UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

DISSERTAÇÃO

Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxilio do *software* GeoGebra

Anabela Fernandes Ferreira Candeias

Dissertação orientada pelo Prof. Doutor João Pedro da Ponte

CICLO DE ESTUDOS CONDUCENTE AO GRAU DE MESTRE
EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didáctica da Matemática

2010

Resumo

O conceito de função acompanha os alunos durante todo o seu percurso escolar, evidenciando-se muitas dificuldades na sua aprendizagem. Com este estudo, no qual sou professora e investigadora, pretendo analisar de que forma tarefas de investigação e exploração, recorrendo ao software GeoGebra, podem contribuir para a aprendizagem das funções e para o seu uso na interpretação de situações e na resolução de problemas. O estudo decorreu no contexto de uma unidade de ensino, leccionada por mim, que se compunha de cinco tarefas de exploração/investigação. Em três das referidas tarefas, usou-se o GeoGebra. A investigação seguiu uma metodologia qualitativa, através de estudos de caso de pares de alunos. A recolha de dados envolveu a realização de duas entrevistas, uma no início e outra no final do estudo, aos pares de alunos objecto de estudos de caso, e a análise dos registos dos alunos na resolução das tarefas, bem como da discussão realizada em grande grupo. Foram ainda analisadas as fichas de avaliação de que foram alvo, no final do estudo.

Os resultados do estudo mostram que os alunos apresentam dificuldades na apreensão e aplicação do conceito de função mas que podem ser minimizadas quando são usadas várias representações. Mostra, também, que os alunos sentem dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as várias representações. É na ligação entre fórmulas, gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, como na interpretação de gráficos e na manipulação de símbolos, que residem as dificuldades sentidas. Estas dificuldades são atenuadas com a realização de tarefas que envolvem os diversos sistemas de representação. As tarefas usadas permitem aos alunos uma abrangência de formas de representar a mesma situação, uma vez que a compreensão do conceito só é possível quando se alcança a coordenação das várias representações. A utilização de um software constituiu um factor motivador para as aulas de Matemática. No entanto, a sua utilização fica aquém do esperado, preferindo os alunos utilizar, sempre que podem, processos de raciocínio numérico.

Palavras-chave: Funções, Aprendizagem das Funções, Competência algébrica, Actividades de investigação matemática.

Abstract

The concept of function accompanies students throughout all their school years but they experience many difficulties in learning it. With this study, in which I am a teacher and researcher, I analyze how investigation and exploration tasks, using the software GeoGebra, contributes to the learning of functions and their use in interpreting situations and solving problems. The study was carried out in the context of a teaching unit, taught by me, consisting of five exploration/investigation tasks. In three of these tasks, I used GeoGebra. The investigation followed a qualitative methodology, through case studies of pairs of students. Data collection involved two interviews, one in the beginning and one at the end of the study, of pairs of students subject of case studies, the records done students while solving tasks, as well as large group discussion held. I also analyzed the evaluation sheets that were administered at the end of the study.

The study results show that students have difficulties in understanding and applying the concept of function that, however, can be minimized with the introduction of multiple representations. It also shows that students find it difficult to deal with formal algebraic symbols and to relate the various representations. It is in the connection between formulas, graphs, diagrams and verbal expressions of relationships, such as interpreting graphs and manipulating symbols, which lay the difficulties. These difficulties can be overcome using tasks involving various systems of representation. This type of work enables students to represent the same situation in multiple ways; therefore they understand better the concept. The use of software was a motivating factor for math classes. However, it seems that students prefer to use processes of numerical reasoning, and less the representation of functions with GeoGebra.

Key words: Functions, Function learning, Functional reasoning, Investigation activities.

Agradecimentos

- Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela paciência, disponibilidade, orientação e ensinamento durante o Curso de Mestrado, quer como professor quer como orientador.
- À Guiomar, colega e grande amiga, que me ajudou a superar as horas de maior dificuldade.
- Aos meus colegas da escola, em especial ao Conselho Directivo, pela disponibilidade para a realização deste estudo.
- Aos alunos envolvidos no estudo que se mostraram, desde logo, motivados e prontos a trabalhar.
- Aos meus pais, Maria Assunção e José, e aos meus sogros, Beatriz e Leonel, pelo apoio e ajuda durante a realização deste trabalho.
- Ao Nuno e ao Afonso, que são a alegria da minha vida.

Índice

Índice de quadros

Índice de figuras

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo apresenta as razões de natureza pessoal e profissional que motivaram o presente estudo sobre a aprendizagem do conceito de função, descreve o enquadramento curricular deste conceito e enuncia o problema e questões de investigação.

1.1. Motivação pessoal

Desde os meus tempos de estudante, que a Matemática é para mim muito especial. Dá-me gosto estudá-la, como ciência exacta e rigorosa. De entre os seus tópicos, o que sempre me atraiu mais foi o das funções porque permite trabalhar com diferentes representações de uma mesma situação e estabelecer conexões entre elas.

Como professora questiono-me frequentemente sobre qual a melhor abordagem, a melhor metodologia, a melhor forma de ensinar Matemática aos meus alunos. Alguns desinteressam-se e deixam de investir no seu estudo, muitas vezes logo no início de um novo tema. Levá-los a ter uma atitude positiva perante os tópicos que lhes procuro ensinar, é uma das minhas preocupações. Tenho também a preocupação de lhes mostrar ligações entre a Matemática e a vida do dia-a-dia, procurando apresentar situações práticas em que reconheçam o uso desta disciplina e que contribuam para a sua aprendizagem. As funções são, justamente, um dos conceitos mais importantes para esse efeito.

Para além de tentar motivar os alunos com este tópico, tenho também presente que o conceito de função acompanha os alunos durante todo o seu percurso escolar. Como destacam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o conceito de função tem uma importância particular por assumir um papel unificador. De facto, as funções surgem ao longo de todo o currículo, nomeadamente: (i) na Aritmética, como operações entre números, onde a um par ordenado corresponde um número bem determinado; (ii) na Geometria, relacionando conjuntos de pontos com as suas imagens através de transformações geométricas; (iii) no Cálculo de Probabilidades, relacionando os acontecimentos com as respectivas probabilidades; e (iv) em Álgebra como relações entre variáveis que representam grandezas. Também o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) valoriza o conceito de função como ideia unificadora, apresentando como competência matemática a desenvolver em todos os ciclos "[a] aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos" (ME-DEB, 2001, p. 66).

No entanto, os alunos mostram sentir muitas dificuldades na aprendizagem das funções. Estas dificuldades começam a surgir na compreensão do conceito, quando este é introduzido. Frequentemente, os alunos confundem objecto e imagem, não conseguindo determinar um em função do outro. Depois, com as funções apresentadas como relação entre duas variáveis, os alunos tendem a identificar uma função com um dos processos usados para as representar. Com frequência, não mostram flexibilidade em passar de uma representação para outra. Mostram igualmente dificuldade em interpretar as situações que lhe são apresentadas em termos da linguagem das funções. Por fim, os alunos demonstram, também, dificuldade em trabalhar com gráficos cartesianos, especificamente na identificação e marcação de pontos. Estas dificuldades poderão ser contrariadas com a utilização de um software que os liberte das tarefas rotineiras de representação, permitindo-lhes que se possam concentrar nas condições do enunciado, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados.

Durante o ano curricular do mestrado, trabalhámos com alguns softwares matemáticos dos quais um me suscitou um interesse especial, o GeoGebra. Trata-se de um software interactivo de Matemática dinâmica, concebido especialmente para o ensino da Álgebra e da Geometria (Hohenwarter & Jones, 2007). Nos últimos anos os ambientes de Geometria dinâmica e de Álgebra computacional têm influenciado bastante a educação matemática mas têm sido utilizados como duas ferramentas distintas, não relacionadas (Hohenwarter, 2004). O GeoGebra vem permitir a abordagem conjunta destes dois ambientes numa única ferramenta, o que constitui uma das suas grandes vantagens. O programa permite apresentar, em simultâneo, duas representações diferentes de um mesmo objecto, que interagem entre si – a expressão algébrica e a respectiva representação gráfica – e, além disso, é fácil de utilizar (Hohenwarter & Jones, 2007).

A minha decisão de trabalhar com este software deve-se ao facto de considerar que apela à participação activa dos alunos, favorecendo a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos e levando-os a melhorar a sua relação com a Matemática. Considero, também, que o computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, oferecendo múltiplas representações e facilitando a transição entre elas, permitindo a interactividade com objectos matemáticos e uma melhor visualização dos conceitos, e incentivando a formulação de conjecturas. Além disso, as tecnologias, quando usadas como meio e não como fim, adquirem um papel motivador e potencializador de aprendizagens.

Usualmente, quando inicio um novo tópico, faço-o com uma actividade introdutória, onde proponho tarefas que permitem ao aluno fazer uma primeira abordagem, intuitiva e informal, dos novos conceitos. Estas tarefas nem sempre se encontram no manual adoptado, sendo necessário fazer uma pesquisa de modo a encontrar bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos. São, geralmente, realizadas em grupos de dois alunos de modo a fomentar a discussão entre os elementos do grupo durante a sua realização ou entre grupos, quando esta termina. Tento proporcionar momentos de reflexão e de discussão, assumindo que "não é tanto a partir das actividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas actividades práticas" (Ponte, 2005, p. 15). É bastante reconfortante ver o empenho com que os alunos se envolvem nestas actividades, apesar de ser solicitada frequentemente para esclarecer dúvidas. Em vez de lhes dar a resposta, como é a sua pretensão, pergunto se já discutiram entre eles e, mediante o que me dizem, questiono-os de modo a direccionar a sua linha de pensamento.

Deste modo, irei desenvolver uma unidade de ensino que se baseia, predominantemente, na utilização de tarefas de investigação e exploração, tendo por base o uso do software GeoGebra, para além de exercícios e problemas. Nestas actividades, os alunos podem explorar situações abertas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar oralmente ou por escrito as suas conclusões.

1.2. Orientações curriculares para o ensino das funções

O conceito de função é considerado como um dos mais importantes dentro da Matemática e resultou de um longo desenvolvimento do pensamento matemático. Pensa-se que foi Nicolau de Oresme (~1323-1382) quem primeiro usou um gráfico, para representar o tempo, numa direcção, e a velocidade de um móvel, noutra. Apenas no século XVII o conceito de função adquire grande destaque com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. A palavra “função” parece ter sido introduzida por Leibniz (1646-1716) em 1673, que também introduziu os termos “constante”, “variável” e “parâmetro” (Ponte, 1992). Euler (1707-1783) foi o primeiro a adoptar a expressão $f(x)$ para o valor da função. Actualmente, na Matemática escolar usa-se como definição de função dada em 1837 por Dirichelet:

> Uma função $f : A \to B$, consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto chegada B e uma regra que associa a cada elemento x de A (objecto) um só elemento y de B (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em A com valores em B (ME, 1997, p. 13).

O desenvolvimento da Matemática no século XX e o seu uso cada vez maior noutras ciências e nas tecnologias contribuíram para que o conceito de função ganhasse uma importância fundamental.

Em Álgebra e Geometria Analítica, o termo *função afim* designa uma função polinomial do 1.º grau de com uma variável. Uma função linear admite uma expressão geral explícita da forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais. Nesta expressão, as quatro letras utilizadas assumem papéis distintos: x é o argumento da função (variável independente), y é o valor que a função toma para cada argumento (variável dependente), a é o declive e b a ordenada na origem. No caso particular em que $b = 0$, esta relação tem a forma $y = ax$, situação que traduz uma proporcionalidade directa. Nesta relação, a (muitas vezes designado por k) é a constante de proporcionalidade directa – ou um parâmetro, se considerarmos a família de funções respectiva. Por outro lado, esta expressão pode ser entendida como a equação reduzida das rectas não verticais que contêm a origem do referencial e têm declive k. Quando existe uma dependência linear entre duas variáveis x e y, a modificação dos valores da variável independente implica uma modificação nos valores da variável dependente, de forma constante.

Matos (2007) refere que a interpretação das variáveis numa relação funcional envolve as seguintes capacidades:

> (i) reconhecer a correspondência entre quantidades, independentemente do tipo de representação que é usado; (ii) determinar do valor da variável independente dado o valor da variável dependente; (iii) determinar do valor da variável dependente dado o valor da variável independente; (iv) reconhecer a variação conjunta das variáveis que intervêm numa relação, qualquer que seja a sua forma de representação; (v) determinar os intervalos de variação de uma das variáveis quando se conhecem os da outra; e (vi) expressar uma relação funcional de forma tabular, gráfica e/ou analítica, com base nos dados de um problema" (p. 17).

De acordo com o *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* que acompanha o Programa de Matemática do 2.º ciclo ainda em vigor, "os alunos quando chegam ao 6.º ano, já utilizaram muitas vezes raciocínios de proporcionalidade directa" (ME, 1991, p. 31). O mesmo documento indica que os alunos devem realizar actividades, analisar situações diversificadas da vida real, discutir exemplos e contra-exemplos e encontrar analogias, com o objectivo de construir o conceito de proporcionalidade. Este conceito é um dos mais importantes a adquirir e também onde os alunos manifestam mais dificuldades. Isto mesmo é salientado pelo ME (1991) que refere que estas dificuldades poderão ficar a dever-se ao facto da "razão ser fraccionária, ou porque confundem inconscientemente multiplicação com adição, ou porque vêem imediatamente como directamente proporcionais duas grandezas com o mesmo sentido de variação" (p. 17).

Pelo seu lado, o *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* para o 3.º ciclo (ME, 1991) indica que no 7.º ano de escolaridade existe um reforço das aprendizagens relacionadas com o conceito de proporcionalidade, o qual dedica algum tempo ao estudo de situações em que, em geral, se apresentam sobre a forma verbal, tabular ou gráfica, onde é pedido aos alunos que reconheçam se representam ou não situações de proporcionalidade directa. É durante este estudo que se começa a construir, ainda que intuitivamente, o conceito de função de proporcionalidade directa.

No 8.º ano, os conceitos e linguagem usados no estudo do tópico "Funções" assentam na "ideia intuitiva de correspondência, já trabalhada na proporcionalidade directa” (ME, 1991, p. 33). É durante este estudo que se faz a ligação fundamental entre o conceito de proporcionalidade já anteriormente estudado e o conceito de função, sendo esta ligação traduzida pelo estudo da função de proporcionalidade da forma $x \mapsto kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade. A tradução gráfica da proporcionalidade directa permite que os alunos, através da visualização de situações já conhecidas, relacionem entre si duas linguagens, a analítica e a gráfica.

Um documento curricular mais recente, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME, 2001), refere como objectivo específico do 3.º ciclo, “a compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis” (p. 67). Para isso, apresenta como objectivo ao longo de todos os ciclos, que os alunos deverão desenvolver a

> Aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos (p. 66).

Finalmente, de acordo com o novo programa de Matemática do ensino básico,

> A função é estudada essencialmente como relação entre variáveis embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. Deve recorrer-se às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações. As funções cujo estudo se propõe (linear, afim (…) devem ser exploradas como ferramentas de modelação em situações diversas (Ponte et al., 2007, p. 56).

Este programa propõe que os alunos compreendam o conceito de função e dele façam uso quando interpretam e resolvem problemas. Indica, ainda, que os alunos devem contactar com as diferentes representações, nomeadamente a representação algébrica, gráfica e tabular, recorrendo a elas para facilitar a resolução das situações que lhes são propostas. Pretende-se que os alunos estudem as funções afim e linear, onde estão inseridas as funções de proporcionalidade directa, representando-as e compreendendo a influência da variação dos parâmetros. Este estudo poderá ser realizado através do uso de um software, como o GeoGebra.

Estas orientações são semelhantes às defendidas por exemplo, pelo NCTM. Assim, na norma relativa ao estudo da Álgebra, e em relação ao estudo das funções, os *Princípios e Normas* refere que:

> Nos 2.º e 3.º ciclos, os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada forma de representação, consoante os objectos em causa. À medida que trabalham com representações múltiplas de funções, incluindo numéricas, gráficas e simbólicas, irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções (NCTM, 2007, p. 40).

Este documento acrescenta que do 6.º ao 8.º anos os alunos "deverão resolver problemas nos quais usem tabelas, gráficos, palavras e expressões simbólicas para representar e analisar funções e padrões de variação" (NCTM, 2007, p. 263) e sugere, como exemplo e forma de exploração, o seguinte problema:

> O Carlos viu dois anúncios de duas companhias de telemóveis. A "Contacto" oferecia um serviço telefónico com uma mensalidade de 20 euros, mais 0,10 euros por cada minuto de chamadas. A "Fala-barato" não possuía nenhuma mensalidade, embora cobrasse 0,45 euros por minuto. Ambas as companhias usam uma tecnologia que permite cobrar o tempo exacto de utilização do telefone; não "arredondam"o tempo ao minuto mais próximo, como outras companhias concorrentes fazem. Compara os preços praticados pelas companhias, relativamente ao tempo de chamadas feitas durante um mês (NCTM, 2007, p. 263).

Em relação ao uso da tecnologia, e tendo em atenção que nos últimos anos se tem vindo a assistir a um aumento gradual do uso das ferramentas tecnológicas no ensino, os documentos oficiais emanados pelo Ministério da Educação em Portugal são bastante claros no apelo que fazem à sua utilização na sala de aula. Assim, por exemplo, o novo programa de Matemática para o ensino básico (Ponte et al., 2007) refere:

> Deve tirar-se partido das possibilidades de experimentação que os computadores oferecem nos domínios geométrico e numérico (…) permite que os alunos se concentrem nos aspectos estratégicos do pensamento matemático (p. 62).

> Usar as TIC na resolução de problemas e nas actividades de exploração e investigação (p. 63).

Para O NCTM, a tecnologia (em particular os computadores) surge como um dos *princípios* para o ensino da Matemática: “A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática” e “influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” permitindo que estes se concentrem “nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas” (NCTM, 2007, p. 26).

No entanto, não se deve perder de vista que a utilização eficaz das tecnologias depende do professor. Qualquer tecnologia pode ser usada de modo adequado ou não. Os professores deverão usar a tecnologia de modo a facultar aos alunos as mais variadas oportunidades de aprendizagem, tomando decisões que afectam as aprendizagens dos alunos de forma significativa.

Deste modo, também os documentos de orientação curricular sugerem que o uso de softwares em conjunto com tarefas de carácter exploratório poderá ser uma das hipóteses para ultrapassar as dificuldades que os alunos mostram sentir ao longo dos tempos. No entanto, outras tarefas terão também se ter o seu papel, como “a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente, sem perder de vista a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina” (Ponte et al., 2007, p. 56).

1.3. Objectivos e questões de investigação

Dada a importância do tópico “Funções” e dadas as dificuldades sentidas pelos alunos neste tema, pareceu-me pertinente elaborar uma unidade de ensino para o 8.º ano de escolaridade que engloba “Conceito de função e de gráfico de uma função”, “Função de proporcionalidade directa” e “Funções linear e afim”. O objectivo desta investigação é saber de que forma a realização de tarefas de investigação e exploração, recorrendo ao GeoGebra, contribui para a aprendizagem das funções e para o seu uso na interpretação de situações e resolução de problemas. Para isso, formulei como questão específica de investigação saber *Que capacidades adquirem os alunos após o estudo das funções, com a utilização do programa GeoGebra, nomeadamente encarando as funções como relações entre variáveis e nas suas múltiplas representações.* Ou seja:

(i) Que compreensão evidenciam os alunos do conceito de função?

(ii) São capazes de representar graficamente uma função linear e uma função afim dadas algebricamente? Que dificuldades revelam?

(iii) São capazes de representar algebricamente uma função linear e uma função afim dadas graficamente? Que dificuldades revelam?

(iv) Têm facilidade/flexibilidade em passar de uma de representação para outra (verbal, gráfica, simbólica e tabular)? Que dificuldades revelam?

(v) Que uso fizeram do GeoGebra? Que domínio conseguiram deste software? Que vantagens e/ou problemas trouxe o uso deste software para a aprendizagem deste tema por parte dos alunos?

Capítulo 2

Aprendizagem das funções e sistemas de representação

Neste capítulo passo em revista diversos problemas relativos à aprendizagem das funções. Seguidamente, analiso os sistemas de representação verbal, gráfica, simbólica e tabular, bem como as dificuldades sentidas pelos alunos em passar de uma representação para outra.

2.1. Aprendizagem das funções

2.1.1. Dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções

De um modo geral, os alunos apresentam dificuldades ao trabalharem com as funções. São várias as investigações que mostram que os alunos sentem dificuldades na compreensão do conceito de função, em cada uma das suas representações e na passagem de uma representação para outra. Por exemplo, Sfard (1991) salienta a tendência para os alunos identificarem o conceito de função com uma das suas representações. Ponte (1992) considera que a maioria dos alunos sente muitas dificuldades no pensamento abstracto, em particular no trabalho com gráficos cartesianos, recorrendo frequentemente a estratégias e processos de raciocínio numéricos. Para Sierpinska (1992), os alunos têm dificuldades quando pretendem calcular o objecto de uma dada imagem e vice-versa. Relacionado com este facto, Domingos (1994) refere "que os alunos crêem que se a cada valor de x corresponde apenas um valor de y então o contrário também deve ser verdade" (p. 34). Outra dificuldade manifestada pelos alunos diz respeito à identificação da variável ou variáveis envolvidas. Este autor refere que "as variáveis são os objectos das funções, são os dados, quer concretos, quer abstractos" (p. 33). O conceito de variável é fundamental para compreender as relações funcionais e representações gráficas, contribuindo para a compreensão das funções.

São múltiplas as explicações que têm sido dadas para estas dificuldades. Por exemplo, Para Willoughby (1997), o facto de, tradicionalmente, se iniciar o estudo das funções com exemplos de correspondências entre conjuntos ou através da introdução da definição abstracta de função contribui para as dificuldades na compreensão deste conceito reveladas pelos alunos. Por outro lado, Kaput (1999) considera que o raciocínio algébrico, nas suas muitas formas, bem como o uso de representações algébricas, gráficos, tabelas, folha de cálculo e as fórmulas tradicionais, estão entre as ferramentas intelectuais mais poderosas que a nossa civilização desenvolveu. No entanto, considera também que a dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as várias representações constitui um entrave ao estudo das funções, defendendo a realização de tarefas que envolvam os diversos sistemas de representações matemáticas. Uma perspectiva semelhante é assumida por Duval (2002), ao afirmar que não se tem acesso ao objecto matemático separado das suas representações, ou seja, temos acesso ao gráfico, à tabela ou à fórmula que representa a função mas não ao objecto matemático função. Cada uma das representações transmite informações específicas sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função. Para este autor, a compreensão do conceito só é possível quando se alcança a coordenação das várias representações. Para Sajka (2003), a própria notação de função constitui uma das dificuldades relativas ao conceito de função. Por exemplo, a expressão $f(x) = x + 2$ pode ser vista de duas formas distintas. Por um lado, como um processo de cálculo, permitindo calcular o valor da função para determinados valores de x e, por outro, como objecto, ou seja, todo o conceito de função.

Com o objectivo de tentar minimizar as dificuldades sentidas pelos alunos, Sfard (1991) sugere que se deve iniciar o estudo das funções introduzindo a ideia de dependência entre variáveis e só posteriormente a definição de função. Pelo seu lado, Ponte (1992) considera que o ensino de funções deve articular, de um modo equilibrado, três tipos de representação – numérica, gráfica e algébrica – e defende que o estudo das funções deve ser iniciado usando exemplos em que existe uma expressão analítica ou uma regra simples, estabelecendo uma correspondência entre conjuntos numéricos. Este autor indica que o estudo das características das funções a partir dos seus gráficos cartesianos pode contribuir para uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

2.1.2. Aprendizagem das funções como processo e como objecto

Ao estudar um determinado conceito matemático, o que cada um vê depende não só da interpretação que faz do contexto da situação ou problema mas também do que é capaz de entender, naquele momento. Mourão (2002) apresenta um exemplo: a expressão algébrica $3(x+5)+1$ pode ser vista de várias formas: (i) como uma sequência de instruções – adiciona cinco ao número considerado, multiplica por três o resultado e adiciona 1; (ii) o resultado dos cálculos efectuados quando conhecido o valor de x e não o processo de o calcular; (iii) uma função, reflectindo uma mudança e não um número em particular; (iv) uma família de funções se um dos seus coeficientes numéricos for substituído por uma letra, por exemplo, $a(x+5)+1$; e (v) um conjunto de símbolos com ou sem sentido, podendo ser manipulado de acordo com regras bem definidas. De acordo com a autora, "a mesma expressão permitiu identificar diferentes 'objectos' matemáticos – número, função, família de funções – e, para além disso, evocou uma interpretação de natureza diferente" (p. 277).

Este exemplo evidencia a existência de duas formas distintas de analisar um conceito matemático, com base na teoria da reificação. O primeiro é o modo operacional, onde as noções matemáticas são identificadas como um produto de processos que é necessário efectuar ou com o próprio processo. Uma função pode ser entendida como um processo computacional ou um método bem definido para obter um valor a partir de outro valor dado. O segundo é o modo estrutural, ou seja, as noções são usadas como objectos reais que podem ser combinadas com estruturas mais complexas e manipuladas de acordo com certas regras. Por exemplo, uma função é vista como um conjunto de pares ordenados. Mourão (2002) considera ainda que "a concepção operacional é a primeira a emergir, permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objectos matemáticos" (p. 279).

Estes dois pontos de vista, apesar de parecerem disjuntos, funcionam de uma forma complementar, isto é, quando combinados contribuem para o entendimento do conceito matemático. Mourão (2002) refere que esta evolução é lenta e dá-se em três fases contínuas: (i) a interiorização, onde o aluno estabelece contacto com processos que são operações realizadas com objectos matemáticos familiares, fase que é superada quando o aluno consegue pensar sobre o que aconteceria sem efectuar tais operações; (ii) a condensação, onde os alunos são capazes de pensar sobre um dado processo como um todo sem recorrer às fases intermédias, considerando-se que esta fase foi concluída quando o aluno consegue combinar um processo com outros já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações de um conceito; e (iii) a reificação, onde é adquirida a capacidade para ver estas novas entidades como objectos completos e autónomos com significado e características próprias. Uma vez reificado, este conceito pode servir de base à formação de novos conceitos.

Relativamente ao estudo das funções, Mourão (2002) considera que numa primeira fase é apreendida a noção de variável e adquire-se "a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores de uma variável dependente" (p. 284). Quando o aluno for capaz de trabalhar com uma correspondência como um todo, estará apto a trabalhar com funções, desenhando os seus gráficos, combinando pares de funções, utilizando, por exemplo, a composição de funções, ou encontrando o inverso de uma dada função. O conceito foi construído quando o aluno consegue compreender as várias formas de representação de uma função (uso de linguagem corrente, rectas, tabelas, gráficos cartesianos e notação algébrica), passando facilmente de uma para outra, e reconhecer que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções.

2.1.3. Aprendizagem das funções em situações contextualizadas e com recurso à tecnologia

Trabalhar em diversos contextos é essencial para situar e aprofundar a aprendizagem da Matemática, tornando-a mais significativa do que a conseguida através de processos centrados na exposição e aplicação de conceitos previamente definidos. Por exemplo, Bardini, Pierce e Stacey (2004) sugerem que os problemas a propor aos alunos devem estar próximos das suas vivências, facto que pode facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Carraher e Schliemann (2007) consideram, também, que as situações apresentadas são cruciais para que os alunos particularmente jovens aprendam matemática. São de opinião que quando se trabalha com problemas e situações contextualizadas, geram-se ambientes de ensino e aprendizagem onde os alunos apresentam as suas próprias ideias e formas de representar os problemas e sugerem soluções.

Lobato e Ellis (2002) salientam que, além da importância das situações contextualizadas na aprendizagem das funções, o papel do professor é fundamental no respectivo ensino. Neste estudo, utiliza-se a noção de *focusing phenomena* para indicar que a combinação de múltiplos factores requer que se dirija a atenção dos alunos para aspectos particulares da actividade matemática. Além disso, esta investigação alerta-nos para a forte relação entre estes fenómenos e a natureza das interpretações dos alunos. As autoras sugerem várias actividades, utilizando modelos geométricos e numéricos com o intuito de relacionar a observação visual dos alunos, com a respectiva compreensão numérica, recorrendo alternadamente aos dois tipos de representação. Concluem, que os jovens estudantes encontram regras e relações para os modelos e, através de diferentes representações compreendem as relações entre duas variáveis num problema. Verificaram, também, que os alunos usam linguagem simbólica e, por vezes, conseguem verificar as suas conjecturas. Através de experiências com este tipo de problemas, os estudantes começam a trabalhar, não só com funções, mas simultaneamente com a análise de modelos que envolvem relações entre quantidades, variáveis e funções, encontrando nos gráficos valores que tornam duas funções iguais.

Os resultados do estudo mostram que podem existir benefícios na aplicação desta metodologia, nomeadamente: (i) pensar nas operações aritméticas como funções em vez de meras operações com números; (ii) aprender a trabalhar com números negativos; (iii) dominar a compreensão das variáveis; (iv) pensar nas relações entre conjuntos de números e medidas; (v) descrever e representar relações entre variáveis; (vi) desenhar e interpretar gráficos de funções lineares e não lineares; (vii) resolver problemas algébricos utilizando vários sistemas de representação, tais como tabelas, gráficos e equações; (viii) resolver equações com variáveis em ambos os membros; e (ix) relacionar diferentes sistemas de representação de funções.

Têm surgido diversas investigações procurando compreender a forma como os alunos lidam com as funções lineares e com as estratégias por eles usadas nos diversos níveis de ensino. Por exemplo, Bardini, Pierce e Stacey (2004) apresentam um estudo onde os alunos, com idades próximas dos treze anos, estudam funções lineares implícitas em problemas contextualizados e com recurso à tecnologia. Os alunos realizaram inicialmente algum trabalho no que diz respeito às quatro operações aritméticas básicas mas não tinham experiência de uso da Álgebra para descrever relações ou generalizar. Os autores consideram que a tecnologia pode fornecer o suporte necessário para que os alunos possam trabalhar e resolver problemas reais graficamente, uma vez que os gráficos se tornam objectos manipuláveis, podendo alterar domínios e escalas e alternando entre a representação gráfica e a numérica. Esta capacidade permite ao estudante estudar um maior número de hipóteses de resolução usando diferentes representações. Quando os alunos se debruçam sobre o estudo de funções lineares, podem fazer e testar as suas conjecturas sobre, por exemplo, a função que melhor se iria ajustar os dados. Tecnicamente, a tarefa de mudar os valores quer dos coeficientes quer das constantes e a visualização desta mudança no gráfico é bastante simples, permitindo aos alunos concentrarem-se nos conceitos matemáticos, observando os efeitos que a mudança de um parâmetro provoca no declive e na posição do objecto no gráfico. Após a realização do estudo, os investigadores concluem que o uso da tecnologia exigiu algum tempo inicial de preparação e esforço por parte dos alunos. Esse uso motivou os alunos para a exploração de problemas reais, mas limitou-os no que diz respeito à escrita das suas ideias. Segundo os autores, os alunos perceberam que a Matemática é útil na resolução dos problemas com que se deparam diariamente.

2.1.4. Aprendizagem das funções a partir de padrões

Nos últimos anos, o trabalho com padrões tem sido alvo de atenção por parte de professores e investigadores. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) apresentam um conjunto de razões que justificam a pertinência do uso de tarefas envolvendo a exploração de padrões. Entre elas encontra-se o facto de contribuírem "para desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões entre as diversas áreas da Matemática" (p. 49). Também o NCTM (2007) assume uma posição idêntica, acrescentando que este tipo de actividades deve ser implementado desde os primeiros anos de escolaridade.

Driscoll (1999) sugere que o conceito de função deve ser construído de modo cuidadoso sendo o trabalho com padrões uma boa forma de preparar a sua introdução. O autor considera que a exploração de padrões permite, também, o desenvolvimento de raciocínios noutros domínios da Matemática, como a Aritmética ou a Geometria, mas assume um papel especialmente importante no estudo de relações funcionais. Sugere três fases para o trabalho a realizar: (i) identificação de padrões e regularidades, em que a ideia principal é a extracção da informação relevante e a identificação de regularidades, tendo em conta a situação que está a ser apresentada; (ii) a representação que se baseia na análise de alguns casos particulares organizados e representados de forma sistemática, usando esquemas, diagramas, gráficos e outras (geometricamente), recorrendo a números, tabelas ou pares ordenados (aritmeticamente), e fazendo uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências; e (iii) a generalização que pode ocorrer a vários níveis, de acordo com as idades dos alunos envolvidos.

Também o NCTM (2007) considera que o trabalho com padrões facilita a compreensão do conceito de função, proporcionando a base para o trabalhar com símbolos e expressões algébricas. Por outro lado, este documento também salienta a necessidade de identificar funções associadas à modelação de situações em contextos diversos. De facto, Matos (2007) sugere que o trabalho com padrões deve "basear-se na análise de alguns casos particulares organizados e representados de forma sistemática" tendo por base os "três modos principais de representar relações funcionais: (i) geometricamente, usando esquemas, diagramas, gráficos, entre outros; (ii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iii) algebricamente, com o uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências" (p. 25). Segundo a investigadora,

> Inerentes à exploração de padrões estão diversos processos de raciocínio que, embora sejam também colocados em jogo noutros domínios da Matemática, assumem, no estudo de relações funcionais, um papel de grande relevância: a identificação de padrões e regularidades; a utilização de diversas formas de representação; e os processos de generalização e particularização. (p. 24)

A mesma investigadora também alerta para o facto de que "uma estratégia de ensino baseada na exploração de padrões não elimina por completo as dificuldades sentidas pelos alunos quando iniciam o estudo da Álgebra. Pelo contrário, a própria exploração de padrões numéricos pode colocar, ela mesma, outras dificuldades aos alunos" (p. 27).

Carraher e Schliemann (2007) apresentam o trabalho realizado por Moss e a sua equipa, em 2006, exemplificando o trabalho realizado com padrões. Como exemplo, apresentam uma sequência de padrões geométricos (figura 1), cujo objectivo era fazer a ligação entre a posição ordinal de uma figura e o número de elementos naquela posição, fazendo a ponte entre as abordagens escalar e funcional. O facto de cada termo da sequência estar numerado transforma a ordem do termo numa variável independente e o número de pontos que constituem essa figura na variável dependente, constituindo uma base de trabalho que sugere a introdução da noção de função. Com este estudo, os autores têm a esperança que os alunos se apropriem da noção de relação funcional, no que se refere às variáveis independentes e dependentes e sua relação.

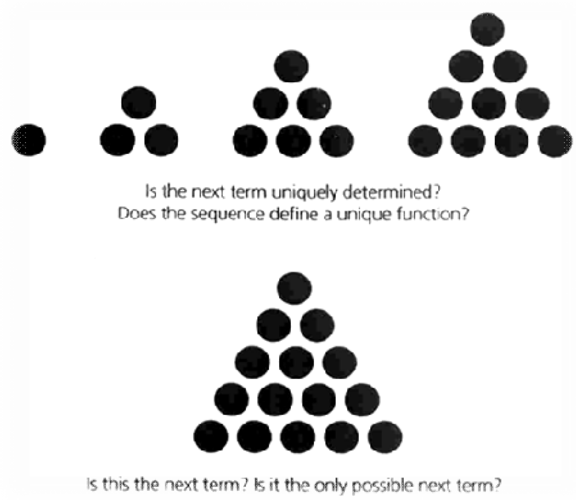


Figura 1. Sequência de formas geométricas

Moss e a sua equipa mostram que o trabalho com as regras de transformação envolvendo padrões são acessíveis a alunos muito jovens e que as actividades com padrões, baseadas na transformação de regras e representações numéricas e geométricas, podem constituir um bom ponto de partida introduzir as funções.

2.2. Representações verbal, gráfica, simbólica e tabular

Não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (Duval, 2004). Goldin (2008) indica que uma representação é uma configuração que pode representar alguma coisa, de alguma forma. Já Tripathi

(2008) define representação como uma construção mental ou física que descreve aspectos da estrutura inerente a um conceito e os inter-relaciona com outras ideias. Ou seja, uma representação ajuda a interpretar, comunicar e discutir ideias com outras pessoas. Para esta autora, compreender um conceito não se reduz a saber o que significa, mas inclui também a compreensão das múltiplas relações com outros conceitos.

Duval (2004) refere que a noção de representação surgiu em três alturas distintas com significados diferentes. Na década vinte do século passado, surgiu como representação mental num estudo de Piaget relativo às crenças e explicações das crianças pequenas sobre os fenómenos naturais e físicos. Piaget recorreu à noção de "representar" para evocar objectos ausentes. Na década de cinquenta, foi considerada a representação interna ou computacional com o objectivo de fazer o tratamento de informação de modo a organizar uma possível resposta a uma situação apresentada. Isto é, a representação foi encarada como a codificação da informação. Por último, na década de oitenta, surgiu como representação semiótica, nos trabalhos que se debruçam sobre a aquisição de conhecimentos e sobre os problemas da aprendizagem. Estas representações semióticas dizem respeito a um conjunto de signos como a língua, a notação algébrica ou os gráficos cartesianos, bem como a passagem de um sistema para outro. O autor afirma que a noção de representação semiótica pressupõe a manipulação de sistemas semióticos diferentes e a transformação de representações de um sistema para outro. Deste modo, estudar uma função através das suas representações em tarefas contextualizadas, é mais importante que aprender definições por si só. É essa coordenação que conduz à compreensão e à distinção entre objecto matemático e as respectivas representações. Assim sendo, existem três factores a ter em conta no estudo das representações: (i) a diversidade de formas de representação semiótica; (ii) a distinção entre a forma de representação e o que é representado; e (iii) a coordenação entre os diversos sistemas de representação. A grande maioria dos alunos sente dificuldade na coordenação das múltiplas representações.

As representações assumem um papel fundamental em Matemática. Para o NCTM (2007),

> As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão (…) dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos,

> (…) na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados e na aplicação da Matemática a problemas realistas, através da modelação (p. 75).

Também o novo programa de Matemática de Portugal (DGIDC, 2007) dá bastante importância às várias representações, cujo domínio por parte dos alunos constitui um dos objectivos gerais do ensino da Matemática.

São quatro os sistemas de representação actualmente reconhecidos como convencionais e fundamentais: verbal, gráfico, simbólico e tabular. Os mais comuns são os sistemas de representação gráfico e simbólico, na sua faceta algébrica. Carraher e Schliemann (2007) referem que a noção de representação simbólica não se restringe apenas à notação algébrica, envolvendo outros sistemas simbólicos.

Na verdade, as funções são um dos tópicos matemáticos onde se usam, frequentemente, uma ou mais representações e onde os alunos mostram sentir dificuldades quando passam de uma representação para outra (Goldin, 2003). Por outro lado, Duval (2004) considera que a mudança de representação, nomeadamente nas ligações entre fórmulas, gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, bem como na interpretação de gráficos e na manipulação de símbolos é, para muitos alunos, uma operação difícil e que a compreensão de um determinado assunto acaba quando se altera o sistema de representação. Na sua perspectiva, a actividade de conversão não é trivial nem cognitivamente neutra.

Contudo, é a variedade de representações que dá o significado aos objectos matemáticos, sendo essencial para a aprendizagem matemática que os alunos adquiram a capacidade de interpretar o mesmo conceito em diferentes representações e a flexibilidade em passar de umas representações para outras. As conexões entre diferentes representações desenvolvem a compreensão da essência do conceito, uma vez que o falar sobre a mesma ideia de formas distintas pode esclarecer ambiguidades provenientes de uma representação em particular (Even, 1998). As diferentes representações, quando trabalhadas em paralelo, proporcionam a totalidade do estudo (Carraher & Schliemann, 2007).

Greeno (1997) classifica as representações como convencionais e não convencionais. Nas representações convencionais engloba as expressões algébricas, tabelas, gráficos e equações. As representações não convencionais são aquelas que são usadas no imediato, com o objectivo de permitir o entendimento de um determinado conceito ou informação. O autor considera que é importante trabalhar com representações convencionais mas também é muito produtivo construir representações não convencionais com especiais interpretações, pois estas podem desempenhar um papel bastante importante ajudando os alunos na compreensão e resolução de problemas, conferindo significado à construção e comunicação de conhecimentos.

Goldin (2003) classifica os sistemas de representação em duas classes: externos e internos. O sistema de representação externo refere-se a todas as formulações simbólicas e inclui a linguagem natural universal, gráficos e diagramas convencionais, sistemas formais de notação matemática, ambientes de aprendizagem estruturados onde se podem incluir a utilização de materiais manipuláveis ou ambientes computacionais, bem como estruturas socioculturais das quais, por exemplo, relações económicas, hierarquia política ou o próprio sistemas escolar. Por outro lado, o sistema de representação interna está relacionado com o conjunto de imagens internas e inclui a capacidade para entender e comunicar matematicamente situações novas, raciocinar, tecer analogias e comparações, interagir significativamente com outros, visualizar, compreender e expressar-se dentro da simbologia em uso bem como expressar os seus sentimentos. Inclui também a capacidade reorganizar e visualizar relações estruturais, de visualização espacial, para generalizar e particularizar, para traçar estratégias de resolução, para aplicar as várias técnicas, e ou criar novas, para encontrar a solução de um problema e de experimentar novos sentimentos decorrentes de toda a aprendizagem a que está sujeito.

Este autor considera que os conceitos matemáticos são aprendidos quando os alunos se apropriam de uma variedade de representações internas sobre um tópico matemático, através das representações externas que foram desenvolvidas na escola. As representações externas dos alunos podem dar informação sobre o modo como estes percebem as situações a estudar e dar indicações de como deve o professor intervir para colmatar as dificuldades sentidas pelos alunos. Nesse sentido, ao observar as representações realizadas pelos alunos, os professores podem compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos. Sempre que adequado, poderão ainda estabelecer ligações entre as representações pessoais dos seus alunos e representações mais convencionais. É importante que os alunos tenham oportunidades quer para aprender formas de representação convencionais, quer para criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações, enquanto ferramentas que suportam a aprendizagem e a produção de matemática (NCTM, 2007, p. 76).

Duval (2004), para além da classificação das representações como internas e externas, sugere a oposição entre representações conscientes e não conscientes. Para este autor, uma representação consciente pode ser considerada uma representação interna e mental, se a sua função for de objectivação, ou externa e semiótica, se tiver como objectivo a objectivação, a transmissão e o tratamento intencional da informação. Por outro lado, uma representação não consciente é a representação interna e computacional, cuja função é proceder ao tratamento automático e quase instantâneo da informação.. Este carácter intencional das representações conscientes é essencial do ponto de vista cognitivo, pois permite ter em conta o papel fundamental da determinação da significância que faz com que determinado objecto seja susceptível de ser observado.

Tripathi (2008) apresenta, ainda, outra classificação para as várias representações: (i) concretas, englobando as representações manipuláveis; (ii) linguagem e simbolismo, referindo-se ao uso da notação; (iii) semi-concretas, nomeadamente representações pictóricas; e (iv) contextuais, envolvendo situações reais. Segundo a autora, desde que esta classificação se começou a usar, o repertório de representações acessíveis para o aluno tem-se expandido, em parte por causa da disponibilidade da tecnologia como calculadoras gráficas e software matemáticos. Na verdade, a utilização de software matemático veio provocar alterações no estudo das funções libertando os alunos de cálculos fastidiosos e repetitivos (Ponte, 1992). Neste sentido, a utilização de ferramentas computacionais parece ser uma forma prática de ultrapassar alguns problemas de representação, sobretudo os relacionados com a representação gráfica. Segundo Ponte e Canavarro (1997), o uso destas ferramentas

> Valoriza o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, uma vez que as representações múltiplas que as máquinas proporcionam, com especial destaque para a gráfica, permitem outras abordagens às situações matemáticas, para além dos processos formais de cunho algébrico ou analítico (…) Aqueles [alunos] que geralmente têm dificuldades no cálculo numérico ou algébrico deixarão de ficar impedidos de compreender e trabalhar com ideias matemáticas importantes (p. 4-5).

Fey (1991) salienta que existem várias razões pelas quais as representações múltiplas baseadas no computador são prometedoras: (i) pelo dinamismo das representações de ideias e procedimentos matemáticos como, por exemplo, as mudanças num gráfico de uma função correspondentes às alterações dos parâmetros da sua expressão analítica que dificilmente poderão ser visíveis sem o uso da tecnologia; (ii) o computador permite a cada aluno escolher a forma de representação que considera mais adequada à situação com que se depara; (iii) a representação, através do uso um *software* próprio, pode ser um intermediário para a abstracção. Os alunos podem passar de um pensamento concreto para uma forma de raciocínio mais simbólico e abstracto; (iv) a facilidade de representação gráfica do computador permite criar novas espécies de representações matemáticas, de acordo com as suas necessidades; e (v) as representações em computador constituem novos e poderosos instrumentos para a realização de tarefas contextualizadas.

Para Scheuermann e Garderen (2008), algumas representações são mais úteis que outras e que devemos conhecer o motivo que leva o aluno a optar por uma representação em detrimento de outra, e a usá-la como uma ferramenta para resolver correctamente problemas de Matemática. Acrescentam, ainda, que um pequeno desenho ou uma representação gráfica por mais simples que seja, pode fornecer muita informação sobre a compreensão do aluno relativamente a um conceito matemático.

Greeno (1997) considera que os estudantes aprendem a construir e a interpretar tabelas, gráficos e outras técnicas de representação por estas lhes serem impostas apenas como preparação para ter sucesso nos exames sem terem oportunidade para construírem e explorarem as suas próprias representações. Considera que, se os alunos apenas completam tarefas básicas de manipulação de representações, não têm oportunidade de tomar consciência das vantagens e desvantagens da sua utilização como ferramenta para construir o conhecimento. Para o autor, um conjunto heterogéneo de representações pode constituir uma fonte valiosa para comunicar e argumentar conceitos e informações.

Assim, este autor sugere que se devem desenvolver nos alunos os diferentes sistemas representacionais internos e aprender a observar se estes sistemas estão a ser construídos através das representações externas. Para alguns autores, como Greeno (1997) e Goldin (2003), os sistemas de representação interno e externo estão interligados, podendo observar-se um através do outro. Esta flexibilidade pode ser ilustrada no seguinte exemplo: quando o aluno tenta esclarecer se uma imagem mental construída por si, em relação a um conceito matemático descrito pelo professor, é a correcta, e, por outro lado, quando o aluno escreve uma fórmula, desenha um diagrama, para comunicar por palavras suas as suas ideias matemáticas. Existem três factores que ajudam na distinção entre representação interna e externa: (i) dinâmica versus estática, isto é, as representações externas são estáticas envolvendo sistematicamente os mesmos diagramas, gráficos equações ou configurações de objectos concretos, enquanto as representações internas são dinâmicas, constantemente alteradas e reformuladas; (ii) interactiva versus inerte, ou seja, as calculadoras gráficas, ambientes computacionais, Internet e applets permitem a transição rápida entre representações e de uma forma dinâmica, facilitando a construção das representações internas; e (iii) registo versus não registo, o lápis e o papel mantêm acessível um registo do que foi feito, ao contrário da calculadora, por exemplo.

