\delta}$ é divisível por a_δ , pelo que o quociente $a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ é efectivamente um polinómio. Sendo um quociente de dois polinómios

anti-simétricos, os sinais cancelam e o resultado é um polinómio simétrico. Mais à frente veremos que este quociente coincide com s_λ .

Para $1 \leq j \leq l$, denote-se por $e_n^{(j)}$ a função simétrica elementar nas variáveis $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_l$.

Lema 2.5. *Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ uma composição e considerem-se as matrizes $l \times l$*

$$A_\mu = (x_j^{\mu_i}), \quad H_\mu = (h_{\mu_i - l + j}), \quad E = (-1)^{l-i} e_{l-i}^{(j)}.$$

Então, $A_\mu = H_\mu E$.

Demonstração. Consideremos a função geradora de $e_n^{(j)}$,

$$E^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{l-1} e_n^{(j)} t^n = \prod_{i \neq j} (1 + x_i t)$$

Então, $H(t)E^{(j)}(-t) = \sum_{i=1}^l \frac{1}{1+x_i t} \prod_{i \neq j} (1 - x_i t) = \frac{1}{1-x_j}$. Retirando o coeficiente de t^{μ_i} de ambos os membros, tem-se

$$\sum_{k=1}^l h_{\mu_i - l + k} (-1)^{(l-k)} e_{l-k}^{(j)} = x_j^{\mu_i}$$

□

Proposição 2.7. *Seja λ uma partição com $l(\lambda) = l$. Então,*

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$$

Demonstração. Pelo lema anterior, $A_\mu = H_\mu E$, pelo que

$$\det(A_\mu) = \det(H_\mu) \det(E). \quad (2.10)$$

Por (2.9), $\det(A_\mu) = a_\mu$.

Se $\mu = \delta$, então $H_\delta = (h_{\delta_i - l + j}) = (h_{l-i-l+j}) = (h_{j-i})$. Então H_δ é uma matriz unitriangular, pelo que $|H_\delta| = 1$. Assim, substituindo em (2.10), vem que $|E| = a_\delta$.

Seja agora $\mu = \lambda + \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} &= \frac{\det(A_{\lambda+\delta})}{\det(E)} \\ &= \det(H_{\lambda+\delta}) \\ &= \det(h_{\lambda_i + l - i - l + j}) \\ &= \det(h_{\lambda_i - i + j}) = s_\lambda \end{aligned} \quad (2.11)$$

pela fórmula de Jacobi-Trudi. □

REGRA DE LITTLEWOOD-RICHARDSON

No capítulo anterior mostrámos que as funções de Schur constituem uma base ortonormada de Λ^k para o produto interno de Hall. Em particular, definimos os coeficientes de Littlewood-Richardson, como sendo os coeficientes que aparecem na expansão nessa base, não só do produto de funções de Schur normais, como também de uma função de Schur enviesada.

Neste capítulo será apresentada a regra de Littlewood-Richardson (LR), que se baseia numa interpretação combinatória dada por Littlewood e Richardson [18] dos coeficientes de LR, e permite determiná-los através da contagem de certos tableaux semistandard enviesados. Em [22], Robinson publica uma primeira demonstração desta regra, que apresentava algumas falhas. Uma demonstração completa foi apresentada por Schützenberger [25] e por Thomas [28], no final dos anos 70, após o desenvolvimento da teoria associada à correspondência RSK e ao *jeu de taquin*.

3.1 Equivalência Dual

Nesta secção faremos uma breve referência ao conceito de equivalência dual e alguns resultados relacionados. A equivalência dual foi inicialmente apresentada por Haiman, em 1992, no contexto da teoria associada ao *jeu de taquin*, sendo também utilizada numa demonstração da regra de Littlewood-Richardson. As demonstrações nesta secção serão omitidas, podendo ser encontradas em [14] e [23].

Definição 3.1. Sejam P e Q tableaux enviesados. Diz-se que P e Q são *dualmente equivalentes*, denotando-se $P \stackrel{*}{\cong} Q$, se após a aplicação da mesma sequência de deslizamentos a ambos se obtiverem tableaux com a mesma forma.

Exemplo 3.1. Mostremos que os seguintes tableaux de forma $(2, 2)/(1)$ são dualmente equivalentes

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Assumimos que não se aplica a sequência vazia de deslizamentos. Consideramos que um deslizamento é trivial se em nenhum dos passos do algoritmo é necessário escolher entre duas caixas; nesse caso, é evidente que as formas dos tableaux obtidos são iguais.

Suponhamos que o primeiro deslizamento é para a frente. A única caixa onde é possível aplicar o algoritmo é $(1, 1)$, resultando nos tableaux

$$j_{(1,1)}(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad j_{(1,1)}(Q) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Partindo destes, o único algoritmo aplicável é o deslizamento para trás. Dos três cantos exteriores possíveis, $(3, 1)$ e $(1, 3)$ são casos triviais. E a aplicação na caixa $(2, 2)$ resulta novamente nos tableaux iniciais. Assim, podemos assumir que a sequência se inicia com um deslizamento para trás.

As caixas possíveis às quais é possível aplicar o deslizamento para trás são $(3, 1)$ e $(1, 3)$.

1. Aplicando o deslizamento para trás à caixa $(3, 1)$ obtêm-se os tableaux

$$j^{(3,1)}(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad j^{(3,1)}(Q) = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

Partindo destes tableaux existem três opções: aplicar o deslizamento para a frente à caixa $(2, 1)$, voltando aos tableaux P e Q ; o deslizamento para trás à caixa $(1, 3)$, que é trivial; ou o deslizamento para trás à caixa $(3, 2)$, resultando nos tableaux¹

$$j^{(3,2)}j^{(3,1)}(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad j^{(3,2)}j^{(3,1)}(Q) = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

A partir daqui, a única caixa à qual possível aplicar um deslizamento para trás é em $(4, 1)$, que é trivial. O deslizamento para a frente aplicado à caixa $(1, 2)$ é também trivial. Já na caixa $(2, 1)$ obtêm-se tableaux com a mesma forma e prova-se facilmente que os tableaux daí obtidos têm também a mesma forma.

2. Considerando agora o deslizamento para trás aplicado à caixa $(1, 3)$, obtemos os tableaux

$$j^{(3,2)}(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad j^{(1,3)}(Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Analogamente ao que foi feito na alínea anterior, o único deslizamento não trivial é o deslizamento para trás aplicado à caixa $(2, 3)$, resultando nos tableaux

$$j^{(1,3)}j^{(3,2)}(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad j^{(1,3)}j^{(3,2)}(Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & 2 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

E pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, os tableaux daqui obtidos têm sempre a mesma forma.

¹Assinalamos as caixas vazias, para enfatizar que os tableaux obtidos são de forma $(2, 2, 2)/(2, 1)$, pelo que existem dois cantos onde aplicar o deslizamento para a frente.

Exemplo 3.2. Os tableaux $P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$ e $Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 3 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array}$ não são dualmente equivalentes. O algoritmo de deslizamento para a frente aplicado a ambos na caixa (1,2) resulta nos tableaux

$$j_{(1,2)}(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad j_{(1,2)}(Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

Suponhamos que $P \stackrel{*}{=} Q$. Qualquer sequência de deslizamentos (em particular, a sequência vazia) aplicada a ambos os tableaux resulta em tableaux com a mesma forma. Logo, P e Q têm a mesma forma. Tem-se assim o seguinte lema.

Lema 3.1. *Sejam P e Q tableaux tais que $P \stackrel{*}{=} Q$. Se P' e Q' se obtêm de P e Q por uma sequência de deslizamentos, então $P' \stackrel{*}{=} Q'$.*

Enunciamos também a seguinte proposição, que será utilizada numa demonstração da regra de Littlewood-Richardson. A sua demonstração será omitida e pode ser encontrada em ([23] 4.8.12).

Proposição 3.1. *Se T e U são tableaux semistandard normais com a mesma forma, então $T \stackrel{*}{=} U$.*

Sejam agora $\nu \subseteq \mu \subseteq \lambda$ partições e sejam P e Q tableaux standard de formas μ/ν e λ/μ respectivamente. As caixas de Q , ordenadas de forma estritamente crescente pelas suas entradas, determinam uma sequência de deslizamentos para trás em P . Denotamos por $j_Q(P)$ o tableau obtido aplicando essa sequência a P . Se num passo intermédio uma caixa de Q não for um canto exterior, o tableau obtido no passo seguinte fica igual. Defina-se também $v_Q(P)$ como sendo o tableau formado pelas caixas eliminadas durante a construção de $j_Q(P)$, pondo $(v_Q(P))_{i,j} = k$ se a caixa (i,j) foi eliminada quando durante o preenchimento da caixa de Q com k .

Do mesmo modo, as caixas de P , ordenadas de forma estritamente decrescente pelas suas entradas, definem uma sequência de deslizamentos para a frente em Q . O tableau obtido denota-se por $j^P(Q)$. Se existir num passo intermédio uma caixa de P que não seja canto interior no tableau actual, o tableau seguinte fica igual. O tableau $v^P(Q)$ define-se de modo análogo, sendo $(v^P(Q))_{i,j} = k$ se a caixa (i,j) for eliminada quando se preenche a caixa de k em P .

Exemplo 3.3. Sejam $\lambda = (3, 3, 2)$, $\mu = (3, 2)$ e $\nu = \emptyset$, e consideremos os seguintes tableaux de formas μ/ν e λ/μ

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Assinalam-se com \bullet e \times respectivamente as caixas utilizadas no deslizamento para trás e no deslizamento para a frente. As sequências definidas são dadas por:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \bullet \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \bullet & & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 4 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} = j_Q(P) \\ \emptyset & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} = v_Q(P) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \times & 1 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \times \\ \hline & 1 & \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \times & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline & \times \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline \times & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = j^P(Q) \\
 \\
 \emptyset & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 4 \\ \hline & 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} = v^P(Q)
 \end{array}$$

É visível no exemplo que $j_Q(P) = v^P(Q)$ e que $v_Q(P) = j^P(Q)$. Com efeito, estas igualdades são sempre válidas. Uma demonstração para este facto pode ser encontrada em [14].

Vimos anteriormente que o deslizamento para a frente e o deslizamento para trás são algoritmos inversos um do outro. Isto é, se c é um canto interior no qual se aplica um deslizamento para frente, eliminando a caixa d , tem-se

$$j_d j^c(P) = P$$

Do mesmo modo, se d for um canto exterior no qual se aplica um deslizamento para trás e c é a caixa eliminada, tem-se

$$j^c j_d(P) = P$$

Estas expressões podem então ser generalizadas por

$$j^{v_Q(P)} j_Q(P) = P \tag{3.1}$$

$$j_{v^P(Q)} j^P(Q) = Q$$

3.2 Regra de Littlewood-Richardson

Foi visto no capítulo anterior que, a respeito do produto interno de Hall, as funções de Schur s_λ formam uma base ortonormada para o anel Λ^k das funções simétricas de grau k . Em particular, foram apresentadas expressões para o produto de funções de Schur e para funções de Schur enviesadas nessa base, mostrando-se que os coeficientes que aparecem em cada uma são os mesmos.

$$s_\mu s_\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu,\nu}^\lambda s_\lambda \tag{3.2}$$

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu,\nu}^\lambda s_\nu \tag{3.3}$$

Chamámos aos coeficientes $c_{\mu,\nu}^\lambda$ os *coeficientes de Littlewood-Richardson*. A regra de Littlewood-Richardson, que enunciaremos de seguida, fornece uma interpretação combinatória para esses números, em termos de uma subclasse de tableaux semistandard indexados pelas partições (λ, μ, ν) . A demonstração que apresentamos nesta secção é baseada no *jeu de taquin* e corresponde à abordagem das primeiras provas

da regra de Littlewood-Richardson ([25], [28]). Uma outra demonstração será apresentada na secção seguinte. As referências seguidas são essencialmente [10] e [23].

Recordemos que $N(i, u)$ denota o número de ocorrências da letra i na palavra u .

Definição 3.2. Seja w uma palavra no alfabeto $\{1, \dots, n\}$. Diz-se que w é *palavra de Yamanouchi* se, para todo o seu sufixo u , $N(i, u) \geq N(i+1, u)$, para todo o $1 \leq i < n$.

Exemplo 3.4. A palavra 2312211 é palavra de Yamanouchi. Mas a palavra 23122221 não é de Yamanouchi, uma vez que no sufixo 221 o número de ocorrências de 2 é maior que o de 1.

Lema 3.2. *Sejam w e w' palavras Knuth-equivalentes. Então, w é palavra de Yamanouchi se e só se w' também o for.*

Demonstração. Consideremos transformações de Knuth elementares.

1. Suponhamos que se tem a seguinte transformação

$$w = u.xyz.v \longrightarrow u.zxy.v = w' \quad (x \leq y < z)$$

É necessário considerar as eventuais trocas nas ocorrências de i 's e $(i+1)$'s consecutivos nos sufixos, para todo o i . Se $x < y < z$, então não existem alterações. Vamos então considerar o caso em que $x = y = i$ e $z = i+1$. Para que qualquer uma das palavras seja palavra de Yamanouchi é necessário que $N(i, v) \geq N(i+1, v)$. Neste caso, ambas são palavras de Yamanouchi.

2. Consideremos agora outra transformação elementar

$$w = u.yxz.v \longrightarrow u.yzx.v = w' \quad (x < y \leq z)$$

Analogamente, o único caso não trivial é $x = i$ e $y = z = i+1$. Neste caso, w e w' serão palavras de Yamanouchi apenas se $N(i, v) > N(i+1, v)$. E tem-se assim que o número de ocorrências de i é maior ou igual ao número de ocorrências de $i+1$, tanto na palavra $yzxv$ como em $yxzv$.

□

Dada uma partição λ , denotamos por $U(\lambda)$ o tableau de forma λ tal que a linha k é constituída por λ_k ocorrências de k . Diz-se que um tableau desta forma é *super-standard*. Por exemplo, para $\lambda = (4, 2, 1, 1)$, tem-se

$$U(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

Dadas partições λ e μ , com $\mu \subseteq \lambda$, denota-se por $\text{Tab}(\lambda/\mu, \nu)$ o conjunto dos tableaux semistandard de forma λ/μ e conteúdo ν , sendo ν uma composição. Diz-se que T é um *tableau de Littlewood-Richardson* (LR) se $T \in \text{Tab}(\lambda/\mu, \nu)$ e $w(T)$ for palavra de Yamanouchi. Neste caso, ν é efectivamente uma partição. Denotamos por $\text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ o conjunto dos tableaux LR de forma λ/μ e conteúdo ν .

Lema 3.3. *Seja S um tableau enviesado de conteúdo ν . S é tableau de Littlewood-Richardson se e só se $Rect(S) = U(\nu)$.*

Demonstração. Considere-se em primeiro lugar o caso em que S é um tableau normal. Nesse caso, para garantir que $w(S)$ é palavra de Yamanouchi, é necessário que a última letra da linha k seja k , para qualquer k . Para que tal aconteça, na primeira linha apenas podem existir ocorrências de 1 (por S ser semistandard). Por indução no número de linhas, prova-se que na linha k só podem existir ocorrências de k , isto é, devem existir μ_k ocorrências de k , pelo que $Rect(S) = S = U(\nu)$.

Para concluir a demonstração, basta agora ver que S é um tableau LR se e só se a sua rectificação for um tableau LR. O deslizamento preserva a Knuth-equivalência, pelo que, pelo lema 3.2 se tem que $w(S)$ é palavra de Yamanouchi se e só se $w(Rect(S))$ também o for. \square

Teorema 3.1 (Regra de Littlewood-Richardson). *Sejam λ, μ e ν partições tais que $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ e seja $c_{\mu,\nu}^\lambda$ o coeficiente de Littlewood-Richardson associado a (λ, μ, ν) . Então,*

$$c_{\mu,\nu}^\lambda = |\text{LR}(\lambda/\mu, \nu)| \quad (3.4)$$

Demonstração. Seja $\tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda = |\text{LR}(\lambda/\mu, \nu)|$. É suficiente encontrar uma aplicação que conserve pesos $T \xrightarrow{j} U$, de tableaux semistandard T de forma λ/μ para tableaux semistandard normais U tais que:

1. O número de tableaux T que se aplicam num dado U de forma ν depende apenas das partições envolvidas (e não de U).
2. O número de tableaux T que se aplicam num dado U é igual a $\tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda$.

Caso exista uma correspondência assim, ter-se-á

$$\begin{aligned} s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x}) &= \sum_T \mathbf{x}^T \\ &= \sum_\nu \tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda \sum_{shU=\nu} \mathbf{x}^U \\ &= \sum_\nu \tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda s_\nu(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sendo a primeira soma ao longo dos tableaux T de forma λ/μ . Pela Proposição 2.6 e atendendo a que as funções de Schur constituem uma base, resulta que

$$\tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda = c_{\mu,\nu}^\lambda.$$

Mostramos de seguida que a aplicação *jeu de taquin* satisfaz as propriedades 1. e 2.

Sejam U e U' tableaux semistandard de forma ν . Vamos definir uma bijecção entre $j^{-1}(U)$ e $j^{-1}(U')$. Seja P um tableau standard de forma μ tal que $j^P(T) = U$. O tableau $v^P(T)$ será de forma λ/μ . Considere-se então a composição

$$T \xrightarrow{j^P} U \xrightarrow{s} U' \xrightarrow{j_{v^P(T)}} T' \quad (3.5)$$

com $T \in j^{-1}(U)$ e $T' \in j^{-1}(U')$, e em que s denota a substituição de U por U' .

Esta aplicação consiste então em transformar T em U por uma sequência de deslizamentos para a frente, substituir U por U' e voltar depois à forma enviesada inicial, aplicando a sequência de deslizamentos para trás definida por $v^P(T)$.

Mostremos que esta aplicação está bem definida. Em primeiro lugar, o tableau T' é efectivamente aplicado em U' , uma vez que os deslizamentos para trás de $j_{v^P(T)}$ são todos reversíveis, e definem os deslizamentos para a frente que transformam T' em U' . Tem-se também que

$$T = j_{v^P(T)} j^P(T) = j_{v^P(T)}(U) \tag{3.6}$$

$$T' = j_{v^P(T)}(U')$$

e uma vez que U e U' têm a mesma forma, pela Proposição 3.1 tem-se $U \stackrel{*}{=} U'$. Assim, pelo Lema 3.1,

$$T \stackrel{*}{=} T' \tag{3.7}$$

pelo que os tableaux T e T' têm a mesma forma.

Afirmamos agora que a aplicação inversa de (3.5) é dada por

$$T' \xrightarrow{j^P} U' \xrightarrow{s} U \xrightarrow{j_{v^P(T')}} T \tag{3.8}$$

Por (3.7), tem-se que os tableaux $v^P(T)$ e $v^P(T')$ são iguais, pelo que

$$j^P(T') = j^P j_{v^P(T)}(U') = j^P j_{v^P(T')}(U') = U'$$

e

$$j_{v^P(T')}(U) = j_{v^P(T')}(U) j^P(T) = j_{v^P(T)} j^P(T) = T$$

Assim, a correspondência definida em (3.5) é uma bijecção.

