INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

CONSTITUIÇÃO DE RESERVAS PARA SINISTROS OCORRIDOS E AINDA NÃO PARTICIPADOS OU NÃO ENCERRADOS

ANÁLISE DE ALGUNS MÉTODOS DE PREVISÃO

Isabel Maria Ferraz Cordeiro

MARÇO DE 1991

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

CONSTITUIÇÃO DE RESERVAS PARA SINISTROS OCORRIDOS E AINDA NÃO PARTICIPADOS OU NÃO ENCERRADOS

ANÁLISE DE ALGUNS MÉTODOS DE PREVISÃO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Métodos Matemáticos Aplicados à Economia e Gestão de Empresas.

ISABEL MARIA FERRAZ CORDEIRO

MARÇO DE 1991

AGRADECIMENTOS

À orientadora desta dissertação, a Professora Doutora Maria de Lourdes Centeno, pelo seu empenho e valiosa ajuda ao longo de todo o trabalho.

Ao colega Dr. João Manuel Andrade e Silva, pelo seu contributo nalguns aspectos da parte prática desta dissertação (nomeadamente questões de informática).

Ao José Carlos, pelo seu apoio nos últimos momentos deste trabalho.

A todos os colegas e amigos que, de uma forma ou de outra, contribuíram incondicionalmente para a elaboração deste trabalho.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

As companhias seguradoras têm toda a conveniência em constituir reservas suficientes para fazerem face aos pagamentos de indemnizações que terão de efectuar no futuro relativamente a sinistros já ocorridos, tenham estes sinistros já sido participados (caso em que constituem reservas para indemnizações"IBNER" - "INCURRED BUT NOT ENOUGH REPORTED") ou não (caso em que constituem reservas para indemnizações"IBNR" - "INCURRED BUT NOT REPORTED"). Com essa finalidade, devem tentar obter previsões de boa qualidade para as suas indemnizações "IBNR" e "IBNER". Se não o fizerem, podem vir a deparar-se, no futuro, com problemas financeiros e, mesmo, ir à falência. Por outro lado, a previsão das referidas indemnizações pode constituir um instrumento importante no cálculo dos prémios.

Desta forma, a previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER" assume um papel fundamental na actividade seguradora.

A grande importância da previsão das indemnizações em questão, no contexto da actividade seguradora, começou a fazer-se sentir com mais intensidade a partir do início da década de 70. Isto deveu-se, essencialmente, ao facto de, a partir dessa altura, terem começado a surgir problemas financeiros nalgumas seguradoras, precisamente, por estas não terem constituído no passado os montantes de reservas adequados.

Como resposta aos referidos problemas financeiros das seguradoras, desde 1970, têm vindo a aparecer, na literatura especializada, cada vez mais métodos de previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER".

Estes métodos de previsão, com o passar dos anos, além de mais numerosos, têm-se vindo a tornar, também, cada vez mais sofisticados: quer em termos das hipóteses que apresentam, quer em termos das técnicas utilizadas na estimação dos seus parâmetros. De facto, os métodos publicados mais recentemente, que são, em geral, métodos estocásticos extremamente sofisticados, pouco têm a ver com os métodos que surgiram inicialmente (muitos deles anteriores a 1970), que são quase sempre, muito simples e não consideram a natureza aleatória dos montantes totais/ pagamentos das indemnizações.

Apesar da existência de um grande número de métodos estocásticos mais recentes à disposição das seguradoras, na literatura especializada, estas continuam a preferir utilizar, devido à sua grande simplicidade, os métodos não estocásticos mais antigos. O famoso método "chain-ladder" - um método não estocástico bastante antigo - é, ainda hoje, o mais utilizado pelas seguradoras.

Paradoxalmente, verifica-se, por vezes, que alguns dos métodos estocásticos mais recentes não fornecem bons resultados na prática (alguns métodos, por exemplo, devido a assumirem hipóteses muito sofisticadas, apresentam um grande número de parâmetros a estimar relativamente ao número de observações disponíveis). Devido a este facto, vamos dedicar este trabalho apenas ao estudo dos métodos mais importantes que surgiram durante a década de 70 e no início da década de 80. Incluem-se nestes, não só, alguns métodos não estocásticos (embora só dois deles possam ser considerados mais antigos), mas também, vários métodos estocásticos.

Apesar de alguns dos métodos estocásticos que vamos analisar terem algum grau de sofisticação, pensamos que estes podem, perfeitamente, ser utilizados, sem grandes dificuldades, por qualquer seguradora. Aliás, é a pensar nisso, que vamos tentar apresentar as partes deste trabalho que envolvem deduções matemáticas mais pesadas (ou resultados menos conhecidos) de uma forma tão compreensível quanto possível. Desta maneira, as referidas partes do trabalho poderão ser mais facilmente entendidas por pessoas que não possuam uma formação adequada a nível dos métodos matemáticos.

O objectivo deste trabalho é, portanto, fazer uma análise tão aprofundada quanto possível dos métodos de previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER" referidos acima. Atendendo, a que a informação existente sobre estes métodos na literatura especializada, além de pouco abundante, se encontra bastante dispersa, grande parte desta análise vai consistir na elaboração de uma síntese aprofundada dessa informação. No entanto, na tentativa de chegar um pouco mais longe, vai ainda efectuar-se um estudo de simulacão em que se avaliam comparativamente, em termos da qualidade das suas previsões, três dos métodos não estocásticos apresentados. Já anteriormente Buhlmann, Shnieper e Straub (1980) tinham revelado algumas das potencialidades da simulação na avaliação comparativa de métodos com características similares e cujas "perfomances" na previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER" dificilmente podem ser avaliadas de outra forma.

No ponto 2 do presente trabalho faz-se uma pequena introducão ao tema da previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER", abordando alguns aspectos teóricos relacionados com este. Introduzem-se alguns conceitos básicos e apresenta-se a informação estatística mais utilizada na previsão das referidas indemnizações (ponto 2.1); expõem-se os motivos que levam a que a previsão das indemnizações em questão seja uma tarefa essencial na actividade seguradora, referindo-se, também, os factores que podem conduzir uma seguradora a conferir mais ou menos importância à previsão das suas indemnizações "IBNR" e/ou "IBNER" (ponto 2.2) e, finalmente, apresentam-se os principais tipos de métodos de previsão que são propostos na literatura, aproveitando-se para referir resumidamente as características principais dos métodos mais importantes que surgiram durante a década de 70 e no início da década de 80 (ponto 2.3).

O ponto 3 é dedicado à apresentação de alguns métodos de previsão não estocásticos: o conhecido método "chain-ladder" e três das suas variantes (o método "cape cod", o método do complementar do rácio de perda e o método dos mínimos quadrados de De Vylder). Os três métodos apresentados em último lugar são considerados variantes do método "chain-ladder" pelo facto de todos utilizarem, de alguma forma, a sua hipótese básica. Apesar de dois dos referidos métodos serem relativamente recentes, todos eles são bastante simples de aplicar.

No ponto 4, por sua vez, apresentam-se e analisam-se alguns métodos estocásticos: o método de Straub, os métodos da separação (aritmética e geométrica) de Taylor, o modelo probabilístico de Bühlmann, Schnieper e Straub e o método da credibilidade de De Vylder. Qualquer destes métodos é mais sofisticado do que os métodos apresentados no ponto 3. No entanto, enquanto o método de Straub é pouco estruturado em termos de hipóteses, o modelo proposto por Bühlmann, Schnieper e Straub, ao partir do estudo das indemnizacões individuais, apresenta um conjunto de hipóteses já bastante sofisticado.

Finalmente, no ponto 5, faz-se a apresentação e a análise dos resultados do já referido estudo de simulação em que se avaliam comparativamente três dos métodos não estocásticos apresentados no ponto 3: o método "chain-ladder", o método "cape cod" e o método dos mínimos quadrados de De Vylder. São métodos com características muito semelhantes (quer em termos de hipóteses, quer em termos dos conjuntos de informação estatística utilizados), cuja qualidade das respectivas previsões é difícil de avaliar de outra forma pelo facto de serem não estocásticos. A avaliação comparativa dos três métodos é feita com base nalgumas medidas de "performance" construídas para o efeito.

2 PREVISÃO DE RESERVAS "IBNR" E "IBNER"

2.1 CONCEITOS BÁSICOS E INFORMAÇÃO ESTATÍSTICA MAIS UTILIZADA

Em qualquer ramo da actividade seguradora constata-se que decorre um determinado período de tempo entre a ocorrência de um sinistro e o pagamento completo, por parte da companhia seguradora, da indemnização relativa a esse sinistro. Dentro deste período de tempo podem distinguir-se dois subperíodos consecutivos e completamente distintos: em primeiro lugar, aquele que medeia entre a ocorrência do sinistro[1] e a sua participação pelo segurado à seguradora; em segundo, o que se situa entre a participação do sinistro e o pagamento completo da indemnização correspondente.

No âmbito de uma determinada seguradora, os sinistros que se situam no primeiro dos subperíodos referidos, são sinistros que embora já tenham ocorrido ainda não foram participados, não tendo, portanto, a seguradora conhecimento da sua existência. Devido a este facto, as indemnizações relativas a estes sinistros são vulgarmente designadas na literatura por indemnizações "IBNR" ("INCURRED BUT NOT REPORTED"). Os que se situam no segundo subperíodo, são sinistros que já foram participados mas cujas indemnizações ainda não foram completamente pagas. Embora a seguradora já tenha sido informada da sua existência, ainda não conhece os montantes totais das respectivas indemnizações. Estas últimas são, geralmente, designadas por indemnizações "IBNER" ("INCURRED BUT NOT ENOUGH REPORTED"). Alguns autores também as chamam indemnizações "RBNS" ("REPORTED BUT NOT SETTLED"), por considerarem este termo mais adequado.

A duração do período de tempo entre a ocorrência de um sinistro e o pagamento completo da indemnização que lhe diz respeito

---

[1] No âmbito deste trabalho, apenas interessam aqueles sinistros que são participados às seguradoras. Isto, porque, como é do conhecimento geral, nem todos os sinistros que ocorrem são participados pelos segurados às respectivas seguradoras.

varia consoante as características específicas da indemnização e, principalmente, consoante o ramo[2] a que esta pertence. Se nalguns ramos este período de tempo tende a ser reduzido (no máximo 4 a 5 anos), noutros, chega a ultrapassar uma década (por vezes mais de 15 anos). O primeiro conjunto de ramos costuma ser designado por "short-tail business" e o segundo por "long-tail business".

Principalmente nos ramos considerados "long-tail business", as seguradoras, ao encerrarem as contas de um determinado ano, conhecem apenas uma pequena parte do montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nesse ano. Conhecem também só em parte os montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos em anos anteriores. Desta forma, sabem que no futuro terão de efectuar pagamentos referentes a estas indemnizações. Por um lado, pagamentos relativos às indemnizações cujos sinistros ainda nem sequer foram participados; por outro, pagamentos relativos às indemnizações cujos sinistros já foram participados, mas que ainda não foram pagas ou só foram pagas parcialmente. É, precisamente, a previsão destes pagamentos futuros que a literatura designa, de forma apropriada, por previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER" respectivamente.

As indemnizações "IBNR" e "IBNER" podem ser previstas separadamente ou em conjunto (neste último caso, prevêm-se as indemnizações "IBNR+IBNER"). Em qualquer dos casos, a previsão pode ser feita com base num conjunto de informação estatística que, em termos gerais, descreve a experiência passada em relação às indemnizações cujos sinistros ocorreram e foram participados nos anos anteriores. Este conjunto de informação estatística, que é diferente conforme se esteja a considerar um ou outro caso, pode variar também consoante o método de previsão utilizado.

---

[2] O conceito de ramo da actividade seguradora, aqui utilizado, entra em consideração, não só com o tipo de riscos segurados, mas também com o facto de os riscos serem segurados através de seguros directos ou de resseguros.

A parte mais relevante do conjunto de informação estatística referido acima é apresentada, geralmente, sob a forma de um ou mais triângulos de dados: os famosos "run-off triangles". Quase todos estes triângulos de dados apresentam a seguinte configuração:

Ano de Ocorrência/Ano de Notificação	Ano de Desenvolvimento					
	0	1	2	...	n-1	n
0	k_{00}	k_{01}	k_{02}	...	$k_{0,n-1}$	k_{0n}
1	k_{10}	k_{11}	k_{12}	...	$k_{1,n-1}$	
.	.	.	.	...		
.	.	.	.			
.	.	.	.			
n-2	$k_{n-2,0}$	$k_{n-2,1}$	$k_{n-2,2}$			
n-1	$k_{n-1,0}$	$k_{n-1,1}$				
n	k_{n0}					

em que k_{ij}, o elemento genérico do triângulo, é uma determinada quantidade referente ao ano de ocorrência/notificação i e ao ano de desenvolvimento j (o conceito de ano de desenvolvimento, como veremos em seguida, varia com o triângulo específico que se está a considerar) e n é o último ano para o qual existem dados disponíveis.

Quando se querem prever separadamente as indemnizações "IBNR" e "IBNER" é necessário utilizar pelo menos dois triângulos de dados: um para prever as "IBNR" e outro para prever as "IBNER".

Em relação à previsão de indemnizações "IBNR", pode utilizar-se um triângulo cujo elemento genérico x_{ij} é o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados à seguradora j anos mais tarde, ou seja, no ano de desenvolvimento j (como veremos mais adiante, cada x_{ij}, geralmente, é uma estimativa e não uma observação) . Neste caso, cada ano de desenvolvimento indica o nº de anos que decorrem entre o ano de ocorrência dos sinistros e o ano em que estes são participados.

É fácil de verificar, que no triângulo apresentado no parágrafo anterior, cada linha i regista os montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e que foram sendo participados ao longo dos vários anos de desenvolvimento. Por outro lado, cada coluna j regista os montantes totais de todas as indemnizações relativas aos sinistros que foram participados j anos depois de terem ocorrido. Finalmente, cada diagonal do triângulo representa um ano de participação ou de notificação pois todos os montantes registados na mesma diagonal são referentes a indemnizações cujos sinistros foram participados no mesmo ano de calendário. Repare-se que a soma dos índices de cada um dos elementos registados numa determinada diagonal, $i+j$, é igual a uma constante. Essa constante é precisamente o ano de notificação.

Na previsão de indemnizações "IBNR", o triângulo referido acima também pode ser utilizado na sua versão cumulativa. Nesta versão, cada elemento passa a designar-se por X_{ij} e representa o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados até ao final do ano de desenvolvimento j, ou seja,

$$X_{ij} = \sum_{h=0}^{j} x_{ih} \qquad i = 0,1,\ldots,n \; ; \; j = 0,1,\ldots,n-i \, . \qquad (2.1)$$

Desta forma, o triângulo dos x_{ij} costuma ser designado por triângulo de dados não cumulativo e o dos X_{ij} por triângulo de dados cumulativo. Note-se, que aqui a dicotomia letra maiúscula/letra minúscula não representa a dicotomia variável aleatória/observação da variável aleatória, como geralmente acontece na literatura sobre Probabilidades e Estatística, mas sim a dicotomia cumulativo/não cumulativo.

Como já se viu, cada x_{ij} do triângulo utilizado na previsão das "IBNR" é a soma dos montantes totais de todas as indemnizações referentes aos sinistros ocorridos no ano i e participados à seguradora no ano de desenvolvimento j . No entanto, o montante total de uma indemnização só é conhecido quando esta é completamente paga, o que, nos ramos considerados "long-tail business", geralmente, só acontece vários anos após a participação do sinistro correspondente. Assim, no ano de notificação $i+j$, e mesmo nos primeiros anos a seguir, é impossível saber ao certo os montantes totais de todas as indemnizações relativas aos sinistros que foram participados nesse ano e, portanto, é impossível conhecer os verdadeiros valores dos x_{ij} . Isto implica que para construir o triângulo, seja necessário estimar praticamente todos esses elementos. As estimativas dos x_{ij} são, geralmente, baseadas nos pagamentos já efectuados (até ao ano em que é construído o triângulo) por conta das indemnizações relativas aos sinistros participados.

Uma forma alternativa de prever os montantes das indemnizações "IBNR", que consegue ultrapassar o problema anterior, passa por prever, em primeiro lugar, os números destas indemnizações. Para isso, torna-se necessário utilizar um triângulo de dados cujo elemento genérico n_{ij} é o nº de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de desenvolvimento j. As características deste triângulo são basicamente as mesmas do triângulo dos x_{ij} e, com base nele, é possível prever os n_{ij} futuros, ou seja, os números das indemnizações "IBNR". As previsões dos montantes das indemnizações "IBNR" podem, então, ser obtidas multiplicando a previsão de cada n_{ij} futuro pelo montante total médio estimado de uma indemnização respeitante a um sinistro ocorrido no ano i e participado no ano de desenvolvimento j. Esta outra forma de prever as indemnizações "IBNR", por um lado, evita a estimação dos x_{ij} mas, por outro, implica a estimação dos montantes totais médios das indemnizações relativas aos sinistros que vão ser participados nos anos futuros.

O triângulo com base no qual é feita a previsão dos números das indemnizações "IBNR", por vezes, também é utilizado na sua versão cumulativa. Nesta versão, o elemento genérico do triângulo é N_{ij} e representa o nº de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados até ao final do ano de desenvolvimento j, ou seja,

$$N_{ij} = \sum_{h=0}^{j} n_{ih} \qquad i = 0,1,\dots,n\ ;\ j = 0,1,\dots,n-i\,. \tag{2.2}$$

Passando às indemnizações "IBNER", a sua previsão baseia-se, quase sempre, num triângulo em que cada x_{ij} é o montante das indemnizações relativas aos sinistros participados no ano de notificação i que é pago no ano de desenvolvimento j. Neste caso, cada ano de desenvolvimento indica o nº de anos que decorrem entre o ano de participação ou de notificação dos sinistros e o ano em que as respectivas indemnizações são pagas (total ou parcialmente). Repare-se que aqui os x_{ij} representam quantidades diferentes daquelas que representavam no triângulo para a previsão das indemnizações "IBNR". O motivo pelo qual se utiliza a mesma notação nos dois casos, tem a ver com o facto de muitos dos métodos de previsão que vão ser apresentados ao longo deste trabalho se poderem utilizar, quer na previsão de indemnizações "IBNR", quer na de indemnizações "IBNER" e, portanto, serem aplicados exactamente da mesma forma aos dois triângulos. No entanto, sempre que, ao longo do texto, for necessário distingui-los, isso será feito.

No triângulo para a previsão de indemnizações "IBNER", cada linha i regista os pagamentos feitos ao longo do tempo referentes às indemnizações cujos sinistros foram participados no ano de notificação i. Cada coluna j regista todos os pagamentos de indemnizações que foram efectuados j anos após terem sido participados os respectivos sinistros. E cada diagonal representa um ano de pagamento já que todos os pagamentos registados na mesma diagonal foram feitos no mesmo ano de calendário. Somando os índices de qualquer elemento registado numa determinada diagonal, obtemos o ano de pagamento correspondente a essa diagonal.

Repare-se que não foi apenas o conceito de ano de desenvolvimento que mudou na passagem do triângulo dos x_{ij} para a previsão das "IBNR" para o triângulo que permite prever as "IBNER". Enquanto no primeiro, as linhas representam anos de ocorrência e as diagonais, anos de notificação; no segundo, as linhas representam anos de notificação e as diagonais, anos de pagamento. O primeiro triângulo fornece informação sobre a ocorrência dos sinistros e sobre os montantes totais das indemnizações relativas aos conjuntos desses sinistros que foram sendo participados ao longo do tempo; o segundo, informa sobre a notificação dos sinistros e sobre os pagamentos das indemnizações correspondentes ao longo do tempo.

Tal como os triângulos anteriores, o referido triângulo para a previsão de indemnizações "IBNER" também pode ser utilizado em termos cumulativos. No triângulo cumulativo, cada elemento X_{ij} é o montante das indemnizações relativas aos sinistros participados no ano de notificação i que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j.

Quando se pretende prever as indemnizações "IBNR" e "IBNER" em conjunto, ou seja, prever as indemnizações "IBNR+IBNER", pode utilizar-se apenas um triângulo de dados. Geralmente, utiliza-se um triângulo cujo elemento genérico x_{ij} representa o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que é pago no ano de desenvolvimento j. Neste triângulo, cada ano de desenvolvimento indica o nº de anos que decorrem entre o ano de ocorrência dos sinistros e o ano em que as respectivas indemnizações são pagas (total ou parcialmente). Repare-se que apesar de se estar perante um triângulo diferente daqueles que são utilizados para prever as indemnizações "IBNR" e "IBNER" separadamente (triângulos dos x_{ij}), o elemento genérico adoptado continua a ser o mesmo. O motivo para tal procedimento continua também a ser básicamente o mesmo: quase todos os métodos de previsão que vão ser tratados neste trabalho permitem prever, quer as indemnizações "IBNR", quer as indemnizações "IBNR+IBNER". Tal como se referiu anteriormente, sempre que se mostrar necessário, far-se-ão as devidas distinções entre os elementos dos diferentes triângulos de dados.

Como se pode constatar, no triângulo para a previsão de indemnizações "IBNR+IBNER", cada linha i regista os pagamentos efectuados ao longo do tempo relativos às indemnizações cujos sinistros ocorreram no ano i. Cada coluna j regista todos os pagamentos de indemnizações que foram feitos j anos depois de terem ocorrido os respectivos sinistros. Cada diagonal de elementos cujos índices somam i+j representa o ano de pagamento i+j.

Note-se que o triângulo referido no parágrafo anterior, não fornece qualquer informação acerca da participação dos sinistros. Para cada ano de ocorrência i, descreve, apenas, a evolução no tempo dos pagamentos referentes às indemnizações cujos sinistros ocorreram nesse ano, não referindo os anos de notificação desses sinistros. Devido a este facto, qualquer que seja o método de previsão utilizado, não se consegue separar da previsão do montante total das indemnizações "IBNR+IBNER" para cada ano de ocorrência i a sua componente de indemnizações "IBNR" e a sua componente de indemnizações "IBNER".

Na versão cumulativa do triângulo para a previsão de indemnizações "IBNR+IBNER", cada elemento X_{ij} é, obviamente, o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j.

Até agora todos os triângulos de dados foram apresentados genericamente. Para uma melhor compreensão da forma como estão dispostos os dados nos triângulos e, portanto, das características específicas destes triângulos, torna-se interessante apresentar um exemplo concreto. Com esse fim, construiu-se, com dados artificiais, o seguinte triângulo:

Ano de Desenvolvimento

(unidade: milhões de escudos)

Ano de Ocorrência	0	1	2	3	4	5
1982	265	235	125	141	110	55
1983	312	177	185	118	63	
1984	264	211	170	99		
1985	337	156	133			
1986	270	184				
1987	295					

Como se pode verificar, este triângulo apresenta dados sobre indemnizações referentes a sinistros ocorridos nos anos de 1982 a 1987, sendo este o último ano para o qual existem dados disponíveis. Devido a este facto, estabelecem-se apenas 6 anos de desenvolvimento.

Suponhamos, por enquanto, que se trata de um triângulo de elementos x_{ij}, para a previsão de indemnizações "IBNR".

Através da análise deste triângulo, sabe-se que dos sinistros ocorridos em 1982, foram participados nesse mesmo ano, ou seja, no ano de desenvolvimento 0, sinistros que originaram um montante total de indemnizações de 265 mil contos. Em 1983, ou seja, no ano de desenvolvimento 1 , foram participados sinistros que originaram um montante total de indemnizações de 235 mil contos. E, assim sucessivamente, até chegar a 1987, a que corresponde o último ano de desenvolvimento. Repare-se, que o nº de anos de desenvolvimento para os quais existem dados disponíveis em cada ano de ocorrência vai diminuindo à medida que se avança no ano de ocorrência. No último ano de ocorrência existe apenas uma observação (referente ao ano de desenvolvimento 0): o montante total das indemnizações referentes aos sinistros ocorridos em 1987 e participados nesse mesmo ano.

Por outro lado, a última diagonal do triângulo corresponde ao ano de notificação 1987. De facto, pode verificar-se que todos os montantes registados nesta diagonal são referentes às indemnizações cujos sinistros foram participados em 1987. A penúltima diagonal corresponde ao ano de notificação 1986. E, assim sucessivamente, até chegar à primeira diagonal que corresponde ao ano de notificação 1982. Esta diagonal só tem um registo: se o triângulo começa a ser construído a partir de 1982 então, em relação a esse ano de notificação, só podem ser registados os montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros que também ocorreram em 1982.

Suponhamos, agora, que o triângulo concreto apresentado atrás é um triângulo de elementos x_{ij} para a previsão de indemnizações "IBNR+IBNER".

Neste caso, verifica-se que a linha que corresponde ao ano de ocorrência 1984 regista os pagamentos que foram efectuados ao longo dos vários anos de desenvolvimento até 1987, referentes as indemnizações cujos sinistros ocorreram em 1984. Logo no próprio ano de ocorrência, ou seja, no ano de desenvolvimento 0 , foram feitos pagamentos de indemnizações no montante de 264 mil contos.

Neste triângulo, cada diagonal representa um ano de pagamento. Assim, por exemplo, a última diagonal regista todos os pagamentos de indemnizações que foram efectuados em 1987.

A previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNR+IBNER" é feita, fundamentalmente, com base nos triângulos de dados apresentados anteriormente. No entanto, a informação estatística

$$\{ V_i : i = 0,1, \ldots ,n \} \qquad ,$$

com V_i uma medida do volume de negócios transaccionados pela seguradora no ano de ocorrência i, também é utilizada com uma certa frequência. As medidas V_i mais utilizadas são: o nº de apólices em carteira e o montante dos prémios cobrados no ano de ocorrência i. Alguns métodos de previsão utilizam o montante dos prémios cobrados como medida do volume de negócios específica ou com outros objectivos. Nesses métodos designaremos por P_i, o montante dos prémios cobrados no ano de ocorrência i.

Como referimos anteriormente, muitos dos métodos que permitem prever as indemnizações "IBNR" e "IBNR+IBNER" também servem para prever as indemnizações "IBNER". Não são excepção muitos dos métodos que utilizam também como informação estatística as medidas V_i. No entanto, é evidente que, no caso da previsão das indemnizações "IBNER", cada medida V_i passa a ser uma medida associada ao ano de notificação i. Segundo Sundt (1989), a medida mais natural, neste caso, é o nº de indemnizações relativas aos sinistros participados no ano de notificação i.

As medidas V_i são utilizadas conjuntamente com os triângulos de dados apresentados atrás. Por vezes, servem para construir outros triângulos a partir desses, de maneira a ajustar os dados originais às hipóteses dos métodos de previsão utilizados. Alguns métodos, por exemplo, em vez de basearem as previsões das indemnizações "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER" nos respectivos triângulos dos x_{ij}, baseiam--nas noutros triângulos de elementos z_{ij}, obtidos dos anteriores fazendo

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{V_i} \qquad i = 0,1,\dots,n \; ; \; j = 0,1,\dots,n-i \, . \qquad (2.3)$$

Como, geralmente, os anos de ocorrência/anos de notificação não são comparáveis em termos de volume de negócios/nº de indemnizações relativas aos sinistros participados, nos referidos métodos tenta-se, através deste artifício, torná-los comparáveis.

Com a apresentação de todo este conjunto de informação estatística para a previsão de indemnizações "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER", introduzimos também uma parte da notação comum utilizada pelos métodos de previsão que irão ser expostos neste trabalho. No entanto, cada um desses métodos tem também uma notação específica. E, como, quase sempre, essas notações específicas são bastante díspares, cada uma delas será apresentada aquando da exposição do respectivo método.

Como se referiu, quase todos os métodos que irão ser apresentados neste trabalho podem ser utilizados, quer na previsão de reservas "IBNR+IBNER", quer na previsão de reservas "IBNR". Muitos destes podem ainda ser utilizados na previsão de reservas "IBNER". Devido a este facto, como também já foi referido, adoptou-se a mesma notação para os elementos dos diferentes triângulos de dados. Sendo assim, e por uma questão de simplificação, ao longo do trabalho, na apresentação de cada um dos métodos com as referidas características tratar-se-á apenas a previsão de reservas "IBNR+IBNER". A aplicação destes métodos à previsão de reservas "IBNR" e, em muitos casos, à previsão de reservas "IBNER", é feita exactamente da mesma forma que no caso de reservas "IBNR+IBNER", sendo apenas necessário adaptar a terminologia utilizada a cada uma das situações específicas. Estas adaptações de terminologia são, em geral, óbvias. Só nalguns casos, em que as referidas adaptações se revelem menos evidentes, é que se darão alguns esclarecimentos.

2.2 A SUA IMPORTÂNCIA NO CONTEXTO DA ACTIVIDADE SEGURADORA

A previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNER" é uma tarefa essencial na actividade seguradora.

Como já referimos no ponto anterior, uma seguradora, ao fechar as contas de um dado ano, sabe que terá de efectuar no futuro pagamentos referentes às indemnizações originadas pelos sinistros ocorridos nesse ano e em anos anteriores. Estes pagamentos constituem uma responsabilidade da seguradora e, portanto, esta terá de constituir provisões suficientes para lhes fazer face no futuro. Como, no fim do ano, não se conhece o verdadeiro valor dos referidos pagamentos futuros, a seguradora é obrigada a prevê-los. O montante de pagamentos previsto é então constituído como reserva no seu balanço desse ano. Por isso, muitas vezes, em vez de se falar em previsão de indemnizações, fala-se em previsão de reservas "IBNR" e "IBNER". O montante previsto das indemnizações relativas aos sinistros que ainda não foram participados à seguradora é a previsão das reservas "IBNR" enquanto que o montante previsto dos pagamentos futuros referentes às indemnizações cujos sinistros já foram participados é a previsão das reservas "IBNER".

É muito importante que as seguradoras determinem previsões de boa qualidade para as suas reservas "IBNR" e "IBNER" pois, se não estabelecerem reservas suficientes para efectuar os pagamentos futuros de que já assumiram responsabilidade, correm o risco de, no futuro, se virem a tornar insolventes e, portanto, de irem à falência.

O grau de importância que as seguradoras conferem à previsão das suas reservas "IBNR" e "IBNER" varia com os ramos em que estas exercem a sua actividade. Varia consoante se trate de seguro directo ou de resseguro e varia consoante os tipos de risco que os ramos seguram. Isto, porque são estes os factores que mais determinam a duração do período de tempo entre a ocorrência de um sinistro e o pagamento completo da respectiva indemnização.

O seguro directo é aquele que se realiza entre o segurado e a companhia seguradora enquanto o resseguro é um seguro entre companhias. Efectua-se um resseguro, quando uma seguradora considera que um risco que subscreveu é demasiado pesado para as suas capacidades e, por isso, cede uma parte deste a uma outra seguradora. A primeira seguradora, que passa a designar-se por cedente, fica responsável pela parte do risco que reteve. A segunda, que passa a chamar-se resseguradora, fica responsavel pela parte do risco cedida. Tal como o segurado paga um prémio à sua seguradora (seguradora directa) por se efectuar a transferência do seu risco para aquela, também a companhia cedente paga um prémio à resseguradora pela transferência de parte do seu risco. Uma seguradora pode ressegurar um conjunto de várias apólices através do mesmo contrato. Aliás, o resseguro, geralmente, é feito por ramo de actividade [informação mais pormenorizada sobre o resseguro pode ser encontrada em Simões (1988)].

Qualquer tipo de resseguro tende a aumentar a duração do período de tempo entre a ocorrência dos sinistros e o pagamento completo das respectivas indemnizações através do alongamento do subperíodo que medeia entre a ocorrência e a participação dos referidos sinistros. Isto, deve-se ao facto das seguradoras directas, após lhes terem sido participados sinistros, poderem demorar ainda um certo tempo a participá-los, por sua vez, às resseguradoras. No entanto, os resseguros que mais contribuem para aumentar a duração do referido subperíodo são, sem dúvida, os não proporcionais: o resseguro do excesso de perca e o resseguro "stop-loss".

No resseguro do excesso de perca, a companhia cedente paga os montantes totais de todas as indemnizações que não excedam um determinado limite pré-fixado no contrato de resseguro, o pleno. Em relação a cada indemnização que exceda o pleno, a seguradora cedente paga esse pleno enquanto a resseguradora paga o montante que o excede.

O resseguro "stop-loss" tem um modo de funcionamento semelhante ao do resseguro do excesso de perca, só que em vez de incidir sobre as indemnizações individuais referentes ao conjunto de riscos ressegurados num contrato, incide sobre o montante das indemnizações agregadas. Neste caso, a companhia cedente paga o montante total das indemnizações agregadas desde que este não exceda um determinado limite pré-fixado no contrato. Quando o montante das indemnizações agregadas excede esse limite, a seguradora cedente paga só o correspondente ao limite enquanto a resseguradora paga o excedente.

É fácil de deduzir que, num resseguro do tipo excesso de perca, um sinistro pode ser participado à resseguradora apenas quando o montante total da respectiva indemnização ultrapassa o pleno. Por outro lado, também se sabe que muitas indemnizações só ultrapassam o referido limite, vários anos após a participação dos sinistros que lhes correspondem à seguradora directa. Umas, porque, por exemplo, dizem respeito a doenças prolongadas e, portanto, vão sendo pagas parcelarmente; outras, porque o conhecimento dos seus montantes depende de factores sobre os quais a seguradora não tem controlo (por exemplo: decisões dos tribunais), podendo, inclusivamente, dar-se o caso destes montantes ultrapassarem o pleno devido sómente à inflacção que se foi verificando durante os vários anos de espera; etc. Pode, então, concluir-se que, de facto, o resseguro do tipo do excesso de perca contribui, e muito, para alongar o período entre a ocorrência dos sinistros e a liquidação completa das respectivas indemnizações pois, em muitos casos, leva a que as resseguradoras só saibam da existência dos sinistros vários anos após estes terem ocorrido.

Em relação ao resseguro "stop-loss", por motivos óbvios, pode formular-se uma conclusão semelhante. Conclusão, aliás, bem patente no seguinte excerto de um artigo de Benjamin e Eagles (1986) sobre a previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" no mercado de seguros de Londres:

> "For example the primary insurer may have a portfolio of risks covering compensation for personal injury - a class of happenings which notoriously take years to settle. The primary insurer may have taken reinsurance in the London Market to cover the situation where his total claims exceed a certain named limit, i. e., a "stop-loss". The reinsurer may not hear anything until the primary insurer's claims reach the agreed limit. The finaloutcome for the reinsurers in the London Market may then take a long time to become fully known.".

Para as resseguradoras que efectuam resseguros dos tipos excesso de perca e "stop-loss", a previsão das suas reservas "IBNR" assume grande relevância. Isto deve-se ao facto de, com estes tipos de resseguros, como vimos atrás, o período entre a ocorrência dos sinistros e a participação destes às resseguradoras ser, em geral, longo.

Pelo contrário, as seguradoras directas, geralmente, dão pouca importância à previsão das suas reservas "IBNR". Estas reservas apresentam, quase sempre, montantes relativamente pequenos pois são constituídas praticamente só para fazerem face às indemnizações relativas aos sinistros que ocorrem pouco antes do fim do ano (antes de se fecharem as contas) e só são participados no ano seguinte.

O tipo de riscos segurados também influencia decisivamente a duração do período de tempo entre a ocorrência dos sinistros e o pagamento completo das respectivas indemnizações. Os riscos que, pela sua natureza, dão origem a sinistros que envolvem feridos, doenças (principalmente de longa duração) e incapacidade de trabalho (temporária ou permanente), são famosos pelos longos períodos de tempo que são necessários para se conhecerem os montantes totais das suas indemnizações. Se estes montantes totais estiverem dependentes de decisões da Justiça então ainda mais longos os referidos períodos de tempo se podem tornar. Em Portugal estes riscos são segurados por: seguros da responsabilidade civil (geral e no ramo automóvel), seguros de doença, seguros de acidentes de trabalho, etc.

Ao contrário do que acontecia com o resseguro, os tipos de riscos referidos acima tendem a aumentar a duração do período entre a ocorrência dos sinistros e a liquidação completa das respectivas indemnizações através do alongamento do subperíodo que medeia entre a participação dos referidos sinistros e a liquidação das indemnizações correspondentes. Neste caso, o problema que se põe, não é tanto saber quando um sinistro será participado, mas mais, depois da sua participação, saber quando se conhecerá o montante total da respectiva indemnização. Sendo assim, o tipo de riscos segurados é o factor por excelência que vai determinar a importância que as seguradoras conferem à previsão das suas reservas "IBNER".

Por motivos óbvios, para as seguradoras que seguram riscos com as características mencionadas acima (principalmente, para as seguradoras directas que não efectuam resseguros dos tipos excesso de perca e "stop-loss") é extremamente importante obter previsões de boa qualidade para as suas reservas "IBNER".