Finalmente, é de referir que Tripathi (2008) apresenta algumas sugestões que podem encorajar os alunos a trabalhar e a relacionar as várias representações: (i) incluir problemas que apelem às capacidades visuais dos alunos; (ii) colocar questões que permitam usar várias representações; (iii) usar tecnologia que suporte a representação visual e permita a construção de conexões; e (iv) use estratégias de avaliação de forma construtiva. Segundo a autora, as representações múltiplas podem ser uma ferramenta poderosa para facilitar a compreensão dos alunos. O problema que surge em torno das representações pode proporcionar o conhecimento matemático. O discurso matemático que acontece dentro da sala de aula, quando os alunos e o professor são tomar parte do processo pode enriquecer a cultura da sala de aula e ajudar alunos a tornarem-se participantes activos no processo de aprendizagem.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

Neste capítulo apresento o tópico matemático em estudo, a planificação das tarefas, os objectivos de cada tarefa e as opções respeitantes à organização do trabalho. Elaboro, também, uma pequena descrição das actividades a desenvolver.

3.1. Enquadramento curricular e objectivos

Esta unidade de ensino destina-se a alunos do 8.º ano e engloba o estudo do tópico "Funções", com a aplicação do programa GeoGebra. Dada a importância deste tópico e as dificuldades sentidas pelos alunos no seu estudo, pareceu-me pertinente elaborar uma unidade de ensino que engloba "Conceito de função e de gráfico de uma função", "Função de proporcionalidade directa" e "Funções linear e afim".

3.1.1. Ênfase nas tarefas de investigação e exploração. Esta investigação tem por base a resolução de tarefas de investigação e exploração. O termo «investigação» é, muitas vezes, usado em sentido amplo para descrever um tipo de actividade a que se associam características, tais como, descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões e espírito crítico (Porfírio & Oliveira, 1999). Para Fonseca (2000), a investigação matemática, em geral, tem como objectivos a descoberta de novas relações entre objectos matemáticos já conhecidos e idealizar situações onde esses objectos já não sejam, por si só, suficientes para elaborar problemas. Deste modo, "a Matemática é encarada como uma forma de gerar conhecimento e não como um corpo de conhecimentos" (Oliveira, Segurado & Ponte, 1999, p. 1). Ou seja, as investigações matemáticas permitem que os alunos se aproximem da actividade do investigador matemático

(Oliveira, 1998), o que lhes proporciona uma visão mais alargada da Matemática (Ponte & Matos, 1996). Também Ponte (2005) apresenta uma distinção entre tarefas de exploração e de investigação. Para este autor, a diferença entre estas tarefas está no grau de desafio. Refere que “se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação” (p. 8).

Fonseca (2000) considera várias tarefas que podem ser utilizadas como investigações. Entre elas constam (i) projectos, onde os alunos equacionam e trabalham os seus próprios problemas tendo como base uma situação pouco estruturada; (ii) problemas estruturados, que levam a uma recolha de dados, à procura de regularidades e à identificação de generalizações; e (iii) tarefas que estimulam o levantamento de questões tais como ‘o que acontece se…’. Nestas tarefas, os alunos exploram situações abertas, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Partem de uma situação rica e complexa, tentam compreendê-la, descobrem padrões e relações e alcançam generalizações.

Cunha, Oliveira e Ponte (1996) apontam quatro grandes razões para incluir investigações na sala de aula de Matemática:

> (a) constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (p. 173).

Uma investigação usualmente é realizada em três fases distintas – apresentação da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão/reflexão final (Christiansen & Walter, 1986). Na primeira fase, a tarefa é apresentada aos alunos de modo que estes a conheçam, a compreendam e se envolvam nela. Esta apresentação pode ser feita pelo professor de diferentes modos: (i) o modo misto, isto é, oralmente e por escrito, distribuindo o enunciado e fazendo uma breve apresentação oral com o objectivo de clarificar alguns aspectos da tarefa ou promovendo uma leitura da tarefa em grande grupo; (ii) apenas por escrito, distribuindo a tarefa, sem tecer qualquer comentário inicial ao seu enunciado, o que implicará, possivelmente, um maior apoio do professor junto dos grupos no sentido de os ajudar a entender o que se pretende; ou (iii) apenas oralmente, ou seja, apresenta a tarefa sem qualquer suporte escrito. No entanto, nem sempre a tarefa é pensada e elaborada antecipadamente – por vezes pode surgir de um modo espontâneo a partir da actividade dos alunos (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999).

A fase seguinte, fase de desenvolvimento do trabalho, centra-se na actividade dos alunos. Para Fonseca (2000), nesta fase, o papel do professor assume várias facetas:

> (i) *incitador* – o professor deve introduzir a tarefa de modo a envolver os alunos rapidamente na investigação;
> (ii) *possibilitador* – o professor deve ser um possibilitador e não um fornecedor pois o objectivo é que os alunos pensem matematicamente e não ocupá-los com o pensamento matemático dos outros e deve, também, fazer com que a investigação seja acessível a todos os alunos;
> (iii) *facilitador* – o professor deve criar uma atmosfera apropriada, dando liberdade aos alunos para "errar", tempo para pensar ao seu ritmo e nível, oportunidade para discutir com os colegas e professor e ainda para partilhar ideias;
> (iv) *ouvinte* – o professor deve ouvir realmente os alunos e não ouvir apenas aquilo que quer;
> (v) *questionador* – o professor deve colocar questões que ajudem os alunos a pensar ("O que é que pensas?", "Como chegaste lá?"), evitando dar-lhes resposta, e responder a uma questão com outra questão;
> (vi) *avaliador positivo* – o professor deve dar aos alunos um feed-back positivo do seu trabalho em qualquer altura, valorizando as suas ideias, e o seu julgamento não se deve basear apenas nos relatórios, mas sim também no que vê e ouve;
> (vii) *observador* – o professor deve aproveitar este tipo de trabalho para tentar conhecer melhor os alunos, observando discretamente as discussões entre eles e vendo, por exemplo, se: "Conseguem trabalhar cooperativamente?", "Há uma pessoa que lidera a discussão?", "Ouvem-se uns aos outros?", "Como tomam decisões?", "Conseguem defender as suas ideias?" (p. 20).

Relativamente aos alunos, é muito importante que as suas primeiras experiências com as investigações sejam agradáveis e envolventes de modo a que aceitem positivamente este tipo de trabalho e se envolvam nas situações propostas. A interacção entre os alunos, que tende a ser bastante forte numa aula com investigações, estimula-os a descobrir novas relações, transmite-lhes mais segurança nas suas ideias matemáticas e possibilita o desenvolvimento do raciocínio, criatividade e poder de argumentação (Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, Segurado & Varandas, 1999). Esta ideia é partilhada por Brunheira e Fonseca (1996) quando referem:

> As actividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos trabalharem em grupo. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos. (p. 4)

A fase de discussão final/reflexão é fundamental numa aula de investigação pois, segundo Brunheira e Fonseca (1996), "é nesta altura que os alunos apresentam os resultados das suas investigações e que o professor tem oportunidade de clarificar ideias, de modo a esclarecer eventuais dúvidas" (p. 6). Também Ponte (2005) refere que a "aprendizagem decorre (…) não de ouvir directamente o professor ou de fazer esta ou aquela actividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou" (p. 15). Esta reflexão permite aos alunos o confronto de opiniões, a clarificação das ideias, a validação dos resultados, a formulação de novas conjecturas, o estabelecimento de conexões e uma melhor compreensão do significado de uma investigação matemática.

Ao professor cabe o papel de orientar todo este processo. Para isso, deve conhecer os trabalhos dos alunos para valorizar tanto os mais interessantes como os mais modestos. Deve incentivar os seus alunos a realizar registos claros e compreensíveis para quem os escreve como para quem os vai ler, contendo por exemplo: o ponto de partida; a descrição de como a investigação foi desenvolvida, usando diagramas e tabelas se for caso disso; os resultados, as observações e, quando for apropriado, alguma tentativa de avaliá-los e explicá-los; bem como a referência a livros que foram consultados. O professor deve, também, encorajar os alunos a discutir uns com os outros e a escrever o que dizem, bem como a ser perseverantes (Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, Segurado & Varandas, 1999).

O momento certo para iniciar a discussão de uma tarefa depende das condições em que esta seja efectuada, uma vez que os alunos necessitam de tempo para compreender e analisar o problema. No entanto, a realização das tarefas não se deve prolongar-se em demasia no tempo uma vez que isso pode conduzir a uma perda de motivação. Por outro lado, os alunos têm ritmos diferentes, o que deve ser respeitado. No entanto, há que ter atenção para que não se verifique dispersão por parte dos alunos e do professor perder o controlo da aula. Outro aspecto que deve ser tido em conta, sob pena de desmotivação dos alunos, é o nível das propostas apresentadas. Estas devem conter algumas tarefas acessíveis a todos os alunos. Caso contrário, os que têm mais dificuldades podem sentir-se frustrados, acabando por abandonar a tarefa prematuramente (Brunheira & Fonseca, 1996).

A discussão deve iniciar-se logo após a exploração da tarefa, mas muitas vezes isso não é possível devido a múltiplos factores. Frequentemente, o que acontece é que o desenvolvimento da actividade de investigação decorre numa aula e a discussão apenas na aula seguinte, o que dificulta o início da discussão final. Seria conveniente realizar o trabalho com investigações em aulas de dois tempos lectivos, pois isso pode permitir que a fase de discussão tenha lugar durante o segundo tempo. Por vezes, pode ser útil proporcionar um momento de discussão intermédio durante a realização da tarefa, com o objectivo de ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades que os impedem de prosseguir o seu trabalho, de motivá-los em fases mais críticas, ou mesmo de enriquecer a investigação (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999).

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) consideram, ainda, que "a realização de investigações por parte dos alunos não deve ser (…) uma actividade esporádica – pelo contrário, deve ser uma actividade frequente e regular na sala de aula" (p. 13). São muitos os motivos pelos quais as actividades de investigação e exploração não são tão frequentes em sala de aula como seria desejável. Por exemplo, o conhecimento de certos tópicos pode ser mais reduzido, por parte do professor; este pode ter pouca experiência na realização de trabalho desta natureza e sentir algum receio relativamente às questões matemáticas e às questões de dinâmica da aula que emergem neste tipo de trabalho. Trata-se de questões que podem ser ultrapassadas pela experimentação controlada, pela reflexão continuada sobre as aulas realizadas, pelas trocas de experiências com outros colegas.

No entanto, outras dificuldades são mais difíceis de ultrapassar, como falta de espaços de trabalho para os professores trocarem experiências entre si, a falta de livros e materiais com sugestões de tarefas, a falta de relatos de experiências e orientações curriculares, ou uma estrutura organizativa da escola demasiado rígida no que diz respeito à organização do tempo lectivo ou dos espaços de trabalho. Também a inexistência de uma cultura que valorize as actividades de investigação matemática constitui um forte obstáculo, como indicam Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira (1999). Estes autores afirmam que:

> Os professores não têm todos o mesmo tipo de relação com a Matemática (…). Alguns gostam de conhecer novos desenvolvimentos desta ciência, de resolver problemas e de explorar situações que podem ser matematicamente interessantes. Outros, não mostram muito interesse por estas actividades, ou sentem mesmo dificuldades ao desenvolvê-las. Enquanto alguns se envolvem com frequência em experiências matemáticas ricas, outros estão longe de viver habitualmente situações investigativas (p. 1).

Outra dificuldade com os quais os professores são confrontados e que pode constituir também um factor inibidor da aplicação frequente das tarefas de investigação e exploração é a avaliação. Este constitui-se como um domínio que envolve uma séria dificuldade pois toda a avaliação é frequentemente conotada como subjectiva. A avaliação das actividades de investigação envolve um problema suplementar, pois como refere. Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999), "torna-se difícil para qualquer observador aceder aos processos e raciocínios em que os alunos se envolvem — o que complica claramente a tarefa do professor no que respeita à avaliação" (p. 6). Estes autores acrescentam ainda que:

> Para realizar esta avaliação há necessidade de recorrer a instrumentos de avaliação adequados. Entre estes merecem especial atenção os relatórios da investigação e a observação directa por parte do professor. Uma vez que a avaliação dos alunos na realização destas actividades requer uma ênfase particular no processo e não somente no produto final, estes relatórios e estas observações devem indicar tanto os resultados obtidos como a forma como os alunos os alcançaram (p. 7)

Geralmente, quando apresento tarefas desta natureza, evito introduzir desde logo os conceitos matemáticos. Em vez disso, procuro que os alunos se envolvam na resolução da tarefa, discutindo entre si. No final, alargo a discussão a toda a turma, possibilitando uma reflexão mais profunda sobre a situação proposta. Tal como os autores acima referidos, também considero estes momentos de grande importância, pois neles os alunos podem esclarecer os aspectos menos conseguidos durante a realização da tarefa.

3.1.2. Tecnologias. Vivemos numa sociedade em que a tecnologia assume um papel muito importante na vida dos cidadãos. Ribeiro e Ponte (2000) referem que isso já está a ter reflexos na escola, que “vem incorporando estas tecnologias tanto na sua actividade geral como nas áreas curriculares e, em particular, na disciplina de Matemática (p. 3). O NCTM (2007) considera que o uso das tecnologias traz grandes vantagens para a aprendizagem:: (i) os alunos que têm dificuldades de concentração, ou que se distraem facilmente, “poderão concentrar-se nas actividades realizadas no computador de forma mais intensa”; (ii) os alunos que têm dificuldades de organização “poderão beneficiar das restrições impostas pelo ambiente de trabalho informático”; e (iii) os alunos com dificuldades de procedimentos básicos “poderão desenvolver e demonstrar outros conhecimentos (…) que poderão conduzir à aprendizagem desses procedimentos” (p. 27). No entanto, o NCTM (2007) também refere que “a tecnologia não deverá ser usada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar; pelo contrário, poderá e deverá para estimular essa compreensão e intuição” (p. 26).

Para Vale et al. (2006), estas potencialidades

> são a consequência natural de diversos factores relacionados com as vivências dos actuais alunos. As crianças são habituadas com a tecnologia desde muito cedo, preterindo-se a utilização do papel. Desta forma, os alunos tendem a compreender as potencialidades da tecnologia, movimentando-se com à vontade num ambiente que consideram apelativo e manuseando ferramentas com que se sentem confortáveis (p. 331).

Deste modo, considero que o computador tem um papel particularmente importante na planificação e leccionação desta unidade, bem como a resolução de problemas e a exploração de situações. A escolha do GeoGebra fica a dever-se ao facto de que este programa permite trabalhar com múltiplas representações e visualizar, em simultâneo, a representação gráfica e a expressão algébrica de uma função, e observar o que acontece ao gráfico da função sempre que se altera algum parâmetro da respectiva expressão algébrica. Considero, ainda, que a utilização deste programa na realização de actividades de investigação e exploração pode criar um ambiente propício ao desenvolvimento da capacidade crítica e de comunicação matemática dos alunos, sendo por isso uma mais valia para o processo de aprendizagem. Nos casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, a atenção deve centrar-se nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados.

3.1.3. Enquadramento no programa e objectivos de aprendizagem. No que concerne às aprendizagens, antes de chegarem ao 3.º ciclo, os alunos já resolveram muitos problemas envolvendo proporcionalidade directa. Por exemplo, no 2.º ciclo, os alunos "trabalham com situações que envolvem este conceito, identificam relações e utilizam linguagem simbólica para as representar" (Ponte et al., 2007, p. 55), devendo, para isso, realizar actividades, que permitam "(i) interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las; (ii) compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade; (iii) utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões; e (iv) resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa" (Ponte et al., 2007, p. 41). No 3.º ciclo "alarga-se e aprofunda-se o estudo das relações de proporcionalidade directa", mas agora trabalhada como função. É durante este estudo que se faz a ligação fundamental entre o conceito de proporcionalidade e o conceito de função, sendo esta ligação traduzida pelo estudo da função de proporcionalidade da forma $x \mapsto kx$, onde k representa a constante de proporcionalidade. A tradução gráfica da proporcionalidade directa permite que os alunos, visualizando situações já conhecidas, relacionem entre si duas linguagens, a analítica e a gráfica.

Durante a leccionação desta unidade, pretendo que os alunos (i) reconheçam o significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas; (ii) compreendam o conceito de função e as facetas que este pode apresentar, como a correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis; (iii) desenvolvam a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando tabelas, gráficos e expressões algébricas; e (iv) desenvolvam a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real (ME-DEB, 2001, p. 67).

3.2. Concretização

Neste ponto, descrevo as actividades desenvolvidas nesta unidade de ensino e a forma como é organizado o trabalho na sala de aula.

3.2.1. Actividades a desenvolver

O *Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* oficial (ME-DGEBS, 1991) sugere que o tópico "Funções" seja o segundo tópico a ser leccionado no 8.º ano. No entanto, esta ordem foi alterada, de modo a poder planificar antecipadamente a presente unidade de ensino. Deste modo, foram leccionados os tópicos pela seguinte ordem: (i) Decomposição de figuras - Teorema de Pitágoras; (ii) Ainda os números; (iii) Semelhança de triângulos; e (iv) Funções. Considero que esta alteração em nada prejudica os alunos no seu percurso escolar, uma vez que este tópico não é um pré-requisito para as unidades cuja ordem se alterou. Pretendo leccionar esta unidade de ensino de acordo com as orientações presentes no reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico (Ponte et al, 2007).

No estudo da unidade anterior, "Semelhança de triângulos", os alunos tiveram contacto com o *software* GeoGebra, tomando conhecimento dos vários menus que o constituem, mas tendo trabalhando, principalmente, as suas potencialidades geométricas. Nesta unidade, são apresentadas as potencialidades algébricas e gráficas. Os alunos realizam as tarefas apresentadas no ponto seguinte de uma forma sequencial, intercalando-as com exercícios/problemas do manual escolar adoptado que podem, também, ser resolvidos em casa ou nas aulas de Estudo Acompanhado. Estes exercícios e/ou problemas têm como função clarificar e esclarecer alguma dificuldade que os alunos tenham sobre algum dos temas tratados nas aulas.

Esta unidade de ensino tem a duração de 8 blocos de aulas, num total de 16 tempos lectivos. Decorre entre 20 de Janeiro e 9 de Fevereiro de 2009, de acordo com a planificação indicada no Quadro 1.

3.2.2. Tarefas

Origem

As tarefas de 1 a 5 foram seleccionadas de entre as desenvolvidas por Ponte, Matos e Branco (2008). Segundo os autores:

> Trata-se de tarefas em que os alunos têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anterior-

> mente desenvolvidas. O trabalho nestas tarefas constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos. (Ponte, Matos & Branco, 2008, p. 4).

Ponte (2005) refere que "o que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam e a reflexão que sobre ela efectuam" (p. 11). Deste modo, a selecção destas tarefas fica a dever-se ao facto de considerar que são suficientemente claras, susceptíveis de serem entendidas por todos os alunos da turma e que são capazes de gerar neles a motivação necessária para que se envolvam na sua resolução, para além de cumprirem o objectivo primeiro pelo qual foram seleccionadas – permitir que os alunos adquiram e estabeleçam as conexões entre conhecimentos. Os exercícios e problemas do manual escolar são escolhidos com o objectivo de organizar e consolidar conhecimentos.

Quadro 1: Actividades realizadas na unidade de ensino

Aula	Tarefas	N.º Blocos	Data
1	Tarefa 1 – "Tarifários"	1	20/01/2009
	Discussão Tarefa 1 (E.A.)		21/01/2009
2	Tarefa 2 – "Maquina de perguntas"	1	22/01/2009
	Discussão Tarefa 2	0,5	26/01/2009
3	Tarefa 3 – "Perímetros" (GeoGebra)	1	27/01/2009
	Discussão Tarefa 3 (E.A.)		28/01/2009
4	Exercícios e problemas do manual escolar	0,5	02/02/2009
5	Tarefa 4 – "Várias representações"(GeoGebra) Discussão Tarefa 4	1	03/02/2009
6	Tarefa 5 – "Combustíveis" / Discussão Tarefa 5	1	04/02/2009
7	Exercícios e problemas do manual escolar	0,5	09/02/2009
8	Avaliação	1	17/02/2009

As tarefas apresentadas são de natureza investigativa e exploratória, cuja distinção convém ter presente. No entanto, convém distinguir em que consiste uma tarefa de natureza investigativa de uma tarefa exploratória. Para Porfírio e Oliveira (1999), "embora a exploração e a descoberta sejam aspectos que estão intimamente ligados com o conceito de investigação matemática, eles não o caracterizam totalmente. Assim, explorar e investigar dizem respeito sobretudo ao processo, enquanto descobrir aponta, predominantemente, para o produto" (p. 2). Mais recentemente, Ponte (2005) sugere a diferença entre as tarefas de exploração e as de investigação está no grau de desafio e acrescenta que "se o aluno puder começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação" (p. 8). Devo salientar que, além deste tipo de tarefas, esta unidade de ensino inclui também experiências de aprendizagem de natureza diversificada, como sejam exercícios e problemas, com o objectivo de consolidar conhecimentos.

O quadro 2 indica o grupo em que se inclui cada uma das tarefas que fazem parte desta unidade de ensino. Este quadro mostra que as tarefas de natureza exploratória são predominantes. Este facto é justificado pelo uso de um software que os alunos não conhecem na sua vertente algébrica. A única actividade de investigação presente tem o objectivo de "dar ao aluno a responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas" (Ponte, 2003, p. 32).

Quadro 2. Classificação das tarefas consoante os grupos onde se enquadram: exploração ou investigação.

Tarefa	Exploração	Investigação
1. Tarifários	X	
2. Máquina de perguntas	X	
3. Perímetros	X	
4. Várias representações	X	
5. Combustíveis	X	

Descrição

Ponte, Matos e Branco (2008) apresentam as aprendizagens a adquirir e as aprendizagens transversais a reforçar com a resolução de cada tarefa. Na tarefa 1, “Tarifários”, a primeira questão envolve a leitura de um anúncio de uma empresa de comunicações. Como o conceito formal de função só é introduzido posteriormente, os alunos são solicitados a interpretar a variação de uma função, tendo por base a sua noção intuitiva. Na questão seguinte, a informação é dada por um gráfico a partir do qual é possível completar a tabela apresentada. Recorrendo a estas duas representações (gráfico e tabela) os alunos obtêm os elementos necessários para descrever as principais características deste tarifário. Com a tarefa 1, pretendo, não só introduzir o estudo da unidade como “identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano” e “interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante” (Ponte et al, 2007, p. 57). Esta tarefa permite, ainda, trabalhar dois aspectos essenciais da comunicação matemática: a interpretação e a representação de conceitos matemáticos, envolvendo as representações em linguagem natural, num gráfico cartesiano e numa tabela (Ponte, Matos e Branco, 2008). Permite ainda desenvolver uma das capacidades transversais apresentadas pelo novo Programa de Matemática para o ensino básico, a comunicação matemática, quando se pretende que os alunos elaborem um pequeno texto para descrever as informações que é possível obter a partir das representações gráfica e tabular deste tarifário. Esta capacidade é importante no processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que é através da comunicação oral e escrita que os alunos dão sentido ao conhecimento matemático que vai sendo construído (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

No que diz respeito à tarefa 2, “Máquina de perguntas”, as questões 1 e 2 permitem introduzir os conceitos básicos inerentes à definição de função linear ou de proporcionalidade directa. Nas restantes questões, as funções são sugeridas através de diferentes representações: diagrama sagital, tabela ou gráfico. Na última questão os alunos representam graficamente uma função dada por uma tabela. A resolução desta tarefa, permite aos alunos “compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações” para analisar uma dada função, bem como “interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante" (Ponte et al, 2007, p. 57). Esta tarefa permite, também, representar informações, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

A tarefa 3, "Perímetros", permite, para além do reforço da compreensão do conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, a utilização das suas várias representações para representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade directa, funções lineares e, também, relacionar a função linear com a proporcionalidade directa. Permite, ainda, traduzir relações de linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa.

No que concerne à tarefa 4, "Várias representações", as questões 1 e 2 apresentam um contexto relativo ao perímetro de polígonos regulares. A questão 3 apresenta a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa em que a constante é um número racional, representado na forma de fracção. A tabela apresentada deve ser completada através do cálculo de imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e a determinação de objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal. Com a realização desta tarefa, os alunos podem, não só reforçar a sua capacidade de analisar uma função a partir das suas representações, mas também analisar situações de proporcionalidade directa como funções do tipo $y = kx$ e relacionar as representações algébricas e gráficas das funções lineares.

Tal como na tarefa anterior, na tarefa 5, "Combustíveis", os alunos têm a possibilidade de continuar a analisar uma função a partir das suas representações, onde as situações da realidade apresentadas são modeladas por funções de proporcionalidade directa, com as quais os alunos devem trabalhar para poderem responder às questões propostas.

Nas tarefas números três e quatro, pede-se aos alunos que utilizem o programa GeoGebra. Este software permite uma visão mais dinâmica do gráfico de uma função linear. Como foi referido anteriormente, para além das tarefas apresentadas, os alunos realizam, na sala de aula, exercícios e problemas do manual escolar sempre que estes se relacionam com os assuntos abordados nas tarefas. Deste modo, os alunos não perdem o contacto com o seu manual e este constituiu, também, um instrumento no qual podem apoiar a sua aprendizagem.

3.2.3. A aula

Organização do trabalho

Os alunos vão trabalhar em pares, o que corresponde a 10 grupos, uma vez que a turma tem 20 alunos. Os grupos foram formados por mim, no inicio do 2.º período. Os alunos já estão habituados a trabalhar com computadores, tanto em Matemática como na Área de Projecto, tendo trabalhado com o *Word*, *Excel* e *Power Point*, bem como com a Internet.

A turma tem, semanalmente, cinco tempos lectivos, dos quais dois blocos de 90 minutos e um tempo de 45 minutos, ao abrigo do Plano da Matemática. As aulas onde são aplicadas as tarefas, são blocos de 90 minutos e tiveram início a 20 de Janeiro de 2009. A grande maioria das aulas tem lugar na sala de Informática, equipada recentemente com computadores portáteis, impressoras e um projector fixo ao tecto. É também, nesta sala que os alunos têm a grande maioria das aulas de Área de Projecto. Mas nem sempre esta sala está disponível, uma vez que lá decorrem as aulas do Curso de Educação e Formação «Aplicações de Informática». Além disso, qualquer professor da escola pode, com a devida antecedência, requisitar esta sala para leccionar uma determinada aula, ou conjunto de aulas, a uma turma. Por isso, foi necessário realizar trocas de salas com outros professores e trocas de disciplinas no horário da turma no que diz respeito às disciplinas de Matemática e Estudo Acompanhado, ambas leccionadas por mim. Assim, a tarefa quatro é leccionada no horário de Estudo Acompanhado de modo a utilizar a sala de Informática que está disponível nesse horário.

Durante a realização das tarefas os alunos fazem registos escritos do seu trabalho, usando papel e lápis e/ou utilizando o GeoGebra, para organizarem o seu raciocínio e se apoiarem no momento da discussão geral. Os produtos realizados pelos alunos, um exemplar por grupo de trabalho e em suporte de papel, são recolhidos após o término da sua realização, fotocopiados e devolvidos aos alunos imediatamente antes da discussão em grande grupo. Deste modo, os alunos podem corrigir as suas resoluções durante a reflexão conjunta. As resoluções feitas no computador são guardadas numa pasta no ambiente de trabalho, com o nome do grupo, que são, também, recolhidas no final da realização da tarefa. Deste modo, os alunos podem alterar os ficheiros realizados, fazer experiências novas ou experimentarem resultados apresentados sem alterarem as suas propostas de resolução. Estes ficheiros são impressos e entregues aos alunos para anexarem ao respectivo enunciado da tarefa.

Discussões gerais

De acordo com a prática usual em aulas com tarefas de investigação/exploração, as aulas em que são desenvolvidas as tarefas previstas na unidade de ensino são organizadas em três fases: (i) a proposta da tarefa aos alunos, (ii) o trabalho realizado pelos alunos, e (iii) e um momento de discussão com toda a turma dos resultados obtidos. De acordo com os autores das tarefas propostas nesta unidade de ensino, estas podem ser realizadas num bloco de 90 minutos, destinando-se cerca de 60 minutos para a sua realização e 30 minutos para a discussão em grande grupo (Ponte, Matos e Branco, 2008). No entanto, esta gestão do tempo de aula nem sempre é possível devido a factores tais como o tamanho da tarefa e o desembaraço dos alunos. Estes factores impõem uma tomada de decisão: ou se consente que os alunos finalizem a resolução da tarefa e se realize a discussão em grande grupo na aula imediatamente seguinte ou se recolhe a tarefa sem esta ficar concluída para se efectuar a respectiva discussão. Perante este dilema, tomei a decisão de permitir que os alunos continuassem as suas investigações até ao final da aula. Deste modo, no momento da discussão os alunos podem intervir com conhecimento de causa, uma vez que já se debruçaram sobre o tópico matemático tratado em cada questão.

Esta discussão é orientada pelo professor ou pelos grupos, dependendo do decorrer da aula e da pertinência das descobertas que os alunos efectuem. De acordo com as resoluções dos diferentes grupos, estes são levados a exemplificar no quadro a forma como raciocinaram e resolveram o problema que lhes foi proposto. Este momento também serve para que os alunos tomem consciência do trabalho que vai sendo desenvolvido pelos seus colegas.

3.2.4. Avaliação

A avaliação dos alunos, na disciplina de Matemática, respeita os critérios de avaliação definidos para o 3.º ciclo no início do ano lectivo, pela equipa pedagógica e aprovados pelo conselho pedagógico da escola. Estes critérios contemplam: (i) o domínio dos Conhecimentos, com um peso de 70%, onde se incluem as fichas de avaliação (60%) e os trabalhos realizados quer sejam individuais ou de grupo (10%); (ii) o domínio das Capacidades/Aptidões, onde se insere a participação, através das intervenções, apresentações e comunicações orais, tendo um peso de 10% na avaliação dos alunos; e (iii) Valores/Atitudes, com um peso de 20%. Neste domínio incluem-se parâmetros tais como o controlo dos trabalhos de casa, a responsabilidade o comportamento.

Deste modo, a avaliação da unidade de ensino é composta por vários factores: os produtos realizados pelos alunos e as apresentações dos resultados encontrados aos seus pares. A discussão resultante da resolução das tarefas que ocorre no final das aulas permite, ao professor, avaliar o nível de concretização das tarefas e o respectivo envolvimento dos alunos. No final da unidade, os alunos realizam uma ficha de avaliação, abrangendo os vários temas abordados neste estudo.

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas, os participantes e os instrumentos e processos utilizados para proceder à recolha e análise dos dados, bem como o modo como a investigação é efectuada, tendo em conta o problema a estudar.

4.1. Opções metodológicas

Como indiquei anteriormente, o objectivo desta investigação é saber de que forma a resolução de tarefas de investigação e exploração, realizadas recorrendo ao GeoGebra, contribui para a aprendizagem das funções e o seu uso na interpretação de situações e resolução de problemas. Seguidamente, apresento os motivos pelos quais opto por uma metodologia de investigação qualitativa, porque esta investigação tendo por base a minha própria prática profissional e porque decidi realizar estudos de caso.

4.1.1. Investigação qualitativa

Este estudo assume uma natureza qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994), este tipo de investigação revela-se particularmente adequado quando as questões são "formuladas com o objectivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural" (p. 16). Para estes autores, as investigações qualitativas têm essencialmente as seguintes características: (i) A fonte directa de dados é o ambiente natural da sala de aula/sala de informática, uma vez que as atitudes e comportamentos dos alunos podem ser influenciados pelo contexto onde estão inseridos e porque as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência; (ii) Os dados recolhidos são de natureza qualitativa, uma vez que têm a forma de palavras, isto é, terão por base transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos produzidos pelos alunos e documentos oficiais; (iii) O investigador qualitativo procura a compreensão do modo como os fenómenos decorrem, sendo o processo mais relevante do que os produtos finais obtidos; (iv) A análise dos dados é feita de forma indutiva, não tenho a intenção de confirmar hipóteses prévias, mas sim construí-las à medida que vou analisando a prática e o discurso dos alunos; e (v) Compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital para o investigador qualitativo. Note-se que, para os autores, estas características podem não ter o mesmo peso em todas as investigações qualitativas, pois a "questão não é tanto a de se determinada investigação é ou não é totalmente qualitativa; trata-se sim de uma questão de grau" (1994, p. 47). Além disso, o estudo segue o paradigma interpretativo, uma vez que, como referem Lessard-Hérbert, Goyette e Boutin (1990), existe "um interesse fulcral pelo significado conferido pelos actores às acções nas quais se empenham" (p. 32).

4.1.2. Investigação sobre a prática

Nos últimos tempos, a escola tem exigido ao professor que este actualize as suas práticas lectivas às várias transformações que a sociedade tem sofrido, provocando alterações na vida pessoal e escolar dos alunos. O professor deve elaborar as unidades de ensino em harmonia com o projecto educativo da escola onde lecciona, com as características da turma e com as características individuais de cada aluno para os quais lecciona. Assim sendo, o sucesso escolar constitui um percurso influenciado por várias variáveis – pedagógicas, formadoras e sociais. Ou seja, é necessário pensar na qualidade das aprendizagens dos alunos a vários níveis e não só pedagogicamente. No entanto, como referem Oliveira e Serrazina (2002), "a insatisfação sentida por muitos educadores com a sua preparação profissional, que não contempla determinados aspectos da prática, tem conduzido a movimentos de reflexão e de desenvolvimento do pensamento sobre as práticas" (p. 29). As investigações em torno da própria prática têm vindo a aumentar nos últimos anos. De facto:

> A investigação é um processo privilegiado de construção do conhecimento. A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente (Ponte, 2002, p. 6).

Para além do desenvolvimento profissional dos professores, a investigação do professor sobre a sua prática contribui também para desenvolver o sistema organizacional das escolas e contribui para a criação de conhecimentos sobre os processos educativos, que podem vir a ser úteis para outros professores, educadores académicos e comunidade em geral (Ponte, 2002). Outros autores, como Sierpinska e Kilpatrick (1998) e Alarcão (2001), defendem, igualmente, esta ideia, dizendo que os professores ao serem também investigadores, para além de planificarem e ensinarem, têm a possibilidade de reflectir sobre a sua prática de se interrogarem sobre as aprendizagens que os seus alunos realizam e as propostas que manuais e investigações levantam.

Partilhando destas perspectivas, pretendo que a presente investigação recaia sobre a minha prática lectiva (tornando-me deste modo professora e investigadora). Costumo utilizar apenas esporadicamente o *software* GeoGebra. Como vou apresentar uma unidade de ensino para o tópico “Funções” (8.º ano) com o auxílio deste *software*, pretendo investigar os resultados dessa proposta curricular, diferente daquela que os alunos estão habituados, bem como as aprendizagens que estes realizam neste contexto.

4.1.3. Estudo de casos

Tendo em atenção que a unidade de ensino é concretizada numa turma onde todos os alunos são participantes, decidi identificar um conjunto de alunos de menor dimensão, que permita fazer uma análise mais profunda de cada uma das questões em investigação. Optei, por isso, pela realização de dois estudos de caso, uma vez que este *design*, como referem Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), é “(i) o menos construído, portanto o mais real; (ii) o menos limitado, portanto o mais aberto; e (iii) o menos manipulável, portanto o menos controlado (p. 169).

Este *design* de investigação parece-me adequado uma vez que não pretendo modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é realmente, mostrando os aspectos particulares que a caracterizam (Yin, 1984). Esta abordagem está relacionada com o facto de entender que esta investigação, como diz Ponte (1994), é “particularística, isto é, [debruça-se] deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse” (p. 2). Para além desta característica, Merriam (1988), aponta mais três aspectos essenciais num estudo de caso qualitativo: (i) é descritivo, isto é, em vez de relatar os resultados sobre a forma de dados numéricos, relata-os sobre a forma de prosa e técnicas literárias para descrever, evidenciar imagens e analisar situações; (ii) é heurístico, esclarecendo a compreensão do fenómeno em estudo, podendo proporcionar a descoberta de um novo significado, alargar a experiência do leitor ou confirmar aquilo que ele já conhecia; e (iii) é indutivo, na medida em que se baseiam num raciocínio indutivo.

Segundo Ponte (1994), existem critérios de qualidade a ter em conta quando se pretende avaliar os estudos de caso, de tipo interpretativo, tais como a adequação, a clareza, o carácter completo, a credibilidade, no que diz respeito à validade conceptual, interna e externa e a fidedignidade, e o seu significado. Para este autor, uma investigação até pode ser considerada credível mas se não apresenta um problema relevante e compreensível, de nada serve. O inverso também de verifica, isto é, de pouco serve uma investigação que não seja minimamente credível.

Em cada caso a unidade de análise será um grupo de dois alunos. Esta opção fica a dever-se ao facto do espaço físico da sala de Informática, onde são realizadas as tarefas 3, 4 e5, não permitir que todos os alunos se sentem individualmente ao computador. Além disso, considero que para a realização de tarefas de natureza exploratória/investigativa o trabalho em grupo é mais vantajoso que o individual, uma vez que os alunos podem discutir as suas descobertas e partilhá-las com o seu par e, posteriormente, com a sua turma. Esta ideia é defendida por Brunheira e Fonseca (1996) que referem:

> As actividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos trabalharem em grupo. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos. (p. 4)

Assim sendo, os alunos trabalham em grupo para resolver as tarefas propostas. A escolha dos grupos é feita de acordo com os seguintes critérios (i) com o nível obtido, na disciplina de Matemática, no final do 1.º período de aulas; (ii) por tentarem justificarem os seus raciocínios, ainda que por vezes errados, facto de extrema importância quando se pretende analisar os seus produtos escritos, e (iii) revelarem disponibilidade para participar neste estudo. Foi constituído um grupo em que o aproveitamento escolar dos alunos se situa no nível 4 e outro em que o aproveitamento dos alunos se situa no nível 3.

4.2. Participantes

Esta investigação foi realizada numa turma do 8.º ano de escolaridade. Esta secção descreve a escola, o meio envolvente, a turma e os alunos seleccionados para estudo de caso.

4.2.1. A escola e o meio envolvente

A presente investigação foi desenvolvida numa escola do Baixo Alentejo, inserida num dos maiores concelhos a nível nacional, mas com uma densidade populacional muito baixa, cerca de 9 habitantes por km^2. Possui uma população muito envelhecida, pobre e com fraca actividade económica e empresarial. A principal actividade é a agricultura que também se encontra em declínio. Esta região depara-se com problemas como a desertificação, a não valorização dos recursos endógenos, a falta de contextos culturais enriquecedores, e os baixos índices de escolaridade da comunidade local que afectam a comunidade educativa. O projecto educativo da escola identificou como principal problema a desmotivação e o insucesso escolar dos alunos, seguindo-se a não participação dos pais e encarregados de educação na vida escolar.

A escola tem cerca de 50 professores e aproximadamente 300 alunos distribuídos por 16 turmas do 5.ºano ao 12.º ano, 2 turmas de cursos de Educação e Formação, nível II, e uma turma de um curso profissional. Não se registam grandes problemas de natureza disciplinar, mas sim de absentismo e falta de objectivos pessoais que conduzem ao abandono escolar e que a escola tem vindo a tentar resolver através de um trabalho conjunto entre os vários conselhos de turma, o conselho executivo e algumas parcerias locais. Esta escola tem 5 turmas do 2.º ciclo, 7 turmas do 3.º ciclo e 4 turmas do ensino secundário. Engloba também duas turmas de cursos de ensino e formação, conferindo equivalência ao 9.º ano, e um curso profissional, com equivalência ao 12.º ano de escolaridade. Deste modo, a escola é constituída por 19 turmas com a distribuição indicada no quadro 3.

Quadro 3. Número de turmas no ensino básico e secundário.

Ano de Escolaridade	N.º de turmas
5.º ano	3
6.º ano	2
7.º ano	3
8.º ano	2
9.º ano	2
10.º ano	1
11.º ano	1
12.º ano	2
C. Prof.	1
CEF	2
TOTAL:	19

4.2.2. A turma

A turma do 8.º ano que participa no estudo era constituída, inicialmente, por 21 alunos, dos quais 8 alunos eram do sexo feminino e 13 alunos do sexo masculino. No final do 1.º período, um dos alunos, do sexo masculino, de origem alemã, regressou, juntamente com a sua mãe, ao país de origem. Actualmente, a turma é constituída por 20 alunos. Destes, 8 foram meus alunos no ano passado e os restantes 12 faziam parte de uma turma onde eu prestava assessoria à professora titular, num dos blocos semanais.

Na turma não existem alunos repetentes, apresentando idades, no início do ano lectivo, compreendias entre os 12 e os 14 anos conforme mostra o quadro 4.

Globalmente, os alunos têm um bom relacionamento entre si, o quem nem sempre se traduz num bom comportamento em sala de aula. A grande maioria destes alunos faz parte da mesma turma desde o ensino pré-escolar, o que proporciona uma camaradagem e entreajuda entre eles.

Quadro 4. Idades dos alunos da turma

Idades	N.º de alunos
12	4
13	10
14	6

A grande maioria dos encarregados de educação não costuma comparecer nas reuniões convocadas pela directora de turma. As razões apresentadas para a falta de comparência são as mais variadas possíveis, sendo a mais frequente a ausência de transportes públicos das aldeias vizinhas para o centro da vila onde se situa a escola. Quando convocados directamente, para resolver um problema que envolva o seu educando, comparecem na escola, mas nem sempre no horário de atendimento do respectivo director de turma. A maioria dos pais dos alunos da turma frequentou ou concluiu o 1.º ciclo como se pode observar na figura 2.

Os alunos têm um aproveitamento satisfatório na generalidade das disciplinas, sendo a Matemática uma das disciplinas onde têm mais dificuldade, como se pode observar na figura 3 onde são apresentadas as classificações que obtiveram no 1.º período. Educação Tecnológica é a única disciplina na qual não apresentam níveis negativos. Os alunos encontram-se numa faixa etária cujo foco de interesses/motivações não se prende única e exclusivamente com o contexto académico, o que se reflecte nos resultados obtidos nas diversas formas de avaliação a que são submetidos.

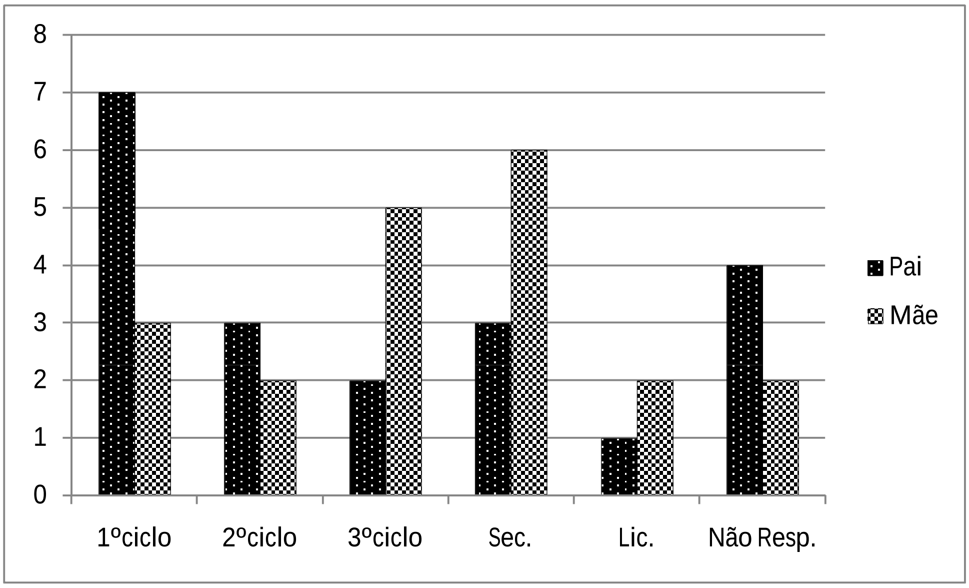


Figura 2. Habilitações literárias dos pais e mães dos alunos da turma.

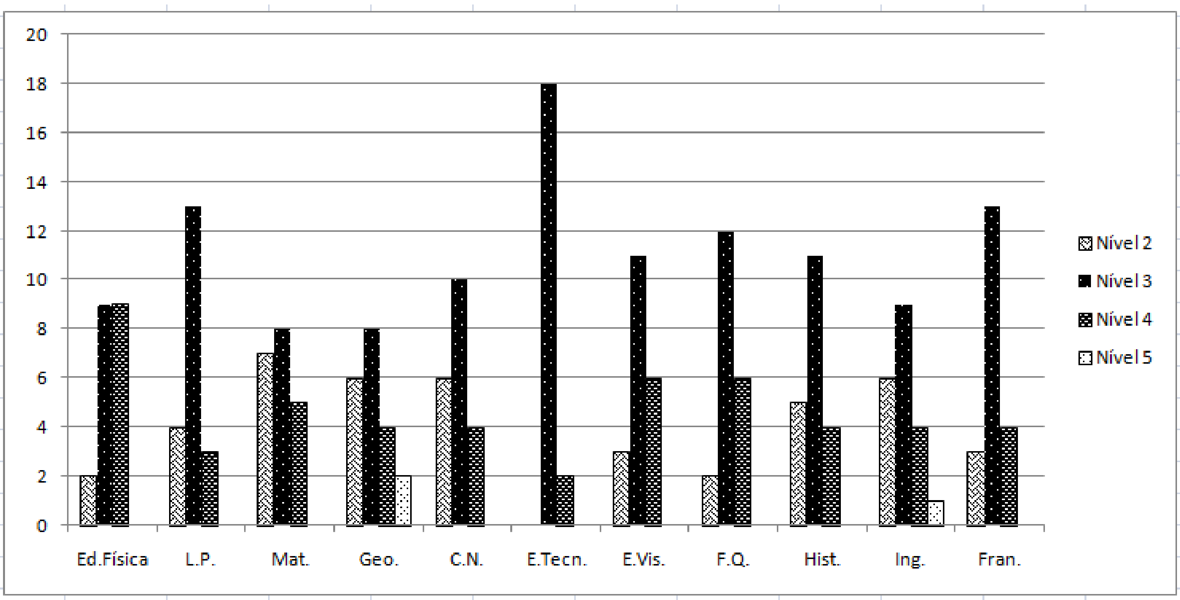


Figura 3. Níveis que os alunos obtiveram no 1.º período a todas as áreas disciplinares

Informei a turma sobre a minha intenção de lhe propor um conjunto de tarefas sobre o tema "Funções" a leccionar durante o 2.º período de aulas e que esta iniciativa estava integrada num estudo que me encontrava a desenvolver, no âmbito do mestrado. Informei, também, que iria realizar entrevistas, fora da sala de aula, nas quais apresentaria tarefas para resolver e também algumas questões de âmbito mais geral, a gravar em áudio. Os alunos mostraram-se muito curiosos e concordaram participar de imediato.