Para concluir, seja $U_0 = U(\nu)$ o tableau superstandard de forma ν . A palavra $w(U_0)$ é por construção palavra de Yamanouchi. Com efeito, U_0 é o único tableau normal cuja palavra é palavra de Yamanouchi. Pelo Lema 3.2, e uma vez que o deslizamento conserva a Knuth-equivalência, tem-se que o conjunto dos tableaux T de forma λ/μ tais que $j(T) = U_0$ tem cardinalidade $\tilde{c}_{\mu,\nu}^\lambda$. \square

Exemplo 3.5. Calculemos os coeficientes de Littlewood-Richardson que aparecem no produto $s_{(2,1)}s_{(3)}$. Os tableaux λ que aparecem no desenvolvimento têm de ser tais que $|\lambda| = |(2,1)| + |(3)| = 6$. Entre as formas associadas a uma partição de 6, consideremos apenas as que contêm $(2,1)$. Como o conteúdo de cada tableau deve ser (3) , isto é, três ocorrências de 1, são também excluídas as formas enviesadas que tenham mais do que uma caixa por coluna. Ficam então,



Logo,

$$s_{(2,1)}s_{(3)} = s_{(5,1)} + s_{(4,2)} + s_{(4,1,1)} + s_{(3,2,1)}.$$

Exemplo 3.6. Consideremos o produto de funções de Schur $s_{(3,1)}s_{(2,1)}$ e calculemos os coeficientes de Littlewood-Richardson que aparecem no seu desenvolvimento. Os tableaux λ que aparecem no desenvolvimento têm de ser tais que $|\lambda| = |(3,1)| + |(2,1)| = 7$. Dessas formas, apenas interessam aquelas que contêm $(3,1)$. Como o conteúdo deve ser $(2,1)$, são excluídas as formas que têm três caixas numa linha ou numa coluna, por falhar, respectivamente, a condição de ser semistandard e a condição de Yamanouchi. Assim, restam os tableaux

Note-se que a forma $(4,2,1)$ admite dois preenchimentos semistandard e cuja palavra é de Yamanouchi. Assim,

$$s_{(3,1)}s_{(2,1)} = s_{(4,1,1,1)} + s_{(3,2,2)} + s_{(3,2,1,1)} + s_{(3,3,1)} + 2s_{(4,2,1)} + s_{(4,3)} + s_{(5,1,1)} + s_{(5,2)}$$

3.2.1 Outra demonstração

Apresentamos agora outra demonstração da regra de Littlewood-Richardson, utilizando as involuções de Bender-Knuth (utilizadas para mostrar a simetria das funções de Schur). A demonstração é baseada nas demonstrações de Gasharov ([11]) e Stembridge ([27]).

Sejam λ, μ e ν partições, com $\mu \subseteq \lambda$ e tais que $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$. Seja $l = l(\nu)$ e dada uma permutação $\pi \in S_l$, defina-se, para $1 \leq j \leq l = l$

$$\pi(\nu) = \{\nu_{\pi(j)} - \pi(j) + j\} \tag{3.9}$$

Definam-se também os seguintes conjuntos

$$A = \{(\pi, T) : T \in \mathbb{T}(\lambda/\mu, \pi(\nu))\} \tag{3.10}$$

$$B = \{(\pi, T) \in A : w(T) \text{ não é palavra de Yamanouchi reversa}\} \tag{3.11}$$

Uma *palavra de Yamanouchi reversa* é uma palavra w tal que, para qualquer prefixo u , $N(i, u) \geq N(i+1, u)$, para todo o i . É evidente que, sendo $w = w_1 \dots w_n$ e $w^* = w_n \dots w_1$, w é palavra de Yamanouchi se e só se w^* é palavra de Yamanouchi reversa.

Lema 3.4. *Existe uma involução $\phi : B \rightarrow B$, com $\phi(\pi, T) = (\tau, U)$ tal que $\text{sgn}(\pi) = -\text{sgn}(\tau)$*

Demonstração. Seja $(\pi, T) \in B$. Seja $w = w(T) = w_1 \dots w_n$, em que w_1, \dots, w_n são as entradas de T listadas de cima para baixo e da direita para a esquerda. Vamos então analisar os *prefixos* em vez dos sufixos e determinar se a palavra é de Yamanouchi reversa. Denote-se por $w_{\leq j}$ o prefixo de w com j letras, isto é, $w_{\leq j} = w_1 \dots w_j$. Seja

$$r = \min\{j \geq 1 : w_{\leq j} \text{ não é palavra de Yamanouchi reversa}\} \quad (3.12)$$

Então, para certo i , tem-se

$$\begin{aligned} N(i, w_{\leq r-1}) &\geq N(i+1, w_{\leq r-1}) \\ N(i, w_{\leq r}) &< N(i+1, w_{\leq r}) \end{aligned}$$

Logo, $w_r = i+1$. E como $N(i+1, w_{\leq r}) = N(i+1, w_{\leq r-1}) + 1 = N(i, w_{\leq r-1}) + 1$, tem-se também

$$N(i+1, w_{\leq r}) = N(i, w_{\leq r}) + 1 \quad (3.13)$$

Diz-se que uma letra i (respectivamente $i+1$) que aparece em T é livre se não existir nenhuma ocorrência de $i+1$ (respectivamente i) na sua coluna. Suponhamos que w_r está na caixa (k, j) , isto é, está na linha k e coluna j . Mostremos que todas as ocorrências de $i+1$ na linha k que aparecem em $w_{>r} = w_{r+1} \dots w_n$ são livres.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe um i na linha $k-1$ que está numa coluna à esquerda da coluna j . Como o tableau tem colunas estritamente crescentes, na linha $k-1$ deve aparecer, por cima de cada $i+1$, alguma letra estritamente menor que $i+1$. Em particular, sendo $x = T_{k-1, j}$, tem-se $x < i+1$. Como as linhas são fracamente crescentes, e já existe um i na linha $k-1$, numa coluna à esquerda de j , tem-se $i \leq x < i+1$, pelo que $x = i$, contrariando a definição de entrada livre. Logo, todas as ocorrências de $(i+1)$ na linha k que estejam fracamente à esquerda da coluna j são livres. Assim, todos os $(i+1)$'s na linha k que estejam estritamente à direita da coluna j são *não* livres.

Seja w_s a letra i mais à direita na linha $k-1$ que fica acima da ocorrência de $(i+1)$ em k . Então, todos os $(i+1)$'s correspondentes a $w_r \dots w_s$ devem aparecer emparelhados com i 's, de modo a que

$$N(i+1, w_r \dots w_s) \leq N(i, w_r \dots w_s) \quad (3.14)$$

Como se tem

$$\begin{aligned} N(i+1, w_{\leq r}) &= N(i+1, w_{\leq s-1}) + N(i+1, w_r \dots w_s) \\ N(i, w_{\leq r}) &= N(i, w_{\leq s-1}) + N(i, w_r \dots w_s) \end{aligned}$$

Por (3.13) e (3.14), tem-se que

$$N(i+1, w_{\leq s-1}) > N(i, w_{\leq s-1}) \quad (3.15)$$

e portanto w_{s-1} não pode ser palavra de Yamanouchi reversa. Mas, por escolha de s , a caixa de w_{s-1} deve aparecer acima e à esquerda da caixa de w_r . Pela leitura da palavra, vem que $s-1 < r$, o que contradiz o facto de r ser mínimo. Logo, todas as ocorrências $(i+1)$ na linha k que aparecem em $w_{>r}$ (isto é, à esquerda de w_r) são livres.

Vamos então construir a involução ϕ . Dados $(\pi, T) \in B$, para cada i seja,

$$\begin{aligned}\tau &= \pi \circ (i, i+1) \\ U &= \sigma_i(T)\end{aligned}$$

sendo σ_i a involução de Bender-Knuth (para i) já estudada na secção 2.4. O tableau U é semistandard e tal que, sendo $r = \min\{j \geq 1 : w(Q)_{\leq j} \text{ não é palavra de Yamanouchi reversa}\}$, $w(Q)_r = i+1$.

Como se viu anteriormente, todas as ocorrências de $(i+1)$ na linha k de T que aparecem em $w_{>r}$ são livres. Logo, aplicando a involução σ_i ,

$$\begin{aligned}N(i, w(Q)_{>r}) &= N(i+1, w(T)_{>r}) \\ N(i+1, w(Q)_{>r}) &= N(i, w(T)_{>r})\end{aligned}$$

Seja $1 \leq j \leq n$. Então, por (3.9),

1. Para $j = i$.

$$\begin{aligned}(\pi \circ (i, i+1))(\nu)_i &= \nu_{\pi \circ (i, i+1)(i)} - \pi \circ (i, i+1)(i) + i \\ &= \nu_{\pi(i+1)} - \pi(i+1) + i \\ &= \nu_{\pi(i+1)} - \pi(i+1) + i + 1 - 1 \\ &= \pi(\nu)_{i+1} - 1\end{aligned}$$

2. Para $j = i+1$, mostra-se do mesmo modo que

$$(\pi \circ (i, i+1))(\nu)_{i+1} = \pi(\nu)_i + 1$$

3. Para $j \neq i, i+1$, tem-se $(i, i+1)(j) = j$, pelo que

$$(\pi \circ (i, i+1))(\nu)_j = \pi(\nu)_j$$

Tem-se assim,

$$\tau(\nu)_j = (\pi \circ (i, i+1))(\nu)_j = \begin{cases} \pi(\nu)_{i+1} - 1 & \text{se } j = i \\ \pi(\nu)_i + 1 & \text{se } j = i+1 \\ \pi(\nu)_j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostremos que o conteúdo de U é dado por $\tau(\nu)$. Apresentamos uma demonstração apenas para a letra i . Os casos $i+1$ e $j \neq i, i+1$ são análogos. Tem-se então,

$$\begin{aligned}N(i, w(U)) &= N(i, w(U)_{\leq r}) + N(i, w(U)_{>r}) \\ &= N(i, w(U)_{\leq r}) + N(i+1, w(T)_{>r}) \\ &= N(i+1, w(U)_{\leq r}) - 1 + N(i+1, w(T)_{>r}) \\ &= \pi(\nu)_{i+1} \\ &= \tau(\nu)_i\end{aligned}$$

Assim, podemos definir $\phi(\pi, T) = (\tau, U)$. Se aplicarmos novamente a involução de Bender-Knuth em U , obtém-se T . E como as transposições têm sinal negativo, tem-se

$$\text{sgn}(\tau) = -\text{sgn}(\pi)$$

□

Podemos agora concluir a demonstração da Regra de Littlewood-Richardson. Pela fórmula de Jacobi-Trudi, tem-se

$$s_\nu = \sum_{\pi \in S_l} \text{sgn}(\pi) h_{\pi(\nu)} \quad (3.16)$$

Escrevendo $s_{\lambda/\mu}$ na base das funções simétricas monomiais,

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\sigma} K_{\lambda/\mu, \sigma} m_\sigma \quad (3.17)$$

Logo, por (3.16) e (3.17), tem-se

$$\begin{aligned} c_{\mu, \nu}^\lambda &= \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle \\ &= \langle \sum_{\sigma} K_{\lambda/\mu, \sigma} m_\sigma, \sum_{\pi \in S_l} \text{sgn}(\pi) h_{\pi(\nu)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\pi \in S_l} K_{\lambda/\mu, \sigma} \text{sgn}(\pi) \langle m_\sigma, h_{\pi(\nu)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\pi \in S_l} K_{\lambda/\mu, \sigma} \text{sgn}(\pi) \delta_{\sigma, \pi(\nu)} \\ &= \sum_{\pi \in S_l} \text{sgn}(\pi) K_{\lambda/\mu, \pi(\nu)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_{\mu, \nu}^\lambda &= \sum_{\pi \in S_l} \text{sgn}(\pi) |\text{Tab}(\lambda/\mu, \pi(\nu))| \\ &= \sum_{(\pi, T) \in A} \text{sgn}(\pi) \\ &= \sum_{(\pi, T) \in A \setminus B} \text{sgn}(\pi) + \sum_{(\pi, T) \in B} \text{sgn}(\pi) \end{aligned}$$

Pelo lema 3.4, $\sum_{(\pi, T) \in B} \text{sgn}(\pi) = 0$. Para concluir, observamos que o conjunto $A \setminus B$ é, para cada $\pi \in S_n$, o conjunto dos tableaux de forma λ/μ , conteúdo $\pi(\nu)$ e tais que a sua palavra é palavra de Yamanouchi.

ESTRUTURAS COMBINATÓRIAS ASSOCIADAS AOS COEFICIENTES DE LITTLEWOOD-RICHARDSON

As estruturas combinatórias estudadas neste capítulo são contadas pelos coeficientes de Littlewood-Richardson e resultam de abordagens recentes a esta problemática. Faremos uma breve introdução sobre cada estrutura e apresentaremos bijecções entre essas famílias.

4.1 Triângulos de Littlewood-Richardson

Nesta seção estabelecemos uma bijecção entre tableaux e matrizes. Veremos também como exprimir certas propriedades de tableaux em linguagem matricial; com efeito, veremos que aos tableaux de Littlewood-Richardson correspondem matrizes triangulares, o que motiva a definição de outra estrutura - os triângulos de Littlewood-Richardson, que estão em bijecção com os tableaux LR. As referências para esta seção são [7], [8], e [21].

4.1.1 Matriz associada de um tableau

Nesta seção, estabelecemos uma bijecção entre tableaux e matrizes. Mais geralmente, o estudo de tableaux pode ser feito apenas recorrendo à teoria das suas matrizes associadas, como é feito em [7].

Definição 4.1. Seja T um tableau semistandard. A sua *matriz associada* $A = (a_{i,j})$ é dada por

$$a_{i,j} = \text{número de ocorrências de } i \text{ na linha } j \text{ de } T \quad (4.1)$$

Exemplo 4.1. Consideremos os seguintes tableaux

1	1	1	1	2
2	2	3		
3	4			
4				

		1	1	2	2	3
			2	4		
	1	2	3			
1						

				1	1	1
				1	2	2
	1	1	2	3		
1	1	2	3			
3	3	4				

As suas matrizes associadas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resulta da definição que se T for normal a sua forma é dada por $(\sum_{k=1}^n a_{k,1}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{k,n})$.

O conteúdo de T (normal ou enviesado) é dado por $(\sum_{k=1}^n a_{1,k}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{n,k})$.

Proposição 4.1. *Qualquer tableau T normal semistandard está univocamente determinado pela sua matriz associada.*

Demonstração. É claro que tableaux iguais definem a mesma matriz associada. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem tableaux diferentes T e \tilde{T} com a mesma matriz associada, $a_{i,j} = \tilde{a}_{i,j}$. Seja (k, j) a primeira caixa em que T e \tilde{T} diferem e, sem perda de generalidade, suponhamos que $p = T_{k,j} < \tilde{T}_{k,j} = q$. Se $j = 1$, e como $a_{i,j} = \tilde{a}_{i,j}, \forall i, j$, então p tem de aparecer à direita de q em \tilde{T} , o que contraria o facto de as linhas serem fracamente crescentes. Se $j > 1$, então existem em T j caixas com entradas menores ou iguais a p . Contudo, considerando que, em \tilde{T} , a entrada p deve estar à esquerda de q , existem apenas $j - 1$ caixas para colocar as j entradas. \square

É possível escrever as condições de semistandard e de palavra de Yamanouchi de um tableau em função da sua matriz associada. No que se segue, o tableau T terá n linhas.

Proposição 4.2. *Seja T um tableau de forma λ/μ e conteúdo ν , e seja $A = (a_{i,j})$ a sua matriz associada. Então, T é semistandard se e só se*

$$\mu_j + \sum_{p=1}^{i-1} a_{p,j} \geq \mu_{j+1} + \sum_{p=1}^i a_{p,j+1} \quad (4.2)$$

para quaisquer $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j < n$. Em particular, se T for normal e semistandard, então $a_{i,j} = 0$ para $i < j$.

Demonstração. Seja T um tableau semistandard e seja j uma sua linha. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\mu_j + \sum_{p=1}^{i-1} a_{p,j} < \mu_{j+1} + \sum_{p=1}^i a_{p,j+1}$. Seja $k = \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j}$.

Então, $T_{j,k+1} > i - 1$. Como $\sum_{p=0}^i a_{p,j+1} > k$, tem-se que $T_{j+1,k+1} \leq i$. Como T é semistandard, as colunas são estritamente crescentes, pelo que $T_{j,k+1} < T_{j+1,k+1}$. Tem-se pois que $i - 1 < T_{j,k+1} < T_{j+1,k+1} \leq i$, o que é um absurdo.

Reciprocamente, admita-se que a desigualdade (4.2) é verdadeira. As entradas em T podem ser escritas de modo a que as suas linhas fiquem fracamente crescentes. E uma vez que o número de entradas menores ou iguais a i na linha $j + 1$ é menor ou igual ao número de entradas menores ou iguais a $i - 1$ na linha j , e considerando que $\mu_j \geq \mu_{j+1}$, resulta que as colunas são estritamente crescentes.

Suponhamos agora que T é um tableau de forma normal. A desigualdade (4.2) escreve-se como

$$\sum_{p=1}^{i-1} a_{p,j} \geq \sum_{p=1}^i a_{p,j+1} \quad (4.3)$$

Considerando $i = 1$, resulta de (4.3) que $a_{1,j+1} \leq 0$, pelo que $a_{1,j+1} = 0$. Prova-se então por indução que $a_{i,j+1} = 0$, para $i \leq j$. Logo, $a_{i,j} = 0$, para $i < j$. \square

Proposição 4.3. *Seja T um tableau de forma λ/μ e conteúdo ν , e seja $A = (a_{i,j})$ a sua matriz associada. Então, $w(T)$ é palavra de Yamanouchi se e só se*

$$\sum_{q=i}^j a_{i,q} \geq \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1,q} \quad (4.4)$$

para quaisquer $1 \leq i < n$ e $1 \leq j \leq n$. Em particular, se T for um tableau de Littlewood-Richardson, então $a_{i,j} = 0$ para $i > j$.

Demonstração. Como $w(T)$ é palavra de Yamanouchi, para qualquer $1 \leq i \leq n$ e qualquer sufixo u de $w(T)$, tem-se $N(i, u) \geq N(i+1, u)$. Podemos considerar então sufixos que correspondam à divisão, numa linha $j+1$, entre entradas maiores ou iguais a $i+1$ e entradas estritamente menores que $i+1$. Assim, $N(i, u) = a_{i,1} + \dots + a_{i,j} \geq a_{i+1,1} + \dots + a_{i+1,j+1} = N(i+1, u)$. Note-se que na contagem de $N(i, u)$ apenas são contadas as ocorrências de i até à linha j , pelo facto de T ter colunas estritamente crescentes e linhas fracamente crescentes - os eventuais i 's que existam na linha $j+1$ estão à esquerda da última letra de u . Logo,

$$\sum_{q=1}^j a_{i,q} \geq \sum_{q=1}^{j+1} a_{i+1,q}. \quad (4.5)$$

Reciprocamente, admita-se (4.4) e seja w a palavra do tableau semistandard T correspondente a A . Mostremos que w é palavra de Yamanouchi. Seja v um prefixo de w e suponhamos que a sua última letra corresponde à caixa (k, j) , isto é, termina na linha k , coluna j . Seja $i \geq 1$. Se $i \geq k$, tem-se $N(i+1, v) = 0 \leq N(i, v)$. Seja então $i < k$.

caso 1. $T_{k,j} = i+1$ e $T_{k,j-1} < i+1$. Corresponde ao caso em que $T_{k,j}$ é a entrada $i+1$ mais à esquerda da linha k . Então, por (4.4),

$$N(i, v) = a_{i,i} + \dots + a_{i,k-1} \geq a_{i+1,i+1} + \dots + a_{i+1,k}.$$

caso 2. $T_{k,j} \geq i+1$ e existem mais ocorrências de $(i+1)$ à sua esquerda. Seja r igual ao número de ocorrências de $(i+1)$ da linha k que não aparecem em v . É evidente que $r \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned} N(i, v) &= a_{i,i} + \dots + a_{i,k-1} \geq a_{i+1,i+1} + \dots + a_{i+1,k} \\ &\geq a_{i+1,i+1} + \dots + a_{i+1,k} - r = N(i+1, v) \end{aligned}$$

caso 3. $T_{k,j} \leq i$. Então,

$$\begin{aligned} N(i, v) &= a_{i,i} + \dots + a_{i,k-1} + a_{i,k} \geq a_{i+1,i+1} + \dots + a_{i+1,k} + a_{i,k} \\ &\geq a_{i+1,i+1} + \dots + a_{i+1,k} = N(i+1, v). \end{aligned}$$

Em qualquer um dos casos, w é palavra de Yamanouchi.

De (4.4), resulta que $a_{i+1,1} = 0$. Prova-se por indução que $a_{i+1,j} = 0$, para $i \geq j$, pelo que $a_{i,j} = 0$ para $i > j$. □

É consequência directa de (4.4) que o conteúdo ν de um tableau LR é efectivamente uma partição, uma vez que, para qualquer $i = 1, \dots, l(\nu) - 1$

$$\nu_{i+1} = \sum_{q=i+1}^n a_{i+1,q} \leq \sum_{q=i}^{n-1} a_{i,q} \leq \sum_{q=i}^n a_{i,q} = \nu_i$$

4.1.2 Triângulos de Littlewood-Richardson.

Dado $T \in \text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$, a matriz associada a T é triangular superior, pelo que podemos dispor as entradas $a_{i,j}$, com $i < j$, num triângulo e considerar uma nova estrutura indexada pelas partições (λ, μ, ν) .