Considerando tudo o que foi dito até agora, torna-se fácil concluir que as companhias que se dedicam ao resseguro (principalmente dos tipos excesso de perca e "stop-loss") de riscos que dão origem a indemnizações que levam muitos anos a serem completamente pagas, são aquelas que se deparam com períodos de tempo entre a ocorrência dos sinistros e o pagamento completo das respectivas indemnizações de maior duração. Muitas vezes, estes períodos de tempo chegam a ultrapassar os 15 anos. Para as companhias em questão, a previsão das suas reservas "IBNR" é uma tarefa essencial e, mesmo, a previsão das suas reservas "IBNER" também pode ter uma certa importância.

Para ficarmos com uma ideia mais clara acerca da longa duração dos períodos de tempo entre a ocorrência dos sinistros e a liquidação completa das respectivas indemnizações com que se deparam as companhias referidas acima, podemos considerar o estudo publicado pela Reinsurance Association of America (1987) - uma associação de resseguradoras americanas - sobre os padrões de desenvolvimento no tempo das indemnizações do tipo que as seguradoras em questão têm de pagar.

O estudo é feito com base em dados colectados de todas as resseguradoras pertencentes à associação. Estes dados dizem respeito a ramos ressegurados através do resseguro do tipo excesso de perca. Alguns desses ramos são: responsabilidade civil no seguro automóvel, responsabilidade civil geral e acidentes de trabalho. Os dados para cada ramo são apresentados sob a forma de um triângulo cumulativo com as características habituais. No entanto, o registo do triângulo correspondente ao par (i,j) dá-nos o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j mais a estimativa do montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e já participados que não foi pago até ao final do ano de desenvolvimento j . Portanto, o referido triângulo não regista os habituais "claims payments", apresentados no ponto anterior, mas sim os "claims payments+claims outstanding" que, geralmente, são designados na literatura por "amounts of claims incurred".

Assim, segundo este estudo, em relação ao ramo da responsabilidade civil no seguro automóvel, no fim de um dado ano de ocorrência conhecem-se em média apenas 25% do total das "claims incurred" referente a esse ano de ocorrência. No final do ano de desenvolvimento 5 conhecem-se ainda só 83% (aproximadamente) deste total. Só no fim do ano de desenvolvimento 15 é que se conhecem quase os 100%, não havendo praticamente nenhum desenvolvimento a partir deste ano. Por outro lado, no ramo da responsabilidade civil geral, no fim de um dado ano de ocorrência são conhecidos em média apenas 5% do total das "claims incurred" referente a esse ano. No fim do ano de desenvolvimento 5 conhecem-se ainda só um pouco menos de 50% e no fim do ano de desenvolvimento 15 esta percentagem passa para 80% (aproximadamente). Neste ramo, o período entre a ocorrência dos sinistros e o pagamento completo das respectivas indemnizações pode durar mais de 20 anos. Por fim, no ramo dos acidentes de trabalho, o desenvolvimento no tempo das indemnizações é parecido com o do ramo anterior, só que um pouco mais rápido.

Outra questão importante evidenciada neste estudo, é a grande diferença entre a duração do período de tempo entre a ocorrência dos sinistros e a liquidação completa das correspondentes indemnizações associado às resseguradoras e a duração do mesmo período mas agora associado às respectivas seguradoras directas. No ramo da responsabilidade civil no seguro automóvel, por exemplo, verifica-se que enquanto o período associado às seguradoras directas dura em média 5 anos, o período associado às respectivas resseguradoras dura, como já referimos, 15 anos. Esta diferença deve-se, fundamentalmente, ao facto de que, enquanto o período das seguradoras directas dura só até as indemnizações atingirem o pleno, o período das resseguradoras prolonga-se até se conhecerem os montantes totais das indemnizações.

Até agora só falámos da importância da previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" como objectivo final das seguradoras. No entanto, a previsão destas reservas desempenha um papel essencial no cálculo dos prémios dos seguros (ou construção de tarifas/"rate-making", como vulgarmente é conhecido na literatura especializada).

Uma seguradora, geralmente, baseia o cálculo do prémio do seguro de um determinado risco, num dado ano de ocorrência, nos montantes totais das indemnizações produzidas em anos de ocorrência anteriores por um conjunto de riscos com características similares às do risco em questão. Mas como os montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos anos mais recentes só serão conhecidos alguns anos mais tarde, a seguradora tem de efectuar o cálculo do premio com base em previsões dos referidos montantes totais. Estas previsões têm de ser construídas a partir das previsões das reservas "IBNR" e "IBNER". Todos estes factos levam Kahane (1989) a afirmar que:

> " ... the rate-making process in the long-tail insurance lines depends, by and large, on the appropriateness of the loss reserving technique."

Ao nível do cálculo de prémios, são óbvios os perigos que advêm, para qualquer seguradora, da subestimação ou da sobrestimação dos montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos anos anteriores. Prémios demasiado baixos podem levar a que a seguradora incorra em grandes percas; prémios demasiado altos podem levar a que a seguradora perca clientes para outras seguradoras que cobrem prémios mais baixos.

2.3 TIPOS DE MÉTODOS DE PREVISÃO PROPOSTOS NA LITERATURA

Apesar de, desde há muito, as seguradoras constituírem reservas "IBNR" e "IBNER", só nas últimas duas décadas é que os actuários passaram a mostrar um grande interesse por esta tarefa. A partir do início da década de 70, algumas seguradoras começaram a sentir problemas financeiros devido ao facto de não terem constituído no passado os montantes de reservas adequados. Estes problemas levaram-nas, naturalmente, a exigir soluções aos seus actuários. Como resposta a este apelo, desde essa altura, tem-se vindo a assistir ao aparecimento de um número cada vez maior de métodos de previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" na literatura especializada. Desta forma, pode concluir-se que a previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" é um tema relativamente recente.

À primeira vista, parece que o desenvolvimento do tema em questão se foi processando ao longo dos anos de uma forma confusa, sem uma direcção definida. Foram aparecendo cada vez mais métodos novos, muitos deles com poucas ou nenhumas ligações aos métodos já existentes. Foi-se, assim, formando uma amálgama de métodos, cada um deles partindo de abordagens e utilizando técnicas diferentes das dos outros, não se tendo ainda chegado a nenhuma conclusão (para desespero das seguradoras!) sobre qual o tipo de métodos que fornece melhores resultados.

No entanto, Taylor (1986) esclarece que a fase inicial do desenvolvimento de qualquer tema, geralmente, se desenrola desta forma. Segundo Chalmers[3], um autor citado em Taylor, esta fase do referido processo de desenvolvimento é caracterizada

> "... by total disagreement and constant debate over fundamentals, so much so that it is impossible to get down to detailed, esoteric work.".

Este autor diz ainda:

> "There will be almost as many theories as there are workers in the field and each theoretician will be obliged to start afresh and justify his own particular aproach.".

Como se pode verificar, é precisamente isto que se passa na previsão de reservas "IBNR" e "IBNER", tendo, afinal, algum sentido o referido estado actual de "confusão" neste campo do conhecimento.

Apesar da mencionada amálgama de métodos, Taylor (1986) consegue estabelecer uma classificação para estes. No entanto, como não poderia deixar de ser, é uma classificação muito geral e, portanto, pouco esclarecedora quanto às características mais relevantes dos principais tipos de métodos.

No nível mais elevado da referida classificação, Taylor divide os métodos em :

- Estocásticos / Não Estocásticos

- Macro-Modelos / Micro-Modelos .

A primeira dicotomia tem a ver com o seguinte facto: enquanto alguns métodos consideram explicitamente a natureza aleatória dos montantes totais/pagamentos das indemnizações, ou seja, consideram estes montantes como variáveis aleatórias; outros (geralmente, os mais antigos), não o fazem (por vezes, nem implicitamente). Em

---

[3] Chalmers, A. F. (1976). "What is this thing called science ?". University of Queensland Press.

relação à segunda dicotomia, Taylor considera como macro-modelos aqueles que trabalham ao nível das indemnizações agregadas, ao passo que, classifica como micro-modelos aqueles que partem do estudo das indemnizações individuais.

Na impossibilidade de referir aqui todos os métodos de previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" propostos na literatura, devido ao seu grande número, vamos apenas falar dos mais importantes que surgiram durante a década de 70 e no início da década de 80. As razões que levaram a optar pelos métodos (relativamente) mais antigos em detrimento dos mais recentes, que, aliás, são as mesmas que estiveram na base da escolha dos métodos que vão ser estudados ao longo deste trabalho, são as seguintes:

- A partir do início da década de 80 assiste-se ao aparecimento de uma enorme quantidade de métodos de previsão estocásticos, quase todos extremamente sofisticados: quer em termos das hipóteses que apresentam, quer em termos das técnicas que utilizam para estimar os seus parâmetros. Esta grande sofisticação, paradoxalmente, constitui um problema. Por um lado, leva a que alguns destes métodos não forneçam bons resultados na prática (hipóteses muito sofisticadas, por exemplo, implicam, muitas vezes, um modelo com um grande nº de parâmetros a estimar relativamente ao nº de observações disponíveis [veja-se, por exemplo, os modelos propostos por Norberg (1986)]). Por outro lado, leva a que as seguradoras desviem o seu interesse para métodos mais simples, em termos teóricos, e mais acessíveis, em termos computacionais. Outro problema que se põe em relação aos métodos mais recentes, tem a ver: com a escassez da informação existente sobre estes na literatura especializada (em geral, a única informação disponível é aquela que é fornecida pelos autores originais); e com o facto das suas hipóteses e técnicas de estimação, além de sofisticadas, serem, em geral, muito diferentes de método para método, levando a que os referidos métodos apresentem poucas ligações entre si. Perante tal quantidade e tal diversidade de métodos de previsão, e tendo em consideração a escassez de informação que existe sobre estes, é difícil saber sobre quais deles valerá mais a pena recair o nosso estudo.

- Em relação aos métodos de previsão mais antigos, e apesar de também serem bastantes, já é possível fazer uma selecção dos mais relevantes. Isto deve-se, essencialmente, ao facto de existir mais informação sobre estes métodos na literatura especializada. Devido à sua antiguidade, já outros autores, que não os originais, se puderam debruçar sobre as suas características e potencialidades. Além disso, por serem métodos relativamente menos sofisticados, tornam-se mais "atraentes" aos olhos das seguradoras. Alguns deles (em geral, os mais antigos), são, sem dúvida, os mais utilizados na prática.

Os métodos de previsão mais antigos, muitos deles anteriores a 1970, são métodos não estocásticos muito simples. Não têm em conta, nem sequer implicitamente, o carácter estocástico dos montantes totais/pagamentos das indemnizações. São mais procedimentos contabilísticos do que propriamente métodos baseados em modelos matemáticos. Muitos dos métodos que prevêm reservas "IBNER" utilizam as previsões feitas caso a caso, sómente baseadas na opinião de peritos com grande experiência no ramo, dos montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros já participados. Apesar da suas grandes deficiências, estes métodos são ainda muito utilizados hoje em dia. A previsão de reservas "IBNER" caso a caso, com base na opinião de peritos, apesar do seu alto grau de subjectividade, chega mesmo a ser aconselhada em relação a grandes indemnizações e a indemnizações com características especiais. Alguns exemplos destes métodos mais antigos podem ser encontrados em Van Eeghen (1981).

No fim da década de 60, princípios da de 70, surge o famoso método "chain-ladder". Embora seja também um método não estocástico, considera implicitamente a natureza aleatória dos montantes totais/pagamentos das indemnizações e é mais estruturado do que os anteriores. É formalizado a partir da hipótese básica da proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo. Apesar também das suas deficiências é, sem dúvida, o método ainda mais utilizado hoje em dia pelas seguradoras.

Posteriormente ao aparecimento do método "chain-ladder", foram surgindo alguns métodos, também não estocásticos, que podem ser considerados suas variantes. Algumas destas variantes partem, fundamentalmente, da hipótese do método "chain-ladder" ,mas utilizam informação estatística adicional ou processos de estimação diferentes. Outras, ao tentarem aproximar mais da realidade a hipótese do referido método, propõem outras hipóteses diferentes. Podem ser considerados variantes do método "chain-ladder": o método "cape cod" [Bühlmann (1983)], o método do complementar do rácio de perda [Bühlmann (1983)], o método dos mínimos quadrados de De Vylder [uma apresentação deste método pode ser encontrada em Van Eeghen (1981)] e todo um conjunto de métodos apresentados numa das secções do "survey" de Van Eeghen (1981). Os três métodos referidos em primeiro lugar utilizam, tal como o "chain-ladder", a hipótese de proporcionalidade das colunas.

Ainda na década de 70, começam a aparecer os primeiros métodos estocásticos.

Um dos primeiros a surgir é o método de Straub [Straub (1972)]. Sendo um método estocástico, considera os montantes totais/pagamentos das indemnizações como variáveis aleatórias. No entanto, em termos de hipóteses é um método pouco estruturado. Uma destas hipóteses implica que, à semelhança do que acontece no método "chain-ladder", o padrão de desenvolvimento no tempo dos montantes totais/pagamentos das indemnizações, à parte algumas flutuações aleatórias, tenha de ser o mesmo para todos os anos de ocorrência considerados. Uma característica curiosa deste método, é poder utilizar também como informação estatística, para estimar os seus parâmetros desconhecidos, triângulos de dados associados a outros conjuntos de riscos do mesmo ramo de actividade. Esta característica permite a Straub propôr estimadores de credibilidade para alguns parâmetros do modelo.

Pouco tempo após a publicação do método de Straub, surge o método de Verbeek [Verbeek (1972)]. Este método estocástico prevê os números das indemnizações "IBNR" no caso de uma resseguradora que efectua um resseguro do tipo excesso de perca. Verbeek constrói um modelo em que consegue separar dos parâmetros que representam a distribuição da participação dos sinistros pelos vários anos de desenvolvimento, os efeitos das influências exógenas associadas aos anos de notificação (principalmente da inflacção) que vão modificar ao longo do tempo a referida distribuição. Isto vai permitir estimar, dentro do próprio modelo, os efeitos dessas influências exógenas associadas aos vários anos de notificação.

Mais tarde, Taylor extende o método de Verbeek à previsão dos montantes totais das indemnizações "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER". Surgem então os métodos da separação de Taylor: o método da separação aritmética [Taylor (1977)] e o método de separação geométrica [uma exposição deste método pode ser encontrada em Van Eeghen (1981)].

No início da década de 80 aparece o trabalho de Bühlmann, Schnieper e Straub (1980), um dos primeiros no domínio dos micro-modelos. Trata-se de um modelo estocástico já relativamente sofisticado, principalmente a nível das hipóteses apresentadas. Estuda as indeminizações individuais em termos: da ocorrência e da participação dos respectivos sinistros e das sequências de pagamentos que geram ao longo do tempo. Desta forma, consegue prever separadamente o montante total das reservas "IBNR" e o montante total das reservas "IBNER" para cada ano de ocorrência i. A parte que modeliza as reservas "IBNER" pode ser considerada uma versão estocástica do método "chain-ladder".

O método da credibilidade de De Vylder surge em 1982 [De Vylder (1982)]. E um método estocástico multiplicativo que utiliza a teoria da credibilidade (mais precisamente, o modelo de regressão de Hachemeister) para estimar os factores relativos aos anos de ocorrência/anos de notificação.

Ao longo dos pontos 3 e 4 deste trabalho far-se-á um estudo critico, tão aprofundado quanto possível, de quase todos os métodos que acabaram de ser referidos. Não se apresentarão, apenas, os métodos não estocásticos mais antigos, referidos em primeiro lugar, e algumas das variantes do método "chain-ladder" (o conjunto de métodos apresentados por Van Eeghen (1981)) pois, além de serem muitos, são, em geral, métodos muito pouco estruturados e, portanto, pouco interessantes.

Apesar destes métodos estarem melhor explorados do que os métodos mais recentes, a informação existente sobre eles na literatura especializada é pouco abundante e está muito dispersa. Desta forma, torna-se útil fazer, neste trabalho, uma síntese dessa informação e, nalguns casos, tentar, mesmo, aprofundá-la.

Convém ainda referir, que, por uma questão de simplificação, na apresentação dos métodos mencionados acima, se vai considerar a hipótese de que todos os pagamentos de indemnizações são efectuados/todos os sinistros são participados até ao fim do ano de desenvolvimento n. Aliás, esta hipótese está implicita na configuração dos triângulos de dados apresentados no ponto 2.1.

3 MÉTODOS DE PREVISÃO NÃO ESTOCÁSTICOS: O MÉTODO "CHAIN-LADDER" E ALGUMAS DAS SUAS VARIANTES

3.1 MÉTODO "CHAIN-LADDER"

Como já se referiu no ponto 2.3, o "chain-ladder" é um dos métodos não estocásticos mais antigos, sendo, no entanto, aquele que, ainda hoje, é mais utilizado pelas seguradoras.

Pode ser utilizado na previsão de reservas "IBNR", de reservas "IBNER", de reservas "IBNR+IBNER" e dos números das indemnizações "IBNR". No caso das reservas "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER", o método é aplicado ao triângulo cumulativo dos X_{ij}, enquanto que no caso dos números das indemnizações "IBNR", é aplicado ao triângulo cumulativo dos N_{ij}. A apresentação do método vai ser feita com base nos X_{ij}, mas poderia ser efectuada exactamente da mesma maneira a partir dos N_{ij}.

O objectivo deste método é transformar o triângulo de dados num quadro completo (um quadrado), através da previsão dos X_{ij} que faltam.

A hipótese básica do "chain-ladder" é que as colunas do quadro completo dos X_{ij} são proporcionais, ou seja,

$$X_{i,\,j+1} = c_{j,j+1}\, X_{ij} \qquad i=0,\,1,\,...,\,n\,;\; j=0,\,1,\,...,\,n-1, \quad (3.1)$$

em que $c_{j,\,j+1}$ é o factor de proporcionalidade que permite passar dos elementos da coluna j do quadro para os elementos da coluna j+1. Os factores de proporcionalidade $c_{j,j+1}$ (j=0,1, ..., n-1) são, vulgarmente, designados por coeficientes de desenvolvimento.

Esta hipótese básica pode parecer pouco apropriada, se pensarmos que, na prática, é quase impossível encontrar um quadro de dados com colunas exactamente proporcionais. No entanto, temos de ter em atenção que se trata de uma hipotese subjacente a um método não estocástico. Em qualquer método não estocástico para a previsão de reservas "IBNR+IBNER", devido a não se considerar explicitamente a natureza aleatória dos pagamentos de indemnizações, as hipoteses assumidas constituem, necessariamente, igualdades que dificilmente se verificam na prática. Alguns autores, para tentarem fugir a este problema, apresentam a referida hipotese de uma forma ligeiramente diferente, de modo a introduzirem no metodo, ainda que implicitamente, o caracter aleatório dos X_{ij}. Assim, por exemplo, Van Eeghen (1981) refere acerca do método em questão:

> "The fundamental assumption is that the columns in the triangle are proportional, apart from random fluctuations.
> So if
>
> $$C_{13}/C_{14} = 2/3$$
>
> we must have[4]:
>
> $C_{23}/C_{24} = C_{33}/C_{34} = C_{43}/C_{44} = \ldots = 2/3$, approximately".

Partindo de (3.1), cada X_{ij} que falta no quadro completo pode prever-se da seguinte forma:

$$\hat{X}_{ij} = X_{i,n-i} \prod_{h=n-i}^{j-1} \hat{c}_{h,h+1} \qquad i=1, \ldots, n; j=n-i+1, \ldots, n, \qquad (3.2)$$

em que $X_{i,n-i}$ é a última observação disponível no triângulo de dados para o ano de ocorrência i e $\hat{c}_{h,h+1}$ é um estimador de $c_{h,h+1}$.

---

[4] Em Van Eeghen (1981), C_{ij} corresponde a X_{ij}.

Geralmente, é proposto o seguinte estimador para cada coeficiente de desenvolvimento:

$$\hat{c}_{j,j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} X_{ij}} \qquad j=0,1,\ldots, n-1 \qquad . \qquad (3.3)$$

Podemos verificar que o estimador $\hat{c}_{j,j+1}$ não é mais do que a média ponderada dos rácios entre as várias observações da coluna $j+1$ do triângulo e as observações correspondentes da coluna j. Cada um destes rácios é ponderado com o montante X_{ij}, que nos dá uma ideia do nível do volume de negócios transaccionados no ano de ocorrência i a que o referido rácio está associado.

Para se prever o montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i, Y_i, ou seja, a diferença entre o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i,[5] X_i, e os pagamentos já efectuados por conta destas indemnizações, $X_{i,n-i}$, neste método, é necessário, em primeiro lugar, prever X_i pois

$$\hat{Y}_i = \hat{X}_i - X_{i,n-i} \qquad i=1, \ldots, n \qquad . \qquad (3.4)$$

Repare-se que, como por hipótese todas as indemnizações são completamente pagas antes do fim do ano de desenvolvimento n, se

[5] No caso da previsão das reservas "IBNER", X_i é o montante total das indemnizações relativas aos sinistros participados no ano de notificação i.

tem $\hat{X}_i = \hat{X}_{in}$ $(i=1,\ldots,n)$[6], ou seja, as previsões dos montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos vários anos correspondem às previsões da última coluna do quadro completo.

Defina-se H_j como o factor de proporcionalidade que permite passar dos elementos da coluna j do quadro completo para os elementos da última coluna:

$$H_j = \prod_{h=j}^{n-1} c_{h,h+1} \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

$$H_j = 1 \qquad j = n \qquad (3.5)$$

Este factor de proporcionalidade costuma designar-se por factor de desenvolvimento final para o ano de desenvolvimento j. Um estimador de H_j, $\hat{H}_j$, pode ser obtido substituindo em (3.5) os coeficientes de desenvolvimento pelos respectivos estimadores.

Utilizando os $\hat{H}_j$ e atendendo a (3.2), os estimadores dos X_i vêm

$$\hat{X}_i = X_{i,n-i}\, \hat{H}_{n-i} \qquad i=1,\ \ldots,\ n \qquad (3.6)$$

Considerando (3.4) e (3.6), podemos apresentar a fórmula para a previsão do montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i de outra maneira:

$$\hat{Y}_i = (\hat{H}_{n-i} - 1)\, X_{i,n-i} \qquad i = 1,\ \ldots,\ n \qquad (3.7)$$

---

6 No caso da previsão dos nºs das indemnizações "IBNR", o nº total de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i será representado por $N_i (= N_{in})$

A maior vantagem do método "chain-ladder" consiste na sua grande simplicidade. No entanto, podem referir-se mais algumas:

. Permite prever o montante de indemnizações que irá ser pago em cada ano de pagamento futuro (vantagem, aliás, comum a todos os métodos que prevêm os elementos que correspondem a todas as combinações ano de ocorrência, ano de desenvolvimento). Estas previsões possibilitam, por um lado, que se baseiem as reservas "IBNR+IBNER" no valor descontado dos pagamentos futuros. Por outro lado, permitem avaliar se o método é adequado pois, no fim de cada ano, podem comparar-se os verdadeiros pagamentos com as previsões feitas anteriormente. Nos casos em que estas comparações evidenciem grandes discrepâncias, pode sempre tentar-se a utilização de outro método de previsão.

. Variações no montante de negócios transaccionados em cada ano de ocorrência i não constituem um problema para este método. Estas variações fazem-se reflectir directamente nos montantes $X_{i,n-i}$ utilizados na previsão das reservas, não violando, pois, a hipótese do método.

Apesar das referidas vantagens, este método apresenta grandes deficiências, reconhecidas desde há muito por vários autores.

Uma destas deficiências está associada ao facto de a hipótese subjacente ao método em questão implicar que o padrão de desenvolvimento no tempo dos X_{ij} tenha de ser sempre o mesmo para os vários anos de ocorrência considerados. Isto, porque existem vários factores que podem levar a que o referido padrão de desenvolvimento varie durante o período de tempo sob observação. Alguns desses factores são:

. Alterações no tratamento administrativo das indemnizações feito pela seguradora. Estas alterações podem provocar um aumento ou uma diminuição do período de tempo entre a ocorrência dos sinistros e o pagamento efectivo das respectivas indemnizações.

. Nova legislação, que tende a ser cada vez mais favorável às vítimas dos acidentes. Alterações nas práticas dos tribunais que impliquem um aumento ou uma diminuição do tempo que se tem de esperar pelas suas decisões ou dos montantes monetários envolvidos.

. Alterações na composição do conjunto de riscos sobre o qual o triângulo de dados fornece informação estatística. A subscrição de uma maior ou menor proporção de riscos de um determinado tipo (por exemplo: riscos cujas indemnizações são caracterizadas por longos períodos de tempo entre a ocorrência dos respectivos sinistros e o seu pagamento completo) pode provocar alterações no padrão de desenvolvimento, principalmente se o conjunto de riscos for pouco homogéneo.

. Variações na taxa de inflação.

No estudo publicado pela Reinsurance Association of America (1987), já referido no ponto 2.2, verificou-se que, devido aos factores referidos acima e a outros, os padrões de desenvolvimento no tempo das indemnizações referentes a quase todos os ramos considerados se tinham alterado significativamente entre 1956 e 1986. Esta alteração fez-se no sentido de uma diminuição progressiva da percentagem do total das "claims incurred" conhecida no final de cada ano de desenvolvimento (pelo menos nos primeiros 15 anos de desenvolvimento).

Tendo em atenção que, na prática, existem muitos casos em que há alterações no padrão de desenvolvimento durante o período considerado no triângulo de dados, deve verificar-se sempre se isto acontece no caso específico que se está a analisar. Se isto acontecer, deverão tentar descobrir-se as causas e, com essa informação, tentarem-se ajustar os dados de maneira a que o seu comportamento não viole a hipótese subjacente ao método "chain-ladder".

No caso de haver variações significativas na taxa de inflação, situação, aliás, muito comum, o método "chain-ladder", que pressupõe uma taxa de inflação constante, pode ainda utilizar-se desde que se corrijam devidamente os dados originais dos efeitos da inflação. Estas correcções consistem em passar esses dados originais, que estão a "preços correntes", para "preços constantes" de um determinado ano base (por exemplo, o primeiro considerado no triângulo). É claro, que estas correcções têm de ser feitas no triângulo não cumulativo e, só depois, se pode passar ao triângulo cumulativo para aplicar o método. Ao aplicar-se o método, as previsões dos X_{ij} futuros vêm a "preços constantes". Para se conhecerem as previsões a "preços correntes", tem de se passar ao quadro completo (com as previsões) não cumulativo e inflacionar as previsões a "preços constantes" com as previsões das taxas de inflação futuras.

O único problema que se põe na correcção dos dados originais, em casos em que se verificam variações significativas da inflação, é a escolha das taxas de inflação para os vários anos de pagamento considerados no triângulo. Isto, porque essas taxas de inflação, geralmente, não coincidem com as medidas da inflação que vulgarmente são apresentadas como indicadores económicos (por exemplo, o Índice de Preços no Consumidor).

Existe, muitas vezes, uma diferença, quase sempre positiva, entre a taxa de inflação dos pagamentos de indemnizações e a taxa de inflação dada como indicador económico. Esta diferença costuma ser designada por "superimposed inflation" e deve-se, entre outros factores, ao facto dos produtos e serviços que entram no custo das indemnizações serem cada vez mais sofisticados e, portanto, cada vez mais caros (medicamentos, serviços médicos, serviços hospitalares, etc.) e à saída de nova legislação, cada vez mais favorável às vítimas dos acidentes.

Uma outra grande deficiência do "chain-ladder" reside no facto de ser um método muito sensível a variações dos valores das observações (mesmo a variações de apenas uma delas) e, portanto, não ser robusto em relação a observações que apresentem valores anormais. De facto, se observarmos o triângulo dos X_{ij}, podemos verificar, por exemplo, que um valor anormal da observação X_{0n} vai influenciar, fortemente e no mesmo sentido, as n previsões para o ano de desenvolvimento n. Por outro lado, um valor anormal de X_{n0} vai também influenciar todas as previsões para o ano de ocorrência n.

Finalmente, convem referir que o facto de os estimadores $\hat{H}_j$ serem estimados a partir da multiplicação de estimadores $\hat{c}_{j,\,j+1}$ também traz problemas. Isto, porque, como afirma Taylor (1986),

> "It is intuitive and to some extent empirically supported, that a method which proceeds by calculation of ratios and the subsequent chained multiplication of those ratios is likely to produce highly variable results".

3. 2 VARIANTES DO MÉTODO "CHAIN-LADDER"

3.2.1 MÉTODO "CAPE COD"

Este método apareceu bastante depois do método "chain-ladder" [em Buhlmann (1983)] e foi proposto para tentar ultrapassar algumas das suas deficiências. É também um método não estocástico e pode ser considerado uma variante do "chain-ladder" pelo facto de utilizar a mesma hipótese básica.

O método "cape cod" serve para prever reservas "IBNR" e reservas "IBNR+IBNER" e utiliza a informação estatística dada pelo triângulo cumulativo dos X_{ij} e pelos montantes dos prémios cobrados nos vários anos de ocorrência.

Este método foi concebido só para prever os montantes totais das reservas "IBNR+IBNER" e os montantes totais das indemnizações para os vários anos de ocorrência, e não para prever também cada X_{ij} futuro, tal como acontece no método "chain-ladder".

O método em estudo parte de uma ideia básica muito simples, que resulta da constatação do seguinte facto: geralmente, o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos num determinado ano não vem aproximadamente igual ao montante dos prémios cobrados nesse ano, devido ao carácter aleatório do primeiro montante. Esta ideia básica traduz-se por:

$$X_i = R_i \; P_i \qquad\qquad i = 0, 1, \dots, n \quad , \qquad (3.8)$$

com R_i o factor de correcção dos prémios referente ao ano de ocorrência i.

Por outro lado, como já referimos, este método também assume a hipótese da proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo. Sendo assim, tem-se

$$X_{ij} = \frac{1}{H_j} X_i \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n \qquad (3.9)$$

pois, como vimos no método "chain-ladder",

$$X_i = X_{ij} \; H_j \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n \; . \qquad (3.10)$$

Se fizermos

$$L_j = \frac{1}{H_j} \qquad j = 0, 1, ..., n \; , \qquad (3.11)$$

a equação (3.9) diz-nos que o factor L_j representa a fracção do montante total das indemnizações (relativas aos sinistros ocorridos em qualquer ano i) que é paga até ao final do ano de desenvolvimento j. Cada L_j costuma ser designado por factor "lag" para o ano de desenvolvimento j.

Atendendo a (3.8), a (3.9) e a (3.11) tem-se também

$$X_{ij} = L_j \; R_i \; P_i \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n, \; , \qquad (3.12)$$

e, ainda,

$$Y_i = X_i - X_{i,n-i} = (1 - L_{n-i}) \, R_i \; P_i \qquad i = 0, 1, ..., n \; . \qquad (3.13)$$

Desta forma, se tomarmos como estimador de cada L_{n-i}, o inverso do estimador $\hat{H}_{n-i}$ proposto no método "chain-ladder (que designaremos por $\hat{L}_{n-i}$), basta-nos arranjar um estimador para cada R_i para obter previsões para os montantes totais das reservas "IBNR+IBNER" para os vários anos de ocorrência.

Tendo em conta que $X_{i,n-i}$, o elemento a que corresponde a última observação disponível no triângulo para o ano de ocorrência i, constitui, por hipótese, uma percentagem L_{n-i} de X_i, poderíamos tomar o racio

$$\frac{X_{i,n-i}}{\hat{L}_{n-i} P_i} \qquad i = 1, \ldots, n \ , \qquad (3.14)$$

como um estimador, ainda que grosseiro, da percentagem de P_i que finalmente será necessária para pagar o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i, ou seja, do factor de correcção dos prémios, R_i. No entanto, atendendo a que nesse caso se cairia no método "chain-ladder" (como se pode verificar facilmente) e, ainda, com o objectivo de obter estimativas de melhor qualidade, propõe-se para estimador de R_i um rácio do mesmo género, mas agora contendo informação acerca de outros anos cujos comportamentos em termos da adequação do montante dos prémios cobrados ao montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos sejam parecidos com o do ano i:

$$\hat{R}_i = \frac{\sum_{s \in S_i} X_{s,n-s}}{\sum_{s \in S_i} \hat{L}_{n-s} P_s} \qquad i = 1, \ldots, n \ , \qquad (3.15)$$

em que S_i é um conjunto de índices que representam os vários anos com as características referidas acima. Os casos extremos dos conjuntos de índices possíveis são:

. $S_i = \{0, 1, ..., n\}$ (conjunto de todos os anos de ocorrência)

. $S_i = \{i\}$ (apenas o ano i para o qual se quer estimar o factor de correcção - caso em que se cai no método "chain-ladder").

Como já referimos, com base nos estimadores propostos para os factores L_{n-i} e R_i, o montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i é previsto, neste método, por:

$$\hat{Y}_i = (1 - \hat{L}_{n-i})\, \hat{R}_i\, P_i \qquad i = 1, 2, ..., n\,. \qquad (3.16)$$

Por outro lado, Straub (1988) propõe para estimador de cada X_i:

$$\hat{X}_i = X_{i,n-i} + \hat{Y}_i \qquad i = 1, 2, ..., n\,. \qquad (3.17)$$

Pode constatar-se que no método "chain-ladder" a previsão de cada Y_i é dada por uma fórmula muito parecida com a (3.16). A única diferença reside na substituição do factor $(\hat{R}_i P_i)$ por outro que não entra com a informação fornecida por P_i. De facto, nesse método tem-se:

$$\hat{Y}_i = (\hat{H}_{n-i} - 1)\, X_{i,n-i} = (1 - \hat{L}_{n-i})\, X_{i,n-i}\, \hat{H}_{n-i} \qquad i=1, ..., n \quad (3.18)$$

Repare-se, como no método "cape cod" o referido factor é, em geral, muito menos sensível a variações de $X_{i,n-i}$!

O método "cape cod" consegue superar uma das deficiências do método "chain-ladder". Como já vimos, desde que, na estimação de cada R_i, se escolha um conjunto S_i com outros anos além do i, este método é menos sensível a alterações dos montantes $X_{i,n-i}$, sendo, portanto, mais robusto nos casos em que estas observações apresentem valores anormais. Por outro lado, ao entrar com os prémios, está a utilizar mais informação do que o método "chain-ladder".

No entanto, este método continua a apresentar problemas:

. Continua a ser sensível a alterações das observações que impliquem, por sua vez, alterações significativas nos factores "lag". Um valor anormal de X_{0n} pode influenciar significativamente todas as previsões $\hat{Y}_i$

. Continua a estimar os factores H_j e, portanto, os L_j de uma forma multiplicativa.

. Continua a supor que o padrão de desenvolvimento no tempo dos X_{ij} é o mesmo para todos os anos de ocorrência.

Resta apenas referir, que apesar de exigir mais cálculos do que o "chain-ladder", o "cape cod" é ainda um método muito simples de aplicar. Apresenta também a vantagem, já referida em relação ao método "chain-ladder", de as variações no montante de negócios transaccionados em cada ano de ocorrência não constituirem um problema pois, neste caso, são reflectidas directamente nos P_i.

3.2.2 MÉTODO DO COMPLEMENTAR DO RÁCIO DE PERDA

O método do complementar do rácio de perda foi proposto por Buhlmann (1983) para tentar resolver uma das deficiências do método "chain-ladder", que também não foi ultrapassada no método "cape cod": o facto dos factores de desenvolvimento final serem estimados através da multiplicação de estimadores dos coeficientes de desenvolvimento. Este método não estocástico também pode ser considerado uma variante do "chain-ladder" pois, como veremos mais adiante, a sua hipótese básica implica a proporcionalidade das colunas do quadro completo.

Tal como o método "cape cod", este método pode ser utilizado na previsão de reservas "IBNR" e de reservas "IBNR+IBNER" e baseia-se na informação estatística fornecida pelo triângulo cumulativo dos X_{ij} e pelos P_i.

Também tal como o método "cape cod", o método do complementar do rácio de perda foi concebido só para prever os montantes totais das reservas "IBNR+IBNER" e os montantes totais das indemnizações para os vários anos de ocorrência.

Defina-se M_{ij}, como o rácio de perda no final do ano de desenvolvimento j para o ano de ocorrência i:

$$M_{ij} = \frac{X_{ij}}{P_i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \;;\; j = 0, 1, \ldots, n \;. \quad (3.19)$$

Este rácio relaciona o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j com o montante dos prémios cobrados nesse ano de ocorrência.

A hipótese básica do método do complementar do rácio de perda assume que, qualquer que seja o ano de ocorrência i, o rácio de perda no final do ano de desenvolvimento j é sempre o mesmo, ou seja,

$$X_{ij} = P_i \, M_j \qquad i = 0, 1, ..., n \, ; \, j = 0, 1, ..., n \, , \qquad (3.20)$$

com M_j o rácio de perda no final do ano de desenvolvimento j. Repare-se, que se construirmos um quadro completo, com cada X_{ij} a verificar-se (3.20), as colunas deste quadro vêm proporcionais. Pode, então, concluir-se que a hipótese deste método implica que se verifique a hipótese do método "chain-ladder".