No entanto, como os alunos envolvidos são menores de idade, realizei um pedido de autorização aos encarregados de educação, para permitirem a análise os materiais produzidos, dentro e fora da sala de aula, pelos seus educandos, as transcrições de algumas das discussões geradas entre alunos e as transcrições de entrevistas que lhes fossem realizadas, fora da sala de aula. Os encarregados de educação foram também informados que os dados recolhidos serão usados exclusivamente para cumprir o objectivo da investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato. Este pedido de autorização escrito foi enviado pelos alunos e devolvido por estes devidamente preenchido e assinado pelo respectivo encarregado de educação.

Após a recolha das autorizações por parte dos encarregados de educação dei inicio à realização das primeiras entrevistas aos alunos que constituem os estudos de caso, seleccionados antecipadamente e de acordo com os critérios indicados. Este primeiro momento decorreu de 12 a 16 de Janeiro 2009, tendo contado com a colaboração de alguns docentes da turma que dispensaram os alunos das suas aulas.

4.2.3. Selecção dos grupos para estudo de caso

Joana e Joaquim, Filipa e Marina são os quatro alunos da turma seleccionados para a realização dos estudos de caso. Por um lado, quando lhes foi comunicado que poderiam vir a fazer parte do estudo, caso estivessem disponíveis para tal, mostraram-se imediatamente motivados para nele participar activamente. Por outro lado, os alunos de cada grupo tinham aproveitamento escolar diferente dos alunos dos outros grupos, mas tentavam justificar os seus raciocínios. Este facto é de extrema importância quando se pretende analisar os produtos escritos dos alunos. Os alunos seleccionados responderam prontamente às solicitações da minha parte.

Da análise do aproveitamento escolar de cada grupo podemos constatar que o "Joana e Joaquim" apresentavam nível 4 a Matemática e nenhuma classificação inferior a 3 nas restantes disciplinas; "Filipa e Marina" apresentavam nível 3 a Matemática e nenhum ou apenas um nível inferior a 3 às restantes disciplinas

4.3 Recolha de dados

Nesta secção apresento os procedimentos realizados antes, durante e após a recolha de dados. Apresento também os principais modos e instrumentos de recolha utilizados: observação de aulas, entrevistas, produtos realizados pelos alunos e outros documentos institucionais.

4.3.1. Procedimentos

A recolha de dados relativa aos alunos de uma escola requer diversos preparativos. O primeiro é informar o conselho executivo sobre a intenção de realizar o estudo com alunos de uma turma da escola e sobre os seus principais objectivos, solicitando autorização para o executar. O conselho executivo concordou de imediato, colocando-se ao dispor para qualquer eventualidade. O preparativo seguinte foi dar conhecimento deste estudo à coordenadora de grupo e à respectiva directora de turma.

Terminada a fase dos preparativos, iniciei o processo de recolha de dados que decorreu entre 20 de Janeiro e 17 de Fevereiro de 2009, onde foram aplicadas as tarefas propostas na unidade de ensino. Após a conclusão da unidade realizei a 2.ª entrevista, à semelhança das entrevistas anteriores. Por fim, os alunos foram sujeitos a um momento de avaliação dos conhecimentos adquiridos durante a leccionação da unidade didáctica.

4.3.2. Instrumentos

Numa investigação de carácter qualitativo é importante obter informações de diversas fontes de modo a permitir uma abordagem a partir de diversas perspectivas. Quando usados em simultâneo, estes complementam-se. Para Lessard-Hérbert, Goyette e Boutin (1990), existem três formas de recolha de dados: (i) o inquérito, que pode tomar duas formas distintas, a saber, a entrevista, se considerarmos a forma oral, e o questionário, se considerarmos a forma escrita; (ii) a observação, em particular, das aulas; e (iii) a análise documental dos produtos dos alunos. No presente estudo utilizo, como modos de recolha de dados, a observação das aulas, os produtos realizados pelos alunos e a entrevista.

4.3.2.1. Observação de aulas. Para facilitar a observação das aulas, pretendo fazer um registo de observações de aulas. Segundo Bogdan e Biklen (1994), este registo é essencial para que um estudo qualitativo seja bem sucedido e constitui-se como o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Neste documento identifico a aula, o número da tarefa, data, tempo previsto e gasto e poderei, ainda, fazer pequenas considerações sobre a tarefa, sobre a forma como a aula decorre, entre outras.

Com o objectivo de enriquecer os meus registos, usei, também, um gravador áudio, na sala de aula. O uso deste material permitia gravar as conversas que tinha com os alunos dos grupos, que se constituíam como estudos de caso, e a discussão final em grande grupo. Estes registos foram transcritos no final do dia, sempre que possível.

O gravador acompanhava-me quando me deslocava aos grupos, que constituem os estudos de caso, com o objectivo de registar as interacções entre mim e o grupo e a docente. No momento da discussão em grande grupo, o gravador ficava em cima de uma mesa no meio da sala de modo a registar todas as possíveis intervenções de todos os alunos da turma.

4.3.2.2. Produtos realizados pelos alunos. A presente unidade de ensino tem como suporte a realização das tarefas de exploração/investigação que se pede aos alunos que resolvam, cuja escrita se torna num documento importante para o investigador analisar. Em todas as tarefas os alunos tiveram que escrever, efectuar cálculos, completar tabelas ou desenhar gráficos, com ou sem o auxílio do computador, que serviram como dados de grande relevância para esta investigação. Estes dados poderão ser de dois tipos: em suporte papel ou em suporte informático. Os documentos realizados com papel e lápis serão fotocopiados e entregues aos alunos, ficando as cópias com o professor para análise. Os documentos em suporte informático serão guardados numa pasta no ambiente de trabalho. No final da aula, o professor recolhe essas pastas para posterior análise. Será, também, tido em conta dados que possam surgir das respostas obtidas nas outras tarefas e em alguma actividade que seja pedida aos alunos para realizarem em casa ou nas aulas de Estudo Acompanhado.

Sempre que resolvem as tarefas propostas na unidade de ensino, recolho as resoluções dos alunos, antes da discussão em grande grupo, e fotocopio-as. Devolvo-as aos alunos quando inicio a discussão, de modo a que estes possam completar ou corrigir as suas resoluções de modo a não prejudicar o seu estudo individual.

4.3.2.3. Entrevistas. Este trabalho envolve a realização de duas entrevistas. A primeira é realizada antes da unidade de ensino, e a sua finalidade é conhecer melhor os entrevistados e saber que conhecimento têm relativamente ao tópico "Proporcionalidade directa" leccionado no ano anterior. A segunda é realizada após a leccionação da unidade didáctica, de modo a ter consciência da evolução dos alunos depois da unidade de ensino ter sido ministrada. A realização das entrevistas foi autorizada pelos encarregados de educação, tendo sido por mim garantido o anonimato dos alunos intervenientes. Uma vez que o trabalho foi realizado sempre em grupos de dois alunos, parece-me que é fundamental que as entrevistas sejam feitas aos dois elementos do mesmo grupo, sendo que inicialmente são questionados individualmente, através da realização de questões de fórum pessoal. As entrevistas são audiogravadas para posterior transcrição integral possibilitando, identificar, com clareza, os momentos de hesitação e os momentos em que voltam atrás no seu raciocínio, por algum motivo. O facto dos entrevistados estarem perante um gravador tende a não ser um factor inibidor pois passado pouco tempo, as pessoas se esquecem da sua presença (Oliveira, 2004).

As entrevistas são semi-estruturadas uma vez que serão orientadas a partir de um guião, que se encontra em anexo, e que serve de garantia de que todos os tópicos relevantes são abordados, de modo a poder explorar algumas questões de acordo com o diálogo conseguido com o aluno. Estas entrevistas iniciam-se com perguntas pessoais e não intimidatórias, bem como perguntas sobre as actividades de que os alunos mais gostam. Seguidamente, quando o aluno evidencia que se sente mais à vontade com o processo, apresento a tarefa a ser realizada. O guião permite ter ao dispor um conjunto de questões adicionais para susceptíveis de colocar de modo a verificar o seu de compreensão do entrevistado. No decorrer da entrevista, os alunos são encorajados a reformular, elaborar suas respostas e sustentá-las com explicações, desenhos e argumentos. Este método de recolha de dados fornece: (i) uma visão mais profunda das experiências dos alunos; (ii) um conhecimento acerca das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas, conceitos, concepções erróneas ou alternativas; e (iii) uma compreensão de atitudes e perspectivas dos alunos relativamente à disciplina e ao conhecimento científico (Hunting, 1997). Também Tuckman (1994) considera que o uso de entrevistas permite o acesso à forma de pensar dos participantes, à maneira como estes se vêem a sim próprios e ao mundo que os rodeia, bem como através da análise dos trabalhos produzidos pelos alunos.

4.3.2.4. Outros documentos. Com o objectivo de caracterizar a turma em geral, os alunos dos grupos objecto de estudos de caso e o meio envolvente onde a escola está inserida, foram ainda analisados outros documentos. Estes documentos, produzidos pela escola, são (i) as fichas biográficas da turma, preenchidas pelos alunos no inicio do ano lectivo e (ii) os processos individuais dos alunos. Com estes dados, elaborei a caracterização da turma e, em especial, dos alunos que compõem os estudos de caso; Analisei ainda (iii) as pautas de avaliação e (iv) o projecto educativo, de modo a caracterizar e escola e o seu meio envolvente.

4.4. Análise de dados

Após a recolha de dados, segue-se a fase da organização de documentos. Como a investigação é de natureza qualitativa, a análise é realizada tendo em conta os aspectos teóricos revistos na literatura sobre o estudo das funções, os objectivos e as questões da investigação. A análise dos dados assume um carácter descritivo e interpretativo, onde todas as interpretações, por mim elaboradas, são baseadas na análise de vários documentos. O cruzamento destes documentos é um trabalho longo e complexo, mas permite apresentar a realidade por mim vivida de uma forma rica e objectiva.

Para cada grupo objecto de estudo de caso, são analisados vários instrumentos de recolha de dados como sejam, a entrevista inicial, a observação das aulas, os produtos realizados pelos alunos e a entrevista final. Na elaboração do capítulo referente à turma, utilizo a observação das aulas e os produtos escritos pelos alunos.

Para a realização da análise, considero como principais categorias: (i) a noção que os alunos evidenciam do conceito de função; (ii) as formas de representar algebricamente/graficamente uma função linear ou afim dadas graficamente/algebricamente; (iii) a identificação das dificuldades sentidas pelos alunos em cada um dos aspectos; (iv) as formas usadas pelos alunos que evidenciem a facilidade/flexibilidade em passar de uma de representação para outra (verbal, gráfica, simbólica e tabular); e (v) as formas de usar o *software* GeoGebra, do domínio deste programa.

4.5. Fases da investigação

O estudo decorreu entre Janeiro e Fevereiro de 2009. No quadro 4 apresento as várias fases em que a investigação foi estruturada e as actividades realizadas em cada uma delas.

Quadro 5. Fases da investigação

Ano	Mês	Tarefas
2008	Julho Agosto	• Conclusão do Projecto de Tese • Capitulo 1 (Introdução) • Revisão de Literatura
	Setembro Outubro	• Capítulo 2 (Revisão de Literatura) • Preparação do estudo (contactos com Conselho Executivo, Director(a) de Turma, alunos, pais)
	Novembro Dezembro	• Preparação da proposta pedagógica e das actividades a desenvolver • Capítulo 3 (Unidade de ensino) • Capítulo 4 (Metodologia)
2009	Janeiro Fevereiro	• Realização da entrevista 1 • Transcrição da entrevista 1 • Recolha de dados
	Março Abril	• Organização dos dados recolhidos • Análise de dados
	Maio/Dezembro	• Escrita
2010	Janeiro/Junho	• Escrita
	Julho/Agosto	• Conclusão dos vários capítulos
	Setembro Outubro	• Conclusão dos vários capítulos • Revisão e entrega da Tese

Capítulo 5

A turma nas aulas de Funções

Neste capítulo apresento uma descrição das aulas onde foram realizadas as tarefas de investigação. Descrevo, também, a forma como organizei o trabalho em cada aula e as discussões em grande grupo que se geraram onde procurei colmatar dificuldades, clarificar e construir conceitos.

5.1. Tarefa 1

A tarefa 1, “Tarifários”, tinha como objectivo principal introduzir o estudo da unidade, averiguando simultaneamente a capacidade de interpretação de uma situação expressa em linguagem natural. Com ela, os alunos devem relembrar a marcação e identificação de pares ordenados no referencial cartesiano, bem como identificar intervalos tempo de acordo com a variação da função representada. A tarefa permite, ainda, trabalhar as representações em linguagem natural, num gráfico cartesiano e numa tabela bem como promover a flexibilidade dos alunos em passar de uma representação para outra. A tarefa realizou-se no dia 20 de Janeiro de 2009, tendo faltado um aluno, e a sua discussão no dia 21 de Janeiro de 2009, na aula de Estudo Acompanhado.

5.1.1. Apresentação e realização da tarefa

A aula teve início às 9h com a escrita do sumário e a verificação das ausências. Os alunos sentaram-se de acordo com os pares previamente definidos. A tarefa foi distribuída às 9h10 e a leitura inicial foi realizada individualmente pelos alunos.

À medida que os alunos iam realizando a tarefa, fui-me apercebendo que a interpretação do enunciado não estava a ser feita correctamente. Os alunos não estavam a interpretar convenientemente a informação "Preço de todas as chamadas até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos". Foi necessário efectuar uma paragem na sua resolução de modo a realizar uma leitura em grande grupo. A grande maioria dos alunos, tomou consciência do erro que estavam a cometer na resolução das perguntas 1.1.1. e 1.1.2.. Outros alunos não perceberam o motivo pelo qual intervim, não alterando a sua resolução. Deixei que prosseguissem a resolução da tarefa, deslocando-me aos pares de alunos apenas quando por eles solicitada. Só quando confrontados com a pergunta 1.4., é que estes alunos se aperceberam do seu erro nas questões anteriores.

Como se tratava da primeira tarefa, e dado que, em geral, os alunos levaram um pouco mais tempo na sua resolução, deixei que a finalizassem, fazendo a discussão geral no dia seguinte, na aula de estudo acompanhado. As tarefas foram recolhidas no final da aula, fotocopiadas e devolvidas no início da aula seguinte, para que os alunos pudessem efectuar a sua correcção de acordo com a discussão em grande grupo.

5.1.2. Discussão da Tarefa

A discussão da tarefa foi realizada noutro dia, na aula de Estudo Acompanhado. Esta aula teve início com a verificação das ausências enquanto a delegada de turma distribuía as tarefas recolhidas no dia anterior, depois de fotocopiadas. Em cada questão pedia aos alunos que explicassem a forma como a resolveram, com o objectivo de identificar diferentes processos de resolução. Posteriormente, escolhia um elemento de cada par para ir ao quadro fazer a sua resolução. Por fim, corrigia a forma como os alunos a apresentavam e esclarecia as suas dúvidas face às resoluções que estavam no quadro.

5.1.2.1. Interpretação da informação expressa através de uma representação verbal. A primeira questão envolve a leitura de um anúncio publicitário do tarifário "Mais segundos" de uma empresa de comunicações. Nas várias perguntas que compõem esta questão é necessário fazer uma interpretação do enunciado (representação verbal) de modo a poder determinar coordenadas de pontos (1.1., 1.2. e 1.3.) e construir um gráfico (1.5.), respectivamente, representação tabular e gráfica.

Nas perguntas que compõem a questão 1, é necessário calcular imagens dados os objectos. O seu objectivo era dar a indicação se todos os alunos tinham compreendido a informação transmitida pelo enunciado da questão, ou seja, faziam uma interpretação correcta da informação apresentada. Verificou-se, então, o seguinte diálogo:

Professora: Então, qual é a resposta à pergunta [1.1.1.]?
Joana: Paga-se 1,6 cêntimos.
Professora: Todos concordam com a resposta?
Alunos em geral: Sim.
Professora: Então porque é que… E eu vi, já não me lembro em que grupos é que foi… Mas eu vi alguém escrever 0,64 cêntimos.
Francisco: Chegámos a esse valor porque fizemos 0,32 vezes 2.
Professora: Não leram bem o enunciado.
Francisco: Pois não.
Professora: Então, resposta à questão 1.1.1., qual é?
Filipa: 1,6 cêntimos.
Professora: Exactamente. Esta chamada… Quantos segundos é que tinha?
Filipa: 2 segundos.
Professora: 2 segundos é ou não é menos que 5 segundos?
Alunos em geral: Sim.
Professora: Logo, paga-se 1,6 cêntimos.

Através da resolução inicial dos alunos, pude constatar, mais uma vez, que estes não estavam a usar a informação de que todas as chamadas com duração até 5 segundos, inclusive, tinham o custo de 1,6 cêntimos. De facto, na sua maioria, os alunos multiplicavam o número de segundos por 0,32.

No que diz respeito à pergunta 1.1.3., para calcular o custo de uma chamada com a duração de 10 segundos, surgem duas formas de resolução diferentes: a utilização de duas regras de três simples, uma delas usando a informação inicial de que 1 segundo corresponde a 0,32 cêntimos e a outra, a informação de que 5 segundos correspondem a 1,6 cêntimos, e uma estratégia multiplicativa:

Professora: Pergunta 1.1.3…. Quantos segundos?
Alunos em geral: 10 segundos.
Professora: Então como é que se encontra o valor a pagar? Xavier…
Xavier: O meu grupo fez uma regra de 3 simples.
Professora: Uma regra de 3 simples.

Xavier: 1 está para 0,32 assim como 10 está para x. Depois calculámos e deu 3,2 cêntimos.

Professora: Um de cada vez. Diz lá Bernardo.

Bernardo: Fiz 0,32 cêntimos vezes 10 que é igual a 3,2 cêntimos.

Professora: Usaram processos diferentes. Filipa…

Filipa: Se 5 segundos é 1,6 cêntimos então 10 segundos é 2 vezes 1,6 segundos que é 3.2 cêntimos.

Professora: Já temos aqui três tipos de resolução. A Resolução do grupo do Xavier que usou uma regra de 3 simples baseada no preço de 1 segundo. Xavier queres ir ao quadro reproduzir a tua resolução?

Xavier: Vou.

Professora: Temos a seguir a resolução do Bernardo. O Duarte pensou: se um segundo é 0,32 então basta multiplicar 0,32 cêntimos por 10. Bernardo, podes ir ao quadro?

Bernardo: Sim.

Professora: E ainda temos a resolução da Filipa que utilizou a alínea anterior e pensou: se 5 segundos são 1,6 cêntimos, então 10 segundos são 2 vezes 1,6. São 3 respostas diferentes. Filipa podes ir ao quadro?

Filipa: Sim.

Professora: Corrijam o que está mal nas fichas de trabalho.

Na resolução da pergunta 1.1.4., os alunos expõem os processos de resolução:

Professora: Pergunta 1.1.4.. Pedem-nos o valor a pagar por 15 segundos. E então? Afonso…

Afonso: 0,32 vezes 15 que dá 4,8 cêntimos.

Bernardo: Nós também fizemos assim.

Professora: O grupo do Afonso e do Bernardo tiveram exactamente o mesmo tipo de raciocínio que há pouco: se um segundo custa 0,32 cêntimos, então 15 segundos corresponderá a 0,32 vezes 15. Filipa, diz lá…

Filipa: Se 10 segundos é 3,2 logo 15 segundos é 3,2 mais 1,6 que dá 4,8 cêntimos.

Professora: O grupo da Filipa e da Marina usaram exactamente a mesma estratégia que utilizou o grupo do Joaquim e da Joana, ou seja, 15 segundos é o mesmo que ter 10 segundos mais 5 segundos… corresponde a ter 10 mais 5… ou seja, 10 segundos vocês já tinham feito o cálculo que dava…

Alunos em geral: 3,2 cêntimos.

Professora: 5 segundos também já sabiam que era 1,6. Logo, 3,2 mais 1,6 dá 4,8. Outras pessoas utilizaram “regras de 3 simples”, ou seja, se 1 segundo custa 0,32, 15 segundos custam *x*. E ainda houve outro processo. Se 10 segundo custam 3,2 então 15 segundos custam *x*, que foi a resolução do grupo da Sandra, não foi Sandra?… Vamos escrever os três processos ao quadro?

De acordo com as respostas apresentadas, surgiram 3 processos diferentes de resolução, a saber, um processo multiplicativo, ou seja, multiplica o número de segundos pela constante de proporcionalidade, a aplicação da "regra de 3 simples" e um processo aditivo, fazendo uso de conhecimentos anteriores.

Este processo de discussão manteve-se nas questões seguintes. Sempre que surgia um processo de resolução diferente daquele que já tinha sido usado anteriormente, os alunos foram confrontados com ele. Por exemplo, na resolução da pergunta 1.1.5., onde se pedia que indicassem o custo de uma chamada com a duração de um minuto, um dos alunos da turma apresenta uma resolução diferente:

Professora: 1.1.5… Esta pergunta é muito complicada, não é? Francisco, como é que pensaste?

Francisco: 1,6 vezes 12 dá 19,2 cêntimos.

Professora: Esperem lá um bocadinho. Pensem lá na resolução do Francisco. Porque razão o Francisco fez 1,6 vezes 12?

(pausa prolongada)

Professora: Francisco, consegues justificar como é que chegaste ao valor 12?

Francisco: 1 minuto são 60 segundos. 60 segundos a dividir por 5 segundos dá 12.

Professora: O Francisco vai fazer a resolução do seu grupo ao quadro. Está bem? Espero que toda a gente tenha ouvido a resolução do Francisco. Tomou como unidade 5 segundos e foi ver quantos segundos tem um minuto. Quantos segundos tem um minuto?

Alunos em geral: 60 segundos.

Professora: E foi ver quantos conjuntos de 5 segundos cabiam dentro de 60 segundos e chegou à conclusão que cabiam 12 conjuntos. Depois, a seguir, utilizou uma regra de três simples. Se 1 conjunto de 5 segundos custa 1,6, então 12 conjuntos de 5 segundos há-de corresponder a *x* e efectuou o cálculo. Muito bem Francisco.

Esta resolução apresenta um processo de resolução que ainda não tinha surgido até aqui. O aluno considera, como unidade, um conjunto de 5 segundos e foi verificar quantos conjuntos de 5 segundos perfazem os 60 segundos. Concluiu que 60 era composto por 12 conjuntos de 5. De seguida, usou uma estratégia multiplicativa, fazendo o produto do custo de 5 segundos por 12 e obteve a resposta à questão apresentada.

A resolução da pergunta 1.4., por ser uma questão de interpretação, gerou muitas dúvidas. Por um lado, os alunos não perceberam a razão pela qual a questão fazia distinção entre o custo de chamadas com duração até 5 segundos, inclusive, e o custo de chamadas com duração superior a 5 segundos. Por outro lado, levantam-se questões relativas ao significado da palavra 'inclusive'. Alguns alunos leram as suas respostas, tendo sido feitas as devidas correcções:

> **Professora:** Vamos lá recapitular. Em chamadas até 5 segundos como foi a variação do preço? Há variação ou não?
>
> **Joaquim:** Não.
>
> **Professora:** Pois não. Então a variação é nula. Alexandra…
>
> **Alexandra:** Porque não varia.
>
> **Professora:** Nula, porque não varia. A partir de 5 segundos, como é que se verifica a variação?... Por cada segundo a mais acrescenta-se…
>
> **Joaquim:** 0,32 cêntimos.
>
> **Professora:** Por cada segundo a mais acrescenta-se 0,32 cêntimos. Esta variação é sempre a mesma ou não é?
>
> **Élio:** É.
>
> **Professora:** É, é sempre a mesma. É sempre mais 0,32 cêntimos à medida que passa 1 segundo. A variação, neste caso, é constante, e é constante igual a 0,32 cêntimos. Percebido?
>
> […]
>
> **Professora:** Então vamos lá ver. Em chamadas até 5 segundos … Se não ouve variação é porque o preço a pagar é sempre o mesmo, 1,6 cêntimos. Para chamadas com duração superior a 5 segundos … Para chamadas superiores a 5 segundos acrescenta-se tantos 0,32 cêntimos quantos os segundos de duração. Logo, a variação é constante e é igual a 0,32 cêntimos. Ok?

5.1.1.2. Passagem da representação verbal para a representação gráfica. Na pergunta 1.5., onde se pede que os alunos representem graficamente o tarifário até aos 20 segundos, para representar a situação descrita, surgiram vários tipos de representação. Foram apresentados quatro tipos de gráficos: histogramas, referencias cartesianos, onde estão representados pontos no 2.º e 4.º quadrantes, referencias cartesianos onde apenas foi tida em consideração a informação de que cada segundo custa 0,32 e referencias cartesianos correctos, respectivamente, como se vê na figura 4.

Na discussão desta questão, foi necessário começar por identificar as dificuldades sentidas pelos alunos, relembrando a noção de sistemas de eixos ortonormados, nome dos eixos, identificação das variáveis a representar em cada eixo, escala a utilizar em cada eixo, fazendo referência à mais conveniente e o procedimento a utilizar nas restantes, e a forma de traçar as linhas auxiliares à construção do gráfico.

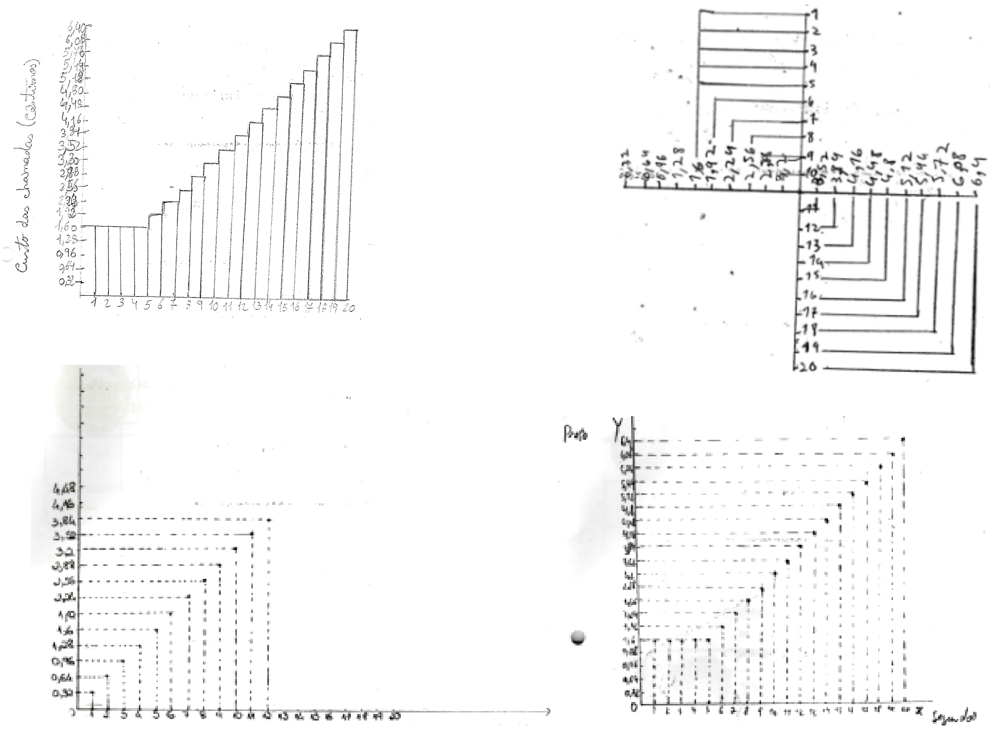
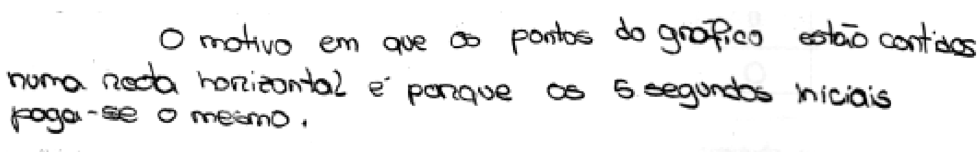


Figura 4. Resposta, dos alunos Joaquim, Afonso, Alexandra e Francisco, à pergunta 1.6. da tarefa 1.

Em relação à resolução das perguntas 1.6. e 1.7., os alunos apresentaram as duas respostas que mais se adequam. Em relação à pergunta 1.6. temos:



O motivo em que os pontos do grafico estão contidos numa recta horizontal é porque os 5 segundos iniciais paga-se o mesmo.

Figura 5. Resposta de Sandra à pergunta 1.6. da tarefa 1.

Em relação à pergunta 1.7.:

Vão aumentando sempre 0,32 cêntimos pois é esse o valor a pagar por segundo a partir de 5 segundos

Figura 6. Resposta de Bernardo à pergunta 1.7. da tarefa 1.

De acordo com as respostas apresentadas, os alunos justificam que os primeiros cinco pontos se situam sob uma recta horizontal pelo facto de terem sempre o mesmo custo. Os seguintes pontos situam-se sob uma recta crescente, uma vez que cada segundo, além dos cinco segundos iniciais, tem o custo de 0,32 cêntimos.

5.1.2.3. Passagem da representação gráfica para a representação tabular. Na segunda questão, a informação é dada por um gráfico a partir do qual é possível completar a tabela apresentada (representação gráfica e tabular). Nesta questão surgiram várias resoluções. Duas resoluções da pergunta 2.1. foram confrontadas por darem valores diferentes. São elas, a tabela apresentada por Xavier e a tabela apresentada por Joana. Foi necessário perceber o motivo dessa diferença.

Preço	*x*	0	15	30	31	37	45	60
Duração	*y*	0	7,5	7,5	7,85	9,95	12,75	15

Figura 7. Resposta de Xavier à pergunta 2.1. da tarefa 1.

x	0	10	30	31	37	51	60
y	0	7,5	7,5	7,85	9,25	12,75	15

Figura 8. Resposta da Joana à pergunta 2.1. da tarefa 1.

Estabeleci o seguinte diálogo com os alunos, com o objectivo de perceber a razão pela qual apresentam valores diferentes:

> **Professora:** Vamos comparar as duas resoluções: a do Xavier e a da Joana. Se ao 30 corresponde 7,5 e ao 31 corresponde 7,85… Do 30 para o 31, quantos segundos passaram?

Joaquim: 1.

Professora: 1 segundo. Se repararmos nos custos, qual foi a alteração daqui para aqui [aponta para o enunciado]?

Joaquim: 35 cêntimos

Professora: 0,35 cêntimos, não é? Do 31 para o 37… Quantos segundos passam do 31 para o 37?

Bernardo: 6 segundos.

Professora: O que é que o Xavier fez a seguir? Se 1 segundo custa 0,35, então 6 segundos vai corresponder a *x*. Foram estes os vossos cálculos? Usaram uma regra de três simples?

Xavier: Não, multiplicámos 0,35 por 6.

Professora: Fizeram um cálculo diferente. Então, 7,85 mais 2,1 dá 9,95. Certo? Agora, vamos ver a resolução da Joana. 31 segundos correspondem a 7,85. Então 37 correspondem a *x*. Foi isto, Joana? Então *x* vai ser quanto? 37 vezes 7,85 a dividir por 31. Dá o mesmo?

(Alunos fazem os cálculos).

Joana: Não…

Foi possível concluir que a razão pela qual apresentam valores diferentes prende-se com o cálculo do custo de 1 segundo. Enquanto Xavier começa por calcular o custo de um segundo, seguindo-se o cálculo de 6 segundos, Joana utiliza uma regra de três simples, não se apercebendo que após os 30 segundos de duração de uma chamada, cada segundo passaria a custar 35 cêntimos.

Para calcular a duração de uma chamada com o custo de 12,75, Xavier volta a utilizar o facto de 1 segundo custar 0,35 cêntimos. Utiliza uma regra de três simples, mas começa por calcular a diferença de custos entre uma chamada com o custo de 12,75 e outra com o custo 9,95 anteriormente encontrado. De seguida, utiliza o preço de um segundo para saber a duração de uma chamada com o custo de 2,8 cêntimos. Eis o diálogo estabelecido com o aluno:

Professora: Agora, aqui temos 12,75. Queremos descobrir este valor.

Xavier: Não sei se consigo explicar. Eu somei…

Professora: O Xavier fez de outra forma. O Xavier viu assim. 12,75 menos 9,95 quanto é que dá?

Élio: 2,8.

Professora: A quantos segundos correspondem 2,8 cêntimos? Sabem que 1 segundo custa 0,35.

Élio: 1 segundo dá 0,35. x segundos correspondem a 2,8. Dá 8.

Professora: Dá 8 segundos. Então, a quantos segundos corresponde uma chamada que custa 12,75 cêntimos?

Joana: 45.

Professora: Como chegaste a esse resultado?

Catarina: Se 37 segundos são 9,95, 37 mais 8 são 45.

Professora: Então, uma chamada com 45 segundos custa 12,75 cêntimos.

5.1.3. Balanço da aula

Os alunos participaram activamente na resolução da tarefa proposta, apesar de solicitarem frequentemente a presença da professora. Consideraram a tarefa muito extensa. A forma como a tarefa foi apresentada aos alunos, sem qualquer comentário prévio, faz com que eles se debrucem sobre as questões e as interpretem de modo pouco cuidadoso, procurando responder às questões colocadas. Alguns alunos mencionam que não ter tido tempo de pensar convenientemente na resolução de algumas perguntas. Apesar disso, uma vez que esta tarefa foi a primeira de uma sequência de tarefas desta natureza, e tendo em atenção o trabalho realizado em sala de aula e o grau de empenho dos alunos, considero que o trabalho realizado foi produtivo. Necessitavam frequentemente da minha intervenção para validar o trabalho realizado e prosseguir a resolução da tarefa. Sempre que solicitaram a minha presença, tentei esclarecer os alunos fazendo a mesma pergunta mas de forma diferente ou remetendo para outros conhecimentos já adquiridos, com o objectivo de desencorajar a prática desta dependência. Por outro lado, na aula de discussão, os alunos participaram bastante, chegando a esquecer o gravador que se encontrava numa mesa no centro da sala. Mostraram-se intervenientes exibindo o tipo de raciocínio que realizaram e transmitindo oralmente a sua resolução. Como surgiram varias resoluções, seleccionei um aluno de cada grupo para escrever a sua resolução no quadro e solicitei aos restantes colegas da turma que as copiassem para o caderno diário. Quando surgiam dúvidas relativamente ao que estava escrito no quadro ou quando a resolução carecia de alguma explicação para o seu bom entendimento, pedia ao aluno que se encontrava no quadro para explicar aos colegas a sua resolução. Deste modo, penso que consegui identificar dificuldades e esclarecer as dúvidas que se levantaram perante as diversas resoluções apresentadas. O facto de a discussão da tarefa ter sido realizada no dia seguinte não se revelou prejudicial para a respectiva qualidade.

5.2. Tarefa 2

A tarefa 2, “Máquina das perguntas” tinha como objectivo principal introduzir o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações. A tarefa realizou-se no dia 22 de Janeiro de 2009, tendo faltado 1 aluno e a sua discussão teve lugar no dia 26 de Janeiro de 2009.

5.2.1. Apresentação e realização da tarefa

A aula teve início às 14h10m com a escrita do sumário e a verificação das ausências. A tarefa foi distribuída às 14h15m, tendo sido entregue um exemplar a cada aluno. Foi feita uma breve explicação no que consistia a máquina de perguntas. No final da questão 1, chamei a atenção dos alunos para a noção de função, objecto e imagem, bem como para a forma como estavam representados o domínio e o contradomínio. Não foi feita qualquer referência à resolução da questão 1. Durante a resolução da tarefa, ia sendo chamada pelos pares de alunos para tirar dúvidas que podiam ser evitadas se estes tivessem feito uma leitura mais atenta da tarefa. Remetia-os para a leitura da parte da tarefa correspondente. Por fim, e mais uma vez, tive que optar entre a finalização da tarefa, por parte dos alunos, e fazer a sua discussão na próxima aula, ou interromper a sua realização. Por considerar que não haveria discussão possível caso os alunos não tivessem pensado, ainda que minimamente, em todas as questões, optei por permitir que a finalizassem e na aula seguinte foi feita a sua discussão.

Foi recolhido um exemplar de cada par, seguindo o princípio de que esta escolha deve alternar, de modo a que ambos os elementos do par registem o mesmo, sob pena do trabalho por eles realizado estar comprometido. O exemplar recolhido foi fotocopiado e devolvido na aula seguinte.

5.2.2. Discussão da tarefa

A aula da discussão da tarefa teve início com a verificação das ausências enquanto a delegada de turma distribuía as resoluções dos alunos recolhidas na última aula, depois de fotocopiadas. O processo de discussão da tarefa 2 seguiu moldes diferentes dos da discussão da tarefa 1, tendo aproveitado os exemplos dados pelos alunos para esclarecer as suas dúvidas relativamente à noção de função e às ideias básicas inerentes a este conceito.

5.2.2.1. Análise de correspondências e identificação de elementos correspondentes. Em relação à alínea 1.1., onde se pedia que os alunos sugerissem três objectos e as respectivas imagens, estes foram dando exemplos de países e respectivas capitais. Escrevi um dos exemplos citados no quadro e a partir dele continuei a discussão da tarefa. Comecei por explicar em que consiste um diagrama sagital. Os alunos da turma foram dizendo que elementos deveriam ser colocados em cada um dos conjuntos do diagrama sagital. Tendo por base o diagrama sagital construído, dei especial enfoque à noção de função e aos conceitos básicos inerentes. Os alunos continuavam a indicar o que deveria ser colocado dentro de chavetas quando se pretendia escrever o domínio e o contradomínio.

5.2.2.2. Identificação de correspondências que são ou não funções. A correcção da questão 2, onde são apresentadas quatro máquinas de perguntas e se pretende que, para além da respectiva correspondência sagital, indiquem qual/quais representam funções, foi bastante demorada. Por considerar os quatro exemplos de correspondências apresentados bons exemplos para consolidar nos alunos a noção de função, dei-lhes especial destaque. Assim sendo, em relação à questão 2, e ao tema "Numero de letras", uma das alunas sugeriu três palavras: jota, cão e casa. Com elas construímos diagrama sagital. Seguidamente, indaguei os alunos se esta correspondência era ou não uma função:

> **Professora:** Agora, será que estamos perante uma função? Acham? Diz lá Marina…
>
> **Marina:** Eu acho que sim…
>
> **Professora:** Diz lá Alexandra…
>
> **Alexandra:** Eu acho que não… Porque existem duas ligações para o quatro…
>
> **Professora:** O que é que diz a definição de função? Para cada elemento do conjunto de partida… Para cada um elemento do conjunto de partida… Olha lá Alexandra: o elemento jota corresponde a quantos elementos do conjunto de chegada?
>
> **Alexandra:** Só ao 4.
>
> **Professora:** E casa… Também é só ao 4… E cão…
>
> **Turma:** Ao 3.

Professora: Só ao 3. Então não corresponde a um e um só elemento?

Turma: (acena que sim).

Professora: Corresponde. Portanto, neste caso, é função (escreve no quadro a resposta).

De acordo com a resposta de Alexandra, os alunos perceberam que a Máquina de Perguntas com o tema "Número de letras" representa uma função.

Um dos alunos colocou uma questão pertinente, tendo como base o diagrama sagital que o seu par construiu:

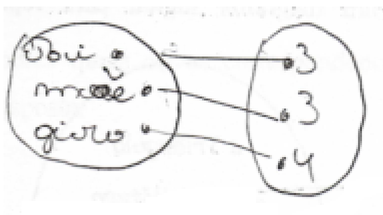


Figura 9. Resposta do par Afonso/Bernardo à pergunta 2.1. da tarefa 2.

Afonso: Aqui [aponta para o diagrama sagital], se eu escrever pai e mãe, têm os dois três letras, se eu marcar dois 3… Estava mal?

Professora: O que acham?

[Surgem várias respostas envoltas em alguma confusão]

Professora: Estava errado. Só se representa uma vez. Ligamos as duas palavras ao mesmo número 3.

O aluno apresenta três palavras das quais duas são compostas por três letras: pai, mãe e giro. Identifica os elementos do conjunto de partida, mas representa em duplicado um dos elementos do conjunto de chegada, apesar de não conferir uma orientação ao diagrama que desenhou. Esta resolução foi usada como ponto de partida para esclarecer os alunos sobre esta forma de representação. Em relação ao tema "Potências", os alunos foram unânimes ao afirmar que a correspondência apresentada correspondia a uma função, tendo-o justificado convenientemente.

O tema "Raiz quadrada" gerou algumas dúvidas. Por um lado, alguns alunos utilizaram um processo inverso, ou seja, escreveram no conjunto de partida números para os quais podiam calcular a sua raiz quadrada. Deste modo, construíram o seguinte diagrama sagital, justificando convenientemente o facto de representar uma função.

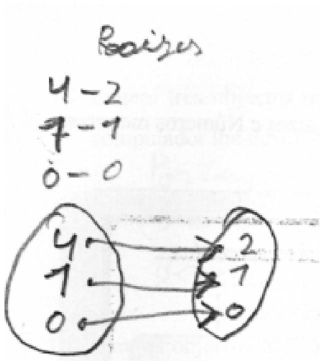


Figura 10. Resposta do par Rodolfo/Francisco à pergunta 2.1. da tarefa 2.

Em contrapartida, outros alunos indicam três elementos a colocar no conjunto de partida e quando representam os elementos no conjunto de chegada, utilizam valores decimais:

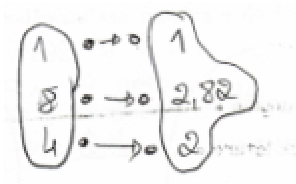


Figura 11. Resposta do par Sandra/Vicente à pergunta 2.1. da tarefa 2.

Outros alunos, ainda, apresentam o diagrama sagital sem conseguir determinar que valores colocar no conjunto de chegada que correspondam às raízes quadradas dos números por si sugeridos:

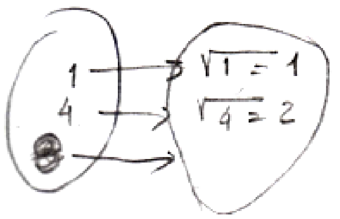


Figura 12. Resposta do par Marta/Luísa à pergunta 2.1. da tarefa 2.

Relativamente ao último exemplo, Marta sugeriu os números 1, 4 e 8. Tomei este exemplo em consideração para explicar aos alunos da turma o motivo pelo qual a correspondência não representava uma função:

Professora: (…) Figura 6… Vamos introduzir 3 números entre o 0 e o 8…

Marta: 1, 4 e 8.

Professora: O que é que a máquina vos vai devolver? A raiz quadrada caso ela seja finita… Raiz quadrada de 1…

Marta: É 1.

Professora: É 1… Já cá está representado?

Joaquim: Não.

Professora: Então vou escrever e vou unir… Raiz quadrada de 4…

Marta: É 2.

Professora: Já está representado?

Joaquim: Não.

Professora: Vou escrever e vou unir… Raiz quadrada de 8 (…) não é um número inteiro, logo não vou representar… A máquina não me devolve nada… A máquina só devolve se a raiz quadrada for um número inteiro…

Marta: E se fosse 5?

Professora: Raiz de 5 também não é um número inteiro, pois não?... A máquina também não ia devolver nenhum número.

De facto, não existe nenhum número inteiro que corresponda a raiz de 8. Assim sendo, existe um elemento do conjunto de partida que não corresponde a nenhum elemento do conjunto de chegada e, por este facto, a correspondência não representa uma função.

Em relação ao tema "Números menores", começam por existir inicialmente dúvidas de representação que rapidamente são ultrapassadas, devido a uma das explicações anteriores. Neste caso, o motivo pelo qual a correspondência não corresponde a uma função é diferente do anterior. A correspondência não traduz uma função pois existe pelo menos um elemento do conjunto A que corresponde a mais do que um elemento do conjunto B. Em relação a esta situação, teve lugar o seguinte diálogo:

Professora: Figura 7…

Alexandra: 2, 4 e 6.

Professora: O que é que a máquina devolve?

Alexandra: 1, 2, 3, 4 e 5.

Professora: A máquina devolve os números naturais menores que aquele que estamos a considerar… Então… Números menores que 2…

Alexandra: O 1.

Professora: Devolve o 1, só… 1 é um número natural que é menor que 2… A seguir temos o 4…

Afonso: 3.

Professora: Só?... Não, temos o 1, 2 e 3. Ora, o 1 já cá está, não está? Temos de o voltar a representar?

Afonso: Não.

Professora: Pois não. Vamos representar o 2 e o 3… portanto, o 4 vai corresponder ao 1, ao 2 e ao 3 (faz a ligação).

Élio: Então não podemos fazer 1 virgula 2 virgula 3 no mesmo ponto?

Professora: Não, cada ponto só diz respeito a um número. Ainda temos aqui o 6… Quais são os números menores que 6? O 1, 2, 3… Falta o 4 e o 5… O 6 vai corresponder a todos eles. E agora? Será que temos uma função ou não?

Afonso: Não, porque existe um elemento do conjunto A que não corresponde a algum…

Professora: A justificação que o vosso colega está a dar é válida?

Alexandra: Não, não há nenhum elemento que não corresponda a nada… Não é função, porque existe um número que corresponde a dois números.

Professora: Exactamente! Porque existe pelo menos um elemento do conjunto A que corresponde a mais do que um elemento do conjunto B.

Quanto à pergunta 2.3. e após terem obtido confirmação das correspondências que representam funções, os alunos identificam correctamente o domínio e o contradomínio. Foi feito um reforço no sentido do uso da notação correcta para o efeito.

A questão 3 permite reforçar os conhecimentos adquiridos anteriormente e trabalhar as noções de objecto e imagem. Nesta pergunta, são pedidas duas imagens e um objecto, às quais os alunos respondem oralmente e forma correcta:

Professora: Qual é a imagem do hexágono?
Joaquim: A imagem do hexágono é o heptágono.
Professora: É o heptágono… e qual é a imagem do triângulo?
Élio: É o quadrilátero.
Professora: É o quadrilátero. Estou-vos a pedir imagens de objectos… Vejamos agora… Qual é o objecto que corresponde à imagem pentágono? (confusão)
Professora: Agora estou-vos a pedir um objecto… E o que é que vos dou?
Joaquim: A imagem.
Professora: A imagem, exactamente. Vou ao conjunto B, vejo onde está essa imagem e vou ao conjunto A ver qual é o objecto que lhe corresponde... É o quadrilátero.