Consideremos uma sequência de números triangulares de comprimento $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Vamos identificá-la com um gráfico constituído por $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ vértices dispostos numa grelha triangular, formando n^2 triângulos equiláteros, ao qual chamamos *gráfico de colmeia* de tamanho n , que se denota Δ_n . Na figura seguinte apresentamos um gráfico de colmeia de tamanho 4.

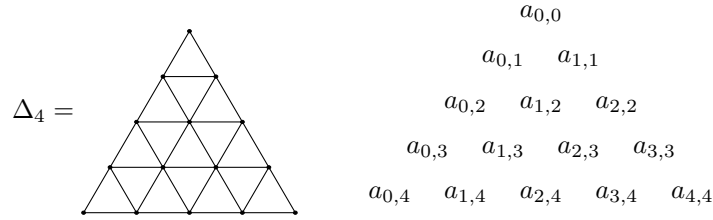


Figura 4.1: Gráfico de colmeia Δ_4 e uma etiquetação genérica.

Chamamos *a-sequência* a uma sequência

$$A = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,1}, \dots, a_{i,j}, \dots, a_{n-1,n}, a_{n,n}) \in \mathbb{Z}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

com $0 \leq i \leq j \leq n$. As *a-sequências* podem ser vistas como etiquetações com números inteiros dos vértices de Δ_n . Denotamos por T_n o conjunto das *a-sequências* tais que $a_{0,0} = 0$.

Tem-se que T_n é um \mathbb{Z} -módulo livre e sua dimensão é dada por

$$\dim T_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1 \tag{4.6}$$

Definição 4.2. Um *triângulo de Littlewood-Richardson* (LR) de tamanho n é uma *a-sequência* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ tal que:

$$(P) \quad a_{i,j} \geq 0, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

$$(\mathbf{CS}) \quad \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} \geq \sum_{p=0}^i a_{p,j+1}, \quad \forall 1 \leq i \leq j < n.$$

$$(\mathbf{LR}) \quad \sum_{q=i}^j a_{i,q} \geq \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1,q}, \quad \forall 1 \leq i \leq j < n.$$

Denotamos por \mathbf{TLR}_n o conjunto dos triângulos LR de tamanho n .

É consequência directa de (\mathbf{CS}) e (\mathbf{LR}) , tomando $i = j$, que:

$$\sum_{p=0}^i a_{p,j} \geq \sum_{p=0}^{i+1} a_{p,j+1} \quad (4.7)$$

Dada uma sequência $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{TLR}_n$, vamos associar-lhe os seguintes números, para cada $1 \leq i, j \leq n$:

$$\mu_j = a_{0,j}, \quad \lambda_j = \sum_{p=0}^j a_{p,j}, \quad \nu_i = \sum_{q=i}^n a_{i,q} \quad (4.8)$$

Note-se que, com estas definições, (4.2) pode ser escrito como

$$\sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} \geq \sum_{p=0}^i a_{p,j+1}$$

que corresponde à condição (\mathbf{CS}) .

Lema 4.1. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ e $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ as sequências definidas por (4.8). Então, λ, μ e ν são partições e $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.*

Demonstração. Por (\mathbf{P}) é claro que $\lambda_j, \mu_j, \nu_i \geq 0, \forall i, j$. Por (4.7), (\mathbf{CS}) e (\mathbf{LR}) tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{p=0}^i a_{p,j} \geq \sum_{p=0}^{i+1} a_{p,j+1} = \lambda_{j+1} \\ \mu_j &= a_{0,j} \geq a_{0,j+1} + a_{1,j+1} \geq a_{0,j+1} = \mu_{j+1} \\ \nu_i &= \sum_{q=i}^n a_{i,q} = \sum_{q=i}^{n-1} a_{i,q} + a_{i,n} \geq \sum_{q=i+1}^n a_{i+1,q} + a_{i,n} \geq \sum_{q=i+1}^n a_{i+1,q} = \nu_{i+1} \end{aligned}$$

pelo que λ, μ e ν são partições. Tem-se ainda que

$$\begin{aligned}
 |\lambda| &= \sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n \sum_{p=0}^j a_{p,j} \\
 &= \sum_{j=1}^n (a_{0,j} + \sum_{p=1}^j a_{p,j}) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{0,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^j a_{p,j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \mu_j + \sum_{p=1}^j \nu_p = |\mu| + |\nu|
 \end{aligned}$$

□

Sejam agora λ , μ e ν partições. Para cada $T \in \text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ defina-se uma a -sequência $A_T = (a_{i,j}) \in T_n$ tal que:

$$\begin{aligned}
 a_{0,0} &= 0, \quad a_{0,j} = \mu_j, \text{ para } 1 \leq j \leq n. \\
 a_{i,j} &= \text{número de } i\text{'s na linha } j \text{ de } T, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq n.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Proposição 4.4. *Sejam λ, μ e ν partições tais que $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$. A correspondência*

$$T \mapsto A_T \tag{4.10}$$

é uma bijecção entre $\text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ e $\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)$.

Demonstração. Seja $T \in \text{TLR}_n(\lambda/\mu, \nu)$. Por construção, é claro que $a_{i,j} \geq 0$, para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq n$, pelo que A_T satisfaz a condição **(P)**.

A proposição 4.3 garante que a matriz associada de um tableau LR é triangular. As suas entradas $a_{i,j}$, para $i < j$, coincidem com as entradas do triângulo LR definido em (4.9). Assim pelas proposições 4.2 e 4.3, têm-se as condições de **(CS)** e **(LR)**.

Seja agora A um triângulo LR. Construímos a partir de A um tableau T_A de forma λ/μ colocando em cada linha j , por ordem fracamente crescente, $a_{i,j}$ ocorrências de i , para cada i, j . Por construção, T_A é um tableau de forma λ/μ é fracamente crescente nas linhas. Novamente pelas proposições 4.2 e 4.3, tem-se que as colunas são estritamente crescentes e que $w(T_A)$ é palavra de Yamanouchi.

Para concluir, é claro que $T = T_{A_T}$, uma vez que têm a mesma forma, o mesmo conteúdo, e as entradas estão ordenadas do mesmo modo. E também $A = A_{T_A}$ pois $(A_{T_A})_{i,j}$ é igual ao número de i 's na linha j de T_A , que é por definição $(A)_{i,j}$. □

Tem-se então o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Sejam λ, μ e ν partições, com $l(\lambda) = n$. Então,*

$$|\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)| = c_{\mu, \nu}^\lambda \tag{4.11}$$

Exemplo 4.2. Consideremos o seguinte tableau

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 2 \\ & & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & & \\ 3 & 3 & 4 & & & \end{array}$$

Como T é da forma λ/μ , com $\lambda = (6, 5, 4, 3)$ e $\mu = (3, 2, 0, 0)$, com conteúdo $\nu = (6, 3, 3, 1)$, o seu triângulo LR é dado por

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 0 \\ & & & & & 3 & 3 \\ & & & & 2 & 1 & 2 \\ & & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Exemplo 4.3. Consideremos agora o produto de polinômios de Schur $s_{(3,2)}s_{(4,1)}$ e calculemos o coeficiente de Littlewood-Richardson que aparece em $s_{(5,3,2)}$. Tem-se

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 3 & 2 \\ & & 2 & a & b \\ 0 & c & d & 0 \end{array}$$

Por (4.8), $2 + a + b = \lambda_2 = 3$, então $a + b = 1$. Têm-se dois casos, ($a = 1 \wedge b = 0$) ou ($a = 0 \wedge b = 1$), obtendo-se, respectivamente os seguintes triângulos

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 3 & 2 \\ & & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 3 & 2 \\ & & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Logo, $c_{(3,2),(4,1)}^{(5,3,2)} = 2$.

4.2 Padrões de Gelfand-Tsetlin

Os padrões de Gelfand-Tsetlin são estruturas combinatórias indexadas por duas partições, que foram introduzidas por Gelfand e Tsetlin, em 1950 [12], com o propósito de estudar representações irredutíveis de $GL_n(\mathbb{C})$. A partir de uma condição adicional, é possível indexar-lhes uma terceira partição e definir os esquemas de Gelfand-Zelevinsky, apresentados por Gelfand e Zelevinsky nos anos 80 [13], [3], que são contados pelos números de Littlewood-Richardson. Nesta secção seguiremos essencialmente [8].

Dada uma composição λ de comprimento n , define-se o seu *dual* como sendo a composição λ^* tal que

$$\lambda_i^* = -\lambda_{n+1-i} \tag{4.12}$$

Exemplo 4.4. A composição $\lambda = (5, 4, 2, 1, 1)$ tem como dual $\lambda^* = (-1, -1, -2, -4, -5)$.

Consideremos uma sequência de inteiros de comprimento $\frac{(n+1)n}{2}$, à qual chamamos *g-sequência*,

$$G = (g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \dots, g_j^{(i)}, \dots, g_1^{(n)}, \dots, g_{n-1}^{(n)}, g_n^{(n)}) \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

com $1 \leq j \leq i \leq n$.

Definição 4.3. Uma *g-sequência* $G = (g_j^{(i)}) \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ diz-se um *padrão de Gelfand-Tsetlin* (GT) de tamanho n se satisfizer as condições de entrelaçamento:

$$\text{(IC 1)} \quad g_j^{(i+1)} \geq g_j^{(i)}.$$

$$\text{(IC 2)} \quad g_j^{(i)} \geq g_{j+1}^{(i+1)}.$$

Os elementos de um padrão GT podem ser dispostos em forma de triângulo invertido, como na seguinte figura.

$$\begin{array}{ccccc} g_1^{(5)} & g_2^{(5)} & g_3^{(5)} & g_4^{(5)} & g_5^{(5)} \\ & g_1^{(4)} & g_2^{(4)} & g_3^{(4)} & g_4^{(4)} \\ & & g_1^{(3)} & g_2^{(3)} & g_3^{(3)} \\ & & & g_1^{(2)} & g_2^{(2)} \\ & & & & g_1^{(1)} \end{array}$$

Figura 4.2: Padrão de Gelfand-Tsetlin para $n = 5$.

Dada uma *g-sequência* $G = (g_j^{(i)})$, define-se a sua *sequência dual*, $G^* = (s_j^{(i)})$, em que

$$s_j^{(i)} = -g_{i+1-j}^{(i)} \tag{4.13}$$

para $1 \leq j \leq i \leq n$

A linha k de G é dada por $g^{(k)} = (g_1^{(k)}, \dots, g_k^{(k)})$. Define-se o *tipo* de G como sendo a sua linha n . Por **(IC 1)** e **(IC 2)**,

$$g_j^{(k)} \geq g_j^{(k-1)} \geq g_{j+1}^{(k)}$$

pelo que o tipo de um padrão GT é uma partição.

O *peso* de G é a sequência $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$, em que

$$\begin{aligned} w_1 &= g_1^{(1)} \\ w_i &= \sum_{k=1}^i g_k^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} g_k^{(i-1)}, \text{ para } i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Exemplo 4.5. Consideremos o seguinte padrão GT

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{array}$$

O seu tipo é $(4, 2, 1)$ e o seu peso é $(2, 3, 2)$.

Lema 4.2. *Seja G uma g -seqüência de tipo λ e peso w . Então, G^* é de tipo λ^* e peso $-w$.*

Demonstração. Pela definição de tipo, tem-se que G^* é de tipo λ^* . O peso w^* de G^* é dado por

$$\begin{aligned} w_1^* &= -g_1^1 \\ w_i^* &= \sum_{k=1}^i s_k^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} s_k^{(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^i -g_{i+1-k}^{(i)} + \sum_{k=1}^{i-1} g_{i-k}^{(i-1)} \\ &= -\left(\sum_{k=1}^i g_{i+1-k}^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{i-k}^{(i-1)} \right) \\ &= -\left(\sum_{q=1}^i g_q^{(i)} - \sum_{q=1}^{i-1} g_q^{(i-1)} \right) = -w_i \end{aligned}$$

Logo, $w^* = -w$. □

4.2.1 Bijecção entre padrões GT e tableaux normais semistandard

Vamos agora definir uma correspondência entre tableaux normais semistandard e padrões GT. Como já foi visto, um tableau T normal semistandard é univocamente determinado pela sua matriz associada $A = (a_{i,j})$ em que $a_{i,j}$ é igual ao número de i 's na linha j de T . Assim, é suficiente encontrar uma bijecção entre padrões GT e matrizes.

Seja então T um tableau normal semistandard, com n linhas, e entradas em $\{1, \dots, n\}$, e seja $A = (a_{i,j})$ a sua matriz associada. Vamos construir um padrão GT, G_T , associando a cada entrada da matriz um vértice do padrão, definindo

$$g_j^{(i)} = \sum_{k=1}^i a_{k,j}. \tag{4.15}$$

que corresponde à soma dos elementos menores ou iguais do que i na linha j .

Exemplo 4.6. Consideremos o seguinte tableau semistandard normal

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

e determinemos o seu padrão GT. A matriz associada a T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_1^{(1)} &= a_{1,1} = 2 & g_1^{(3)} &= a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = 2 + 2 + 1 = 4 \\ g_1^{(2)} &= a_{1,1} + a_{2,1} = 2 + 1 = 3 & g_2^{(3)} &= a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = 0 + 2 + 0 = 2 \\ g_2^{(2)} &= a_{1,2} + a_{2,2} = 0 + 2 = 2 & g_3^{(3)} &= a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = 0 + 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Tem-se então, por (4.15)

$$\begin{aligned} g_1^{(1)} &= a_{1,1} = 2 \\ g_1^{(2)} &= a_{1,1} + a_{2,1} = 2 + 1 = 3 \\ g_2^{(2)} &= a_{1,2} + a_{2,2} = 0 + 2 = 2 \\ g_1^{(3)} &= a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = 2 + 2 + 1 = 4 \\ g_2^{(3)} &= a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = 0 + 2 + 0 = 2 \\ g_3^{(3)} &= a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = 0 + 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Logo, G_T é dado por

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \\ & 3 & 2 \\ & & 2 \end{array}$$

Lema 4.3. *A g -sequência G_T definida em (4.15) é um padrão GT.*

Demonstração. Como T é um tableau normal semistandard, pela Proposição 4.2, a sua matriz associada A vai ser triangular inferior, pelo que $g_j^{(i)} = 0$ para $j > i$. Retirando estes elementos, obtém-se efectivamente uma g -sequência em $\mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Mostremos então que esta g -sequência é um padrão GT.

$$\text{(IC 1)} \quad g_j^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{i+1} a_{k,j} = \sum_{k=1}^i a_{k,j} + a_{i+1,j} \geq \sum_{k=1}^i a_{k,j} = g_j^{(i)}.$$

$$\text{(IC 2)} \quad \text{Como } T \text{ é semistandard, } g_j^{(i)} = \sum_{k=1}^i a_{k,j} \geq \sum_{k=1}^{i+1} a_{k,j+1} = g_{j+1}^{(i+1)}. \quad \square$$

Seja agora $G = (g_j^{(i)})$ um padrão GT e associemos-lhe um tableau normal semistandard T_G . Definimos T_G como sendo o tableau cuja matriz associada é dada por

$$a_{i,j} = g_j^{(i)} - g_j^{(i-1)} \tag{4.16}$$

considerando $g_j^{(i)} = 0$ para $0 \leq i < j$.

Lema 4.4. *O tableau T_G definido por (4.16) é normal e semistandard.*

Demonstração. Para $i < j$, $a_{i,j} = 0$. Como a sua matriz associada é triangular inferior, T_G é um tableau normal. Mostremos agora que é semistandard. Tem-se, para quaisquer i, j ,

$$\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} g_j^{(k)} - g_j^{(k-1)} = g_j^{(i-1)} - g_j^{(0)} = g_j^{(i-1)}$$

Do mesmo modo,

$$\sum_{k=1}^i a_{k,j+1} = \sum_{k=1}^i g_{j+1}^{(k)} - g_{j+1}^{(k-1)} = g_{j+1}^{(i)} - g_{j+1}^{(0)} = g_{j+1}^{(i)}$$

Por **(IC 2)**, $g_j^{(i-1)} \geq g_{j+1}^{(i)}$. Assim, pela Proposição 4.2, T_G é semistandard. \square

Proposição 4.5. *Sejam T um tableau semistandard normal e G um padrão GT . Então, as correspondências definidas em (4.15) e (4.16) são inversas uma da outra. Isto é,*

$$G_{T_G} = G \quad e \quad T_{G_T} = T \tag{4.17}$$

Demonstração. Sejam $G = (g_j^{(i)})$ e $G_{T_G} = (\tilde{g}_j^{(i)})$. Por (4.15) tem-se

$$\tilde{g}_j^{(i)} = \sum_{k=1}^i \tilde{a}_{i,j} = \sum_{k=1}^i g_j^{(k)} - g_j^{(k-1)} = g_j^{(i)} - g_j^{(0)} = g_j^{(i)}$$

pelo que $G_{T_G} = G$.

Analogamente, sejam $A = (a_{i,j})$ e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})$ as matrizes associadas a T e T_{G_T} , respectivamente. Por (4.16) tem-se

$$\tilde{a}_{i,j} = g_j^{(i)} - g_j^{(i-1)} = \sum_{k=1}^i a_{k,j} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,j} = a_{i,j}$$

Logo, $T_{G_T} = T$. \square

4.2.2 Correspondência entre tableaux enviesados semistandard e padrões GT truncados

Vamos agora generalizar as correspondências da secção anterior para tableaux enviesados, estabelecendo uma bijecção entre tableaux semistandard enviesados e uma subclasse de padrões GT .

Veremos que existe uma bijecção entre o conjunto dos tableaux semistandard de forma λ/μ com entradas em $\{1, \dots, n\}$ e o conjunto dos tableaux semistandard de forma λ com entradas em $\{1, \dots, 2n\}$ e cuja linha i tem entradas em $\{i, n+1, \dots, 2n\}$, para todo o i . Assim, dado um tableau enviesado, será possível aplicar a correspondência (4.15) ao seu tableau normal associado.

Proposição 4.6. *Seja T um tableau semistandard de forma λ/μ e entradas em $\{1, \dots, n\}$. Seja \tilde{T} o tableau de forma λ que se obtém a partir de T pelo seguinte procedimento:*

1. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, preencha-se cada entrada de i por $n + i$.

2. Preencha-se cada caixa da linha k de $[\mu]$ com k , para cada $1 \leq k \leq n$.

Então, \tilde{T} é um tableau semistandard de forma λ com entradas em $\{1, \dots, 2n\}$ e cuja linha i tem entradas em $\{i, n+1, \dots, 2n\}$. Mais, a correspondência $T \rightarrow \tilde{T}$ é bijectiva.

Demonstração. Por construção, \tilde{T} satisfaz as condições da proposição. Dado um tableau U de forma λ com entradas em $\{1, \dots, 2n\}$ e cuja linha i é preenchida com letras de $\{i, n+1, \dots, 2n\}$ é possível recuperar o tableau original, substituindo as entradas da forma $n+i$ por i , para $i \in \{1, \dots, n\}$, e removendo as caixas com entradas em $\{1, \dots, n\}$ \square

Chamamos *tableau normalizado* de T ao tableau obtido pelo procedimento anterior, e denotamo-lo por \tilde{T} .

Exemplo 4.7. Considere-se o seguinte tableau enviesado

$$Y = \begin{array}{cccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & 2 & 3 & & \\ 3 & 4 & & & & \end{array}$$

O seu tableau normalizado é dado por

$$\tilde{Y} = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 7 & & \\ 7 & 8 & & & & \end{array}$$

Proposição 4.7. Existe uma bijecção entre tableaux semistandard enviesados de forma λ/μ com entradas em $\{1, \dots, n\}$ e padrões GT de tamanho $2n$, tipo $\lambda^0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{2n}$, e cuja linha k é dada por (μ_1, \dots, μ_k) , para $1 \leq k \leq n$

Demonstração. Seja T um tableau semistandard de forma λ/μ e sejam $A = (a_{i,j})$ e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})$ as matrizes associadas a T e \tilde{T} , respectivamente. Mostremos que $G_{\tilde{T}}$.