Atendendo a (3.20) e fazendo o rácio de perda final M_n=M, tem-se

$$Y_i = X_i - X_{i,n-i} = P_i \, M - P_i \, M_{n-i} = (M-M_{n-i}) \, P_i \qquad i=0,1,..., n \; . \, (3.21)$$

A diferença $(M-M_{n-i})$ dá-nos o rácio entre o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que ainda não foi pago e o montante dos prémios cobrados nesse ano de ocorrência. Podemos, pois, dizer que esta diferença é o complementar do rácio de perda no final do ano de desenvolvimento n-i. Deste facto resulta o nome do método.

Se considerarmos (3.21), é fácil verificar que para obter previsões para os Y_i basta arranjar estimadores para os rácios de perda M_{n-i} e M.

Para cada M_j, propõe-se o seguinte estimador:

$$\hat{M}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} X_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j} P_i} \qquad j = 0, 1, ..., n \,. \qquad (3.22)$$

Tendo em conta que o estimador $\hat{M}_n$ fornece, na prática, quase de certeza, estimativas de má qualidade para M, pois é obtido apenas com uma observação, os autores deste método resolveram propôr outro estimador, $\hat{M}$, para M. $\hat{M}$ deve ser obtido, ou ajustando uma curva à sequência das estimativas dos rácios de perda no final dos vários anos de desenvolvimento, ou efectuando uma extrapolação gráfica a partir da referida sequência.

Assim, neste método, a previsão de cada Y_i é dada por:

$$\hat{Y}_i = (\hat{M} - \hat{M}_{n-i})P_i \qquad i = 1, 2, ..., n \,, \qquad (3.23)$$

em que a diferença $(\hat{M} - \hat{M}_{n-i})$ nos fornece um estimador para o complementar do rácio de perda no final do ano de desenvolvimento n-i. Por outro lado, tal como no método "cape cod", obtem-se como estimador para cada X_i:

$$\hat{X}_i = X_{i,n-i} + \hat{Y}_i \qquad i = 1, 2, ..., n \,. \qquad (3.24)$$

Algumas das vantagens do método do complementar do rácio de perda são exactamente aquelas que o método "cape cod" apresenta em relação ao "chain-ladder":

. É mais robusto em relação a valores anormais das observações $X_{i,n-i}$.

. Utiliza a informação fornecida pelos prémios.

No entanto, este método consegue ultrapassar uma deficiência inerente, quer ao "chain-ladder", quer ao "cape cod". Isto, porque evita a estimação dos factores H_j através da multiplicação de estimadores dos coeficientes de desenvolvimento.

Apesar de ter sido ainda pouco utilizado em aplicações práticas, podem, desde já, apontar-se algumas deficiências a este método.

Por um lado, assume que o rácio de perda final é sempre o mesmo, qualquer que seja o ano de ocorrência considerado. Isto significa, que o método não deve ser utilizado nos casos em que se saiba à priori que existem diferenças significativas entre os rácios de perda final para os vários anos de ocorrência. Por exemplo, o método é completamente desaconselhado no caso em que os rácios de perda para os anos de ocorrência mais antigos são significativamente menores do que os rácios para os anos mais recentes e, além disso, se observam factores "lag" pequenos para os primeiros anos de desenvolvimento. Isto porque, qualquer que seja o $\hat{M}$ escolhido, este conduzirá inevitavelmente a uma subestimação dos Y_i para os anos de ocorrência mais recentes ou a uma sobrestimação dos Y_i para os anos mais antigos.

Por outro lado, apesar de substituir o estimador $\hat{M}_n$ pelo estimador $\hat{M}$, devido ao facto do primeiro fornecer estimativas de má qualidade, não tem em consideração que os estimadores $\hat{M}_j$ para os últimos anos de desenvolvimento também são pouco fiáveis pelo facto de também serem obtidos com poucas observações.

Por fim, devido ao facto da sua hipótese básica implicar a proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo, assume, tal como os métodos "chain-ladder" e "cape-cod", que o padrão de desenvolvimento no tempo dos X_{ij} é o mesmo para todos os anos de ocorrência.

3.2.3 METODO DOS MINIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

Este método não estocástico foi proposto, como o seu nome indica, por De Vylder em 1978. Como veremos mais à frente, trata-se de um método que parte de uma hipótese equivalente à do método "chain-ladder" mas que utiliza um processo de estimação diferente. Devido a este facto, também pode ser considerado como uma variante do método "chain-ladder".

Tal como o "chain-ladder", este método permite prever reservas "IBNR", reservas "IBNER", reservas "IBNR+IBNER" e os números das indemnizações "IBNR". Para a previsão de reservas "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER" utiliza o triângulo não cumulativo dos x_{ij} enquanto que para a previsão dos números das indemnizações "IBNR" utiliza, naturalmente, o triângulo não cumulativo dos n_{ij}.

Ainda em comparação com o método "chain-ladder", o método em estudo também tem por objectivo passar do triângulo de dados (neste caso, não cumulativo) para um quadro completo, através da previsão dos x_{ij} futuros.

O método dos mínimos quadrados de De Vylder parte da hipótese de que a fracção de X_i paga no ano de desenvolvimento j não depende do ano de ocorrência i, ou seja,

$$x_{ij} = X_i \, p_j \qquad i = 0, 1, \ldots, n \; ; \; j = 0, 1, \ldots, n \, , \qquad (3.25)$$

em que p_j é a fracção de X_i paga no ano de desenvolvimento j, qualquer que seja o ano de ocorrência i.

Vimos que, no método "chain-ladder", segundo a hipótese da proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo, se tem (equações (3.9) e (3.11)):

$$X_{ij} = X_i L_j \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n \;, \qquad (3.26)$$

em que L_j e a fracção de X_i paga até ao final do ano de desenvolvimento j, qualquer que seja o ano de ocorrência i. É fácil mostrar que se se verificar (3.25) então tem-se (3.26). De facto

$$X_{ij} = \sum_{h=0}^{j} x_{ih} = X_i \left(\sum_{h=0}^{j} p_h \right) \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n \;, \qquad (3.27)$$

em que $\left(\sum_{h=0}^{j} p_h \right)$ representa a mesma fracção do que L_j. Por outro lado, verificando-se (3.26) então

$$x_{ij} = X_{ij} - X_{i,j-1} = X_i (L_j - L_{j-1})$$

em que $(L_j - L_{j-1})$ representa a mesma fracção do que p_j. Desta forma, podemos concluir que a hipótese do método de De Vylder e a hipótese do método "chain-ladder" são equivalentes.

Para prever os x_{ij} futuros basta estimar os X_i e os p_j. Para isso, vai utilizar-se o método dos mínimos quadrados. Este método de estimação vai minimizar a soma ponderada dos quadrados das diferenças entre os x_{ij} observados e os x_{ij} modelizados por (3.25), ou seja, vai minimizar a função:

$$\psi(\underset{-}{X},\underset{-}{p}) = \sum_{(i,j)} w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right)^2 \quad , \tag{3.28}$$

com $\qquad \underset{-}{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ e $\underset{-}{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$,

em que o somatorio percorre todas as observações disponíveis no triângulo de dados e os w_{ij} são ponderadores. Estes ponderadores têm a ver com o facto de, por vezes, se terem informações à priori que levam a considerar umas observações mais importantes do que outras no processo de estimação (de acordo com a antiguidade, fiabilidade, etc., das observações). Quando há razões para crer que todas as observações têm igual importância, atribui-se o valor 1 a cada w_{ij}.

Antes de se passar à minimização de Ψ convém referir que, como facilmente se pode verificar através da sua definição, se (X_i, p_j) (i=0,1,...,n ; j=0,1,...,n) for um seu minimizante então

$$\left(X'_i = cX_i \, , \, p'_j = \frac{p_j}{c}\right) \qquad (\forall\, c > 0) \qquad\qquad (i=0,1,\ldots,n \;;\; j=0,1,\ldots,n)$$

também o é.

Da minimização de (3.28) sai o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi(\underset{-}{X},\underset{-}{p})}{\partial X_i} = -2\sum_j w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right) p_j = 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ \\ \dfrac{\partial \Psi(\underset{-}{X},\underset{-}{p})}{\partial p_j} = -2\sum_i w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right) X_i = 0 & j = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i \sum_j w_{ij} p_j^2 - \sum_j w_{ij} x_{ij} p_j = 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ \\ p_j \sum_i w_{ij} X_i^2 - \sum_i w_{ij} x_{ij} X_i = 0 & j = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i = \dfrac{\sum_j w_{ij} x_{ij} p_j}{\sum_j w_{ij} p_j^2} & i = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.29) \\ \\ p_j = \dfrac{\sum_i w_{ij} x_{ij} X_i}{\sum_i w_{ij} X_i^2} & j = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.30) \end{cases}$$

Para se obter uma solução deste sistema podemos recorrer a um processo iterativo. Começa-se por dar valores arbitrários aos p_j em (3.29). Com os X_i obtidos nestas equações, obtêm-se novos p_j em (3.30), e assim sucessivamente, até que os X_i e os p_j convirjam. Geralmente, este processo é convergente, conduzindo a uma solução limite em poucas iterações. A solução limite varia consoante os p_j utilizados inicialmente. No entanto, diferentes soluções limite dão sempre origem aos mesmos produtos $(X_i p_j)$.

Embora não tenha muito interesse obter uma solução única para o problema de minimização apresentado atrás, pois, como já vimos, os produtos $(X_i p_j)$ vêm sempre os mesmos com qualquer solução, isso pode ser conseguido através da introdução da restrição

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = 1 \qquad . \qquad (3.31)$$

Esta restrição verifica-se quando, como é o caso, se supõe que todas as indemnizações são completamente pagas até ao final do ano de desenvolvimento n.

Note-se que a solução do problema que se obtem minimizando a função (3.28) sujeita à restrição (3.31) é uma das soluções do problema sem restrições.

Com efeito, a minimização da função lagrangeana

$$L\left(\underline{X}, \underline{p}; \lambda\right) = \sum_{(i,j)} w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right)^2 + \lambda\left(\sum_{j=0}^{n} p_j - 1\right) \quad , \qquad (3.32)$$

leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\underline{X},\underline{p};\lambda)}{\partial X_i} = -2\sum\limits_j w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right) p_j = 0 & i = 0, 1, \ldots, n \quad (3.33) \\[2ex] \dfrac{\partial L(\underline{X},\underline{p};\lambda)}{\partial p_j} = -2\sum\limits_i w_{ij}\left(x_{ij} - X_i p_j\right) X_i + \lambda = 0 & j = 0, 1, \ldots, n \quad (3.34) \\[2ex] \dfrac{\partial L(\underline{X},\underline{p};\lambda)}{\partial \lambda} = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j - 1 = 0 & (3.35) \end{cases}$$

Multiplicando as equações (3.33) respectivamente por $(-X_0)$, $(-X_1)$, ..., $(-X_n)$ e as (3.34) respectivamente por p_0, p_1, ..., p_n e somando todas as equações resultantes membro a membro, obtemos a equação:

$$\lambda \sum_{j=0}^{n} p_j = 0 \qquad . \qquad (3.36)$$

Daqui sai que o multiplicador de Lagrange é nulo e, portanto, o sistema composto pelas equações (3.33), (3.34) e (3.35) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{\sum_j w_{ij} x_{ij} p_j}{\sum_j w_{ij} p_j^2} & i = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.37) \\[2ex] p_j = \dfrac{\sum_i w_{ij} x_{ij} X_i}{\sum_i w_{ij} X_i^2} & j = 0, 1, \ldots, n \qquad (3.38) \\[2ex] \sum_{j=0}^{n} p_j = 1 & \qquad (3.39) \end{cases}$$

Como se pode constatar, a única diferença entre o sistema anterior e aquele que resulta da minimização da função (3.28) sem estar sujeita a nenhuma restrição, é apenas a existência de uma nova equação que corresponde precisamente à restrição introduzida.

A solução única do sistema anterior é obtida através de um processo iterativo semelhante ao utilizado para resolver o sistema sem restrição. Começa-se por dar valores arbitrários aos p_j em (3.37), mas de forma a que se verifique a restrição (3.39), ou seja, de forma a que a soma desses p_j seja igual a 1. Com os X_i obtidos nestas equações, calculam-se novos p_j através de (3.38). Como, muito provavelmente, estes novos p_j não somam 1, tem de se proceder à sua transformação de maneira a que a restrição ainda se verifique. Para isso, efectua-se a normalização dos p_j, que consiste na divisão de cada um deles por $\sum_{j=0}^{n} p_j$. Com os p_j transformados, obtêm-se novos X_i em (3.37), e assim sucessivamente, até que os X_i e os p_j convirjam.

A partir do momento em que se obtêm estimadores para os X_i e para os p_j através da resolução de um dos sistemas apresentados anteriormente, torna-se fácil prever os x_{ij} futuros:

$$\hat{x}_{ij} = \hat{X}_i \, \hat{p}_j \qquad i = 1, \ldots, n \; ; \; j = n-i+1, \ldots, n \; . \qquad (3.40)$$

Neste método, a previsão do montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i é dada por:

$$\hat{Y}_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} \hat{x}_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \; . \qquad (3.41)$$

A semelhança do que acontece nos métodos apresentados nos dois pontos anteriores a previsão de cada X_i é dada por:

$$\tilde{X}_i = X_{i,n-i} + \hat{Y}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \; , \qquad (3.42)$$

e não por $\hat{X}_i$ como à primeira vista poderia parecer.

Uma vantagem que o método dos mínimos quadrados de De Vylder apresenta em relação aos métodos expostos anteriormente consiste em não necessitar que se conheçam todas as observações do triângulo. De facto, no processo de estimação dos X_i e dos p_j, vimos que os somatórios não foram completamente definidos pois percorriam só as observações disponíveis no triângulo, que podiam não ser todas as possíveis. Desta forma, ao utilizar este método, sempre que se suspeite que algumas das observações não são fiáveis, pode optar-se pela sua não utilização no processo de estimação dos X_i e dos p_j.

Por outro lado, Lemaire (1985) sustenta que, apesar da hipótese básica deste método ser equivalente à do método "chain-ladder", o facto de utilizar um método de estimação diferente, permite-lhe tornar-se um método de previsão mais estável, no sentido de ser menos sensível a variações dos valores das observações. De facto, ao contrário do método "chain-ladder", não fornece previsões dos Y_i que dependem directamente dos $X_{i,n-i}$ e evita a estimação dos factores H_j através da multiplicação de estimadores dos coeficientes de desenvolvimento.

Tal como todos os métodos apresentados anteriormente, o método dos mínimos quadrados de De Vylder também assume que o padrão de desenvolvimento no tempo dos pagamentos de indemnizações é o mesmo, qualquer que seja o ano de ocorrência considerado. Desta forma, em todas as situações em que seja violada esta hipótese, é necessário efectuar os ajustamentos nos dados originais já referidos na apresentação do método "chain-ladder".

4 MÉTODOS DE PREVISÃO ESTOCÁSTICOS

4.1 MÉTODO DE STRAUB

O método de Straub, como já se referiu, foi um dos primeiros métodos estocásticos a ser desenvolvido [Straub (1972)]. Foi, portanto, um dos primeiros métodos a considerar explicitamente o carácter aleatório dos pagamentos de indemnizações.

O método em estudo serve para prever reservas "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER". Para a previsão de reservas "IBNR" e "IBNR+IBNER" o método pode utilizar a informação estatística fornecida por um triângulo de dados cumulativo em que cada observação é obtida a partir do respectivo triângulo cumulativo dos X_{ij} da seguinte forma:

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij}}{P_i} \qquad i = 0, 1, ..., n \; ; \; j = 0, 1, ..., n-i \; . \qquad (4.1)$$

Apesar de na apresentação deste método, tal como o seu autor, utilizarmos os Z_{ij} obtidos com os P_i, devemos referir que os Z_{ij} também podem ser obtidos com quaisquer outras medidas do volume de negócios transacccionados [facto, aliás, também reconhecido por Straub (1972)]. Os Z_{ij} podem ainda ser obtidos com os nºs das indemnizações relativas aos sinistros participados nos vários anos de notificação e, portanto, o método pode também ser utilizado na previsão de reservas "IBNER". Repare-se que os triângulos dos Z_{ij} obtidos com quaisquer V_i são os triângulos cumulativos que correspondem aos triângulos dos z_{ij} definidos no ponto 2.1.

Sendo um método estocástico, Straub considera todos os elementos Z_{ij} do quadro de dados cumulativo completo como variáveis aleatórias. As hipóteses do modelo subjacente a este método em relação às variáveis Z_{ij} são as seguintes:

(H_1) Z_{ij} é independente de $Z_{i'j'}$ para $i \neq i'$

$$(H_2) \quad E(Z_{ij}) = e_j \quad , \qquad \forall\, i \in \{0,1,\dots,n\} \tag{4.2}$$

$$(H_3) \quad Cov(Z_{ij}, Z_{ij'}) = c_{jj'} \,/\, P_i \tag{4.3}$$

Na primeira hipótese assume-se que os pagamentos de indemnizações acumulados referentes a anos de ocorrência diferentes são independentes.

A segunda, implica que, exceptuando algumas flutuações aleatórias, o padrão de desenvolvimento no tempo dos Z_{ij} tenha de ser o mesmo qualquer que seja o ano de ocorrência considerado. Esta hipótese assume ainda que os prémios seguem de uma forma perfeita o andamento dos valores esperados dos pagamentos de indemnizações.

A terceira hipótese revela a estrutura da dependência estocástica entre os Z_{ij} referentes a um mesmo ano de ocorrência. A covariância entre dois Z_{ij} é inversamente proporcional ao montante dos prémios cobrados no ano de ocorrência em questão ou, o mesmo é dizer que, a covariância entre X_{ij} e $X_{ij'}$ é directamente proporcional ao montante dos prémios cobrados.

O objectivo do método de Straub, tal como o de alguns dos métodos não estocásticos apresentados no capítulo anterior, também é transformar o triângulo de dados num quadro cumulativo completo, através da previsão dos Z_{ij} que faltam. A previsão de cada Z_{ij} que falta vai ser dada pelo estimador do valor esperado da variável Z_{ij} dadas todas as observações do triângulo cumulativo

$$\Delta Z = \{Z_{ij} : i = 0, 1, ..., n ; j = 0, 1, ..., n-i\} \quad .$$

Straub impõe que cada um dos referidos estimadores: seja uma função linear das observações do triângulo cumulativo, minimize o respectivo erro quadrático médio e seja não enviezado.

Desta forma, pretende-se determinar um estimador $\hat{\mu}_{qm}$ para cada variável $E(Z_{qm} \mid \Delta Z)$ $(q = 1, 2, ..., n ; m = n-q+1, ..., n)$ a verificar as seguintes condições:

1. $$\hat{\mu}_{qm} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} Z_{ij} \tag{4.4}$$

2. $$E\left\{\left[E(Z_{qm} \mid \Delta Z) - \hat{\mu}_{qm}\right]^2\right\} = \min \tag{4.5}$$

3. $$E\left(\hat{\mu}_{qm}\right) = E\left[E\left(Z_{qm} \mid \Delta Z\right)\right] = E\left(Z_{qm}\right) = e_m \quad . \tag{4.6}$$

No caso dos parâmetros e_j e $c_{jj'}$ serem conhecidos, cada estimador $\hat{\mu}_{qm}$ obtem-se minimizando a função[7]

$$\Phi_{qm} = E\left\{\left[E\left(Z_{qm} \mid \Delta Z\right) - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} Z_{ij}\right]^2\right\} \tag{4.7}$$

[7] Para não tornar a notação muito pesada, vão omitir-se os argumentos das funções apresentadas.

sujeita à restrição

$$E\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}Z_{ij}\right)=e_m \quad . \tag{4.8}$$

Para isso, torna-se necessário construir a função lagrangeana

$$L_{qm}=E\left\{\left[E\left(Z_{qm}\mid\Delta Z\right)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}Z_{ij}\right]^2\right\}-2\lambda_{qm}\left[E\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}Z_{ij}\right)-e_m\right] \tag{4.9}$$

e igualar a zero as suas derivadas parciais em relação aos α_{rs} (r=0,1, ..., n ; s=0,1, ..., n-r) e ao λ_{qm}.

Isso leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_{qm}}{\partial\alpha_{rs}}=-2E\left\{\left[E\left(Z_{qm}\mid\Delta Z\right)-\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}Z_{ij}\right]Z_{rs}\right\}-\\ -2\lambda_{qm}E\left(Z_{rs}\right)=0 \qquad r=0,1,\ldots,n;s=0,1,\ldots,n-r \\ \dfrac{\partial L_{qm}}{\partial\lambda_{qm}}=E\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\alpha_{ij}Z_{ij}\right)-e_m=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E\left[E\left(Z_{qm} \mid \Delta Z\right) Z_{rs}\right] - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} E\left(Z_{ij} Z_{rs}\right) + \\ + \lambda_{qm} E\left(Z_{rs}\right) = 0 \qquad r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, n-r \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} E\left(Z_{ij}\right) = e_m \end{cases}$$

Tendo em conta que

$$E\left[E\left(Z_{qm} \mid \Delta Z\right) Z_{rs}\right] = E\left(Z_{qm} Z_{rs}\right)$$

e que

$$E\left(Z_{ij} Z_{i'j'}\right) = E\left(Z_{ij}\right) E\left(Z_{i'j'}\right) + \mathrm{Cov}\left(Z_{ij}, Z_{i'j'}\right) \qquad ,$$

o último sistema de equações apresentado é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} E\left(Z_{qm}\right) E\left(Z_{rs}\right) + \mathrm{Cov}\left(Z_{qm}, Z_{rs}\right) - \\ - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} \left[E\left(Z_{ij}\right) E\left(Z_{rs}\right) + \mathrm{Cov}\left(Z_{ij}, Z_{rs}\right)\right] + \\ + \lambda_{qm} E\left(Z_{rs}\right) = 0 \qquad r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, n-r \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} e_j = e_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_m e_s + Cov\left(Z_{qm}, Z_{rs}\right) - e_s \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} e_j - \sum_{j=0}^{n-r} \alpha_{rj} Cov\left(Z_{rj}, Z_{rs}\right) + \\ + \lambda_{qm} e_s = 0 \qquad r = 0, 1, \ldots, n \, ; \, s = 0, 1, \ldots, n-r \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} e_j = e_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-r} \alpha_{rj} \frac{c_{js}}{P_r} = \delta_{qr} \frac{c_{ms}}{P_r} + \lambda_{qm} e_s \qquad r = 0, 1, \ldots, n \, ; \, s = 0, 1, \ldots, n-r \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} e_j = e_m \end{cases}$$

em que

$$\delta_{qr} = \begin{cases} 1 & , r = q \\ 0 & , r \neq q \end{cases}.$$

Definindo a seguinte notação vectorial:

$$\underline{\alpha}_r = \begin{bmatrix} \alpha_{r0} \\ \alpha_{r1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{r,n-r} \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_r = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_{mr} = \begin{bmatrix} c_{m0} \\ c_{m1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m,n-r} \end{bmatrix},$$

$$C_r = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{10} & c_{n-r,0} \\ c_{01} & c_{11} & c_{n-r,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0,n-r} & c_{1,n-r} & c_{n-r,n-r} \end{bmatrix} \qquad r = 0, 1, \ldots, n$$

o sistema de equações (que é equivalente ao último apresentado)

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-r} \alpha_{rj}\, c_{js} = \delta_{qr}\, c_{ms} + \lambda_{qm}\, P_r\, e_s & r = 0, 1, \ldots, n\,;\ s = 0, 1, \ldots, n-r \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij}\, e_j = e_m \end{cases}$$

pode ser escrito de uma forma mais compacta:

$$\begin{cases} C_r\, \underline{\alpha}_r = \delta_{qr}\, \underline{c}_{mq} + \lambda_{qm}\, P_r\, \underline{e}_r & r = 0, 1, \ldots, n \\ \sum_{i=0}^{n} \left(\underline{\alpha}_i^T\, \underline{e}_i \right) = e_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\alpha}_r = \delta_{qr}\, C_r^{-1}\, \underline{c}_{mq} + \lambda_{qm}\, P_r\, C_r^{-1}\, \underline{e}_r & r = 0, 1, \ldots, n & (4.10) \\ \sum_{i=0}^{n} \left(\underline{\alpha}_i^T\, \underline{e}_i \right) = e_m & & (4.11) \end{cases}$$

(a matriz C_r, exceptuando alguns casos raros, é sempre invertível).

Pré-multiplicando cada uma das equações (4.10) por $\underline{e}_r^T$ e somando membro a membro as equações resultantes, temos:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\underline{e}_i^T \underline{\alpha}_i\right) = \lambda_{qm} \sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1} \underline{e}_i\right) + \sum_{i=0}^{n} \delta_{qi}\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1} \underline{c}_{mq}\right) \quad (4.12)$$

Utilizando a equação (4.11) e tendo em atenção que a matriz C_q é simétrica, a equação (4.12) vem:

$$e_m = \lambda_{qm} \sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1} \underline{e}_i\right) + \underline{c}_{mq}^T C_q^{-1} \underline{e}_q \quad .$$

Desta forma, chegámos a uma equação que nos permite obter o λ_{qm}.

Por outro lado, tendo em conta que por definição

$$\hat{\mu}_{qm} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \alpha_{ij} Z_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i^T Z_i\right) \quad ,$$

com $\underline{Z}_i = \left[Z_{i0}\ Z_{i1} \ldots Z_{i,n-i}\right]^T$, e utilizando um processo semelhante ao descrito no parágrafo anterior, obtem-se:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\underline{\alpha}_i^T \underline{Z}_i\right)=\lambda_{qm}\sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1}\underline{Z}_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\delta_{qi}\left(\underline{c}_{mq}^T C_i^{-1}\underline{Z}_i\right),$$

ou seja,

$$\hat{\mu}_{qm}=\lambda_{qm}\sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1}\underline{Z}_i\right)+\underline{c}_{mq}^T C_q^{-1}\underline{Z}_q \quad .$$

Assim, podemos concluir que, quando os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ são conhecidos, cada estimador $\hat{\mu}_{qm}$ ($q=1,2,\ldots,n$; $m = n-q+1, \ldots, n$) pode ser obtido através das equações:

$$\hat{\mu}_{qm}=\lambda_{qm}\sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1}\underline{Z}_i\right)+\underline{c}_{mq}^T C_q^{-1}\underline{Z}_q \tag{4.13}$$

$$e_m=\lambda_{qm}\sum_{i=0}^{n} P_i\left(\underline{e}_i^T C_i^{-1}\underline{e}_i\right)+\underline{c}_{mq}^T C_q^{-1}\underline{e}_q \quad . \tag{4.14}$$

Note-se que a equação (4.14) não é mais do que a condição de não enviezamento aplicada ao estimador $\hat{\mu}_{qm}$, ou seja, à equação (4.13).

No caso em que os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ não são conhecidos, o que acontece geralmente na prática, cada estimador $\hat{\mu}_{qm}$ obtem-se substituindo nas equações (4.13) e (4.14) estes parâmetros por estimadores $\hat{e}_j$ e $\hat{c}_{jj'}$.

Os estimadores $\hat{e}_j$ e $\hat{c}_{jj'}$ podem ser determinados a partir de dois conjuntos de informação estatística diferentes: podem utilizar-se apenas o triângulo dos Z_{ij} e os montantes dos prémios referentes ao conjunto de riscos que se está a analisar, no caso de ser esta a única informação estatística disponível, ou, além desta informação, podem utilizar-se também triângulos de dados e montantes dos prémios referentes a outros conjuntos de riscos pertencentes ao mesmo ramo de actividade. Geralmente, os estimadores obtidos a partir do conjunto de informação estatística referido em segundo lugar dão origem a estimativas de melhor qualidade [veja-se Straub (1972)].

No caso em que também existe informação estatística acerca de outros conjuntos de riscos do mesmo ramo da actividade seguradora, Straub (1972) propõe estimadores para os parâmetros em questão, baseando-se na hipótese de que o portfólio constituído pelos vários conjuntos de riscos é heterogéneo no que diz respeito aos e_j (os parâmetros e_j variam significativamente entre os vários conjuntos de riscos, tornando-se necessário apresentar um estimador de e_j diferente para cada conjunto de riscos), sendo, no entanto, homogéneo no que concerne aos $c_{jj'}$ (os parâmetros $c_{jj'}$ não variam significativamente entre os vários conjuntos de riscos, sendo apenas necessário apresentar um estimador para cada parâmetro $c_{jj'}$).

A hipótese assumida em relação aos e_j para os vários conjuntos de riscos vai permitir que Straub proponha estimadores de credibilidade para estes parâmetros, segundo a abordagem da teoria da credibilidade apresentada por Buhlmann e Straub (1970). Antes de expôr os referidos estimadores, convém dar uma ideia, ainda que geral, do que é um estimador de credibilidade. Um estimador de credibilidade, neste caso de um parâmetro e_j associado a um dos conjuntos de riscos do portfólio, é uma média ponderada entre a experiência individual em termos de indemnizações do conjunto de riscos em questão e a experiência também em termos de indemnizações do portfólio. Ao ponderador da experiência individual do conjunto de riscos em análise costuma dar-se o nome de factor de credibilidade. Este factor de credibilidade pode variar entre 0 e 1. O ponderador da experiência do portfólio é o complementar do factor de credibilidade.

Sendo o portfólio constituído por N conjuntos de riscos e o conjunto de riscos que estamos a analisar, o conjunto nº k (k=1,2,...,N), o estimador de credibilidade proposto para cada e_j vem:

$$\hat{e}_j = \hat{e}_j^{(k)} = \gamma_j^{(k)} Z_{\cdot j}^{(k)} + (1-\gamma_j^{(k)})\ \bar{Z}_j \qquad j=0,1,\ldots,n \quad , \quad (4.15)$$

com $\gamma_j^{(k)}$, um factor de credibilidade cuja forma de cálculo será apresentada em seguida;

$$Z_{\cdot j}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_{\cdot j}^{(k)}}\ Z_{ij}^{(k)} \qquad ,$$

a experiência individual do conjunto de riscos nº k (em que $P_i^{(k)}$ é o montante dos prémios cobrados no ano de ocorrência i em relação ao conjunto de riscos nº k,

$$P_{\cdot j}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n-j} P_i^{(k)}$$

e $Z_{ij}^{(k)}$ é uma observação do triângulo cumulativo associado ao conjunto de riscos nº k); e

$$\overline{Z}_j = \sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_j^{(k)}}{\gamma_j} Z_{.j}^{(k)} \qquad ,$$

a experiência do portfólio (em que $\gamma_j = \sum_{k=1}^{N} \gamma_j^{(k)}$) [veja-se Buhlmann e Straub (1970) e Straub (1972)].

Os factores de credibilidade $\gamma_j^{(k)}$ podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\gamma_j^{(k)} = \frac{P_{.j}^{(k)} \; w_j}{v_j + P_{.j}^{(k)} \; w_j} \qquad j=0,1,\ldots,n \quad , \qquad (4.16)$$

em que o parâmetro v_j representa a média das variações dos $Z_{ij}^{(k)}$ dentro do mesmo conjunto de riscos e o parâmetro w_j mede as variações das médias dos $Z_{ij}^{(k)}$ entre os vários conjuntos de riscos [a forma como se chega à expressão (4.16) bem como as definições precisas dos parâmetros v_j e w_j podem ser encontradas em Bühlmann e Straub (1970)].

Quando os parâmetros v_j e w_j não são conhecidos, o que constitui a situação mais comum, torna-se necessário estimá-los a partir das observações disponíveis. Para se obterem estimadores não enviezados para estes parâmetros, interessa definir as seguintes estatísticas:

$$V_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} \left(Z_{ij}^{(k)} - Z_{\cdot j}^{(k)} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N(n-j)} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} \left(Z_{ij}^{(k)} \right)^2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{P_{\cdot j}^{(k)}}{P_j} \left(Z_{\cdot j}^{(k)} \right)^2 \right] \qquad j=0,1,\ldots, n-1$$

$$W_j = \frac{1}{[N(n-j+1)]-1} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} \left(Z_{ij}^{(k)} - \tilde{Z}_j \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{[N(n-j+1)]-1} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} \left(Z_{ij}^{(k)} \right)^2 - \tilde{Z}_j^{\,2} \right] \qquad j=0,1,\ldots, n$$

com $$P_j = \sum_{k=1}^{N} P_{\cdot j}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} P_i^{(k)}$$ e

$$\tilde{Z}_j = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_{\cdot j}^{(k)}}{P_j} Z_{\cdot j}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} Z_{ij}^{(k)} .$$

Isto, porque pode demonstrar-se que V_j é um estimador não enviezado de v_j/P_j enquanto W_j é um estimador não enviezado de $v_j/P_j + \tilde{\Pi}_j\, w_j$ [veja-se Buhlmann e Straub (1970)], com

$$\tilde{\Pi}_j = \frac{1}{[N(n-j+1)]-1}\sum_{k=1}^{N}\frac{P_{.j}^{(k)}}{P_j}\left(1-\frac{P_{.j}^{(k)}}{P_j}\right) .$$

Sendo assim, podem propor-se como estimadores não enviezados para os parâmetros v_j e w_j:

$$\hat{v}_j = V_j P_j \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{4.17}$$

$$\hat{w}_j = \frac{W_j - V_j}{\tilde{\Pi}_j} \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{4.18}$$

(em rigor, por motivos que serão explicados mais à frente, não se deveria chamar a $\hat{w}_j$ um estimador de w_j. Como veremos adiante, deve utilizar-se como estimador de w_j, $\hat{w}_j^* = \min(0,\ \hat{w}_j)$ e não $\hat{w}_j$).

Os estimadores de credibilidade $\hat{e}_j$, que acabaram de ser definidos, além de serem não enviezados, são os que minimizam o erro quadrático médio entre todos aqueles que são funções lineares das observações dos triângulos associados aos conjuntos de riscos considerados [veja-se Bühlmann e Straub (1970) e Straub (1972)].

Se considerarmos a expressão (4.18), podemos constatar que $\hat{w}_j$, que é um estimador de uma quantidade positiva (uma variância), assume um valor negativo sempre que $W_j < V_j$. Quando isto acontecer, deve fazer-se $\hat{w}_j = 0$ e tomar-se como estimador de e_j a estatística $\tilde{Z}_j$. Esta regra tem uma justificação intuitiva: se $W_j < V_j$ então as observações sustentam que o portfólio é homogéneo no que diz respeito aos parâmetros e_j. Sendo o portfólio homogéneo, é natural que se tome como estimador de cada e_j:

$$\hat{e}_j = \tilde{Z}_j = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i^{(k)}}{P_j} Z_{ij}^{(k)} \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n\ , \qquad (4.19)$$

ou seja, uma média ponderada de todos os $Z_{ij}^{(k)}$.

Atendendo à hipótese, já referida, da homogeneidade do portfólio no que diz respeito aos parâmetros $c_{jj'}$, Straub propõe como estimador de cada um destes parâmetros:

$$\hat{c}_{jj'} = \frac{1}{N(n-j)} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{n-j} P_i^{(k)} Z_{ij}^{(k)} Z_{ij'}^{(k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{P_{\cdot j}^{(k)}} \sum_{i=0}^{n-j} P_i^{(k)} Z_{ij}^{(k)} \sum_{i=0}^{n-j} P_i^{(k)} Z_{ij'}^{(k)} \right)$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\ ;\ j'=0,\ 1,\ \ldots,\ j \qquad . \qquad (4.20)$$

Consegue mostrar-se que estes estimadores são não enviezados [veja-se Straub (1972)] .

Analisando a expressão (4.20), é fácil verificar que não é possível obter as estimativas $\hat{c}_{nj'}$, qualquer que seja j'. Isto tem a ver com o facto de não se poderem estimar variâncias (covariâncias) com apenas uma observação.

No caso em que a única informação estatística disponível é o triângulo de dados e os montantes dos prémios associados ao conjunto de riscos que estamos a analisar, Straub propõe os seguintes estimadores para os parâmetros e_j:

$$\hat{e}_j = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{P_i}{P_{\cdot j}} Z_{ij} \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n \qquad (4.21)$$

(como só existe informação acerca de um conjunto de riscos, omite-se o índice k), ou seja, a estimativa fornecida por cada $\hat{e}_j$ não é mais do que uma média ponderada das observações da coluna j do triângulo. É muito fácil verificar que este estimador $\hat{e}_j$ é não enviezado.