5.2.2.3. Análise de correspondências representadas através de gráficos. Relativamente à questão 4, onde são apresentados quatro gráficos que representam quatro correspondências e se pretende que os alunos identifiquem os que correspondem a funções, justificando, e antes de proceder à sua correcção, questionei os alunos da turma no sentido de relembrar em que eixo é que se representa a variável independente e em que eixo se representa a variável dependente, qual destas variáveis corresponde ao conjunto dos objectos e qual corresponde ao conjunto das imagens. Em relação aos referenciais apresentados, os alunos da turma identificam o 1.º, 3.º e 4.º referencias como sendo funções, dizendo que cada elemento do eixo das abcissas corresponde a um e um só elemento do eixo das ordenadas. Os alunos foram alertados para a forma como justificam as suas afirmações, indo de encontro aos termos usados na definição de função. O par Élio/António apresenta a seguinte justificação:

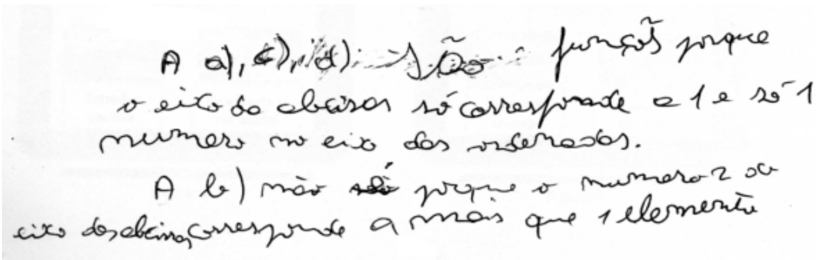

A a), c), d) são funções porque
o eixo do abcissas só corresponde a 1 e só 1
numero no eixo das ordenadas.
A b) não ~~são~~ porque o numero 2 do
eixo das abcissas corresponde a mais que 1 elemento

Figura 13. Resposta do par Élio/António à pergunta 4.1. da tarefa 2.

Os alunos apresentam uma justificação correcta, apesar de algumas incorrecções no seu registo. Não utilizam os termos objecto e imagem. Na primeira frase, não é o eixo das abcissas que corresponde, mas sim cada elemento desse eixo. Na segunda frase, podiam ter sido mais específicos e acrescentar que o número 2 corresponde a mais do que um elemento no eixo das ordenadas, em particular aos números 1 e 3.

5.2.2.4. Análise de correspondências representadas através de tabelas. No que concerne à correspondência entre duas variáveis apresentada sob a forma de tabela, os alunos são levados a identificar a que variável corresponde o conjunto de partida e a que variável corresponde o conjunto de chegada. Após esta identificação correcta por parte dos alunos, questionei-os no que diz respeito ao domínio e ao contradomínio:

Professora: Qual é o domínio?
Joaquim: 2, 4, 6, 9, 12, 15.

Professora: Exactamente… O domínio será o 2, o 4, o 6, o 9, o 12 e o 15…. Vamos escrever… e o contradomínio será o quê?

Joaquim: 1, 4.5, 3, 4.5, …

Professora: Não me parece…

Joaquim: Então porquê?

Professora: O 4.5 não está repetido? Então o segundo já não se escreve. Então qual é o contradomínio?

Joaquim: Então é 1, 4.5, 3, 6, 7.5.

Professora: Exactamente. Nesta correspondência há dois objectos diferentes que têm a mesma imagem. Quais são os objectos?

Marina: Professora …

Professora: Diz lá…

Marina: O 4 e o 9.

Professora: O 4 e o 9… e correspondem a que imagem?

Marina: Ao 4,5.

Professora: Ao 4,5. Este facto leva a não termos uma função?

Alunos: Não.

Professora: Pois não. Cada objecto …

Joaquim: Tem 1 e 1 só imagem.

Professora: Exactamente.

Joaquim identifica correctamente os elementos do domínio. No que diz respeito ao contradomínio, apesar de identificar a variável dependente, repete duas vezes uma imagem. Quando confrontado com o erro, altera imediatamente a sua resolução.

Relativamente à construção do gráfico cartesiano, um dos alunos da turma construiu-o no quadro, tendo-o feito correctamente. A maior parte dos alunos mencionou não ter tido tempo, durante a realização da tabela, para a sua construção. Dos gráficos que surgiram como resposta a esta pergunta, alguns apenas indicam os semieixos positivos. No entanto, existe um que merece especial atenção:

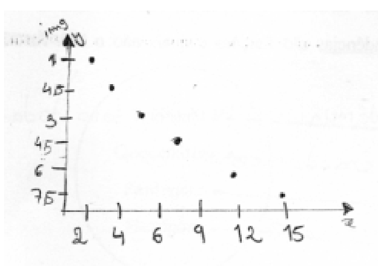


Figura 14. Resposta do par Filipa/Marina à pergunta 5.3. da tarefa 2.

Nesta resolução, para além de representarem apenas os semieixos positivos, os alunos evidenciam não ter a noção da orientação dos eixos, em especial do eixo das ordenadas, nem a noção de escala, no eixo das abcissas.

5.2.3. Balanço da aula

Durante a aula, os alunos continuaram a participar activamente e com grande empenho, pelo que considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo. Continuei a ser solicitada pelos alunos, agora não tanto para validar o que tinham escrito, mas sim para esclarecer a ideia de “máquina das perguntas”. Algumas das intervenções podiam ser evitadas se os alunos tivessem feito uma leitura atenta da tarefa. Remetia-os, assim, para a leitura da parte da tarefa correspondente, fazendo referência às definições indicadas, de modo a que os alunos tomassem consciência da semelhança entre o que lhes era solicitado e o conteúdo de determinada definição. Na aula de discussão, os alunos estiveram concentrados no trabalho que estava a ser realizado. Mantive a mesma dinâmica de trabalho, ouvindo as várias resoluções dos grupos de trabalho e solicitando a transcrição das várias resoluções no quadro, e posteriormente, para os cadernos dos alunos. As noções de função, domínio, contradomínio, objecto e imagem foram sendo esclarecidas à medida que os alunos participavam na discussão dos exemplos que iam sendo resolvidos no quadro, tendo em atenção as suas próprias sugestões. Deste modo, considero que consegui identificar dificuldades e esclarecer as dúvidas que tinham permanecido desde a resolução da tarefa. O facto de a discussão da tarefa ter sido realizada quatro dias depois não trouxe qualquer prejuízo, tendo servido não só para corrigir as resoluções dos alunos mas também para esclarecer os conceitos envolvidos.

5.3. Tarefa 3

A tarefa 3, “Perímetros” tinha como objectivo principal a representação gráfica e algébrica de funções de proporcionalidade directa/funções lineares. Realizou-se no dia 27 de Janeiro de 2009, tendo faltado 1 aluno, sendo a sua discussão no dia seguinte, na aula de Estudo Acompanhado.

5.3.1. *Apresentação e realização da tarefa*

A aula teve início às 9h05m com a escrita do sumário e a verificação das ausências. A tarefa foi distribuída às 09h10m. Para a realização desta tarefa, os alunos necessitavam de utilizar o software GeoGebra, com o qual já haviam trabalhado antes. Pedi-lhes que criassem uma pasta no ambiente do trabalho do computador, com o nome dos dois elementos do par, e que nela gravassem os ficheiros que iam construindo denominando-os pelo número da questão. Foram, também, alertados que, no final da aula, eu iria recolher as pastas dos ambientes de trabalho, eliminando-as.

Durante as recomendações iniciais e distribuição da terceira tarefa, os alunos mostraram-se muito excitados por estarem numa sala de informática, sentados em frente a um computador. Esta excitação ficava a dever-se não só ao facto de trabalhar com computadores mas também à hipótese de ter acesso à internet. Devido à distracção que isso provoca, fui obrigada a proibir o acesso a esta.

Tal como nas tarefas anteriores, não foi feita qualquer leitura inicial colectiva, ficando esta ao cargo dos alunos. À semelhança do que aconteceu anteriormente, no final da aula foi recolhido um exemplar da resolução da tarefa de cada par e guardados os ficheiros realizados pelos alunos.

5.3.2. *Discussão da tarefa*

A discussão da tarefa 3 foi realizada no dia seguinte, em Estudo Acompanhado, após a delegada de turma ter entregado os originais aos respectivos alunos. Em cada questão, pedia aos alunos que explicassem a forma como a resolveram e simultaneamente ia corrigindo, fazendo referência aos conceitos e à notação correcta a usar.

5.3.2.1. Exploração do enunciado. A resolução da tarefa começa com a construção, no GeoGebra, de um polígono regular, como o quadrado. Para tal, os pares devem seguir o guião de construção presente na tarefa que termina com a criação de um ponto E cujas coordenadas são o lado de um quadrado (abcissa) e o perímetro desse quadrado (ordenada). O uso do software deveria facilitar o entendimento de que o gráfico que representa a relação é um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta que passa na origem do referencial. No entanto, os alunos mostraram sentir dificuldades na interpretação do significado das variáveis x e y. Este facto é visível no seguinte diálogo:

Marina: Isto aqui é que eu não percebi.

Professora: Em primeiro lugar, *x* era o valor da abcissa logo o *x* ia ser igual… O que é que significava aquele *x=2*?

Joaquim: O valor do lado!

[…]

Professora: Era o lado. Quando escrevem *x=2* significa que o *a* vai tomar o valor…

Joaquim: 2.

Professora: 2, ou seja, é o lado do quadrado**.**

Marina: Mas é o lado do quadrado ou é o sítio onde está?

Professora: É o seu valor…Tu colocaste *x=a*… Lê lá o terceiro ponto do guião… O *a* era o lado do quadrado.

Marina: Mas o que é que significa o *a*?

Professora: É a medida… Do lado… A medida do lado do quadrado. É a medida.

Marina: Sim, eu também percebi isso. Mas como é que aquela linha passa por aqueles dois pontos?

Professora: Porque o computador vai buscar o valor de *a* que estava definido em cima e quando escrevemos *x=a*, o computador vai buscar esse valor e cria a recta que passa no eixo dos *xx*, no ponto 2. Certo?

Marina acena positivamente.

Marina mostra-se confusa em relação ao significado da variável *a*. Quando remetida para o terceiro passo do guião refere que a sua dúvida não residia na interpretação do significado de *a*, mas sim na forma como o programa traça uma recta a passar por dois pontos.

Em relação ao significado da variável dependente, Joaquim apresenta uma estratégia multiplicativa para apresentar o valor de *y*.

Professora: Em relação ao valor da ordenada… Íamos obter o quê? Íamos obter *y* igual…
Joaquim: A 8.
Professora: A 8. Como o lado quadrado media 2 e como o quadrado tem 4 lados…
Joaquim: *4*2=8*.
Professora: Igual a 8. *y=8*. E o que é que se obtém com *y=8*?
Alunos geram confusão.
Professora: O perímetro do quadrado de lado 2.

Para calcular o valor da variável dependente, Joaquim multiplica o valor da variável independente por quatro, ou seja, calcula o perímetro do quadrado multiplicando a medida do lado pelo número de lados. No entanto, ao responder por escrito a esta questão, o par apresenta o resultado deixando subjacente a utilização de uma estratégia aditiva:

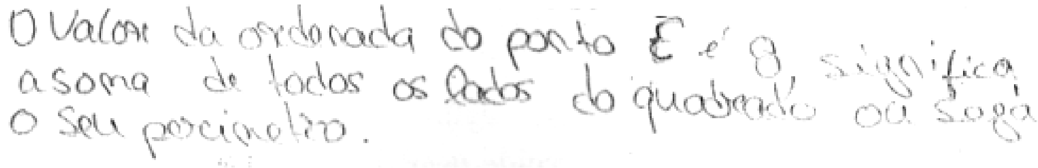

O Valor da ordenada do ponto E é 8 significa a soma de todos os lados do quadrado ou seja o seu perimetro.

Figura 15. Resposta do par Joana/Joaquim à pergunta II b) da tarefa 3.

Existem, também, pares que não interpretam correctamente o significado das variáveis apresentadas, trocam a variável independente pela dependente e não calculam de forma eficaz o valor do perímetro do quadrilátero.

Quando arrastam um dos pontos, os pares que respondem à questão IV, mencionam que estão perante uma linha recta que passa pela origem do referencial.

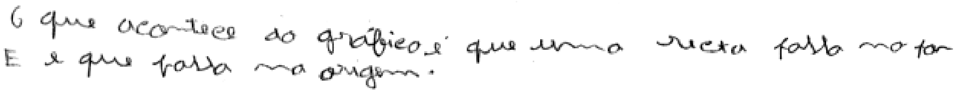

O que acontece ao gráfico é que uma recta passa no pon E e que passa na origem.

Figura 16. Resposta do par Xavier/Mário à pergunta IV da tarefa 3.

5.3.2.2. Mudança de representação (gráfica para tabular). Para responder à pergunta 1.1. do trabalho de casa do João, onde era necessário calcular uma imagem dado um objecto, os alunos utilizam duas estratégias diferentes. Alguns pares utilizam uma estratégia aditiva, adicionando quatro vezes a medida do lado, e outros uma estratégia multiplicativa, multiplicando a medida do lado por quatro. Estas duas formas de calcular o perímetro de um quadrado estão presentes no seguinte diálogo:

Professora: Então, indica qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2,34. Eu acredito que haja várias respostas, várias formas de calcular. Vejamos, Bernardo.

Bernardo: O perímetro de um quadrado cujo lado mede 2,34 é 9,36.

Professora: E como é que calculaste?

Bernardo: Fiz o 2,34 a dividir por 4.

Professora: A dividir por 4?

Bernardo: Não… Fiz 2,34 mais 2,34 mais …

Professora: Ok, uma estratégia aditiva. O que o grupo do Bernardo fez foi… Se o lado do quadrado mede 2,34, como tem 4 lados, o Bernardo foi somar 4 vezes o 2,34 (escreve no quadro os cálculos efectuados pelo Duarte) o que dava 9,36. A resposta está correcta. Toda a gente fez assim?

[Alguns alunos responderam simultaneamente que não.]

Professora: Não? Joaquim diz lá a tua resposta.

Joaquim: Fizemos 2,34 vezes 4.

Professora: Vezes 4, ou seja, o grupo do Joaquim pensou que se um lado mede 2,34, e como tem quatro lados, basta multiplicar 2,34 por 4 (escreve no quadro o segundo tipo de resolução) o que dá 9,36. Aplicaram uma estratégia multiplicativa. Há mais alguma estratégia de resolução? Alguém respondeu de outra maneira? Parece que não…

Para calcular um objecto dada uma imagem (pergunta 1.2.), os alunos utilizam uma estratégia multiplicativa:

Professora: Indica quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é 15,52. Henrique…

Afonso: Fizemos 15,52 a dividir por 4.

Professora: Exactamente. 15,52 a dividir por 4. Usaram o processo inverso, ou seja, para obterem o perímetro multiplicaram por 4, logo, se já têm o perímetro têm que dividir por 4 para encontrar o respectivo lado (escreve a resolução no quadro) que dá 3,88.

Para encontrar o valor de um objecto dada uma imagem, os alunos utilizam uma estratégia multiplicativa, ao multiplicar o perímetro por ¼, ou seja, dividindo o valor do perímetro por 4 para determinar o valor do lado do quadrado.

No que concerne à complementação da tabela presente na pergunta 1.3., os alunos utilizam duas estratégias diferentes. A mais comum é a utilização da regra de três simples para calcular os valores em falta. No entanto, no lado esquerdo da tabela está subjacente o método utilizado para calcular os elementos na penúltima e última colunas da tabela. Este método consiste em multiplicar os valores de y por 0,25.

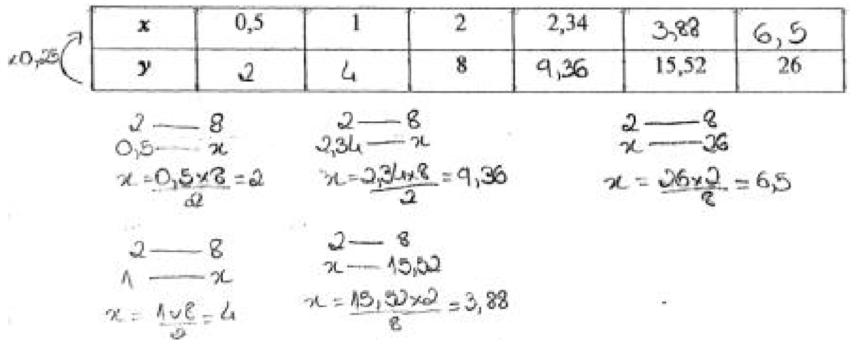


Figura 17. Resposta do par Alexandra/Tatiana à pergunta 1.3. da tarefa 3.

Outros alunos utilizam uma estratégia aditiva, apesar de não ser utilizável em todos os pares. Por exemplo, para calcular o par (1,4), Xavier utiliza o seguinte raciocínio:

Xavier: Como 1 mais 1 dá dois, então 4 mais 4 é 8…

Este tipo de cálculo é visível na resolução da pergunta 1.3.. No entanto, se pretende calcular, por exemplo, o objecto que tem imagem 15,52, o aluno utiliza uma estratégia multiplicativa, ao dividir esse valor por 4.

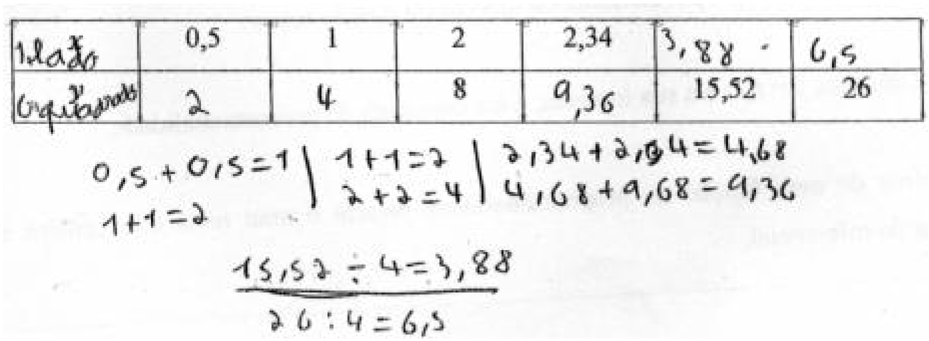


Figura 18. Resposta do par Xavier/Mário à pergunta 1.3. da tarefa 3.

5.3.2.3. Conceito de função de proporcionalidade directa. Para justificar o facto de o perímetro do quadrado ser directamente proporcional ao seu lado, os alunos apresentam a seguinte resposta:

Professora: Questão 1.4.. […] Este tipo de questões já foi resolvido no 7.º ano. Como é que faziam naquela altura, tendo em conta a tabela já construída?

Joaquim: Dividíamos o *y* pelo *x*.

Professora: E fazendo o **y** a dividir pelo *x* o que é que iam obter?

Joaquim: Sempre 4.

Professora: Fazendo por exemplo *8:2* dá *4*, *4:1* dá *4*… Bastava fazer só dois ou tinham que fazer para todos os pares?

Alunos: Todos.

Joaquim: E tínhamos que ver se davam todos o mesmo valor.

Professora: Tinham que fazer para todos e ver se davam o mesmo valor. Se fosse para provar que não eram directamente proporcionais é que bastava calcular para dois e verificar que eram diferentes. Que conclusão é que tiram daqui?

[Alunos respondem em simultâneo.]

Professora: Dá sempre *4*. Logo… É sempre constante… É sempre *4*. E qual é a constante de proporcionalidade directa?

Filipa: *4*.

Professora: *4*. E o que significa?

Filipa: Significa o número de lados do quadrado.

Professora: É isso mesmo, Filipa. O *4* que resulta destes cálculos significa que o polígono tem…

Alunos: *4* lados.

Professora: *4* lados. E esse é que é o significado da constante de proporcionalidade directa, o número de lados do polígono que considerámos.

O conceito de proporcionalidade directa foi introduzido no 7.º ano de escolaridade, com a construção de tabelas, gráficos e análise de situações concretas. Através do diálogo anterior, Joaquim revela ter adquirido a noção de proporcionalidade directa quando responde às várias questões da professora e mostra como calcula a respectiva constante. Filipa termina o raciocínio dizendo o que significa.

5.3.2.4. Mudança de representação (gráfica e tabular para algébrica). Para completar a expressão algébrica que representa a relação de proporcionalidade sugerida, e tendo como base o que é representado pela variável *x* e o que é representado pela variável *y*, os alunos identificam que basta multiplicar o lado do quadrado por 4 para obter o seu perímetro, completando-a correctamente.

Na etapa VI, os alunos inserem, na barra de entrada do GeoGebra, a expressão algébrica que acabaram de encontrar e têm de descrever o que observam. Ao introduzir a expressão algébrica, surge a representação gráfica da função *y=4x*, que se sobrepõe aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Esta constatação foi feita na medida em que observaram ter obtido uma recta que passa pelo ponto de origem do referencial. Contudo, o par Afonso/Bernardo vai mais longe ao dizer:

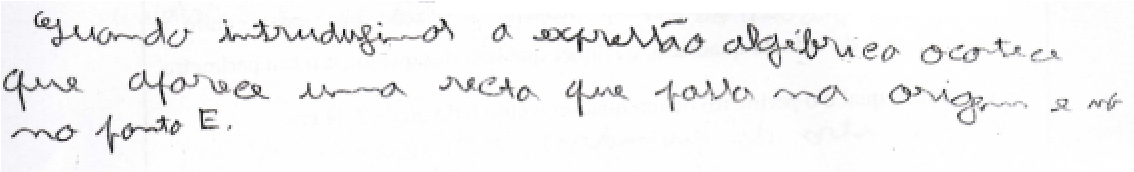


Figura 19. Resposta do par Xavier/Mário à pergunta VI da tarefa 3.

O par Afonso/Bernardo esclarece que o gráfico da expressão *y=4x* se vai sobrepor ao gráfico já construído anteriormente.

Na questão 2 do trabalho de casa, os alunos fazem uma exploração do caso dos triângulos equiláteros semelhante à efectuada a propósito dos quadrados. Para isso, são levados a construir, na etapa VIII, o gráfico de uma função, digamos *g*, que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero e o perímetro correspondente. À semelhança do que tinham acontecido na questão anterior, estabeleci com os alunos o seguinte diálogo:

> **Professora:** Na questão VIII pedem-nos um triângulo equilátero. Então qual deverá ser a expressão?
>
> **Alunos:** Ah!! *y=3x*.
>
> **Professora:** Pois é, *y=3x*. Quando desenharam no computador, o que é que vocês obtiveram? Uma recta que passava na origem. Portanto, era uma função…
>
> **Élio:** De proporcionalidade directa.

Os alunos identificam a expressão algébrica que representa a relação entre o comprimento do lado de um triângulo equilátero e o perímetro correspondente. Identificam, ainda, o tipo de representação gráfica que esperam obter.

Tendo como base a representação gráfica conseguida na etapa VIII, os alunos iniciam a resolução da questão 2. Nela, usam a notação específica das funções, determinam graficamente um objecto dada uma imagem, e uma imagem, dado um objecto, interpretam o significado dos valores encontrados neste contexto e formulam uma generalização ao representarem algebricamente uma função.

No que diz respeito à resposta dada à pergunta 2.1., a grande maioria dos alunos responde tendo como base a representação gráfica feita anteriormente, dizendo:

Sim é, porque é uma recta que contém a origem do referencial.

Figura 20. Resposta do par Marta/Luísa à pergunta 2.1. da tarefa 3.

No que diz respeito à pergunta 2.2., estabeleci o seguinte diálogo:

Professora: Pergunta 2.2. g(3)… A que é que é igual g(3)?

Joaquim: 3 lados.

Professora: A quê que é igual… O que é que eu tenho de escrever a seguir ao sinal de igual?

Afonso: 9.

Professora: Muito bem. Qual é que é o objecto?

Joaquim: É o 3.

Professora: É o 3. E a sua imagem…

Joaquim: É o 9.

Professora: É o 9. E na pergunta seguinte? O que é que é dado? É a imagem ou é o objecto?

Afonso: É a imagem.

Professora: É a imagem. Como é que calcularam o objecto?

Joaquim: Dividimos…

Professora: Dividiram por quanto Joaquim?

Joaquim: Por 3.

Professora: Porquê?

Joaquim: Porque tínhamos 3 lados.

Professora: Em cada uma das igualdades anteriores, qual é o significado desses valores no contexto.

Filipa: 3 é o lado.

Professora: Exactamente, é a medida de cada lado. E o 9?

Débora: 9 é o perímetro.

Na pergunta 2.1. a), apesar da hesitação inicial do Joaquim, os alunos mostram identificar as variáveis dependente e independente. Calculam correctamente a imagem do objecto *3* e o objecto que tem por imagem *18,3*. Explicam, também, o significado de cada um destes valores no contexto do problema.

5.3.3. Balanço da aula

No início da aula surgiram dificuldades relacionadas com a utilização do software na sua vertente algébrica (a vertente geométrica já é familiar aos alunos) que foram sendo resolvidas directamente com cada par de alunos. Fui, também, solicitada para esclarecer dúvidas na interpretação dos enunciados de cada questão, como por exemplo, na resolução da pergunta 2.2.. Esta envolve o formalismo $g(3)=\_\_\_\_$ e $g(\_\_\_\_)=18{,}3$. Para esclarecer as dúvidas que surgiram na sua interpretação, estabeleci o paralelo com a tarefa anterior ("Máquina de perguntas") e foi muito interessante verificar que a grande maioria dos grupos compreendeu de imediato a relação, o que lhes possibilitou a continuação do seu trabalho.

Devido às dificuldades e à necessidade de as colmatar em tempo útil, nem todos os grupos concluíram a resolução da tarefa. Este facto levou a que a sua discussão fosse mais demorada, uma vez que nem todos os alunos tinham pensado nas questões propostas. No entanto, os alunos participaram activamente na resolução da tarefa, no uso do software e na aula de discussão da tarefa, mesmo as que não a haviam finalizado. Considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo, dado o empenho e trabalho realizado pelos alunos. No final da correcção, perguntei aos alunos quais as maiores dificuldades que sentiram na resolução desta tarefa, ao que os alunos responderam que foi na utilização do programa, uma vez que só o haviam utilizado antes na sua vertente geométrica.

No final da aula, recolhi as pastas deixadas no ambiente de trabalho pelos diversos pares de alunos. Notou-se que a utilização de um software fomenta a curiosidade dos alunos.

5.4. Tarefa 4

A tarefa 4 pretende complementar a tarefa 3, no sentido em que as questões 1 e 2 apresentam um contexto relativo ao perímetro de polígonos regulares. Com a realização desta tarefa, os alunos podem não só reforçar a sua capacidade de analisar uma função a partir das suas representações, mas também analisar situações de proporcionalidade directa como funções do tipo $y = kx$ e relacionar as representações algébricas e gráficas das funções lineares. A aplicação da tarefa e a sua discussão realizaram-se no dia 03 de Fevereiro de 2009, estando todos os alunos da turma presentes.

5.4.1. Apresentação e realização da tarefa

A aula teve início às 9h05m com a escrita do sumário e a verificação das ausências. A tarefa foi distribuída posteriormente. Tal como nas tarefas anteriores, não foi feita qualquer leitura inicial colectiva, deixando esta ao cargo dos alunos. Os alunos continuaram a solicitar a minha presença, mas em menor número. É notório o aumento da autonomia em relação às aulas anteriores. Esta solicitação verificou-se especialmente na interpretação da primeira parte da tarefa onde necessitava de relacionar o comprimento do lado com o perímetro de quatro polígonos regulares representados. Em relação à utilização do GeoGebra, esta também foi feita de forma mais autónoma. À semelhança do que aconteceu anteriormente, foi recolhido um exemplar da resolução da tarefa de cada par, tendo sido fotocopiados imediatamente e entregues os originais aos alunos para discussão.

5.4.2. Discussão da tarefa

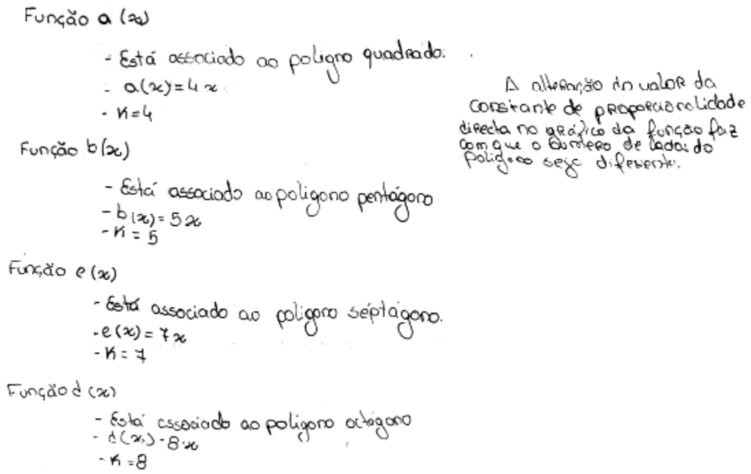
A discussão da tarefa 4 foi realizada no mesmo dia após a delegada de turma ter entregue os originais aos respectivos alunos. Em cada questão, pedia aos alunos que explicassem a forma como a resolveram e simultaneamente ia corrigindo, fazendo referência aos conceitos e à notação correcta a usar.

5.4.2.1. Interpretação de gráficos de proporcionalidade directa num mesmo referencial. Na questão inicial, surgem as representações gráficas das funções que relacionam o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares, a saber, quadrado, pentágono, heptágono e octógono. Nesta questão, os alunos devem identificar as expressões algébricas dessas funções, relacionando-as com as respectivas representações gráfica e algébrica.

Com o objectivo de esclarecer as dificuldades inicialmente detectadas aquando da realização da tarefa, no que diz respeito à interpretação da representação gráfica e quanto à notação a utilizar, registou-se o seguinte diálogo:

Professora: Tiveram problemas na resolução da questão inicial?
Alunos: Sim.
Professora: O que é que fizeram, digam-me lá! Pegaram no objecto *1*… No *x=1*… Verificaram o quê a seguir?
Joaquim: Que no *a(x)* correspondia…
Professora: A que perímetro?
Joaquim: Diga…
Professora: Correspondia a que perímetro no *a(x)*?
Joaquim: 4.
Professora: 4, exactamente. E esse 4 de onde é que resulta?
Joaquim: De um quadrado.
Professora: Do número de lados de um quadrado. Portanto, a sua expressão é *y=4x* e o *4* diz respeito ao número de lados. Quem vem resolver ao quadro?

Após resolver verbalmente as quatro alíneas em relação à função *a(x)*, que tinha por base um quadrado, pedi a um aluno que coloca-se a sua resolução no quadro com o objectivo de esclarecer as dúvidas residuais. A Alexandra construiu a resposta seguinte que dissipou as dúvidas dos colegas da turma.


Função a (x)
- Está associado ao polígno quadrado.
- a(x)=4x
- k=4

Função b(x)
- Está associado ao polígono pentágono
- b(x)=5x
- k=5

Função c (x)
- Está associado ao polígono séptágono.
- c(x)=7x
- k=7

Função d (x)
- Está associado ao polígono octógono
- d(x)=8x
- k=8

A alteração do valor da constante de proporcionalidade directa no gráfico da função faz com que o número de lados do polígono seja diferente.

Figura 21. Resposta do par Alexandra/Tatiana à questão inicial da tarefa 4.

Para cada função apresentada, a aluna indica o polígono regular, a expressão algébrica e a constante de proporcionalidade que está associado ao polígono indicado. Contudo, não o faz sob a forma de uma composição, tal como era solicitado no enunciado da questão. De facto, ao escrever uma composição, os alunos desenvolvem a sua capacidade de comunicar matematicamente por escrito o que obriga ao uso da terminologia adequada.

Quando tenta justificar o efeito da alteração da constante de proporcionalidade directa no gráfico da função, não o faz de forma correcta. Mário foi o aluno que respondeu correctamente às questões formuladas pela professora dizendo:

> **Professora:** Qual o efeito da alteração do valor da constante no gráfico da função? Olhem para as constantes encontradas e para os gráficos desenhados.
> **Joaquim:** Ah…
> **Professora:** Na *a(x)* o *k=4*, na *b(x)* o *k=5*. E o gráfico? Olhem para as rectas desenhadas…
> **Mário:** A *b(x)* é mais inclinada.
> **Professora:** Exactamente. Quanto maior for a constante de proporcionalidade directa, mais inclinada é a recta representada. Muito bem!

Ao observar o gráfico apresentado e tendo em consideração as constantes determinadas, o aluno constatou que quanto maior é a constante de proporcionalidade maior é a inclinação da respectiva recta.

5.4.2.2. Interpretação das representações de uma função de proporcionalidade directa dado um objecto não nulo e a sua imagem. A questão 1 diz respeito a um polígono regular específico que deve ser identificado pelos alunos, dado um objecto não nulo e a sua imagem. Devem, também, escrever uma expressão algébrica para a função linear que lhe corresponde. Quando solicitada a resposta a esta pergunta, surgiu o seguinte diálogo:

> **Professora:** Primeira questão. O que é que pede na 1ºquestão? Diz lá Marina.
> **Marina:** Fizemos 20,4 a dividir por 3,4.
> **Professora:** Que dava…
> **Marina:** 6.
> **Professora:** 6, logo 6 é o…
> **Alunos:** Hexágono.

A aluna dividiu o perímetro pelo comprimento do lado do polígono, obtendo o número de lados do polígono. Este é o raciocínio tido pela maior parte dos grupos de trabalho. No entanto, o par Miguel/Martim apresenta uma resolução diferente, mas sem identificar o polígono que está na base desta pergunta:

$$3{,}4+3{,}4=6{,}8$$
$$6{,}8+6{,}8=13{,}6+6{,}8=20{,}4$$

Figura 22. Resposta do par Miguel/Martim à pergunta 1.1. da tarefa 4.

Os alunos utilizaram uma estratégia que consiste em somar várias vezes o valor do lado do polígono. Somam duas vezes o valor *3,4* e de seguida, somam duas vezes o resultado obtido. Apesar de o raciocínio estar correcto, não conseguem retirar a conclusão quanto ao número de lados do polígono.

No que concerne à pergunta 1.2. apenas dois dos dez pares não escreveu a expressão algébrica que representa a função que a cada comprimento do lado associa o perímetro deste polígono regular, como sendo $y=6x$. Por exemplo, o par Miguel/Martim apresenta a seguinte expressão:

$$f(x)=20{,}4$$

Figura 23. Resposta do par Miguel/Martim à pergunta 1.2. da tarefa 4.

Apesar de não apresentar a função correcta, utiliza uma notação diferente dos outros pares. Identifica a variável dependente como sendo $f(x)$.

Na pergunta 1.3., os alunos realizam uma construção no GeoGebra, onde se encontra a representação gráfica da função $y=6x$. A imagem seguinte é a resolução do par Miguel/Martim:

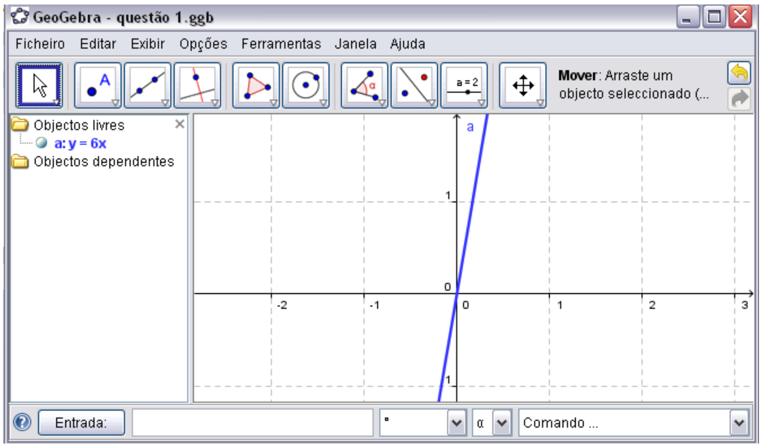


Figura 24. Resposta do par Miguel/Martim à pergunta 1.3. da tarefa 4.

5.4.2.3. Mudança de representação (algébrica para tabular e gráfica). A questão 2 apresenta a expressão algébrica de uma função linear, a partir da qual os alunos têm de completar uma tabela determinando imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e determinando objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal.

O processo mais frequente para calcular a imagem de um determinado objecto é o utilizado pelo par Mário/Xavier:

Xavier: 3 a dividir por 2 e vezes -7.

Para calcular o objecto que tem uma determinada imagem, Joaquim auxilia os colegas dizendo:

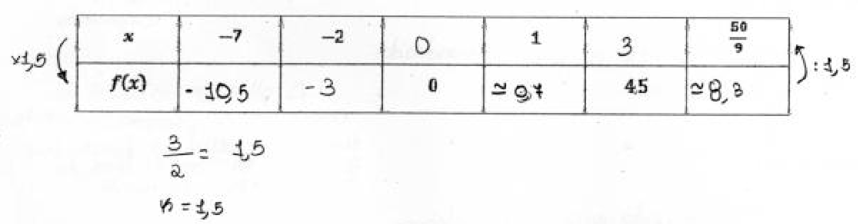
Joaquim: Fazemos 4,5 igual a 3/2 de x. Dá … Mas ainda podemos fazer de outra maneira.
Professora: Diz lá Joaquim.
Joaquim: Fizemos 4,5 vezes dois a dividir por 3.
Alexandra: Pois, é o oposto.
Professora: Dá sim senhora. É o inverso. É outro processo. Muito bem Joaquim.

Joaquim utiliza a expressão algébrica apresentada e resolve a equação *4,5=3/2x*. No entanto, identifica outra forma de efectuar o cálculo. Considera que para calcular o objecto que tem uma determinada imagem basta multiplicar essa imagem pelo inverso da constante de proporcionalidade presente na expressão algébrica da função em causa, ou seja, *4,5*2/3*.

Alexandra utilizou um processo diferente. À semelhança do que fez em tarefas anteriores, começa por calcular a constante, dizendo:

> **Alexandra:** Fomos calcular a constante, que é 1,5, e depois multiplicamos por *x* …
>
> **Professora:** A Alexandra está certa. A Alexandra está a dizer que ter 3 sobre 2 é o mesmo que ter 1,5 e que está a multiplicar por *x*, a sua operação inversa é a divisão, portanto, basta fazer 4,5 a dividir por 1,5…

Após este cálculo, preenchem a tabela, onde indicam, do lado esquerdo da mesma, que basta multiplicar por 1,5 os valores de *x* e, do lado direito da tabela, dividir por 1,5 os valores da variável dependente, como se pode ver na seguinte figura:



x	-7	-2	0	1	3	$\frac{50}{9}$
$f(x)$	- 10,5	- 3	0	≃ 0,7	4,5	≃ 8,3

Figura 25. Resposta do par Alexandra/Tatiana à pergunta 2.1. da tarefa 4.

Em relação à representação gráfica, pedida na pergunta 2.2., esta é feita através da utilização do GeoGebra, conforme indicação na referida pergunta. Nas figuras 26 e 27 apresentam-se duas construções realizadas pelos pares Rodolfo/Francisco e Alexandra/Tatiana, respectivamente. Rodolfo inseriu a função *f(x)=1,5x*, enquanto Alexandra inseriu *f(x)=3/2x*:

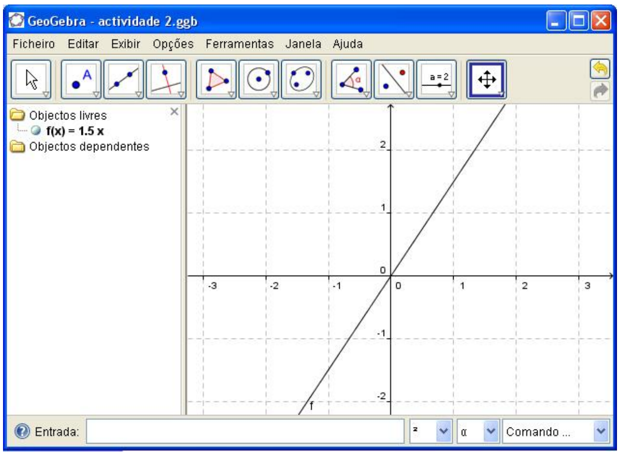


Figura 26. Resposta do par Rodolfo/Francisco à pergunta 2.2. da tarefa 4.

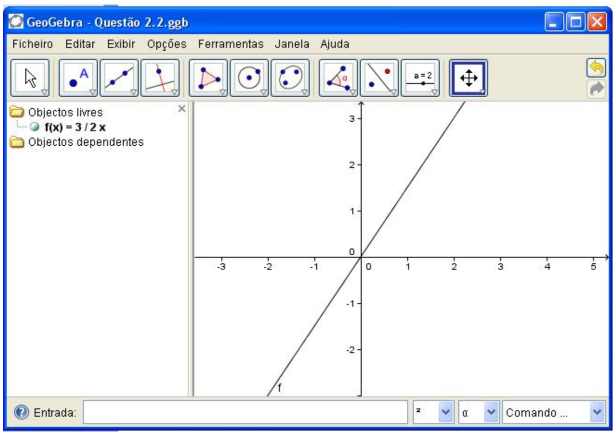


Figura 27. Resposta do par Alexandra/Tatiana à pergunta 2.2. da tarefa 4.

5.4.2.4. Identificação do gráfico de funções de proporcionalidade directa. Na última questão da tarefa, estão presentes cinco representações gráficas em relação às quais os alunos devem identificar as que representam funções lineares. Os alunos recorrem às características próprias de um gráfico desta natureza para identificar os gráficos que representam as funções de proporcionalidade directa:

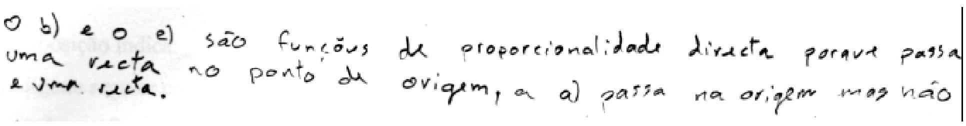


Figura 28. Resposta à questão 3 da tarefa 4.

O par Xavier/Mário justificam que as funções representadas nos gráficos das figuras b) e e) representam funções de proporcionalidade directa devido ao facto de neles estar representada uma linha recta que passa no ponto de origem do referencial. Apresentam, também, uma razão pela qual excluíram desta classificação a representação a). Não apresentam o motivo pelo qual excluíram as representações c) e d).

5.4.3. Balanço da aula

Os alunos participaram activamente, quer na resolução da tarefa proposta quer no uso do software. Considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo, dado o empenho dos alunos. No final da aula, recolhi as pastas deixadas no ambiente de trabalho pelos diversos pares de alunos. Na aula de discussão, os alunos participaram de forma muito satisfatória, esquecendo que estava a ser realizada uma gravação áudio. A metodologia seguida durante a discussão da tarefa foi a mesma já utilizada noutras aulas. De acordo com as resoluções apresentadas, um elemento do grupo ia ao quadro escrever a sua resolução e os restantes alunos transcreviam-nas para o seu caderno diário. Nas perguntas onde era solicitada a representação gráfica, interpelava os alunos no sentido de dizerem as características dos gráficos que tinham construído. Dada a participação dos alunos e a dimensão da tarefa, penso ter consegui identificar dificuldades e esclarecer as dúvidas que se levantaram perante as diversas resoluções apresentadas. A realização e discussão da tarefa na mesma aula foram possíveis devido essencialmente à adaptação progressiva dos alunos ao GeoGebra e ao facto de terem um papel mais activo na sua aprendizagem, sendo o ritmo ditado por eles.

5.5. Tarefa 5

Na tarefa 5 os alunos interpretam a informação apresentada através de um anúncio sobre uma situação a modelar através de uma função de proporcionalidade directa e traduzem uma relação expressa em linguagem natural por uma relação em linguagem matemática, uma expressão algébrica e um gráfico de barras. A tarefa foi distribuída os alunos, fazendo referência à datação do artigo. A aplicação da tarefa e a sua discussão realizaram-se no dia 04 de Fevereiro de 2009, na aula de Estudo Acompanhado, de modo que os alunos pudessem usufruir da sala de Informática. Uma das alunas não esteve presente e outra ausentou-se, apenas, no 2.º tempo.

5.5.1. Apresentação e realização da tarefa

A aula teve início às 10h50m com a escrita do sumário e a verificação das ausências. A tarefa foi distribuída posteriormente. Tal como nas tarefas anteriores, não foi feita qualquer leitura inicial deixando esta ao cargo dos alunos, à excepção da chamada de atenção para a data do artigo presente no enunciado. À semelhança do que aconteceu anteriormente, os alunos desenvolveram um trabalho praticamente autónomo. À medida que ia circulando pelos grupos de trabalho, os alunos afirmavam para o seu par, que o trabalho a realizar era semelhante ao realizado na tarefa anterior. No final da aplicação da tarefa, a delegada de turma recolheu um exemplar da resolução da tarefa de cada par, tendo sido fotocopiados imediatamente e entregues os originais aos alunos para discussão.

5.5.2. Discussão da tarefa

A discussão da tarefa 5 foi realizada no mesmo dia após a delegada de turma ter sido entregues os originais aos respectivos alunos. Seguiu os mesmos moldes da discussão das tarefas anteriores, ou seja, em cada questão, pedia aos alunos que explicassem a forma como a resolveram e simultaneamente ia corrigindo, fazendo referência aos conceitos e à notação correcta a usar.

5.5.2.1. Análise da situação de proporcionalidade directa descrita na notícia de jornal. A primeira questão da tarefa prende-se com a leitura e interpretação de uma notícia de jornal relativa à descida dos preços dos combustíveis. Aqui encontram várias informações que devem seleccionar e utilizar na resolução das questões propostas. Por exemplo, nas perguntas 1.1. e 1.2., os alunos devem identificar o preço de cada de um litro de combustível antes e depois da alteração dos preços.