Note-se que \tilde{A} é dada por

$$\tilde{a}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j}\mu_j & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ a_{i-n,j} & \text{para } n+1 \leq i \leq 2n \end{cases} \quad (4.18)$$

O tipo de G é dado por $(g_1^{(2n)}, \dots, g_n^{(2n)}, g_{n+1}^{(2n)}, \dots, g_{2n}^{(2n)})$. Mostremos então que

$$g_i^{(2n)} = \begin{cases} \lambda_j & \text{para } 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{para } n+1 \leq j \leq 2n \end{cases}$$

Seja $1 \leq j \leq n$. Então,

$$\begin{aligned}
 g_j^{(2n)} &= \sum_{k=1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \sum_{k=1}^n \delta_{k,j} \mu_j + \sum_{k=n+1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \mu_j + \sum_{k=n+1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \mu_j + \lambda_j - \mu_j = \lambda_j
 \end{aligned}$$

Para $n+1 \leq j \leq 2n$, tem-se

$$\begin{aligned}
 g_j^{(2n)} &= \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{2n} \tilde{a}_{k,j} \\
 &= \sum_{q=1}^n a_{q,j} = 0 \quad (\text{pois } j \geq n+1).
 \end{aligned}$$

Logo, o tipo de G é dado por $\lambda^0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0)$.

Considere-se a linha k de \tilde{G} , com $1 \leq k \leq n$. Tem-se, para $1 \leq j \leq k$,

$$g_j^{(k)} = \sum_{q=1}^k \tilde{a}_{q,j} = \sum_{q=1}^k \delta_{q,j} \mu_j = \mu_j \quad (4.19)$$

Logo, a linha k de G é dada por (μ_1, \dots, μ_k) , para $1 \leq k \leq n$. \square

Pela proposição 4.7, para $1 \leq k \leq n$, as primeiras $k-1$ linhas de \tilde{G} contêm informação desnecessária. É comum omiti-las no padrão GT – obtém-se um padrão *truncado*.

Exemplo 4.8. Considere-se o seguinte tableau de forma $(5, 4, 2)/(3, 1)$

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & & & \end{array}$$

O seu tableau normalizado é dado por

$$\tilde{T} = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & \\ 5 & 6 & & & \end{array}$$

É simples verificar que o seu padrão GT associado $G_{\tilde{T}}$ é dado por

$$\begin{array}{cccccc}
 5 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 5 & 2 & 0 & 0 \\
 & & & 3 & 1 & 0 \\
 & & & \hline
 & & & 3 & 1 & \\
 & & & & & 3
 \end{array}$$

4.2.3 Bijecção entre tableaux LR e esquemas GZ

Definição 4.4. ([13]) Seja $G = (g_j^{(i)})$ um padrão GT. Os seus *expoentes* são definidos por

$$\varepsilon_j^{(i)}(G) = \sum_{k=1}^{j-1} (g_k^{(i+1)} - 2g_k^{(i)} + g_k^{(i-1)}) + (g_j^{(i+1)} - g_j^{(i)}) \quad (4.20)$$

Dadas partições λ , μ e ν , diz-se que G é um *esquema de Gelfand-Zelevinsky* (GZ) de tamanho n é um padrão GT T de tamanho n , de tipo μ , peso $\lambda - \nu$, e tal que, para todo i e j ,

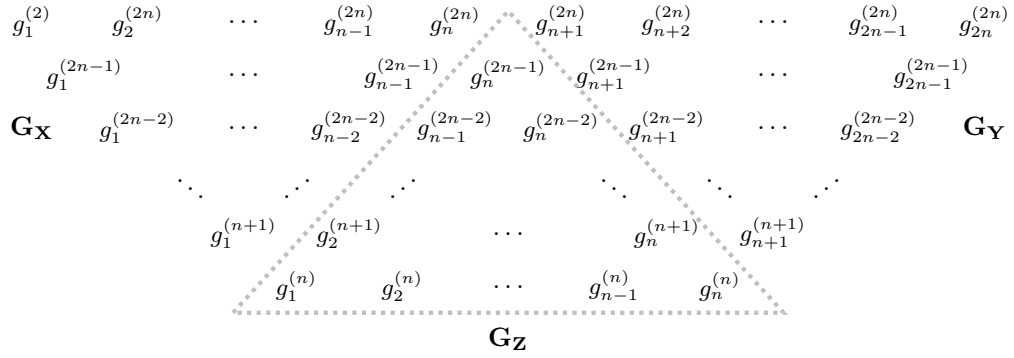
$$\varepsilon_j^{(i)}(T) \leq \nu_i - \nu_{i+1} \quad (4.21)$$

Denotamos o conjunto dos esquemas GZ por $\text{GZ}_n(\mu, \lambda - \nu, \nu)$. Concluimos esta secção provando que os esquemas GZ são contados pelos coeficientes de Littlewood-Richardson $c_{\mu, \nu}^\lambda$, estabelecendo uma correspondência bijectiva entre $\text{GZ}_n(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$.

Existe uma correspondência entre tableaux LR e esquemas GZ. A ideia principal da correspondência é aplicar a bijecção entre tableaux enviesados e padrões GT truncados, definida na proposição 4.7. O padrão truncado obtido é então dividido em três secções, das quais apenas uma tem informação relevante e que é transformada em padrão GT de tamanho n . Demonstraremos também que a condição de Yamanouchi é equivalente à condição (4.21).

Teorema 4.1. *Existe uma bijecção entre $\text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ e $\text{GZ}_n(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$.*

Seja $T \in \text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ e seja $G = (g_j^{(i)})$ o padrão GT truncado de tamanho $2n$ associado a L . Vamos dividir G em três secções, G_X, G_Y e G_Z da seguinte modo:



Lema 4.5. *Qualquer tableau T é univocamente determinado por G_Z , onde $G = G_{\tilde{T}}$.*

Demonstração. A secção G_Y é constituída apenas por zeros. Com efeito, foi visto na proposição 4.7 que a última linha de G_Y é igual a $(0, \dots, 0)$. Prova-se então por indução, utilizando as condições de entrelaçamento, que todas as entradas de G_Y são nulas. Assim, as entradas de G_Y podem ser omitidas.

A subsequência G_X está completamente determinada por λ , uma vez que

$$\begin{aligned}
 g_j^{(n+k)} &= \sum_{q=1}^{n+k} \tilde{a}_{q,j} \\
 &= \sum_{q=1}^n \tilde{a}_{q,j} + \sum_{q=n+1}^{n+k} \tilde{a}_{q,j} \\
 &= \mu_j + \sum_{r=1}^k a_{r,j} \\
 &= \mu_j + \sum_{r=1}^j a_{q,j} + \sum_{r=j+1}^k a_{q,j}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Como $w(T)$ é palavra de Yamanouchi, pela Proposição 4.3 tem-se

$$\sum_{r=j+1}^k a_{q,j} = 0$$

A expressão de (4.22) fica então

$$\begin{aligned}
 g_j^{(n+k)} &= \mu_j + \sum_{r=1}^j a_{q,j} \\
 &= \mu_j + \lambda_j - \mu_j = \lambda_j
 \end{aligned}$$

A linha k de G_X (que corresponde à linha $n+k$ do padrão não truncado) é então dada por $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Assim, a secção G_X contém informação redundante, pelo que pode também ser omitida. \square

Apresentemos G_Z na forma de padrão GT, reflectindo-o por uma linha horizontal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 g_1^{(n)} & g_2^{(n)} & & \cdots & & g_{n-1}^{(n)} & g_n^{(n)} \\
 & g_2^{(n+1)} & g_3^{(n+1)} & & \cdots & g_{n-1}^{(n+1)} & g_n^{(n+1)} \\
 & & g_3^{(n+2)} & & \cdots & & g_n^{(n+2)} \\
 & & & \ddots & & & \ddots \\
 & & & & g_{n-1}^{(2n-2)} & g_n^{(2n-2)} & \\
 & & & & & & g_n^{(2n-1)}
 \end{array}$$

Vamos de seguida enunciar algumas propriedades de G_Z .

Lema 4.6. *Seja $T \in \text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ e seja $G = G_{\bar{T}}$. Então, G_Z é um padrão GT de tipo μ e peso $\nu^* - \lambda^*$.*

Demonstração. G_Z satisfaz as condições de entrelaçamento:

$$(\text{IC}' 1) \quad g_{j-1}^{(n+k-1)} \geq g_j^{(n+k)}, \text{ pela segunda condição de entrelaçamento de } T.$$

$$(\text{IC}' 2) \quad g_j^{(n+k)} \geq g_j^{(n+k-1)}, \text{ pela primeira condição de entrelaçamento.}$$

É também claro que a sua linha n , que corresponde à linha n de G , é dada por (μ_1, \dots, μ_n) . O peso de G_Z é dado por

$$\begin{aligned}
 w_1 = g_n^{(2n-1)} &= \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_{k,n} && \text{por (4.15)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{k,n} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \tilde{a}_{k,n} \\
 &= \mu_n + \sum_{q=1}^{n-1} a_{q,n} && \text{por (4.18)} \\
 &= \mu_n + \sum_{q=1}^n a_{q,n} - a_{n,n} \\
 &= \lambda_n - \nu_n = \nu_1^* - \lambda_1^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i &= \sum_{k=n-i+1}^n g_k^{(2n-i)} - \sum_{k=n-i+2}^n g_k^{(2n-i+1)} \\
 &= \sum_{k=n-i+1}^n \sum_{q=1}^{2n-i} \tilde{a}_{q,k} - \sum_{k=n-i+2}^n \sum_{q=1}^{2n-i+1} \tilde{a}_{q,k} \\
 &= \sum_{k=n-i+1}^n \left(\sum_{q=1}^{2n} \tilde{a}_{q,k} + \sum_{q=n+1}^{2n-i} \tilde{a}_{q,k} \right) - \sum_{k=n-i+2}^n \left(\sum_{q=1}^{2n} \tilde{a}_{q,k} + \sum_{q=n+1}^{2n-i+1} \tilde{a}_{q,k} \right) \\
 &= \sum_{k=n-i+1}^n \left(\mu_k + \sum_{q=1}^{n-i} a_{q,k} \right) - \sum_{k=n-i+2}^n \left(\mu_k + \sum_{q=1}^{k=n-i+1} a_{q,k} \right) \\
 &= \mu_{n-i+1} + \sum_{k=n-i+1}^n \left(\sum_{q=1}^{n-i} a_{q,k} - \sum_{q=1}^{n-i+1} a_{q,k} \right) + \sum_{q=1}^{n-i+1} a_{q,n-i+1} \\
 &= \mu_{n-i+1} + \sum_{q=1}^{n-i+1} a_{q,n-i+1} - \sum_{k=n-i+1}^n a_{n-i+1,k} \\
 &= \lambda_{n-i+1} - \nu_{n-i+1} = \nu_i^* - \lambda_i^*.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 4.8. *Seja $T \in \text{LR}(\lambda/\mu, \nu)$ e seja $G = G_{\tilde{T}}$. Então, $G_Z^* \in \text{GZ}(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$.*

Demonstração. Resulta dos lemas 4.2 e 4.6 que G_Z^* é de tipo μ^* e tem peso $\lambda^* - \nu^*$. Mostremos que a condição dos expoentes (4.21) se verifica. Como $G_Z = (g_{n-i+j}^{(2n-1)})$, tem-se que

$$G_Z^* = (-g_{n-j+1}^{(2n-1)}) \quad (4.23)$$

Seja T o tableau associado a G_Z^* pela correspondência (4.16) e sejam $A = (a_{i,j})$ e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})$ as matrizes associadas a T e \tilde{T} , respectivamente, onde \tilde{T} denota o tableau normalizado de T . Tem-se que

$$a_{i,j} = \tilde{a}_{n+i,j} = g_j^{(n+i)} - g_j^{(n+i-1)} \quad (4.24)$$

$$a_{k,k} = \tilde{a}_{n+k,k} = g_k^{(n+k)} - g_k^{(n+k-1)} = \lambda_k - g_k^{(n+k-1)} \quad (4.25)$$

para $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$. Os expoentes de G_Z^* são dados por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_j^{(i)}(G_Z^*) &= \sum_{k=1}^{j-1} ((-g_{n-k+1}^{(2n-i-1)} + g_{n-k+1}^{(2n-i)}) - (-g_{n-k+1}^{(2n-i)} + g_{n-k+1}^{(2n-i+1)})) + (-g_{n-j+1}^{(2n-i-1)} + g_{n-j+1}^{(2n-i)}) \\
 &= \sum_{k=1}^{j-1} (a_{n-i,n-k+1} - a_{n-i+1,n-k+1}) + a_{n-i,n-j+1} \\
 &= \sum_{k=j+1}^n (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) + a_{n-i,j}
 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como T tem conteúdo ν , tem-se que $\nu_q = \sum_{k=1}^n a_{q,k}$, pelo que

$$\begin{aligned} \nu_i^* - \nu_{i+1}^* &= \nu_{n-i} - \nu_{n-i+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) + (a_{n-i,j} - a_{n-i+1,j}) + \sum_{k=j+1}^n (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

O lema 4.4 afirma que a condição de Yamanouchi para T é equivalente

$$\sum_{k=1}^j a_{n-i+1,k} \leq \sum_{k=1}^{j-1} a_{n-i,k}.$$

Daí resulta directamente que

$$a_{n-i+1,j} \leq \sum_{k=1}^{j-1} (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) \quad (4.28)$$

Resulta de (4.26), (4.27) e (4.28) que,

$$\begin{aligned} \nu_i^* - \nu_{i+1}^* &\geq \sum_{k=j+1}^n (a_{n-i,k} - a_{n-i+1,k}) + a_{n-i,j} \\ &= \varepsilon_j^{(i)}(G_Z^*) \end{aligned}$$

□

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema 4.1. O lema 4.5 e a proposição 4.8 asseguram que a seguinte correspondência é uma bijecção

$$\begin{array}{ccc} \text{GZ}_n(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*) & \longrightarrow & \text{LR}(\lambda/\mu, \nu) \\ T & \longmapsto & T_{G_Z^*} \end{array}$$

Corolário 4.2. *Sejam λ , μ , e ν partições, com $l(\lambda) = n$. Então*

$$|\text{GZ}_n(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)| = c_{\mu, \nu}^\lambda \quad (4.29)$$

Exemplo 4.9. Sejam $\lambda = (4, 3, 1)$, $\mu = (2, 1)$ e $\nu = (3, 2)$. Vamos calcular o coeficiente $c_{\mu, \nu}^\lambda$, determinando o número de esquemas GZ de tipo μ^* , peso $\lambda^* - \nu^*$ e tais que $\varepsilon_j^{(i)} \leq \nu_i^* - \nu_{i+1}^*$. Tem-se

$$\lambda^* = (-1, -3 - 4), \quad \mu^* = (0, -1, -2), \quad \nu^* = (0, -2, -3) \quad (4.30)$$

Um esquema GZ de $\text{GZ}_3(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$ será da forma

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & -2 \\ & x & y \\ & & -1 \end{array}$$

uma vez que a última linha corresponde ao tipo μ^* e a entrada $g_1^{(1)}$ corresponde à primeira coordenada do peso $\lambda^* - \mu^* = (-1, -1, -1)$.

Pelas condições de entrelaçamento, tem-se

$$-1 \leq x \leq 0$$

Se $x = 0$, a segunda coordenada do peso é dada por $0 + y + 1 = -1$. Logo, $y = -2$. Analogamente, se $x = 1$, tem-se pelo peso que $-3 + 1 - y = -2$, pelo que $y = -1$.

Assim, existem dois esquemas GZ nas condições anteriores:

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & -2 \\ & 0 & -2 \\ & & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -2 \\ & -1 & -1 \\ & & -1 \end{array}$$

Logo, $c_{\mu, \nu}^\lambda = |\text{GZ}_3(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)| = 2$.

4.3 Colmeias

As colmeias são estruturas combinatórias introduzidas por Knutsen e Tao, em 1999, para provar a Conjectura de saturação [17]. Mostraremos nesta secção que existe uma bijecção entre colmeias e padrões de Gelfand-Tsetlin, estabelecendo assim uma bijecção entre tableaux de Littlewood-Richardson. As referências seguidas são [6], [8], [15] e [21].

Consideremos uma sequência de inteiros, à qual chamamos *h-sequência*,

$$H = (h_{0,0}, h_{0,1}, h_{1,1}, \dots, h_{i,j}, \dots, h_{n-1,n}, h_{n,n}) \in \mathbb{Z}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

com $1 \leq i \leq j \leq n$, e tal que $h_{0,0} = 0$. Dispomos os elementos desta *h-sequência* num gráfico de colmeia Δ_n , à semelhança do que foi feito com os triângulos de Littlewood-Richardson.

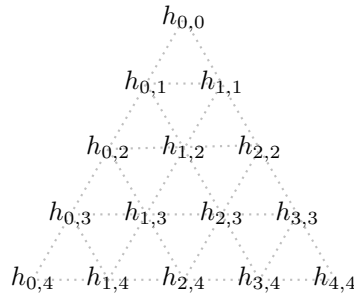


Figura 4.3: *h-sequência* em Δ_4

Definição 4.5. Uma *colmeia* de tamanho n é uma *h-sequência* $H = (h_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ que satisfaz as condições de rombo:

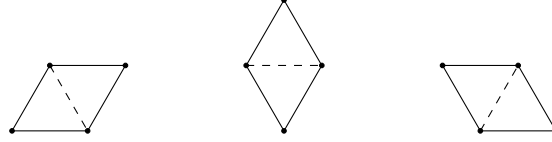
(RC 1) $h_{i,j} + h_{i-1,j-1} \geq h_{i-1,j} + h_{i,j-1}$, para $1 \leq i \leq j \leq n$.

(RC 2) $h_{i-1,j} + h_{i,j} \geq h_{i,j+1} + h_{i-1,j-1}$, para $1 \leq i \leq j < n$.

(RC 3) $h_{i,j} + h_{i,j+1} \geq h_{i+1,j+1} + h_{i-1,j}$, para $1 \leq i \leq j < n$.

Denota-se por H_n o conjunto das colmeias de tamanho n .

Existem três tipos de rombos fundamentais.



As condições de rombo podem ser interpretadas do seguinte modo: a soma das entradas dos vértices que correspondem a ângulos obtusos é maior ou igual à soma das entradas dos vértices dos ângulos agudos.

Para $1 \leq i, j \leq n$, vamos associar a cada colmeia $H \in H_n$:

$$\lambda_i = h_{i,i} - h_{i-1,i-1}, \quad \mu_j = h_{0,j} - h_{0,j-1}, \quad \nu_i = h_{i,n} - h_{i-1,n} \quad (4.31)$$

Lema 4.7. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ e $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ as sequências definidas por (4.31). Então, λ , μ e ν são partições e $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.*

Demonstração. Resulta directamente das condições de rombo que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= h_{i,i} - h_{i-1,i-1} \geq h_{i,i+1} - h_{i-1,i} \geq h_{i+1,i+1} - h_{i,i} = \lambda_{i+1} \\ \mu_j &= h_{0,j} - h_{0,j-1} \geq h_{1,j+1} - h_{1,j} \geq h_{0,j+1} - h_{0,j} = \mu_{j+1} \\ \nu_i &= h_{i,n} - h_{i-1,n} \geq h_{i,n-1} - h_{i-1,n-1} \geq h_{i+1,n} - h_{i,n} = \nu_{i+1} \end{aligned}$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n (h_{i,i} - h_{i-1,i-1}) \\ &= h_{n,n} - h_{0,0} = h_{n,n} - h_{0,n} + h_{0,n} h_{0,0} \\ &= \sum_{j=1}^n (h_{0,j} - h_{0,j-1}) + \sum_{i=1}^n (h_{i,n} - h_{i-1,n}) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu_j + \sum_{i=1}^n \nu_i = |\mu| + |\nu| \end{aligned}$$

□

Nestas condições, diz-se que (λ, μ, ν) é o *tipo* de H e denotamos por $H_n(\lambda, \mu, \nu)$ o conjunto das colmeias de tamanho n e de tipo (λ, μ, ν) . Note-se que o tipo de H define as suas fronteiras:

$$\begin{aligned} h_{0,i} &= \mu_1 + \dots + \mu_i \\ h_{i,n} &= \sum_{j=1}^n \nu_j + \dots + \nu_i \\ h_{i,i} &= \lambda_1 + \dots + \lambda_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3.1 Correspondência entre Colmeias e Triângulos LR

Recordemos que T_n denota o \mathbb{Z} -módulo das etiquetas de Δ_n com a -sequências, ou, equivalentemente, com h -sequências. Vamos definir uma correspondência $\Phi_n : T_n \rightarrow T_n$, entre colmeias e triângulos LR, em que $\Phi_n(a_{i,j}) = (h_{i,j})$ é dado por

$$h_{i,j} = \sum_{p=0}^i \sum_{q=p}^j a_{p,q} \quad (4.33)$$

para $1 \leq i \leq j \leq n$.