Ainda no caso em que existe apenas um triângulo de dados, para cada parâmetro $c_{jj'}$, Straub apresenta um estimador que é um caso particular do estimador (4.20) (fixa-se N=1 e omite-se o índice k):

$$\hat{c}_{jj'} = \frac{1}{n-j}\left(\sum_{i=0}^{n-j} P_i Z_{ij} Z_{ij'} - \frac{1}{P_{\cdot j}} \sum_{i=0}^{n-j} P_i Z_{ij} \sum_{i=0}^{n-j} P_i Z_{ij'}\right)$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\ ;\ j'=0,\ 1,\ldots,j \qquad (4.22)$$

Já vimos que é impossível obter as estimativas $\hat{c}_{nj'}$, qualquer que seja j'. Por outro lado, se observarmos a expressão da estatística $V_{j'}$, chegamos à conclusão que não é possível obter V_n (pela mesma razão porque não se podem obter os $\hat{c}_{nj'}$). Isto implica que, no caso em que se utiliza informação sobre vários conjuntos de riscos, não se pode obter a estimativa de credibilidade $\hat{e}_n$ (observe-se (4.15)). Analisando as equações (4.13) e (4.14), pode constatar-se que, a impossibilidade da obtenção das referidas estimativas (mesmo so dos $\hat{c}_{nj'}$), leva a que não se possa estimar a última coluna do quadro cumulativo, ou seja, a que não se possam obter os $\hat{\mu}_{qn}$ (q=1, ..., n). Além disso, leva também a que os outros $\hat{\mu}_{qm}$ só possam ser obtidos através de um artifício (que será explicado no parágrafo seguinte), pois as parcelas associadas ao ano de ocorrência i=0 dos somatórios que aparecem nas equações (4.13) e (4.14) também entram com o parâmetro e_n e com os parâmetros $c_{nj'}$ (j'=0,1, ..., n).

Assim, quando os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ não são conhecidos, os estimadores $\hat{\mu}_{qm}$ ($m \neq n$) podem ser obtidos da seguinte forma: em primeiro lugar, estimam-se os e_j e os $c_{jj'}$ possíveis, da maneira habitual; em segundo lugar, aplicam-se as equações (4.13) e (4.14) (em que os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ foram substituídos pelos seus estimadores) a um novo triângulo cumulativo, que é obtido do original, retirando-lhe a primeira linha e a última coluna e renumerando os índices dos anos de ocorrência. Este conjunto de procedimentos leva a que a informação dada por P_0 e pela primeira linha do triângulo cumulativo, embora seja considerada na estimação dos e_j e dos $c_{jj'}$, seja completamente ignorada na obtenção dos estimadores $\hat{\mu}_{qm}$ propriamente dita (não é considerada nos somatórios das equações (4.13) e (4.14). Sendo assim, o processo torna-se equivalente à obtenção dos $\hat{\mu}_{qm}$ para um quadro cumulativo completo com menos uma linha e menos uma coluna.

No caso de termos, por exemplo, um triângulo cumulativo com 6 anos de ocorrência, numerados de 0 a 5, e utilizarmos também como informação estatística triângulos referentes a outros conjuntos de riscos, a obtenção dos estimadores $\hat{\mu}_{qm}$ $(m \neq 5)$ processa-se da seguinte forma:

1º Estimam-se os parâmetros e_j $(j=0,1,...,4)$ e $c_{jj'}$ $(j=0,1,...,4$; $j'=0,1,...,j)$ da forma habitual.

2º Aplicam-se as equações (4.13) e (4.14), com os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ substituídos pelos seus estimadores, ao triângulo cumulativo que é obtido do original, retirando-lhe a linha correspondente ao ano de ocorrência 0 e a coluna correspondente ao ano de desenvolvimento 5. Para aplicar as fórmulas (4.13) e (4.14), convém ainda renumerar de 0 a 4 os anos de ocorrência que constam no novo triângulo.

Desta maneira, conseguem obter-se todos os $\hat{\mu}_{qm}$ $(m \neq 5)$ do triângulo original, nomeadamente os $\hat{\mu}_{q4}$ $(q=2,3,4,5)$.

Apesar de apresentar a vantagem de ser um método estocástico e, portanto, de considerar explicitamente no seu modelo a natureza aleatória dos pagamentos de indemnizações, este método tem várias deficiências.

Em primeiro lugar, considerando as hipóteses do modelo subjacente a este método, é fácil constatar que existem várias situações em que essas hipóteses podem ser violadas.

Neste método, à semelhança do que acontece com os outros métodos já apresentados, supõe-se, como já referimos, que o padrão de desenvolvimento no tempo dos Z_{ij}, exceptuando algumas flutuações aleatórias, é o mesmo para todos os anos de ocorrência. As situações em que isto pode não se verificar já foram expostas no ponto 3.1. Como vimos nesse ponto, o método (neste caso o de Straub) só pode ser utilizado nestas situações depois de se fazerem os ajustamentos adequados aos dados originais.

A hipótese de que os prémios seguem de uma forma perfeita os valores esperados dos X_{ij} também pode ser violada. De facto, acontece, muitas vezes, que os prémios a cobrar são fixados não tendo só em consideração o comportamento dos X_{ij}, mas também, variações nas taxas de lucro dos investimentos feitos pela seguradora, questões de competitividade com outras seguradoras, etc. Nestes casos, pode verificar-se que, para um mesmo ano de desenvolvimento, o rácio entre o valor esperado de X_{ij} e P_i varie consoante o ano de ocorrência considerado.

Em segundo lugar, este método, ao não permitir estimar a última coluna do quadro cumulativo completo quando não se conhecem os parâmetros e_j e $c_{jj'}$, impossibilita, de uma maneira geral, a estimação quer dos X_i, quer dos Y_i. Só nos casos em que se pode considerar que no fim do ano de desenvolvimento n-1 (ou um ano de desenvolvimento anterior) já se conhecem os montantes X_i na sua quase totalidade (considerando-se negligenciáveis as partes que faltam), é que se torna possível estimar as referidas quantidades.

Por fim, no caso em que é necessário estimar os parâmetros e_j e $c_{jj'}$ e a única informação estatística disponível é o triângulo de dados e os montantes dos prémios associados ao conjunto de riscos que estamos a analisar, podem obter-se estimativas de má qualidade para os referidos parâmetros. Straub (1972) não reconhece este facto pois afirma que as estimativas que se obtêm neste caso, embora sejam inferiores às que se obtêm com mais informação estatística, ainda são de boa qualidade. No entanto, pode constatar-se facilmente que a afirmação de Straub não está correcta. Com efeito, é muito difícil obter estimativas de boa qualidade quando se está numa situação em que o nº de parâmetros a estimar $\left[\frac{(n+1)(n+4)}{2}\right]$ é maior do que o nº de observações disponíveis $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$! Este facto leva Van Eeghen (1981) a tecer os seguintes comentários em relação aos parâmetros e_j e $c_{jj'}$:

> "... the sucess of the method depends heavily on the possibility of estimating these coefficients efficiently. If all we have is the run-off triangle, we may not perform very well.".

4.2 MÉTODOS DA SEPARAÇÃO

4.2.1 MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VERBEEK

O método da separação de Verbeek surge pouco tempo depois do método de Straub [Verbeek (1972)].

Este método serve para prever os números das indemnizações "IBNR" no caso de uma resseguradora que tenha efectuado um contrato de resseguro do tipo excesso de perca em que o pleno se mantem fixo para os vários anos de ocorrência. Utiliza como informação estatística o triângulo não cumulativo dos n_{ij} (neste caso, cada n_{ij} representa o nº de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de desenvolvimento j à resseguradora).

No método em estudo, a inflação associada às indemnizações (que, como vimos no ponto 3.1, é diferente da inflação vulgarmente apresentada como indicador económico) é considerada um dos factores determinantes na explicação dos n_{ij}. As razões que estão por detrás disto são as seguintes [Van Eeghen (1981)]:

> "In the underlying direct business, there is a time-lag between the ocurrence of an accident and the final settlement of the claim. During this time-lag, the size of the claim increases due to inflation (inflation in the wide sense, i. e. more than just monetary inflation). As a result of this phenomenon, a claim, initially not involving the reinsurer, may confront him many years later, when its size overtakes the excess-point.".

As hipóteses básicas do modelo subjacente a este método estocástico (os n_{ij} do quadro não cumulativo completo são considerados variáveis aleatórias) vão ser apresentadas em seguida:

(H_1) As variáveis aleatórias N_i^* (com N_i^*, o nº total de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i para a seguradora directa) são independentes e idênticamente distribuídas, com distribuição de Poisson com parâmetro α desconhecido:

$$N_i^* \sim Po(\alpha) \qquad i=0,1,\ldots,n \quad .$$

(H_2) Os sinistros ocorridos num qualquer ano i que vão dar origem a indemnizações são participados independentemente uns dos outros e cada um deles tem a probabilidade r_j de ser participado à seguradora directa no ano de desenvolvimento j. Os r_j são parâmetros desconhecidos. Como se assume que todos os sinistros são participados até ao final do ano de desenvolvimento n, temos que

$$\sum_{j=0}^{n} r_j = 1 \quad .$$

(H_3) Os montantes totais das indemnizações individuais relativas aos sinistros participados no ano de notificação i+j (i+j=0,1, ..., 2n) são considerados variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas, com função distribuição $F_{i+j}(x)$. Neste método não se torna necessário especificar a estrutura analítica destas funções.

(H_4) Existe independência entre os montantes totais das indemnizações individuais e os anos de desenvolvimento em que os respectivos sinistros são participados.

(H_5) Existe independência entre variáveis aleatórias referentes a anos de ocorrência diferentes.

Convém referir que estas hipóteses estão formuladas de uma maneira ligeiramente diferente daquela que é apresentada originalmente por Verbeek (1972). Sendo um dos pioneiros na construção de modelos estocásticos para a previsão de indemnizações "IBNR", Verbeek apresenta as suas hipóteses de uma forma menos rigorosa e sistematizada. A leitura de alguns artigos [refira-se a título de exemplo Norberg (1986)], do vasto conjunto que apareceu desde então sobre o assunto, permitiu chegar a esta nova versão das hipóteses de Verbeek.

Este conjunto de hipóteses básicas implica, como demonstraremos em seguida, que as variáveis aleatórias n_{ij} sejam independentes e cada uma delas tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro $r_j \lambda_{i+j}$:

$$n_{ij} \sim Po\left(r_j \lambda_{i+j}\right) \qquad i=0,1,\ldots,n\ ;\ j=0,1,\ldots,n\ ,$$

em que λ_{i+j} é um parâmetro que representa os efeitos da inflação associada ao ano de notificação i+j.

Utilizando o teorema:

Se a variável aleatória $X \sim Po(\lambda)$ e a variável aleatória $Y|X=N \sim Bi(N,p)$ (distribuição binomial com parâmetros N e p) então $Y \sim Po(p\lambda)$ [Murteira (1979)],

torna-se fácil demonstrar que cada variável n_{ij} tem a distribuição referida acima.

Com efeito, se considerarmos n^*_{ij} como o número de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de desenvolvimento j à seguradora directa e verificarmos que a distribuição de $n^*_{ij} \mid N^*_i = N$ é uma [8] $Bi(N, r_j)$, temos o seguinte resultado:

$$\text{Se } N^*_i \sim Po(\alpha) \text{ e } n^*_{ij} \mid N^*_i = N \sim Bi(N, r_j) \text{ então } n^*_{ij} \sim Po(r_j \, \alpha)$$

Por outro lado, assumindo que x_0 é o pleno acordado no contrato de resseguro e tendo em conta que a probabilidade do montante total de uma indemnização relativa a um sinistro participado no ano de notificação i+j exceder o pleno é dada por $(1 - F_{i+j}(x_0))$, temos que:

$$\text{Se } n^*_{ij} \sim Po(r_j \, \alpha) \text{ e }^{9}\ n_{ij} \mid n^*_{ij} = N' \sim Bi(N', 1 - F_{i+j}(x_0)) \text{ então}$$

$$n_{ij} \sim Po\left((1 - F_{i+j}(x_0)) \, r_j \, \alpha\right).$$

Assim, se fizermos $\lambda_{i+j} = \alpha\left(1 - F_{i+j}(x_0)\right)$, vem que:

---

[8] Numa situação em que se consideram N provas independentes e se observa em cada uma delas a realização ou a não realização de um determinado acontecimento, A, de probabilidade P(A)=p constante de prova para prova, a variável aleatória X que contabiliza o nº de realizações do acontecimento A nas N provas tem uma distribuição Bi(N,p). No nosso caso, também temos N provas independentes que consistem na participação à seguradora directa de cada um dos N sinistros ocorridos no ano i que vão dar origem a indemnizações. Em cada uma dessas provas só se pode obter um de dois resultados: ou o sinistro é participado no ano de desenvolvimento j (com probabilidade r_j) ou não é. Daí que a variável aleatória $n^*_{ij} \mid N^*_i = N$ tenha uma distribuição $Bi(N, r_j)$.

[9] Neste caso, as N' provas independentes consistem na determinação do montante total de cada uma das N' indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de desenvolvimento j à seguradora directa. Em cada uma delas observa-se se o montante total da indemnização excede o pleno (com probabilidade $\left[1 - F_{i+j}(x_0)\right]$) e, portanto, se o respectivo sinistro terá de ser participado à resseguradora. Assim, a variável aleatória $n_{ij} \mid n^*_{ij} = N'$ tem uma distribuição $Bi\left[N', 1 - F_{i+j}(x_0)\right]$.

$$n_{ij} \sim Po\left(r_j \lambda_{i+j}\right) \qquad i=0,1,\ldots,n \; ; \; j=0,1,\ldots,n \quad , \qquad (4.23)$$

tal como queríamos demonstrar. Repare-se que λ_{i+j} é um parâmetro que representa, de facto, os efeitos da inflação associada ao ano de notificação i+j sobre a variável aleatória n_{ij}. Estes efeitos fazem-se sentir através da influência que a inflação exerce sobre os montantes totais das indemnizações relativas aos sinistros participados no referido ano de notificação.

Tendo em conta as hipóteses do modelo subjacente ao método em estudo, também é fácil verificar que as variáveis aleatórias n_{ij} são independentes. Por um lado, a hipótese (H_5) garante a independência entre n_{ij} referentes a anos de ocorrência diferentes; por outro lado, as hipóteses (H_2) e (H_4) garantem a independência entre n_{ij} referentes ao mesmo ano de ocorrência.

As previsões dos n_{ij} futuros podem ser obtidas através da estimação dos valores esperados das variáveis n_{ij}:

$$E\left(n_{ij}\right) = r_j \lambda_{i+j} \qquad i=1,\ldots,n \; ; \; j=n-i+1,\ldots,n \quad . \qquad (4.24)$$

Estes podem ser estimados a partir da estimação dos parâmetros r_j e λ_{i+j}, que, como se sabe, são desconhecidos.

Verbeek propôs o método da máxima verosimelhança para a estimação dos referidos parâmetros. No entanto, com base no triângulo de dados, só é possível estimar os parâmetros r_j $(j=0,1,\ldots,n)$ e λ_{i+j} $(i+j=0,1,\ldots,n)$. Para se obterem estimativas para os valores esperados dos n_{ij} não observados, de forma a transformar o triângulo de dados num quadro completo, é necessário arranjar estimativas exógenas ao modelo para os λ_{i+j} $(i+j=n+1,\, n+2,\, \ldots,\, 2n)$.

Para estimar os parâmetros r_j $(j=0,1,\dots,n)$ e λ_{i+j} $(i+j=0,1,\dots,n)$ pelo método da máxima verosimelhança, maximiza-se a função de verosimelhança das variáveis n_{ij} observadas,

$$L\left(r_0,\dots,r_n,\lambda_0,\dots,\lambda_n \mid n_{00},\dots,n_{0n},\dots,n_{n0}\right) =$$

$$= \prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{n-i} \frac{\left(r_j\lambda_{i+j}\right)^{n_{ij}} e^{\left(-r_j\lambda_{i+j}\right)}}{n_{ij}\,!} ,$$

sujeita à restrição

$$\sum_{j=0}^{n} r_j = 1 \qquad (4.25)$$

Como, neste caso, se torna mais conveniente maximizar o logaritmo da função de verosimelhança, define-se a seguinte função lagrangeana:

$$M = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} n_{ij} \ln\left(r_j\lambda_{i+j}\right) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} r_j\lambda_{i+j} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \ln\left(n_{ij}\,!\right) + s\left(\sum_{j=0}^{n} r_j - 1\right) \qquad (4.26)$$

Igualando a zero as derivadas parciais de (4.26) em ordem a cada um dos parâmetros e em ordem ao multiplicador s, obtem-se o seguinte sistema de equações:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial r_0} = \frac{n_{00}}{r_0} + \frac{n_{10}}{r_0} + \ldots + \frac{n_{n0}}{r_0} - \lambda_0 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n + s = 0 \\
&\frac{\partial M}{\partial r_1} = \frac{n_{01}}{r_1} + \frac{n_{11}}{r_1} + \ldots + \frac{n_{n-1,1}}{r_1} - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n + s = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\frac{\partial M}{\partial r_n} = \frac{n_{0n}}{r_n} - \lambda_n + s = 0 \\
&\frac{\partial M}{\partial \lambda_0} = \frac{n_{00}}{\lambda_0} - r_0 = 0 \\
&\frac{\partial M}{\partial \lambda_1} = \frac{n_{01}}{\lambda_1} + \frac{n_{10}}{\lambda_1} - r_0 - r_1 = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\frac{\partial M}{\partial \lambda_n} = \frac{n_{0n}}{\lambda_n} + \frac{n_{1,n-1}}{\lambda_n} + \ldots + \frac{n_{n0}}{\lambda_n} - r_0 - r_1 - \ldots - r_n = 0 \\
&\frac{\partial M}{\partial s} = \sum_{j=0}^{n} r_j - 1 = 0
\end{aligned}
\right. \tag{4.27}
$$

Multiplicando as primeiras (n+1) equações do sistema (4.27) respectivamente por $r_0, r_1, \ldots, r_n$ e as (n+1) seguintes respectivamente por $(-\lambda_0), (-\lambda_1), \ldots, (-\lambda_n)$ e somando membro a membro as equações resultantes, chegamos à equação:

$$
s \sum_{j=0}^{n} r_j = 0 \qquad .
$$

Daqui se conclui que o multiplicador s é nulo. Assim, se definirmos

$$v_j = \sum_{i=0}^{n-j} n_{ij} \qquad j=0,1,\ldots,n \qquad (4.28)$$

e

$$d_j = \sum_{i=0}^{j} n_{i,j-i} \qquad j=0,1,\ldots,n \quad , \qquad (4.29)$$

ou seja, v_j como a soma dos elementos da coluna j do triângulo e d_j como a soma dos elementos da diagonal j do triângulo, o sistema (4.27) vem:

$$\begin{cases} \dfrac{v_0}{r_0} - \lambda_0 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n = 0 \\ \dfrac{v_1}{r_1} - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{v_n}{r_n} - \lambda_n = 0 \\ \dfrac{d_0}{\lambda_0} - r_0 = 0 \\ \dfrac{d_1}{\lambda_1} - r_0 - r_1 = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d_n}{\lambda_n} - r_0 - r_1 - \ldots - r_n = 0 \\ \sum_{j=0}^{n} r_j = 1 \end{cases} \quad (4.30) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_n = d_n \\ r_n \lambda_n = v_n \\ \lambda_{n-1}\left(1 - r_n\right) = d_{n-1} \\ r_{n-1}\left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right) = v_{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_0\left(1 - r_1 - r_2 - \ldots - r_n\right) = d_0 \\ r_0\left(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n\right) = v_0 \end{cases} \quad (4.31)$$

O sistema (4.31), que é obtido do (4.30) efectuando algumas substituições e uma reordenação das equações, mostra que os estimadores da máxima verosimelhança dos parâmetros r_j e λ_{i+j} podem ser obtidos recursivamente a partir da primeira equação. De facto, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_n &= d_n \\
\hat{r}_n &= \frac{v_n}{\hat{\lambda}_n} \\
\hat{\lambda}_{n-1} &= \frac{d_{n-1}}{1-\hat{r}_n} \\
\hat{r}_{n-1} &= \frac{v_{n-1}}{\hat{\lambda}_n + \hat{\lambda}_{n-1}} \\
&\;\;\vdots \\
\hat{\lambda}_0 &= \frac{d_0}{1-\sum_{j=1}^{n} \hat{r}_j} \\
\hat{r}_0 &= \frac{v_0}{\sum_{m=0}^{n} \hat{\lambda}_m}
\end{aligned}
\qquad (4.32)
$$

Note-se que a estimação dos λ_{i+j} $(i+j=0,1,...,n)$ apenas interessa para a estimação dos r_j $(j=0,1,...,n)$. Como já se referiu anteriormente, para estimar os $E(n_{ij})$ referentes às variáveis não observadas é necessário prever os λ_{i+j} associados aos anos de notificação futuros. Estas previsões podem ser baseadas nas taxas de inflação que se prevê virem a vigorar nesses anos. No caso de não estarem disponíveis previsões para as taxas de inflação, os $\hat{\lambda}_{i+j}$ futuros podem obter-se a partir de uma extrapolação dos $\hat{\lambda}_{i+j}$ passados. Esta extrapolação pode ser efectuada através do ajustamento de uma função (linear, exponencial) às estimativas dos λ_{i+j} passados [Para obter informação mais pormenorizada sobre como determinar os $\hat{\lambda}_{i+j}$ futuros, pode consultar-se Van Eeghen (1981)].

Tal como todos os modelos, o modelo subjacente ao método de Verbeek é uma simplificação da realidade. No entanto, algumas das suas hipóteses implicam uma dose de simplificação excessiva.

Em muitos casos, verifica-se que a hipótese (H_1) é violada. Com efeito, as seguradoras directas são, muitas vezes, confrontadas com aumentos e/ou diminuições na frequência das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos vários anos considerados. Estas variações na frequência das indemnizações são, fundamentalmente, devidas a variações no montante de negócios transaccionados em cada ano de ocorrência. Para tornar o modelo mais adequado à realidade, poderia supôr-se que cada variável aleatória N_i^* tinha uma distribuição de Poisson com parâmetro α_i desconhecido:

$$N_i^* \sim Po\ (\alpha_i) \qquad i=0,1,\ldots,n \quad .$$

No entanto, esta hipótese aumentaria bastante o número de parâmetros a estimar.

Interessa referir que no caso particular em que a frequência das indemnizações apresenta uma taxa de crescimento anual constante, o modelo de Verbeek não deixa de ser válido. Isto, porque numa situação destas tem-se:

$$E(n_{ij}) = r_j \lambda_{i+j} u^i = r'_j \lambda'_{i+j} \qquad i=0,1,\dots,n \; ; \; j=0,1,\dots,n \; ,$$

com u a referida taxa de crescimento anual constante,

$$r'_j = r_j u^{-j} \qquad e \qquad \lambda'_{i+j} = \lambda_{i+j} u^{i+j} \quad .$$

Apesar da restrição $\sum_{j=0}^{n} r'_j = 1$ poder não se verificar, os estimadores dos parâmetros λ'_{i+j} $(i+j=0,1,\dots,n)$ e $r'_j (j=0,1,\dots,n)$ podem ainda ser obtidos por (4.32) pois, como se pode verificar facilmente através dos sistemas (4.30) e (4.31), os estimadores dos parâmetros λ_{i+j} $(i+j=0,1,\dots,n)$ e r_j $(j=0,1,\dots,n)$ que se obtêm com a restrição $\sum_{j=0}^{n} r_j = a \; (\forall a > 0)$ dão origem aos mesmos produtos $(\hat{r}_j \hat{\lambda}_{i+j})$ que os estimadores da sequência (4.32). No entanto, deve ter-se em conta que os parâmetros λ'_{i+j} e r'_j deixam de ter o significado habitual.

Outra hipótese que nalguns casos pode não estar de acordo com a realidade, é a de que o pleno x_0 se mantem no período considerado no triângulo de dados. É perfeitamente possível que este pleno varie consoante o ano de ocorrência considerado. Se isto acontecer, não está correcto assumir que a cada ano de notificação i+j está associado um único parâmetro λ_{i+j}.

A adequação da hipótese (H_2) à realidade também é bastante discutível. Alterações no tratamento administrativo das indemnizações por parte da seguradora directa, por exemplo, podem levar a que os r_j variem conforme o ano de ocorrência considerado.

Neste método assume-se que a seguradora directa, logo que lhe são participados sinistros, participa de imediato à resseguradora aqueles que prevê irem originar indemnizações que excedam o pleno. Como vimos no ponto 2.2, na realidade, as seguradoras directas podem participar os sinistros às resseguradoras apenas na altura em que as respectivas indemnizações ultrapassem de facto o pleno.

Finalmente, convém alertar para o facto de que, no método de Verbeek, a diferença entre o nº de observações disponíveis num triângulo completo ((n+2)(n+1)/2) e o nº de parâmetros a estimar (2n+1) vai aumentando com o n, sendo esta diferença muito pequena para valores de n pequenos. Assim, como aconselha Van Eeghen (1981), este método deve ser utilizado, preferencialmente, em casos em que esteja disponível um triângulo de dados de grandes dimensões. Se não se seguir este conselho, corre-se o perigo de chegar a estimativas de má qualidade para os parâmetros do modelo.

4.2.2 MÉTODO DA SEPARAÇÃO ARITMÉTICA DE TAYLOR

O método da separação aritmética, que surge em 1977 [Taylor (1977)], é formalmente semelhante ao método da separação de Verbeek e, portanto, inspirado neste. No entanto, ao contrário de Verbeek, Taylor não baseou este método num modelo construído a partir de um determinado conjunto de hipóteses básicas sobre as distribuições das diversas variáveis aleatórias intervenientes. Apenas se limitou a apresentar um modelo que intuitivamente considerou explicar bem o comportamento das variáveis aleatórias z_{ij}, cujo significado já foi definido no ponto 2.1.

A informação estatística utilizada por este método consiste no triângulo não cumulativo dos z_{ij}. Para relembrar, cada z_{ij} é definido da seguinte forma:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{V_i} \qquad i=0,1,\ldots,n \; ; \; j=0,1,\ldots,n-i \quad .$$

O método da separação aritmética permite prever indemnizações "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER". Como já foi referido no ponto 2.1, no caso da previsão de indemnizações "IBNR" e "IBNR+IBNER", cada V_i é uma medida do volume de negócios transaccionados no ano de ocorrência i. No caso da previsão de reservas "IBNER", cada V_i é o nº de indemnizações relativas aos sinistros participados no ano de notificação i.

Taylor supõe que:

$$E(z_{ij}) = r_j \, \lambda_{i+j} \qquad i=0,1,\ldots,n \; ; \; j=0,1,\ldots,n \, , \qquad (4.33)$$

em que r_j é um parâmetro associado ao ano de desenvolvimento j e λ_{i+j} é um parâmetro associado ao ano de pagamento i+j. Este autor supõe ainda que

$$\sum_{j=0}^{n} r_j = 1 \qquad .$$

Os r_j caracterizam a distribuição dos pagamentos de indemnizações pelos vários anos de desenvolvimento. Esta distribuição mantem-se aproximadamente constante ao longo dos vários anos de ocorrência desde que determinadas influências exógenas, como por exemplo a inflação, não a venham perturbar. No entanto, em muitos casos, estas influências exógenas apresentam grandes dimensões, levando a alterações na referida distribuição. Os efeitos destas influências exógenas (mais correctamente, só das que estão associadas aos anos de pagamento) são representadas no modelo pelos λ_{i+j}.

Analisando o modelo, podemos ver que Taylor conseguiu separar dos r_j, os efeitos das influências exógenas que os vão modificar ao longo do tempo. É ao reconhecimento deste facto que se deve, quer a designação deste método, quer a do método de Verbeek.

Tal como no método de Verbeek, os estimadores dos E (z_{ij}) vão ser obtidos a partir da estimação dos parâmetros r_j e λ_{i+j}. No entanto, a estimação destes parâmetros não vai ser feita pelo método da máxima verosimelhança pois Taylor não assumiu uma distribuição específica para as variáveis z_{ij}.

Através da observação do triângulo constituído pelos modelizações dos E (z_{ij}):

Ano de Ocor-rência/Ano de Notificação	Ano de Desenvolvimento					
	0	1	2	...	n-1	n
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	$r_2\lambda_2$	...	$r_{n-1}\lambda_{n-1}$	$r_n\lambda_n$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	$r_2\lambda_3$	...	$r_{n-1}\lambda_n$	
2	$r_0\lambda_2$	$r_1\lambda_3$	$r_2\lambda_4$	...		
.	.	.	.			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
n-1	$r_0\lambda_{n-1}$	$r_1\lambda_n$				
n	$r_0\lambda_n$					

(4.34)

conseguem descobrir-se determinadas relações entre as posições ocupadas pelos diversos parâmetros, que vão permitir estimá-los heurísticamente. Verifica-se que em cada coluna de (4.34) os r_j apresentam sempre o mesmo índice, o mesmo acontecendo aos λ_{i+j} em cada diagonal.

Como a soma dos elementos da última diagonal de (4.34) vem

$$\lambda_n(r_0 + r_1 + \ldots + r_n) = \lambda_n$$

então, se igualarmos a soma desta diagonal à soma da diagonal correspondente no triângulo de dados[10], temos um estimador para λ_n:

$$\hat{\lambda}_n = d_n \quad .$$

Por outro lado, igualando a soma da última coluna de (4.34) à soma da coluna correspondente no triângulo de dados e utilizando $\hat{\lambda}_n$, arranjamos um estimador para r_n:

$$\hat{r}_n = \frac{v_n}{\hat{\lambda}_n} \quad .$$

Procedendo da mesma forma com a soma da penúltima diagonal, temos:

$$\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n} \quad .$$

E se continuarmos assim até chegarmos à primeira diagonal e à primeira coluna, obtemos estimadores para todos os parâmetros do modelo. As expressões gerais destes estimadores são:

$$\hat{\lambda}_h = \frac{d_h}{1 - \sum_{j=h+1}^{n} \hat{r}_j} \qquad h = 0,1,\ldots, n \qquad (4.35)$$

[10] A soma dos elementos da coluna j e a soma dos elementos da diagonal j do triângulo dos z_{ij} também vão ser designadas, respectivamente, por v_j e d_j.

$$\hat{r}_h = \frac{V_h}{\sum_{j=h}^{n} \hat{\lambda}_h} \qquad h=0,1,\ldots,n \qquad . \qquad (4.36)$$

Como se pode constatar, os estimadores (4.35) e (4.36) são exactamente iguais àqueles que se obtiveram pelo método da máxima verosimelhança no método de Verbeek (sequência de estimadores (4.32)). Isto leva Taylor a concluir que: por um lado, o método de Verbeek também pode ser justificado heuristicamente; por outro, no caso particular em que, no método da separação aritmética, cada variável aleatória z_{ij} tem uma função densidade de probabilidade da forma:

$$f\,(z_{ij} \mid r_j, \lambda_{i+j}) = g(z_{ij})\,(r_j\,\lambda_{i+j})^{z_{ij}}\; e^{(-r_j z_{ij})} \quad , \qquad z_{ij} > 0,$$

os estimadores obtidos pelo método heurístico são estimadores da máxima verosimelhança.

Convém referir que o método heurístico exposto acima também só permite estimar os $E(z_{ij})$ relativos às variáveis não observadas desde que se prevejam exogenamente os λ_{i+j} futuros. Assim, para estimar os referidos $E(z_{ij})$, é necessário proceder da mesma forma que no método de Verbeek.

Depois de obtidos os $\hat{E}\,(z_{ij})$, facilmente se estimam os $E(x_{ij})$ para depois se poderem prever as reservas "IBNR+IBNER". Para isso, basta fazer:

$$\hat{E}(x_{ij}) = \hat{E}\,(z_{ij})\,V_i \qquad i=1,2,\ldots,n\ ;\ j=n-i+1,\ldots,n\ . \qquad (4.37)$$

Desta forma, no método da separação aritmética, a previsão do montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i vem:

$$\hat{Y}_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} \hat{E}(x_{ij}) \qquad i=1,2,\ldots,n \quad . \qquad (4.38)$$

Seguindo as ideias expressas no capítulo 3, vai propôr-se, também, como previsão do montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i:

$$\hat{X}_i = X_{i,n-i} + \hat{Y}_i \qquad i=1,2,\ldots,n \quad . \qquad (4.39)$$

Na modelização de cada $E(z_{ij})$, como pudemos observar, Taylor só entra em consideração com as influências exógenas ligadas ao ano de pagamento i+j. No entanto, existem outros factores, não menos importantes, associados aos anos de ocorrência que também podem influenciar o comportamento das variáveis aleatórias z_{ij}. De entre estes factores, os mais importantes são:

. Alterações no tratamento administrativo das indemnizações, que podem levar a que os r_j variem consoante o ano de ocorrência considerado.

. Alterações na protecção oferecida pelas apólices, que podem provocar variações nos montantes das indemnizações individuais.

. Alterações na composição do conjunto de riscos sobre o qual o triângulo de dados fornece informação estatística, que também podem provocar variações nos r_j.

. Alterações na gravidade dos sinistros que dão origem às indemnizações, que também podem provocar variações nos montantes das indemnizações individuais.

Nestes factores não foram incluídas as variações no montante de negócios transaccionados pois, neste caso, ao contrário do que acontece no método de Verbeek, os seus efeitos são eliminados pelo facto dos pagamentos de indemnizações serem divididos pelos V_i.

Desta forma, verifica-se que o método da separação aritmética de Taylor se mostra deficiente, na medida em que na modelização de cada $E(z_{ij})$ não entra com um parâmetro associado ao ano de ocorrência i. O próprio Taylor (1977) reconhece este facto. No entanto, quando averigua a possibilidade de extender o modelo da separação de forma a que

$$E(z_{ij}) = q_i r_j \lambda_{i+j} \qquad i=0,1,...,n \ ; \ j=0,1,...,n \quad ,$$

com $\sum_{i=0}^{n} q_i = 1$, chega à seguinte conclusão [Taylor (1977)]:

" ... this not only produces computational difficulties, but also reduces the number of degrees of freedom from $\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]$ to $\left[\frac{1}{2}n(n-3)\right]$. Thus even with a 5x5 triangle containing 15 entries, the number of degrees of freedom in the estimation is only 2.

For these reasons it seems that the extended model is inappropriate ... ".

Nesta conclusão de Taylor está patente o já referido problema do grande número de parâmetros a estimar em relação ao número de observações disponíveis (principalmente para valores de n pequenos). Com a passagem ao modelo com os parâmetros q_i, o problema torna-se bastante mais grave!

4.2.3 MÉTODO DA SEPARAÇÃO GEOMÉTRICA DE TAYLOR

O método da separação geométrica, que aparece em 1979 e também é devido a Taylor, utiliza a mesma informação estatística e visa os mesmos objectivos que o método da separação aritmética.

A única diferença entre este método e o da separação aritmética reside na restrição que é imposta aos r_j na modelização dos $E(z_{ij})$. Assim, neste método temos:

$$E(z_{ij}) = r_j \lambda_{i+j} \qquad i=0,1,\dots, n; j=0,1,\dots, n$$

com

$$\prod_{i=0}^{n} r_j = 1 \qquad (4.40)$$

As relações entre as posições ocupadas pelos diversos parâmetros no triângulo das modelizações dos $E(z_{ij})$, já referidas no método da separação aritmética, vão voltar a permitir estimar os parâmetros r_j e λ_{i+j} de uma forma heurística. O processo de estimação é semelhante ao utilizado no método da separação aritmética, só que, em vez de se igualarem somas de diagonais e de colunas, igualam-se os seus produtos.

Antes de passar à descrição do referido processo de estimação heurístico, defina-se W_j como o produto dos elementos da coluna j do triângulo de dados e E_j como o produto dos elementos da sua diagonal j, ou seja:

$$W_j = \prod_{i=0}^{n-j} z_{ij} \qquad j=0,1,\dots,n \qquad (4.41)$$

$$E_j = \prod_{i=0}^{j} z_{i,j-i} \qquad j=0,1,\ldots,n \quad . \tag{4.42}$$

Em primeiro lugar, um estimador para λ_n pode ser obtido, igualando o produto da última diagonal do triângulo (4.34) ao produto da última diagonal do triângulo de dados. O referido estimador vem:

$$\hat{\lambda}_n = (E_n)^{\frac{1}{n+1}} \quad .$$

Em seguida, um estimador para r_n pode ser obtido, procedendo da mesma forma em relação aos produtos das últimas colunas dos dois triângulos e utilizando $\hat{\lambda}_n$:

$$\hat{r}_n = \frac{W_n}{\hat{\lambda}_n} \quad .$$

Passando às penúltimas diagonais dos dois triângulos e procedendo ainda da mesma forma, temos:

$$\hat{\lambda}_{n-1} = \left(E_{n-1}\,\hat{r}_n\right)^{\frac{1}{n}} \quad .$$

E assim sucessivamente até se chegar às primeiras diagonais e às primeiras colunas, ou seja, até se obterem os estimadores $\hat{\lambda}_0$ e $\hat{r}_0$.