Para responder à pergunta 1.1., surgem duas estratégias possíveis: a utilização de uma regra de três simples e uma estratégia multiplicativa, ou seja, a multiplicação do preço de um litro de combustível pelo número de litros a adquirir, respectivamente. Estas estratégias são igualmente utilizadas na pergunta 1.2.. Utilizam, contudo, alguns cálculos de modo a produzirem a resposta à pergunta. Por exemplo, o par Rodolfo/Francisco utiliza a regra de três simples para calcular o custo de 40 litros de combustível pelo novo preço. De seguida, calcula a diferença entre os dois preços (antes e depois) para saber qual a poupança realizada:

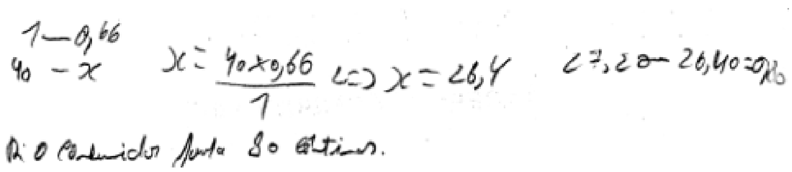


Figura 29. Resposta do par Rodolfo/Francisco à pergunta 1.2. da tarefa 5

O par Mário/Xavier utiliza a estratégia multiplicativa descrita para calcular o novo preço de 40 litros de combustível e de seguida calcula a poupança efectuada:

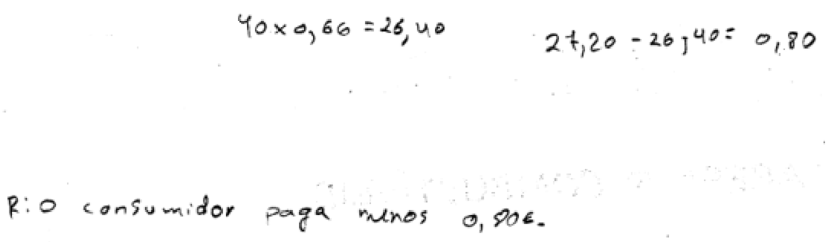


Figura 30. Resposta do par Mário/Xavier à pergunta 1.2. da tarefa 5

Por fim, o par Élio/António começam por calcular a poupança efectuada na compra de um litro de combustível e só depois utilizam uma estratégia multiplicativa para calcular a poupança efectuada na aquisição de 40 litros de combustível:

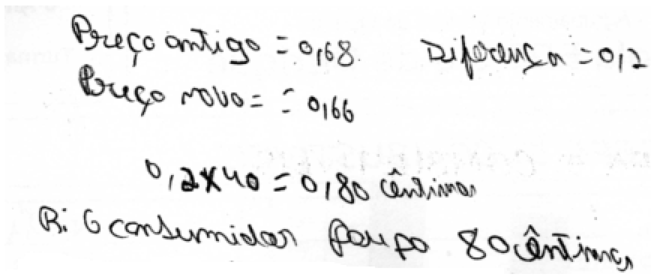


Figura 31. Resposta do par Élio/António à pergunta 1.2. da tarefa 5

A pergunta 1.3. pede aos alunos que, dado um custo final e o número de litros adquiridos, identifiquem se o consumidor abasteceu antes ou depois da alteração dos preços. Os alunos calculam o preço de 38 litros de combustível antes e depois da alteração dos preços e seleccionam a opção cujo resultado é o custo apresentado. Um dos pares utilizou uma estratégia diferente das duas mencionadas anteriormente. É o par

Rodolfo/Francisco que aplica a estratégia da divisão, dividindo o custo total pelo número de litros de GPL abastecidos, obtendo o preço de um litro:

> **Professora:** Questão 1.3.. Um consumidor abasteceu o seu automóvel com 38 litros de GPL e pagou 25,08. Abasteceu antes ou depois da descida?
>
> **Alunos:** Depois.
>
> **Professora:** Porquê? Como chegam a essa conclusão? Francisco.
>
> **Francisco:** 25,08 a dividir por 38 que dá 0,66.
>
> **Professora:** Ou seja, é o preço de um litro no dia 3 ou no dia 4?
>
> **Francisco:** No dia 4.
>
> **Professora:** No dia 4, exactamente. Todos fizeram desta forma ou houve alguma resolução diferente?
>
> (…)
>
> **Luísa:** Posso dizer como é que fizemos?
>
> **Professora:** Diz lá Luísa.
>
> **Luísa:** Nós pusemos 38 vezes 0,68 que dava 25,84…
>
> **Professora:** Como não dava o mesmo resultado foste experimentar o outro. Foi isso?
>
> **Luísa:** Foi. Depois fizemos 38 vezes 0,66 que dava o resultado.
>
> **Professora:** Ok.

Os alunos identificam o valor obtido como sendo o preço do litro de combustível após a descida dos preços.

A pergunta 1.4. pede para determinar a constante de proporcionalidade presente na relação de proporcionalidade relativa aos dois dias em estudo. Essas constantes são determinadas correctamente pela maioria dos alunos, o que possibilita a resposta à pergunta 1.5. Os alunos escrevem as expressões algébricas que definem as funções que relacionam o número de litros, antes e depois da descida de preços usando as duas notações para a variável dependente, $y=0,66x$ ou $L(x)=0,66x$, por exemplo.

5.5.2.2. Análise da situação de proporcionalidade directa com base na expressão algébrica. Com base na expressão algébrica sugerida pelo enunciado da questão 2, os alunos devem identificar a constante de proporcionalidade e o seu significado, determinar a imagem dado o objecto e um objecto dada a sua imagem. Na pergunta 2.1. pede-se que identifiquem a constante de proporcionalidade e indiquem o seu significado. Marina intervém com o objectivo de responder oralmente à questão dizendo:

Marina: A constante é k=0,61 e esta constante significa o preço de litros de GPL em promoção nos abastecimentos de Gás-PT.

Marina identifica a constante de proporcionalidade mas não interpreta o valor da constante como sendo o preço de um litro de combustível.

A pergunta 2.2. pede aos alunos para calcular a imagem dado um objecto (pergunta 2.2.1.) e um objecto dada uma imagem (pergunta 2.2.2.). Antes de ser feita a correcção da questão, a professora relembrou a noção de objecto e imagem e, utilizou a analogia presente na tarefa 2 – “Máquina de Perguntas” para colmatar dúvidas. Deste modo, teve lugar o seguinte diálogo com os alunos da turma:

Professora: Questão 2.2.. A imagem de *35*… Se queremos a imagem de *35*, o que é que é o *35*?

Alexandra: É o objecto.

Professora: O objecto e, se é o objecto, em que sitio da expressão é que se introduz?

Alunos: No *x*.

Professora: No *x*. Lembrem-se das máquinas de perguntas, Que cálculo é que fizeram?

Marta: 35 vezes 0,61 que dá 21,35.

Professora: Marina, queres dizer alguma coisa?

Marina: Fizemos a mesma coisa só que escrevemos l(35) igual…

Professora: Ok. Escreveram matematicamente a expressão. Certo! E agora esta: o objecto cuja imagem é 128,71…

Professora: Como é que é Alexandra? Diz lá…

Alexandra: 128,71 a dividir por 0,61 que vai dar 211.

Professora: Que vai dar 211. Muito bem Alexandra.

Marina: Professora, nós usamos uma “regra de 3 simples”…

Professora: O grupo dela usou uma “regra de 3 simples”. Como é que fizeram?

Marina: 35 está para 21,35 assim como *x* está para 128,71 e fizemos a conta o que nos foi dar 211.

Em ambas as perguntas, os alunos utilizam a notação própria das funções, usando-as de forma correcta e chegando aos resultados pretendidos. Utilizam várias estratégias como sendo uma estratégia multiplicativa e a regra de três simples.

5.5.2.3. Interpretação de dados e utilização da proporcionalidade directa na resolução de problemas. A resolução da pergunta 2.3. e de toda a questão 3 envolve informação que não é dada de forma explícita. Assim, na pergunta 2.3., é pedido aos alunos que calculem quanto poderiam ter poupado se tivessem abastecido a mesma quantidade noutro posto. A grande maioria dos alunos começa a calcular o número de litros adquiridos, fazendo uso ou da regra de três simples ou de uma estratégia multiplicativa, no sentido em que dividem o custo total pelo custo de um litro de combustível. Seguidamente, calculam, quanto teriam gasto se tivessem adquirido o combustível no outro posto indicado, fazendo a diferença de gastos, como por exemplo:

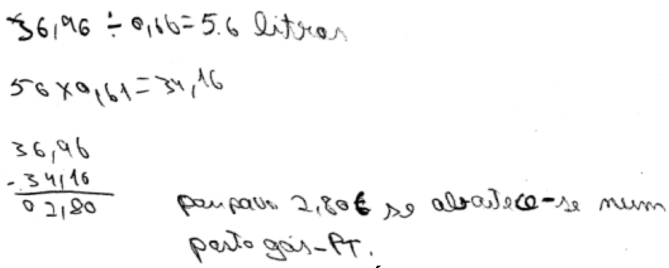


Figura 32. Resposta do par António/Élio à pergunta 2.3. da tarefa 5

Na questão 3, os dados são retirados de uma tabela e de um gráfico. Na pergunta 3.1., os alunos utilizam os dados provenientes do gráfico apresentado para calcular quantos litros de combustível foram vendidos em Agosto de 2008. Para tal, adicionaram o número de litros vendidos de gasóleo, gasolina e GPL:

Filipa: Somamos os totais todos, 160 mais 135 mais 15…
Professora: Que deu…
Filipa: 310 milhares de litros.

A pergunta 3.2. pretende determinar quanto dinheiro recebeu o posto por todo o combustível vendido. Para resolver esta pergunta, os discentes tiveram de relacionar os dados apresentados pela tabela e pelo gráfico. Os alunos começam por calcular o lucro obtido com a venda do gasóleo, da gasolina sem chumbo e do GPL, usando a regra de três simples ou uma estratégia multiplicativa, respectivamente. Seguidamente, somam os valores encontrados e chegam ao valor pretendido.

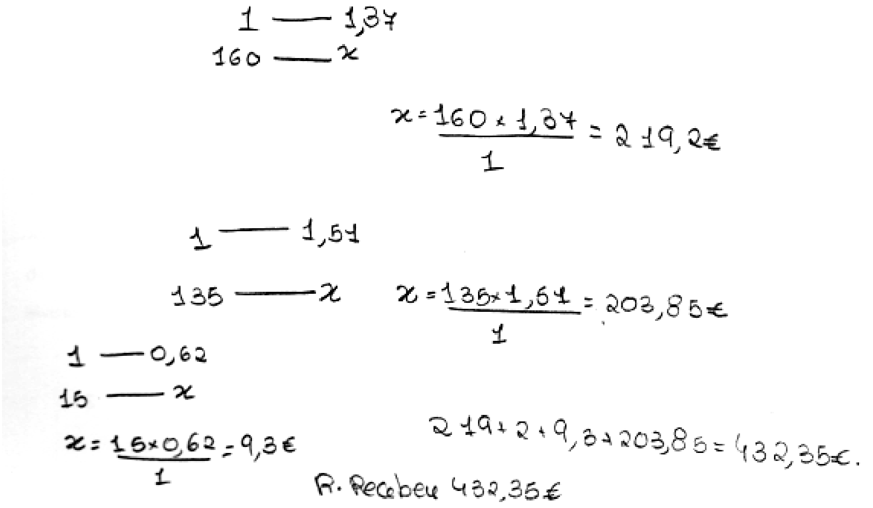


Figura 33. Resposta do par Alexandra/Tatiana à pergunta 3.2. da tarefa 5

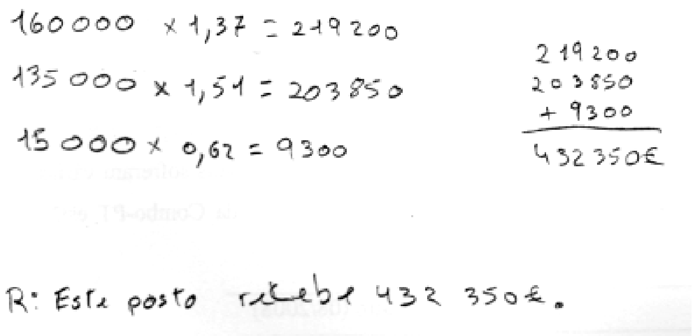


Figura 34. Resposta do par Mário/Xavier à pergunta 3.2. da tarefa 5

5.5.3. Balanço da aula

Os alunos participaram activamente e de forma autónoma na resolução da tarefa proposta. Todos os grupos finalizaram a sua resolução com relativa facilidade, tendo possibilitado a realização da sua discussão na mesma aula. Considero que o trabalho realizado foi bastante produtivo, dada a forma como estava a ser realizado, com empenho e espírito de grupo. A aula de discussão iniciou-se com a leitura do artigo por um dos alunos da turma. De seguida, e após frisar as datas a ter em conta na sua interpretação, solicitei várias respostas por parte dos alunos, tendo mantido a mesma metodologia de trabalho. Os alunos mostraram-se muito participativos. Deste modo, e após esclarecer as dúvidas que os alunos iam colocando relativamente as resoluções apresentadas, penso ter consegui identificar dificuldades e esclarecer as dúvidas que se levantaram perante as diversas resoluções apresentadas.

Em síntese. Apesar de as tarefas terem sido pensadas, pelos autores, num bloco de 90 minutos, onde se inclui o trabalho autónomo dos alunos e a discussão geral com toda a turma, isto nem sempre foi possível. No entanto, a adaptação progressiva dos alunos ao GeoGebra e ao facto de terem um papel mais activo na sua aprendizagem, proporcionou que as tarefas 4 e 5 fossem realizadas e discutidas no tempo previsto.

Na minha perspectiva, as duas etapas são de extrema importância sendo que a segunda, a fase da discussão geral, teve um papel muito importante, na medida em que permitiu aos alunos a colocação questões e dúvidas e a sua consequente explicação, bem como a troca de ideias, experiencias e raciocínios entre os alunos da turma.

Capítulo 6

Joana e Joaquim

Neste capítulo apresento o caso de dois alunos, Joana e Joaquim, que constituíram um grupo durante a leccionação da unidade de ensino. Começo por uma breve caracterização dos alunos, tendo por base a ficha biográfica, sócio escolar e de opinião facultada pela directora de turma, após o que apresento o modo como lidaram com questões envolvendo funções antes, durante e depois da leccionação da unidade de ensino. Termino com uma síntese do percurso de aprendizagem por eles realizado.

6.1. Caracterização dos alunos do grupo

Joana tem 13 anos, nunca reprovou e frequenta o 8.º ano. Considera-se boa aluna, pois sempre teve boas notas e nunca teve muitas dificuldades. Nunca sentiu necessidade de ter explicações a Matemática, estuda em casa e, por vezes, é ajudada pela mãe. A Matemática é a sua disciplina preferida, apesar de ser a Francês que tem melhores classificações. Em contrapartida, assume ter dificuldades em Inglês e História. É uma aluna atenta e empenhada nas aulas de Matemática, que se envolve activamente nas tarefas propostas, tanto individualmente como em grupo. No final do 1.º período, teve nível 4 nesta disciplina. É a delegada de turma, pois os colegas consideram-na responsável, justa e, sempre que necessário, capaz de reivindicar os direitos de todos. Pretende frequentar o curso de Veterinária. Questionada sobre o que representa a escola, diz que é um local onde se trabalha e aprende e que os tópicos leccionados nas várias disciplinas são ligados à vida real. Considera, ainda, que a causa de eventuais dificuldades de aprendizagem é a excessiva rapidez no tratamento dos assuntos. Reside com os pais muito perto da escola, demorando apenas 5 minutos de carro no seu trajecto diário. A mãe é técnica administrativa e o pai guarda nacional republicano, tendo o 12.º ano e 9.º ano, respectivamente. A mãe, a encarregada de educação, mostra-se atenta ao percurso escolar da filha, tendo a preocupação de conversar com ela sobre a escola, nomeadamente sobre o modo como decorrem os seus estudos. Comparece na escola sempre que a sua presença é solicitada pela directora de turma ou quando considera pertinente.

Pelo seu lado, Joaquim também tem 13 anos. Está a frequentar o 8.º ano pela primeira vez e não tem qualquer retenção no seu percurso escolar. Considera-se um aluno interessado, aplicado e, por vezes, preguiçoso. Costuma estudar sozinho e nunca teve ajuda de ninguém a não ser dos professores. A sua disciplina preferida é Educação Física, sendo Educação Visual a que menos gosta e onde tem mais dificuldades. Gosta de estudar Matemática, em especial no que respeita à resolução de problemas, de procurar a resposta, fazendo os cálculos necessários. Nestas aulas, é um aluno trabalhador, empenhado e muito participativo, envolvendo-se nas tarefas propostas. Questionado sobre o que representa a escola, partilha da opinião da sua colega de grupo, dizendo que é um local onde se trabalha e aprende. Considera que as matérias leccionadas, nas diferentes disciplinas, são úteis e interessantes. Considera, ainda, que as eventuais dificuldades de aprendizagem resultam da falta de tempo de estudo. No final do 1.º período, teve nível 4 na disciplina de Matemática. Pretende frequentar um curso superior tornando-se jornalista desportivo. Demora entre 15 a 30 minutos, de autocarro, no trajecto casa-escola. O seu agregado familiar é composto pelos pais e um irmão. A mãe é funcionária pública e o pai empreiteiro, tendo ambos terminado apenas o 1.º ciclo. O irmão é pedreiro e possui o 9.º ano de escolaridade. A mãe, a encarregada de educação, comparece na escola sempre que a sua presença é solicitada pela directora de turma.

Quando lhes foi proposto que trabalhassem em grupo, os dois alunos aceitaram de imediato. Joaquim, por ser mais extrovertido, assumiu o papel de representante. Sempre que era solicitada a minha presença, expunha as dúvidas do grupo. Contudo, a sua exposição nem sempre era clara, levando-o a repetir e a tropeçar nas palavras, tentando elaborar a questão o mais completa possível. Joana, mais reservada, acompanhava a exposição do colega e intervinha, completando ou clarificando o seu discurso, quando considerava que este não traduzia as dúvidas comuns. Quando eu pretendia que fosse

Joana a responder, era necessário perguntar-lhe directamente, para evitar que Joaquim se antecipasse. Durante a realização das tarefas propostas, os alunos mostraram-se muito empenhados e trabalhadores, só solicitando a minha presença quando não conseguiam ultrapassar um obstáculo, apesar de terem meditado algum tempo sobre ele.

6.2. Pensamento funcional antes da experiência

A entrevista inicial teve duas fases. Na primeira fase, foram colocadas diversas questões a cada um dos alunos, separadamente, tendo em vista criar um ambiente onde se sentissem confortáveis e, ao mesmo tempo, compreender o modo como se viam a si próprios face ao seu desempenho escolar. Na segunda fase, e já na presença do colega de grupo, foi proposta a resolução de uma tarefa constituída por três questões. As duas primeiras tinham como objectivo recordar a representação de pontos num referencial cartesiano e identificar pares ordenados que correspondem a pontos já representados, usando a simbologia e terminologia adequadas. Na terceira questão, os alunos são confrontados com um problema tendo em vista saber se tinham presentes os conhecimento adquiridos no ano anterior no que respeita à proporcionalidade directa.

6.2.1. Conceito de função

Apesar de ainda não terem estudado formalmente a noção de função, os alunos conseguem identificar uma situação de proporcionalidade directa, ou seja, intuitivamente, conseguem identificar uma função que representa uma situação de proporcionalidade directa. Este tópico foi trabalhado no ano lectivo anterior (como tópico do 7.º ano de escolaridade) onde foi pedido que reconhecessem situações de proporcionalidade directa, indicando a constante de proporcionalidade e interpretando-a à luz do problema. Aprenderam, ainda, dada uma representação gráfica, a identificar se a situação nela descrita representa uma situação de proporcionalidade directa.

Durante a realização da questão 3, Joana e Joaquim mostram recordar-se destas noções e justificam que o preço é directamente proporcional ao número de jogos, fazendo referência à existência de uma constante de proporcionalidade e interpretando o seu significado no contexto do problema, como é ilustrado no diálogo seguinte:

Professora: O preço a pagar é directamente proporcional ao número de jogos a efectuar. Porquê?

Joaquim: É proporcional porque temos uma constante de proporcionalidade…

Professora: Que é…?

Joaquim: Que é igual… A constante de proporcionalidade é igual a 3 euros e 75 e significa o preço de um jogo.

Professora: Muito bem.

6.2.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

Na questão 3, é apresentada uma situação, através da representação verbal, que relaciona o preço a pagar com o número de jogos realizados. Nas várias perguntas que compõem esta questão é necessário fazer uma interpretação do enunciado (representação verbal) de modo a poder completar uma tabela (3.3.), construir um gráfico (3.6.) e identificar uma expressão algébrica que a representa (3.5.), respectivamente, representação tabular, gráfica e simbólica.

Para completar a tabela apresentada na pergunta 3.3., é necessário determinar uma imagem dado um objecto ou um objecto dada uma imagem. Existem vários processos que permitem realizar essa determinação e Joana e Joaquim recorrem frequentemente à utilização da regra de três simples, explicando o procedimento usado. De facto, a aplicação da regra de três simples é usualmente apresentada aos alunos no final do 2.º ciclo, e a sua utilização é reforçada durante o 7.º ano de escolaridade. Por exemplo, para calcular o custo de 9 jogos, os alunos explicam:

Joaquim: Então, por nove jogos… Fazemos assim… Se por um jogo eles vão pagar 3,75, por 9 jogos têm de pagar *x*. Então *x* igual 9 vezes 3,75 a dividir por 1 que é igual…

Professora: O que é que utilizaram para fazer o cálculo?

Joaquim: Utilizámos a regra do 3 simples… Que é igual a 33,75…

Professora: Então terá de pagar …

Joaquim: O Jorge… Se quisessem realizar 9 jogos teria de pagar 33,75 euros.

No entanto, os alunos não utilizam apenas este processo. No preenchimento da tabela da pergunta 3.3., para calcular os dois primeiros pares de números, utilizam a regra de três simples, mas nos seguintes pares de números utilizam um processo baseado na constante de proporcionalidade. Percebem que, através da divisão ou multiplicação, o uso dessa constante lhes facilita os cálculos:

> **Joaquim:** 37 euros e 50 a dividir por 3 euros e 75 é igual… Dá para realizar 10 jogos.
>
> **Professora:** Joana…
>
> **Joana:** 4… Se 2 jogos dão 7 euros e meio… 4 jogos irá ser 15 euros.
>
> **Professora:** Joaquim…
>
> **Joaquim:** Agora… Para sabermos quantos jogos é que podemos realizar com 18 euros e 75… Repetimos novamente o mesmo processo que foi usado já em… Em perguntas anteriores… Fazemos 18 euros 75 a dividir por 3 euros e 75 que vai dar 5 jogos.
>
> **Professora:** Joana…
>
> **Joana:** Com 11 euros e 25… 1 jogo são 3 euros e 75… 11 euros e 25 dá para 3 jogos.

Utilizando um destes processos para calcular objectos/imagens, os alunos determinam todos os pontos correspondentes ao preenchimento da tabela, não apresentando dificuldades. No que diz respeito à mudança da representação tabular para a representação gráfica, usam os pares ordenados encontrados, marcando-os num sistema de eixos ortonormados.

6.2.3. Representação de funções lineares e afins

6.2.3.1. Representação gráfica. No ano lectivo anterior, os alunos desta turma realizaram um trabalho em grupo que consistia na representação e identificação de coordenadas de pontos num referencial cartesiano. Deste modo, trabalharam as noções de referencial cartesiano, pontos, coordenadas, eixo das abcissas e das ordenadas. Durante a entrevista, Joana e Joaquim mostraram ter conhecimento destes termos:

> **Professora:** Lembram-se como é que se representa um ponto num referencial cartesiano?

Joana: Através das coordenadas.

Professora: Através das coordenadas… Então, imaginem que um ponto é dado pelas coordenadas *x* e *y*.

Joaquim: Se…

Joana: O *x* é horizontal e o *y* é vertical.

Professora: Marcam o ponto partindo sempre de que outro ponto?

Joaquim: Da origem.

Professora: Da origem, certo!… A que eixo é que corresponde o *x*?

(Joana aponta para o eixo horizontal)

Professora: Qual é o nome, lembram-se?... É o eixo das…

Joana: Abcissas.

Professora: E o *y* no eixo das …

Joana: Ordenadas.

Joaquim: Ordenadas, pois é!

Deste modo, os dois alunos mostram ter conhecimento da terminologia relativa à representação de pontos num referencial cartesiano. No entanto, no que respeita à sua marcação, não respondem imediatamente, sendo necessária a ajuda da professora no sentido de encaminhar os seus raciocínios:

Professora: Expliquem como é que fazem para marcar os pontos que aí estão. Como é que marcam o ponto A [A(1,0)]?

Joaquim: Então… Como é que marcaria o ponto A?

Professora: O ponto A está aqui. Como é que fazem para marcar o ponto?

Joaquim: Então… Iríamos… Primeiro ver o eixo das abcissas… Que é o… no eixo das abcissas é um…

Professora: Sim…

Joaquim: E depois… No eixo das ordenadas…

Professora: Que é…

Joana: É zero.

Joaquim: É zero.

Professora: É zero. Então como é que vocês se deslocam em termos de horizontal e vertical?

Joaquim: Então, na horizontal deslocávamo-nos para a direita.

Professora: Quantas unidades?

Joana: Uma…

Joaquim: Uma casa…

Professora: Uma unidade.

Joaquim: Uma unidade… E na vertical… Deixávamo-nos estar na mesma unidade.

Após esta dificuldade inicial, onde relembraram como representar pontos num referencial cartesiano, os dois alunos responderam correctamente às questões seguintes, não evidenciando dificuldades na escrita das coordenadas dos restantes pontos.

Em relação à representação gráfica da situação de proporcionalidade directa, apresentada na questão 3, os alunos identificam os eixos onde devem representar os valores das variáveis mas mostram dificuldades na escolha da escala apropriada para os eixos, tendo feito várias tentativas para encontrarem a escala mais adequada. De seguida, marcam os pontos resultantes do preenchimento de uma tabela onde constam número de jogos e respectivo preço. No entretanto, quando elaboram a representação gráfica, representam dois eixos ortogonais mas apenas representam o quadrante resultante do cruzamento dos semi-eixos positivos, não indicando a sua orientação nem prolongando a linha resultante da união dos pontos.

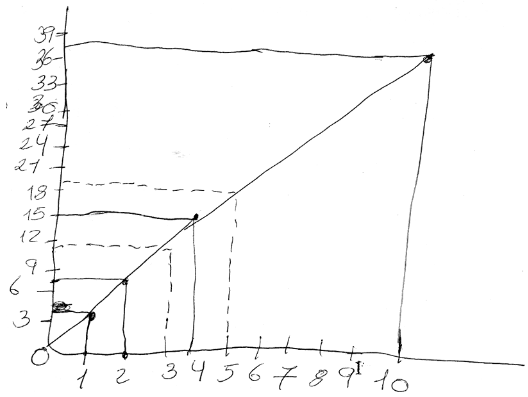


Figura 35. Resposta à pergunta 3.6. da entrevista inicial.

6.2.3.2. Representação algébrica. Após a leitura da pergunta 3.5., onde é sugerido que completem a expressão algébrica $y=\_\_\_\times x$, que traduz a relação de proporcionalidade, os dois alunos mostram não sentir dificuldades na sua realização e justificam dizendo:

Joaquim: *y* igual …

Professora: A quê?

Joana: … 3,75 vezes *x*.

Joaquim: 3,75 vezes *x* porque 3,75 é o preço que custa 1 jogo e depois, conforme o número de jogos que nós queremos jogar… É o dinheiro que nós vamos gastar.

Apesar de ainda não terem aprendido formalmente a noção de expressão algébrica de uma função, os dois alunos conseguem determinar a expressão que define a situação apresentada, tendo em conta o significado atribuído às variáveis *x* e *y*.

6.3. Pensamento funcional durante a experiência

Nesta unidade de ensino foram resolvidas seis tarefas de natureza exploratória e investigativa. Apresento de seguida o trabalho realizado pelo grupo formado por Joana e Joaquim durante a realização de cinco tarefas.

6.3.1. Tarefa 1

A questão 1 tem como objectivo averiguar a capacidade dos alunos interpretarem a informação apresentada sob a forma de representação verbal, a flexibilidade/facilidade em passar da representação verbal para a representação tabular, na medida em que é necessário calcular pares de pontos que permitiram completar uma tabela, e a flexibilidade/facilidade em passar da representação verbal para a representação gráfica.

6.3.1.1. Interpretação da informação expressa através de uma representação verbal. A pergunta 1.1. pede aos alunos que indiquem o custo de uma chamada cuja duração total é de 2, 5, 10, 15 segundos e 1 minuto. No cálculo do custo de uma chamada com a duração de 2 e 5 segundos, eles mostram ter compreendido o enunciado, dando uma resposta correcta:

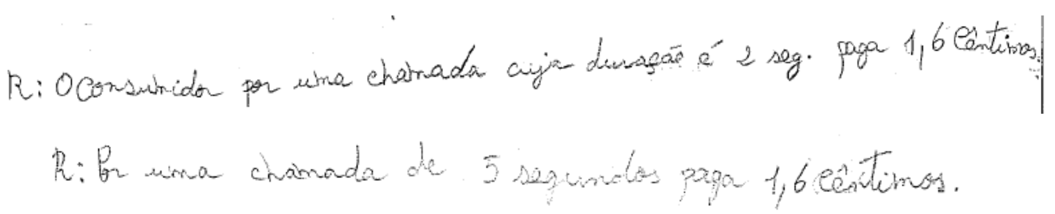

R: O consumidor por uma chamada cuja duração é 2 seg. paga 1,6 cêntimos.
R: Por uma chamada de 5 segundos paga 1,6 cêntimos.

Figura 36. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 1.

No cálculo do custo de uma chamada cuja duração total é de 10 ou 15 segundos, os alunos apresentam dois métodos diferentes de resolução. Um dos métodos é a regra de três simples, dizendo que se por um segundo se paga 0,32 cêntimos, então por 10 segundos paga-se 3,2 cêntimos.

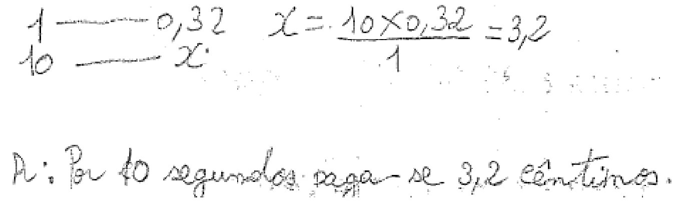


Figura 37. Resposta à pergunta 1.1.3. da tarefa 1.

Outro método apresentado pelos alunos utiliza uma estratégia aditiva. Joana e Joaquim utilizam a informação obtida anteriormente para determinar o custo da chamada com a duração de 15 segundos, isto é, sabem que uma chamada com a duração de 5 segundos custa 1,6 cêntimos e que uma chamada com a duração de 10 segundos custa 3,2 cêntimos, logo para determinar o custo da chamada com a duração de 15 segundos bastará adicionar os valores 1,6 e 3,2.

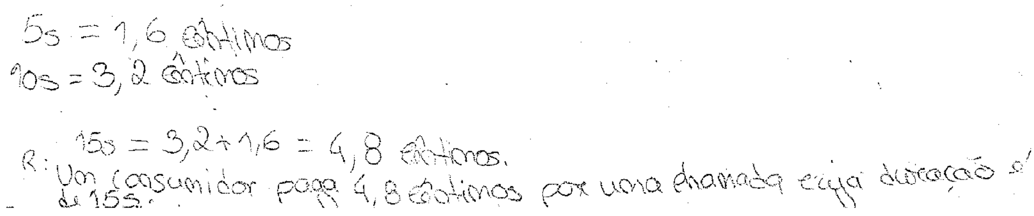
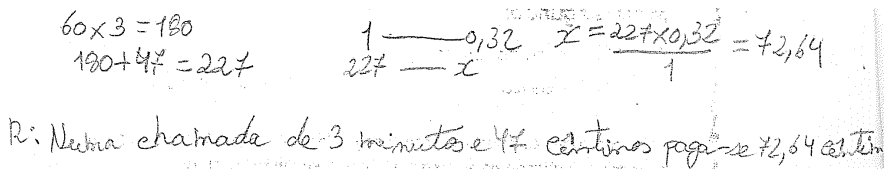


Figura 38. Resposta à pergunta 1.1.4. da tarefa 1.

Para calcular o custo de uma chamada com a duração de 1 minuto, Joana e Joaquim começam por converter 1 minuto em 60 segundos, identificam a constante de proporcionalidade e determinam o valor a pagar pela chamada, aplicando correctamente a regra de três simples. Nas perguntas 1.2. e 1.3., onde se pede que indiquem o custo de uma chamada com a duração de 3 minutos e 47 segundos e 3 minutos e 48 segundos, respectivamente, os dois alunos utilizam o mesmo processo, determinam o número de segundos correspondentes à duração indicada e aplicam a regra de três simples:


60×3 = 180
180+47 = 227

1 —— 0,32
227 —— x

$x = \frac{227 \times 0{,}32}{1} = 72{,}64$

R: Numa chamada de 3 minutos e 47 cêntimos paga-se 72,64 cêntim

Figura 39. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 1.

A pergunta 1.4. requer a análise do tarifário, indicando a diferença entre o caso em que temos uma chamada com duração inferior ou igual a 5 segundos e o caso em que temos uma chamada com a duração superior a 5 segundos. Teve lugar o seguinte diálogo:

Joana: Não percebo esta pergunta.

Professora: Então lê a questão.

Joana: Como varia, segundo a segundo, o valor a pagar por uma chamada com duração máxima de 5 segundos?

Professora: Então pensa um pouco. Como é que varia?

Joana: 5 segundos é 1,6.

Professora: Certo! Todas as chamadas até 5 segundos...

Joana: Custam 1,6 cêntimos.

Professora: Então como é que varia? Varia o preço a pagar ou não?

Joana: Não.

Professora: Então o preço a pagar é...

Joana: 1,6.

Professora: E a seguir, o que pedem?

Joana: E como varia o valor a pagar por uma chamada com duração superior a 5 segundos? 0,32... Depois dos 5 segundos.

Professora: Por cada segundo a mais paga-se...

Joana: 0,32 segundos.

Joaquim: É isso mesmo.

Professora: Tens de responder a três questões. Essa questão é composta por 3 subquestões. Certo?

Joana: Certo.

Os alunos manifestam dificuldade na interpretação do enunciado da questão. Não identificam inicialmente as várias etapas que devem ter em conta na sua resposta. Por exemplo, não referem que existe uma variação nula no período até aos 5 segundos e que, a partir daí, a variação é constante, de 0,32 cêntimos, no sentido crescente.

Quando respondem por escrito à questão, os alunos apresentam um raciocínio multiplicativo, pois sugerem que em chamadas com duração superior a 5 segundos se deve multiplicar o número de segundos pelo custo de 1 segundo:

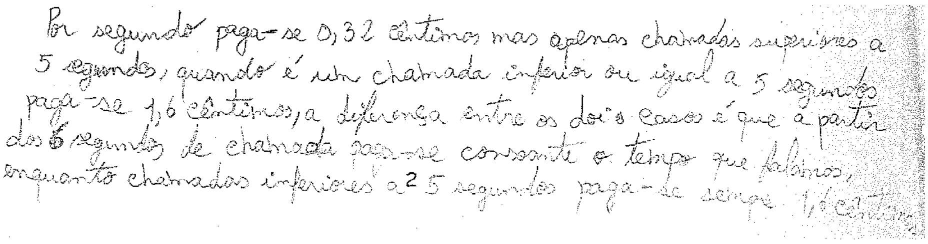

Por segundo paga-se 0,32 cêntimos mas apenas chamadas superiores a 5 segundos, quando é um chamada inferior ou igual a 5 segundos paga-se 1,6 cêntimos, a diferença entre os dois casos é que a partir dos 6 segundos de chamada paga-se consoante o tempo que falamos, enquanto chamadas inferiores a 5 segundos paga-se sempre 1,6 cêntimos

Figura 40. Resposta à pergunta 1.4. da tarefa 1.

6.3.1.2. Passagem da representação verbal para a representação gráfica. A pergunta 1.5. visa averiguar a forma como os alunos passam da representação verbal para a representação gráfica. Não utilizam um referencial cartesiano para representar graficamente o tarifário até aos 20 segundos mas sim um histograma (ver figura 41). No entanto, após a resolução da questão 2, comentam que não resolveram correctamente a pergunta 1.5., pois utilizaram um gráfico errado, mas como estavam no final da aula, não tinham tempo de a alterar.

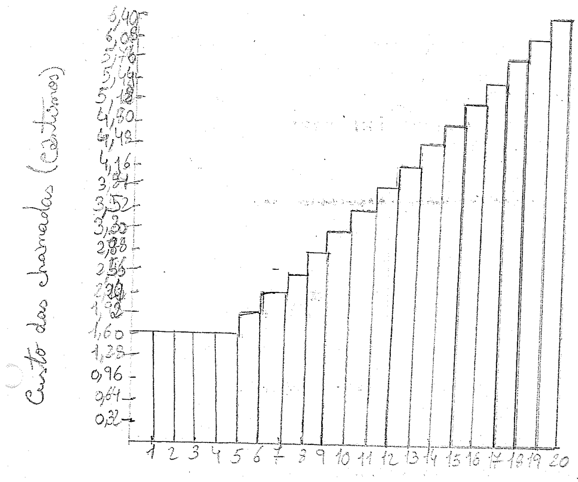


Figura 41. Resposta à pergunta 1.5. da tarefa 1.

Quando se procura descrever a variação que ocorre no gráfico na parte constante e na parte estritamente crescente, os alunos identificam a parte constante com o conjunto das 5 barras todas com a mesma altura e a parte crescente com o conjunto de barras que se seguem. De acordo com esta situação, apresentam as seguintes afirmações:

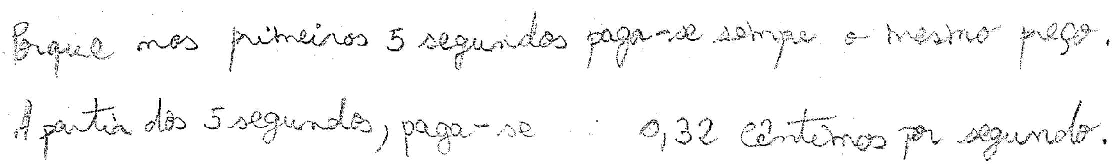

Porque nos primeiros 5 segundos paga-se sempre o mesmo preço.
A partir dos 5 segundos, paga-se 0,32 cêntimos por segundo.

Figura 42. Resposta às perguntas 1.6 e 1.7. da tarefa 1.

Contudo, através desta representação errada, evidenciam ter compreendido o problema, pois as 5 primeiras barras têm uma altura de 1,6 enquanto as barras seguintes aumentam sucessivamente 0,32.

6.3.1.3. Passagem da representação gráfica para a representação tabular. Na questão 2. é apresentada a representação gráfica da relação entre o tempo de duração da chamada e o seu valor a pagar num tarifário onde as chamadas com duração até 30 segundos a variação é nula, sendo o seu preço constante (7,5 cêntimos). A partir daí, a variação é constante e igual a 0,35 cêntimos. Nesta questão, pretende-se averiguar de que forma é que os alunos passam da representação gráfica para a representação tabular, através da análise da informação contida no gráfico. Assim, na pergunta 2.1. é-lhes pedido que completem uma tabela representativa deste tarifário e na pergunta seguinte, pergunta 2.2., pede-se que num pequeno texto descrevam as informações que é possível obter a partir das representações gráfica e tabular deste tarifário. Quando começam a resolver a pergunta 2.1., Joana e Joaquim solicitam a minha ajuda nos seguintes moldes:

Joaquim: Nesta aqui, é para fazer o quê?

Professora: Completar a tabela de acordo com o gráfico que está em cima… A quê que corresponde o x?

Joaquim: O x corresponde aos segundos.

Professora: Certo. E o y?

Joaquim: Ao preço a pagar.

Professora: Exactamente. Então, quando a duração é zero, qual é o preço a pagar?

Joaquim: É zero.

Professora: Quando o preço a pagar é 7,5, significa que fizemos uma chamada de…

Joaquim: 1 segundo?

Professora: Por exemplo. Mas é único?

Joaquim: Não.

Professora: Então?

Joaquim: Vai de 1 a 30.

Professora: Certo.

Os alunos identificam correctamente a variável independente com a duração da chamada realizada e a variável dependente como o preço da respectiva chamada. À semelhança da questão anterior, identificam o custo de todas as chamadas com duração igual ou inferior a 30 segundos como sendo 7,5 cêntimos. Este facto é também visível através do preenchimento da tabela sugerida. No entanto, erram o cálculo de alguns valores devido à interpretação errada das coordenadas dos pontos de abcissas 30 e 31.

x	0	1	30	31	37	51	60
y	0	7,5	7,5	7,85	9,25	12,75	15

Figura 43. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 1.

Este facto é perceptível quando respondem à pergunta 2.2., e justificam que, em vez de adicionar constantemente o valor 0,35, adicionam 0,25. Apesar deste facto, erram também os seus cálculos:

As informações que é possível obter a partir das representações gráficas é que de 0 seg. a 30 seg. paga-se 7,5 cêntimos e chamadas superiores a 30 segundos paga-se 0,25 cêntimos por segundo.

Figura 44. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 1.

Como era a primeira tarefa desta natureza, a maior parte dos alunos leva muito tempo a resolvê-la. Como indiquei no capítulo anterior, em vez de interromper a resolução da tarefa para proceder à sua discussão, conforme tinha planeado inicialmente, opto por deixar que a finalizassem passando a sua discussão para o dia seguinte, na aula de estudo acompanhado.

6.3.2. Tarefa 2

Na questão 1, é pedido aos alunos que sugiram três países e as respectivas capitais no sentido de completar espaços de modo a introduzir os conceitos básicos inerentes à definição de função linear ou de proporcionalidade directa. “Este exemplo ajuda a ilustrar as características que uma correspondência deve ter para ser uma função. É também a partir deste exemplo que se constrói um diagrama sagital e são introduzidas as noções de objecto, imagem, domínio e contradomínio” (Ponte, Matos & Branco, 2008, p. 82).

6.3.2.1. Análise de correspondências e identificação de elementos correspondentes. Na sua primeira intervenção, Joana e Joaquim procuram confirmar se estão a interpretar correctamente aquilo que lhes é pedido:

Joaquim: Então temos de saber três países e as respectivas cidades.
Professora: Sim, as respectivas capitais, é o que diz aí não é?
Joaquim: Sim.

Após terem obtido a confirmação desejada, sugerem três países (Portugal, Espanha e França) e as respectivas capitais (Lisboa, Madrid e Paris), completam os espaços em branco dos conjuntos A e B, preenchem o diagrama sagital e, de acordo com as informações que vão sendo dadas, completam o domínio e o contradomínio da função.

6.3.2.2. Identificação de correspondências que são ou não funções. A questão 2 apresenta quatro exemplos de correspondências através de diagramas sagitais. Esta questão visa identificar correspondências que são funções e outras que não o são, justificando. Convém salientar que Joaquim e Joana, como alunos atentos que são, ouvem as intervenções dos colegas e corrigem as suas representações. Os alunos apresentaram os quatro diagramas seguintes correspondentes às quatro máquinas de perguntas apresentadas:

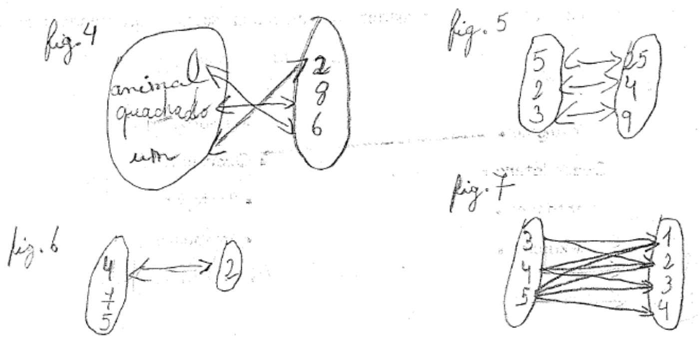


Figura 45. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 2.

Relativamente aos quatro diagramas sagitais, os alunos identificam os três elementos diferentes a introduzir em cada máquina de perguntas e as respostas que esperam obter em cada uma delas. No entanto, quando elaboram as correspondências, não dão indicação do conjunto de partida e do conjunto de chegada, pois colocam setas em ambos os sentidos nas linhas que estabelecem a ligação entre os dois conjuntos. De salientar que em relação ao tema "Números menores", já apresentam uma correspondência aceitável no que respeita à representação dos elementos no conjunto de chegada.

A pergunta 2.2. pretende saber, das quatro representações construídas, quais é que correspondem a funções. Os alunos indicam:

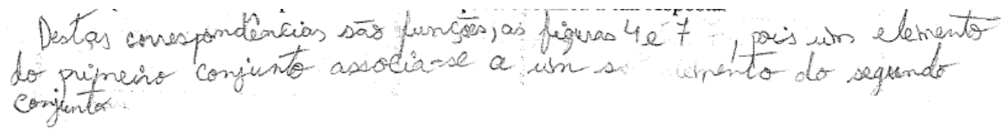

Destas correspondências são funções, as figuras 4 e 7, pois um elemento do primeiro conjunto associa-se a um só elemento do segundo conjunto.

Figura 46. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 2.

Os alunos indicam as correspondências relativas aos temas "Número de letras" e "Números menores" como sendo funções. Mas, apesar de terem indicado o tema "Números menores" como sendo uma função, percebe-se que foi um engano com a resposta à pergunta 2.2., uma vez que indicam o domínio e o contradomínio para os temas "Número de letras" e "Potências".

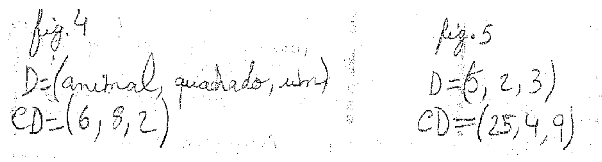


fig. 4
D=(animal, quadrado, um)
CD=(6, 8, 2)
fig. 5
D=(5, 2, 3)
CD=(25, 4, 9)

Figura 47. Resposta à pergunta 2.3. da tarefa 2.

Os alunos não justificam o motivo pelo qual não consideram os temas "Raízes" e "Números menores" como funções. No entanto, não representam o domínio e o contradomínio de forma correcta, uma vez que não indicam o conjunto dos seus elementos entre chavetas.

A questão 3 apresenta um diagrama sagital e pretende-se que os alunos estabeleçam uma correspondência entre os elementos do conjunto da esquerda (quatro polígonos iniciais) e os elementos do conjunto da direita (polígono com mais um lado que o polígono inicial), que indiquem o domínio e o contradomínio e que indiquem a imagem de um objecto e o objecto que tem determinada imagem. Como resposta à pergunta 3.1., Joana e Joaquim apresentam a seguinte correspondência:

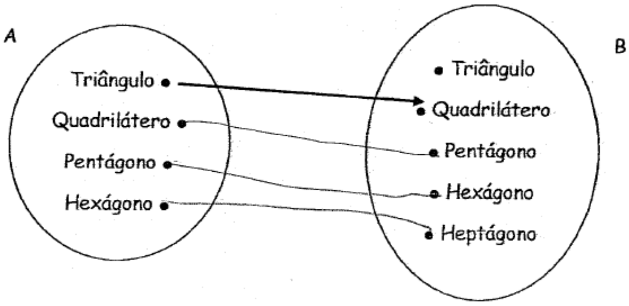


Figura 48. Resposta à pergunta 3.1. da tarefa 2.

No entanto, continuam a não estabelecer uma orientação entre o conjunto de partida e o conjunto de chegada. Quando respondem às perguntas 3.2. e 3.3., indicam o domínio e o contradomínio da função, utilizando a notação adequada, apesar de existir um pequeno erro na representação do domínio, e utilizam o vocabulário específico quando respondem à pergunta3.3.