Teorema 4.2. *A aplicação Φ_n definida por (4.33) aplica bijectivamente TLR_n em H_n e $\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)$ em $H_n(\lambda, \mu, \nu)$, para quaisquer λ, μ e ν partições.*

Demonstração. Consideremos a base canónica de T_n ,

$$\mathcal{B} = \{E_{0,1}, \dots, E_{0,n}, E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n}\}$$

em que

$$E_{i,j} = (e_{p,q}^{i,j}) = (\delta_{p,i} \delta_{q,j})$$

Consideramos \mathcal{B} ordenada pela ordem lexicográfica dos índices.

Considere-se a matriz de Φ_n com respeito à base \mathcal{B} . Dado um índice (i, j) , tem-se

$$\Phi_n(E_{i,j}) = \Phi_n(e_{p,q}^{i,j}) = (h_{p,q}) \quad (4.34)$$

O coeficiente de $E_{i,j}$ é dado por

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \sum_{r=0}^i \sum_{l=r}^j e_{r,l}^{i,j} \\ &= \sum_{r=0}^i \sum_{l=r}^j \delta_{i,r} \delta_{j,l} \\ &= \sum_{r=0}^i \delta_{i,r} = 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Logo, a entrada $((i, j), (i, j))$ da matriz é igual a 1, para qualquer $1 \leq i \leq j \leq n$. Isto é, a matriz tem apenas 1's na diagonal principal.

Considere-se agora dois índices $(i, j) \prec (a, b)$, pela ordem lexicográfica. Tem-se

$$\Phi_n(E_{a,b}) = \Phi_n(e_{p,q}^{a,b}) = (h_{p,q}) \quad (4.36)$$

e o coeficiente correspondente a $E_{i,j}$ é dado por

$$h_{i,j} = \sum_{r=0}^i \sum_{l=r}^j e_{r,l}^{a,b} = 0 \quad (4.37)$$

pois ou $i < a$ ou $(i = a \wedge j < b)$. Assim, a matriz é triangular inferior.

Como a matriz é triangular e não tem zeros na diagonal principal, é invertível e, por conseguinte, Φ_n é uma bijecção.

Apresentemos explicitamente Φ_n^{-1} :

caso 1. $i = 0$ e $1 \leq j \leq n$. Então, $h_{0,j} - h_{0,j-1} = \sum_{q=0}^j a_{0,q} - \sum_{q=0}^{j-1} a_{0,q} = a_{0,j}$.

caso 2. $1 \leq i = j \leq n$. Então, $h_{j,j} - h_{j-1,j-1} = \sum_{p=0}^j \sum_{q=p}^j a_{p,q} - \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=p}^{j-1} a_{p,q}$
 $= \sum_{q=j}^j a_{j,q} = a_{j,j}$.

caso 3. $1 \leq i < j \leq n$. Então, $h_{i,j} - h_{i,j-1} - h_{i-1,j} + h_{i-1,j-1} = \sum_{p=0}^i a_{p,j} - \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j}$
 $= a_{i,j}$.

Assim, $\Phi_n^{-1}(h_{i,j}) = (a_{i,j})$, com

$$a_{i,j} = \begin{cases} h_{0,j} - h_{0,j-1} & \text{se } i = 0 \text{ e } 1 \leq j \leq n \\ h_{j,j} - h_{j-1,j-1} & \text{se } 1 \leq i = j \leq n \\ h_{i,j} - h_{i,j-1} - h_{i-1,j} + h_{i-1,j-1} & \text{se } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Dados $(a_{i,j}) \in \text{TLR}_n$ e $(h_{i,j}) = \Phi_n(a_{i,j})$, têm-se as seguintes identidades.

$$h_{s,t} - h_{s,t-1} = \sum_{p=0}^s \sum_{q=p}^t a_{p,q} - \sum_{p=0}^s \sum_{q=p}^{t-1} a_{p,q} = \sum_{p=0}^s a_{p,t} \quad (4.38)$$

$$h_{s+1,t} - h_{s,t} = \sum_{p=0}^{s+1} \sum_{q=p}^t a_{p,q} - \sum_{p=0}^s \sum_{q=p}^t a_{p,q} = \sum_{q=s+1}^t a_{s+1,q} \quad (4.39)$$

Agora é simples verificar que $\Phi_n(\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)) = \text{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$.

Seja $A = (a_{i,j}) \in \text{TLR}_n$. Resultam de **(P)**, **(CS)** e **(LR)**, respectivamente, as condições de colmeia **(RC 1)**, **(RC 2)** e **(RC 3)**:

1. $h_{i,j} - h_{i,j-1} = \sum_{p=0}^i a_{p,j} = \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} + a_{i,j} \geq \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} = h_{i-1,j} - h_{i-1,j-1}$.
2. $h_{i-1,j} - h_{i-1,j-1} = \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} \geq \sum_{p=0}^i a_{p,j+1} = h_{i,j+1} - h_{i,j}$.
3. $h_{i,j} - h_{i-1,j} = \sum_{q=i}^j a_{i,q} \geq \sum_{q=i+1}^{j+1} a_{i+1,q} = h_{i+1,j+1} - h_{i,j+1}$.

Seja agora $H = (h_{i,j}) \in \text{H}_n$. As condições **(P)**, **(CS)** e **(LR)** obtêm-se de **(RC 1)**, **(RC 2)** e **(RC 3)**, respectivamente

1. $h_{i,j} + h_{i-1,j-1} \geq h_{i-1,j} + h_{i,j-1}$, pelo que $0 \leq h_{i,j} - h_{i,j-1} - h_{i-1,j} + h_{i-1,j-1} = a_{i,j}$.
2. $\sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} = h_{i-1,j} - h_{i-1,j-1} \geq h_{i,j+1} - h_{i,j} = \sum_{p=0}^i a_{p,j+1}$.

$$3. \sum_{q=i}^j a_{i,q} = h_{i,j} - h_{i-1,j} \geq h_{i+1,j+1} - h_{i,j+1} = \sum_{q=i+1}^{j+1} .$$

Assim, $\Phi_n(\text{TLR}_n) = H_n$. Prova-se facilmente que $A = (a_{i,j})$ é de tipo (λ, μ, ν) se e só se $(h_{i,j})$ o for, uma vez que

$$\begin{aligned} h_{i,i} - h_{i-1,i-1} &= h_{i,i} - h_{i-1,i} + h_{i-1,i} - h_{i-1,i-1} \\ &= \sum_{q=i}^i a_{i,q} + \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,i} \\ &= a_{i,i} + \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,i} = \sum_{p=0}^i a_{p,i} \end{aligned}$$

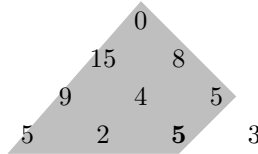
$$h_{0,j} - h_{0,j-1} = \sum_{p=0}^0 a_{p,j} = a_{0,j}$$

$$h_{i,n} - h_{i-1,n} = \sum_{q=i}^n a_{i,q}$$

Assim, $\Phi_n(\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)) = H_n(\lambda, \mu, \nu)$. □

Uma vez que um triângulo LR e uma colmeia têm como base o mesmo gráfico, a correspondência anterior tem uma interpretação visual simples: para calcular a entrada $h_{i,j}$ da colmeia, é suficiente determinar a entrada correspondente no triângulo LR, $a_{i,j}$ e somá-la com todas as entradas que estejam na região delimitada pela linha de $a_{i,j}$ e pela sua diagonal no sentido SO-NE correspondente.

Exemplo 4.10. Considere-se em Δ_3 o seguinte triângulo LR,



A entrada $h_{2,3}$ de $\Phi_3(A)$ é dada por

$$\begin{aligned} h_{2,3} &= \sum_{p=0}^2 \sum_{q=p}^3 a_{p,q} \\ &= 0 + 15 + 9 + 5 + 8 + 4 + 2 + 5 + 5 = 53 \end{aligned}$$

O seguinte corolário é consequência directa do teorema anterior.

Corolário 4.3. *Sejam λ, μ e ν partições, com $l(\lambda) = n$. Então*

$$|H_n(\lambda, \mu, \nu)| = c_{\mu, \nu}^\lambda \tag{4.40}$$

4.3.2 Correspondência entre Colmeias e Esquemas GZ

Nesta secção, vamos estabelecer uma correspondência bijectiva entre colmeias e esquemas GZ. O corolário 4.3 será uma consequência dessa bijecção.

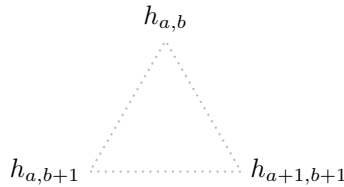
Dada uma h -sequência $H = (h_{a,b}) \in \mathbb{Z}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, definimos as suas três g -sequências derivadas

$$G_1 = (x_j^{(i)}), G_2 = (y_j^{(i)}), G_3 = (z_j^{(i)})$$

em que $(x_j^{(i)}), (y_j^{(i)})$, e $(z_j^{(i)})$ são definidos por

$$\begin{aligned} x_{b+1-a}^{(n-a)} &= h_{a,b+1} - h_{a,b} \\ y_{a+1}^{(b+1)} &= h_{a+1,b+1} - h_{a,b+1} \\ z_{a+1}^{(n+a-b)} &= h_{a+1,b+1} - h_{a,b} \end{aligned} \tag{4.41}$$

As entradas das sequências derivadas podem ser interpretadas como as diferenças de entradas adjacentes em H , considerando o triângulo



Na figura seguinte estão representadas as sequências derivadas para uma h -sequência genérica, em Δ_3 . As diferenças para G_1 são no sentido SO-NE, as de G_2 no sentido $E - O$, e as de G_3 no sentido SE-NO.

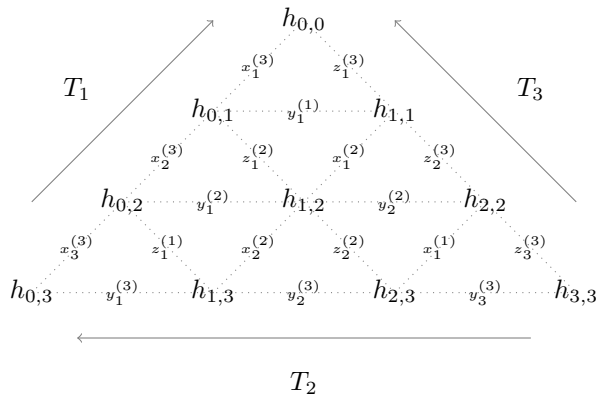


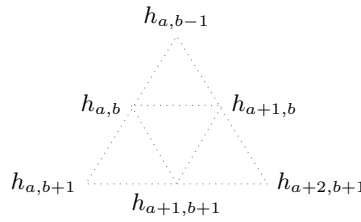
Figura 4.4: h -sequência em Δ_n e as suas g -sequências derivadas

Vamos de seguida ver a relação existente entre as condições de rombo de uma h -sequência e as condições de entrelaçamento das suas g -sequências derivadas.

Proposição 4.9. *Seja H uma h -sequência e sejam G_1, G_2 e G_3 as suas g -sequências derivadas. Então,*

1. H satisfaz **(RC 1)** se e só se G_1 satisfaz **(IC 2)** e G_2 satisfaz **(IC 1)**.
2. H satisfaz **(RC 2)** se e só se G_1 e G_3 satisfazem **(IC 1)**.
3. H satisfaz **(RC 3)** se e só se G_2 e G_3 satisfazem **(IC 2)**.
4. G_3 satisfaz **(IC 1)** se e só se G_1 satisfaz **(IC 1)**.
5. G_3 satisfaz **(IC 2)** se e só se G_2 satisfaz **(IC 2)**.

Demonstração. Consideremos seis entradas adjacentes em H :



H satisfaz **(RC 1)** \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow h_{a+1,b+1} + h_{a,b} \geq h_{a,b+1} + h_{a+1,b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_{a+1,b+1} - h_{a+1,b} \geq h_{a,b+1} - h_{a,b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{b-a}^{(n-a-1)} \geq x_{b-a+1}^{(n-a)} \Leftrightarrow G_1 \text{ satisfaz } \mathbf{(IC 2)}.$$

H satisfaz **(RC 1)** \Leftrightarrow

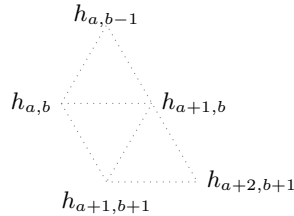
$$\Leftrightarrow h_{a+1,b+1} + h_{a,b} \geq h_{a,b+1} + h_{a+1,b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_{a+1,b+1} - h_{a,b+1} \geq h_{a+1,b} - h_{a,b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{a+1}^{(b+1)} \geq y_{a+1}^{(b)} \Leftrightarrow G_2 \text{ satisfaz } \mathbf{(IC 1)}.$$

As afirmações 2. e 3. mostram-se de modo semelhante.

Considerem-se agora as entradas



$$\begin{aligned}
 & G_3 \text{ satisfaz (IC 1)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow z_{a+1}^{(n+a-b+1)} \geq z_{a+1}^{(n+a-b)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow h_{a+1,b} - h_{a,b-1} \geq h_{a+1,b+1} - h_{a,b} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow h_{a,b} - h_{a,b-1} \geq h_{a+1,b+1} - h_{a+1,b} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x_{b-a}^{(n-a)} \geq x_{b-a}^{(n-a-1)} \Leftrightarrow G_1 \text{ satisfaz (IC 1)}.
 \end{aligned}$$

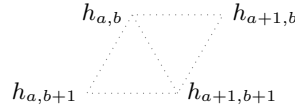
A afirmação 5. mostra-se de modo semelhante. \square

Teorema 4.3. *Seja $H \in \mathbb{Z}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$ e sejam $G_1(H)$ e $G_2(H)$ as suas g -sequências derivadas. H é uma colmeia se e só se $G_1(H)$ e $G_2(H)$ forem padrões GT de tamanho n .*

Demonstração. Suponhamos que H é colmeia, isto é, que satisfaz (RC 1), (RC 2) e (RC 3). Pelas afirmações 1. e 2. da Proposição 4.9, G_1 satisfaz (IC 1) e (IC 2). Pelas afirmações 1. e 3., G_2 satisfaz (IC 1) e (IC 2). Logo, G_1 e G_2 são padrões GT.

Reciprocamente, se G_1 e G_2 forem padrões GT, então, pelas afirmações 4. e 5. G_3 satisfaz (IC 1) e (IC 2), pelo que é também padrão GT. Então, como todas as g -sequências derivadas satisfazem as condições de entrelaçamento, pelas afirmações 1., 2. e 3. H é colmeia. \square

Note-se ainda que $G_1(H)$ e $G_2(H)$ não são independentes. Considere-se o rombo



Tem-se que

$$(h_{a+1,b+1} - h_{a,b+1}) + (h_{a,b+1} - h_{a,b}) = (h_{a+1,b+1} - h_{a+1,b}) + (h_{a+1,b} - h_{a,b})$$

implica

$$(h_{a+1,b+1} - h_{a+1,b}) - (h_{a,b+1} - h_{a,b}) = (h_{a+1,b+1} - h_{a,b+1}) - (h_{a+1,b} - h_{a,b})$$

pelo que

$$x_{b-a}^{(n-a-1)} - x_{b+1-a}^{(n-a)} = y_{a+1}^{(b+1)} - y_{a+1}^{(b)} \quad (4.42)$$

Mostramos de seguida que existe uma correspondência bijetiva entre colmeias e esquemas GZ, estabelecendo uma bijecção entre colmeias e as suas g -sequências derivadas. O próximo teorema estabelece duas bijecções entre colmeias e esquemas GZ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu) & \longrightarrow & \mathbf{GZ}(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*) \\ H & \longmapsto & G_1^*(H) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu) & \longrightarrow & \mathbf{GZ}(\nu, \lambda - \mu, \mu) \\ H & \longmapsto & G_2(H) \end{array}$$

Teorema 4.4. *Seja H uma h -sequência e $G_1(H)$ e $G_2(H)$ suas g -sequências derivadas.*

1. $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$ se e só se $G_1^*(H) \in \mathbf{GZ}(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$.
2. $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$ se e só se $G_2(H) \in \mathbf{GZ}(\nu, \lambda - \mu, \mu)$.

Vamos demonstrar o teorema 4.4 provando as seguintes afirmações

1. $G_1^*(H)$ satisfaz **(IC 2)** $\Leftrightarrow \varepsilon_j^{(i)}(G_2(H)) \leq \mu_i - \mu_{i+1}$.
2. $G_1^*(H)$ satisfaz **(IC 1)** $\Leftrightarrow G_2(H)$ satisfaz **(IC 1)**.
3. $G_1^*(H)$ satisfaz $\varepsilon_j^{(i)}(G_1^*(H)) \leq \nu_i^* - \nu_{i+1}^* \Leftrightarrow G_2(H)$ satisfaz **(IC 1)**.

Lema 4.8. *Sejam λ, μ e ν partições e seja $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$.*

1. O peso de $G_1(H)$ é $\nu^* - \lambda^*$, pelo que o peso de $G_1^*(H)$ é $\nu^* - \lambda^*$.
2. O peso de $G_2(H)$ é $\lambda - \mu$.

Demonstração. 1. $w_1(G_1) = x_1^{(1)}$

$$\begin{aligned} &= h_{n-1,n} - h_{n-1,n-1} \\ &= (h_{n,n} - h_{n-1,n-1}) - (h_{n,n} - h_{n-1,n}) = \lambda_n - \nu_n = \nu_1^* - \lambda_1^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i(G_1) &= \sum_{k=1}^i x_k^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^{(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^i h_{n-i,k+n-i} - h_{n-i,k+n-i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{n-i+1,k+n-i+1} - h_{n-i+1,k+n-i} \\ &= (h_{n-i+1,n-i+1} - h_{n-i,n-i}) - (h_{n-i,n} - h_{n-i+1,n}) \\ &= \lambda_{n-i+1} - \nu_{n-i+1} = \nu_i^* - \lambda_i^* \end{aligned}$$

2. Demonstra-se de forma análoga à afirmação 1.

□

Proposição 4.10. *Seja $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$. Então, $G_1^*(H)$ satisfaz **(IC 2)** se e só se*

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_2(H)) \leq \mu_i - \mu_{i+1}.$$

Demonstração. Seja $j = 1$. Suponhamos que $G_1^*(H)$ satisfaz **(IC 2)** e, consequentemente, que $G_1(H)$ satisfaz **(IC 1)**.

Tem-se

$$\varepsilon_1^{(i)}(G_2(H)) = y_1^{(i+1)} - y_1^{(i)}$$

Por (4.42),

$$y_1^{(i+1)} - y_1^{(i)} = x_i^{(n-1)} - x_{i+1}^{(n)}$$

Como G_1 satisfaz **(IC 1)**, $x_i^{(n)} \geq x_i^{(n-1)}$. Assim,

$$x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)} \geq x_i^{(n-1)} - x_{i+1}^{(n)} = y_1^{(i+1)} - y_1^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)}(T_2(H)).$$

Para concluir, note-se que $x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)} = (h_{0,i} - h_{0,i-1}) - (h_{0,i+1} - h_{0,i}) = \mu_i - \mu_{i+1}$.

Reciprocamente, admitamos que $\varepsilon_1^{(i)}(G_2(H)) \leq \mu_i - \mu_{i+1}$. Então,

$$\varepsilon_1^{(i)}(G_2(H)) = y_1^{(i+1)} - y_1^{(i)} \leq \mu_i - \mu_{i+1} = x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}.$$

Como

$$y_1^{(i+1)} - y_1^{(i)} = x_i^{(n-1)} - x_{i+1}^{(n)}$$

vem que $x_i^{(n-1)} - x_{i+1}^{(n)} \leq x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}$, ou seja,

$$x_i^{(n-1)} \leq x_i^{(n)}$$

que corresponde à condição **(IC 1)** para G_1 .