Desta forma, as expressões gerais dos estimadores obtidos através do método heurístico, vêm:

$$\hat{\lambda}_h = \left(E_h \prod_{j=h+1}^{n} \hat{r}_j \right)^{\frac{1}{h+1}} \qquad h=0,1,\ldots,n \qquad (4.43)$$

$$\hat{r}_h = \left(W_h / \prod_{j=h}^{n} \hat{\lambda}_j \right)^{\frac{1}{n-h+1}} \qquad h=0,1,\ldots,n \quad . \qquad (4.44)$$

Como facilmente se depreende, depois de obtidos os estimadores dos parâmetros r_j e λ_{i+j} através do método heurístico descrito atrás, os $E(z_{ij})$, os $E(x_{ij})$, os Y_i e os X_i são estimados exactamente da mesma forma que no método da separação aritmética.

Para finalizar, interessa referir que, nalguns casos, se verifica que o método da separação geométrica fornece melhores resultados do que o método da separação aritmética. De facto, Lemaire (1985), que considera o primeiro dos métodos referidos uma variante do segundo, refere que:

> "The separation method sometimes provides better results when the d_h and v_j are obtained as products and not as sums - that is the geometrical separation method.".

4.3 MODELO PROBABILÍSTICO DE BÜHLMANN, SCHNIEPER E STRAUB

Trata-se de um modelo devido a Buhlmann, Schnieper e Straub (1980), cujo desenvolvimento se efectua a partir do estudo das indemnizações individuais. Devido a este facto, como vimos no ponto 2.3, pode considerar-se um micro-modelo.

O estudo de cada indemnização individual é feito, quer em relação à ocorrência e à participação do sinistro que lhe corresponde, quer em relação à evolução dos pagamentos que gera ao longo do tempo. Isto vai permitir que, através deste modelo, se possam prever separadamente, para cada ano de ocorrência, o montante total das reservas "IBNR" e o montante total das reservas "IBNER".

Neste modelo, cada montante de pagamentos acumulados gerado por uma indemnização individual é considerado uma variável aleatória e representado pelo símbolo:

$$ {}^{m}W_{ij}^{(k)} \quad , $$

em que k é o nº da indemnização (as indemnizações relativas aos sinistros ocorridos num determinado ano são numeradas ao acaso), i é o ano de ocorrência do sinistro que lhe corresponde (i=0,1,...,n), j é o ano de desenvolvimento até ao fim do qual são acumulados os pagamentos (j=0,1,...) e m representa o ano em que é participado o referido sinistro (m=0,1,...). Convém referir que, neste caso, o conceito de ano de notificação é diferente daquele que foi apresentado em pontos anteriores. Se um sinistro é participado no ano de notificação m, isso significa que ele é participado m anos após ter ocorrido.

Devido ao facto de, neste modelo, se estudarem simultâneamente a participação dos sinistros e as sucessões de pagamentos que as respectivas indemnizações geram, convém (ao contrário do que se passa nos métodos apresentados anteriormente), na sua apresentação, não supôr a existência de um ano de notificação limite (até ao fim do qual todos os sinistros seriam participados), bem como a de um ano de desenvolvimento limite (até ao fim do qual todos os pagamentos seriam efectuados). No entanto, e apesar dos seus autores não mencionarem este aspecto, quando se chega à estimação dos parâmetros do modelo, pode constatar-se facilmente (como veremos mais à frente) que, na prática, o último ano de notificação tem de ser o n, o mesmo se passando com o último ano de desenvolvimento.

Além das ${}^{m}W_{ij}^{(k)}$, são ainda introduzidas no modelo as seguintes variáveis aleatórias:

N_i - Nº de indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i

$T_i^{(k)}$ - Ano de notificação em que o sinistro, ocorrido no ano i que originou a indemnização nº k, é participado à companhia seguradora. Se $T_i^{(k)} = m$ então o referido sinistro é participado no ano de notificação m.

${}^{m}W_i^{(k)}$ - Montante total da indemnização nº k relativa a um determinado sinistro ocorrido no ano i, ou seja,

$$ {}^{m}W_i^{(k)} = \lim_{j \to \infty} {}^{m}W_{ij}^{(k)} $$

É claro que, na prática, o montante total de cada indemnização é atingido após um nº finito de anos de desenvolvimento.

Utilizando as variáveis aleatórias apresentadas, podemos definir o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j como:

$$X_{ij} = \sum_{m=0}^{j} \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m\right] {}^{m}W_{ij}^{(k)} = \sum_{m=0}^{j} {}^{m}X_{ij} \qquad i=0,1,\ldots,n\ ;\ j=0,1,\ldots \quad ,$$

em que

$$I\left[T_i^{(k)} = m\right] = \begin{cases} 1 & \text{se } T_i^{(k)} = m \\ 0 & \text{se } T_i^{(k)} \neq m \end{cases}$$

e,

$${}^{m}X_{ij} = \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m\right] {}^{m}W_{ij}^{(k)}$$

representa o montante das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de notificação m que é pago até ao final do ano de desenvolvimento j. Podemos definir, ainda, o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i da seguinte forma:

$$X_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m\right] {}^{m}W_i^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} {}^{m}X_i \qquad i=0,1,\ldots,n \quad ,$$

em que

$$ {}^{m}X_i = \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m\right] {}^{m}W_i^{(k)} $$

representa o montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos no ano i e participados no ano de notificação m.

O objectivo deste modelo consiste em prever, para cada ano de ocorrência i, o montante total das reservas "IBNR+IBNER", ou seja, a diferença:

$$ Y_i = X_i - X_{i,n-i} \qquad i = 0, 1, \ldots n \quad . $$

Esta diferença pode ser subdividida em duas partes, da seguinte forma:

$$ Y_i = X_i - X_{i,n-i} = \sum_{m=0}^{\infty} {}^{m}X_i - \sum_{m=0}^{n-i} {}^{m}X_{i,n-i} = $$

$$ = \sum_{m=0}^{n-i} \left({}^{m}X_i - {}^{m}X_{i,n-i}\right) + \sum_{m=n-i+1}^{\infty} {}^{m}X_i = $$

$$ = \underbrace{\sum_{m=0}^{n-i} \left({}^{m}X_i - {}^{m}X_{i,n-i}\right)}_{Y_i^1} + \underbrace{\sum_{m=n-i+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m\right] {}^{m}W_i^{(k)}}_{Y_i^2} = $$

$$ = Y_i^1 + Y_i^2 \quad . \tag{4.45} $$

A parcela Y_i^1 representa o montante total das reservas "IBNER" para o ano de ocorrência i enquanto a parcela Y_i^2 representa o montante total das reservas "IBNR" para o mesmo ano de ocorrência. Desta forma, e ao contrário dos modelos apresentados anteriormente, este modelo permite prever o montante total das reservas "IBNR+IBNER" separando as suas duas componentes. Podem, assim, obter-se simultâneamente, a partir da mesma informação estatística, as previsões para as reservas "IBNR "e "IBNER".

Para prever os montantes Y_i é necessário que se encontre disponível todo um conjunto de informação estatística.

Uma das peças fundamentais deste conjunto é o triângulo cumulativo dos X_{ij} para a previsão de reservas "IBNR+IBNER", que se vai designar por ΔX.

Atendendo a que este modelo também estuda a participação dos sinistros, é preciso dividir as indemnizações por ano de notificação para que se possam construir os triângulos $\Delta^m X$ (m=0,1,...,n) de componentes ${}^m X_{ij}$ .Cada triângulo $\Delta^m X$ apresenta a seguinte configuração:

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento							
	0	1	...	m-1	m	m+1	...	n
0	0	0	...	0	${}^{m}X_{0m}$	${}^{m}X_{0,m+1}$	...	${}^{m}X_{0n}$
1	0	0	...	0	${}^{m}X_{1m}$	${}^{m}X_{1,m+1}$	...	
2	0	0	...	0	${}^{m}X_{2m}$	:		
.	.	.		.	.	.		
.	.	.		.	.	${}^{m}X_{n-m-1,m+1}$		
.	.	.		.	${}^{m}X_{n-m,m}$			
n-2	0	0	...	0				
n-1	0	0						
n	0							

É ainda necessário o triângulo cumulativo dos N_{ij}. As variáveis aleatórias N_{ij}, em relação a algumas das quais correspondem as observações deste triângulo, podem ser definidas da seguinte forma:

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} \leq j\right] \qquad i=0,1,\ldots,n \; ; \; j=0,1,\ldots \quad .$$

O triângulo dos N_{ij} vai ser designado por ΔN.

Por fim, têm ainda de estar disponíveis as medidas dos volumes de negócios transaccionados nos vários anos de ocorrência, ou seja, os V_i $(i=0,1,\ldots,n)$.

A estrutura probabilística do modelo de Buhlmann, Schnieper e Straub é dada pelas seguintes hipóteses básicas:

(H_1) As variáveis aleatórias N_i $(i=0,1,\dots,n)$ são independentes e cada uma delas tem distribuição de Poisson com parâmetro $(V_i\ \upsilon)$. Supõe-se que cada medida V_i é conhecida à partida e que υ é um parâmetro desconhecido.

(H_2) Os conjuntos de variáveis aleatórias $\{N_i\}$ e $\{T_i^{(k)}\}$ são considerados independentes no sentido de que, qualquer variável pertencente ao primeiro conjunto e qualquer variável pertencente ao segundo constituem um par de variáveis aleatórias independentes.

(H_3) Os conjuntos de variáveis aleatórias $\{N_i\}$ e $\{{}^{m}W_{ij}^{(k)}\}$ são considerados independentes no sentido referido na hipótese anterior.

(H_4) Variáveis aleatórias referentes a anos de ocorrência diferentes são independentes.

(H_5) i) Montantes de pagamentos acumulados gerados por indemnizações diferentes são independentes. As variáveis aleatórias $({}^{m}W_{ij}^{(k)})_{j\geq m}$,com i, j, m constantes e $k=1,2,\dots$, além de serem independentes, são também identicamente distribuídas. Logo, sempre que se falar da sua distribuição, pode omitir-se o índice k.

ii) As variáveis aleatórias $T_i^{(k)}$, com i constante e $k=1,2,\dots$, são independentes e identicamente distribuídas. Além disso, a sua distribuição verifica: $\Pr\left[T_i^{(k)}=m\right]=p(m)$, qualquer que seja o ano de ocorrência i considerado. Os p(m) são probabilidades desconhecidas.

$$(H_6) \quad E\left({}^{m}W_{ij}^{(k)} \mid \text{qualquer caminho que leve a } {}^{m}W_{i,j-1}^{(k)} = x\right) =$$

$$= E\left({}^{m}W_{ij}^{(k)} \mid {}^{m}W_{i,j-1}^{(k)} = x\right) = {}^{m}\lambda_{j-1}\, x \quad . \qquad (4.46)$$

Isto significa que os montantes de pagamentos acumulados gerados por indemnizações cujos sinistros foram participados no ano de notificação m apresentam uma "taxa de crescimento" do ano de desenvolvimento (j-1) para o ano de desenvolvimento j, ${}^{m}\lambda_{j-1}$, que não depende do ano de ocorrência dos sinistros.

$$V\left({}^{m}W_{ij}^{(k)} \mid \text{qualquer caminho que leve a } {}^{m}W_{i,j-1}^{(k)} = x\right) =$$

$$= V\left({}^{m}W_{ij}^{(k)} \mid {}^{m}W_{i,j-1}^{(k)} = x\right) = {}^{m}\sigma_{j-1}^{2}\; f(x) \quad , \qquad (4.47)$$

em que f(x) assume sempre valores positivos.

Os parâmetros ${}^{m}\lambda_{j-1}$ e ${}^{m}\sigma_{j-1}^{2}$ são desconhecidos.

É interessante notar que (4.46) torna o modelo em estudo comparável com o método "chain-ladder". De facto, e como evidencia Taylor (1986), esta hipótese não é mais do que uma versão estocástica da hipótese da proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo em que se baseia o método "chain-ladder". Se nos abstrairmos de que as "taxas de crescimento" ${}^{m}\lambda_{j}$ dependem do ano de notificação dos sinistros, bem como, de que cada uma delas é um valor esperado, chegamos à conclusão de que estas "taxas de crescimento" e os $c_{j,j+1}$ (coeficientes de desenvolvimento) do método "chain-ladder" têm o mesmo significado. Taylor (1986) chega mesmo ao ponto de designar o modelo de Buhlmann, Schnieper e Straub por "Stochastic Chain Ladder Method".

Se os parâmetros do modelo fossem conhecidos, a previsão do montante total das reservas "IBNR+IBNER" para o ano de ocorrência i seria dada pelo seguinte valor esperado condicionado:

$$E\left[Y_i \mid \Delta\, {}^{m}X\,(m = 0, 1, \ldots, n), \Delta N \right] =$$

$$= E\left[Y_i^1 \mid \Delta\, {}^{m}X\,(m = 0, 1, \ldots, n), \Delta N \right] +$$

$$+ E\left[Y_i^2 \mid \Delta\, {}^{m}X\,(m = 0, 1, \ldots, n), \Delta N \right] \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad .$$

Devido a (4.45), o referido valor esperado pode ser subdividido em dois. O primeiro seria a previsão do montante total das reservas "IBNER", enquanto o segundo seria a previsão do montante total das reservas "IBNR".

Atendendo a (4.45) e às hipóteses do modelo, o valor esperado condicionado relativo às reservas "IBNER" vem:

$$E\left[Y_i^1 \mid \Delta\, {}^{m}X\,(m = 0, 1, \ldots, n), \Delta N \right] =$$

$$= E\left[\sum_{m=0}^{n-i} \left({}^{m}X_i - {}^{m}X_{i,n-i} \right) \mid \Delta\, {}^{m}X\,(m = 0, 1, \ldots, n), \Delta N \right] =$$

$$= E\left[\sum_{m=0}^{n-i} {}^{m}X_{i} \,\middle|\, \Delta\, {}^{m}X\ (m=0,1,\dots,n),\ \Delta\ N\right] - \sum_{m=0}^{n-i} {}^{m}X_{i,n-i} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-i} \left(\prod_{j=n-i}^{\infty} {}^{m}\lambda_{j} \right) {}^{m}X_{i,n-i} - \sum_{m=0}^{n-i} {}^{m}X_{i,n-i} =^{11}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-i} \left[\left(\prod_{j=n-i}^{\infty} {}^{m}\lambda_{j} \right) - 1 \right] {}^{m}X_{i,n-i} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-i} \left({}^{m}H_{n-i} - 1 \right) {}^{m}X_{i,n-i} \qquad i = 0,1,\dots,n \quad , \qquad (4.48)$$

com

---

11 Repare-se que

$$E\left({}^{m}X_{in} \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right) = E\left[E\left({}^{m}X_{in} \mid {}^{m}X_{i,n-i}, {}^{m}X_{i,n-1}\right) \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right] =$$

$$= E\left({}^{m}X_{i,n-1}\ {}^{m}\lambda_{n-1} \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right) = {}^{m}\lambda_{n-1}\, E\left({}^{m}X_{i,n-1} \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right) =$$

$$= {}^{m}\lambda_{n-1}\, E\left[E\left({}^{m}X_{i,n-1} \mid {}^{m}X_{i,n-i}, {}^{m}X_{i,n-2}\right) \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right] =$$

$$= {}^{m}\lambda_{n-1}\ {}^{m}\lambda_{n-2}\ E\left({}^{m}X_{i,n-2} \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right) = \dots =$$

$$= E\left({}^{m}X_{i,n-i+1} \mid {}^{m}X_{i,n-i}\right) \prod_{j=n-i+1}^{n-1} {}^{m}\lambda_{j} = {}^{m}X_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} {}^{m}\lambda_{j}$$

$$ {}^{m}H_{n-i} = \prod_{j=n-i}^{\infty} {}^{m}\lambda_j \quad . $$

Por seu lado, o valor esperado condicionado referente às reservas "IBNR" vem:

$$ E\left[Y_i^2 \middle| \, \Delta\, {}^{m}X \ (m = 0, 1, \ldots, n), \Delta\, N \right] = $$

$$ = E\left[\sum_{m=n-i+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_i} I\left[T_i^{(k)} = m \right] {}^{m}W_i^{(k)} \middle| \, \Delta\, {}^{m}X(m = 0, 1 \ldots, n), \Delta\, N \right] = $$

$$ = \sum_{m=n-i+1}^{\infty} p(m)\, E\left({}^{m}W_i\right) V_i \ \upsilon \qquad i=0,1,\ldots,n \quad . \tag{4.49} $$

Como os parâmetros do modelo não são conhecidos, as previsões dos montantes totais das reservas "IBNR" e "IBNER" são obtidas substituindo em (4.49) e (4.48) respectivamente estes parâmetros por estimadores. Os parâmetros do modelo são estimados a partir do conjunto de informação estatística disponível.

Antes de passar à estimação dos parâmetros do modelo, interessa referir que o valor esperado condicionado (4.48) vem revelar outra vez a semelhança existente entre o modelo em estudo e o método "chain-ladder". Recorde-se, que no método "chain-ladder" cada Y_i é definido pela seguinte fórmula:

$$ Y_i = \left(H_{n-i} - 1\right) X_{i,n-i} \qquad i=0,1,\ldots,n \quad , $$

com

$$H_{n-i} = \prod_{j=n-i}^{\infty} c_{j,j+1}$$

Se considerarmos a, já mencionada, correspondência entre os coeficientes de desenvolvimento do método "chain-ladder" e as "taxas de crescimento" deste modelo, é fácil constatar a grande similitude entre esta fórmula e a do valor esperado (4.48).

Aliás, no caso em que as "taxas de crescimento" ${}^{m}\lambda_j$ não dependem do ano de notificação, ou seja, ${}^{m}\lambda_j = \lambda_j$, $\forall m$ (Buhlmann, Schnieper e Straub (1980) apresentam um exemplo numérico em que isto acontece), o valor esperado condicionado (4.48) vem:

$$E\left[Y_i^1 \mid \Delta^m X\ (m = 0,1,\ldots,n)\ ,\ \Delta N\right] = \left(H_{n-i} - 1\right) X_{i,n-i} \qquad i = 0,1,\ldots,n,$$

com

$$H_{n-i} = \prod_{j=n-i}^{\infty} \lambda_j$$

e, portanto, esta fórmula torna-se formalmente igual à do método "chain-ladder". No entanto, impõe-se salientar uma diferença bastante importante (para além daquelas que já foram referidas anteriormente). Enquanto esta fórmula, no método "chain-ladder", serve para prever o montante total das reservas "IBNR+IBNER", no modelo em estudo só permite prever o montante total das reservas "IBNER".

Para utilizar o valor esperado condicionado (4.48) na previsão do montante total das reservas "IBNER" para cada ano de ocorrência, só é necessário arranjar estimadores para as "taxas de crescimento". Buhlmann, Schnieper e Straub (1980) propõem o seguinte estimador para o parâmetro ${}^m\lambda_{j-1}$:

$$ {}^m\hat{\lambda}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} \left({}^m X_{ij} \; {}^m X_{i,j-1} / n_{im} \right)}{\sum_{i=0}^{n-j} \left[\left({}^m X_{i,j-1} \right)^2 / n_{im} \right]} \qquad m=0,1,\ldots,n \;;\; j=1,\ldots,n \quad , \qquad (4.50) $$

em que n_{im} é uma observação do triângulo não cumulativo dos n_{ij}. Repare-se, que só se podem obter estimadores de parâmetros ${}^m\lambda_{j-1}$ com m , $j \leq n$. Por isso, é que no início dissemos que, na prática, os índices m e j não podiam assumir valores maiores do que n.

A proposta do estimador (4.50) é baseada no facto de:

$$ E\left({}^m X_{ij} \mid {}^m X_{i,j-1} \right) = {}^m\lambda_{j-1} \; {}^m X_{i,j-1} \qquad , $$

ou seja, de o quociente $\left({}^m X_{ij} / {}^m X_{i,j-1} \right)$ ser condicionalmente um estimador não enviezado de ${}^m\lambda_{j-1}$. O estimador ${}^m\hat{\lambda}_{j-1}$ não é mais do que uma média ponderada dos quocientes $\left({}^m X_{ij} / {}^m X_{i,j-1} \right)$ (i=0,1,...,n-j), ou seja, dos quocientes do tipo referido para os quais existem observações disponíveis. De facto, se considerarmos que cada ponderador é igual a :

$$ a_i = \left({}^m X_{i,j-1} \right)^2 / n_{im} \qquad i=0,1,\ldots,n-j \; , $$

temos:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-j} a_i \left({}^m X_{ij} \,/\, {}^m X_{i,j-1} \right)}{\sum_{i=0}^{n-j} a_i} = {}^m\hat{\lambda}_{j-1} .$$

Além disso, cada ponderador é proporcional ao inverso da variância condicionada do quociente $\left({}^m X_{ij} / {}^m X_{i,j-1} \right)$, visto ter-se:

$$V\left[\left({}^m X_{ij} \,/\, {}^m X_{i,j-1} \right) \mid {}^m X_{i,j-1}, {}^m W^{(1)}_{i,j-1}, {}^m W^{(2)}_{i,j-1}, \ldots, {}^m W^{(n_{im})}_{i,j-1} \right] =$$

$$= \frac{{}^m\sigma^2_{j-1} \sum_{k=1}^{n_{im}} f\left({}^m W^{(k)}_{i,j-1} \right)}{\left({}^m X_{i,j-1} \right)^2} \approx c \; {}^m\sigma^2_{j-1} \frac{n_{im}}{\left({}^m X_{i,j-1} \right)^2} ,$$

com c, uma constante (já que não se conhece a função f(x)).

É interessante notar, que cada estimador $\hat{c}_{j-1,j}$ do método "chain-ladder" também é uma média ponderada dos quocientes $\left(X_{ij} / X_{i,j-1} \right)$. A única diferença reside nos ponderadores, que, como vimos no ponto 3.1, são:

$$a_i^* = X_{i,j-1} \qquad i=0,1,\ldots,n-j .$$

Em relação ao valor esperado condicionado (4.49) para a previsão do montante total das reservas "IBNR" para cada ano de ocorrência, é necessário estimar os parâmetros: υ, $p(m)$ $(m=0,1,...)$ e $E({}^{m}W_{i})$ $(i=0,1,...,n \; ; \; m=0,1,...)$.

Para cada produto $(p(m)\upsilon)$, os autores deste modelo propõem o seguinte estimador:

$$\widehat{p(m)\upsilon} = \frac{\sum_{i=0}^{n-m} n_{im}}{\sum_{i=0}^{n-m} V_i} \qquad m = 0, 1, \ldots, n \qquad . \tag{4.51}$$

Repare-se, que aqui também só é possível arranjar estimadores para os produtos $(p(m)\upsilon)$ com $m \leq n$. As razões que levaram à escolha destes estimadores são de ordem intuitiva, e tão evidentes, que dispensam qualquer esclarecimento.

Em relação aos parâmetros $E({}^{m}W_{i})$ $(i=0,1,...,n \; ; \; m=0,1,...)$, convém lembrar que a hipótese (H_6) implica que:

$$E({}^{m}W_{i}) = E({}^{m}W_{im}) \prod_{j=m}^{\infty} {}^{m}\lambda_{j} \qquad . \tag{4.52}$$

[12]

12 Repare-se que

$$E\left({}^{m}W_{in}\right) = E\left[E\left({}^{m}W_{in} \mid {}^{m}W_{i,n-1}\right)\right] = E\left({}^{m}\lambda_{n-1}\ {}^{m}W_{i,n-1}\right) =$$

$$= {}^{m}\lambda_{n-1}\ E\left({}^{m}W_{i,n-1}\right) = {}^{m}\lambda_{n-1}\ E\left[E\left({}^{m}W_{i,n-1} \mid {}^{m}W_{i,n-2}\right)\right] =$$

$$= {}^{m}\lambda_{n-1}\ {}^{m}\lambda_{n-2}\ E\left({}^{m}W_{i,n-2}\right) = \ldots = E\left({}^{m}W_{im}\right) \prod_{j=m}^{n-1} {}^{m}\lambda_{j} \quad .$$

Como já foram propostos estimadores para os ${}^{m}\lambda_{j}$, torna-se apenas necessário estimar os $E\left({}^{m}W_{im}\right)$. A estimação destes parâmetros é feita à custa da introdução de uma nova hipótese no modelo:

$$E\left({}^{m}W_{im}\right) = c_m (1+\delta)^{i} \quad . \tag{4.53}$$

Esta hipótese vai permitir estimar os $E\left({}^{m}W_{im}\right)$ a partir da estimação dos parâmetros c_m e δ (repare-se que, com esta hipótese, o nº de parâmetros a estimar se reduz bastante).

Os autores deste modelo propõem como estimadores dos parâmetros c_m e δ aqueles que minimizam a seguinte soma dos quadrados ponderada:

$$Q\left(\delta, c_0, c_1, \ldots, c_n\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-i} n_{im} \left[{}^{m}X_{im} / n_{im} - c_m (1+\delta)^{i}\right]^{2} . \tag{4.54}$$

Para um δ fixo, os c_m que minimizam (4.54) são:

$$c_m(\delta) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-m} {}^{m}X_{im} (1+\delta)^{i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-m} n_{im} (1+\delta)^{2i}} \qquad m = 0, 1, \ldots, n \quad . \tag{4.55}$$

Então, a solução do problema em questão pode ser obtida, encontrando, através de um método numérico, o δ que minimiza a função:

$$Q\left(\delta,\ c_0(\delta), c_1(\delta), \ldots, c_n(\delta)\right)$$

Este será o estimador de δ, $\hat{\delta}$,e os estimadores dos c_m serão dados por:

$$\hat{c}_m = c_m\left(\hat{\delta}\right) \qquad m = 0, 1, \ldots, n \quad . \tag{4.56}$$

Como se pode verificar, também aqui, só se podem arranjar estimadores para os parâmetros c_m e, portanto, para os parâmetros $E\left({}^{m}W_{im}\right)$ com $m \leq n$. Além disso, devido a só se poderem estimar os ${}^{m}\lambda_j$ com $m, j \leq n$, na prática, apenas se conseguem arranjar estimadores para os parâmetros $E\left({}^{m}W_{in}\right)$ (observe-se (4.52)).

Interessa referir que a hipótese (4.53) vem introduzir no modelo uma diferença significativa em relação ao método "chain-ladder". De facto, enquanto neste último os montantes de pagamentos acumulados referentes a anos de ocorrência diferentes não apresentam qualquer ligação entre eles, no primeiro, a referida hipótese leva a que os valores esperados dos pagamentos acumulados cresçam exponencialmente de um ano de ocorrência para o seguinte, sendo δ a "taxa de inflação" constante que vigora em cada período.

Para finalizar, interessa ainda tecer algumas considerações de índole geral acerca deste modelo probabilístico.

A, já referida, semelhança deste modelo com o método "chain-ladder" tem como consequência imediata o facto de algumas das suas deficiências serem exactamente as deficiências do método "chain-ladder". A principal destas deficiências é, sem dúvida, assumir que o padrão de desenvolvimento no tempo dos montantes de pagamentos acumulados não depende do ano de ocorrência considerado (os ${}^{m}\lambda_j$ não dependem de i). Este facto, leva a que Van Eeghen (1981) tenha a seguinte opinião acerca deste modelo:

"The model is a complicated one ..., the probabilistic assumptions nevertheless describe a very simple situation, which can be compared to situations in which we can use the chain-ladder method.".

Uma outra deficiência do modelo está relacionada com a hipótese de que as variáveis $T_i^{(k)}$ apresentam a mesma distribuição qualquer que seja o ano de ocorrência considerado. Esta hipótese implica que o modelo só deva ser utilizado em situações em que a distribuição da participação dos sinistros que geram indemnizações pelos vários anos de notificação não se modifique no período de tempo constituído pelos vários anos de ocorrência considerados nos triângulos de dados.

Este modelo probabilístico é muito exigente em termos da informação estatística requerida. Se para as companhias seguradoras não se torna muito complicado produzir os triângulos de dados ΔX e ΔN, já o mesmo não se pode dizer quanto aos triângulos $\Delta^m X$ (m=0, 1, ..., n). Para produzir estes triângulos é necessário que as seguradoras tenham bons sistemas de informação.

Interessa ainda referir, que um estudo de simulação em que se comparam o método "chain-ladder" e o modelo em estudo, permite que Bühlmann, Schnieper e Straub (1980) cheguem a conclusões algo surpreendentes. Verificam que, em termos comparativos, o método "chain-ladder" não apresenta resultados piores do que os deste modelo. Pelo contrário, em termos de uma das medidas utilizadas para comparar as "performances" dos dois métodos, que estes autores designam por desvio padrão das estimativas, o método "chain-ladder" apresenta sempre melhores resultados até ao penúltimo ano de ocorrência considerado. Só no último ano de ocorrência é que o resultado referente a este modelo se revela bastante melhor do que o do "chain-ladder" [para mais pormenores acerca deste estudo de simulação, veja-se Bühlmann, Schnieper e Straub (1980)].

Estes resultados, bem como o facto de o proprio método "chain-ladder" apresentar grandes deficiências (os resultados do metodo "chain-ladder" em termos de desvio padrão das estimativas, só por si, já são bastante desencorajadores!), merecem o seguinte comentário dos autores referidos no parágrafo anterior:

> "We thus feel that the search for better methods should still go on. Or, is the problem such that the standard deviation of the estimates cannot be substantially improved?".

Van Eeghen (1981) por seu lado, apesar de também referir as conclusões a que chegaram os autores do modelo em estudo, faz um comentário final bastante mais favorável acerca deste:

> " ... the method as presented here, is not ready for pratical use, because its administrative and computational difficulties hardly produce an increase in expected accuracy. However, the method does provide a new way of looking at loss reserve problems from which useful methods may eventually be developed.".

4.4 MÉTODO DA CREDIBILIDADE DE DE VYLDER

De Vylder (1982) propõe um modelo estocástico multiplicativo para a previsão de reservas "IBNR", "IBNER" e "IBNR+IBNER" em que utiliza a teoria da credibilidade para estimar os factores relativos aos anos de ocorrência/anos de notificação.

Este método é o primeiro, no contexto da previsão de reservas "IBNR+IBNER", a representar as condições de risco associadas a cada ano de ocorrência por parâmetros aleatórios. Repare-se que, em qualquer dos métodos estocásticos apresentados anteriormente, todos os parâmetros são fixos (não aleatórios).

As variáveis aleatórias observáveis consideradas neste método são as seguintes:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{V_i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n \;;\; j = 0, 1, \ldots, n$$

(como se pode verificar, são as variáveis utilizadas nos métodos da separação de Taylor). Estas variáveis vão ser particionadas em dois subconjuntos. As z_{ij} para as quais existem observações disponíveis formam o conjunto das variáveis observadas (as observações disponíveis podem ou não formar um triângulo completo). As outras z_{ij} formam o conjunto das variáveis não observadas.

Antes de apresentar as hipóteses do modelo subjacente a este método, convém introduzir parte da notação que irá ser utilizada, bem como, tecer algumas considerações preliminares.

Considere-se:

N_j - o conjunto de índices i para os quais as variáveis z_{ij} são observadas

K_i - o conjunto de índices j para os quais as variáveis z_{ij} são observadas

z_i - o vector coluna $[\, z_{i0} \;\; z_{i1} \;\; \cdots \;\; z_{in}\,]^T$

I_{n+1} - a matriz identidade de ordem n+1 .

À semelhança do que acontece na teoria da credibilidade [veja-se Goovaerts e Hoogstad (1987) ou Reis (1987)], de Vylder representa as condições de risco associadas aos vários anos de ocorrência pelas variáveis de estrutura Θ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$.Estas variáveis de estrutura, em geral não observáveis, por um lado, tornam os vários anos de ocorrência comparáveis, pois são variáveis aleatórias identicamente distribuídas, por outro lado, levam a uma diferenciação entre os vários anos, pois as suas realizações θ_i vêm diferentes de ano para ano.

Ainda seguindo a teoria da credibilidade, De Vylder considera que a distribuição de cada vector aleatório z_i depende do parâmetro θ_i, que, como já vimos, constitui uma realização da variável aleatória Θ_i (Θ_i e θ_i podem ser multidimensionais).

Atendendo à notação introduzida e às considerações preliminares, as hipóteses básicas subjacentes ao método da credibilidade de De Vylder são as seguintes:

(H_1) Quantidades referentes a anos de ocorrência diferentes são independentes. São, portanto, independentes os pares

$$(\Theta_0, z_0),\ (\Theta_1, z_1), \ldots,\ (\Theta_n, z_n).$$

(H_2) Cada z_i pode ser modelizado da seguinte forma:

$$z_i = Y_i \beta(\Theta_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad , \tag{4.57}$$

em que $Y_i = \begin{bmatrix} Y_{i0} & Y_{i1} \cdots Y_{in} \end{bmatrix}^T$ é um vector aleatório desconhecido e independente de Θ_i e $\beta(\Theta_i)$ é uma função escalar desconhecida.

(H_3) A distribuição de cada Y_i é caracterizada por

$$E(Y_i) = y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T \qquad i=0, 1, \ldots, n \tag{4.58}$$

$$Var(Y_i) = \frac{r^2}{V_i} I_{n+1} \qquad i=0, 1, \ldots, n \; , \tag{4.59}$$

em que $Var(Y_i)$ representa a matriz das variâncias-covariâncias do vector Y_i e r^2 é um escalar desconhecido. (4.58) significa que o valor esperado de Y_i não depende do ano de ocorrência i considerado. (4.59) diz-nos que, para um mesmo ano de ocorrência i, as covariâncias entre diferentes Y_{ij} são nulas enquanto que as variâncias dos Y_{ij} são iguais, qualquer que seja o ano de desenvolvimento j considerado, e inversamente proporcionais a V_i.

(H_4) As variáveis de estrutura $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_n$ são identicamente distribuídas.

A partir deste momento, e até que se diga algo em contrário, consideram-se conhecidos os seguintes parâmetros:

$$y \; ; \; b = E\left[\beta\left(\Theta_i\right)\right] \; ; \; a = V\left[\beta\left(\Theta_i\right)\right] \; ; \; s^2 = r^2 \, E\left[\beta^2\left(\Theta_i\right)\right] \; .$$

Estes parâmetros costumam designar-se por parâmetros de estrutura.

A hipótese de modelizar cada z_{ij} através de uma expressão multiplicativa não é original. De facto, como vimos no ponto 3.2.3, já em 1978, o próprio De Vylder apresentava um método não estocástico em que cada x_{ij} era modelizado através de uma expressão deste género, com um factor associado ao ano de desenvolvimento j e um factor associado ao ano de ocorrência i [veja-se a expressão (3.25)]. Aliás, como também vimos nesse ponto, até já o velho método "chain-ladder" se baseava numa hipótese equivalente à deste método não estocástico de De Vylder.

Ainda a respeito da originalidade das hipóteses subjacentes a este método, se atendermos a que

$$E\left(z_i\right) = E\left[Y_i \; \beta\left(\Theta_i\right)\right] = y \, b \qquad i=0,1,\ldots,n \qquad (4.60)$$

e a que

$$\mathrm{Var}\left(z_i\right) = E\left[\mathrm{Var}\left(z_i \mid \Theta_i\right)\right] + \mathrm{Var}\left[E\left(z_i \mid \Theta_i\right)\right] =$$

$$= E\left[\mathrm{Var}\left[Y_i \; \beta\left(\Theta_i\right) \mid \Theta_i\right]\right] + \mathrm{Var}\left[E\left[Y_i \; \beta\left(\Theta_i\right) \mid \Theta_i\right]\right] =$$

$$= E\left[\beta^2\left(\Theta_i\right) \; \mathrm{Var}\left(Y_i\right)\right] + \mathrm{Var}\left[\beta\left(\Theta_i\right) E\left(Y_i\right)\right] =$$

$$= E\left[\beta^2\left(\Theta_i\right) \frac{r^2}{V_i} \; I_{n+1}\right] + \mathrm{Var}\left[\beta\left(\Theta_i\right) y\right] =$$

$$= E\left[\beta^2(\Theta_i)\right] \frac{r^2}{V_i} I_{n+1} + V\left[\beta(\Theta_i)\right] y\, y^T =$$

$$= \frac{s^2}{V_i} I_{n+1} + a\, y\, y^T \qquad i=0,1,\ldots,n\ , \tag{4.61}$$

podemos constatar algumas semelhanças entre estas hipóteses e as do método de Straub [vejam-se as hipóteses (4.2) e (4.3) e comparem-se com os resultados (4.60) e (4.61) respectivamente].

A originalidade deste método de De Vylder está na introdução das variáveis de estrutura Θ_i nos factores associados aos anos de ocorrência que aparecem nas modelizações dos z_i. A introdução destas variáveis, tão características da teoria da credibilidade, vai permitir fazer uso dessa teoria na obtenção de estimadores de credibilidade para os factores $\beta(\Theta_i)$.