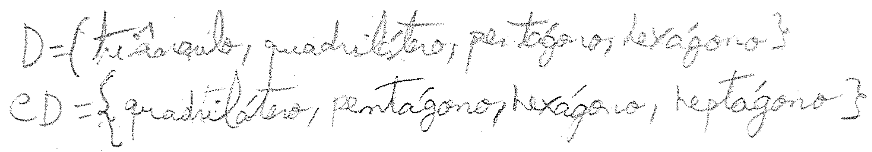


Figura 49. Resposta à pergunta 3.2. da tarefa 2.

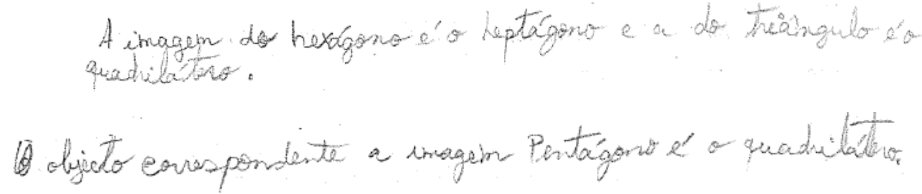


Figura 50. Resposta à pergunta 3.3. da tarefa 2.

6.3.2.3. Análise de correspondências representadas através de gráficos. A questão 4 apresenta quatro correspondências representadas por conjuntos de pontos de um gráfico cartesiano. Na pergunta 4.1 pretende-se que os alunos indiquem as correspondências que correspondem a funções e quais não correspondem a funções, justificando a sua resposta.

São funções as alíneas a) e c), pois os objectos associam-se a uma só imagem, e não são funções as alíneas b) e d) pois os objectos associam-se a mais que uma imagem.

Figura 51. Resposta à pergunta 4.1. da tarefa 2.

Os alunos indicam correctamente as correspondências a) e c) como sendo funções e a correspondência b) como não sendo uma função e justificam adequadamente a sua opção. Contudo, cometem um erro ao dizer que a representação d) não é uma função. Este facto pode ficar a dever-se ao facto de existirem dois elementos do conjunto de partida que correspondem ao mesmo elemento no conjunto de chegada, por semelhança com o facto de um elemento do conjunto de partida não poder corresponder a dois elementos do conjunto de chegada. Quanto à pergunta 4.2., indicam o domínio e o contradomínio da função, utilizando a notação adequada.

6.3.2.4. Análise de correspondências representadas a partir de tabelas. Na questão 5 está apresentada uma correspondência entre duas variáveis através de uma tabela. Nesta questão, pede-se o domínio e o contradomínio, dois objectos diferentes com a mesma imagem e a construção da representação gráfica desta correspondência.

Na pergunta 5.1., Joana e Joaquim indicam:

$D=\{2;4;6;9;12;15\}$

$CD=\{1;4,5;3;4,5;6;7,5\}$

Figura 52. Resposta à pergunta 5.1. da tarefa 2.

Na resposta a esta pergunta, os alunos indicam correctamente o domínio da função mas não o contradomínio. De facto, representam em duplicado a imagem 4,5. Mais uma vez, esta representação utiliza a notação indicada. Indicam correctamente os objectos distintos que têm a mesma imagem mas, tal como no contradomínio, utilizam o 4,5 duas vezes, dando a entender que são duas imagens distintas e não a mesma imagem.

Os objectos distintos que têm a mesma imagem são o 4 e o 9 e as imagens são o 4,5 e o 4,5 respectivamente.

Figura 53. Resposta à pergunta 5.2. da tarefa 2.

Tendo por base a tabela apresentada no enunciado da questão, os alunos não tiveram dificuldade em representar graficamente a informação contida na tabela, utilizando para o efeito o sistema de eixos coordenados. Esta situação evidencia a chamada de atenção, na aula de discussão da tarefa 1, para a representação gráfica apropriada para a sua representação.

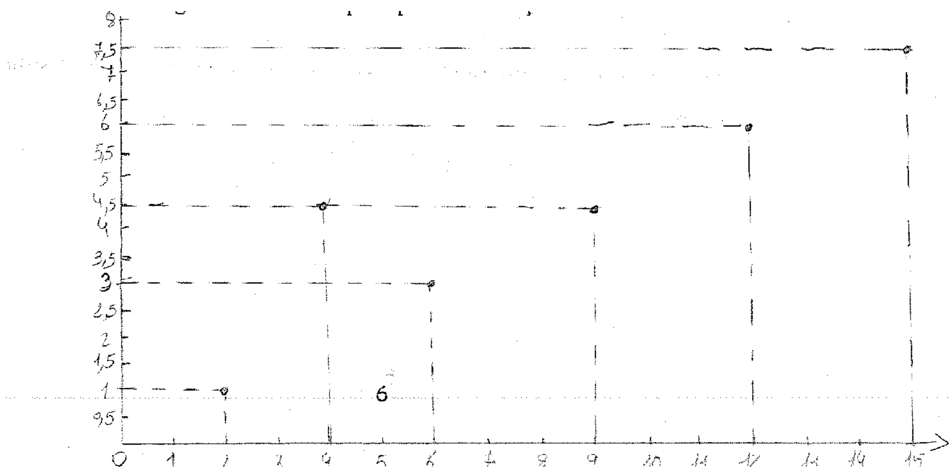


Figura 54. Resposta à pergunta 5.3. da tarefa 2.

Os alunos identificaram correctamente as variáveis dependente e independente, apesar de não identificarem os eixos ortonormados. Utilizaram uma escala que se adapta à situação analisada. No entanto, apenas indicam a orientação de um dos eixos.

6.3.3. Tarefa 3

Após terem recebido o enunciado, Joana e Joaquim iniciam de imediato o seu trabalho. Começaram por seguir os passos indicados para construir, no GeoGebra, um polígono regular, como o quadrado. Terminam esta fase com a criação de um ponto E cujas coordenadas são o lado de um quadrado (abcissa) e o perímetro desse quadrado (ordenada). A construção dinâmica deste ponto permite visualizar que o gráfico que representa a relação é um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta que passa na origem do referencial. A imagem da figura 55 mostra a construção realizada pelos alunos.

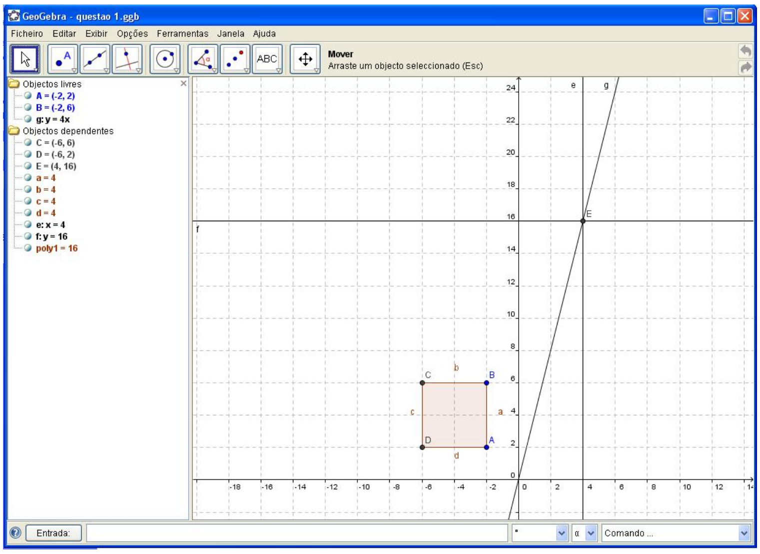


Figura 55. Construção inicial da tarefa 3.

6.3.3.1. Exploração do enunciado. Após a construção sugerida, os alunos começaram a responder às questões relativas à interpretação do enunciado. Quando questionados sobre o significado da abcissa do ponto E (*x*=2), solicitam a minha presença:

Professora: Diz lá…

Joaquim: Professora, aqui o E é 2.

Professora: Sim… Já escreveram?

Joaquim: Sim… E aqui o seu significado?

Professora: O que significa o valor da abcissa? (pausa) Este ponto que vocês construíram aqui… Esta recta que passa no ponto 2…

Joaquim: Sim…

Professora: O que é que vocês escreveram aqui para terem esta recta?

Joaquim: Escrevemos $x = a$.

Professora: E o que é que representa o a? Olha lá para aqui (aponta para o enunciado da tarefa)…

Joana: É o 2.

Joaquim: Ah!

Professora: Então o que é que é o 2?

Joana: É o lado.

Professora: É o lado do…

Joana: Do quadrado.

Inicialmente, os alunos não perceberam o significado da abcissa do ponto E, mas após uma segunda leitura do enunciado, deduzem que a abcissa diz respeito ao comprimento do lado do quadrado e respondem:

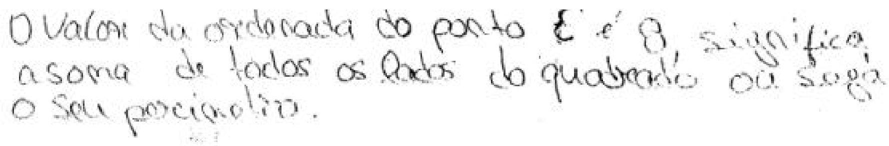


Figura 56. Resposta à pergunta II b) da tarefa 3.

Movendo o ponto B, e seleccionado a opção indicada no enunciado, os alunos são levados a interpretar o que acontece no gráfico:

Joaquim: Aqui, em relação a mexer o ponto B…

Professora: Clicam e seleccionam o ponto, agora mexam, ele vai desenhar-vos… O quê? É uma…

Joaquim: Diagonal?

Professora: É uma… olhem para o formato…

Joaquim: (pausa) recta?

Professora: É uma recta e uma recta que… Agora vejam lá se tem alguma condição especial…

Joaquim: É uma recta…

Professora: Sim…

Joaquim: É uma recta passa no ponto B…

Professora: Agora imagina a recta… imagina o prolongamento da recta… o que é que acontece de especial com essa recta?... Esta recta se for prolongada, ela vai fazer alguma coisa especial…

Joaquim: Passa no ponto B…

Joana: Passa no ponto E…

Professora: Só no ponto B? Há outro ponto que também é especial… Joana e Joaquim, digam lá…

Leandro: Pela origem do referencial…

Arrastando um dos vértices que estão na base da construção inicial, os alunos fazem surgir vários quadrados e os respectivos pontos no gráfico, o que lhes permite concluir que o gráfico que representa a relação entre estas duas variáveis é um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta que passa na origem do referencial. A utilização deste software permite chegar a esta conclusão, de uma forma dinâmica.

6.3.3.2. Mudança de representação (gráfica para tabular). Quando os alunos tentam resolver a questão 1 do trabalho de casa do João, encontram-se perante uma situação de proporcionalidade directa relativa ao perímetro do quadrado. Nas perguntas 1.1. e 1.2., é necessário calcular uma imagem dado um objecto ou um objecto dada uma imagem, respectivamente.

Os alunos apresentam as seguintes respostas:

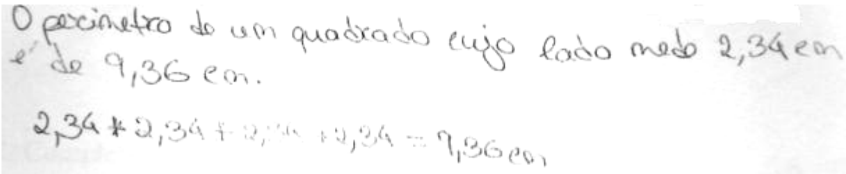

O perímetro do um quadrado cujo lado mede 2,34 cm é de 9,36 cm.
2,34+2,34+2,34+2,34 = 9,36 cm

Figura 57. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 3.

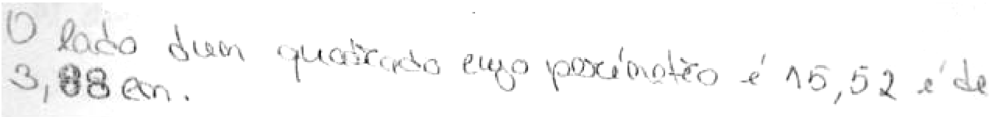

O lado dum quadrado cujo perímetro é 15,52 é de 3,88 cm.

Figura 58. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 3.

Na primeira resposta, os alunos evidenciam seguir os passos indicados na construção sugerida, usando uma estratégia aditiva, somando quatro vezes a medida do lado do quadrado. Na segunda resposta, os alunos não mostram como obtiveram a resposta, apesar de Joaquim referir posteriormente, aquando da completação da tabela:

Joaquim: Não estou percebendo aqui isto…
Professora: O quê?
Joaquim: Aqui.
Professora: Como é que completaram a tabela?
Joaquim: Como com dois lados me deu 8…
Professora: 2 lados te deu 8?
Joaquim: Então não é?
Professora: Não… Não é dois lados dão 8…
Joana: Se um lado tem 2 centímetros, o perímetro vai ser 8.
Professora: O perímetro vai ser oito. Mas têm que apresentar aí cálculos. Que cálculo é que fizeram?

Joaquim: Então isto é simples, usei uma regra de três simples… Fiz este vezes este a dividir por este.

Professora: Mas isso é usando uma regra de três simples, mas há outras formas de fazer…

Neste diálogo, percebe-se que Joaquim usou a regra de três simples para efectuar os cálculos que lhe possibilitaram responder à pergunta 1.2. Aliás os alunos recorreram muito frequentemente a esta regra para justificar os seus cálculos.

6.3.3.3. Conceito de função de proporcionalidade directa. Para justificar o facto de o perímetro do quadrado ser directamente proporcional ao seu lado, os alunos apresentam a seguinte resposta:

Figura 59. Resposta à pergunta 1.4. da tarefa 3.

Os alunos apercebem-se do facto de ter de haver algo que tem de ser constante, mas não o justificam de forma conveniente. Para identificar a constante de proporcionalidade, tentam esclarecer as dúvidas que lhes vão surgindo:

Professora: Então? O que é que representa o *x* no contexto do problema?

Joaquim: É os centímetros do lado.

Professora: Os centímetros do lado… E o *y*?

Joaquim: É o perímetro.

Professora: O que é que têm que fazer… por quanto é que têm que multiplicar…

Joaquim: Ah, por 4.

Professora: Continuem.

Tendo como base o que é representado pela variável *x* e o que é representado pela variável *y*, os alunos identificam que basta multiplicar o lado do quadrado por 4 para obter o seu perímetro. Deste modo, identificam a constante de proporcionalidade como sendo 4, apesar de não explicarem o seu significado geométrico, nem a relacionarem com a justificação da situação de proporcionalidade directa.

6.3.3.4. Mudança de representação (gráfica e tabular para algébrica). Através da identificação da constante de proporcionalidade feita na pergunta anterior, os alunos completam correctamente a expressão algébrica que representa essa relação de proporcionalidade

Na etapa VI, os alunos devem introduzir, na barra de entrada do GeoGebra, a expressão algébrica que acabaram de encontrar e têm de descrever o que observam. Ao introduzir a expressão algébrica, surge a representação gráfica da função *y=4x*, que se sobrepõe aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Fazem esta constatação na medida em que observam ter obtido uma recta que passa pelo ponto de origem do referencial:

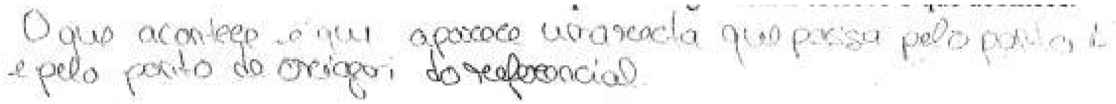


Figura 60. Resposta à etapa VI. da tarefa 3.

Na questão 2 do trabalho de casa, os alunos fazem uma exploração do caso dos triângulos equiláteros semelhante à efectuada a propósito dos quadrados. Para isso, são levados a construir, na etapa VIII, o gráfico de uma função, digamos *g*, que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero e o perímetro correspondente. Os alunos devem basear-se na construção anterior para fazer a nova construção:

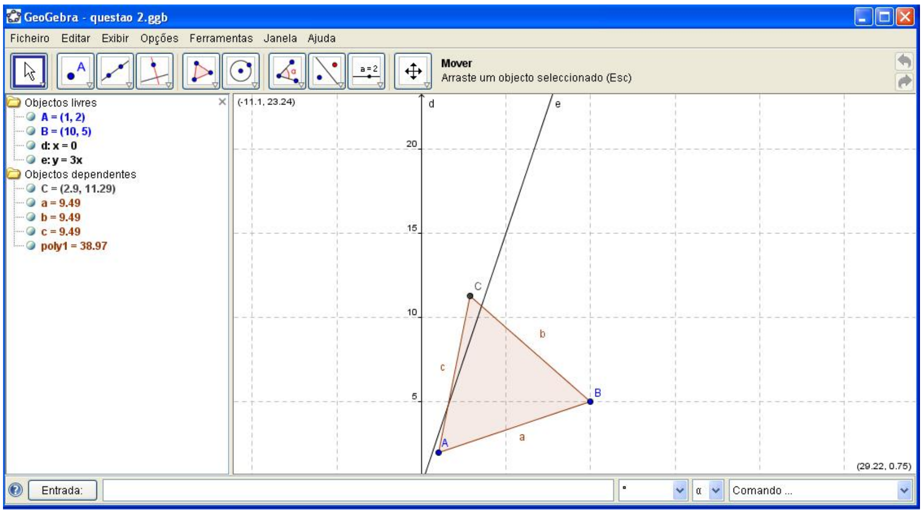
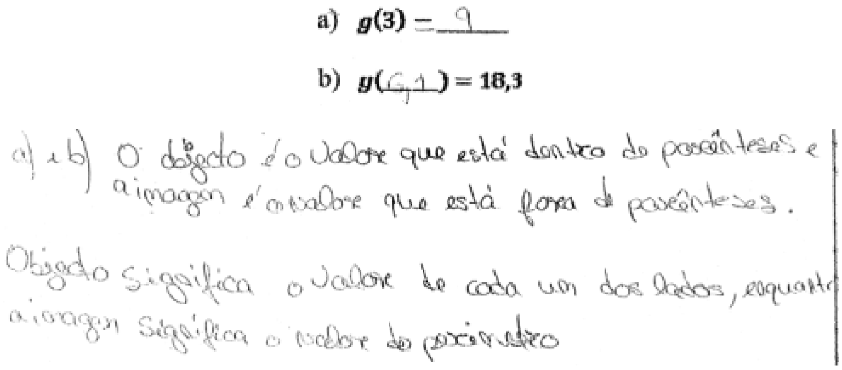


Figura 61. Resposta à etapa VIII. da tarefa 3.

Tendo como base a representação gráfica conseguida na etapa VIII, os alunos iniciam a resolução da questão 2, onde usam a notação específica das funções, determinam graficamente um objecto dada uma imagem e uma imagem dado um objecto, interpretam o significado dos valores encontrados neste contexto e formulam uma generalização ao representarem algebricamente uma função. Joana e Joaquim justificam correctamente que a função *g* é uma função de proporcionalidade directa, através da sua representação gráfica dizendo "Sim, porque é uma recta que passa pelo ponto de origem do referencial". No que diz respeito à pergunta 2.2., mostram não estar familiarizados com a notação usada, pelo que é necessário recorrer à tarefa 2, de modo a fazer uma comparação com a situação nela apresentada:

> **Professora:** Lembram-se o que é que faziam nas máquinas de perguntas na tarefa anterior?
>
> **Joaquim:** Sim.
>
> **Professora:** O que é que vocês faziam? Pensem no contexto deste problema. O que é que a máquina vos pediria? O que é que vocês tinham que introduzir?
>
> **Joana:** O lado.
>
> **Professora:** Tinham que inserir a medida do lado. E o que é que a máquina vos devolvia?
>
> **Joana:** O perímetro.
>
> **Professora:** Agora pensem no que esta escrito.
>
> **Joaquim:** Então, o que está aqui é o lado e aqui o perímetro.
>
> **Professora:** Exactamente. Então, onde é que está situado o objecto?
>
> **Joaquim:** O objecto?
>
> **Professora:** Sim, é dentro de parêntesis ou é fora?
>
> **Joaquim:** Dentro.
>
> **Professora:** E a imagem?
>
> **Joana:** Fora.
>
> **Professora:** Pois é, *g* funciona como sendo uma máquina de perguntas.
>
> **Joaquim:** Então, 3 vezes 3…

A alusão à máquina de perguntas utilizada na tarefa anterior leva os alunos a identificar os objectos como sendo o valor que aparece entre parêntesis e a imagem como o valor que aparece após o sinal de igual. Deste modo, completam correctamente as perguntas a) e b). Justificam este entendimento dizendo:


a) $g(3) = 9$

b) $g(6,1) = 18,3$

a) e b) O objecto é o valore que está dentro do parênteses e a imagem é o valore que está fora de parênteses.

Objecto significa o valore de cada um dos lados, enquanto a imagem significa o valore do perímetro

Figura 62. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 3.

Os alunos concluem a questão indicando correctamente a expressão algébrica da função *g* após terem identificado a constante de proporcionalidade como *k=3*.

6.3.4. Tarefa 4

A tarefa 4 tem como objectivo complementar a tarefa 3. É distribuída os alunos tal como as anteriores, sem nenhum esclarecimento prévio. Mais uma vez, Joana e Joaquim iniciam o seu trabalho.

6.3.4.1. Interpretação de gráficos de proporcionalidade directa num mesmo referencial. Na questão inicial, surgem as representações gráficas das funções que relacionam o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares, a saber, quadrado, pentágono, heptágono e octógono. Nesta questão, os alunos devem identificar as expressões algébricas dessas funções, relacionando-as com as respectivas representações gráfica e algébrica.

Evidenciando dificuldade em iniciar esta questão, os alunos solicitam de imediato a minha presença:

> **Joaquim:** Professora, temos que resolver isto (aponta para o enunciado da composição)?
>
> **Professora:** Não, não têm que fazer isso. Têm que responder à questão. Lembram-se da tarefa da aula anterior? Para cada medida do lado havia um perímetro que lhe estava associado. Só que naquela altura era um quadrado…
>
> **Joaquim:** Ah, sim…

Professora: Aqui, neste caso, estão quatro polígonos aqui representados. E eu quero que me digam é, mediante o lado e mediante o perímetro, quero que me digam a que polígono é que cada uma dessas representações está associada. Lembram-se o que é uma constante de proporcionalidade. O que é que significava?

Joaquim: *y=kx***.**

Professora: O que é que significava no contexto do problema?

Joana: Era a medida do lado e o perímetro do polígono.

Professora: Sim… Mas para o *k* era tomado o quê para unidade?

Joaquim: O *k*…

Professora: Vão ver. Nós já falámos sobre isso na aula anterior (…) se o lado for *1* cm o que é que será o perímetro?

Joaquim: *4*.

Professora: Então vê lá. Analisa a situação.

Quando lhes é lembrada a tarefa anterior, Joaquim começa a fazer o paralelo entre as duas tarefas. No entanto, ambos sentem dificuldade com a forma como vão elaborar a resposta:

Joaquim: Assim?

Professora: Justifica. Porque é que é isso? Porque se o lado…

Joana: Porque se o lado for 1, o seu perímetro…

Professora: Tem medida…

Joana: *4***.**

Professora: Logo… Qual é a função que lhe está associada?

Joaquim: *f* igual…

Professora: Não é *f* é *a(x)*…

Joaquim: Então é *a(x)* igual a *4* entre parêntesis *1*.

Professora: Agora pensem lá, vocês estão a trabalhar com *xx*. Porque é que à pouco dissemos *4x* para o quadrado? ... Porque se a medida fosse *x*, bastava multiplicar…

Joaquim: Multiplicar por *4*…

Professora: E obtinham o perímetro.

Joaquim: Então fica assim: *a(x)* igual…

Joana: ***4x*.**

Professora: Exactamente Joana. Se é um quadrado é *4x***.**

Joaquim: E escrevemos o quê?

Joana: *a(x)=4x*.

Já esclarecidos quanto à notação que devem utilizar, os alunos produzem a seguinte resposta:

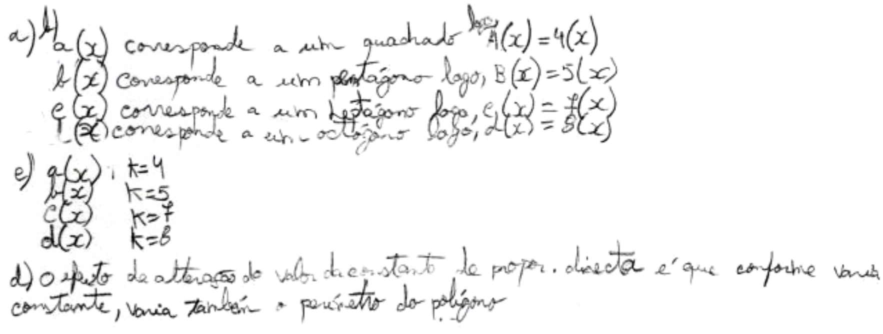


Figura 63. Resposta à pergunta prévia da tarefa 3.

Joana e Joaquim não elaboram uma composição, como era pedido na questão, mas atribuem uma alínea a cada tópico proposto e respondem em conformidade. Assim, em a) e b) identificam o polígono regular a que corresponde cada uma das funções representadas graficamente e a expressão que as representa, respectivamente. Em c) identificam a constante de proporcionalidade e em d) esboçam a identificação do efeito do valor da constante de proporcionalidade no gráfico da função mas não a relacionam com a inclinação da recta respectiva, ou seja, à medida que a constante aumenta a inclinação da recta correspondente também aumenta.

6.3.4.2. Interpretação das representações de uma função de proporcionalidade directa dado um objecto não nulo e a sua imagem. A questão 1 diz respeito a um polígono regular específico que deve ser identificado pelos alunos, dado um objecto não nulo e a sua imagem. Devem, também, escrever uma expressão algébrica para a função linear que lhe corresponde. Joana e Joaquim identificam o polígono com base nos valores dados e apresentam a respectiva expressão algébrica.

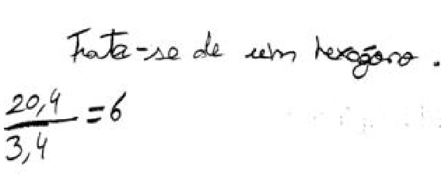


Figura 64. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 4.

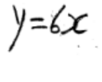


Figura 65. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 4.

Na pergunta 1.3., os alunos realizam a seguinte construção no GeoGebra, onde se pode ver a representação gráfica da função *y=6x*.

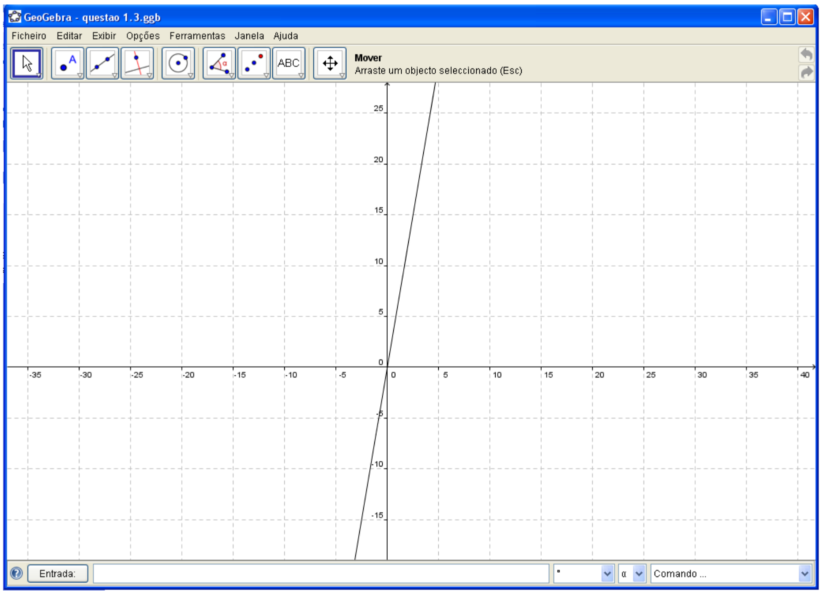


Figura 66. Resposta à pergunta 1.3. da tarefa 4.

6.3.4.3. Mudança de representação (algébrica para tabular e gráfica). A questão 2 apresenta uma função linear dada pela sua expressão algébrica, a partir da qual os alunos têm de completar uma tabela determinando imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e determinando objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal.

Para tal, Joana e Joaquim utilizam a expressão algébrica apresentada, resolvendo uma equação sempre que necessário. No entanto, quando calculam uma imagem, dado um objecto, apenas substituem o valor da variável independente no segundo membro da equação, apesar de calcularem acertadamente, como se pode ver na figura 67:

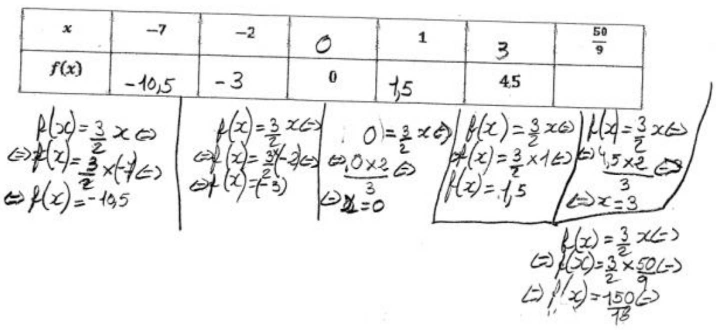


Figura 67. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 4.

Fazem a representação gráfica, através da utilização do GeoGebra, conforme indicação na pergunta. Produzem a seguinte imagem:

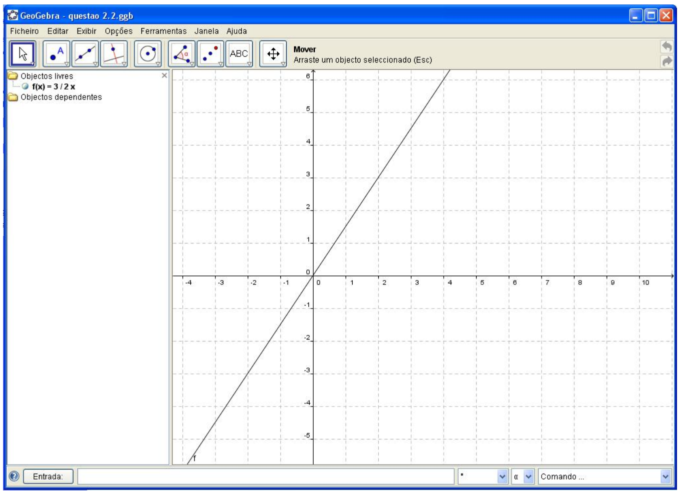


Figura 68. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 4.

6.3.4.4. Identificação do gráfico de funções de proporcionalidade directa. Na quarta e última questão, Joana e Joaquim devem identificar os gráficos que representam funções lineares. Fazem-no recorrendo às características próprias de um gráfico desta natureza:

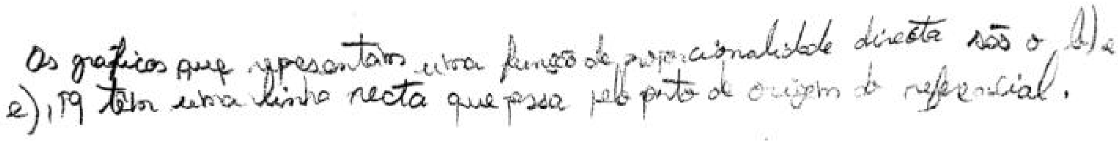


Figura 69. Resposta à questão 3 da tarefa 4.

Deste modo, os alunos recorrem ao facto de estar representada uma linha recta que passa no ponto de origem do referencial para identificarem as funções em b) e e). No entanto, não apresentam um argumento que justifique a razão pela qual excluíram desta classificação as representações a), c) e d).

6.3.5. Tarefa 5

Na tarefa 5 os alunos interpretam a informação apresentada através de um anúncio sobre uma situação a modelar através de uma função de proporcionalidade directa e traduzem uma relação expressa em linguagem natural por uma relação em linguagem matemática, uma expressão algébrica e um gráfico de barras. A tarefa foi distribuída tal como as anteriores, sem nenhum esclarecimento prévio.

6.3.5.1. Análise da situação de proporcionalidade directa descrita na notícia de jornal. Os alunos iniciam o seu trabalho pela análise de uma notícia de jornal sobre a descida dos preços dos combustíveis. Aqui encontram várias informações que devem seleccionar e utilizar na resolução das questões propostas. Por exemplo, nas perguntas 1.1. e 1.2., os alunos devem identificar o preço de cada de um litro de combustível antes e depois da alteração dos preços. Joana e Joaquim utilizam a regra de três simples para responder:

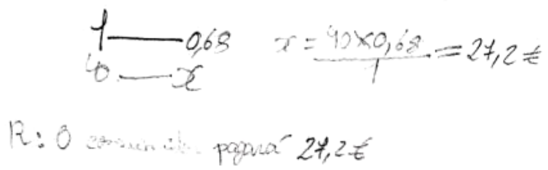


Figura 70. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 5.

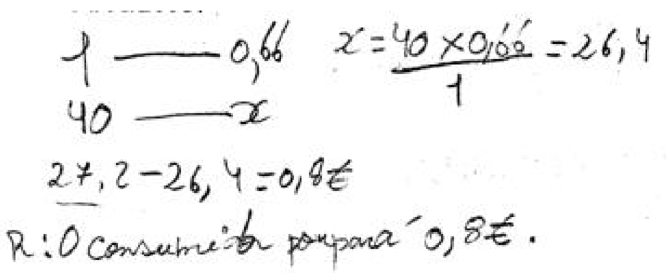


Figura 71. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 5

Na pergunta 1.1., Joaquim e Joana identificam o preço do combustível antes da alteração, utilizando correctamente a regra dos três simples para apresentar o resultado à questão. Na pergunta 1.2. identificam correctamente o preço do combustível no dia seguinte à alteração, utilizando o mesmo método de cálculo para produzir uma resposta. A pergunta 1.3. pede aos alunos que, dado um custo final e o número de litros adquiridos, identifiquem se o consumidor abasteceu antes ou depois da alteração dos preços.

Joana e Joaquim aplicam a estratégia da divisão, dividindo o custo total pelo número de litros de GPL abastecidos, obtendo o preço de um litro.

$$\frac{25,08}{38} = 0,66\ €$$

R: Abasteceu depois da descida dos preços.

Figura 72. Resposta à pergunta 1.3. da tarefa 5

Deste modo, os alunos identificam o valor obtido como sendo o preço do litro de combustível após a descida dos preços.

A pergunta 1.4. pede para determinar a constante de proporcionalidade presente na relação de proporcionalidade relativa aos dois dias em estudo. Na pergunta 1.5., com estes valores identificados, os alunos devem escrever as expressões algébricas que definem as funções que relacionam o número de litros, antes e depois da descida de preços:

03/08/2008: $y = 0,68x$

04/08/2008: $y = 0,66x$

Figura 73. Resposta à pergunta 1.5. da tarefa 5

Os alunos evidenciam ter determinado correctamente as constantes de proporcionalidade e identificado a expressão algébrica geral que representa uma situação de proporcionalidade directa, uma vez que escrevem correctamente as duas expressões pedidas.

6.3.5.2. Análise da situação de proporcionalidade directa com base na expressão algébrica. Com base na expressão algébrica sugerida pelo enunciado da questão 2, os alunos devem identificar a constante de proporcionalidade e o seu significado, determinar a imagem dado um objecto e um objecto dada uma imagem. Antes de iniciarem a resolução da questão 2, Joaquim chama a Professora e tem lugar o seguinte diálogo:

Joaquim: Professora.

Professora: Sim…

Joaquim: Professora, aqui assim (aponta para enunciado da questão 2) aqui o *x* corresponde ao número de litros e o *l* corresponde ao preço…

Professora: Será? Qual é que é a variável independente e qual é variável dependente?

Joaquim: A variável independente é o número de litros…

Professora: Sim…

Joaquim: E a variável dependente é o preço.

Professora: Se a variável independente é o número de litros representamos pelo quê? É o objecto ou é a imagem?

Joaquim: Para a independente é o objecto.

Professora: Então e onde é que estão situados os objectos? Estão dentro ou fora dos parêntesis na expressão *l(x)*?

Joaquim: Dentro… (esperam a confirmação da professora)

Professora: Não sei, pensem lá! Lembrem-se da máquina das perguntas. O que se introduz na máquina são os objectos ou as imagens?

Joaquim: Então, o que introduz na máquina é o número de litros.

Professora: Ou seja, aí…

Joaquim: É o *l*… Não, é o *x*.

Professora: Têm a certeza? Os dois?

Joaquim e Joana: Sim.

Professora: *x* é então a variável…

Joaquim: Então isto tudo é a imagem**.**

Professora: Exactamente. Continuem!

Joana e Joaquim têm dificuldade em identificar, de acordo com a expressão, os objectos e as imagens. Quando questionados pela professora qual das variáveis é a independente e qual é a dependente, os alunos respondem correctamente, identificando a variável independente como sendo o número de litros e a dependente como sendo o custo do combustível adquirido. Estabelecem correctamente a ligação da variável independente aos objectos, que usualmente se representam como *x* e a variável dependente às imagens que usualmente se representam por *y*, ou por *f(x)*. Convém salientar que a aplicação da tarefa "Máquina de perguntas" foi muito útil para estabelecer a analogia com a noção de objectos e imagens.

Na pergunta 2.1. pede-se que identifiquem a constante de proporcionalidade e indiquem o seu significado. Joana e Joaquim identificam-na e indicam correctamente o significado dizendo que é o preço de um litro:

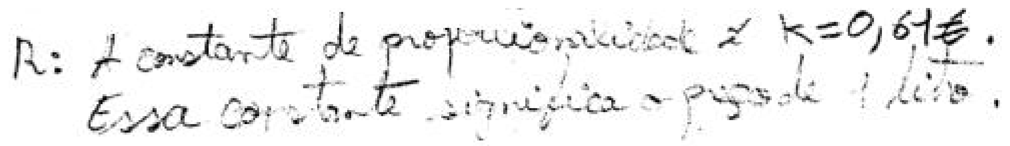

R: A constante de proporcionalidade é k=0,61€.
Essa constante significa o preço de 1 litro.

Figura 74. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 5

A pergunta 2.2. pede aos alunos para calcular a imagem dado um objecto (pergunta 2.2.1.) e um objecto dada uma imagem (pergunta 2.2.2.). Em ambas as perguntas, os alunos utilizam a notação própria das funções, usando-as de forma correcta e chegando aos resultados pretendidos. No entanto, antes de responderem à pergunta 2.2.2., solicitam a presença da professora, dizendo:

Professora: Diz lá Joaquim.

Joaquim: Professora, agora aqui "o objecto cuja imagem é 128,71"…

Professora: Há aí qualquer coisa que eu não estou a perceber o que fizeste (em relação à alínea a)). Não sei! Explica-me lá o que fizeste.

Joaquim: *l(x)* é a expressão.

Professora: Sim…

Joaquim: É igual a *0,61x*.

Professora: Certo!

Joaquim: Depois aqui fizemos *0,61*, que é a variável dependente, vezes *35*.

Professora: O que é que é o *35*?

Joaquim: É a variável independente

Professora: Sim, mas o que é que é o *35* em relação ao que escreveste ali em cima?

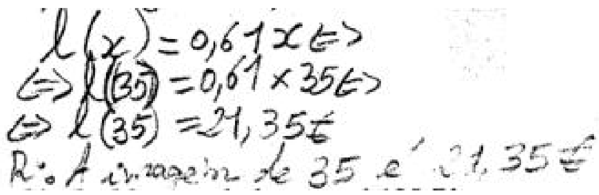
Joaquim: É o objecto.

Professora: Certo. Substituíste um *x* por *35*… Atenção! Quando se substitui um *x*, têm de se substituir todos os *xx*. Está bem?

Joaquim: E agora aqui, *l(x)*…

Professora: Agora queres substituir toda a imagem… E a imagem é dada pelo quê?... Pelo *l(x)*. Portanto, em vez de *l(x)* escreve-se o valor e depois resolve-se essa equação.

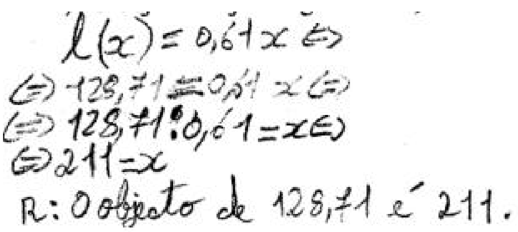
Na pergunta 2.2.1., os alunos substituem a letra *x* pelo valor dado mas apenas no segundo membro da igualdade. Quando alertados para esse facto, voltam atrás e corrigem a resolução, apresentando por fim a seguinte resolução correcta:



$l(x) = 0{,}61x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l(35) = 0{,}61 \times 35 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l(35) = 21{,}35$€
R: A imagem de 35 é 21,35€

Figura 75. Resposta à pergunta 2.2.1. da tarefa 5

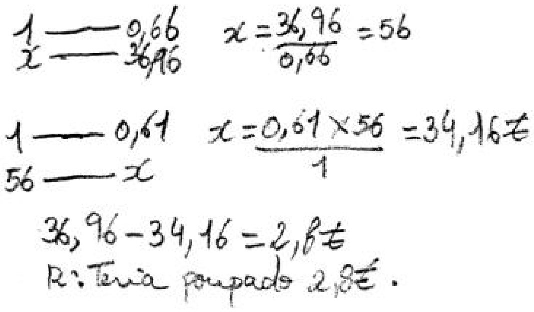
Após indicação da professora, substituem *l(x)* pelo valor dado, produzindo a seguinte resposta, também ela correcta:



$l(x) = 0{,}61x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 128{,}71 = 0{,}61x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 128{,}71 : 0{,}61 = x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 211 = x$
R: O objecto de 128,71 é 211.

Figura 76. Resposta à pergunta 2.2.2. da tarefa 5

6.3.5.3. Interpretação de dados e utilização da proporcionalidade directa na resolução de problemas. A resolução da pergunta 2.3. e de toda a questão 3 envolve informação que não é dada de forma explícita. Assim, na pergunta 2.3., é pedido aos alunos que calculem quanto poderiam ter poupado se tivessem abastecido a mesma quantidade noutro posto. Os alunos recorrem a dados que anteriormente lhe foram facultados para produzir a seguinte resposta:



$1 —— 0{,}66$
$x —— 36{,}96$
$x = \frac{36{,}96}{0{,}66} = 56$

$1 —— 0{,}61$
$56 —— x$
$x = \frac{0{,}61 \times 56}{1} = 34{,}16$€

$36{,}96 - 34{,}16 = 2{,}8$€
R: Teria poupado 2,8€.

Figura 77. Resposta à pergunta 2.3. da tarefa 5

Joana e Joaquim começam por calcular o número de litros adquiridos, fazendo uso da regra de três simples. Seguidamente, calculam, pelo mesmo processo, quanto teriam gasto se tivessem adquirido o combustível no outro posto indicado, fazendo a diferença de gastos.

Na questão 3, os dados são retirados de uma tabela e de um gráfico. Na pergunta 3.1., os alunos utilizam os dados provenientes do gráfico apresentado para calcular quantos litros de combustível foram vendidos em Agosto de 2008.

$160 + 135 + 15 = 310 \ l$

R: No total foram vendidos 310 litros de combustível.

Figura 78. Resposta à pergunta 3.1. da tarefa 5

A pergunta 3.2. pretende determinar quanto dinheiro recebeu o posto por todo o combustível vendido. Para resolver esta pergunta, Joana e Joaquim têm de relacionar os dados apresentados pela tabela e pelo gráfico.

Gasoleo: $1 \text{ —— } 1{,}37$ $\quad x = 219{,}2$€
$160 \text{ —— } x$

Gasolina sem chumbo: $1 \text{ —— } 1{,}51$ $\quad x = \frac{135 \times 1{,}51}{1} = 203{,}85$€
$135 \text{ —— } x$

GPL: $1 \text{ —— } 0{,}62$ $\quad x = \frac{0{,}62 \times 15}{1} = 9{,}3$€
$15 \text{ —— } x$

Preço total: $219{,}2 + 203{,}85 + 9{,}3 = 432{,}35$€

R: Durante este mês, este posto recebeu 432,35€.

Figura 79. Resposta à pergunta 3.2. da tarefa 5

Os alunos começam por calcular o lucro obtido com a venda do gasóleo, da gasolina sem chumbo e do GPL, fazendo novamente uso da regra de três simples. Seguidamente, somam os valores encontrados e chegam ao valor pretendido.

6.4. Pensamento funcional depois da experiência

Tal como a entrevista inicial, a entrevista final também é constituída por uma tarefa com duas questões. A entrevista inicia-se com questões cujo objectivo era permitir a Joana e Joaquim adquirir a calma e a concentração necessárias à realização da tarefa. A primeira questão pretendia que identificassem, de um conjunto de correspondências representadas por diagramas sagitais, quais correspondiam a funções, justificando a sua resposta. Posteriormente, para cada uma das correspondências seleccionadas, os alunos identificam o domínio e o contradomínio. A segunda questão coloca um conjunto de perguntas baseadas numa situação do quotidiano de modo a poder concluir se a correspondência entre duas variáveis (peso e respectivo custo) representa uma função e se esta função representa uma situação de proporcionalidade directa.

6.4.1. Conceito de função

À questão sobre quais as correspondências apresentadas por diagramas sagitais, correspondem a funções, Joaquim tenta responder de imediato. Contudo, identifica, erradamente, uma correspondência como função. Questionados sobre a noção de função, os dois alunos reconhecem rapidamente o erro, indicando o motivo pelo qual não se trata de uma função:

> **Professora:** Quais delas é que são funções e porquê.
>
> **Joaquim:** Sim… Então, destas… Das seguintes correspondências as que são funções é a A… É a função… É a A…
>
> **Joana:** f…
>
> **Joaquim:** É a correspondência *f*), a correspondência *g*), a correspondência *i*) e a correspondência *k*).
>
> **Professora:** A *i*) é uma função?
>
> **Joaquim:** Diga!
>
> **Professora:** A *i*) é uma função?
>
> **Joaquim:** É.
>
> **Professora:** Quando é que podemos dizer que temos uma função?
>
> **Joaquim:** Ah… Não… Há um elemento do conjunto de partida que não corresponde a nenhum elemento do conjunto de chegada.
>
> **Professora:** E então? É função ou não?

Joaquim: Não.

Professora: Então vamos recapitular quais são as funções.

Joaquim: As funções são a *f*)…

Professora: Podem ir escrevendo.

Joaquim: (escreve e vai lendo o que escreve) As funções são as correspondências *f*), *g*) e *k*) vírgula…

Joana: Porque…

Joaquim: Pois, a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Os dois alunos evidenciam ter adquirido a noção de função, bem como as noções de domínio e de contradomínio. Acrescentam, ainda, que o domínio diz respeito aos valores tomados pela variável independente e o contradomínio aos valores da variável dependente:

Professora: O que é o domínio?