Seja agora $j > 1$. Os expoentes de G_2 são dados por

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_2) = \sum_{k=1}^{j-1} \left((y_k^{(i+1)} - y_k^{(i)}) - (y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)}) \right) + y_j^{(i+1)} - y_j^{(i)} \quad (4.43)$$

Uma vez que

$$y_j^{(i+1)} = x_{i-j+1}^{(n-j)} - x_{i-j+2}^{(n-j+1)} + y_j^{(i)} \quad (4.44)$$

$$y_j^{(i)} = x_{i-j}^{(n-j)} - x_{i-j+1}^{(n-j+1)} + y_j^{(i-1)} \quad (4.45)$$

é possível reescrever a expressão (4.43) em termos de G_1 ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{(i)}(G_2) &= \sum_{k=1}^{j-1} \left((x_{i-k+1}^{(n-k)} - x_{i-k+2}^{(n-k+1)}) - (x_{i-k}^{(n-k)} - x_{i-k+1}^{(n-k+1)}) \right) + \\ &+ (x_{i-j+1}^{(n-j)} - x_{i-j+2}^{(n-j+1)} + y_j^{(i)}) - (x_{i-j}^{(n-j)} - x_{i-j+1}^{(n-j+1)} + y_j^{(i-1)}) = \\ &= \sum_{k=1}^j \left((x_{i-k+1}^{(n-k+1)} - x_{i-k+2}^{(n-k+1)}) - (x_{i-k}^{(n-k)} - x_{i-k+1}^{(n-k)}) \right) + y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)} \end{aligned}$$

Eliminando os termos que se cancelam, obtém-se

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_2) = (x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) + (x_{i-j+1}^{(n-j)} - x_{i-j}^{(n-j)} + y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)}) \quad (4.46)$$

A condição **(IC 1)** para $G_1(H)$ implica que $x_{i-j+1}^{(n-j+1)} \geq x_{i-j}^{(n-j)}$.

Por (4.42), $y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)} = x_{i-j}^{(n-j)} - x_{i-j+1}^{(n-j+1)}$, e portanto

$$x_{i-j}^{(n-j)} = x_{i-j+1}^{(n-j+1)} + y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)} \geq x_{i-j}^{(n-j)} + y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)}$$

Logo, $0 \geq x_{i-j}^{(n-j)} - x_{i-j}^{(n-j)} + y_j^{(i)} - y_j^{(i-1)}$, pelo que

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_2) \leq (x_i^{(n)} - x_{i+1}^{(n)}) = \mu_i - \mu_{i+1}$$

□

Proposição 4.11. *Sja $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$. Então, $G_1(H)$ satisfaz (IC 2) se e só se G_2 satisfaz (IC 1).*

Demonstração. Por (4.42), tem-se

$$x_j^{(i)} \geq x_{j+1}^{(i+1)} \Leftrightarrow y_{n-i}^{(j-i+n)} \geq y_{n-i}^{(j-i+n-1)}.$$

Considerando $i' = n - i + j - 1$ e $j' = n - i$, obtém-se

$$x_j^{(i)} \geq x_{j+1}^{(i+1)} \Leftrightarrow y_{j'}^{(i'+1)} \geq y_{j'}^{(i')} \quad (4.47)$$

para $1 \leq j \leq i < n$ e para $1 \leq j' \leq i' < n$.

Logo $G_1(H)$ satisfaz (IC 2) se e só se $G_2(H)$ satisfaz (IC 1). □

Proposição 4.12. *Seja $H \in \mathbf{H}_n(\lambda, \mu, \nu)$. Então, $G_1^*(H)$ satisfaz $\varepsilon_j^{(i)}(G_1^*(H)) \leq \nu_i^* - \nu_{i+1}^*$ se e só se $G_2(H)$ satisfaz (IC 2).*

Demonstração. Seja $j = 1$. Tem-se

$$\varepsilon_1^{(i)}(G_1^*) = x_i^{(i)} - x_{i+1}^{(i+1)} \quad (4.48)$$

Por (4.42), a expressão (4.48) é igual a $y_{n-i}^{(n)} - y_{n-i}^{(n-1)}$. Tem-se também que

$$\begin{aligned} \nu_i^* - \nu_{i+1}^* &= \nu_{n-i} - \nu_{n+i-1} \\ &= h_{n-i,n} - h_{n-i-1,n} - h_{n-i+1,n} + h_{n-i,n} = y_{n-i}^{(n)} - y_{n-i+1}^{(n)} \end{aligned}$$

Como G_2 satisfaz (IC 2), tem-se $y_{n-i}^{(n-1)} \geq y_{n-i+1}^{(n)}$, pelo que

$$\begin{aligned} y_{n-i}^{(n)} &= x_i^{(i)} - x_{i+1}^{(i+1)} + y_{n-i}^{(n-1)} \\ &\geq x_i^{(i)} - x_{i+1}^{(i+1)} + y_{n-i+1}^{(n)} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\nu_i^* - \nu_{i+1}^* = y_{n-i}^{(n)} - y_{n-i+1}^{(n)} \geq x_i^{(i)} - x_{i+1}^{(i+1)} = \varepsilon_1^{(i)}(G_1^*)$$

Seja agora $j > 1$. Os expoentes de G_1^* são dados por

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_1^*) = \sum_{k=1}^{j-1} \left((x_{i-k+1}^{(i)} - x_{i-k+2}^{(i+1)}) - (x_{i-k}^{(i-1)} - x_{i-k+1}^{(i)}) \right) + (x_{i-j+1}^{(i)} - x_{i-j+2}^{(i+1)}) \quad (4.49)$$

Por (4.42), a expressão (4.49) pode ser reescrita como

$$\varepsilon_j^{(i)}(G_1^*) = \sum_{k=1}^{j-1} \left((y_{n-i}^{(n-k+1)} - y_{n-i}^{(n-k)}) - (y_{n-i+1}^{(n-k+1)} - y_{n-i+1}^{(n-k)}) \right) + (y_{n-i}^{(n-j+1)} - y_{n-i}^{(n-j)})$$

Como G_2 satisfaz **(IC 2)**, $y_{n-i}^{(n-j)} \geq y_{n-i+1}^{(n-j+1)}$, resulta então que

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{(i)}(G_1^*) &\leq \sum_{k=1}^{j-1} \left((y_{n-i}^{(n-k+1)} - y_{n-i}^{(n-k)}) - (y_{n-i+1}^{(n-k+1)} - y_{n-i+1}^{(n-k)}) \right) + (y_{n-i}^{(n-j+1)} - y_{n-i+1}^{(n-j+1)}) \\ &= y_{n-i}^{(n)} - y_{n-i+1}^{(n)} - y_{n-i}^{(n-j+1)} + y_{n-i+1}^{(n-j+1)} + y_{n-i}^{(n-j+1)} - y_{n-i+1}^{(n-j+1)} \\ &= y_{n-i}^{(n)} - y_{n-i+1}^{(n)} = \nu_i^* - \nu_{i+1}^* \end{aligned}$$

□

Provadas as três proposições anteriores, tem-se como consequência o teorema 4.4:

1. Se H for colmeia, então $G_1(H)$ e $G_2(H)$ são padrões GT. Em particular, G_2 satisfaz **(IC 2)**, pelo que, pela proposição 4.12, $\varepsilon_j^{(i)}(G_1^*(H)) \leq \nu_i^* - \nu_{i+1}^*$. Como G_1^* tem peso $\lambda^* - \nu^*$ e tipo μ^* , $G_1^* \in \text{GZ}(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$.

Reciprocamente, se $G_1^* \in \text{GZ}(\mu^*, \lambda^* - \nu^*, \nu^*)$, então G_2 satisfaz **(IC 2)**. Como G_1^* é padrão GT, satisfaz **(IC 1)**, pelo que G_2 satisfaz também **(IC 1)**, pela proposição 4.11. Logo, G_1 e G_2 são ambos padrões GT, pelo que H é colmeia.

2. A prova é semelhante para G_2 .

O corolário 4.3 é também uma consequência directa do teorema 4.4.

Exemplo 4.11. Sejam $\lambda = (5, 3, 2, 2)$, $\mu = (4, 2, 1)$ e $\nu = (3, 1, 1)$. Vamos calcular o coeficiente correspondente a s_λ que aparece na expansão de $s_\mu s_\nu$ na base das funções de Schur, determinando o número de colmeias de tipo (λ, μ, ν) . Uma colmeia $H \in \text{H}_4(\lambda, \mu, \nu)$ será da forma

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 0 \\ & & & & & 4 & 5 \\ & & & & & 6 & a & 8 \\ & & & & & 7 & b & c & 10 \\ & & & & & 7 & 10 & 11 & 12 & 12 \end{array}$$

Pela condições de rombo, temos que $7+10 \geq 7+b \Rightarrow 10 \geq b$ e $7+b \geq 6+10 \Rightarrow b \geq 9$. Logo, $b \in \{9, 10\}$. Se fosse $b = 9$, então $9 + 11 \geq 10 + c \Rightarrow c \leq 8$. Mas também $12 + c \geq 10 + 11 \Rightarrow c \geq 9$, o que é um absurdo. Logo $b = 10$.

Tem-se também $12 + 10 \geq 12 + c \Rightarrow c \leq 10$ e $c + 10 \geq 8 + 12 \Rightarrow c \geq 10$. Logo, $c = 10$. Podemos então substituir,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & 4 & 5 \\
 & & & 6 & a & 8 \\
 & 7 & 10 & 10 & 10 \\
 7 & 10 & 11 & 12 & 12
 \end{array}$$

Analisemos agora os rombos que contêm a :

- $4 + a \geq 6 + 5 \Rightarrow a \geq 7$
- $4 + 5 \geq a + 0 \Rightarrow a \leq 9$
- $5 + a \geq 4 + 8 \Rightarrow a \geq 7$
- $6 + a \geq 4 + 10 \Rightarrow a \geq 8$
- $6 + 10 \geq 7 + a \Rightarrow a \leq 9$
- $10 + a \geq 6 + 10 \Rightarrow a \geq 6$
- $10 + a \geq 10 + 8 \Rightarrow a \geq 8$
- $8 + a \geq 10 + 5 \Rightarrow a \geq 7$
- $10 + 10 \geq 11 + a \Rightarrow a \leq 9$

Logo, $a \in \{8, 9\}$. Logo, existem duas colmeias, pelo que $c_{(4,2,1),(3,1,1)}^{(5,3,2,2)} = 2$.

4.4 Triângulos de Berenstein-Zelevinsky

Os triângulos de Berenstein-Zelevinsky foram apresentados por Berenstein e Zelevinsky, no início dos anos 90, para estudar o produto tensorial de três \mathfrak{sl}_{r+1} -módulos simples de dimensão finita [4]. Estas estruturas combinatórias são também indexadas por três partições e são contadas pelos coeficientes de Littlewood-Richardson. Seguiremos como referência [21].

A partir de um gráfico de colmeia Δ_{n+1} vamos construir um gráfico Γ_n considerando

1. os vértices como sendo os pontos médios das arestas que *não* fazem parte da fronteira
2. as arestas como sendo os segmentos que unem os pontos médios que estejam nos triângulos de Δ_{n+1}

Seja V_n o conjunto das etiquetas $X_n = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ de Γ_n com números inteiros. Considere-se o subconjunto W_n correspondente às etiquetas tais que a soma dos vértices em cada aresta é igual à soma dos vértices da aresta diametralmente oposta. Isto é,

(BZ 1) $y_{i,j} + z_{i,j} = y_{i+1,j+1} + z_{i,j+1}$, para $1 \leq i \leq j < n$

(BZ 2) $x_{i,j+1} + y_{i,j} = x_{i+1,j+1} + y_{i+1,j+1}$, para $1 \leq i \leq j < n$

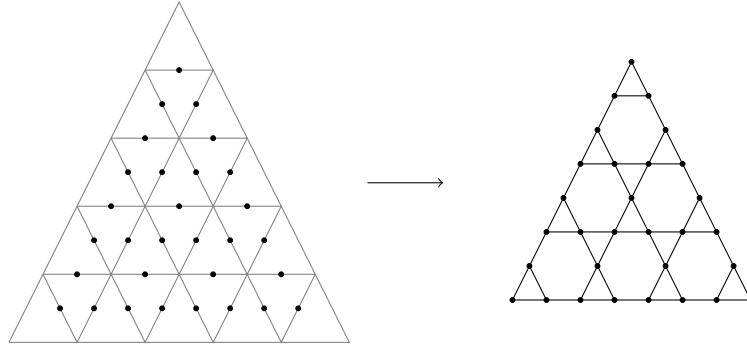


Figura 4.5: Gráfico de Γ_4 obtido a partir de Δ_5 .

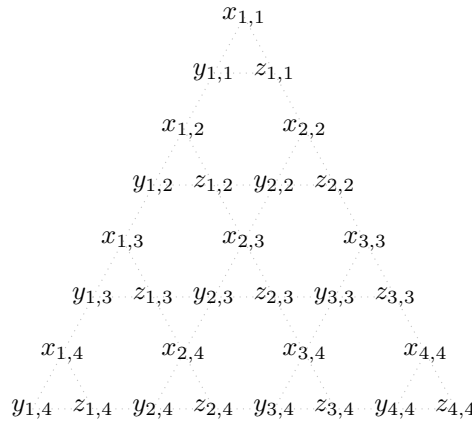


Figura 4.6: Etiquetação genérica de V_4 .

(BZ 3) $x_{i,j+1} + z_{i,j+1} = x_{i+1,j+1} + z_{i,j}$, para $1 \leq i \leq j < n$

Note-se que é suficiente assegurar quaisquer duas destas condições uma vez que a terceira se deduz das restantes. Mostremos, por exemplo, que **(BZ 2)** e **(BZ 3)** implicam **(BZ 1)**: $y_{i,j} + z_{i,j} = x_{i+1,j+1} + y_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} + x_{i,j+1} + z_{i,j+1} - x_{i+1,j+1} = y_{i+1,j+1} + z_{i,j+1}$.

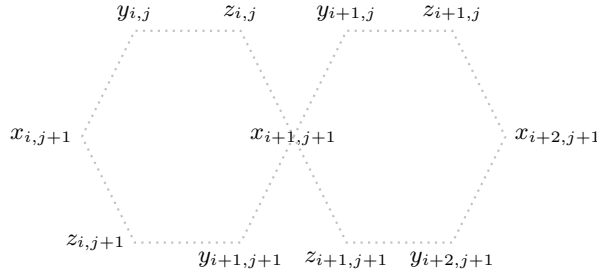
Tem-se que V_n é um \mathbb{Z} -módulo e que W_n é seu submódulo. A dimensão de V_n é dada por

$$\dim V_n = 3 \frac{(n+1)n}{2}$$

Lema 4.9. *O módulo W_n tem dimensão $\frac{1}{2}n(n+5) = \dim T_{n+1} - 2$*

Demonstração. A partir das equações (BZ 2) e (BZ 3), formemos um sistema de equações lineares, para cada $1 \leq i \leq j < n$.

Após reordenar as variáveis $x_{1,1}, y_{1,1}, z_{1,1}, x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n,n}, x_{n,n}, x_{n,n}$, é fácil verificar que a matriz do sistema, A , está em forma de escada. Consideremos os seguintes hexágonos:



A matriz do sistema de equações é dada por:

$$\begin{bmatrix}
 x_{1,1} & y_{1,1} & z_{1,1} & x_{1,2} & y_{1,2} & z_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{i,j} & y_{i,j} & z_{i,j} & x_{i+1,j} & y_{i+1,j} & \cdots & x_{n,n} & y_{n,n} & z_{n,n} \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

pele que a sua característica é igual a $n(n-1)$. O Teorema das Dimensões garante que

$$\dim V_n = \text{rank } A + \dim W_n \quad (4.50)$$

Como $\dim V_n = 3\frac{(n+1)n}{2}$, resulta então que

$$\begin{aligned}
 \dim W_n &= 3\frac{(n+1)n}{2} - 2\frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{3}{2}(n+1)n - n(n-1) \\
 &= \frac{1}{2}n(n+5)
 \end{aligned} \quad (4.51)$$

□

Definição 4.6. Um *triângulo de Berenstein-Zelevinsky* é uma etiquetagem em W_n com entradas não negativas. Dadas partições λ, μ e ν , diz-se que um triângulo de Berenstein-Zelevinsky (BZ) é de tipo (λ, μ, ν) se:

- (B1) $x_{1,j} + y_{1,j} = \mu_j - \mu_{j+1}$, para $1 \leq j \leq n$.
- (B2) $x_{j,j} + z_{j,j} = \lambda_j - \lambda_{j+1}$, para $1 \leq j \leq n$.
- (B3) $y_{i,n} + z_{i,n} = \nu_i - \nu_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n$.

É importante notar que, ao contrário das estruturas anteriores, um triângulo BZ pode ter vários tipos. Por exemplo, o seguinte triângulo BZ é de tipo

$$((15, 10, 6, 2), (16, 10, 6, 3), (12, 9, 7, 0))$$

mas também do tipo

$$((13, 8, 4, 0), (14, 8, 4, 1), (17, 14, 12, 5))$$

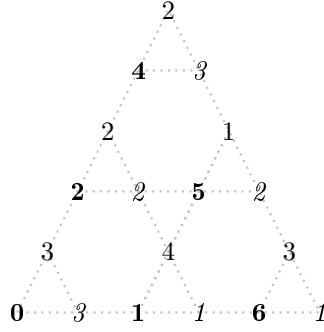


Figura 4.7: Triângulo de Berenstein-Zelevinsky em W_3 .

4.4.1 Correspondência entre Colmeias e triângulos BZ

Para $n \geq 2$, vamos agora definir uma aplicação linear entre colmeias e triângulos BZ, $\Psi_n : T_n \rightarrow W_{n-1}$, com $\Psi_n(h_{i,j}) = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$, definindo, para $1 \leq i \leq j < n$:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= h_{i,j} + h_{i-1,j} - h_{i-1,j-1} - h_{i,j+1} \\ y_{i,j} &= h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i-1,j+1} \\ z_{i,j} &= h_{i,j} + h_{i,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Note-se que estes valores são obtidos directamente das condições de colmeia **(RC 1)**, **(RC 2)** e **(RC 3)**, respectivamente.

Lema 4.10. *Nas condições anteriores, se $H = (h_{i,j}) \in T_n$, então $\Psi_n(h_{i,j}) \in W_{n-1}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \text{(BZ1)} \quad y_{i,j} + z_{i,j} &= h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i-1,j+1} + h_{i,j} + h_{i,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i+1,j+1} \\ &= h_{i,j+1} + h_{i,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j+1} \\ &= h_{i,j+1} + h_{i+1,j+2} - h_{i+1,j+1} - h_{i,j+2} + h_{i,j+1} + h_{i,j+2} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j+2} \\ &= y_{i+1,j+1} + z_{i,j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(BZ2)} \quad x_{i,j+1} + y_{i,j} &= h_{i,j+1} + h_{i-1,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i,j+2} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i-1,j+1} \\ &= h_{i+1,j+1} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i+1,j+2} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j+2} - h_{i+1,j+1} - h_{i,j+2} \\ &= x_{i+1,j+1} + y_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(BZ3)} \quad x_{i,j+1} + z_{i,j+1} &= h_{i,j+1} + h_{i-1,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i,j+2} + h_{i,j+1} + h_{i,j+2} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j+2} \\ &= h_{i+1,j+1} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i+1,j+2} + h_{i,j} + h_{i,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i+1,j+1} \\ &= x_{i+1,j+1} + z_{i,j} \end{aligned}$$

□

É também possível descrever explicitamente a composição $\Psi_n \circ \Phi_n : T_n \longrightarrow W_{n-1}$. Tem-se $\Psi_n \circ \Phi_n(a_{i,j}) = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$, para $1 \leq i \leq j < n$, em que

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= h_{i,j} + h_{i-1,j} - h_{i-1,j-1} - h_{i,j+1} = \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} - \sum_{p=0}^i a_{p,j+1} \\ y_{i,j} &= h_{i-1,j} + h_{i,j+1} - h_{i,j} - h_{i-1,j+1} = \sum_{p=0}^i a_{p,j+1} - \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j+1} = a_{i,j+1} \\ z_{i,j} &= h_{i,j} + h_{i,j+1} - h_{i-1,j} - h_{i+1,j+1} = \sum_{q=i}^j a_{i,q} - \sum_{q=i+1}^j a_{i+1,q} \end{aligned}$$

Note-se novamente que os valores de $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ e $z_{i,j}$ são obtidos directamente das condições de triângulo LR **(CS)**, **(P)** e **(LR)**.