Continuando, ainda, a falar das hipóteses apresentadas, o próprio De Vylder considera que algumas delas são muito restritivas. No entanto, afirma que isto é absolutamente necessário para que se chegue a uma expressão para a matriz das variâncias-covariâncias de cada z_i que não envolva um grande nº de parâmetros pois, como veremos mais à frente, todos estes parâmetros aparecem nas expressões dos estimadores de credibilidade para os factores [13]$\beta(\Theta_i)$ e, por conseguinte, têm de ser estimados [observe-se a matriz (4.61) e compare-se o nº de parâmetros que esta involve com o nº de parâmetros da matriz das variâncias-covariâncias do método de Straub dada por (4.3) !]. Além disso, estas hipóteses garantem que

[13] Apesar de neste trabalho não se ir apresentar a dedução dos estimadores de credibilidade para os $\beta(\Theta_i)$, pode ver-se, por exemplo, em Reis (1987) [na apresentação do modelo de regressão de Hachemeister] que esta dedução entra com as matrizes das variâncias-covariâncias dos z_i.

todos os elementos da matriz das variâncias-covariâncias de cada z_i sejam positivos. Isto torna-se bastante conveniente, uma vez que, intuitivamente, é de esperar que os componentes de cada vector z_i sejam positivamente correlacionados.

Norberg (1986), por exemplo, considera que a hipótese (4.59), apesar de ser muito conveniente em termos matemáticos, está muito afastada da realidade. Uma hipótese muito mais razoável, segundo este autor, seria:

$$\operatorname{Var}\left(Y_i\right)=\frac{1}{V_i}\operatorname{diag}\left\{r_0^2, r_1^2, \ldots, r_n^2\right\} \qquad i=0,1,\ldots,n \quad .$$

No entanto, esta hipótese alternativa iria aumentar bastante o nº de parâmetros a estimar no modelo, o que, provavelmente, levaria a previsões de pior qualidade. É precisamente a este problema que De Vylder (1982) se refere quando diz:

> "Starting with less restrictive assumptions, we could be closer to reality at the beginning, but some estimations might be so poor that one could end much further from it than we do in our rough model."

Tal como na teoria da credibilidade, neste método pretende-se estimar os $E\left(z_{ij} \mid \Theta_i\right)$, mas agora para as variáveis não observadas. Considerando as hipóteses do modelo, tem-se:

$$E\left(z_{ij} \mid \Theta_i\right)=E\left[Y_{ij}\,\beta\left(\Theta_i\right) \mid \Theta_i\right]=y_j\,\beta\left(\Theta_i\right) \qquad i=0,1,\ldots,n\ ;\ j=0,1,\ldots,n \quad .$$

Sendo assim, torna-se apenas necessário estimar o vector y e arranjar estimadores de credibilidade para os $\beta(\Theta_i)$.

Atendendo a que na estimação só se podem utilizar as variáveis observadas, convém introduzir a seguinte notação:

z_i^0 $\left(Y_i^0\right)$ - o vector z_i (Y_i) apenas com as suas componentes z_{ij} (Y_{ij}) cujos índices j pertencem ao conjunto K_i

y_i^0 - o vector y apenas com as suas componentes y_j cujos índices j pertencem ao conjunto K_i

I_i^0 - a matriz identidade de ordem k_i (com k_i o nº de elementos do conjunto K_i) .

Para obter estimadores de credibilidade para os $\beta(\Theta_i)$ é necessário adaptar as hipóteses básicas apresentadas atrás, de forma a que o problema possa ser tratado pela teoria da credibilidade. Restringindo-nos agora apenas às variáveis z_{ij} observadas, as hipóteses adaptadas vêm:

(H_1^*) Os pares $\left(\Theta_0, z_0^0\right), \left(\Theta_1, z_1^0\right), \ldots, \left(\Theta_n, z_n^0\right)$ são independentes.

(H_2^*) $E\left(z_i^0 \mid \Theta_i\right) = E\left[Y_i^0 \, \beta\left(\Theta_i\right) \mid \Theta_i\right] = y_i^0 \, \beta\left(\Theta_i\right)$ $\quad$ i=0,1,...,n

(H_3^*) $\operatorname{Var}\left(z_i^0 \mid \Theta_i\right) = \operatorname{Var}\left[Y_i^0 \, \beta\left(\Theta_i\right) \mid \Theta_i\right] =$

$$= \beta^2\left(\Theta_i\right) \operatorname{Var}\left(Y_i^0\right) = \beta^2\left(\Theta_i\right) \frac{r^2}{V_i} \, I_i^0 = \sigma_i^2\left(\Theta_i\right) I_i^0$$

i=0,1,..., n

em que $\sigma_i^2(\Theta_i) = \beta^2(\Theta_i)\,\frac{r^2}{V_i}$ é uma função escalar.

(H_4^*) As variáveis $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_n$ são identicamente distribuídas.

Como se pode constatar, estas são, basicamente, as hipóteses do modelo de regressão de Hachemeister proposto, no âmbito da teoria da credibilidade, para a estimação do prémio puro de risco [veja-se Goovaerts e Hoogstad (1987) ou Reis (1987)]. A única diferença reside no facto de, no modelo original de Hachemeister, y_i^0 e $\sigma_i^2(\ )$ não dependerem de i. No entanto, estas generalizações do modelo em questão são válidas [veja-se De Vylder (1982) e Goovaerts e Hoogstad (1987)].

Desta forma, baseando-nos no modelo de Hachemeister, podemos propôr o seguinte estimador de credibilidade para cada $\beta(\Theta_i)$:

$$B_i = (1-\gamma_i)b + \gamma_i\,\hat{b}_i \qquad i=0,1,\ldots,n \quad , \tag{4.62}$$

em que

$$\hat{b}_i = \left(y_i^{0\,T}\,y_i^0\right)^{-1} y_i^{0\,T}\,z_i^0 = \sum_{j\in K_i} y_j\,z_{ij} \Big/ \sum_{j\in K_i} y_j^2 \quad ,$$

$$\gamma_i = \frac{a}{a + s_i^2\,w_i} \quad ,$$

$$s_i^2 = E\left[\sigma_i^2(\Theta_i)\right] = \frac{s^2}{V_i} \quad ,$$

$$w_i = \left(y_i^{0\,T} \; y_i^0\right)^{-1} = 1 \Big/ \sum_{j \in K_i} y_j^2$$

[veja-se, ainda, De Vylder (1982) e Goovaerts e Hoogstad (1987)].

B_i, sendo um estimador de credibilidade para o factor $\beta(\Theta_i)$, é, como se pode verificar, uma média ponderada entre $\hat{b}_i$, o estimador de $\beta(\Theta_i)$ baseado na experiência individual em termos de indemnizações do ano de ocorrência i, e b, a "média colectiva" dos $\beta(\Theta_i)$ (como vimos atrás, sendo as variáveis de estrutura idênticamente distribuídas, os $\beta(\Theta_i)$ têm uma média comum). O factor de credibilidade γ_i é o ponderador de $\hat{b}_i$ enquanto o seu complementar, $(1 - \gamma_i)$, é o ponderador da "média colectiva".

Até aqui, supusemos que os parâmetros de estrutura eram conhecidos. No entanto, em geral, isso não se verifica. Sendo assim, para obter estimadores de credibilidade para os $\beta(\Theta_i)$ é necessário substituir em (4.62) os parâmetros de estrutura por estimadores.

Como vimos atrás [veja-se (4.60)], tem-se:

$$E(z_{ij}) = E(Y_{ij})\,b = y_j\,b \qquad i = 0, 1, \ldots, n \; ; \; j = 0, 1, \ldots, n \quad .$$

A expressão multiplicativa de cada $E(z_{ij})$ permite que se tome $b=1$ e, nesse caso, fica-se com:

$$E(z_{ij}) = E(Y_{ij}) = y_j \qquad i = 0,1,\ldots,n\,;\ j = 0,1,\ldots,n\,,$$

ou seja, cada z_{ij} torna-se um estimador não enviezado de y_j. Tendo em conta este facto, De Vylder faz $b=1$ e propõe como estimador não enviezado de cada y_j:

$$\hat{y}_j = \sum_{i \in N_j} V_i\, z_{ij} \Big/ \sum_{i \in N_j} V_i \qquad j = 0,1,\ldots,n\,. \tag{4.63}$$

Em relação ao parâmetro de estrutura s^2, De Vylder propõe o seguinte estimador:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n}\left(k_i - 1\right)} \sum_{i=0}^{n} V_i \left(z_i^0 - y_i^0\,\hat{b}_i\right)^T \left(z_i^0 - y_i^0\,\hat{b}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=0}^{n}\left(k_i - 1\right)} \sum_{i=0}^{n} V_i \sum_{j \in K_i} \left(z_{ij} - y_j\,\hat{b}_i\right)^2 \,. \tag{4.64}$$

Consegue mostrar-se que o estimador (4.64) é não enviezado. Para isso convém fazer $\sum_{i=0}^{n}\left(k_i - 1\right) = g$ e ter em consideração que a matriz

$$M_i = I_i^0 - y_i^0 \left(y_i^{0^T} y_i^0 \right)^{-1} y_i^{0^T} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

é simétrica e idempotente (como facilmente se poderá verificar) e que o seu traço é:

$$\operatorname{tr} M_i = \operatorname{tr} I_i^0 - \operatorname{tr} \left[y_i^0 \left(y_i^{0^T} y_i^0 \right)^{-1} y_i^{0^T} \right] =$$

$$= k_i - \operatorname{tr} \left[\left(y_i^{0^T} y_i^0 \right)^{-1} y_i^{0^T} y_i^0 \right] = k_i - 1 \quad .$$

Se atendermos a que

$$E\left(z_i^{0^T} M_i \, z_i^0 \mid \Theta_i \right) = \sum_{r=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} m_{irs} \, E\left(z_{ir}^0 \, z_{is}^0 \mid \Theta_i \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} m_{irs} \left[E\left(z_{ir}^0 \, z_{is}^0 \mid \Theta_i \right) - E\left(z_{ir}^0 \mid \Theta_i \right) E\left(z_{is}^0 \mid \Theta_i \right) \right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} m_{irs} \, E\left(z_{ir}^0 \mid \Theta_i \right) E\left(z_{is}^0 \mid \Theta_i \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{k_i} m_{irs} \operatorname{cov}\left(z_{ir}^0, z_{is}^0 \mid \Theta_i \right) + \beta(\Theta_i) \, y_i^{0^T} M_i \, \beta(\Theta_i) \, y_i^0 =$$

$$= \sum_{r=1}^{k_i} m_{irr} \quad \sigma_i^2(\Theta_i) + \beta^2(\Theta_i)\, y_i^{0^T} \quad M_i \; y_i^0 = ^{14}$$

$$= \sigma_i^2\,(\Theta_i) \;\; \mathrm{tr}\;\; M_i \quad = \quad \sigma_i^2(\Theta_i)\;\;(k_i - 1) \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

e, consequentemente, a que

$$E\left(z_i^{0^T} \quad M_i \;\; z_i^0\right) = E\left[\; E\left(z_i^{0^T} \quad M_i \;\; z_i^0 \;\;|\;\; \Theta_i\right)\right] = E\left[\sigma_i^2\,(\Theta_i)\,(k_i - 1)\right] =$$

$$= \frac{s^2}{V_i}\;\;(k_i - 1) \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n \qquad\qquad ,$$

torna-se fácil deduzir que

$$E\left(\hat{s}^2\right) = \frac{1}{g}\sum_{i=0}^{n} \;\; V_i \;\; E\left[\left(z_i^0 - y_i^0\;\hat{b}_i\right)^T\left(z_i^0 - y_i^0\,\hat{b}_i\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{i=0}^{n} \;\; V_i \;\; E\left\{\left[z_i^0 - y_i^0\left(y_i^{0^T} \;\; y_i^0\right)^{-1} \;\; y_i^{0^T}\;z_i^0\right]^T\left[z_i^0 - y_i^0\left(y_i^{0^T} \;\; y_i^0\right)^{-1} \;\; y_i^{0^T}\;z_i^0\right]\right\} =$$

---

[14] Repare-se que $M_i \;\; y_i^0 = 0$.

$$= \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n} V_i \, E\left\{\left\{\left[I_i^0 - y_i^0\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T}\right] z_i^0\right\}^T \left\{\left[I_i^0 - y_i^0\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T}\right] z_i^0\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n} V_i \, E\left(z_i^{0^T} M_i^T M_i z_i^0\right) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n} V_i \, E\left(z_i^{0^T} M_i z_i^0\right) =$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n} V_i \frac{s^2}{V_i} \left(k_i - 1\right) = \frac{s^2}{g} \sum_{i=0}^{n} \left(k_i - 1\right) = s^2 \quad ,$$

ou seja, que o estimador $\hat{s}^2$ é não enviezado.

Finalmente, De Vylder apresenta o seguinte pseudo estimador para o parâmetro a :

$$\hat{a} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \left(\hat{b}_i - 1\right)^2 \quad . \qquad (4.65)$$

Chama-se pseudo estimador porque depende do próprio parâmetro a ser estimado (note-se que γ_i depende de a).

Neste caso, também se consegue mostrar que $\hat{a}$ é um pseudo estimador não enviezado. Para isso, é necessário mostrar, em primeiro lugar, que

$$E[(\hat{b}_i - b)^2] = a + s_i^2 \, w_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n \ . \qquad (4.66)$$

Tendo em consideração que

$$E\left(z_i^0 \, z_i^{0^T} \mid \Theta_i\right) = \mathrm{Var}\left(z_i^0 \mid \Theta_i\right) + E\left(z_i^0 \mid \Theta_i\right) E\left(z_i^{0^T} \mid \Theta_i\right) =$$

$$= \sigma_i^2(\Theta_i)\; I_i^0 + \beta^2(\Theta_i)\, y_i^0 \, y_i^{0^T} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

e, portanto, que

$$E\left(\hat{b}_i^{\,2} \mid \Theta_i\right) = E\left[\left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \, z_i^0 \, z_i^{0^T} \, y_i^0 \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} \mid \Theta_i\right] =$$

$$= \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \; E\left(z_i^0 \, z_i^{0^T} \mid \Theta_i\right) y_i^0 \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} =$$

$$= \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \left[\sigma_i^2(\Theta_i)\, I_i^0 + \beta^2(\Theta_i)\, y_i^0 \, y_i^{0^T}\right] y_i^0 \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} =$$

$$= \sigma_i^2(\Theta_i) \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} + \beta^2(\Theta_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad ,$$

e utilizando ainda o resultado

$$E\left(\hat{b}_i \mid \Theta_i\right) = E\left[\left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \, z_i^0 \mid \Theta_i\right] = \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \, E\left(z_i^0 \mid \Theta_i\right) =$$

$$= \left(y_i^{0^T} \, y_i^0\right)^{-1} y_i^{0^T} \, y_i^0 \; \beta(\Theta_i) = \beta(\Theta_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad ,$$

chega-se à seguinte conclusão:

$$E\left[\left(\hat{b}_i - b\right)^2 \mid \Theta_i\right] = E\left(\hat{b}_i^2 \mid \Theta_i\right) - 2\,b\,E\left(\hat{b}_i \mid \Theta_i\right) + b^2 =$$

$$= \sigma_i^2(\Theta_i)\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} + \beta^2(\Theta_i) - 2b\beta(\Theta_i) + b^2 =$$

$$= \sigma_i^2(\Theta_i)\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} + \left[\beta(\Theta_i) - b\right]^2 \qquad i = 0,1,\ldots,n \quad .$$

Daqui sai, imediatamente, que

$$E\left[\left(\hat{b}_i - b\right)^2\right] = E\left\{E\left[\left(\hat{b}_i - b\right)^2 \mid \Theta_i\right]\right\} =$$

$$= E\left\{\sigma_i^2(\Theta_i)\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} + \left[\beta(\Theta_i) - b\right]^2\right\} =$$

$$= s_i^2\left(y_i^{0^T} y_i^0\right)^{-1} + a = a + s_i^2\,w_i \qquad i = 0,1,\ldots,n \quad ,$$

tal como queríamos mostrar.

Utilizando (4.66) e a expressão dos γ_i, e tendo em atenção que b=1, é fácil verificar que, de facto, o pseudo estimador $\hat{a}$ é não enviezado. Com efeito,

$$E(\hat{a}) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \gamma_i\, E\left[\left(\hat{b}_i - 1\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{a}{a + s_i^2\,w_i}\left(a + s_i^2\,w_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a = a \quad .$$

Para se obter $\hat{a}$ deve utilizar-se a expressão (4.65) iterativamente. Começa por dar-se um valor inicial arbitrário a **a** (a>0). A partir daí obtem-se uma sequência de aproximações sucessivas. De Vylder (1982) mostra que esta sequência é monótona e limitada e, ainda, que o seu limite é único (no sentido de que é independente do valor inicial atribuído a a).

O método de credibilidade de De Vylder, tal como acontece com o método dos mínimos quadrados também deste autor, apresenta a vantagem de não necessitar de um triângulo de dados completo para obter as suas previsões. Sempre que se desconfie que algumas das observações do triângulo não são fiáveis, podem incluir-se as variáveis aleatórias que lhes correspondem no conjunto das variáveis não observadas.

Por (4.60) pode verificar-se que também este método apresenta a desvantagem de assumir que o padrão de desenvolvimento no tempo dos pagamentos das indemnizações é sempre o mesmo qualquer que seja o ano da ocorrência considerado.

5 ESTUDO DE SIMULAÇÃO EM QUE SE AVALIAM COMPARATIVAMENTE TRÊS MÉTODOS DE PREVISÃO: O MÉTODO "CHAIN-LADDER", O MÉTODO "CAPE COD" E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUA--DRADOS DE DE VYLDER

5.1 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Ao longo deste trabalho foram apresentados diversos métodos de previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" e, tal como dissemos no ponto 2.3, muitos outros são também propostos na literatura especializada. Perante o grande nº de métodos disponíveis, pode ter-se alguma dificuldade em escolher qual o método a utilizar para prever as reservas "IBNR" e "IBNER" de uma seguradora.

Numa fase inicial, pode sempre efectuar-se uma selecção pela negativa entre os métodos que têm características diferentes (hipóteses básicas diferentes e/ou conjuntos de informação estatística requeridos diferentes), rejeitando à partida todos aqueles cujas características não pareçam minimamente adequadas ao tratamento do caso particular em questão.

No entanto, mesmo depois de efectuada essa selecção prévia, é muito provável que ainda surja o problema de se ter de escolher um método entre um conjunto de vários métodos possíveis. No conjunto seleccionado encontram-se, entre outros, quase de certeza, vários métodos que partem das mesmas hipóteses básicas, ou de hipóteses similares, e que utilizam conjuntos de informação estatística iguais, ou que pouco diferem uns dos outros. A escolha entre estes métodos torna-se particularmente difícil pois muitos deles não apresentam instrumentos (desvios-padrões, intervalos de confiança, ensaios de hipóteses, etc) que permitam medir a incerteza associada às previsões que fornecem quando aplicados a conjuntos de informação estatística concretos, impossibilitando, desta forma, a avaliação da qualidade dessas previsões. Estão neste caso, evidentemente, todos os métodos não estocásticos e, mesmo, muitos dos métodos estocásticos (interessa referir que, à excepção de Taylor, que apresenta um teste para medir a qualidade do ajustamento de triângulos estimados através de um determinado tipo de métodos [Taylor (1978)], nenhum dos autores dos métodos estocásticos estudados neste trabalho, apresenta qualquer dos instrumentos mencionados).

Uma técnica que pode fornecer alguns resultados em termos da avaliação comparativa de métodos com características similares e cujas "performances" na previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" são dificilmente avaliadas de outra forma, é a simulação. Como vimos no ponto 4.3, é precisamente através desta técnica que Buhlmann, Schnieper e Straub conseguem comparar a qualidade das previsões fornecidas pelo método "chain-ladder" e pelo modelo probabilístico por eles proposto. Repare-se que, apesar de serem métodos de tipos diferentes (o segundo, ao contrário do primeiro, é estocástico e utiliza um conjunto de informação estatística bastante mais vasto), têm, tal como também vimos no ponto 4.3, bastantes semelhanças (a nível de algumas hipóteses e de alguns estimadores utilizados).

À luz do que foi dito, e tendo em consideração que no ponto 3 deste trabalho foram apresentados vários métodos de previsão não estocásticos que partem de hipóteses muito semelhantes e utilizam conjuntos de informação estatística que pouco diferem uns dos outros, pensamos que se torna interessante efectuar um estudo de simulação em que se avaliem comparativamente alguns desses métodos. Sendo assim, vamos dedicar a essa tarefa todo este ponto 5.

Os métodos que vão ser comparados neste estudo de simulação são: o "chain-ladder", o "cape cod" e o método dos mínimos quadrados de De Vylder. Como pudemos constatar no ponto 3, o "chain-ladder" e o método dos mínimos quadrados de De Vylder são construídos a partir de hipóteses equivalentes (a hipótese da proporcionalidade das colunas do quadro cumulativo completo), utilizando, no entanto, processos de estimação diferentes. Por seu lado, o método "cape cod" parte ainda da hipótese da proporcionalidade das colunas mas requer informação estatística adicional em relação aos dois métodos anteriores: além de requerer o triângulo cumulativo dos X_{ij}, utiliza também os montantes dos prémios cobrados nos vários anos de ocorrência. Como tivemos ocasião de dizer no ponto 3, quer o autor do método "cape cod", Buhlmann (1983), quer Lemaire (1985) no método dos mínimos quadrados de De Vylder, defendem que estes métodos são mais estáveis do que o "chain-ladder", no sentido de serem menos sensíveis a alterações nos valores das observações. Este facto pode ser um indicador de que as previsões fornecidas pelos dois primeiros métodos são de melhor qualidade do que as fornecidas pelo "chain-ladder". No entanto, só os resultados obtidos no referido estudo de simulação poderão permitir tirar algumas conclusões a este respeito.

Convém referir que não se incluiu neste estudo de simulação o método do complementar do rácio de perda, também apresentado no ponto 3, pelo facto de a sua aplicação a um triângulo de dados concreto apresentar um passo subjectivo: a estimação do rácio de perda final M. Este passo subjectivo dificultou, por motivos óbvios, a inclusão do método no referido estudo.

Para efectuar o estudo de simulação de que se tem vindo a falar, gerou-se uma sequência suficientemente grande de triângulos de dados não cumulativos com colunas não proporcionais, todos com a mesma estrutura aleatória. Ao longo do estudo, sempre que era gerado um novo triângulo desta sequência, eram-lhe aplicados os três métodos de previsão referidos acima para se obterem, com cada um deles, as previsões das reservas "IBNR+IBNER"[15] (é claro que o método "chain-ladder" e o método "cape cod" eram aplicados ao triângulo cumulativo correspondente). Por fim, com base nas sequências dos desvios em relação à média das previsões que foram obtidas com os três métodos, calcularam-se medidas de "performance" que permitem compará-los em termos da qualidade das previsões que fornecem.

---

[15] Tal como se fez na apresentação dos diferentes métodos de previsão ao longo deste trabalho, e pela mesma razão, vamos tratar aqui apenas o caso da previsão de reservas "IBNR+IBNER".

Todos estes procedimentos, que vão ser explicados, em seguida, com maior detalhe, foram implementados por um programa em linguagem Basic elaborado pela autora para este efeito.

A sequência de triângulos não cumulativos com colunas não proporcionais foi gerada a partir de um triângulo inicial, retirado de um quadro não cumulativo completo com colunas proporcionais. Cada triângulo da sequência foi obtido do inicial, somando a cada um dos seus elementos um nº pseudo-aleatório com distribuição $N(0,\sigma_j)$ truncada, em que j é o índice da coluna a que pertence o elemento. Como, na prática, se verifica que as diferentes colunas de um triângulo de dados podem apresentar observações de ordens de grandeza bastante diferentes, considerou-se conveniente que a normal tivesse um desvio-padrão diferente consoante a coluna a que o elemento do triângulo pertencesse: a cada elemento da coluna j do triângulo inicial somou-se um nº pseudo-aleatório com distribuição $N(0,\sigma_j)$ truncada. Devido a este facto, fez-se cada σ_j igual a uma proporção fixa da média dos elementos da coluna j do quadro completo de onde foi retirado o triângulo inicial. Por outro lado, para evitar que cada triângulo gerado tivesse elementos negativos truncaram-se as normais. Assim, se designarmos por k_{ij} os elementos do triângulo inicial com colunas proporcionais e por a_{ij} os nºs pseudo-aleatórios a somar aos k_{ij}, temos que cada a_{ij} verificava:

$$-k_{ij} \leq a_{ij} \leq k_{ij} \qquad i=0,1,\ldots,n \; ; \; j=0,1,\ldots,n-i \qquad (5.1)$$

(foi necessário impôr a segunda desigualdade para que as distribuições normais truncadas continuassem a ser simétricas).

Repare-se que, se atendermos à forma como foi gerado qualquer dos triângulos da sequência referida no parágrafo anterior e se designarmos os seus elementos por x_{ij}, podemos chegar à conclusão de que, apesar de estarmos a avaliar comparativamente três métodos não estocásticos, estamos a supôr que os x_{ij} utilizados na simulação são observações de variáveis aleatórias $N(k_{ij},\sigma_j)$ truncadas e, portanto, que as variáveis x_{ij} $(i=1,2,...,n\ ;\ j=n-i+1,...,n)$ em relação às quais estamos a fazer previsões também assumem esta estrutura aleatória.

Como já referimos, ao longo do estudo de simulação, cada um dos métodos de previsão foi aplicado a cada triângulo que ia sendo gerado (ou ao triângulo cumulativo correspondente). Obtiveram-se desta forma, para cada triângulo, os montantes totais das reservas "IBNR+IBNER" para os vários anos de ocorrência (ou seja, os Y_i $(i=1,2,...,n)$) previstos por cada método. Pelo facto de, para as seguradoras, a previsão da quantidade

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , \tag{5.2}$$

ou seja, do montante total das reservas "IBNR+IBNER" para todos os anos de ocorrência, se revestir de grande importância - pois é a previsão do montante total de indemnizações que a seguradora terá de pagar no futuro relativamente a sinistros já ocorridos - pensamos que a comparação dos métodos em termos da qualidade das previsões desta quantidade se torna tão ou mais interessante do que a sua comparação em termos da qualidade das previsões $\hat{Y}_i$. Sendo assim, para cada triângulo gerado e com cada método, obteve-se também a previsão de Y. Com o método "chain-ladder" e o método dos mínimos quadrados de De Vylver, obtiveram-se também previsões dos x_{ij} futuros e dos montantes totais das reservas "IBNR+IBNER" para os vários anos de pagamento futuros, ou seja, dos:

$$Y_s = \sum_{i+j=s} x_{ij} \qquad s=n+1,\ n+2,...,2n\ . \tag{5.3}$$

A comparação destes dois métodos em termos da qualidade das previsões dos x_{ij} futuros e dos Y_s pode também revelar-se interessante. O método "cape cod" não entra nesta última comparação pois, como vimos no ponto 3.2.1, este método não permite obter previsões dos x_{ij} futuros nem dos Y_s.

Como também já foi referido atrás, com base nas sequências das previsões referidas no parágrafo anterior, ou melhor, com base nas sequências dos desvios dessas previsões em relação as médias das variáveis aleatórias que lhes correspondem, construíram-se para cada método determinadas medidas de "performance". Destas medidas, as mais relevantes, que vamos designar por desvios quadráticos médios das previsões, são definidas da seguinte forma:

$$dqm_{ij} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{x}^{p}_{ij} - k_{ij}\right)^2}{N}} \qquad i=1,2,\ldots,n\ ;\ j=n-i+1,\ldots,n, \quad (5.4)$$

no caso das previsões dos x_{ij} futuros (as médias das variáveis aleatórias x_{ij} são os elementos correspondentes do quadro não cumulativo completo com colunas proporcionais de onde foi retirado o triângulo inicial);

$$dqm_{i} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{Y}^{p}_{i} - \sum_{j=n-i+1}^{n} k_{ij}\right)^2}{N}} \qquad i=1,2,\ldots,n \quad , \qquad (5.5)$$

no caso das previsões dos Y_i (as médias das variáveis Y_i são somas de k_{ij} pois as referidas variáveis aleatórias são somas de variáveis $N(k_{ij},\sigma_j)$ truncadas);

$$dqm_{s} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{Y}^{p}_{s} - \sum_{i+j=s} k_{ij}\right)^2}{N}} \qquad s=n+1,n+2,\ldots,2n \quad , \quad (5.6)$$

no caso das previsões dos Y_s;

$$dqm = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{Y}^{p} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} k_{ij}\right)^2}{N}} \quad , \qquad (5.7)$$

no caso da previsão de Y;

onde N é o nº de triângulos gerados no estudo de simulação e p representa o p-ésimo triângulo gerado (em relação ao qual estão associados os diversos tipos de previsões). Estas medidas permitem-nos averiguar se os vários métodos têm tendência para fornecer previsões que se afastam pouco das médias das variáveis aleatórias que lhes correspondem, ou se se verifica o contrário. Enquanto as medidas (5.5) e (5.7) foram calculadas para cada um dos três métodos de previsão, as outras foram apenas calculadas para o método "chain-ladder" e para o método dos mínimos quadrados de De Vylder.

Para tornar mais completa a avaliação comparativa dos três métodos de previsão, calculou-se também, para cada método e apenas para a previsão de Y, a seguinte medida, que vamos designar por erro médio das previsões:

$$em = \frac{\sum_{p=1}^{N}\left(\hat{Y}^{p} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} k_{ij}\right)}{N} \quad . \qquad (5.8)$$

Esta medida permite-nos descobrir se os métodos em análise têm ou não tendência para fornecer previsões de Y enviezadas. No caso de existirem erros médios significativos, diz-nos também se os métodos têm tendência para sobrevalorizar ou para subvalorizar as reservas.

A referida avaliação comparativa dos três métodos de previsão vai ser efectuada através da análise das medidas de "performance" que foram calculadas para cada um deles e para os diversos tipos de previsões. O método que apresentar menores desvios quadráticos médios e menores erros médios (em valor absoluto) será considerado o que fornece previsões de melhor qualidade. No entanto, convém referir que a comparação dos métodos em questão deve basear-se principalmente na análise dos desvios quadráticos médios das previsões pois, se para uma seguradora é importante que as previsões das suas reservas "IBNR+IBNER" sejam centradas, é muito mais importante que estas tenham tendência a vir o mais próximo possível das médias das variáveis aleatórias que lhes correspondem.

O único aspecto que falta abordar para terminar a apresentação deste estudo de simulação, é a fixação dos σ_j das distribuições dos nºs pseudo-aleatórios a_{ij}. Já tínhamos referido, que se fez cada σ_j igual a uma proporção fixa da média dos elementos da coluna j do quadro cumulativo completo com colunas proporcionais de onde foi retirado o triângulo inicial. Falta apenas, portanto, referir qual foi a proporção utilizada. Tendo em consideração que seria interessante analisar o comportamento dos três métodos quando se passa de uma situação em que os σ_j são pequenos e, portanto, os triângulos gerados têm colunas quase proporcionais, para situações em que os σ_j vão sendo cada vez maiores e, portanto, os triângulos se vão afastando cada vez mais da hipótese da proporcionalidade das colunas, resolvemos utilizar várias proporções. Mais especificamente, utilizámos as 10 seguintes proporções:

$$f_H = \frac{1}{30} H \qquad H=1,2,\dots,10 \quad . \tag{5.9}$$

Estas proporções foram escolhidas tendo em conta que numa distribuição $N(\mu,\sigma)$ o intervalo $]\mu-3\sigma, \mu+3\sigma[$ contém cerca de 99,73% da massa de probabilidade. Repare-se que quando se utiliza a proporção

f_1, pode esperar-se que cerca de 99,73% dos nºs aleatórios a_{ij} caiam no intervalo $]-0.1\bar{k}_j, 0.1\bar{k}_j[$ (com $\bar{k}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n} k_{ij}}{n+1}$) e, portanto, os triângulos gerados com estes σ_j têm colunas quase proporcionais. Pelo contrário, quando se utiliza f_{10}, o intervalo passa a ser $]-\bar{k}_j, \bar{k}_j[$ e, portanto, os triângulos gerados com estes σ_j afastam-se bastante da hipótese da proporcionalidade das colunas.

A utilização de 10 conjuntos diferentes de σ_j implicou, evidentemente, que o processo de geração de uma sequência suficientemente grande de triângulos de dados e do cálculo dos desvios quadráticos médios e dos erros médios das previsões tivesse de ser repetido 10 vezes. A comparação dos três métodos em termos da qualidade das respectivas previsões vai ter, portanto, de ser efectuada para cada conjunto de σ_j, ou simplificando, para cada H.

Por uma questão de simplificação, e também pelo facto de algumas previsões só poderem ser obtidas pelo método "chain-ladder" e pelo método dos mínimos quadrados de De Vylder, os resultados do estudo de simulação vão ser apresentados e analisados em 2 pontos distintos. No ponto 5.2.1 vai apresentar-se e analisar-se todo um conjunto de resultados que permite efectuar a comparação entre o método "chain-ladder" e o método dos mínimos quadrados de De Vylder. No ponto 5.2.2, por sua vez, vão apresentar-se e analisar-se resultados que possibilitam a comparação entre o método "chain-ladder" e o método "cape cod". Como a comparação entre o método dos mínimos quadrados de De Vylder e o método "cape cod" é implicitamente efectuada através das duas comparações anteriores, não se vai criar um novo ponto para a sua apresentação. Todos os aspectos mais importantes acerca desta comparação vão ser abordados no ponto 5.3, em que se apresentam as conclusões mais relevantes que se tiraram deste estudo de simulação.

5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.2.1 COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO "CHAIN-LADDER" E O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

Para efectuar a comparação entre estes dois métodos para cada H, resolveu gerar-se uma sequência de 5000 triângulos de dados não cumulativos com colunas não proporcionais. No entanto, para isso, era necessário fixar um quadro de dados completo com colunas proporcionais pois seria dele que se iria retirar o triângulo inicial com base no qual seriam gerados os referidos triângulos. Tendo em conta que convém utilizar mais do que um triângulo inicial, para poder ver se os resultados do estudo de simulação variam consoante o triângulo inicial considerado, resolvemos fixar dois quadros completos distintos: o quadro A e o quadro B (ver anexo 1). O quadro A apresenta informação apenas sobre 5 anos de ocorrência enquanto o quadro B, cujos factores de proporcionalidade entre as colunas são baseados num triângulo de dados real, apresenta informação sobre 9 anos de ocorrência.

Em primeiro lugar vamos apresentar os resultados obtidos com o quadro A.

No quadro 1 apresentam-se, para cada H, os desvios quadráticos médios das previsões de Y obtidas com o método "chain-ladder" (DQM(MCL)) e com o método dos mínimos quadrados de De Vylder (DQM(MMQDV)):

QUADRO 1

H	%	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)	Q
1	56.64	3.2397	3.32653	1.0268
2	56.02	6.44304	6.62366	1.028
3	54.6	9.78453	10.0459	1.0267
4	55.36	13.2565	13.6569	1.0302
5	55.94	16.4238	17.1435	1.0438
6	56.18	19.9377	20.977	1.0521
7	53.86	24.1653	25.5572	1.0576
8	54.62	27.4559	29.5435	1.076
9	56	31.2356	34.3857	1.1008
10	56.1	34.5511	38.5069	1.1145

Apresenta-se ainda, para cada H, o quociente entre o desvio quadrático médio para o método dos mínimos quadrados de De Vylder e o desvio quadrático médio para o "chain-ladder" (Q), bem como a percentagem de nº de vezes (em 5000) em que o "chain-ladder" apresenta um desvio de $\hat{Y}$ em relação à média em valor absoluto (que vamos designar por $|d|$) menor do que o do método dos mínimos quadrados de De Vylder (%).

Como se pode verificar pela análise do quadro anterior, qualquer que seja o H considerado, o desvio quadrático médio para o "chain-ladder" é sempre menor do que o desvio quadrático médio para o método dos mínimos quadrados de De Vylder. Nota-se ainda que a diferença entre os desvios quadráticos médios para os dois métodos tem tendência a aumentar em termos relativos com o H. Enquanto com o H=1 o desvio quadrático médio para o método dos mínimos quadrados de De Vylder é 2,68% maior do que o desvio quadrático médio para o método "chain-ladder", com o H=10 esta percentagem passa para 11,45%. Isto significa que, quando se retira o triângulo inicial do quadro A, o método "chain-ladder" tem tendência a apresentar previsões de Y que se afastam menos da respectiva média do que as fornecidas pelo método dos mínimos quadrados de De Vylder. A referida diferença de qualidade entre as previsões fornecidas pelos dois métodos torna-se considerável em situações em que os triângulos de dados se afastam muito da hipótese da proporcionalidade das colunas.

A percentagem do nº de vezes em que o "chain-ladder" apresenta um |d| menor do que o do método dos mínimos quadrados de De Vylder também é favorável ao primeiro método referido. Esta percentagem, que varia pouco com o H, anda em torno dos 55,5%. Isto quer dizer, que para cerca de 55.5% dos 5000 triângulos gerados, o método "chain-ladder" apresenta uma previsão de $\underset{\sim}{Y}$ mais próxima da média do que o método dos mínimos quadrados de De Vylder.