Joaquim: É o valor… É a variável independente, enquanto que o contradomínio é a variável dependente. Assim sendo, na função *f*), o domínio… O domínio é… (Joaquim vai escrevendo a resposta à questão).

Professora: ... Igual…

Joaquim: … Igual… O domínio é a Ana…

Joana: A Inês…

Joaquim: Inês…

Joana: E a Sara.

Joaquim: A Inês e a Sara.

[…]

Joaquim: E o contradomínio é o Paulo…

Joana: O Joaquim e o António.

Joaquim: O Paulo, o Joaquim e o… E o António. Na função *g*)… Na função *g*) o domínio é o azul, o verde e o vermelho (escreve a resposta), enquanto que o contradomínio…

Joana: É o Porto e Lisboa.

Joaquim: É o Porto e Lisboa (escreve a resposta). Na função *k*)… O domínio é o 3, o 7 e o 5 e o contradomínio é o 8.

Oralmente, Joana e Joaquim respondem correctamente. No entanto, quando escrevem a resposta, erram. Mostram sentir dificuldades quando tentam formalizar o que dizem verbalmente. Este facto pode ser comprovado através do excerto seguinte, onde utilizam uma mistura de representação em extensão e em compreensão. Os alunos começam por representar simbolicamente o domínio, mas dentro das chavetas, utilizam a linguagem corrente para representar os elementos do conjunto:

1.2. Para cada uma das funções, indica o domínio e o contradomínio.

f : D={Ana, a Inês e a Sara}
f:CD={Paulo, o Joaquim e o António}
g : D={Azul, o verde e o vermelho}
g :CD={Porto e Lisboa}
K : D= {3,7,5}
K :CD={8}

Figura 80. Resposta à pergunta 1.2. da entrevista final.

A questão 2 apresenta uma situação que faz corresponder a variável peso à variável custo.

Ao ler a pergunta 2.1., Joaquim escreve de imediato a resposta. Usando as variáveis peso e preço, justifica correctamente que estamos na presença de uma função, evidenciando o domínio desta noção:

2.1. A correspondência entre Peso e Preço é uma função? Justifica.

Sim, porque para cada Peso existe um e um só preço.

Figura 81. Tarefa entrevista final. Pergunta 2.1.

6.4.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

Partindo da situação apresentada, os alunos deviam completar uma tabela onde são indicados alguns objectos e algumas imagens. Para calcular os objectos ou as imagens em falta continuam a tabela, utilizando principalmente a regra de três simples. Joaquim parte da leitura da etiqueta, estabelecendo uma correspondência entre as variáveis de modo a calcular os valores pedidos:

> **Joaquim:** Aqui na etiqueta podemos ler que o preço por cada quilo é 6 euros…

Joana: … E 80…

Joaquim: E 80. Se… Assim sendo, podemos utilizar a regra de três simples…

Professora: Então vá. Como é que faziam?

Joaquim: Então fica… Se para um quilo é 6 euros e 80, então para 100 gramas é *x*.

De modo a facilitar os cálculos, Joaquim tenta utilizar um processo diferente. Identifica 100 gramas como sendo um décimo do quilo e refere esse facto:

Joaquim: Podemos dividir 6 e 80 por 10, não dá professora?

Professora: (confirma com a cabeça) Quanto dá?

Joaquim: Dá 68 cêntimos.

Para determinar o par seguinte, os alunos utilizam um processo aditivo:

Joaquim: Se 100 g custam 68 cêntimos logo 200 g custam o dobro. Logo, custaram… 1 euro e 36… 1 euro e 36 cêntimos.

[…]

Professora: E agora, 600 gramas?

Joaquim: Agora, se 400 gramas custam 2 euros e 72 e se 200 gramas custam 1 euro e 36, logo, 200 g com 400 g dá as 600 g que nos são pedidas e logo, 1 euro e 36 mais 2 euros e 72 vai ser igual a 4 euros e 8 cêntimos…

Voltam a usar este processo quando pretendem calcular a imagem de 1600. Joaquim começa por recorrer à regra de três simples mas apercebe-se que pode recorrer, novamente, à estratégia aditiva, estabelecendo uma nova correspondência:

Joaquim: Então, mas aqui podia fazer de outra forma. Na tabela é-nos dado que 600 gramas custam 4 euros e 8 cêntimos. Como 1000 gramas é igual a 6 euros e 80, 1600 gramas… Aqui não é necessário fazermos uma regra 3 simples… Podemos fazer 4 euros e 8 cêntimos mais 6 euros e 80 cêntimos que nos vai dar 10 euros e 88 cêntimos.

Apesar dos alunos se sentirem familiarizados com a regra de três simples, exploram outros processos que lhes possam facilitar os cálculos, nomeadamente estratégias aditivas. Desta forma, completam a tabela apresentada sem dificuldade.

6.4.3. Representação de funções lineares e afins

Representação gráfica. O estudo realizado na entrevista inicial para encontrar a escala que melhor se adequa ao contexto, já não se verifica. Para passar da representação tabular para a gráfica, os dois alunos utilizam a constante de proporcionalidade como unidade para construir a escala do eixo das ordenadas. Têm a noção que uma situação de proporcionalidade directa é representada por uma recta que passa na origem e que para representar essa recta, basta representar dois pontos da tabela:

> **Professora:** Constrói um gráfico que represente a correspondência registada na tabela anterior. Vocês já disseram que era uma função de proporcionalidade directa. Como é que acham que vai ser o gráfico?
>
> **Joaquim:** Vai ter uma recta que passa pela origem.
>
> **Professora:** Uma recta que passa pela origem… Então vamos lá. Para representar uma recta, quantos pontos é que precisamos, no mínimo?
>
> **Joana:** 2.
>
> **Professora:** 2 pontos… E já temos aí vários! Então vamos lá!
>
> **Joaquim:** É assim?
>
> **Professora:** Depende da escala que tiveres a considerar.
>
> **Joana:** Pois…
>
> **Professora:** Como é que pensas fazer?
>
> **Joaquim:** De 100 em 100 (Joaquim faz a representação gráfica).
>
> **Professora:** Sem querer, já responderam à pergunta 2.12.. Podes confirmar graficamente que se trata de uma função de proporcionalidade directa e explica porquê.
>
> **Joana:** Porque temos uma linha recta que passa pela origem.
>
> **Professora:** Nem mais!
>
> **Joaquim:** E agora aqui… Temos de por sempre a mesma escala…
>
> **Professora:** Qual é a escala?
>
> **Joaquim:** de 0,68 em 0,68…
>
> **Joana:** A seguir é 1 vírgula 36…
>
> **Professora:** Não é necessário continuar. Já conseguem marcar dois pontos… Falta responder à pergunta 2.12.
>
> **Joaquim:** Então, o que nós dissemos é que…
>
> **Professora:** Como é que confirmavam graficamente?
>
> **Joaquim:** Porque é uma recta que passa pela origem do referencial.

Joana e Joaquim identificam uma função de proporcionalidade directa como uma função cuja expressão geral é da forma $y = kx$. Intuitivamente, estão a representar funções lineares e identificam a sua representação como uma recta que passa na origem do referencial.

Representação algébrica. Para determinar a expressão algébrica que representa a situação descrita, os dois alunos começam por encontrar a constante de proporcionalidade. No entanto, a identificação desta constante não é imediata:

Joaquim: *y* igual a 6 e 80… 6 vírgula 80 *x*.

Professora: Então, o que é que representa o *x*?

Joaquim: *x* é o peso… É o peso da carne.

Professora: Então…

Joaquim: Por cada 1000 g…

Professora: Mas nem sempre é 1000… Eu tenho aí 100 g… Por cada 100 gramas vais multiplicar por 6 euros e 80, é isso?

Joaquim: Não pode ser…

Professora: Vamos lá ver… *x* é o peso.

Joaquim: Certo!

Professora: E no peso eu posso ter 100, 200, 400, 600 gramas… E 6 e 80 a multiplicar por 100 g, por exemplo… Achas que estás a fazer o cálculo correcto? Essa expressão será a correcta?

Joaquim: Não… Então temos de saber qual é o preço de um grama.

Professora: Por exemplo!

Joaquim: Então, podemos fazer 6 ponto 80 a dividir por 100.

Professora: Por 100? 6 e 80 por 100?

Joaquim: Hã… 0,68… Dava 0,0068 (responde à pergunta 2.4.).

Joana e Joaquim utilizam a informação constante da embalagem do produto para definir a constante de proporcionalidade, isto é, 1000 gramas do produto custam 6,8 euros. Deste modo, identificam a constante como sendo k=6,8. Quando confrontados com a hipótese de comprar apenas 100 gramas, por exemplo, percebem que não estavam a identificar a constante correctamente, sugerindo que se deva saber qual o preço de um grama do produto. Desta forma, encontram a constante de proporcionalidade e, baseando-se neste cálculo, respondem à pergunta 2.3., dizendo:

> **Joaquim:** Então, são directamente proporcionais porque… Pois cada grama custa 0,0068 cêntimos. Logo, consoante o número de gramas será o preço, sendo o peso sempre multiplicado por 0,0068.
>
> **Professora:** De que forma é a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade…
>
> **Joaquim:** *y* igual a *kx*, sendo *k*… Indica a constante… Aqui a constante é 0,0068.
>
> **[…]**
>
> **Joaquim:** *k*, que é a constante, é igual a 0,0068 e indica o preço de um grama.

Os dois alunos justificam que as duas variáveis são directamente proporcionais identificando a expressão algébrica que a representa. Utilizam a comparação da expressão que obtiveram com a expressão algébrica geral de uma função de proporcionalidade, isto é $y=kx$, representando k a constante de proporcionalidade. Deste modo, conseguem estabelecer uma correspondência entre a representação gráfica e a expressão algébrica que lhe corresponde, ou seja, a representação simbólica.

6.5. Evolução do grupo

O presente capítulo descreve o desempenho de Joana e Joaquim na primeira entrevista, salienta alguns momentos significativos que vivem durante a realização da unidade de ensino e, por fim, analisa o que sucede na segunda entrevista. Depois de ter traçado estes três cenários faz sentido olhar para a avaliação dos alunos. No dia 17 de Fevereiro de 2009, os alunos realizaram uma ficha de avaliação individual, onde são postos à prova os seus conhecimentos após a leccionação desta unidade de ensino.

6.5.1. Conceito de função

Na questão 2 da ficha de avaliação, da 1.ª parte (questões de escolha múltipla), os alunos devem identificar qual das correspondências (apresentadas na forma de referencial cartesiano, diagrama sagital ou tabela) representa uma função.

Joaquim identifica correctamente a representação (D) como sendo uma função, enquanto Joana não apresenta qualquer resposta a esta questão.

Na questão 4, da 2.ª parte (questões de desenvolvimento), é pedido aos alunos que indiquem se a tabela que haviam completado anteriormente representava uma função.

Os dois alunos respondem correctamente. Joana apresenta uma justificação adequada às variáveis em causa, identificando correctamente a variável independente como sendo “o número de dólares” e a variável dependente como sendo “o custo”:

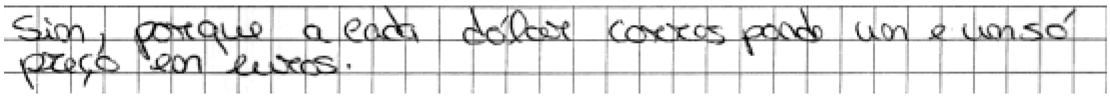

Sim, porque a cada dólar corresponde um e um só preço em euros.

Figura 82. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joana, Pergunta 4.2..

Joaquim apresenta a justificação usando uma noção genérica de função.

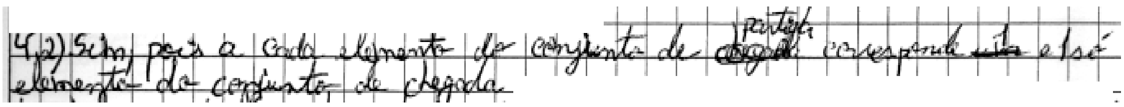

4.2) Sim, pois a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada

Figura 83. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joaquim, Pergunta 4.2..

Na questão 6, é apresentada uma situação através da sua representação gráfica, que faz corresponder à idade o respectivo número de horas de sono. Quando questionados se o gráfico apresentado representa uma função, Joana responde como anteriormente, ou seja, particulariza de acordo com as variáveis em estudo enquanto Joaquim utiliza novamente a noção geral de função. Ambos identificam correctamente a variável independente como sendo a Idade (em anos) e a variável dependente como sendo o número de horas de sono.

6.5.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

6.5.2.1. Representação tabular. Na pergunta 4.1., tendo em conta a informação dada através da representação verbal “Sabendo que naquele dia cada dólar lhe custou 0,92 euros”, os alunos devem completar uma tabela. Para tal, os dois alunos optam pelo uso da regra dos três simples e, estabelecendo a correspondência ‘um dólar corresponde a 0,92 euros’, calculam os valores em falta das variáveis independente e dependente. Os alunos utilizam o mesmo método nas perguntas 4.7. e 4.8., onde são questionados sobre o número de dólares que podem adquirir com uma determinada quantidade de euros, ou quanto custa um determinado número de dólares:

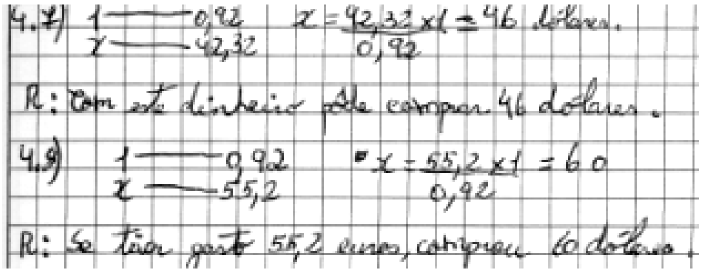

4.7) 1 —— 0,92 $x = \frac{42,32 \times 1}{0,92} = 46$ dólares.
x —— 42,32
R: Com este dinheiro pode comprar 46 dólares.
4.8) 1 —— 0,92 $x = \frac{55,2 \times 1}{0,92} = 60$
x —— 55,2
R: Se tiver gasto 55,2 euros, comprou 60 dólares.

Figura 84. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joaquim, Perguntas 4.7. e 4.8..

6.5.2.2. Representação algébrica. Na pergunta 4.4., os alunos são levados a escrever uma expressão algébrica que represente a tabela que acabam de completar. Joana e Joaquim mostram ter identificado a constante de proporcionalidade de permite fazer a sua complementação, escrevendo como resposta $y=0,92x$. No entanto, apenas Joaquim refere que a mesma expressão representa uma situação de proporcionalidade directa pois “são da forma $y=kx$, tendo 0,92 como k”.

6.5.2.3. Representação gráfica. Ainda na questão 4, mas na pergunta 4.9., os alunos devem representar, através de um gráfico cartesiano, a correspondência registada na pergunta 4.1. através de uma tabela. Joana faz a representação gráfica que a figura 85 sugere.

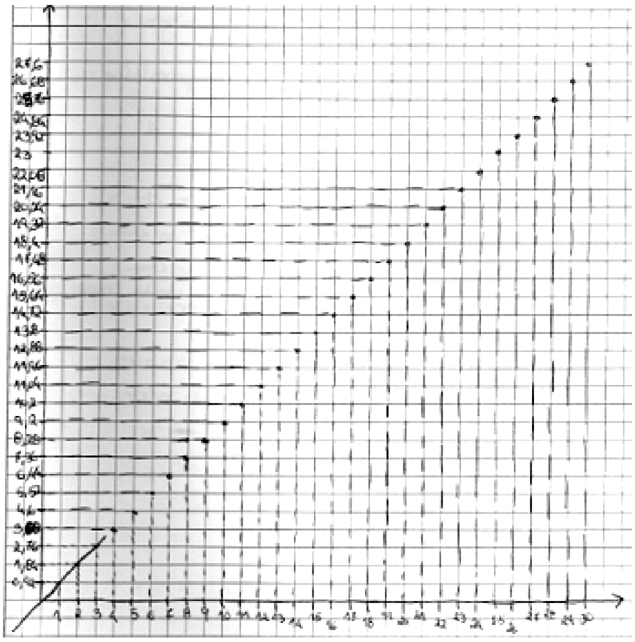


Figura 85. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joana, Pergunta 4.9..

Joana representa todos os pontos da tabela que tinha acabado de completar, não tendo em consideração que apenas são necessários dois pontos para representar uma recta. Representa unicamente o quadrante onde as variáveis assumem valores positivos apesar de ter indicado que a recta se prolonga indefinidamente nos dois sentidos. Não identifica os eixos apesar de ter representado no eixo das abcissas os valores da variável independente, o número de dólares, e no eixo das ordenadas os valores da variável dependente (custo em euros). Utiliza como unidade para o eixo das ordenadas o valor da constante de proporcionalidade. Na pergunta 4.10., Joana justifica tratar-se de uma situação de proporcionalidade ao escrever: "sim, pois posso traçar uma linha recta que passa pela origem do gráfico".

Joaquim apresenta uma representação diferente. Identifica correctamente os eixos e escolhe uma escala para representar os valores das variáveis independente e dependente, diferente da utilizada por Joana. Representa apenas alguns pontos que, apesar os erros próprios de uma escala desta natureza, parecem não ficar alinhados sob uma linha recta. Por outro lado, representa inicialmente os quatro quadrantes optando posteriormente pelo 1.º quadrante, mas não desenha a recta que passa pelos pontos representados. Justifica que a função representa uma situação de proporcionalidade directa ao escrever: "Sim, pois é uma recta que passa pela origem do referencial".

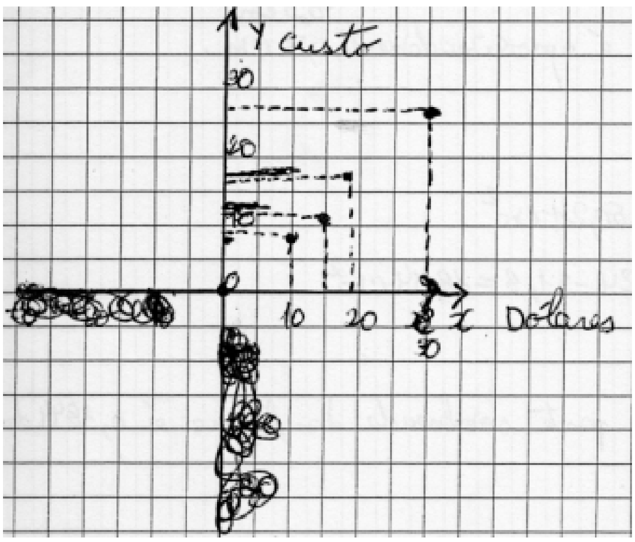


Figura 86. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joaquim, Pergunta 4.9..

Na questão 6, e dada a representação gráfica apresentada, os alunos identificam correctamente os objectos dadas as respectivas imagens e as imagens dados os respectivos objectos. A dificuldade identificada no cálculo de um objecto, dada a sua imagem, através da representação algébrica não é verificada quando fazem a leitura de uma representação desta natureza (representação gráfica).

6.5.3. Representação de funções lineares e afins

Na questão 5, os alunos devem considerar três funções apresentadas analiticamente, onde $f(x)=2x+3$, $g(x)=x-3$ e $h(x)=2x$. Nas perguntas 5.1. e 5.2., os alunos devem calcular imagens de objectos e objectos dadas as suas imagens, respectivamente.

Joana e Joaquim apenas respondem à pergunta 5.1. ao calcularem as imagens dos objectos sugeridos no enunciado:

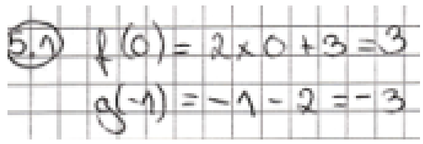

5.1 $f(0) = 2\times 0+3 = 3$
$g(-1) = -1 - 2 = -3$

Figura 87. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joana, Pergunta 5.1..

Nenhum dos alunos calcula o objecto que, através da função, tem imagem cinco. Este facto talvez se possa justificar pela dificuldade em resolver equações do 1.º grau, como se veio a verificar quando se iniciou o estudo do capítulo relativo às equações de grau superior ao primeiro.

Na pergunta 5.3., Joaquim identifica a função *h* como sendo uma função de proporcionalidade directa por comparação com a sua expressão geral.

Figura 88. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joaquim, Pergunta 5.3..

Joana responde erradamente, apesar de identificar a forma expressão geral de uma função de proporcionalidade directa:

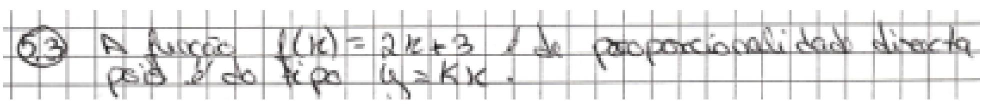

5.3 A função $f(x) = 2x+3$ é de proporcionalidade directa pois é do tipo $y=kx$.

Figura 89. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Joana, Pergunta 5.3..

Capítulo 7

Filipa e Marina

Apresento, seguidamente, o caso de duas alunas, Filipa e Marina, que constituíram um grupo durante a leccionação da unidade de ensino.

7.1. Caracterização das alunas do grupo

Filipa tem 14 anos. Está a frequentar o 8.º ano de escolaridade pela primeira vez, tendo reprovado uma vez no 7.º ano. Considera-se boa aluna a Matemática, apesar das notas nem sempre corresponderem às suas expectativas. Justifica-se dizendo que, às vezes, está distraída na aula e a sua forma de estudar não é a mais produtiva. Para além da ajuda da mãe, sempre que possível, nunca teve outro apoio extra escola. A sua disciplina preferida é a Educação Física, sendo a Matemática aquela em que tem mais dificuldade. Nas aulas de Matemática é atenta e empenhada, envolvendo-se activamente nas tarefas propostas, mas nem sempre consegue bons resultados. Considera que a escola é um local onde se tem aulas e que as matérias leccionadas pelas várias disciplinas são interessantes e úteis. Ana sua perspectiva, a causa das eventuais dificuldades de aprendizagem reside na demasiada rapidez no tratamento dos assuntos. No final do 1.º período, obteve nível 3 na disciplina de Matemática. Pretender frequentar um curso superior e tornar-se Professora de Educação Física ou Educadora de Infância. Reside muito perto da escola com a mãe, cuja profissão é empregada de balcão e possui o 9.º ano de escolaridade. Esta mostra-se atenta ao percurso escolar da sua educanda, comparecendo na escola sempre que a sua presença é solicitada pela Directora de Turma ou quando considera ser necessário.

Pelo seu lado, Marina tem 13 anos. Está, também, a frequentar o 8.º ano pela primeira vez e não apresenta nenhuma retenção anterior. Considera-se uma aluna razoável a Matemática, por não estudar o suficiente, nem sempre apresentar os trabalhos de casa e não participar muito nas aulas. Nunca usufruiu de apoio extra escola, estudando sozinha e, esporadicamente, pede ajuda a uma prima. A Matemática é a sua disciplina preferida, apesar de sentir alguma dificuldade. A disciplina que menos gosta é Educação Visual. Nas aulas de Matemática é uma aluna atenta e empenhada, que se envolve activamente nas tarefas propostas, nem sempre atingindo os objectivos. Questionada sobre o que representa a escola, é de opinião que é um local onde se trabalha e aprende e que os tópicos leccionados nas várias disciplinas são interessantes e úteis. Atribui as eventuais dificuldades de aprendizagem à demasiada rapidez no tratamento dos assuntos. No final do 1.º período, obteve nível 3 em Matemática. Pretende frequentar o ensino superior e tornar-se Médica de Clínica Geral. Mora perto da escola, demorando entre 5 a 15 minutos, de carro, no seu trajecto diário. O seu agregado familiar é composto pelos pais e irmão que se encontra a frequentar o 3.º ano do 1.º ciclo. A mãe, funcionária pública, e o pai, soldador, possuem, respectivamente, 9.º e 4.º anos de escolaridade. A encarregada de educação desloca-se à escola sempre que considera necessário.

As duas alunas aceitaram prontamente formar um grupo de trabalho. Filipa foi eleita a porta-voz do grupo por ser considerada a que tem mais facilidade de expressão. Marina é mais reservada, mas intervém quando considera que Filipa não apresenta de forma clara as dúvidas e dificuldades do grupo. Durante a realização das tarefas propostas, as alunas mostraram-se muito empenhadas e trabalhadoras.

7.2. Pensamento funcional antes da experiência

Nesta secção caracterizo a forma como Filipa e Marina se manifestam no que diz respeito ao pensamento funcional, tendo por base a entrevista inicial.

7.2.1. Conceito de função

Durante a realização da questão 3, Filipa e Marina elaboram uma resposta que sugere que se recordam de ter trabalhado com situações de proporcionalidade directa, indicando a constante de proporcionalidade e interpretando-a à luz do problema. Dada uma representação gráfica, evidenciam, também, reconhecer se representa ou não uma situação de proporcionalidade directa, como se evidencia no seguinte diálogo:

> **Professora:** Expliquem… Situem-se no que deram no 7.º ano em relação à proporcionalidade directa… Primeiro que tudo têm que explicar porque é que o preço a pagar é directamente proporcional ao número de jogos a efectuar. Conseguem explicar? …
>
> **Marina:** 1 jogo é 3 ponto 75… 2 jogos …
>
> **Filipa:** 2 é 7 e meio…
>
> **Professora:** O que podem concluir?
>
> **Marina:** Que 1 jogo é os 3 ponto 75…
>
> **Professora:** Então… [aponta para pergunta 3.4.]
>
> **Marina:** Ou seja, que se vai sempre acrescentando 3 ponto 75 a cada jogo que se vai jogar**.**
>
> **Filipa:** Não aumenta nem diminui o preço.
>
> **Professora:** Então, se não aumenta nem diminui o preço… Preço de quê?
>
> **Filipa:** De cada jogo.
>
> **Professora:** Então esse preço de um jogo é o quê?
>
> **Marina:** É uma constante.
>
> **Professora:** Então esse preço chama-se…
>
> **Marina:** Constante de proporcionalidade.
>
> **Professora:** Qual o significado…
>
> **Marina:** O significado é…
>
> **Filipa:** É o preço de cada jogo.
>
> **Professora:** Então vamos escrever: A constante de proporcionalidade… Em geral, até tínhamos uma letra para representar.
>
> **Filipa:** k igual…
>
> **Professora:** k, muito bem. k igual… A quanto?
>
> **Marina:** Vamos por assim … k igual 3 ponto 75.

7.2.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

Nas várias perguntas que compõem a questão 3, os alunos devem interpretar um enunciado (representação verbal) e completar uma tabela (representação tabular), construir um gráfico (representação gráfica) e identificar uma expressão algébrica que a representa (representação simbólica). Para responder à pergunta 3.1., onde era pedido o preço de 9 jogos, as alunas referem o seguinte:

Marina: Temos de fazer 3,75 vezes nove.

Professora: Então façam os cálculos, por favor.

Marina e Filipa identificam a constante de proporcionalidade como sendo o preço de um jogo e utilizam uma estratégia multiplicativa ao efectuar o cálculo de a multiplicar por nove para responder à pergunta. Em relação à pergunta 3.2., utilizam um processo diferente. Após a leitura do enunciado, tem lugar o seguinte diálogo:

Filipa: Temos 18 virgula 75 mais 11 vírgula 25 que é o dinheiro…

Marina: Temos que somar o dinheiro que o Jorge e a Vera têm.

Professora: Muito bem. E esse resultado é…

Filipa: 18 75 mais 11 25 que é… 30.

Professora: Sim, e de seguida…

Filipa: Quantos jogos pode realizar…

Marina: Só podem realizar 8 jogos.

Professora: Porquê 8 jogos?

Marina: Porque para fazerem 9 jogos tinham que ter mais 75 cêntimos que é aquilo que lhes falta. Fizemos esta conta aqui [aponta para a pergunta 3.1.]

Filipa: 3 euros mais 75 cêntimos.

Professora: E onde é que vão buscar esse valor? Mais 3 euros e 75…

Marina: Nós fizemos assim: o valor de casa jogo, que é 3 euros e 75, depois fizemos 9 jogos.

Filipa: Agora na alínea 3.2. deu 30 euros e só dá para realizar 8 jogos porque se fossem 9 jogos tinham de ter mais 3 euros e 75 que é o valor de um jogo.

Professora: Muito bem.

As alunas começam por somar os dois valores dados no enunciado e de imediato dão a resposta à questão. Quando questionadas sobre a sua resposta dada, justificam a sua resposta a partir do valor encontrado na pergunta anterior.

Na pergunta 3.3., pretende-se que completem uma tabela, onde são apresentados alguns objectos e algumas imagens e são exigidos algumas imagens e alguns objectos, respectivamente. Por exemplo, Marina utiliza uma estratégia multiplicativa, considerando que se podem multiplicar por dois ambos os valores das variáveis independentes e dependentes, enquanto Filipa utiliza uma estratégia aditiva, ou seja, considera basta somar duas vezes o valor pago por um jogo. O mesmo se verifica de tivermos como objectivo, calcular o preço de 4 jogos:

> **Filipa:** Então, na primeira é 3 virgula 75. Agora, para sabermos o segundo fazemos uma conta de somar …
>
> **Marina:** Fazemos 3 vírgula 75 vezes 2… Vezes dois…
>
> **Professora:** Mas o que a Filipa disse também não estava errado, pois não? Ou estava Marina?
>
> **Marina:** Não… Fazia-se os 3 virgula 75 mais os 3 virgula 75. Mas assim é mais fácil. Depois, se forem 4, fazemos 3 vírgula 75 vezes… 4 que dá 15…

Este raciocínio complica-se quando se pretende calcular quantos jogos se podem realizar com 37,50 euros. Após vários cálculos errados, Marina sugere que utilizem o valor de 2 jogos e vão somando 3,75 até encontrarem o valor dos seguintes. Começam por usar uma estratégia aditiva para completar a tabela com os valores em falta. Quando se voltam a debruçar sobre o valor 37,50, Filipa sugere que este valor é o preço de 10 jogos. A sua justificação volta a centrar-se numa estratégia multiplicativa, multiplicando o valor de um jogo por 10 para obter o valor de 10 jogos:

> **Filipa:** Aqui é 3…
>
> **Professora:** Não estão a achar aí nada estranho? Aí é 15, onde estão a colocar dá 15. Não estão a achar nada estranho? Acham que aqui pode ser 3? 3 jogos podem custar mais que 4 jogos?
>
> **Marina:** Não, não pode ser 3.
>
> **Professora:** Então como é que resolvem a situação?
>
> **Marina:** Temos que fazer vezes 3.
>
> **Filipa:** Então, se 2 jogos são 7 e meio… 3 jogos são 7 e meio vezes 3.
>
> **Professora:** Não, não estás a fazer bem.
>
> **Marina:** Mais fácil seria ir somando para saber…
>
> **[…]**
>
> **Marina:** Este é o décimo jogo.
>
> **Professora:** 10 jogos.

Marina: 10 jogos pois…

Professora: Como é que tiveste esse palpite Filipa?

Filipa: Porque se 3 euros e 75… Como esta aqui [aponta para o primeiro par da tabela]… 3 euros 75 vezes 10 dá 33 virgula 75… Eu pensei que fazendo vezes 10 pudesse dar.

Utilizando um destes processos para calcular objectos/imagens, as alunas determinam todos os pontos correspondentes ao preenchimento da tabela.

7.2.3. Representação de funções lineares e afins

7.2.3.1. Representação gráfica. Tal como Joana e Joaquim, Marina e Filipa representam e identificam coordenadas de pontos num referencial cartesiano. Apesar de não referirem termos como ‘variável independente’ e ‘variável dependente’, as alunas identificaram correctamente o eixo onde as representar dizendo:

Marina: Vamos representar.

Professora: Então vamos lá Filipa.

Filipa: Aqui meto 1… Aqui 2… Aqui 3… Aqui 4…. Aqui 5… Aqui 6… Aqui 7.

Professora: Sim, e agora?

Filipa: Agora aqui o preço de cada jogo. O preço de 1 jogo, 2 jogos, 3 jogos…

Professora: Sim, vamos lá…

Deste modo, as duas alunas mostram ter conhecimento da terminologia relativa à marcação de pontos num referencial cartesiano. No que respeita à marcação dos pontos da tabela anterior, fazem-no de imediato sem necessitar da ajuda da professora.

Filipa: O preço de um jogo é 3 ponto 75, o de 2 jogos é quanto… 7 e meio…
Professora: 3 jogos…
Filipa: De dois jogos…
Professora: Sim… Agora a seguir…
Filipa: Agora… 3 jogos é 11 ponto 25… O de 4 jogos é 15 euros…
Marina: O de 5 é 18 ponto 75…

Após a marcação dos cinco primeiros pontos, todos representados na tabela, necessitam calcular a imagem do objecto 6. Para tal, Filipa utiliza uma estratégia aditiva. Considera o preço de 5 jogos e adiciona 3,75 euros ao valor anterior.

Filipa: E o de 6 é …

Professora: O que é que estás a fazer Filipa?

Filipa: Estou a fazer o custo de 5 jogos mais 3 ponto 75 para saber o custo de 6 jogos…

Professora: E já conseguiram?

Marina: Sim, é 22 ponto 5.

Filipa: 22 virgula 50.

Marina: Sim.

No que concerne à representação gráfica da situação aqui patente, uma situação de proporcionalidade directa, Filipa começa a traçar a recta que une os pontos que acabara de marcar e explica o que está a fazer. Quando questionadas sobre as características que essa recta tem de verificar para representar uma situação de proporcionalidade directa, as alunas não sabem responder. No entanto, quando a professora as questiona faseadamente, vão-se lembrando dos conteúdos estudados no ano anterior e justificam convenientemente.

Filipa: Agora aqui faz-se assim (une todos os pontos com uma linha recta)… Agora, é directamente proporcional porque…

Marina: Porque a linha vertical atravessa todos os pontos.

Professora: Explica lá melhor… Uma linha vertical?

Marina: Sim… Obliqua…

Professora: E essa linha é uma quê?… Olhando para um gráfico, como é que se vê que temos representada uma situação de proporcionalidade directa?

Filipa: Porque vai tudo direitinho.

Professora: Todos os pontos têm de estar sobre o quê?

Filipa: Uma linha.

Professora: Uma linha … Mas essa linha tem uma característica especial… É uma…

Marina: Recta.

Professora: Uma recta… Só?… Só tem esta característica ou não? … Todos os pontos estão sobre uma recta… E agora, essa recta tem que passar em algum ponto especial ou não?

Marina: Tem de passar em todos os pontos... Porque se não passar…

Filipa: Não é directamente proporcional.

Professora: Tem de passar em todos os pontos… Mas há mais uma característica especial… Se vocês traçarem uma linha recta… Essa característica vai-se verificar… Qual é?

Alunas: (…)

Professora: Então já não se lembram do ano passado?

Filipa: Não...

Professora: Tínhamos uma recta que…

Filipa: Unia todos os pontos.

Professora: … Passa…

Marina: Pelo ponto de origem.

Professora: Exactamente, é isso mesmo. Os pontos têm que estar todos sob uma recta que passa na origem do referencial. É isso mesmo!

Em relação à representação gráfica da situação apresentada na questão 3, Marina e Filipa identificam os eixos onde devem representar os valores das variáveis. Começam pela construção da escala no eixo das abcissas e não mostram dificuldade na escolha da escala apropriada para o eixo das ordenadas. Após a marcação dos pontos constroem a recta que os une. No entanto, a representação gráfica apresenta algumas incorrecções. Representam dois eixos ortogonais mas não escrevem a sua identificação, ou seja, não identificam o eixo das abcissas com o “Número de Jogos” e o eixo das ordenadas com “Preço”. Apenas representam o quadrante resultante do cruzamento dos semi-eixos positivos e representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando deveria ser a tracejado.

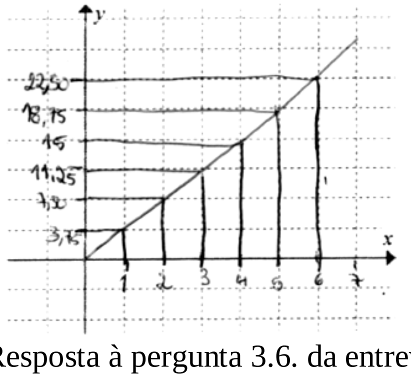


Figura 90. Resposta à pergunta 3.6. da entrevista inicial.

7.2.3.2. Representação algébrica. Questionadas sobre a expressão algébrica que traduz a relação de proporcionalidade presente nesta questão, em particular na pergunta 3.5., as alunas referem:

> **Filipa:** Então, o *y* é igual a 3,75 vezes… Vezes *x*.
>
> **Professora:** Muito bem. Como é que foi o vosso raciocínio?
>
> **Marina:** Ou seja, foi fazermos a constante de proporcionalidade, que era 3 ponto 75, e vimos que se o y era igual fazendo 3 ponto 75 vezes o *x*.
>
> **Professora:** Os seja, o que é que representa o *y*?
>
> **Marina:** O *y* representa o preço dos jogos.
>
> **Professora:** E o *x*?
>
> **Filipa:** O *x* representa o nº de jogos.
>
> **Professora:** Os seja, o que é que vocês estão aqui a dizer?… Que o preço…
>
> **Marina:** Que o preço… É igual… Ao 3 ponto 75 vezes o número de jogos.
>
> **Professora:** E por isso, é uma relação de proporcionalidade directa. Muito bem.

Apesar de ainda não terem aprendido formalmente a noção de expressão algébrica de uma função, as duas alunas conseguem determinar a expressão que define a situação apresentada, tendo em conta o significado atribuído às variáveis *x* e *y*.

7.3. Pensamento funcional durante a experiência

Apresento de seguida o trabalho realizado pelo grupo durante a aplicação das cinco tarefas iniciais, de natureza exploratória e investigativa, que constituem esta unidade de ensino.

7.3.1. Tarefa 1

A primeira questão desta tarefa pretende averiguar a capacidade das alunas para interpretar a informação apresentada sob a forma de representação verbal, a flexibilidade/facilidade em passar da representação verbal para a representação tabular, uma vez que é inevitável o cálculo de pares de pontos que permitiram completar uma tabela, e a flexibilidade/facilidade em passar da representação verbal para a representação gráfica.

7.3.1.1. Interpretação da informação expressa através de uma representação verbal. Na pergunta 1.1., as alunas são confrontadas com o cálculo do custo de uma chamada cuja duração total era de 2, 5, 10, 15 segundos e 1 minuto. No que diz respeito ao custo de uma chamada com a duração de 2 e 5 segundos, respondem correctamente, evidenciando a compreensão do enunciado:

Filipa: Stôra, então aqui 2 segundos é 1,6 cêntimos.
Professora: Porquê?
Filipa: Porque até 5 segundos é 1,6 cêntimos.
Professora: Justifica a tua resposta.

No que diz respeito ao custo de uma chamada cuja duração total é de 10 ou 15 segundos, Marina e Filipa apresentam duas estratégias diferentes de resolução. Uma delas é a estratégia multiplicativa, ou seja, utilizam o facto de que uma chamada com a duração de 5 segundos custa 1,6 cêntimos e como 10 é igual ao dobro de cinco, então por 10 segundos paga-se 3,2 cêntimos.

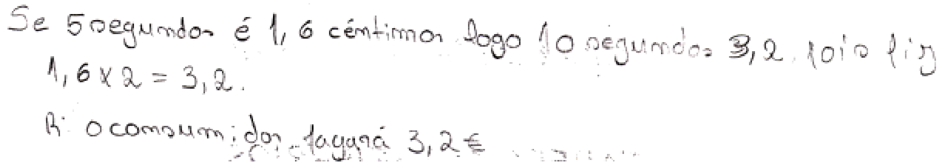

Se 5 segundos é 1,6 céntimos logo 10 segundos 3,2 pois fiz
1,6 x 2 = 3,2.
R: O consumidor pagará 3,2 €

Figura 91. Resposta à pergunta 1.1.3. da tarefa 1.

A outra estratégia é a aditiva, ou seja, para calculam o custo de uma chamada somando o custo de uma chamada com a duração de 10 segundos com o custo de uma chamada com a duração de 5 segundos. Para determinar o custo da chamada com a duração de 15 segundos basta adicionar os valores 1,6 e 3,2.

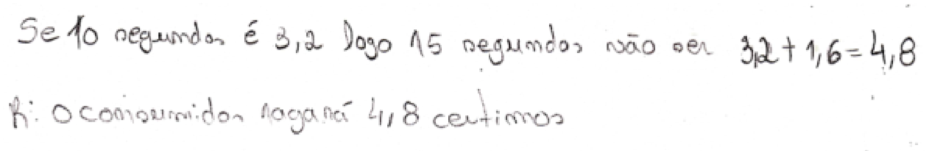

Se 10 segundos é 3,2 logo 15 segundos vão ser 3,2 + 1,6 = 4,8
R: O consumidor pagará 4,8 centimos

Figura 92. Resposta à pergunta 1.1.4. da tarefa 1.

Para calcular o custo de uma chamada com a duração de 1 minuto, as alunas começam por converter 1 minuto em 60 segundos e em seguida utilizam uma estratégia diferente das anteriores, utilizando a "regra de três simples".

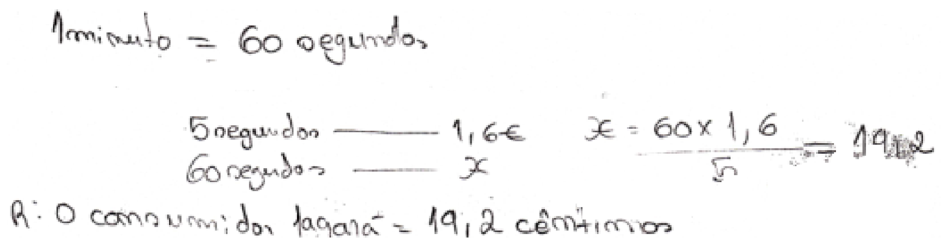


Figura 93. Resposta à pergunta 1.1.5. da tarefa 1.

Nas perguntas 1.2. e 1.3., utilizam o mesmo processo usado para responder à questão 1.1.5. Começam por transformar as unidades de tempos em segundos e aplicam a "regra de três simples". Assim, por exemplo, para indicar o custo de uma chamada com a duração de 3 minutos e 47 segundos fazem:

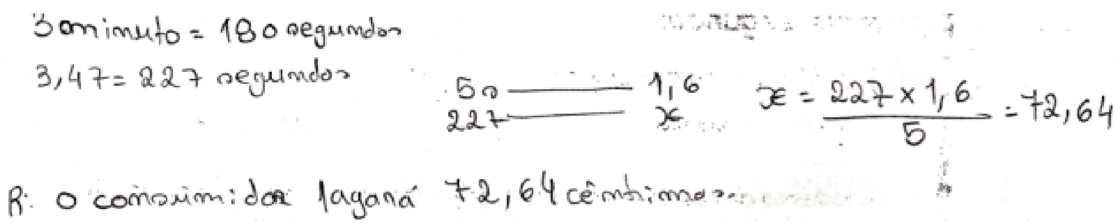


Figura 94. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 1.

Antes de responder à pergunta 1.4., as alunas têm o seguinte diálogo com a professora:

Marina: Não estou a perceber aqui esta pergunta (aponta para a pergunta 1.4.).

Professora: Então lê lá a questão.

(Marina lê a questão)

Professora: Como é que varia?

Filipa: Varia... de segundo a segundo...

Professora: Varia de segundo a segundo?

Marina: Não.

Professora: Então?

Filipa: 5 segundos paga 1,6... Por uma chamada máxima de 5 segundos paga-se 1,6... agora, superior a 5 segundos...

Professora: Ainda respondeste por completo à 1ª parte da questão. Como é que ela varia? Após 5 segundo, varia muito o preço ou não?

Filipa: Não.

Professora: Então? Altera ou não o preço?

Marina: Altera!

Professora: Como Marina?

Marina: Como? (pausa acentuada)

Professora: Leiam o enunciado! Se todas as chamadas até 5 segundos, inclusive, é 1,6... Isto significa o quê?

Marisa: Que se paga sempre o mesmo!

Professora: Pois é. Tentem responder agora à questão.

De facto, esta pergunta requer a análise do tarifário de modo a poder indicar a diferença entre o caso em que temos uma chamada com duração inferior ou igual a 5 segundos e o caso em que temos uma chamada com a duração superior a 5 segundos. As alunas não referem, por exemplo, que existe uma variação nula no período até aos 5 segundos, apesar de indicarem que para 1, 2, 3, 4 e 5 segundos pagam sempre o mesmo valor. Para unidades de tempo superiores a 5 segundos, a variação é constante, de 0,32 cêntimos, no sentido crescente.

Quando elaboram a resposta à pergunta, Marina e Filipa apresentam um raciocínio aditivo, pois sugerem que em chamadas com duração superior a 5 segundos se deve acrescentar tantos 0,32 cêntimos quantos os segundos extra de conversação:

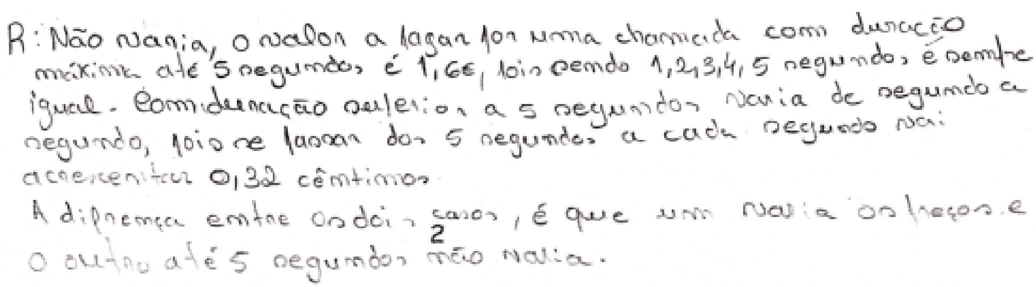


Figura 95. Resposta à pergunta 1.4. da tarefa 1.

7.3.1.2. Passagem da representação verbal para a representação gráfica. Na pergunta 1.5. os alunos devem representar, num referencial cartesiano, o tarifário descrito até aos 20 segundos. Pretende-se, deste modo, averiguar a forma como os alunos passam da representação verbal para a representação gráfica. As alunas utilizam referenciais cartesianos, apesar de individualmente apresentarem representações diferentes. Filipa indica, de forma correcta, a variável que vai representar no eixo das abcissas. Não faz a legenda do eixo das ordenadas nem o graduam de forma correcta. Para representar os primeiros cinco segundos, escreve cinco vezes, em pontos diferentes do eixo, o valor 1.6. e continua a representar os traços auxiliares a cheio.