Lema 4.11. Ψ_n e $\Psi_n \circ \Phi_n$ são aplicações sobrejectivas. Mais, para qualquer $X \in W_{n-1}$, tem-se $(\Psi_n \circ \Phi_n)^{-1}(X) = A = (a_{i,j})$, com:

$$\begin{aligned} a_{0,n} &= 0 \\ a_{0,j} &= \sum_{k=j}^{n-1} x_{1,k} + y_{1,k}, \text{ para } 1 \leq j < n \\ a_{i,j} &= y_{i,j-1}, \text{ para } 1 \leq i < j \leq n \\ a_{j,j} &= \sum_{k=j}^{n-1} z_{k,k}, \text{ para } 1 \leq j < n \\ a_{n,n} &= 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Demonstração. É suficiente mostrar que $\Psi_n \circ \Phi_n$ é sobrejectiva. Seja então $X = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \in W_{n-1}$ e defina-se $A = (a_{i,j}) \in T_n$ como em (4.53). Mostremos que $\Psi_n \circ \Phi_n(A) = X$.

Aplicando a condição **(BZ 2)** consecutivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{i-1} a_{p,j} - \sum_{p=0}^i a_{p,j+1} &= a_{0,j} + \sum_{p=1}^{i-1} a_{p,j} - a_{0,j+1} - \sum_{p=0}^i a_{p,j+1} \\ &= \sum_{k=j}^{n-1} (x_{1,k} + y_{1,k}) + \sum_{p=1}^{i-1} y_{p,j-1} - \sum_{k=j+1}^{n-1} (x_{1,k} + y_{1,k}) - \sum_{p=0}^i y_{p,j} \\ &= x_{1,j} + y_{1,j} + \sum_{p=1}^{i-1} y_{p,j-1} - \sum_{p=0}^i y_{p,j} \\ &= \underline{x_{1,j}} + \cancel{y_{1,j}} + \underline{y_{1,j-1}} + \dots + y_{i-1,j-1} - \cancel{y_{1,j}} - \dots - y_{i,j} \\ &\dots \\ &= \underline{x_{2,j}} + \cancel{y_{2,j}} + \underline{y_{2,j-1}} + \dots + y_{i-1,j-1} - \cancel{y_{2,j}} - \dots - y_{i,j} \\ &= \underline{x_{i-1,j}} + \cancel{y_{i-1,j}} + \underline{y_{i-1,j-i}} - \cancel{y_{i-1,j}} - y_{i,j} \\ &= x_{i,j} + y_{i,j} - y_{i,j} = x_{i,j}. \end{aligned}$$

Tem-se evidentemente $a_{i,j+1} = y_{i,j}$.

E aplicando sucessivamente a condição **(BZ1)**, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=i}^j a_{i,q} - \sum_{q=i+1}^j a_{i+1,q} &= a_{i,i} + \sum_{q=i+1}^j a_{i,q} - a_{i+1,i+1} - \sum_{q=i+2}^j a_{i+1,q} \\
 &= \sum_{k=i}^{n-1} z_{k,k} + \sum_{q=i+1}^j y_{i,q-1} - \sum_{k=i+1}^{n-1} z_{k,k} - \sum_{q=i+2}^j y_{i+1,q-1} \\
 &= z_{i,i} + \sum_{q=i+1}^j y_{i,q-1} - \sum_{q=i+2}^j y_{i+1,q-1} \\
 &= \underline{z_{i,i}} + \underline{y_{i,i}} + y_{i,i+1} + \dots + y_{i,j-1} - y_{i+1,i+1} - \dots - y_{i+1,j} \\
 &= \underline{z_{i,i+1}} + \underline{y_{i+1,i+1}} + y_{i,i+1} + \dots - \underline{y_{i+1,i+1}} - \dots - y_{i+1,j} \\
 &\quad \dots \\
 &= \underline{z_{i,j-1}} + \underline{y_{i+1,j}} + y_{i+1,j} - y_{i+1,j} \\
 &= z_{i,j} + y_{i+1,j} - y_{i+1,j} = z_{i,j}
 \end{aligned}$$

□

Estamos agora em condições de enunciar e provar o teorema que estabelece uma bijecção entre triângulos LR e triângulos BZ do mesmo tipo.

Teorema 4.5. *Dadas partições λ, μ e ν , a transformação linear $\Psi_n \circ \Phi_n$ aplica TLR_n sobrejectivamente em BZ_{n-1} e aplica $\text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)$ bijectivamente em $\text{BZ}_{n-1}(\lambda, \mu, \nu)$.*

Demonstração. Pela expressão de $\Psi_n \circ \Phi_n$ dada em (4.53), é claro que $\Psi_n \circ \Phi_n(\text{TLR}_n) = \text{BZ}_{n-1}$. Suponhamos que $A \in \text{TLR}_n$ é de tipo (λ, μ, ν) . Tem-se então,

$$\lambda_j = \sum_{p=0}^j a_{p,j} \quad \mu_j = a_{0,j} \quad \nu_i = \sum_{q=i}^n a_{i,q}$$

pelo que o tipo de $\Psi_n \circ \Phi_n(A)$ é dado por

$$\begin{aligned}
 x_{j,j} + z_{j,j} &= \sum_{p=0}^{j-1} a_{p,j} - \sum_{p=0}^j a_{p,j+1} + a_{j,j} - a_{j+1,j+1} \\
 &= \sum_{p=0}^j a_{p,j} - \sum_{p=0}^{j+1} a_{p,j+1} = \lambda_j - \lambda_{j+1} \\
 x_{1,j} + y_{1,j} &= a_{0,j} - \sum_{p=0}^1 a_{p,j+1} + a_{0,j+1} \\
 &= a_{0,j} - a_{0,j+1} = \mu_j - \mu_{j+1} \\
 y_{i,n-1} + z_{i,n-1} &= a_{i,n} + \sum_{q=i}^{n-1} a_{i,q} - \sum_{q=i+1}^n a_{i+1,q} \\
 &= \sum_{q=i}^n a_{i,q} - \sum_{q=i+1}^n a_{i+1,q} = \nu_i - \nu_{i+1}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

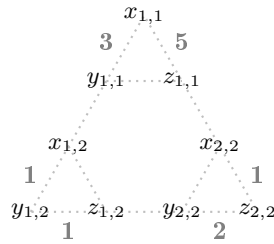
Logo, se $A \in \text{TLR}_n(\lambda, \mu, \nu)$, então $\Psi_n \circ \Phi_n(A)$ é também do tipo (λ, μ, ν) .

Para concluir, observamos que dados triângulos $A, B \in (\Psi_n \circ \Phi_n)^{-1}(X)$, com $X \in \text{BZ}_n(\lambda, \mu, \nu)$ e tais que $A \neq B$, então A e B têm de ter tipos diferentes. \square

Exemplo 4.12. Sejam $\lambda = (7, 2, 1)$, $\mu = (4, 1)$ e $\nu = (3, 2)$ e calculemos o coeficiente $c_{\mu, \nu}^\lambda$, determinando a cardinalidade de $\text{BZ}_2(\lambda, \mu, \nu)$. Tem-se

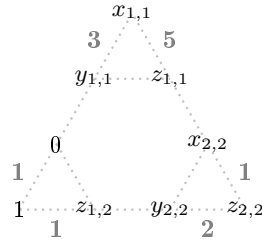
$$\begin{array}{lll} \lambda_1 - \lambda_2 = 7 - 2 = 5 & \mu_1 - \mu_2 = 4 - 1 = 3 & \nu_1 - \nu_2 = 3 - 2 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 - 1 = 1 & \mu_2 - \mu_3 = 1 - 0 = 1 & \nu_2 - \nu_3 = 2 - 0 = 2 \end{array}$$

Um triângulo BZ de tipo (λ, μ, ν) será então da forma¹



Uma vez que $x_{1,2} + y_{1,2} = 1$, tem-se $(x_{1,2} = 0 \wedge y_{1,2} = 1)$ ou $(x_{1,2} = 1 \wedge y_{1,2} = 0)$.

Suponhamos que se tem $x_{1,2} = 0$ e $y_{1,2} = 1$. Então, substituindo no triângulo obtém-se



Como $y_{1,2} + z_{1,2} = 1$, resulta que

$$z_{1,2} = 0$$

Pela condição **(BZ 3)**, tem-se então que $z_{1,1} + x_{2,2} = 0$, pelo que

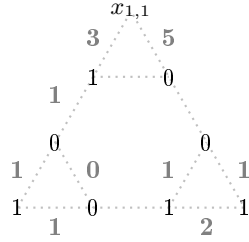
$$z_{1,1} = 0, x_{2,2} = 0$$

Uma vez que $x_{2,2} + z_{2,2} = 1$ e $y_{2,2} + z_{2,2} = 2$, resulta que

$$z_{2,2} = 1, y_{2,2} = 1$$

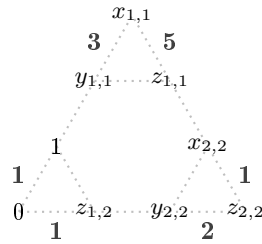
Pela condição **(BZ 1)** $z_{1,2} + y_{2,2} = 1 = y_{1,1} + z_{1,1}$. Como $z_{1,1} = 0$, tem-se $y_{1,1} = 1$

¹Para tornar os exemplos mais claros, consideramos uma etiqueta adicional nas arestas, que denota a soma dos vértices adjacentes.



Tem-se agora que $x_{1,1} + z_{1,1} = 5$, pelo que $x_{1,1} = 5$. Mas $3 = x_{1,1} + y_{1,1} = 1 + 5 = 6$, o que é um absurdo.

Tem-se então $x_{1,2} = 1$ e $y_{1,2} = 0$.



Como $y_{1,2} + z_{1,2} = 1$, resulta então que

$$z_{1,2} = 1$$

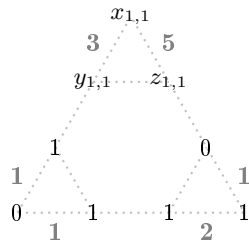
Por **(BZ 3)**, $2 = x_{1,2} + z_{1,2} = z_{1,1} + x_{2,2}$. Existem agora dois casos distintos: $(x_{2,2} = 1 \wedge z_{2,2} = 0)$ ou $(x_{2,2} = 0 \wedge z_{2,2} = 1)$.

Suponhamos que $(x_{2,2} = 1 \wedge z_{2,2} = 0)$. Então, $z_{1,1} = 1$ e $y_{2,2} = 2$. Por **(BZ 2)**, $3 = x_{2,2} + y_{2,2} = y_{1,1} + x_{1,2}$, pelo que

$$y_{1,1} = 2$$

Como $x_{1,1} + y_{1,1} = 3$, resulta que $x_{1,1} = 1$. Mas então $5 = x_{1,1} + z_{1,1} = 1 + 1 = 2$, o que é um absurdo.

Tem-se então $(x_{2,2} = 0 \wedge z_{2,2} = 1)$

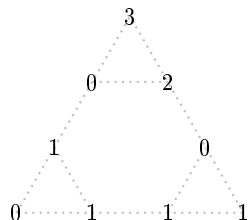


Pela condição **(BZ 3)**, tem-se $2 = x_{1,2} + z_{1,2} = z_{1,1} + x_{2,2}$. Como $x_{2,2} = 0$, tem-se

$$z_{1,1} = 2$$

Analogamente, por **(BZ 2)** tem-se $y_{1,1} = 1$. Por fim, uma vez que $x_{1,1} + 2 = 5$ (ou $x_{1,1} + 0 = 3$), tem-se $x_{1,1} = 3$.

Assim, o único triângulo BZ de tipo (λ, μ, ν) é dado por

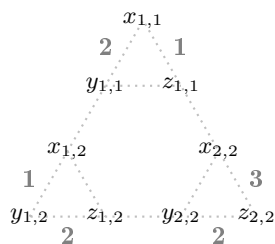


Logo, $c_{\mu, \nu}^{\lambda} = |\text{BZ}_2(\lambda, \mu, \nu)| = 1$.

Exemplo 4.13. Consideremos as partições $\lambda = (5, 4, 1)$, $\mu = (3, 1)$ e $\nu = (4, 2)$ e calculemos o coeficiente $c_{\mu, \nu}^{\lambda}$, determinando a cardinalidade de $\text{BZ}_2(\lambda, \mu, \nu)$. Tem-se

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 - \lambda_2 = 5 - 4 = 1 & \mu_1 - \mu_2 = 3 - 1 = 2 & \nu_1 - \nu_2 = 4 - 2 = 2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 4 - 1 = 3 & \mu_2 - \mu_3 = 1 - 0 = 1 & \nu_2 - \nu_3 = 2 - 0 = 2 \end{array}$$

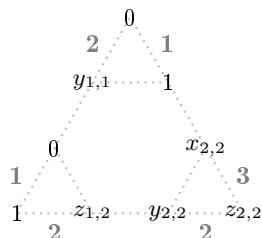
Logo, um triângulo BZ de tipo (λ, μ, ν) será da forma



Uma vez que as entradas do triângulo são números inteiros não negativos, existem quatro possibilidades distintas para as entradas $x_{1,1}, z_{1,1}, x_{1,2}$ e $y_{1,2}$:

1. $x_{1,1} = 0, z_{1,1} = 1, x_{1,2} = 0, y_{1,2} = 1.$
2. $x_{1,1} = 1, z_{1,1} = 0, x_{1,2} = 1, y_{1,2} = 0.$
3. $x_{1,1} = 0, z_{1,1} = 1, x_{1,2} = 1, y_{1,2} = 0.$
4. $x_{1,1} = 1, z_{1,1} = 0, x_{1,2} = 0, y_{1,2} = 1.$

No primeiro caso, obtém-se o triângulo

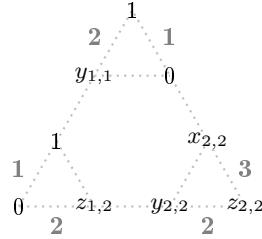


Como $x_{1,1} + y_{1,1} = 2$, resulta que $y_{1,1} = 2$. Analogamente, como $y_{1,2} + z_{1,2} = 2$, tem-se $z_{1,2} = 1$.

Pela condição **(BZ 1)**, $3 = y_{1,1} + z_{1,1} = z_{1,2} + y_{2,2}$, pelo que $y_{2,2} = 2$. Consequentemente, $z_{2,2} = 0$.

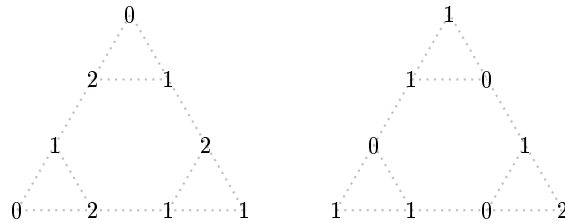
Pela condição **(BZ 2)**, $2 = y_{1,1} + x_{1,2} = x_{2,2} + y_{2,2}$, pelo que $x_{2,2} = 0$. Mas nesse caso, $x_{2,2} + z_{2,2} = 0$, o que contraria a condição imposta pelo tipo do triângulo.

No segundo caso, tem-se o triângulo



Como $x_{1,1} + y_{1,1} = 2$, tem-se $y_{1,1} = 1$. E como $y_{1,2} + z_{1,2} = 2$, resulta que $z_{1,2} = 2$. Assim, por **(BZ 3)**, $3 = x_{1,2} + z_{1,2} = z_{1,1} + x_{2,2}$ e portanto $x_{2,2} = 3$. Por **(BZ 2)** $2 = y_{1,1} + x_{1,2} = x_{2,2} + y_{2,2}$, e ter-se-ia $y_{2,2} = -1$, o que contraria o facto de $y_{2,2}$ ser um número inteiro não negativo.

Nos restantes casos é simples verificar que se obtêm os triângulos BZ



Logo, $c_{\mu,\nu}^\lambda = |\text{BZ}_2(\lambda, \mu, \nu)| = 2$.

4.5 Colmeias e Contratableaux

Fulton estabelece em [6] uma bijecção entre colmeias e contratableaux, uma estrutura semelhante aos tableaux, mostrando de seguida que os contratableaux e tableaux LR estão em bijecção, por resultados elementares relativos ao produto de tableaux. As referências para esta secção são [6] e [10].

Recordemos que, dada uma colmeia $H \in H_n(\lambda, \mu, \nu)$, é possível determinar as partições λ, μ e ν a partir das suas fronteiras. A ideia principal da construção que se segue é usar as diagonais no sentido NE-SO para determinar uma cadeia de subpartições, que serão posteriormente usadas para preencher um contratableau.

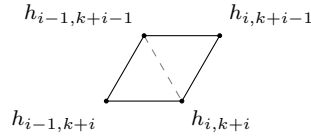
4.5.1 Correspondência entre Colmeias e Contratableaux

Sejam λ , μ e ν partições e seja $H \in H_n(\lambda, \mu, \nu)$. Defina-se, para cada $1 \leq i \leq n$, subpartições $\mu^{(i)} = (\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{n+1-i}^{(i)})$ da partição μ , onde

$$\mu_k^{(i)} = h_{i-1, k+i-1} - h_{i-1, k+i-2} \quad (4.55)$$

As condições de rombo, nas colmeias, têm implicações nos termos destas subpartições.

A condição **(RC 1)** garante que, num rombo de forma



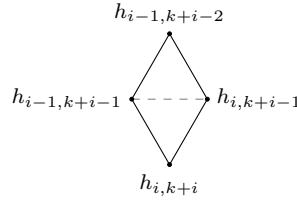
se tem $h_{i, k+i} + h_{i-1, k+i-1} \geq h_{i, k+i-1} + h_{i-1, k+i}$ e portanto

$$h_{i, k+i} - h_{i, k+i-1} \geq h_{i-1, k+i} - h_{i-1, k+i-1}$$

Logo,

$$\mu_k^{(i+1)} \geq \mu_{k+1}^{(i)} \quad (4.56)$$

A condição **(RC 2)**, num rombo de forma



implica que $h_{i-1, k+i-1} + h_{i, k+i-1} \geq h_{i-1, k+i-2} + h_{i, k+i}$ e portanto

$$h_{i-1, k+i-1} - h_{i-1, k+i-2} \geq h_{i, k+i} - h_{i, k+i-1}$$

Logo,

$$\mu_k^{(i)} \geq \mu_k^{(i+1)} \quad (4.57)$$

Tem-se então, por (4.56) e (4.57),

$$\mu_k^{(i)} \geq \mu_{k+1}^{(i)} \quad (4.58)$$

o que prova que $\mu^{(i)}$ é partição. A condição (4.57) garante ainda que $\mu = \mu^{(1)} \supseteq \mu^{(2)} \supseteq \dots \supseteq \mu^{(n)} \supseteq \mu^{(n+1)} := \emptyset$.

Vamos agora construir um *contratableau* T de forma de μ . Um *contratableau* pode ser interpretado como um *tableau* usual de forma μ rodado 180 graus. Rigorosamente, é um *tableau* enviesado de forma $(\mu_1, \mu_1 \dots, \mu_1) / (\mu_1 - \mu_n, \mu_1 - \mu_{n-1}, \dots, 0)$. As caixas de T preenchem-se colocando i em todas as caixas do *contratableau* de forma $\mu^{(i)} / \mu^{(i+1)}$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 4.14. Considere-se a seguinte colmeia associada às partições $\lambda = (6, 4, 3)$, $\mu = (4, 2, 2)$ e $\nu = (3, 1, 1)$

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ & & 4 & 6 \\ & 6 & 9 & 10 \\ 8 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$

Por (4.55), obtêm-se as subpartições

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= (4, 2, 2) \\ \mu^{(2)} &= (3, 2) \\ \mu^{(3)} &= (2) \end{aligned}$$

obtendo-se assim o contratableau

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Seja $U(\nu)$ o tableau superstandard de forma ν considere-se a respectiva palavra, $w(U(\nu))$.

Exemplo 4.15. Com $\nu = (3, 1, 1)$, tem-se o tableau

$$U(\nu) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

e a sua palavra $w(U(\nu)) = 32111$.

Afirmamos a condição **(RC 3)** é equivalente a $w(T).w(U(\nu))$ ser palavra de Yamanouchi. Mostremos então que, dado um sufixo u da referida palavra, $N(i, u) \leq N(i-1, u)$. É suficiente mostrar a desigualdade para sufixos que correspondem à divisão, na linha k a contar de baixo, entre elementos estritamente menores que i e elementos maiores ou iguais a i (uma vez que, juntando os eventuais $(i-1)$'s que possam sobrar nessa linha, a desigualdade mantém-se).