No quadro 2, para cada H, apresentam-se o maior |d| e o menor |d| obtidos com os 5000 triângulos para o método "chain-ladder" (PR(MCL) e MR(MCL) respectivamente) e para o método dos mínimos quadrados de De Vylder (PR(MMQDV) e MR(MMQDV) respectivamente):

QUADRO 2

H	PR(MCL)	PR(MMQDV)	MR(MCL)	MR(MMQDV)
1	11.4506	12.404	.259993E-02	.322806E-03
2	26.3078	26.5316	.243938E-03	.72921E-03
3	37.6027	38.3912	.352807E-02	.56099E-03
4	62.5175	62.328	.965821E-02	.232355E-02
5	77.6204	81.2582	.47683E-02	.120152E-01
6	93.3575	124.206	.465255E-03	.312732E-02
7	112.129	119.973	.232385E-02	.512327E-02
8	148.849	189.819	.025731	.535023E-02
9	162.322	267.35	.299776E-02	.245697E-01
10	190.093	285.553	.35569E-02	.582973E-02

MÉDIA = 114.8

Estes piores e melhores resultados para os dois métodos em termos de desvios em relação à média em valor absoluto podem ser comparados com a média da variável aleatória Y, que figura logo abaixo do quadro 2.

A análise do quadro 2 revela-nos que, qualquer que seja o H considerado, os melhores resultados para os dois métodos vêm sempre muito próximos de zero. Nos triângulos mais favoráveis das 10 sequências, qualquer dos dois métodos apresenta previsões de Y quase iguais à sua média. Quanto aos piores resultados, verifica-se que, em geral, tendem a aumentar com o H e que, para os últimos H, os resultados são, de facto, muito maus. Por outro lado, constata-se que os piores resultados para o "chain-ladder" são, em geral, menores do que os obtidos com o método dos mínimos quadrados de De Vylder e que a diferença entre eles tende a aumentar em termos relativos com o H, tal como acontecia com os desvios quadráticos médios no quadro 1.

No anexo 2 podemos encontrar, para cada H, os desvios quadráticos médios das previsões dos x_{ij} futuros fornecidas pelos dois métodos em análise. Estes desvios quadráticos médios são apresentados em quadros com os respectivos triângulos superiores preenchidos com zeros. Os desvios quadráticos médios das previsões dos diferentes x_{ij} futuros figuram nas posições dos quadros correspondentes a esses x_{ij}. Para cada H, apresenta-se, em primeiro lugar, o quadro dos desvios quadráticos médios para o método "chain-ladder" e, em seguida, o quadro dos desvios quadráticos médios para o método dos mínimos quadrados de De Vylder.

Analisando os quadros dos desvios quadráticos médios das previsões dos x_{ij} futuros, podemos ver que, para todos os H considerados (com excepção do H=1), os desvios quadráticos médios das previsões dos x_{ij} futuros para o método "chain-ladder" são sempre menores do que os desvios quadráticos médios correspondentes para o método dos mínimos quadrados de De Vylder. Como, no caso do H=1, isto não se verifica apenas para os desvios quadráticos médios das previsões de x_{41} e estes desvios quadráticos médios são praticamente iguais, podemos concluir que, utilizando o triângulo inicial retirado do quadro A, o método "chain-ladder" também tem tendência para fornecer previsões para todos os x_{ij} futuros que se aproximam mais das respectivas médias do que as previsões fornecidas pelo método dos mínimos quadrados de De Vylder.

No que diz respeito aos desvios quadráticos médios das previsões dos Y_i e das previsões dos Y_s, que também constam do anexo 2, pode concluir-se também da superioridade do método "chain-ladder" em relação ao outro método em análise para todos os H e para todos os anos de ocorrência e de pagamento considerados.

Os erros médios das previsões de Y fornecidas pelo método "chain-ladder" (EM(MCL)) e pelo método dos mínimos quadrados de De Vylder (EM(MMQDV) aparecem no quadro 3:

QUADRO 3

H	EM(MCL)	EM(MMQDV)	Q*
1	.131042E-01	.461407E-01	3.521
2	.187598	.351112	1.872
3	.397753	.654936	1.647
4	.561959	1.05025	1.869
5	1.19716	2.10151	1.755
6	1.22244	2.46516	2.017
7	2.29129	3.94467	1.722
8	3.05764	5.33198	1.744
9	4.21903	7.49846	1.777
10	4.38429	8.21627	1.874

Neste quadro, apresenta-se também, para cada H, o quociente em valor absoluto entre o erro médio para o método dos mínimos quadrados de De Vylder e o erro médio para o "chain-ladder" (Q*).

Analisando o quadro anterior, podemos constatar que, qualquer que seja o H considerado, o erro médio para o método "chain-ladder" é sempre menor que o erro médio para o método dos mínimos quadrados de De Vylder. A diferença entre os erros médios para os dois métodos não tem uma evolução linear com o H. Deve ainda referir-se que, em geral, os erros médios para os dois métodos são pequenos. Aliás, para os primeiros H, são tão pequenos que quase se pode dizer que, para esses H, os dois métodos fornecem previsões de Y não enviezadas. Os erros médios são também sempre positivos, o que significa que os dois métodos têm tendência para sobrevalorizar as reservas.

Passando agora aos resultados obtidos com o quadro B, temos que o quadro 4 e o quadro 5 apresentam os mesmos resultados que o quadro 1 e o quadro 2 (respectivamente) apresentavam para o A:

QUADRO 4

H	%	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)	Q
1	57.78	4496.69	4760.35	1.059
2	56.3	9006.68	9574.91	1.063
3	57.42	13385.6	14220.4	1.062
4	56.4	18054	19191.2	1.063
5	57.32	22889.8	24414.8	1.067
6	56.84	27343.1	29055.3	1.063
7	57.1	31628.8	34015.3	1.08
8	59.66	36059.6	39380.5	1.09
9	59.2	40091.1	44033.1	1.098
10	58.4	44567.5	48875.9	1.097

QUADRO 5

H	PR(MCL)	PR(MMQDV)	MR(MCL)	MR(MMQDV)
1	15497.9	17695.2	.940743	2.18845
2	33946.3	37037.1	.698428	6.94083
3	47437	55170.8	2.29704	.626136
4	67024.2	75090.6	2.76852	8.38781
5	112586	107503	3.92614	3.72271
6	138831	124606	4.05942	8.13608
7	131386	181824	2.21759	21.1275
8	157736	185715	13.0495	6.69967
9	153975	204617	14.8482	1.20983
10	295361	321372	2.67775	5.82263

MÉDIA = 274032

As conclusões que se tiram da análise destes dois quadros são praticamente as mesmas que se tiraram da análise dos quadros 1 e 2. As únicas pequenas diferenças que se podem apontar são: o aumento com o H da superioridade em termos de desvios quadráticos médios do método "chain-ladder" em relação ao método dos mínimos quadrados de De Vylder não é tão bem delineado, nem tão acentuado, utilizando o quadro B; a percentagem do nº de vezes em que o método "chain-ladder" apresenta um |d| menor anda, agora, em torno dos 57,6%; os melhores resultados em termos de desvios das previsões de Y em relação à média não vêm, agora, todos muito próximos de zero mas, de qualquer maneira, são insignificantes em relação à média de Y.

No anexo 3 podem consultar-se os desvios quadráticos médios: das previsões dos x_{ij} futuros, das previsões dos Y_i e das previsões dos Y_s.

Quanto aos desvios quadráticos médios das previsões dos x_{ij} futuros, constata-se que até ao H=6, os desvios quadráticos médios das previsões de alguns x_{ij} relativos ao ano de ocorrência 8 (geralmente, referentes aos 5 primeiros anos de desenvolvimento) são maiores para o "chain-ladder" do que para o método dos mínimos quadrados de De Vylder. Repare-se que com o quadro A isto também aconteceu, só que apenas para o H=1 e para um x_{ij}. Repare-se também que esse x_{ij}, x_{41}, era igualmente relativo ao último ano de ocorrência considerado nos triângulos e ao ano de desenvolvimento 1. Este fenómeno pode estar ligado ao facto do último ano de ocorrência ser aquele que tem menos informação disponível e, ainda, ao facto dos x_{ij} associados aos primeiros anos de desenvolvimento serem aqueles que, em geral, têm mais peso nos montantes totais das indemnizações ocorridas nos vários anos de ocorrência, ou seja nos X_i (repare-se que, tanto no quadro A como no quadro B, os x_{ij} mencionados estão associados, precisamente, aos k_{ij} com maior peso nos $K_i = \sum_{j=0}^{n} k_{ij}$).

Analisando agora os desvios quadráticos médios das previsões dos Y_i e dos Y_s, podemos constatar que, tal como com o quadro A, todos os desvios quadráticos médios para o método "chain-ladder" são menores do que os desvios quadráticos médios correspondentes para o outro método em análise.

No quadro 6 apresentam-se, para cada H, os erros médios para os dois métodos e o quociente em valor absoluto entre esses erros médios:

QUADRO 6

H	EM(MCL)	EM(MMQDV)	Q*
1	90.2587	85.462	.9469
2	65.2574	-1.47052	.0225
3	549.266	400.168	.7286
4	619.438	295.314	.4767
5	1436.36	1292.06	.8995
6	1141.05	782.535	.6858
7	2395.31	2207.83	.9217
8	3083.41	3079.18	.9986
9	4324.29	4978.33	1.1512
10	3804.54	4719.88	1.2406

Analisando o quadro 6, verificamos que, ao contrário do que acontecia com o quadro A, apenas para os dois últimos H, os erros médios para o "chain-ladder" são menores do que os erros médios para o método dos mínimos quadrados de De Vylder. No entanto, tal como acontecia com o quadro A, os erros médios são em geral, pequenos (principalmente para os primeiros H) e positivos.

Da análise dos resultados obtidos com o quadro A e com o quadro B podemos concluir que o método "chain-ladder" apresenta, qualquer que seja o H, previsões de melhor qualidade em termos de desvios quadráticos médios do que o método dos mínimos quadrados de De Vylder para quase todas as quantidades consideradas (com excepção de alguns x_{ij} futuros relativos ao último ano de ocorrência). A comparação da qualidade das previsões de Y fornecidas pelos dois métodos em termos de erros médios não é, no entanto, tão linear. A única coisa que se pode dizer é que, os erros médios para os dois métodos são, em geral, pequenos e positivos.

Por uma questão de curiosidade, vamos fixar ainda um outro quadro cumulativo completo com colunas proporcionais e, a partir desse quadro, comparar os dois métodos em estudo só em termos da qualidade das previsões de Y. Este novo quadro, o quadro C (ver anexo 1), é obtido do quadro A multiplicando a sua primeira coluna (a que corresponde ao ano de desenvolvimento 0) por 10. Repare-se que no quadro C a proporção conhecida do montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos vários anos considerados (aquela que corresponde ao triângulo superior) é bastante maior do que no quadro A. Como a proporção de indemnizações futuras a prever é bastante menor no novo quadro, este representa uma situação bastante mais favorável do que o quadro A e, portanto, é bem possível que qualquer dos dois métodos de previsão apresente melhores resultados com este quadro. É isso que vamos averiguar, analisando os quadros 7 e 8:

QUADRO 7

H	%	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)	Q
1	55.2	3.2415	3.26908	1.0085
2	51.72	6.51794	6.53767	1.003
3	50.4	9.89634	9.8999	1.0004
4	50.36	13.2029	13.1339	.9948
5	50.86	17.093	16.8614	.9865
6	50.56	20.2577	19.8582	.9803
7	51.12	23.8789	23.1759	.9706
8	50.02	27.7621	26.6175	.9588
9	49.64	31.3489	29.5958	.9441
10	51.92	35.2886	33.172	.94

QUADRO 8

H	EM(MCL)	EM(MMQDV)	Q*
1	.778389E-02	-.601046E-01	7.7217
2	.136865	-.132995	.9717
3	.460129	-.126235	.2743
4	.572356	-.517746	.9046
5	1.11269	-.555333	.4991
6	1.20506	-1.22047	1.0128
7	2.35443	-.942969	.4005
8	2.98192	-1.34411	.4508
9	4.19859	-1.345	.3203
10	4.14865	-2.21051	.5328

Curiosamente, apenas o método dos mínimos quadrados de De Vylder apresenta desvios quadráticos médios menores (principalmente a partir do H=6). Isto leva a que, a partir do H=4, os desvios quadráticos médios para o método dos mínimos quadrados de De Vylder sejam menores do que os desvios quadráticos médios correspondentes para o método "chain-ladder". Por outro lado, as percentagens no nº de vezes em que o "chain-ladder" apresenta um |d| menor baixam sensívelmente, andando, agora, em torno dos 51,2%.

Em relação aos erros médios, verificamos, também curiosamente, que para o método "chain-ladder" estes praticamente se mantêm. Só para o método dos mínimos quadrados de De Vylder baixam consideravelmente em valor absoluto. Isto leva a que, exceptuando raras excepções, os erros médios para o método dos mínimos quadrados de De Vylder passem agora a ser em valor absoluto menores do que os erros médios para o método "chain-ladder". Outro facto curioso, é que os erros médios para o método dos mínimos quadrados de De Vylder passam a ser todos negativos.

A análise feita anteriormente, baseada nos resultados obtidos com o quadro C, permite-nos concluir que os resultados da comparação entre os dois métodos em avaliação podem inverter-se quando estamos em situações em que o montante total de indemnizações futuras a prever seja relativamente pequeno em relação ao montante total das indemnizações referentes aos sinistros ocorridos nos vários anos considerados, pois estas situações mais favoráveis parecem implicar uma sensível melhoria de qualidade apenas nas previsões fornecidas pelo método dos mínimos quadrados de De Vylder. A qualidade das previsões fornecidas pelo método "chain-ladder" parece ser pouco, ou mesmo nada, afectada por situações desta natureza.

5.2.2 COMPARAÇÃO ENTRE O METODO "CHAIN-LADDER" E O METODO "CAPE COD"

A comparação entre o método "chain-ladder" e o método "cape cod" levanta algumas dificuldades devido ao facto do segundo utilizar como informação estatística, não só o triângulo cumulativo dos X_{ij}, tal como o primeiro, mas também os montantes dos prémios cobrados nos vários anos de ocorrência. Para efectuar o estudo de simulação que possibilita esta comparação não é suficiente gerar 10 sequências de 5000 triângulos não cumulativos com colunas não proporcionais. É necessário também fixar os montantes dos prémios associados aos triângulos gerados. E é precisamente na fixação dos montantes dos prémios que residem as dificuldades.

Em primeiro lugar, é difícil saber como se devem fixar os P_i $(i=0,1,...,n)$ de forma a que a comparação entre os dois métodos seja o mais justa possível. Isto, porque, pode acontecer que, ao fixar os P_i de uma determinada forma, se estejam, à priori, a enviezar os resultados, no sentido de se estarem a criar, à partida, condições que favorecem um método em relação ao outro.

Em segundo lugar, é difícil que os estimadores dos factores de correcção dos prémios utilizados se coadunem com a forma como são fixados os P_i uma vez que, como veremos em seguida, os referidos estimadores, devido ao carácter do estudo de simulação, são escolhidos à partida de uma maneira rígida. Esta dificuldade, quando não ultrapassada, pode levar a que os resultados da comparação entre os dois métodos em análise também venham enviezados.

Tendo em consideração que, ao longo do estudo de simulação, não seria possível definir os conjuntos S_i (necessários à estimação dos factores de correcção dos prémios) mais adequados a cada triângulo gerado, resolveu considerar-se que $S_i=\{0,1,...,n\}$ $(i=0,1,...,n)$ para todos os triângulos, ou seja, que para qualquer triângulo gerado, os estimadores dos factores de correcção dos prémios conteriam informação sobre todos os anos de ocorrência considerados.

Como se referiu no ponto 2.2, em geral, as seguradoras baseiam a fixação dos P_i nos montantes totais das indemnizações produzidas nos anos de ocorrência anteriores, quer pelo risco em questão, quer por outros riscos com características similares. Como, no âmbito deste estudo de simulação, não existe essa informação estatística sobre os anos de ocorrência anteriores, a única hipótese consiste em basear a fixação dos P_i nos $K_i = \sum_{j=0}^{n} k_{ij}$, ou seja, nas médias das variáveis aleatórias X_i. Tendo em conta que, para todos os triângulos gerados, os estimadores dos factores de correcção dos prémios conteriam informação sobre todos os anos de ocorrência, resolvemos fazer $P_i=gK_i$ $(i=0,1,...,n)$, ou seja, considerámos os montantes dos prémios cobrados nos vários anos de ocorrência iguais a uma proporção fixa dos K_i.

Se atendermos às expressões dos estimadores (3.15) e (3.16), torna-se evidente que esta forma de fixar os P_i, apesar de ser a que mais se coaduna com a definição dos conjuntos S_i na estimação dos factores de correcção dos prémios, favorece o método "cape cod", pelo menos quando os triângulos gerados têm colunas quase proporcionais. De facto, considerando que, com esta maneira de fixar os P_i, a previsão de cada Y_i para o método "cape cod" vem:

$$\hat{Y}_i = (1 - \hat{L}_{n-i}) \frac{\sum_{s=0}^{n} X_{s,n-s}}{\sum_{s=0}^{n} \hat{L}_{n-s}\, g K_s}\, g K_i =$$

$$= (1 - \hat{L}_{n-i}) \frac{\sum_{s=0}^{n} X_{s,n-s}}{\sum_{s=0}^{n} \hat{L}_{n-s} K_s} K_i \qquad i=1,2,\dots,n \quad , \qquad (5.9)$$

é fácil de constatar que, para os primeiros H, os $\hat{Y}_i$ se aproximam necessariamente muito das médias das variáveis aleatórias Y_i. Sendo assim, para que a comparação entre os dois métodos seja mais justa, pensamos que esta se deve efectuar baseando-se preferencialmente nos resultados para os últimos H.

Vamos, em primeiro lugar, analisar os resultados obtidos com o quadro A e com os prémios fixados do seguinte modo: $P_i = 1{,}2K_i$ $(i=0,1,\dots,n)$. Convém referir, que os resultados para o método "cape cod" seriam exactamente os mesmos se se utilizasse outra qualquer proporção g pois, como se pode verificar por (5.9), as previsões $\hat{Y}_i$ não dependem da proporção fixa g. Interessa também referir que, como a "seed" utilizada para gerar os nºs pseudo-aleatórios a_{ij} foi a mesma que tinha sido utilizada para obter os resultados apresentados no ponto 5.2.1, os resultados para o método "chain-ladder" são iguais aos obtidos nesse ponto.

No quadro 9 apresentam-se, para cada H, a percentagem do nº de vezes em que o método "chain-ladder" apresenta um |d| menor do que o do método "cape cod" (%), os desvios quadráticos médios das previsões de Y para o método "chain-ladder" (DQM(MCL)) e para o método "cape cod" (DQM(MCC)) e o quociente entre o desvio quadrático médio para o "chain-ladder" e o desvio quadrático médio para o "cape cod" (Q**):

QUADRO 9

H	%	DQM(MCL)	DQM(MCC)	Q**
1	21.98	3.2397	1.39532	2.322
2	22.78	6.44304	2.77395	2.323
3	23.6	9.78453	4.23827	2.309
4	22.8	13.2565	5.60125	2.367
5	23.66	16.4238	6.95162	2.363
6	23.4	19.9377	8.49442	2.347
7	21.58	24.1653	9.76029	2.476
8	22.3	27.4559	11.3023	2.429
9	22.1	31.2356	12.475	2.504
10	22.1	34.5511	13.7773	2.508

Pela análise do quadro anterior, pode ver-se que, para todos os H considerados, o desvio quadrático médio para o método "cape cod" é menor do que o desvio quadrático médio para o método "chain-ladder". As diferenças entre os desvios quadráticos médios para os dois métodos, que são consideráveis (os desvios quadráticos médios para o "chain-ladder" são mais do dobro dos desvios quadráticos médios para o outro método em análise), tem tendência a aumentar em termos relativos com o H. Por outro lado, as percentagens do nº de vezes em que o método "chain-ladder" apresenta um |d| menor do que o do método "cape cod" são muito baixas, andando em torno dos 22,6%. Podemos concluir, pois, que retirando o triângulo inicial do quadro A e fixando os montantes dos prémios da forma já referida, o método "cape cod" apresenta em termos de desvios quadráticos médios previsões de Y de muito melhor qualidade do que as fornecidas pelo método "chain-ladder". Curiosamente, este comportamento verifica-se para todos os H, não se invertendo para os últimos. Pelo contrário, para os últimos H, a já referida diferença de qualidade entre os dois métodos ainda é maior do que para os primeiros.

No quadro 10 apresentam-se, para cada H, os piores e os melhores resultados em termos de |d| para o método "chain-ladder" (PR(MCL) e MR(MCL) respectivamente) e para o método "cape cod" (PR(MCC) e MR(MCC) respectivamente):

QUADRO 10

H	PR(MCL)	PR(MCC)	MR(MCL)	MR(MCC)
1	11.4506	5.36191	.259993E-02	.250164E-04
2	26.3078	9.81176	.243938E-03	.112107E-02
3	37.6027	17.6672	.352807E-02	.41797E-03
4	62.5175	19.3978	.965821E-02	.163191E-03
5	77.6204	26.6074	.47683E-02	.328096E-03
6	93.3575	30.2354	.465255E-03	.500409E-02
7	112.129	37.1424	.232385E-02	.512423E-03
8	148.849	38.4231	.025731	.32406E-03
9	162.322	46.5033	.299776E-02	.484653E-02
10	190.093	57.8133	.35569E-02	.318311E-02

MÉDIA = 114.8

Como se pode constatar, qualquer que seja o H considerado, os melhores resultados para os dois métodos são muito próximos de zero. Por outro lado, os piores resultados para o método "cape cod" são sempre bastante menores do que os piores resultados para o "chain-ladder". Tal como acontecia com os desvios quadráticos médios, as diferenças entre os piores resultados para os dois métodos tendem a aumentar em termos relativos com o H.

Analisando os desvios quadráticos médios das previsões dos Y_i, que se podem consultar no anexo 4, chegamos também à conclusão de que, para todos os H, os desvios quadráticos médios para o método "cape cod" são menores do que os desvios quadráticos médios correspondentes para o método "chain-ladder".

No quadro 11 surgem os erros médios das previsões de Y para o método "chain-ladder" (EM(MCL)) e para o método "cape cod" (EM(MCC)), bem com os quocientes em valor absoluto entre os erros médios para o método "chain-ladder" e os erros médios correspondentes para o método "cape cod" (Q^{***}):

QUADRO 11

H	EM(MCL)	EM(MCC)	Q***
1	.131042E-01	.162716E-01	.8053
2	.187598	-.264801E-01	7.0845
3	.397753	.983021E-01	4.0462
4	.561959	-.842109E-01	6.6732
5	1.19716	.237295	5.045
6	1.22244	.151615	8.0628
7	2.29129	.331419	6.9136
8	3.05764	.548309	5.5765
9	4.21903	.517148	8.1583
10	4.38429	.63877	6.8636

Para quase todos os H considerados, o método "cape cod" revela a sua superioridade em relação ao método "chain-ladder" também em termos de erros médios. Os erros médios para os dois métodos são, em geral, pequenos e positivos. No entanto, para o método "cape cod" são tão pequenos que quase podemos dizer que este método fornece previsões de Y não enviezadas.

Passando à apresentação dos resultados obtidos com o quadro B e também com os $P_i=1,2\ K_i$ $(i=0,1,...,n)$, temos nos quadros 12 e 13 os mesmos resultados que os quadros 9 e 10 (respectivamente) apresentavam para o quadro A:

QUADRO 12

H	%	DQM(MCL)	DQM(MCC)	Q**
1	25.32	4496.69	2334.59	1.926
2	26.04	9006.68	4702.32	1.915
3	25.46	13385.6	6930.11	1.932
4	26.32	18054	9309.88	1.94
5	25.72	22889.8	11719.9	1.95
6	25.9	27343.1	13896.8	1.968
7	24.76	31628.8	15909.9	1.988
8	23.28	36059.6	17604.7	2.048
9	23.66	40091.1	19581.7	2.047
10	25.14	44567.5	21363.3	2.086

QUADRO 13

H	PR(MCL)	PR(MCC)	MR(MCL)	MR(MCC)
1	15497.9	8265.01	.940743	.141836
2	33946.3	19131.8	.698428	1.26252
3	47437	24439.1	2.29704	.735853
4	67024.2	35534.7	2.76852	1.26994
5	112586	45825.2	3.92614	2.31165
6	138831	55055.1	4.05942	2.41825
7	131386	54629.9	2.21759	.133849
8	157736	75136.1	13.0495	11.3061
9	153975	71463.5	14.8482	1.03256
10	295361	76011.1	2.67775	10.4813

MÉDIA = 274032

As conclusões que se tiram da análise destes dois quadros são, em geral, as mesmas que se tiraram da análise dos quadros 9 e 10. A única pequena diferença é que a percentagem do nº de vezes em que o "chain-ladder" apresenta um |d| menor do que o do "cape cod" subiu ligeiramente, andando, agora, em torno dos 25,2%.

No anexo 5 podem encontrar-se os desvios quadráticos médios das previsões dos Y_i obtidos com o quadro B. Também, aqui, o método "cape cod" mostra a sua superioridade em relação ao método "chain-ladder" para todos os H e para todos os anos de ocorrência considerados.

O quadro 14 apresenta os mesmos resultados que o quadro 11 apresentava para o quadro A:

QUADRO 14

H	EM(MCL)	EM(MCC)	Q***
1	90.2587	78.068	1.1562
2	65.2574	-41.4558	1.5741
3	549.266	202.511	2.7123
4	619.438	241.039	2.5699
5	1436.36	181.801	7.9007
6	1141.05	207.329	5.5036
7	2395.31	761.788	3.1443
8	3083.41	711.731	4.3323
9	4324.29	1440.48	3.002
10	3804.54	505.225	7.5304

Como se pode constatar, da análise do quadro anterior podem tirar-se, em geral, as mesmas conclusões que se tiraram da análise do quadro 11.

Como referimos atrás, a forma que escolhemos para fixar os P_i parece favorecer à partida, pelo menos para os primeiros H, o método "cape cod" em detrimento do método "chain-ladder". Desta maneira, para tentar averiguar se os resultados obtidos vinham enviezados, considerámos conveniente obter novos resultados fixando os P_i de outra forma. Resolvemos, então, obter novos resultados (apenas para as previsões de Y) com o quadro A, fixando cada P_i como uma proporção de K_i que pode variar consoante o ano de ocorrência considerado, ou seja, fazendo:

$$P_i = g_i K_i \qquad i=0,1,\ldots,n \quad .$$

Repare-se, no entanto, que esta nova forma de fixar os P_i, devido ao facto de não se coadunar com a definição dos conjuntos S_i na estimação dos factores de correcção dos prémios, parece, agora, desfavorecer, à partida, o método "cape cod" em favor do método "chain-ladder", pelo menos para os primeiros H. Com efeito, se para os primeiros H, quando as observações dos triângulos gerados não se afastam muito das médias das variaveis aleatórias que lhes estão associadas, se utilizam estimadores dos factores de correcção dos prémios que contêm informação sobre todos os anos de ocorrência considerados, sabendo-se que a relação de proporcionalidade entre P_i e K_i pode variar conforme o i, é de esperar que os resultados da comparação entre os dois métodos em análise venham enviezados em favor do método "chain-ladder". Desta forma, para que seja mais justa, a comparação entre estes dois métodos deve continuar a efectuar-se preferencialmente com base nos resultados para os últimos H.

Os resultados, em termos de desvios quadráticos médios e de erros médios das previsões de Y, obtidos com o quadro A e com as proporções g_0=0,8 ; g_1=0,85 ; g_2=0,9 ; g_3=0,95 ; g_4=1 (utilizadas na fixação dos P_i) são apresentados nos quadros 15 e 16:

QUADRO 15

H	%	DQM(MCL)	DQM(MCC)	Q**
1	99.9	3.2397	13.3855	.242
2	93.5	6.44304	13.607	.4735
3	79.44	9.78453	14.205	.6888
4	66.5	13.2565	14.6035	.9078
5	58.38	16.4238	15.6269	1.051
6	49.42	19.9377	16.4842	1.2095
7	44.2	24.1653	17.4995	1.3809
8	39.88	27.4559	18.8051	1.46
9	37.98	31.2356	19.686	1.5867
10	34.54	34.5511	20.8394	1.658

QUADRO 16

H	EM(MCL)	EM(MCC)	Q***
1	.131042E-01	13.2935	.001
2	.187598	13.2455	.0142
3	.397753	13.3845	.0297
4	.561959	13.1799	.0426
5	1.19716	13.541	.0884
6	1.22244	13.4459	.0909
7	2.29129	13.6488	.1679
8	3.05764	13.8893	.2201
9	4.21903	13.85	.3046
10	4.38429	13.9891	.3134

Analisando o quadro 15, podemos constatar que, para todos os H considerados, os desvios quadráticos médios das previsões de Y para o método "cape cod" aumentam consideravelmente com a nova forma de fixar os P_i. Podemos constatar ainda que, tal como se esperava, os referidos aumentos são bastante mais significativos para os primeiros H do que para os últimos. Estes factos implicam que até ao H=4, os desvios quadráticos médios para o método "chain-ladder" passem a ser menores do que os desvios quadráticos médios para o método "cape cod". No entanto, a partir do H=4, os resultados invertem-se, estando, agora, mais de acordo com os resultados obtidos com a antiga forma de fixar os P_i. Por outro lado, verifica-se que a percentagem do nº de vezes em que o método "chain-ladder" apresenta um |d| menor do que o do método "cape cod" varia bastante com o H, ao contrário do que acontecia em todos os casos que vimos até agora. Esta percentagem é favorável ao método "chain-ladder" para os 5 primeiros H e favorável ao método "cape cod" para os 5 últimos.

Da análise do quadro 15 podemos concluir que, mesmo utilizando estimadores dos factores de correcção dos prémios inadequados, o método "cape cod" continua a fornecer previsões de melhor qualidade em termos de desvios quadráticos médios do que as fornecidas pelo método "chain-ladder". O facto dos resultados até ao H=4 mostrarem o contrário não nos parece relevante. Pelo motivo exposto atrás, é de crer que estes resultados para os primeiros H venham fortemente enviezados. No entanto, convém notar que, de qualquer forma, para os últimos H, os desvios quadráticos médios também observam um aumento em relação aos desvios quadráticos médios correspondentes obtidos com a anterior forma de fixar os P_i. Este aumento pode dever-se ainda a um enviezamento dos resultados mas tambem pode dever-se, em parte, ao facto da fixação dos P_i em função dos K_i agora variar conforme o ano de ocorrência.

Passando à análise do quadro 16, podemos verificar que para todos os H considerados, também os erros médios das previsões de Y para o método "cape cod" aumentam significativamente com a nova forma de fixar os P_i. Estes aumentos são tão significativos, que a afirmação de que o método "cape cod" fornece previsões de Y praticamente não enviezadas, feita para os resultados obtidos com a antiga forma de fixar os P_i, é aqui totalmente descabida. Isto leva a que, para todos os H considerados, os erros médios para o método "cape cod" sejam maiores do que os erros médios para o método "chain-ladder". Um facto curioso que se pode constatar é que os erros médios para o método "cape cod" praticamente não variam com o H, ao contrário do que acontecia em todos os casos vistos até agora (quer em relação ao método "cape cod", quer em relação aos outros métodos). Este facto pode ser um sinal de que os resultados também vêm enviezados para os primeiros H.

Podemos, portanto, dizer que, com a nova forma de fixar os P_i, o método do "chain-ladder" passa a fornecer previsões de Y de melhor qualidade em termos de erros médios do que as fornecidas pelo método "cape cod", mesmo para os últimos H. Esta inversão de resultados pode dever-se a um enviezamento dos mesmos e/ou ao facto das proporções utilizadas na fixação dos prémios variarem consoante o ano de ocorrência considerado.

Por uma questão de curiosidade, resolvemos obter ainda novos resultados com o quadro A e utilizando as mesmas proporções para fixar os P_i, só que agora por ordem inversa, ou seja, fazendo $g_0=1$; $g_1=0{,}95$; $g_2=0{,}9$; $g_3=0{,}85$; $g_4=0{,}8$. Estes resultados são apresentados nos quadros 17 e 18:

QUADRO 17

H	%	DQM(MCL)	DQM(MCC)	Q**
1	99.9	3.2397	12.7423	.2542
2	92.86	6.44304	12.9542	.4974
3	78.66	9.78453	13.1537	.7439
4	67.52	13.2565	13.697	.9678
5	56.9	16.4238	13.9159	1.1802
6	49.22	19.9377	14.6369	1.3622
7	42.56	24.1653	15.1102	1.5993
8	38.5	27.4559	15.7711	1.7409
9	36.34	31.2356	16.47	1.8965
10	33.5	34.5511	17.1865	2.0104

QUADRO 18

H	EM(MCL)	EM(MCC)	Q***
1	.131042E-01	-12.6824	.001
2	.187598	-12.7199	.0147
3	.397753	-12.6084	.0315
4	.561959	-12.7699	.044
5	1.19716	-12.4846	.0959
6	1.22244	-12.5617	.0973
7	2.29129	-12.4029	.1847
8	3.05764	-12.2076	.2505
9	4.21903	-12.2294	.345
10	4.38429	-12.1242	.3616

Como se pode constatar, da análise dos quadros anteriores podem, em geral, tirar-se as mesmas conclusões que se tiraram da análise dos quadros 15 e 16. As únicas diferenças que se registam são: os desvios quadráticos médios e os erros médios em valor absoluto das previsões de Y para o método "cape cod" são ligeiramente inferiores; os erros médios para o método "cape cod" tornam-se negativos para todos os H considerados.

5.3 CONCLUSÕES

Uma das conclusões mais importantes que se conseguiu tirar deste estudo de simulação é que, nas situações em que o montante total de indemnizações futuras a prever é relativamente grande em relação ao montante total das indemnizações relativas aos sinistros ocorridos nos vários anos considerados, o método "chain-ladder" fornece inequivocamente, em termos de desvios quadráticos médios, previsões de melhor qualidade para praticamente todas as quantidades consideradas do que o método dos mínimos quadrados de De Vylder. Constatou-se que isto apenas não se verifica em relação às previsões de alguns (poucos) x_{ij} futuros relativos ao último ano de ocorrência considerado e aos primeiros anos de desenvolvimento.

A comparação entre o método "chain-ladder" e o método dos mínimos quadrados de De Vylder em termos de erros médios das previsões de Y não se revelou tão clara como em termos de desvios quadráticos médios. As únicas conclusões que se puderam tirar é que, nas situações referidas no parágrafo anterior, os erros médios para os dois métodos são, em geral, pequenos e positivos. Nestas situações verifica-se portanto, que qualquer dos métodos tem tendência para sobrevalorizar ligeiramente as reservas.

Ainda nas situações referidas anteriormente e com qualquer das duas formas de fixar os P_i considerados neste estudo, o método "cape cod" parece fornecer, em termos de desvios quadráticos médios, previsões de Y de melhor qualidade do que o método "chain-ladder". No entanto, convém referir que o facto da fixação dos P_i em função dos K_i poder variar consoante o ano de ocorrência considerado parece piorar os resultados para o método "cape cod".

Em termos de erros médios, mas agora apenas no caso em que os P_i são fixados como uma proporção fixa dos K_i, o método "cape cod" também fornece previsões de Y de melhor qualidade do que o método "chain-ladder". Aliás, os erros médios para o método "cape cod" são tão pequenos que quase se pode dizer que este fornece previsões de Y não enviezadas. Quando os P_i passam a ser fixados como proporções dos K_i que podem variar conforme o ano de ocorrência, os erros médios para o "cape cod" aumentam consideravelmente, levando a que o método "chain-ladder" passe a apresentar previsões de melhor qualidade.

Atendendo a que a comparação entre os métodos em avaliação se deve basear principalmente nos desvios quadráticos médios (tal como vimos no ponto 5.1), podemos concluir, pois, que, em geral, o método "cape cod" parece fornecer previsões de melhor qualidade do que o método "chain-ladder". No entanto, ninguém nos garante que, em casos em que a forma de fixar os P_i varie bruscamente consoante o ano de ocorrência, os resultados não se invertam a favor do "chain-ladder".

Embora não se tenha efectuado explicitamente a comparação entre o método dos mínimos quadrados de De Vylder e o método "cape cod" é fácil concluir, de tudo o que foi dito até agora, que o método "cape cod", pelo menos em termos de desvios quadráticos, também apresenta previsões de melhor qualidade do que o método dos mínimos quadrados de De Vylder.

6 CONCLUSÕES FINAIS

Dos métodos de previsão de reservas "IBNR" e "IBNER" apresentados neste trabalho, os métodos não estocásticos são, em geral, os mais simples, quer em termos das hipóteses apresentadas, quer em termos da sua aplicação a triângulos de dados concretos.