Seja então u um sufixo nessas condições.

$$\begin{aligned} N(i, u) &= \nu_i + (\mu_k^{(i)} - \mu_k^{(i+1)}) + (\mu_{k+1}^{(i)} - \mu_{k+1}^{(i+1)}) + \cdots + (\mu_{n-(i-1)}^{(i)} - 0) \\ &= \underbrace{\nu_i}_1 + \underbrace{(\mu_k^{(i)} + \mu_{k+1}^{(i)} + \cdots + \mu_{n-i+1}^{(i)})}_2 - \underbrace{(\mu_k^{(i+1)} + \mu_{k+1}^{(i+1)} + \cdots + \mu_{n-i}^{(i+1)})}_3 \end{aligned}$$

Tem-se então

1. $\nu_i = h_{i,n} - h_{i-1,n}$
2. $\mu_k^{(i)} + \mu_{k+1}^{(i)} + \cdots + \mu_{n-i+1}^{(i)} = h_{i-1,k+i-1} - h_{i-1,k+i-2} + h_{i-1,k+i} - h_{i-1,k+i-1} + \cdots + h_{i-1,n} - h_{i-1,n-1}$
 $= h_{i-1,n} - h_{i-1,k+i-2}$
3. $\mu_k^{(i+1)} + \mu_{k+1}^{(i+1)} + \cdots + \mu_{n-i}^{(i+1)} = h_{i,k+i} - h_{i,k+i-1} + h_{i,k+i+1} - h_{i,k+i} + \cdots + h_{i,n} - h_{i,n-1}$
 $= h_{i,n} - h_{i,k+i-1}$

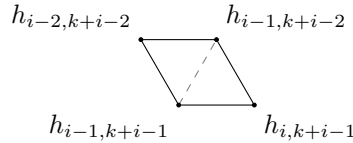
Logo,

$$\begin{aligned} N(i, u) &= h_{i-1, n} - h_{i-1, k+i-2} - h_{i, n} + h_{i, k+i-1} + h_{i, n} - h_{i-1, n} \\ &= h_{i, k+i-1} - h_{i-1, k+i-2} \end{aligned} \quad (4.59)$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$\begin{aligned} N(i-1, u) &= \nu_{i-1} + (\mu_{k+1}^{(i-1)} - \mu_{k+1}^{(i)}) + (\mu_{k+2}^{(i-1)} - \mu_{k+2}^{(i)}) + \cdots + (\mu_{n-(i-2)}^{(i-1)} - 0) \\ &= h_{i-1, k+i-1} - h_{i-2, k+i-2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Finalmente, consideremos considerando a condição **(RC 3)** num rombo de forma



tem-se que

$$h_{i-1, k+i-1} + h_{i-1, k+i-2} \geq h_{i-2, k+i-2} + h_{i, k+i-1} \quad (4.61)$$

e portanto $h_{i-1, k+i-1} - h_{i-2, k+i-2} \geq h_{i, k+i-1} - h_{i-1, k+i-2}$, ou seja,

$$N(i-1, u) \geq N(i, u)$$

o que corresponde à condição de Yamanouchi.

Note-se ainda que o número de ocorrências de i em todo o contratableau T é dado por

$$\begin{aligned} N(i, w(T)) &= (\mu_1^{(i)} - \mu_1^{(i+1)}) + \cdots + (\mu_{n-i}^{(i)} - \mu_{n-i}^{(i+1)}) + (\mu_{n-i+1}^{(i)} - 0) \\ &= (\mu_1^{(i)} + \cdots + \mu_{n-i+1}^{(i)}) - (\mu_1^{(i+1)} + \cdots + \mu_{n-i}^{(i+1)}) \\ &= (h_{i-1, i} - h_{i-1, i-1} + \cdots + h_{i-1, n} - h_{i-1, n-1}) - (h_{i, i+1} - h_{i, i} + \cdots + h_{i, n} - h_{i, n-1}) \\ &= h_{i-1, n} - h_{i-1, i-1} - h_{i, n} + h_{i, i} \\ &= (h_{i, i} - h_{i-1, i-1}) - (h_{i, n} - h_{i-1, n}) = \lambda_i - \nu_i \end{aligned} \quad (4.62)$$

Este processo é reversível. Dado um contratableau T de forma μ e tal que $w(T).w(U(\nu))$ seja palavra de Yamanouchi é possível recuperar a colmeia inicial. As fronteiras μ e ν são dadas e a partição λ é determinada pela condição (4.62). T determina também uma cadeia de subpartições $\mu = \mu^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \mu^{(n)}$, pondo $\mu_k^{(i)}$ igual ao número de ocorrências de $i, i+1, \dots, n$ na linha $n - (k-1)$. Estas subpartições vão determinar as restantes entradas da colmeia. É também evidente que estes processos são o inverso um do outro, o que prova então a bijecção entre contratableaux e colmeias.

4.5.2 Correspondência entre Contratableaux e Tableaux LR

Vamos agora definir uma correspondência entre uma subclasse de contratableaux e tableaux de Littlewood-Richardson. Em primeiro lugar, será estabelecida uma bijecção entre pares de certos tableaux e tableaux de Littlewood-Richardson, que

tornará evidente a relação entre funções de Schur enviesadas e funções de Schur normais.

Começamos por mostrar o seguinte lema.

Lema 4.12. *Seja $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ uma permutação generalizada tal que $\pi \xleftrightarrow{RSK} (T, U)$. Seja P um tableau de forma normal e considerem-se as inserções*

$$r_{j_n} \cdots r_{j_1}(P).$$

Forme-se um diagrama com as caixas acrescentadas a cada inserção e nas inserções anteriores, e coloque-se sucessivamente i_1, \dots, i_n nas caixas novas. O tableau obtido, S , será um tableau enviesado tal que $\text{Rect}(S) = U$.

Demonstração. Tome-se um tableau P_0 com a mesma forma de P e com letras menores que qualquer letra de P – pode considerar-se por exemplo um alfabeto com inteiros negativos. Pela correspondência RSK, tem-se que existe uma permutação generalizada σ tal que

$$(P, P_0) \xleftrightarrow{RSK} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_t \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_t \end{pmatrix} = \sigma$$

Considere-se a permutação generalizada $\sigma * \pi$ que corresponde a ordenação lexicográfica da sequência

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_t & i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_t & j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Pela correspondência RSK, $\sigma * \pi \xleftrightarrow{RSK} (P \cdot T, V)$, uma vez que $P \cdot T$ resulta da inserção de j_1, \dots, j_n em T . O tableau V é o tableau de registo, pelo que é o tableau cujas entradas a_1, \dots, a_t formam P_0 e as entradas i_1, \dots, i_n formam S .

Considere-se agora $(\sigma * \pi)^{-1} = \rho$. Pelo Teorema da Simetria, tem-se

$$(\sigma * \pi)^{-1} \xleftrightarrow{RSK} (V, P \cdot T)$$

assim como $(\pi)^{-1} \xleftrightarrow{RSK} (U, T)$. Como a inserção preserva a Knuth-equivalência, tem-se que

$$\check{\rho} \stackrel{K}{\equiv} w(V).$$

Removendo as letras a_j , obtém-se uma palavra Knuth-equivalente a $w(U)$. Se removermos as n menores letras de $w(V)$ obtemos $w(S)$.

Pelo lema 1.5, ao remover as m menores letras de palavras Knuth-equivalentes, obtêm-se palavras Knuth-equivalentes. Logo,

$$w(S) \stackrel{K}{\equiv} w(U)$$

e pelo teorema 1.4, $\text{Rect}(S) = U$. □

Consideremos agora partições λ, μ e ν , tais que $\mu \subseteq \lambda$ e $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ (com $|\mu| = t$ e $|\nu| = n$). Sejam U_0 e V_0 tableaux de formas ν e λ , respectivamente. Definimos os conjuntos

$$\mathcal{S}(\lambda/\mu, U_0) = \{\text{tableaux enviesados } S \text{ com forma } \lambda/\mu \text{ e tais que } \text{Rect}(S) = U_0\}$$

$$\mathcal{T}(\mu, \nu, V_0) = \{(T, U) \text{ com } T \text{ tableau de forma } \mu, U \text{ tableau de forma } \nu \\ \text{e tais que } T \cdot U = V_0\}$$

Proposição 4.13. *Dados quaisquer tableaux U_0 e V_0 de formas ν e λ , existe uma bijecção entre os conjuntos $\mathcal{S}(\lambda/\mu, U_0)$ e $\mathcal{T}(\mu, \nu, V_0)$.*

Demonstração. Seja $(T, U) \in \mathcal{T}(\mu, \nu, V_0)$. Seja π a permutação generalizada correspondente ao par (U, U_0) pela correspondência RSK, com

$$(U, U_0) \xleftrightarrow{RSK} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \pi$$

Consideremos as inserções $r_{j_n} \dots r_{j_1}(T)$ e seja S o tableau enviesado obtido pela colocação de i_1, \dots, i_n nas caixas acrescentadas em cada inserção. Como $r_{j_n} \dots r_{j_1}(T) = T \cdot U = V_0$, pelo lema 4.12, tem-se $S \in \mathcal{S}(\lambda/\mu, U_0)$.

Seja agora $S \in \mathcal{S}(\lambda/\mu, U_0)$. Escolhemos um tableau T_0 e forma μ tal que as suas letras sejam menores que todas as letras de S . Seja $T_0 \sqcup S$ o tableau de forma λ tal que nas caixas de μ aparecem as caixas de T_0 e na parte λ/μ aparece S . Como V_0 é de forma λ , pela correspondência RSK, tem-se

$$(V_0, T_0 \sqcup S) \xleftrightarrow{RSK} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_t & i_1 & \cdots & i_n \\ b_1 & \cdots & b_t & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Mostremos então que

$$(T, T_0) \xleftrightarrow{RSK} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_t \\ b_1 & \cdots & b_t \end{pmatrix}$$

e que

$$(U, U_0) \xleftrightarrow{RSK} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

com T e U tableaux de formas μ e ν e tais que $T \cdot U = V_0$.

Pela correspondência RSK, T e U são de formas μ e ν , respectivamente, por serem as formas de T_0 e U_0 . Pela definição de produto, tem-se $T \cdot U = r_{j_n} \dots r_{j_1} r_{b_t} \dots r_{b_1}(\emptyset) = V_0$. Mostra-se também assim que T_0 é o tableau respeitante à colocação na primeira correspondência, uma vez que, por ter todas as t letras menores que as de S , elas devem ser necessariamente a_1, \dots, a_t . Pelo lema 4.12, o tableau U_0 deve ser o tableau de registo na segunda correspondência. Têm-se então os tableaux $(T, U) \in \mathcal{T}(\mu, \nu, V_0)$. Mais, estes processos são claramente inversos um do outro. \square

Como conclusão, apresentamos uma bijecção entre contratableaux e tableaux LR, ficando assim estabelecida uma nova bijecção entre colmeias e tableaux LR.

Começamos por demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.13. *Sejam λ, μ e ν partições e seja T um contratableau de forma μ , tal que $N(i, w(T)) = \lambda_i - \nu_i$, para $i = 1, \dots, n = l(\lambda)$. Então, $w(T).w(U(\nu))$ é palavra de Yamanouchi se e só se as palavras $w(T).w(U(\nu))$ e $w(U(\lambda))$ forem Knuth-equivalentes.*

Demonstração. Suponhamos que $w(T).w(U(\nu))$ é Knuth-equivalente a $w(U(\lambda))$. Como $w(U(\lambda))$ é palavra de Yamanouchi, tem-se pelo lema 3.2 que $w(T).w(U(\nu))$ também o é.

Reciprocamente, seja $w(T).w(U(\nu))$ palavra de Yamanouchi. Pela proposição 1.4, esta palavra é Knuth-equivalente à palavra de um único tableau, $T \cdot U(\nu) = \text{Rect}(T * U(\nu))$. Tem-se que $T * U(\nu)$ é um tableau LR, uma vez que ambos os seus constituintes são semistandard (e não há sobreposição entre eles) e a sua palavra, $w(T).w(U(\nu))$, é palavra de Yamanouchi, por hipótese. O seu conteúdo satisfaz $N(i, T) + N(i, U(\nu)) = \lambda_i - \nu_i + \nu_i = \lambda_i$. Logo, pelo lema 3.3, $\text{Rect}(T * U(\nu)) = U(\lambda)$. Assim, $w(T).w(U(\nu)) \stackrel{K}{=} w(T \cdot U(\nu)) = w(U(\lambda))$. \square

Mostremos agora que, dado um contratableau T de forma μ , o tableau $R = \text{Rect}(T)$ tem forma μ . T é um tableau enviesado semistandard, pelo que não existem colunas com dois elementos iguais. Mais, T está alinhado à direita em cada linha. Assim, podemos rectificar T de uma maneira específica. Vamos também assumir que T é enviesado não normal e que $\lambda_1 > \lambda_2$. Caso contrário o processo seguinte deve iniciar-se na primeira linha $n - k + 1$ tal que $\lambda_k > \lambda_{k+1}$.

1. Começamos por rectificar as duas últimas linhas de T . Os cantos interiores estão na penúltima linha, pelo que, quando se fizer o deslizamento, as caixas vazias dessa linha serão ocupadas com caixas removidas da última linha.

As caixas da última linha que têm uma caixa vazia por cima serão as escolhidas para deslizar. Suponhamos que $k = z_1 < u_p = l$, e que estão respectivamente nas caixas c e c' . Então, c está na forma $\mu^{(k)}/\mu^{(k+1)}$ enquanto c' está na forma $\mu^{(l)}/\mu^{(l+1)}$. Mas então $\mu^{(k)} \supseteq \mu^{(l)}$

Fica então a última linha com μ_2 caixas e a penúltima com μ_1 caixas.

2. Rectificamos agora as últimas três linhas, usando os cantos interiores que estão na terceira linha a contar de baixo. Pelo deslizamento, essa linha ficará com μ_1 caixas. Rectificam-se então as duas últimas linhas como anteriormente, pelo que agora as três últimas linhas têm, respectivamente, μ_1, μ_2 e μ_3 caixas, alinhadas à esquerda.
3. Por indução, suponhamos que foram já rectificadas as últimas $k - 1$ linhas. Assim, a linha k , contando do final, tem μ_k caixas, enquanto as linhas abaixo têm μ_1, \dots, μ_{k-1} caixas. Rectificando como anteriormente, o tableau ficará com as últimas k linhas com, respectivamente $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k$ caixas.

Logo, R tem forma μ . Além disso, como $w(S) \stackrel{K}{=} w(T)$, tem-se

$$w(R).w(U(\nu)) \stackrel{K}{=} w(U(\lambda)) \quad (4.64)$$

Como todo o processo de deslizamento é reversível, tem-se a correspondência pretendida. Para concluir, observamos que (4.64) equivale a afirmar que $R \cdot U(\nu) = U(\lambda)$, no monóide pláctico. Então, o lema 4.12 e a proposição 4.13 estabelecem uma bijecção que aplica o par $(R, U(\nu))$ num tableau LR de forma λ/μ .

Exemplo 4.16. Sejam $\lambda = (6, 4, 3)$, $\mu = (4, 2, 2)$ e $\nu = (3, 1, 1)$ partições. Consideremos o contratableau de forma μ

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Note-se que $w(T).w(U(\nu)) = 123322113211$, que é palavra de Yamanouchi. Mais, $N(1, W(T)) = 3 = \lambda_1 - \nu_1 N(2, W(T)) = 3 = \lambda_2 - \nu_2 N(3, W(T)) = 2 = \lambda_3 - \nu_3$

Começamos por rectificar a linha 2, aplicando deslizamento para a frente nas caixas (2, 2) e (2, 1):

$$j_{(2,2)}(T) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad j_{(2,1)}j_{(2,2)}(T) = Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Aplicando agora deslizamentos para a frente nas caixas (1, 2) e (1, 1), resulta

$$j_{(1,2)}(Q) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline \end{array} \quad j_{(1,1)}j_{(1,2)}(Q) = R = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

obtendo-se efectivamente um tableau R de forma μ . A bijecção definida pelo lema 4.12 e pela proposição 4.13 faz assim corresponder ao par

$$(R, U(\nu)) = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

o tableau de Littlewood-Richardson de forma λ/μ e conteúdo ν

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] R.T. BAYLEY, *Young Tableaux and the Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, Master Thesis, University of Leicester, 2002.
- [2] E. BENDER, D. KNUTH, Enumeration of Plane Partitions, *Journal of Combinatorial Theory* **13** (1972), 40-54.
- [3] A.D. BERENSTEIN, A.V. ZELEVINSKY, Involutions on Gelfand-Tsetlin schemes and multiplicities in skew GL_n -modules, *Soviet Math. Dokl.* **37** (3) (1988), 799-802.
- [4] A.D. BERENSTEIN, A.V. ZELEVINSKY, Triple multiplicities for $sl(r+1)$ and the spectrum of the exterior algebra of the adjoint representation, *Journal of Algebraic Combinatorics* **1** (1992), 7-22.
- [5] C. BRUUN, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Flag Manifolds*, Master Thesis, Rice University, 2010.
- [6] A.S. BUCH, The Saturation Conjecture (after A. Knutsen and T. Tao), with an appendix by W. Fulton, *Enseign. Math* **2** (46) (2000), 43-60.
- [7] V.I. DANILOV, G.A. KOSHEVOI, Arrays and the combinatorics of Young tableaux, *Russian Math. Surveys* **60** (2) (2005), 269-334.
- [8] P. DOOLAN, S. KIM, The Littlewood-Richardson Rule and Gelfand-Tsetlin patterns, preprint arXiv: 1203.2727.
- [9] S. FOMIN, Knuth Equivalence, Jeu de Taquin, and the Littlewood-Richardson Rule (Appendix 1 to Chapter 7 in: R. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 2*, Cambridge University Press, 2001).
- [10] W. FULTON, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, 1996.
- [11] V. GASHAROV, A Short Proof of the Littlewood-Richardson Rule, *Europ. J. Combinatorics* **19** (1998), 451-453.

- [12] I.M. GELFAND, M.L. TSETLIN, Finite-dimensional representations of the group of unimodular, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **71** (1950), 825–828.
- [13] I.M. GELFAND, A.V. ZELEVINSKY, Polyhedra in a space of diagrams and the canonical basis in irreducible representations of \mathfrak{gl}_3 , *Functional Anal. Appl.* **19** (2) (1985), 141–144.
- [14] M.D. HAIMAN, Dual Equivalence with applications, including a conjecture of Procter, *Discrete Math.* **99** (1992), 79-113.
- [15] R.C. KING, C. TOLLU, F. TOUMAZET, The Hive Model and the Polynomial Nature of Stretched Littlewood-Richardson Coefficients, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **54 A** (2006), article B54Ad.
- [16] D. KNUTH, Permutations, Matrices, and Generalized Young Tableaux, *Pacific Journal of Mathematics* **34** (3) (1970), 709-727.
- [17] A. KNUTSEN, T. TAO, The Honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I. Proof of the Saturation Conjecture, *Journal of the American Mathematical Society* **12** (4) (1999), 1055-1090.
- [18] D.E. LITTLEWOOD, A.R. RICHARDSON, Group Characters and Algebra, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **233**, (1934), 99-141.
- [19] I.G. MACDONALD, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.
- [20] R. MERRIS, *Multilinear Algebra*, CRC Press, 1997.
- [21] I. PAK, E. VALLEJO, Combinatorics and geometry of Littlewood-Richardson cones, *European Journal of Combinatorics* **26** (6) (2005), 995-1008.
- [22] G. DE B. ROBINSON, On representations of the symmetric group, *American Journal of Mathematics* **60** (1938), 745-760.
- [23] B. SAGAN, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nd ed., Springer, 2001.
- [24] C. SCHENSTED, Longest Increasing and Decreasing Subsequences, *Canadian Journal of Mathematics* **13** (1961), 179-191.
- [25] M. SCHÜTZENBERGER, La correspondance de Robinson (in D. Foata (ed.), *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 579, Springer-Verlag, 1977).
- [26] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics: Volume 2*, Cambridge University Press, 2001.
- [27] J.R. STEMBRIDGE, A Concise Proof of the Littlewood-Richardson Rule, *The Electronic Journal of Combinatorics* **9** (2002).
- [28] G. THOMAS, On Schensted's Construction and the Multiplication of Schur functions, *Advances in Mathematics* **30** (1978), 8-32.

- [29] M.A.A. VAN LEEUWEN, Part 3. The Littlewood-Richardson Rule, and Related Combinatorics (in Interaction of Combinatorics and Representation Theory, *The Mathematical Society of Japan Memoirs* **11** (2001), 95-145).