Os quatro métodos não estocásticos apresentados têm características muito semelhantes: utilizam todos, de alguma forma, a hipótese básica do método "chain-ladder" e requerem para a sua aplicação conjuntos de informação estatística que pouco diferem uns dos outros. No entanto, tivemos a possibilidade de verificar (apenas em relação a três deles), através de um estudo de simulação, que, em determinadas situações, uns têm tendência para fornecer previsões de melhor qualidade do que os outros.

Constatámos, nas situações em que o montante total de indemnizações futuras a prever é relativamente grande em relação ao montante total das indemnizações referentes aos sinistros ocorridos nos vários anos considerados (que são as situações em que se sente uma maior necessidade de métodos que forneçam previsões de boa qualidade), que o método "cape cod" parece fornecer previsões de melhor qualidade para Y, em termos de desvios quadráticos médios, do que o método "chain-ladder", com qualquer das duas formas de fixar os montantes dos prémios considerados no estudo de simulação. Além disso, como já tinhamos verificado que o método"chain-ladder", por sua vez, tem tendência para fornecer previsões de Y de melhor qualidade, em termos de desvios quadráticos médios, do que o método dos mínimos quadrados de de Vylder, pudemos concluir que o método "cape cod" é, dos três métodos em comparação, aquele que fornece previsões de melhor qualidade.

No entanto, pudemos ver que os desvios quadráticos médios para o método "cape cod" aumentaram significativamente quando a proporção entre os P_i e os K_i deixou de ser fixa e passou a variar com o ano de ocorrência. Este resultado pode implicar que, em situações em que a forma de fixar os P_i varie bruscamente durante o período considerado no triângulo de dados, os resultados da comparação entre os três métodos se possam inverter em favor do método "chain-ladder" e, mesmo, do método dos mínimos quadrados de De Vylder.

Assim, com base nos resultados do estudo de simulação efectuado, podemos recomendar a utilização do método "cape cod" nas situações em que se pretenda aplicar um método simples (do tipo do "chain-ladder") na previsão das reservas "IBNR+IBNER" (principalmente, nos casos em que a fixação dos prémios cobrados não varie muito com o ano de ocorrência considerado).

Os métodos de previsão estocásticos apresentados, apesar de mais sofisticados, podem também ser utilizados, sem grandes dificuldades, por qualquer seguradora, desde que esteja disponível o conjunto de informação estatística requerido por cada um deles.

O método de Straub, embora seja um método pouco estruturado em termos de hipóteses, é dos métodos estocásticos apresentados, aquele que implica uma calculatória mais pesada. Isto acontece, principalmente, no caso em que se utiliza também informação estatística referente a outros conjuntos de riscos pertencentes ao mesmo ramo de actividade para a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo. No entanto, este modelo deve ser preferencialmente utilizado, precisamente, nas situações em que está disponível essa informação estatística adicional. Como vimos no ponto 4.1, se apenas estiver disponível a informação estatística referente ao conjunto de riscos em análise, o método pode fornecer previsões de má qualidade.

Os métodos da separação de Verbeek e de Taylor, apesar de serem métodos estocásticos, são bastante simples de aplicar. São especialmente recomendados para situações em que há grandes variações da taxa de inflação durante o período de tempo considerado no triângulo de dados e as taxas de inflação associadas aos vários anos de notificação/pagamento não coincidem com as medidas da inflação apresentadas como indicadores económicos. Isto, porque se conseguem estimar dentro dos próprios modelos, os efeitos da inflação e das outras influências exógenas associadas aos vários anos de notificação/pagamento considerados no triângulo de dados.

O modelo probabilístico de Bulmann, Schnieper e Straub é bastante sofisticado em termos das hipóteses que apresenta. No entanto, os seus autores chegaram à conclusão, também através de um estudo de simulação, que o modelo em questão não apresenta, em geral, previsões de melhor qualidade do que o método "chain-ladder". Além disso, é um modelo muito exigente em termos da informação estatística requerida. Para produzir toda a informação estatística necessária à sua utilização é indispensável que as seguradoras tenham bons sistemas de informação.

Finalmente, o método da credibilidade de De Vylder apresenta hipóteses que têm algumas semelhanças com as hipóteses do método de Straub. No entanto, sendo as suas hipóteses mais restritivas, temos que o método da credibilidade de De Vylder se torna mais simples em termos de calculatória, bem como apresenta menos parâmetros a estimar relativamente ao nº de observações disponíveis.

Resta apenas referir, que muitos dos métodos (estocásticos e não estocásticos) analisados neste trabalho apresentam a deficiência de assumir que o padrão de desenvolvimento no tempo dos montantes totais/pagamentos das indemnizações é o mesmo qualquer que seja o ano de ocorrência/notificação considerado. Como vimos ao longo do trabalho, estes métodos podem ainda ser utilizados em situações em que o padrão de desenvolvimento varie com o ano de ocorrência, desde que os dados originais sejam corrigidos de tal maneira que passem a verificar a hipótese da constância dos padrões de desenvolvimento.

7 ANEXOS

ANEXO 1 - QUADROS DE DADOS COMPLETOS NÃO CUMULATIVOS COM COLUNAS PROPORCIONAIS (DE ONDE SÃO RETIRADOS OS TRIÂNGULOS INICIAIS COM BASE NOS QUAIS SÃO GERADOS OS TRIÂNGULOS PARA O ESTUDO DE SIMULAÇÃO)

QUADRO A

	0	1	2	3	4
0	10	40	12	6	.6
1	11	44	13.2	6.6	.66
2	12	48	14.4	7.2	.72
3	13	52	15.6	7.8	.78
4	14	56	16.8	8.4	.84

QUADRO B

	0	1	2	3	4
0	3000	10500	12600	8820	5292
1	3500	12250	14700	10290	6174
2	2000	7000	8400	5880	3528
3	4000	14000	16800	11760	7056
4	5000	17500	21000	14700	8820
5	5500	19250	23100	16170	9702
6	6000	21000	25200	17640	10584
7	7000	24500	29400	20580	12348
8	6300	22050	26460	18522	11113.2

	5	6	7	8
0	3704.4	2963.52	1481.76	592.704
1	4321.8	3457.44	1728.72	691.488
2	2469.6	1975.68	987.84	395.136
3	4939.2	3951.36	1975.68	790.272
4	6174	4939.2	2469.6	987.84
5	6791.4	5433.12	2716.56	1086.62
6	7408.8	5927.04	2963.52	1185.41
7	8643.6	6914.88	3457.44	1382.98
8	7779.24	6223.39	3111.7	1244.68

QUADRO C

	0	1	2	3	4
0	100	40	12	6	.6
1	110	44	13.2	6.6	.66
2	120	48	14.4	7.2	.72
3	130	52	15.6	7.8	.78
4	140	56	16.8	8.4	.84

ANEXO 2 DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS (OBTIDOS COM O QUADRO A) DAS PREVISÕES DOS x_{ij} FUTUROS, DOS Y_i E DOS Y_s FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS x_{ij} FUTUROS

FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.352135E-01
2	0	0	0	.28813	.386575E-01
3	0	0	.574043	.339402	.433282E-01
4	0	2.14149	.677888	.384267	.483672E-01

H = 1 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.408382E-01
2	0	0	0	.332611	.437696E-01
3	0	0	.630407	.370489	.477561E-01
4	0	2.13929	.685616	.396171	.515153E-01

H = 2 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.705915E-01
2	0	0	0	.579921	.077443
3	0	0	1.1753	.669763	.878348E-01
4	0	4.25527	1.3735	.763331	.966933E-01

H = 2 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.822259E-01
2	0	0	0	.663675	.878681E-01
3	0	0	1.28905	.733885	.970765E-01
4	0	4.26019	1.38984	.787735	.103631

H = 3 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.106044
2	0	0	0	.869424	.11579
3	0	0	1.73322	.988037	.1296
4	0	6.39686	2.07796	1.16324	.147796

H = 3 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.12431
2	0	0	0	.997976	.132284
3	0	0	1.88349	1.07277	.143229
4	0	6.4369	2.10074	1.20091	.159369

H = 4 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.14218
2	0	0	0	1.15909	.156964
3	0	0	2.36671	1.34842	.176696
4	0	8.66462	2.78445	1.58519	.200654

H = 4 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.170486
2	0	0	0	1.32349	.183663
3	0	0	2.57723	1.46581	.199597
4	0	8.76158	2.82388	1.63753	.221823

H = 5 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.185006
2	0	0	0	1.50035	.204189
3	0	0	2.99682	1.71665	.229837
4	0	10.7	3.49881	1.95327	.255789

H = 5 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.224445
2	0	0	0	1.7205	.240862
3	0	0	3.25167	1.88005	.263083
4	0	10.944	3.55456	2.0571	.290602

H = 6 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.21963
2	0	0	0	1.8031	.243388
3	0	0	3.50692	2.07046	.270969
4	0	13.1019	4.18218	2.40443	.305236

H = 6 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.273097
2	0	0	0	2.07968	.29482
3	0	0	3.79601	2.26532	.317424
4	0	13.5646	4.27493	2.55937	.359284

H = 7 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.265291
2	0	0	0	2.11836	.290422
3	0	0	4.24908	2.47603	.329632
4	0	15.7605	5.05105	2.91991	.380312

H = 7 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.338529
2	0	0	0	2.41584	.359694
3	0	0	4.55157	2.6523	.393528
4	0	16.606	5.19843	3.09728	.462944

H = 8 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.308404
2	0	0	0	2.41455	.343593
3	0	0	4.82113	2.8251	.392296
4	0	17.8164	5.81211	3.34024	.437014

H = 8 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.44197
2	0	0	0	2.74125	.48518
3	0	0	5.15869	3.02783	.528969
4	0	19.0738	6.06127	3.60185	.610263

H = 9 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.364509
2	0	0	0	2.81673	.41891
3	0	0	5.49294	3.2495	.474824
4	0	20.2894	6.6487	3.78331	.521893

H = 9 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.535541
2	0	0	0	3.31055	.605645
3	0	0	5.84052	3.51779	.652972
4	0	22.3243	7.01861	4.33465	.747695

H = 10 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.408135
2	0	0	0	3.11794	.451535
3	0	0	6.08884	3.63059	.520819
4	0	22.2199	7.36951	4.22402	.600383

H = 10 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	.647325
2	0	0	0	3.64248	.675345
3	0	0	6.44877	3.91183	.740595
4	0	24.7394	7.88954	4.80698	.911909

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.352135E-01	.408382E-01
2	.306033	.356443
3	.848244	.94254
4	2.97768	2.98649

H = 2

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.705915E-01	.822259E-01
2	.613584	.708624
3	1.71499	1.90712
4	5.93456	5.96381

H = 3

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.106044	.12431
2	.924038	1.06971
3	2.52111	2.77274
4	8.96226	9.03507

H = 4

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.14218	.170486
2	1.23269	1.42182
3	3.46059	3.80992
4	12.1288	12.2735

H = 5

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.185006	.224445
2	1.59952	1.8509
3	4.36709	4.81491
4	14.9553	15.3017

H = 6

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.21963	.273097
2	1.92321	2.2403
3	5.14056	5.64579
4	18.3127	18.9389

H = 7

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.265291	.338529
2	2.25667	2.60226
3	6.22994	6.73297
4	22.0069	23.0806

H = 8

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.308404	.44197
2	2.57774	2.96731
3	7.10281	7.67124
4	25.0793	26.7468

H = 9

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.364509	.535541
2	3.02134	3.60638
3	8.15879	8.73656
4	28.5392	31.256

H = 10

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	.408135	.647325
2	3.34092	3.9676
3	9.01806	9.6431
4	31.3662	34.7814

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_s FORNECIDAS
PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS
QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	2.21396	2.2475
6	.80432	.843639
7	.393827	.409135
8	.483672E-01	.515153E-01

H = 2

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	4.39684	4.47079
6	1.61854	1.69707
7	.779225	.810052
8	.966933E-01	.103631

H = 3

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	6.64634	6.76693
6	2.45636	2.55903
7	1.1922	1.23879
8	.147796	.159369

H = 4

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	8.99848	9.20307
6	3.32546	3.47205
7	1.62432	1.69007
8	.200654	.221823

H = 5

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	11.1623	11.5612
6	4.15832	4.37441
7	2.00735	2.13194
8	.255789	.290602

H = 6

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	13.574	14.1992
6	4.95578	5.22675
7	2.46806	2.651
8	.305236	.359284

H = 7

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	16.4122	17.3546
6	6.07336	6.37648
7	3.00398	3.21229
8	.380312	.462944

H = 8

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	18.582	19.9742
6	6.91147	7.34832
7	3.42827	3.73925
8	.437014	.610263

H = 9

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	21.0757	23.1981
6	7.96993	8.55061
7	3.8928	4.50538
8	.521893	.747695

H = 10

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
5	23.2531	25.9146
6	8.81286	9.57763
7	4.36122	5.02105
8	.600383	.911909

ANEXO 3 – DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS (OBTIDOS COM O QUADRO B) DAS PREVISÕES DOS x_{ij} FUTUROS, DOS Y_i E DOS Y_s FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS x_{ij} FUTUROS

FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	270.835
6	0	0	0	458.342	305.251
7	0	0	767.754	577.226	379.067
8	0	655.765	827.299	611.354	387.741

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	40.642
2	0	0	50.8367	26.316
3	0	153.996	81.958	46.7211
4	196.195	185.211	100.303	57.7804
5	217.963	205.506	111.223	63.2731
6	246.736	231.729	125.104	70.0841
7	301.416	277.032	150.151	83.0153
8	304.279	271.702	144.796	78.5091

H = 1 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	272.631
6	0	0	0	468.569	311.165
7	0	0	827.098	616.455	398.988
8	0	645.239	822.095	609.492	387.503

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	43.1957
2	0	0	56.711	28.7212
3	0	160.916	86.4266	49.0947
4	201.607	189.723	104.298	60.1808
5	220.115	207.786	114.461	65.7155
6	251.054	235.466	128.957	72.8346
7	314.234	288.301	157.235	86.6237
8	304.958	273.876	147.444	80.8377

H = 2 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	533.753
6	0	0	0	912.616	617.477
7	0	0	1517.86	1138.49	743.709
8	0	1346.77	1674.57	1233.59	787.81

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	83.7272
2	0	0	99.8175	52.7694
3	0	309.308	165.115	95.4513
4	386.204	380.907	200.979	118.15
5	428.632	422.794	226.172	129.923
6	488.299	468.824	249.528	144.118
7	587.519	566.753	298.69	169.653
8	599.424	553.893	288.607	158.574

H = 2 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	543.078
6	0	0	0	937.212	630.043
7	0	0	1643.84	1218.32	788.952
8	0	1321.59	1658.06	1229.03	785.187

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	88.6451
2	0	0	111.355	57.3578
3	0	320.832	174.309	100.071
4	397.316	389.892	208.905	122.721
5	438.168	429.051	233.791	134.466
6	499.963	476.783	257.966	149.558
7	619.926	588.572	314.738	177.299
8	602.595	557.396	294.996	163.238

H = 3 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	798.95
6	0	0	0	1355.93	902.979
7	0	0	2264.35	1711.53	1118.29
8	0	2009.35	2536.82	1858.49	1178.34

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	125.479
2	0	0	150.017	79.8126
3	0	468.201	246.353	144.264
4	598	569.75	304.329	178.345
5	669.381	633.133	339.371	197.721
6	744.886	708.06	374.1	215.028
7	917.708	851.116	449.466	256.746
8	934.006	832.396	440.596	239.222

H = 3 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	806.155
6	0	0	0	1392.17	918.726
7	0	0	2453.93	1840.56	1188.62
8	0	1988.24	2529.85	1860.07	1177.59

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	134.105
2	0	0	167.914	87.1511
3	0	487.258	260.547	152.553
4	612.202	581.335	315.487	186.459
5	675.215	639.581	348.884	205.879
6	755.137	714.294	385.145	224.052
7	959.944	883.457	472.302	270.629
8	933.642	835.506	448.349	248.85

H = 4 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1071.84
6	0	0	0	1819.05	1227.31
7	0	0	3069.09	2276.74	1507.92
8	0	2710.61	3425.33	2481.75	1593.29

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	168.522
2	0	0	199.972	106.35
3	0	622.387	330.639	193.981
4	786.046	757.07	404.167	237.925
5	889.083	846.557	450.407	264.335
6	994.457	941.418	497.953	290.124
7	1223.25	1138.86	600.237	344.707
8	1225.89	1111.35	583.268	319.971

H = 4 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1079.08
6	0	0	0	1867.93	1248.47
7	0	0	3325.09	2434.38	1593.77
8	0	2662.19	3401.65	2479.7	1589.4

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	179.541
2	0	0	224.35	116.514
3	0	649.55	348.165	204.818
4	804.638	773.868	421.107	249.079
5	892.252	854.683	463.579	275.088
6	1005.62	955.196	514.133	301.867
7	1275.92	1185.73	632.321	361.895
8	1225.12	1117.99	597.11	332.173

H = 5 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1343.09
6	0	0	0	2294.85	1544.03
7	0	0	3855.08	2910.87	1919.89
8	0	3330.5	4210.69	3091.62	1967.64

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	212.705
2	0	0	244.094	134.666
3	0	778.103	409.566	241.705
4	979.847	965.283	511.523	300.952
5	1087.51	1062.72	563.331	334.031
6	1247.46	1202.14	631.858	365.008
7	1520.19	1439.35	760.826	436.803
8	1516.6	1405	734.613	406.528

H = 5 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1365.8
6	0	0	0	2370.74	1579.23
7	0	0	4211.46	3124.2	2043.42
8	0	3321.47	4257.54	3119.9	1991.71

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	229.974
2	0	0	272.83	148.402
3	0	815.522	433.09	257.059
4	1007.99	992.655	533.39	317.961
5	1103.23	1080.36	580.037	351.157
6	1276.02	1222.36	653.748	383.867
7	1600.95	1497.02	804.847	464.109
8	1536.74	1428.89	757.377	429.402

H = 6 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1575.84
6	0	0	0	2746.46	1816.28
7	0	0	4502.16	3379.95	2257.62
8	0	4096.25	5083.96	3700.86	2415.55

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	250.047
2	0	0	294.783	155.515
3	0	946.381	508.304	287.448
4	1169.47	1143.37	614.852	357.109
5	1312.43	1270.69	684.889	395.528
6	1484.79	1424.96	773.485	431.211
7	1788.32	1687.72	929.314	515.767
8	1827.03	1707.04	893.939	488.033

H = 6 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1606.34
6	0	0	0	2844.23	1857.98
7	0	0	4903.5	3642.65	2386.77
8	0	4086.63	5174.67	3735.22	2431.56

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	272.011
2	0	0	325.581	171.15
3	0	996.041	538.958	308.102
4	1212.81	1181.09	639.989	379.407
5	1338.63	1293.96	704.356	418.871
6	1512.99	1454.44	795.575	454.386
7	1874.77	1759.3	976.423	552.149
8	1846.72	1744.02	922.149	519.933

H = 7 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1818.34
6	0	0	0	3180.99	2124.79
7	0	0	5300.15	3947.67	2541.62
8	0	4728.38	5872.24	4272.34	2798.37

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	296.793
2	0	0	326.519	182.19
3	0	1042.49	573.577	334.954
4	1365.31	1290.87	710.769	423.947
5	1525.59	1426.58	786.402	464.795
6	1748.74	1608.59	875.762	507.026
7	2075.21	1905.57	1046.59	599.262
8	2157.1	1933.12	1034.93	568.666

H = 7 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1871.63
6	0	0	0	3316.55	2177.43
7	0	0	5882.4	4303.17	2730.35
8	0	4787.11	6097.47	4385.36	2854.61

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	328.095
2	0	0	362.355	204.071
3	0	1112.98	611.855	364.056
4	1411.32	1343.26	745.878	457.028
5	1549.19	1478.49	813.691	496.862
6	1774.79	1650.81	904.911	540.29
7	2180.08	2011.51	1117.35	649.593
8	2201.4	1998.13	1083.84	617.8

H = 8 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2069.29
6	0	0	0	3644.64	2392.24
7	0	0	5973.13	4522.46	2911.12
8	0	5318.86	6716.38	4878.44	3125.52

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	330.388
2	0	0	360.245	200.118
3	0	1174.66	655.752	381.486
4	1495.47	1410.44	794.476	471.58
5	1676.8	1601.79	888.326	519.705
6	1918.91	1784.58	985.676	579.667
7	2379.01	2182.56	1180.45	694.526
8	2383.4	2177.15	1176.94	649.721

H = 8 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2152
6	0	0	0	3804.06	2470.11
7	0	0	6740.3	4952.86	3154.98
8	0	5435.26	7066	5059.52	3231.55

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	370.233
2	0	0	394.038	225.813
3	0	1251.06	694.018	421.894
4	1565.87	1471.05	825.157	514.193
5	1727.59	1649.52	913.687	561.23
6	1967.73	1836.66	1015.42	625.373
7	2549.68	2328.06	1259.14	771.78
8	2481.63	2259.08	1235.49	721.155

H = 9 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2283.64
6	0	0	0	3972.61	2640.99
7	0	0	6762.02	5076.53	3292.31
8	0	6065.06	7585.91	5590.42	3607.59

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	367.097
2	0	0	398.627	219.013
3	0	1296.11	722.314	427.265
4	1660.14	1595.05	884.189	525.988
5	1855.46	1757.43	982.614	586.385
6	2094.64	1993.94	1121.91	651.556
7	2613.95	2408.93	1332.36	770.476
8	2675.1	2419.02	1317.03	735.478

H = 9 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2350.1
6	0	0	0	4211.24	2739.21
7	0	0	7754.32	5654.86	3566.1
8	0	6211.34	8082.66	5857.7	3739.91

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	422.03
2	0	0	432.126	248.945
3	0	1394.61	764.24	482.838
4	1750.66	1678.05	924.085	586.005
5	1919.57	1823.14	1013.25	649.69
6	2168.3	2066.9	1156.46	725.544
7	2826.09	2600.88	1424.95	872.961
8	2787.72	2562.44	1391.8	845.02

H = 10 DQM(MCL)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2516.85
6	0	0	0	4445.15	2921.49
7	0	0	7479.86	5605.41	3686.87
8	0	6765.93	8378.81	6186.85	3861.19

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	395.763
2	0	0	415.688	234.155
3	0	1342.59	761.18	450.482
4	1799.14	1690.25	949.631	564.311
5	2003.63	1852.2	1038.56	621.949
6	2313.29	2089.92	1183.25	686.392
7	2852.51	2574.07	1434.4	830.257
8	2956.38	2640.32	1438.81	797.908

H = 10 DQM(MMQDV)

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2619.78
6	0	0	0	4709.15	3050.21
7	0	0	8640.8	6284.91	4069.04
8	0	7020.32	9016.46	6523.55	4055.36

	5	6	7	8
0	0	0	0	0
1	0	0	0	456.396
2	0	0	450.789	264.21
3	0	1459.8	815.7	504.204
4	1909.01	1803.45	1001.53	627.738
5	2080.56	1946.39	1083	688.195
6	2399.12	2185.97	1225.71	753.45
7	3102	2791.64	1551.75	942.827
8	3113.68	2802.53	1530.04	912.937

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	40.642	43.1957
2	66.7262	75.712
3	213.225	231.481
4	374.536	398.802
5	597.676	619.567
6	1042.65	1094.16
7	1956.43	2165.71
8	2754.42	2764.87

H = 2

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	83.7272	88.6451
2	130.297	147.865
3	431.004	464.266
4	761.382	809.56
5	1217.57	1277.97
6	2105.44	2216.7
7	3871.45	4315.41
8	5602.78	5604.28

H = 3

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	125.479	134.105
2	196.767	223.89
3	643.915	698.812
4	1143.83	1212.12
5	1813.56	1881.35
6	3077.92	3228.93
7	5789.25	6464.3
8	8432.68	8473.74

H = 4

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	168.522	179.541
2	261.725	298.735
3	863.462	935.193
4	1511.01	1609.32
5	2438.89	2523.26
6	4163.22	4379.09
7	7812.82	8693.2
8	11323.6	11334.9

H = 5

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	212.705	229.974
2	319.601	364.098
3	1069.48	1159.53
4	1934.39	2054.1
5	3055.13	3167.15
6	5323.33	5598.6
7	9953.65	11088
8	13988.6	14197.8

H = 6

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	250.047	272.011
2	379.181	426.994
3	1322.54	1441.49
4	2316.7	2472.29
5	3653.22	3804.46
6	6344.8	6663.27
7	11593.7	12871.6
8	17083.8	17337.1

H = 7

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	296.793	328.095
2	427	485.45
3	1465.53	1615.41
4	2686.09	2876.11
5	4235.07	4431.46
6	7404.26	7749.06
7	13392.4	15083.3
8	19789.6	20377.7

H = 8

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	330.388	370.233
2	463.503	521.299
3	1668.67	1829.69
4	2948.57	3146.78
5	4773.61	5004.1
6	8342.98	8758.15
7	15506.7	17641.2
8	22431.8	23356.8

H = 9

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	367.097	422.03
2	511.088	568.85
3	1847.3	2036.88
4	3282.46	3539.72
5	5252.31	5475.96
6	9202.96	9753.65
7	17394.3	19971.8
8	25618.4	26803.5

H = 10

i	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
1	395.763	456.396
2	535.017	593.776
3	1918.07	2141.54
4	3591.6	3893.81
5	5735.4	6031.78
6	10252	10840.4
7	19500.3	22455.4
8	28417.7	29933.5

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_s FORNECIDAS

PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE DE VYLDER

H = 1

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	1137.88	1214.1
10	1173.44	1232.86
11	888.046	923.329
12	638.584	665.071
13	487.179	509.5
14	345.199	360.511
15	176.771	183.263
16	78.5091	80.8377

H = 2

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	2274.27	2432.47
10	2347.89	2473.45
11	1781.61	1858.61
12	1284.73	1347.15
13	973.605	1025.06
14	698.65	729.641
15	348.925	363.566
16	158.574	163.238

H = 3

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	3368.28	3612.28
10	3493.59	3684.65
11	2645.39	2763.31
12	1907.7	1987.48
13	1473.29	1539.2
14	1044.16	1089.68
15	532.299	555.018
16	239.222	248.85

H = 4

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	4579.66	4889.95
10	4735.12	4989.72
11	3553.28	3717.58
12	2575.06	2689.29
13	1957.3	2056.06
14	1398.82	1463.3
15	708.043	740.003
16	319.971	332.173

H = 5

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	5764.8	6198.88
10	5961.34	6332.99
11	4508.77	4729.53
12	3273.08	3429.65
13	2489.99	2620.61
14	1774.68	1865.31
15	891.998	939.145
16	406.528	429.402

H = 6

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	6862.7	7353.22
10	7063.66	7488.81
11	5366.49	5600.42
12	3920.96	4085.96
13	3000.07	3147.94
14	2153.22	2268.49
15	1084.35	1142.74
16	488.033	519.933

H = 7

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	7958.7	8627.51
10	8204.44	8848.96
11	6225.68	6567.9
12	4526.25	4755.95
13	3449.07	3663.14
14	2443.67	2607.22
15	1251.72	1340.19
16	568.666	617.8

H = 8

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	9109.72	10047.9
10	9402.36	10291.2
11	7069.03	7559.68
12	5102.21	5441.52
13	3904.64	4190.77
14	2768.22	2969.76
15	1433.16	1553.32
16	649.721	721.155

H = 9

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	10187	11268.8
10	10451.8	11557.7
11	7886.66	8500.5
12	5645.95	6040.25
13	4245.88	4607.89
14	3074.82	3352.89
15	1604.59	1750.25
16	735.478	845.02

H = 10

s	DQM(MCL)	DQM(MMQDV)
9	11384	12556
10	11700.4	12967.6
11	8758.58	9451.6
12	6186.6	6648.64
13	4669.72	5049.42
14	3332.32	3637.08
15	1740.35	1900.81
16	797.908	912.937

ANEXO 4 DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS (OBTIDOS COM O QUADRO A E COM P_i 1,2 K_i (i 0,1, .4)) DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN LADDER" E PELO MÉTODO "CAPE COD"

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO "CAPE COD"

H = 1

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.352135E-01	.305385E-01
2	.306033	.224568
3	.848244	.434545
4	2.97768	1.06738

H = 2

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.705915E-01	.613081E-01
2	.613584	.441291
3	1.71499	.870979
4	5.93456	2.12794

H = 3

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.106044	.914342E-01
2	.924038	.665094
3	2.52111	1.32103
4	8.96226	3.22552

H = 4

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.14218	.122966
2	1.23269	.886775
3	3.46059	1.7772
4	12.1288	4.25895

H = 5

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.185006	.159172
2	1.59952	1.13551
3	4.36709	2.20657
4	14.9553	5.29104

H = 6

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.21963	.187167
2	1.92321	1.36741
3	5.14056	2.60979
4	18.3127	6.46809

H = 7

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.265291	.226193
2	2.25667	1.60714
3	6.22994	3.09976
4	22.0069	7.44062

H = 8

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.308404	.262816
2	2.57774	1.81513
3	7.10281	3.51802
4	25.0793	8.5487

H = 9

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.364509	.310828
2	3.02134	2.05457
3	8.15879	3.94166
4	28.5392	9.42008

H = 10

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	.408135	.33949
2	3.34092	2.26414
3	9.01806	4.32431
4	31.3662	10.3845

ANEXO 5 - DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS (OBTIDOS COM O QUADRO B E COM $P_i = 1.2\ K_i$ $(i = 0,1,\ldots,8)$) DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN LADDER" E PELO MÉTODO "CAPE COD"

DESVIOS QUADRÁTICOS MÉDIOS DAS PREVISÕES DOS Y_i FORNECIDAS PELO MÉTODO "CHAIN-LADDER" E PELO MÉTODO "CAPE COD"

H = 1

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	40.642	38.4203
2	66.7262	44.1601
3	213.225	165.149
4	374.536	272.202
5	597.676	371.866
6	1042.65	512.012
7	1956.43	709.698
8	2754.42	669.687

H = 2

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	83.7272	78.728
2	130.297	88.3612
3	431.004	339.07
4	761.382	552.613
5	1217.57	757.204
6	2105.44	1022.69
7	3871.45	1417.14
8	5602.78	1326.86

H = 3

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	125.479	118.475
2	196.767	133.82
3	643.915	506.34
4	1143.83	834.217
5	1813.56	1110.83
6	3077.92	1501.2
7	5789.25	2102.78
8	8432.68	1975.33

H = 4

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	168.522	158.713
2	261.725	178.649
3	863.462	675.442
4	1511.01	1107.07
5	2438.89	1513.01
6	4163.22	2016.78
7	7812.82	2807.31
8	11323.6	2649.65

H = 5

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	212.705	199.394
2	319.601	220.202
3	1069.48	844.893
4	1934.39	1387.69
5	3055.13	1904.47
6	5323.33	2546.49
7	9953.65	3507.56
8	13988.6	3300.19

H = 6

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	250.047	234.554
2	379.181	267.511
3	1322.54	1011.82
4	2316.7	1671.17
5	3653.22	2251.48
6	6344.8	3005.73
7	11593.7	4137.31
8	17083.8	3946.43

H = 7

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	296.793	275.228
2	427	306.837
3	1465.53	1133.31
4	2686.09	1907.94
5	4235.07	2569.24
6	7404.26	3470.2
7	13392.4	4738.41
8	19789.6	4496.27

H = 8

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	330.388	308.518
2	463.503	341.188
3	1668.67	1249.01
4	2948.57	2084.46
5	4773.61	2821.72
6	8342.98	3837.02
7	15506.7	5352.98
8	22431.8	4983.56

H = 9

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	367.097	341.695
2	511.088	383.889
3	1847.3	1389.54
4	3282.46	2248.27
5	5252.31	3087.02
6	9202.96	4271.06
7	17394.3	5914.83
8	25618.4	5621.69

H = 10

i	DQM(MCL)	DQM(MCC)
1	395.763	363.007
2	535.017	402.23
3	1918.07	1442.5
4	3591.6	2433.85
5	5735.4	3350.1
6	10252	4604.03
7	19500.3	6485.04
8	28417.7	6164.73

BIBLIOGRAFIA

Beard, R. E.; Pentikäinen, T.; Pesonen, E. (1984)
Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance.
Chapman and Hall, London, New York

Benjamin, S.; Eagles, L. M. (1986)
"Reserves in Lloyd's and the London Market"
Journal of the Institute of Actuaries, vol. 113, part II, pag. 197-238

Bühlmann, H. (1983)
"Chain Ladder, Cape Cod and Complementary Loss Ratio"
International Summer School 1983, não publicado

Bühlmann, H.; Schnieper, R.; Straub, E. (1980)
"Claims Reserves in Casualty Insurance Based on a Probabilistic Model"
Bulletin of the Association of Swiss Actuaries, pag. 21-45

Bühlmann, H.; Straub, E. (1970)
"Credibility for Loss Ratios"
Tradução de Brooks, C. E., Zurique, de "Glaubwurdigkeit fur Schadensatze", Mitteilungen Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, band 70, pag. 111-133

Craighead, D. H. (1986)
"Techniques of Reserving - The London Market"
Journal of the Institute of Actuaries, vol. 113, part. III, pag. 411-457

De Vylder, F. (1978)
"Parameter Estimation in Credibility Theory"
Astin Bulletin, vol. X, part 1, pag. 99-112

De Vylder, F. (1982)
"Estimation of IBNR Claims by Credibility"
Insurance: Mathematics and Economics, vol. 1, nº 1, pag. 35-40

Goovaerts, M. J.; Hoogstad, W. J. (1987)
Credibility Theory
Surveys of Actuarial Studies nº 4, Nationale-Nederlanden N. V., Rotterdam

Hadidi, N. (1985)
"A Note on De Vylder's Method of Estimation of IBNR Claims"
Insurance: Mathematics and Economics, vol. 4, nº , pag. 263-266

Kahane, Y. (1989)
"A Modern Approach to Loss Reserving in Long-Tail Lines. The Case of Automobile Insurance"
Publicado em XXIth Astin Colloquium, New York, pag. 175-197

Lemaire, J. (1985)
Automobile Insurance
Huebner International Series on Risk, Insurance and Economic Security, Kluwer-Nijhoff Publishing

Mood, A. M.; Graybill, F.; Boes, D. C. (1974)
Introduction to the Theory of Statistics
McGraw-Hill, New York

Murteira, B. J. F. (1979)
Probabilidades e Estatistica
vol. I, Editora McGraw-Hill de Portugal, Lisboa

Murteira, B. J. F. (1980)
Probabilidades e Estatistica
vol. II, Editora McGraw-Hill de Portugal, Lisboa

Norberg, R. (1986)
"A Contribution to Modelling of IBNR Claims"
Scandinaviam Actuarial Journal, pag. 155-203

Reinsurance Association of America (1987)
"Loss Development Study 1987 Edition"
Publicado em XXIth Astin Colloquium, New York, pag. 525-583

Reis, A. D. E. dos (1987)
Teoria da Credibilidade . Uma Síntese.
Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Economia, Universidade Técnica de Lisboa

Simões, O. A. (1988)
Resseguro. Um Contributo Para a Determinação dos Limites Optimos de Retenção da Seguradora Directa
Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Economia, Universidade Tecnica de Lisboa

Stiers, D. (1989)
"Applications des Methodes d'Evaluation des Reserves"
Publicado em XXIth Astin Colloquium, New York, pag. 441-463

Straub, E. (1972)
"On the Calculation of IBNR Reserves"
Publicado em Prizewinning Papers in the Boleslaw-Monic-Fund Competition 1971, Nederlandse Reassurantie Groep N. V., Amsterdam, pag. 123-131

Straub, E. (1978)
"IBNR - A Difficult Marriage Between Practice and Theory"
Publicado em IBNR, Proceedings of the First Meeting of the Contact-group "Actuarial Sciences", editado por De Vylder, F. e Goovaerts, M. J., pag. 29-36

Straub, E. (1988)
Non-Life Insurance Mathematics
Springer-Verlag; Association of Swiss Actuaries

Sundt, B. (1989)
"On Prediction of Unsettled Claims in Non-Life Insurance"
Storebrand Insurance Co. Ltd.

Taylor, G. C. (1977)
"Separation of Inflation and Other Effects From the Distribution of Non-Life Insurance Claim Delays"
Astin Bulletin, vol. IX, parts 1+2, pag. 219-230

Taylor, G. C. (1978)
"Testing Goodness-of-Fit of an Estimated Run-off Triangle"
Astin Bulletin, vol. X, part 1, pag. 78-86

Taylor, G. C. (1986)
Claims Reserving in Non-Life Insurance
North-Holland

Van Eeghen, J. (1981)
Loss Reserving Methods
Surveys of Actuarial Studies nº 1, Nationale-Nederlanden N. V., Rotterdam

Verbeek, H. G. (1972)
"An Approach to the Analysis of Claims Experience in Motor Liability Excess of Loss Reinsurance"
Astin Bulletin, vol. VI, part 3, pag. 195-202