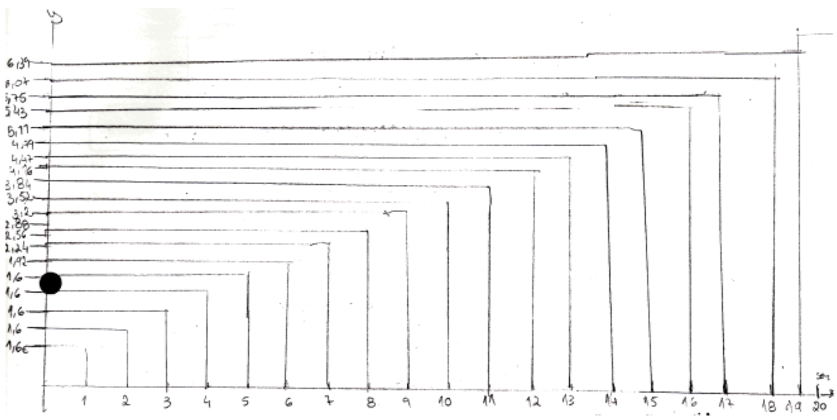


Figura 96. Resposta da Filipa à pergunta 1.5. da tarefa 1.

Marina não apresenta a legenda dos eixos, mas representa correctamente os custos das chamadas com durações inferiores a cinco segundos. De qualquer modo, a escala escrita no eixo das ordenadas não está feita de forma correcta pois não respeita os espaços entre valores escritos.

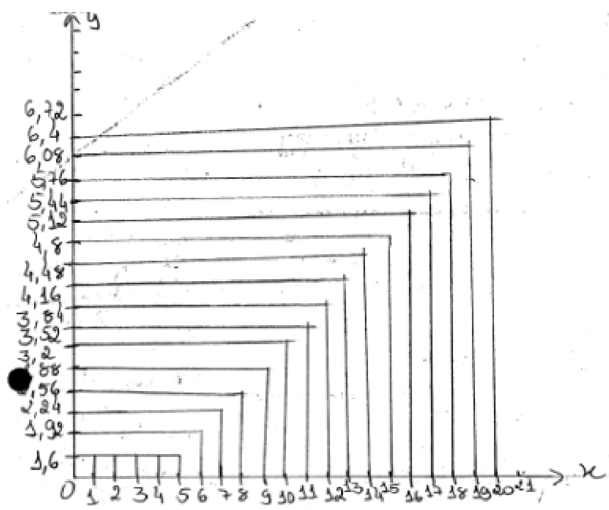


Figura 97. Resposta da Marina à pergunta 1.5. da tarefa 1.

As respostas às perguntas seguintes têm como ponto de partida a representação gráfica realizada por Marina. Assim, quando se procura descrever a variação que ocorre no gráfico na parte constante, referem que as chamadas com as durações de 1, 2, 3, 4 e 5 segundos têm o mesmo custo e que as chamadas com durações superiores a cinco segundos,

Oque se sucede, é que vai aumenta sempre mais 0,32€
Porque cada segundo que passa é mais 0,32 cêntimos

Figura 98. Resposta à pergunta 1.7. da tarefa 1.

As alunas manifestam ter compreendido o problema apesar das representações gráficas erradas que realizaram. Embora as escalas do eixo das ordenadas não estejam construídas correctamente, para durações inferiores ou iguais a cinco segundos, a representação dos custos para durações superiores a cinco segundos estão correctas, uma vez que aumentam sucessivamente 0,32.

7.3.1.3. Passagem da representação gráfica para a representação tabular. Com o objectivo de averiguar de que forma é que os alunos passam da representação gráfica para a representação tabular, através da análise da informação contida no gráfico, é proposta a questão 2, onde é apresentada a representação gráfica da relação entre o tempo de duração da chamada e o seu valor a pagar num tarifário onde as chamadas com duração até 30 segundos a variação é nula, sendo o seu preço constante (7,5 cêntimos). A partir daí, a variação é constante e igual a 0,35 cêntimos.

Na pergunta 2.1. pede-se às alunas que completem uma tabela representativa deste tarifário. Após algumas tentativas frustradas, Filipa chama a professora e estabelece-se a o seguinte diálogo:

Professora: Então vamos lá ver, x corresponde a quê?

Filipa: *x* corresponde aos segundos.

Professora: E os *y*?

Filipa: Corresponde ao preço.

Professora: Muito bem. Se tivermos uma chamada com zero segundos, quanto é que vamos pagar?

Filipa: Não pagamos nada.

Professora: Pois não. Se tivermos de pagar 7,5 cêntimos, fizemos uma chamada de quantos segundos?

Filipa: 10.

Professora: Mas há mais valores ou é único?

Filipa: Há mais, por exemplo, o 20.

Professora: Só?

Marina: O 30.

Professora: Só? Então e se for uma chamada com 5 segundos?

Filipa: Também.

Professora: Continuem.

A professora começa por averiguar se as alunas fazem uma interpretação correcta da representação gráfica que está patente na questão. Estas conseguem estabelecer a correspondência entre os valores apresentados no eixo das abcissas como sendo os valores que *x* pode tomar e os valores situados no eixo das ordenadas com os valores que *y* pode tomar. Identificam correctamente o preço de uma chamada com zero segundos de duração e entendem a existência de vários objectos que têm a mesma imagem, a imagem 7,5. No entanto, erram o cálculo de alguns valores devido à interpretação errada das coordenadas dos pontos de abcissas 30 e 31.

x	0	10	30	31	37	40	60
y	0	7,5	7,5	7,85	11,84	12,75	19,2

Figura 99. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 1.

Na pergunta 2.2., pede-se para descrever num pequeno texto as informações que é possível obter a partir das representações gráfica e tabular deste tarifário. A resposta apresentada pelas alunas é muito vaga, não respondendo ao que se pretende.

As informações que é possível obter a partir das Representações gráfica e tabular deste tarifário, é o preço de cada chamada que corresponde aos Segundos indicados.

Figura 100. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 1.

No final da aula, as alunas confidenciaram que as perguntas 2.1. e 2.2. não ficaram bem resolvidas por falta de tempo.

7.3.2. Tarefa 2

Na questão 1, é pedido aos alunos que sugiram três países e as respectivas capitais no sentido de completar espaços de modo a introduzir os conceitos básicos relativos à definição de função linear ou de proporcionalidade directa.

7.3.2.1. Análise de correspondências e identificação de elementos correspondentes. Após a leitura do enunciado da questão 1 e da pergunta 1.1., Marina e Filipa elegem três países e as suas capitais. São eles Portugal, França e Inglaterra e as capitais, Lisboa, Paris e Londres, respectivamente. De seguida completam os espaços em branco dos conjuntos A e B, preenchem o diagrama sagital e, de acordo com as informações que vão sendo dadas, completam o domínio e o contradomínio da função.

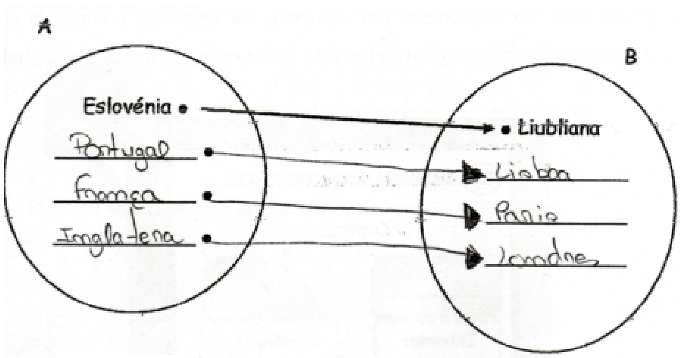


Figura 101. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 2.

7.3.2.2. Identificação de correspondências que são ou não funções. A questão 2 visa identificar correspondências que são funções e outras que não o são, justificando. Em relação à “máquina de perguntas” da figura 4, onde é pedido que indiquem três palavras e o número de letras de cada palavra, as alunas mostram não ter percebido o que deviam fazer pois apresentam um diagrama sagital que não corresponde à situação descrita. No que diz respeito à “máquina de perguntas” da figura 6, após o esclarecimento de dúvidas de vários grupos de trabalho, não têm também dificuldade em construir o respectivo diagrama sagital. No entanto, no que diz respeito à figura 5, é estabelecido o seguinte diálogo com a professora:

Marina: Aqui nas potências… Eu não estou a perceber… Aqui (aponta para a figura 5)… Devolve-te o seu quadrado...

Professora: O que é que é um número ao quadrado?

Filipa: É o 2.

Marina: É elevado a 2.

Professora: Então?

Marina: Escrevemos o quadrado.

Professora: Não, introduzem um número e a máquina devolve esse número ao quadrado.

Marina: Ah… 10 dá 100, é isso?

Professora: É, o 10 corresponde ao 100. OK?

As alunas não perceberam que elementos deveriam introduzir na "máquina de perguntas" da figura 5 nem que resultados poderiam esperar que fossem devolvidos. Foi necessário questionar sobre o significado da expressão "elevar ao quadrado", para que Marina apresentasse um exemplo que permitiu esclarecer as dúvidas do grupo.

Em relação à correspondência da figura 7, as alunas voltam a solicitar a presença da professora:

Filipa: Como é que fazemos isto (aponta para figura 7)?

Professora: Têm que introduzir números entre 2 e 6.

Filipa: Já escrevemos.

Professora: Agora a máquina devolve-vos todos os números que são menores que esses números que introduziram, números naturais. O que são números naturais?

Marina: Não me lembro!

Professora: O que são números naturais Filipa?

Filipa: Não sei.

Professora: Números naturais são os números que pertencem ao conjunto N. Que conjunto N é esse? Representa que números?

Filipa: O 2, 3, 4…

Professora: E o 1. Portanto, é 1, 2, 3, 4 e por aí adiante, certo?

Filipa: Sim.

Professora: Agora, que número é que vocês ali puseram?

Marina: O 2.

Professora: Então, quais são os números naturais que são menores que esse?

Filipa: O 1.

Professora: Então ali só colocam o 1. E ligam só ao 1.
Marina: Ah, já sei…
Professora: E para o 4?
Marina: Ao 1, 2 e 3.
Professora: Sim, mas se o 1 já lá está, já não voltam a repetir o 1. Certo?
Marina: Pois …

As alunas começam por indicar três números diferentes a introduzir na "máquina de perguntas" da figura 7, mas não conseguem identificar que números iriam obter como resposta. Esta dificuldade inicial deve-se ao facto de não terem presente a noção de número natural. Após uma breve explicação e partindo do primeiro e do segundo números sugeridos pelas alunas, estas identificam rapidamente a resposta da máquina. Deste modo, são apresentados quatro exemplos de correspondências através de diagramas sagitais correspondentes às quatro máquinas de perguntas apresentadas (ver figura 102). Quando elaboram as correspondências, as alunas não dão indicação do conjunto de partida e do conjunto de chegada, pois não colocam setas nas linhas que estabelecem a ligação entre os dois conjuntos.

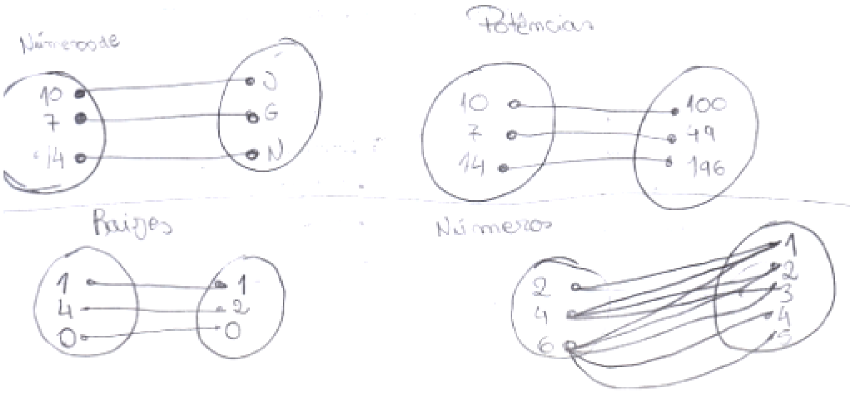


Figura 102. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 2.

A pergunta 2.2. pretende saber, das quatro representações construídas, quais é que correspondem a funções. As alunas mostram não ter adquirido a noção de função pelo que respondem que as quatro correspondências representam funções:

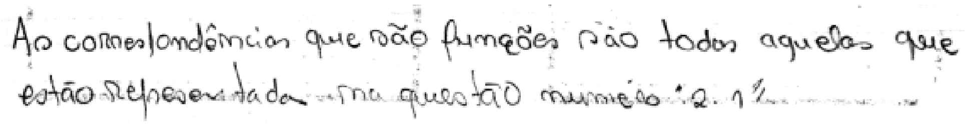


Figura 103. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 2.

Como, para as alunas, as quatro correspondências indicadas são funções, indicam o domínio e o contradomínio de todas elas. Convém salientar que, na correspondência da figura 7, e no que diz respeito ao conjunto de chegada, apenas escrevem uma vez cada número apesar de se tratar de uma correspondência de vários elementos do conjunto de partida:

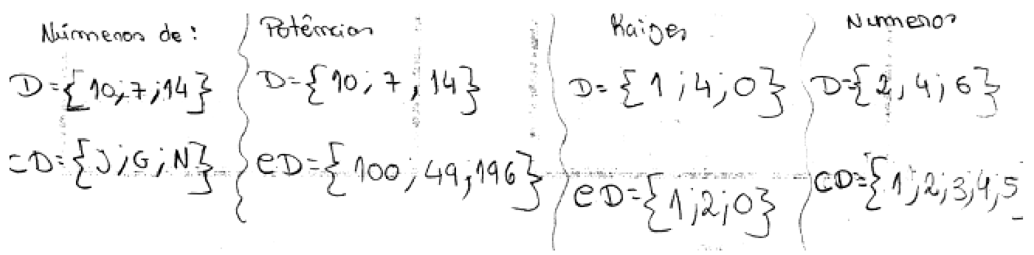


Figura 104. Resposta à pergunta 2.3. da tarefa 2.

De acordo com a questão 3, onde se apresenta um diagrama sagital, pretende-se que os alunos estabeleçam uma correspondência entre os elementos do conjunto da esquerda (quatro polígonos iniciais) e os elementos do conjunto da direita (polígono com mais um lado que o polígono inicial), que indiquem o domínio e o contradomínio e que indiquem a imagem de um objecto e o objecto que tem determinada imagem.

Como resposta à pergunta 3.1., Filipa e Marina apresentam a seguinte correspondência:

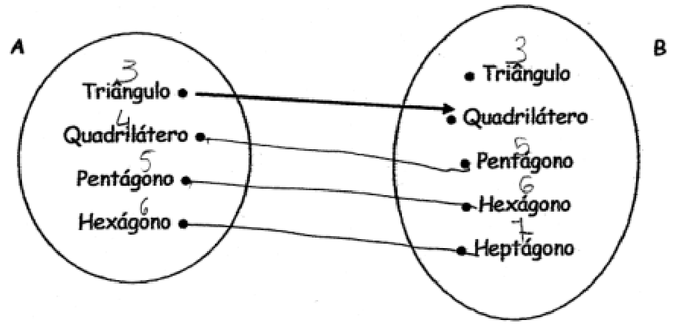


Figura 105. Resposta à pergunta 3.1. da tarefa 2.

Filipa e Mariana não colocam uma orientação nas correspondências que estabelecem entre o conjunto de partida e o conjunto de chegada. Quando respondem à pergunta 3.2., fazem-no correctamente, utilizando uma notação adequada.

D = { Triâmgulo; Quadrilátero; Pemtágomo; Hexágomo }

C.D = { Quadrilátero; Pemtágomo, Hexagomo; Heptágomo }

Figura 106. Resposta à pergunta 3.2. da tarefa 2.

Na pergunta 3.3., as alunas devem indicar a imagem dados dois objectos e um objecto dada uma imagem. Apesar dos erros de escrita, Filipa e Marina apresentam uma resposta onde mostraram ter conhecimento destes termos:

A imagem de "Hexágo" é o "Heptágomo" e o do triâmgulo é o "Quadrilátero".

O objecto correspomdemte à imagem "Pemtágomo" é o "Quadrilátero".

Figura 107. Resposta à pergunta 3.3. da tarefa 2.

7.3.2.3. Análise de correspondências representadas através de gráficos. A questão 4 visa averiguar se as quatro correspondências apresentadas por gráficos cartesianos, representam funções e, caso afirmativo, indiquem o respectivo domínio e contradomínio. Na pergunta 4.1., as alunas continuam a demonstrar não ter adquirido a noção de função. Segundo elas, a condição necessária para que uma correspondência seja uma função é estar representada por dois conjuntos.

Todas estas correspondêmcia são funções, pois todas as correspondemcias têm dois conjuntos.

Figura 108. Resposta à pergunta 4.1. da tarefa 2.

Quanto à pergunta 4.2., e de acordo com a pergunta 4.1., as alunos representam o domínio e o contradomínio de todas as correspondências. Utilizam uma notação adequada mas nem sempre correcta. Por exemplo, na correspondência c), representam o elemento 3 tantas vezes quantos os elementos do eixo das abcissas que lhe estão associados. O mesmo acontece na correspondência d).

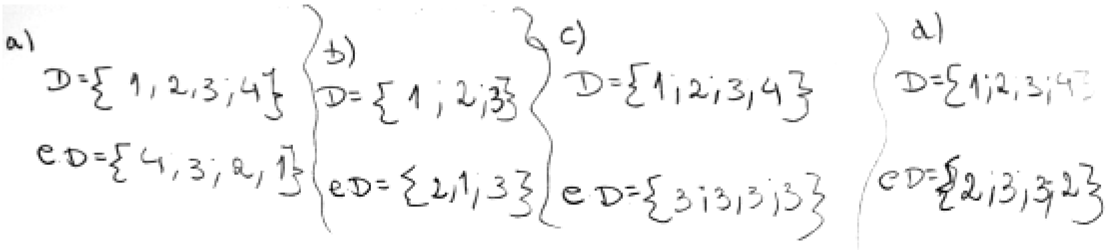


Figura 109. Resposta à pergunta 4.2. da tarefa 2.

7.3.2.4. Análise de correspondências representadas a partir de tabelas. Através da correspondência entre duas variáveis, apresentada na questão 5, pretende-se que as alunas indiquem o domínio e contradomínio (pergunta 5.1.), indiquem dois objectos distintos que têm a mesma imagem e a respectiva imagem (pergunta 5.2.) e que construam um gráfico cartesiano que represente a função aqui apresentada (pergunta 5.3.).

Na pergunta 5.1., Filipa e Marina indicam:

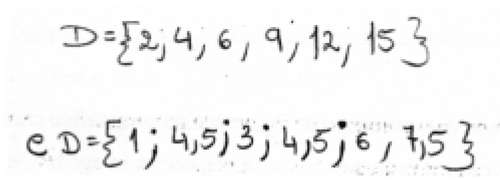


Figura 110. Resposta à pergunta 5.1. da tarefa 2.

Na resposta a esta pergunta, as alunas indicam correctamente o domínio da função mas não o contradomínio, apesar de usarem uma notação correcta. De facto, embora representam em duplicado a imagem 4,5, as alunas indicam correctamente os objectos distintos que têm a mesma imagem:

Figura 111. Resposta à pergunta 5.2. da tarefa 2.

No que diz respeito à representação gráfica pedida de acordo com a tabela apresentada, Filipa e Marina utilizam um sistema de eixos no qual representam convenientemente os valores da variável independente e estabelecem correctamente a sua legenda. A representação dos valores no eixo das ordenadas não está feita de forma correcta, uma vez que os valores são colocados pela ordem em que surge na tabela.

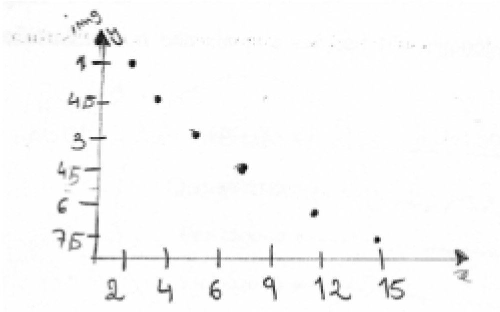


Figura 112. Resposta à pergunta 5.3. da tarefa 2.

7.3.3. Tarefa 3

Após terem recebido o enunciado, Filipa e Marina iniciaram de imediato o seu trabalho. Iniciaram a resolução da tarefa com a leitura dos passos que tinham de seguir para construir no GeoGebra um quadrado. No penúltimo passo, deparam-se com uma dificuldade:

Filipa: Professora, isto não desenha a recta…

Professora: Desenha… Está é mais para cima… Qual é a recta?

Filipa: Esta (aponta).

Professora: Está, está cá mais para cima… Olha ali…

Filipa: Ah…

Professora: Quando vocês escreveram isto, o que é que escreveram ali?

Marina: $y = a+b+c+d$**.**

Professora: E o que é que representa o *a*, o *b*, o *c* e o *d*?

Marina: São as rectas.

Professora: São as rectas?

Marina: São os lados.

Professora: (...) São os lados do quadrado, ou seja, quando vocês os estão a somar… Quando escrevem $y = a+b+c+d$ … O que é que estão a calcular?

Marina: O perímetro.

Professora: Exactamente! O perímetro e esta recta é a recta que vos dá o perímetro…

Marina: Já percebi… Por isso é que está cá em cima…

As alunas não conseguiam visualizar a recta horizontal que resulta da soma dos lados do quadrado que já tinham construído. Através do diálogo com a professora, que as questionou sobre o que representava cada uma das letras usadas, sobre a fórmula $y=a+b+c+d$ e o seu significado, Marina, percebe a razão pela qual ela está representada mais acima no referencial cartesiano, uma vez que é a soma de quatro valores positivos. A imagem da figura 113 mostra a sua construção.

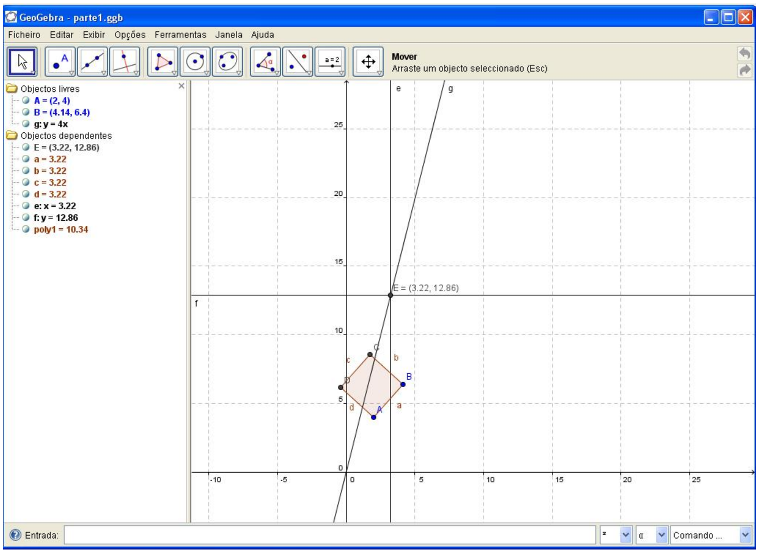


Figura 113. Construção inicial da tarefa 3.

7.3.3.1. Exploração do enunciado. Depois de terem construído a o quadrado e terem obtido o ponto E cujas coordenadas são o lado de um quadrado e o perímetro desse quadrado, respectivamente abcissa e ordenada, as alunas respondem às questões relativas à interpretação do enunciado. Quando questionadas sobre o significado da abcissa do ponto E (x=3,22), respondem:

Figura 114. Resposta à pergunta II.1. da tarefa 3.

As alunas apresentam como abcissa o seu valor inteiro, ou seja, 3, mas não utilizam uma notação correcta. No entanto, fazem uma leitura correcta do gráfico, ao considerarem a abcissa do ponto como o valor do lado do quadrado.

Em relação ao significado da ordenada do ponto E (y=12,86), Marina e Filipa produzem uma resposta que não corresponde ao pedido. Identificam mal a ordenada do ponto, como sendo 3, não utilizando a notação correcta. À semelhança da alínea anterior, identificam correctamente o significado desse valor.

E = 3. Representa o perímetro do quadrado.

Figura 115. Resposta à pergunta II.2. da tarefa 3.

Movendo o ponto B e arrastando um dos vértices que estão na base da construção inicial, as alunas concluem que o gráfico que representa a relação entre estas duas variáveis é um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta.

O que acontece ao gráfico é que por onde ele se move, ele traça uma recta.

Figura 116. Resposta à pergunta IV. da tarefa 3.

No entanto, não concluem que esta relação entre pontos corresponde a uma relação de proporcionalidade directa, ou seja, que a recta representada pelo arrastamento sugerido passa na origem do referencial.

7.3.3.2. Mudança de representação (gráfica para tabular). Quando iniciam o trabalho de casa do João, as alunas estão perante uma situação de proporcionalidade directa, tendo como base o perímetro do quadrado. Quando lhes é pedido o perímetro de um quadrado dado o seu lado, identificam a constante de proporcionalidade e multiplicam-na pela medida do lado do quadrado dado.

P = 4 x 2,34 = 9,36 cm

R: O perímetro do quadrado é 9,36 cm.

Figura 117. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 3.

Quando lhes é pedido que calculem o lado de um quadrado dado o seu perímetro, Filipa e Marina utilizam uma estratégia idêntica à anterior, quando dividem o perímetro pela constante de proporcionalidade:

15,52 : 4 = 3,88

R: Cada lado do quadrado mede 3,88 cm.

Figura 118. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 3.

Para completar a tabela que se apresenta na pergunta 1.3., as alunas continuam a utilizar a mesma estratégia:

×4

x	0,5	1	2	2,34	3,88	6,5
y	2	4	8	9,36	15,52	26

:4

Figura 119. Resposta à pergunta 1.3. da tarefa 3.

Este facto é visível quando indicam no lado esquerdo e lado direito da tabela, dividir por quatro e multiplicar por quatro respectivamente.

7.3.3.3. Conceito de função de proporcionalidade directa. Na pergunta 1.4., as alunas devem justificar o facto de o perímetro do quadrado e o seu lado serem directamente proporcionais. Apresentam a seguinte resposta:

É directamente proporcional, porque todos os lados têm o mesmo valor, a constante de proporcionalidade é 4 e o seu significado geométrico é que quer dizer quantos lados tem o quadrado.

Figura 120. Resposta à pergunta 1.4. da tarefa 3.

Marina e Filipa apercebem-se do facto de ter de haver algo que tem de ser constante, mas não justificam de forma conveniente. Para identificar a constante de proporcionalidade, tentam esclarecer as dúvidas que lhes vão surgindo:

Filipa: Não dá para escrever o k…

Professora: Onde é que vocês querem escrever o k?

Filipa: (Aponta).

Professora: Pois não, devem escrever o valor que o k assume. Têm de ver no contexto do problema… O valor de k, nesse problema, tem um valor especial. É esse valor que eu quero que descubram qual é.

As alunas mostram saber que a expressão algébrica que representa uma situação de proporcionalidade directa é dada por $y=kx$ e que k deve assumir valor numérico. Após este diálogo com a professora, as alunas preenchem o espaço vazio colocando nele o número 4.

7.3.3.4. Mudança de representação (gráfica e tabular para algébrica). Com a introdução, na etapa VI, da expressão algébrica que acabaram de encontrar na pergunta 1.5., as alunas têm de descrever as alterações que o gráfico anteriormente construído sofre. Surge a representação gráfica da função $y=4x$, que se sobrepõe aos pontos assinalados pelo rasto da deslocação do ponto E. Fazem esta constatação na medida em que observam ter obtido uma recta que se sobrepõe à que já existia. No entanto não esclarecem que esta recta passa pelo ponto de origem do referencial:

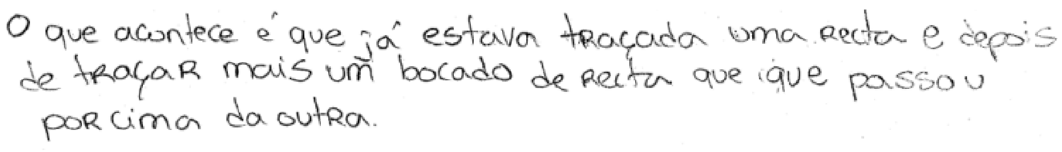

O que acontece é que já estava traçada uma recta e depois de traçar mais um bocado de recta que que passou por cima da outra.

Figura 121. Resposta à etapa VI. da tarefa 3.

Na questão 2 do trabalho de casa, os alunos fazem uma exploração do caso dos triângulos equiláteros semelhante à efectuada a propósito dos quadrados. Para isso, são levados a construir, na etapa VIII, o gráfico de uma função, digamos g, que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero e o perímetro correspondente, podendo basear-se na construção anterior para fazer a nova construção. No entanto, as alunas solicitam a presença da professora dizendo:

Professora: Vocês têm um triângulo… Como é que calculam o perímetro de um triângulo?

Filipa: Uma recta… (pausa).

Professora: Como é que representam o perímetro de um triângulo com os lados todos iguais? Olhem para o quadrado que fizeram atrás.

Filipa: Fazemos assim (aponta para a ficha).

Professora: Mas têm de ter atenção que o quadrado tem 4 lados...

Marina: Ah… faz-se a mesma coisa mas…

Professora: Continuem!

Após alguns minutos de trabalho, Marina e Filipa apresentam a seguinte representação gráfica:

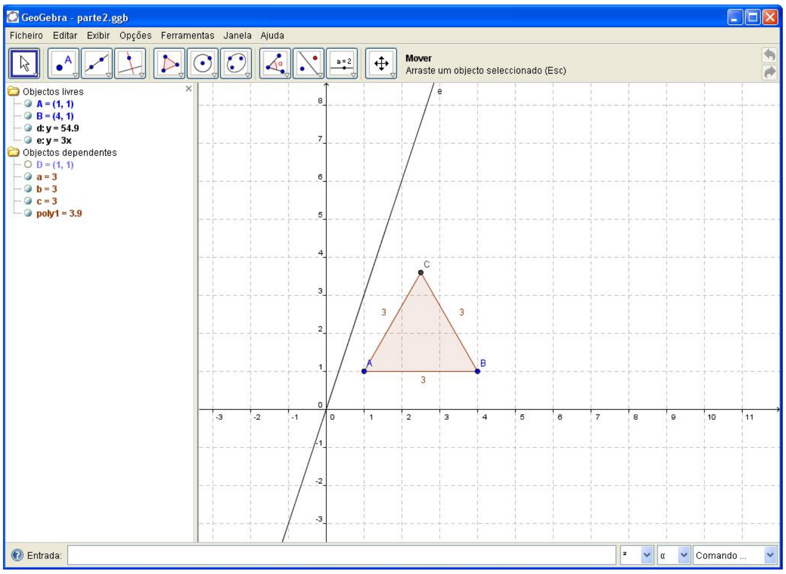


Figura 122. Resposta à etapa VIII. da tarefa 3.

Depois da representação gráfica conseguida na etapa VIII, as alunas iniciam a resolução da questão 2. Nela utilizam a notação específica das funções, determinam graficamente um objecto dada uma imagem, e uma imagem, dado um objecto, interpretam o significado dos valores encontrados neste contexto e formulam uma generalização ao representarem algebricamente uma função.

Apesar de terem representado correctamente a informação constante do enunciado, as alunas não justificam correctamente que a função *g* é uma função de proporcionalidade directa. Não mencionam que estão perante uma recta que passa pela origem do referencial. Na pergunta 2.2., solicitam a presença da professora:

Filipa: Não estamos a perceber a 2.2. A função g é 3, é o que está aqui…

Professora: É 3 onde?... Pensem nas máquinas de perguntas da tarefa 2…

Filipa: Introduzíamos os objectos e ela dava-nos as imagens…

Professora: Então, qual é o objecto? ... Pensa nestes dois, um deles é o objecto e o outro é a imagem.

Marina: Este é a imagem e este é o objecto.

Professora: O que está dentro… Aqui… É a …. O que é que vos pedem aqui?

Marina: É a imagem.

Professora: E aqui… O que é que vos pedem aqui?

Filipa: É o objecto.

Professora: Certo. Quais é que vão ser aqui os objectos no contexto do problema?

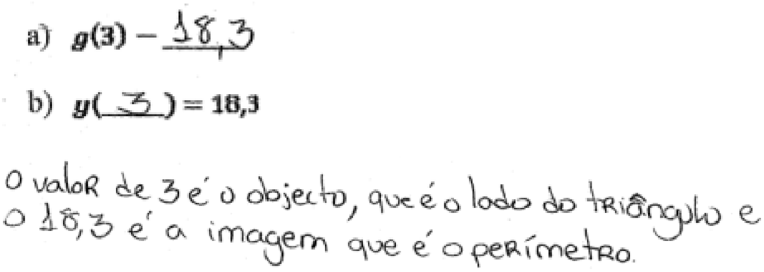
Filipa: Os objectos… Os objectos é a medida do lado.

Professora: E o que é que vão ser as imagens?

Filipa: As imagens são o seu perímetro.

Professora: Exactamente, é como se a máquina vos dissesse assim: introduz a medida de um lado. Vocês introduzem, e depois ela devolvia-vos o seu perímetro.

Filipa e Marina não conseguem identificar qual a variável independente e qual a variável dependente. Após alusão à tarefa que tinham acabado de resolver (tarefa 2 – Maquina de perguntas) as alunas indicam de imediato estas variáveis, completam os espaços e justificam convenientemente a resposta:


a) $g(3)$ – 18,3

b) $g(3) = 18,3$

O valor de 3 é o objecto, que é o lado do triângulo e o 18,3 é a imagem que é o perímetro.

Figura 123. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 3.

Na pergunta seguinte, os alunos são levados a responder qual a expressão algébrica que traduz a situação descrita anteriormente. As alunas indicam correctamente constante de proporcionalidade e a expressão algébrica da função *g*. Respondem *y=3xx*.

7.3.4. Tarefa 4

Com o objectivo de complementar a tarefa 3, foi elabora a tarefa 4. Foi distribuída os alunos tal como as anteriores, sem nenhum esclarecimento prévio.

7.3.4.1. Interpretação de gráficos de proporcionalidade directa num mesmo referencial. Ao iniciar a tarefa, são apresentadas, aos alunos, as representações gráficas das funções que relacionam o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares, a saber, quadrado, pentágono, heptágono e octógono. Na questão inicial, os alunos devem identificar as expressões algébricas dessas funções, relacionando-as com as respectivas representações gráfica e algébrica.

As alunas começam a resolver a questão quando se deparam com a pergunta "indica uma expressão algébrica que represente cada uma das funções de proporcionalidade directa representadas". Nesse momento solicitam a minha presença

Filipa: Indica uma expressão algébrica?

Professora: De que forma são as funções cuja representação é uma recta e que passa na origem? É *f(x)* igual…

Filipa: Ah…

Professora: A expressão geral, qual é?

Marina: É *f(x)* igual…

Filipa: É assim?

Professora: É, muito bem Filipa! É exactamente isso. A função é de que forma Marina? *k*…

Marina: *x***.**

Professora: E o que é o *k***?**

Marina: É a constante**.**

Professora: É a constante. E como está junto ao *x*, é só o 4 não é?

Marina: É.

Professora: Analisem agora a vossa resposta.

Apesar da identificação dos polígonos estar correcta, Filipa e Marina não conseguem, de imediato, estabelecer uma relação entre a representação gráfica apresentada e as variáveis independente e dependente com a sua expressão algébrica. É necessário relembrar qual a expressão algébrica geral de uma função de proporcionalidade directa e identificar o que significa cada factor. Após este diálogo, as alunas resolvem a questão do seguinte modo:

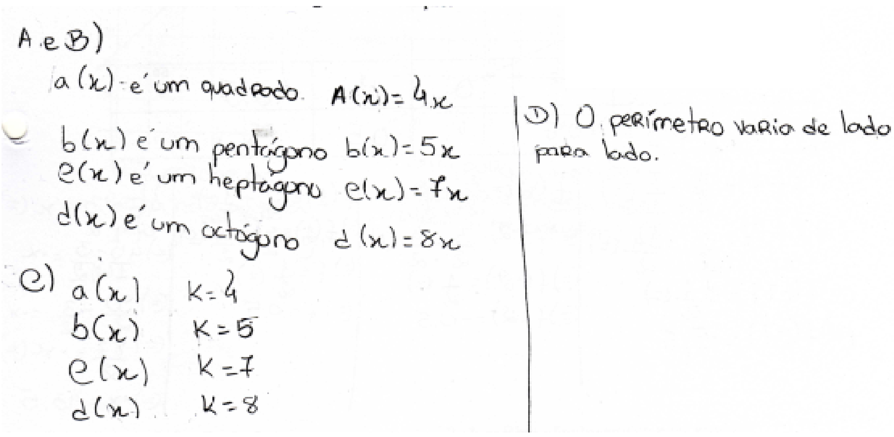
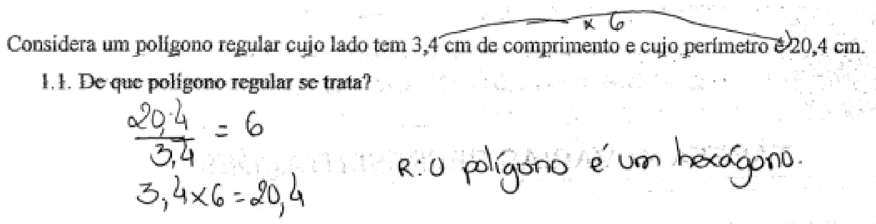

A e B)
a(x) é um quadrado A(x) = 4x
b(x) é um pentágono b(x) = 5x
c(x) é um heptágono c(x) = 7x
d(x) é um octógono d(x) = 8x
C) a(x) K = 4
b(x) K = 5
c(x) K = 7
d(x) K = 8
D) O perímetro varia de lado para lado.

Figura 124. Resposta à pergunta I. da tarefa 4.

Filipa e Marina não elaboram uma resposta de acordo com as indicações do enunciado. Este pede para elaborar uma pequena composição abordando aspectos tais como a identificação do polígono, a correspondente expressão algébrica, a identificação da constante de proporcionalidade e, por fim, qual o efeito da alteração do valor da constante na representação gráfica apresentada. As alunas atribuem uma alínea a cada tópico e respondem em conformidade, à excepção da alínea d). Nesta alínea, apenas referem que o perímetro varia de acordo com a medida do seu lado, não estabelecendo qualquer relação entre o valor da constante e a inclinação da respectiva recta, isto é, à medida que a constante aumenta a inclinação da recta correspondente também aumenta.

7.3.4.2. Interpretação das representações de uma função de proporcionalidade directa dado um objecto não nulo e a sua imagem. A questão 1 diz respeito a um polígono regular específico que deve ser identificado pelos alunos, tendo em consideração um objecto não nulo e a sua imagem. Depois de analisada a situação proposta, as alunas devem escrever uma expressão algébrica para a função linear que lhe corresponde. Começam por interpretar o enunciado, criando um esquema que lhes permite mais claramente resolver as questões pedidas. Deste modo, identificam o polígono com base nos valores dados e apresentam a respectiva expressão algébrica.


Considera um polígono regular cujo lado tem 3,4 cm de comprimento e cujo perímetro é 20,4 cm.

× 6

1.1. De que polígono regular se trata?

$\frac{20,4}{3,4} = 6$

$3,4 \times 6 = 20,4$

R: O polígono é um hexágono.

Figura 125. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 4.

Filipa e Marina utilizam uma estratégia multiplicativa para calcular o número de lados do polígono. Por fim, confirmam o resultando, calculando o perímetro do polígono com o número de lados que determinaram. No que diz respeito à expressão algébrica que representa a função que a cada valor do comprimento do lado associa o perímetro do polígono regular, respondem mas colocam a letra que representa a variável independente entre parêntesis, o que sugere que ainda não se apropriaram convenientemente da notação própria deste tipo de funções.

Figura 126. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 4.

Na pergunta 1.3., os alunos realizam a seguinte construção no GeoGebra:

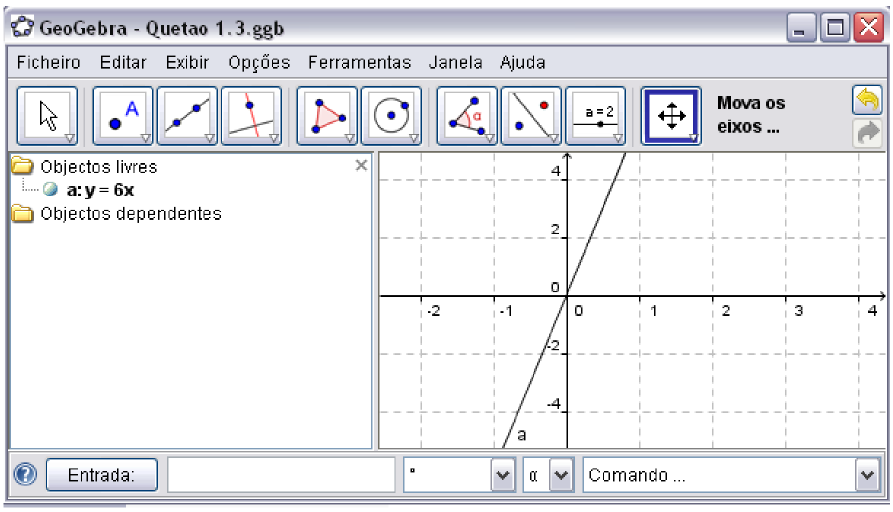


Figura 127. Resposta à pergunta 1.3. da tarefa 4.

7.3.4.3. Mudança de representação (algébrica para tabular e gráfica). A questão 2 apresenta uma função linear dada pela sua expressão algébrica, a partir da qual os alunos têm de completar uma tabela determinando imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e determinando objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal. Para responder às questões propostas, as alunas podem utilizar a expressão algébrica apresentada, resolvendo uma equação sempre que necessário.

Filipa e Marina começam por interpretar o problema proposto, estabelecendo o seguinte diálogo com a professora:

> **Filipa:** Professora, aqui…
>
> **Professora:** Onde é que está o objecto?
>
> **Filipa:** Está aqui [apontam para a primeira linha da tabela]… E a imagem é isto [apontam para a segunda linha da tabela]…
>
> **Professora:** Agora, dizem-nos que o *x* vale…
>
> **Filipa:** *-7*. É três meios *x*.
>
> **Professora:** Não, se puseram aqui o *x* a valer *-7*, então aqui também têm de colocar a valer *-7*.
>
> **Filipa:** E o que der ponho aqui.
>
> **Professora:** Exactamente. Sim? Quero os cálculos todos aqui.

Após interpretarem do enunciado, as alunas necessitam de obter a confirmação de que a sua interpretação está correcta. Confirmam onde se situam os objectos e as respectivas imagens e, de seguida, iniciam a sua resolução. No entanto, quando calculam uma imagem, dado um objecto, não o fazem de maneira correcta. Como se pode ver na figura 128, não multiplicam os valores de *x* por *3/2* mas somam, o que vem confirmar a não apropriação da notação característica das funções. No entanto, substituem o valor da variável independente no primeiro e no segundo membro da equação *f(x)=3/2x*.

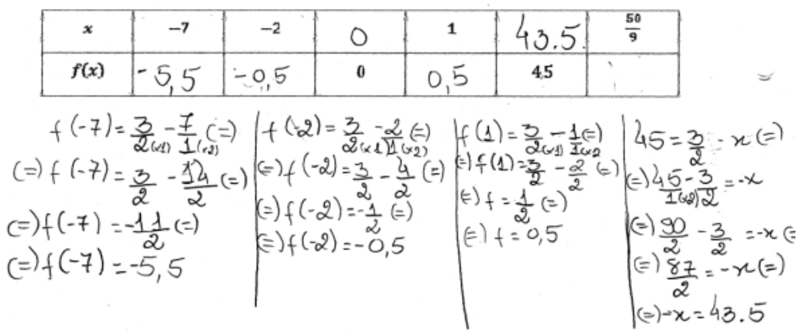


Figura 128. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 4.

A representação gráfica é feita através da utilização do GeoGebra, conforme indicação na pergunta. Produzem a seguinte imagem:

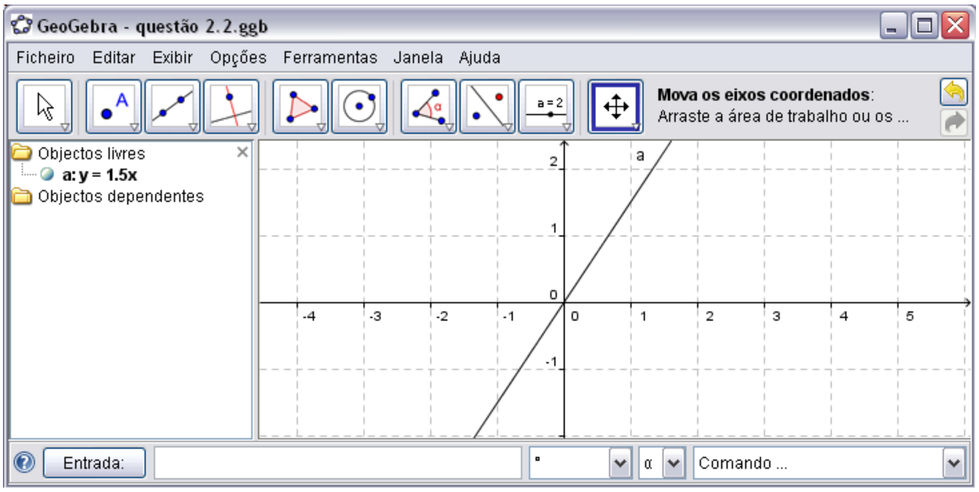


Figura 129. Resposta à pergunta 2.2. da tarefa 4.

7.3.4.4. Identificação do gráfico de funções de proporcionalidade directa. Na última questão desta tarefa, Filipa e Marina devem identificar os gráficos que representam funções lineares. Antes de iniciar a sua resposta, solicitam a presença da professora:

Professora: Para terem uma situação de proporcionalidade directa que representação é que precisam de ter?

Filipa: Uma recta a passar na origem.

Professora: Então vê lá agora. Para cada uma delas, diz se é ou não e porquê. Não se esqueçam que há duas condições…

Filipa: Ser uma recta…

Professora: Ser uma recta e passar na origem do referencial. Agora, vejam lá.

Marina: Então, a b) e a e) são.

Professora: E a a) não é porquê?

Marina: Porque não é uma recta.

Professora: Muito bem Marina. Agora escrevam. Não é porque…. A b) a Marina disse que era. Porquê?

Marina: Porque é uma recta obliqua…

Professora: Porque é uma recta que…

Marina: Passa na origem.

Professora: Muito bem, é essa a justificação.

Marina e Filipa necessitam de confirmar se estão correctas no que diz respeito à noção de função de proporcionalidade directa através da sua representação gráfica. Referem que para se tratar de uma função desta natureza é necessário que esteja representada uma linha recta a passar pela origem do referencial. Assim sendo, observam os gráficos apresentados, justificando convenientemente que as representações b) e e) traduzem situações de proporcionalidade directa. Apresentam, também, o motivo pelo qual a representação a) não traduz uma situação desta natureza, apesar de não escreverem a justificação correcta. A resposta a esta pergunta está patente na figura 130:

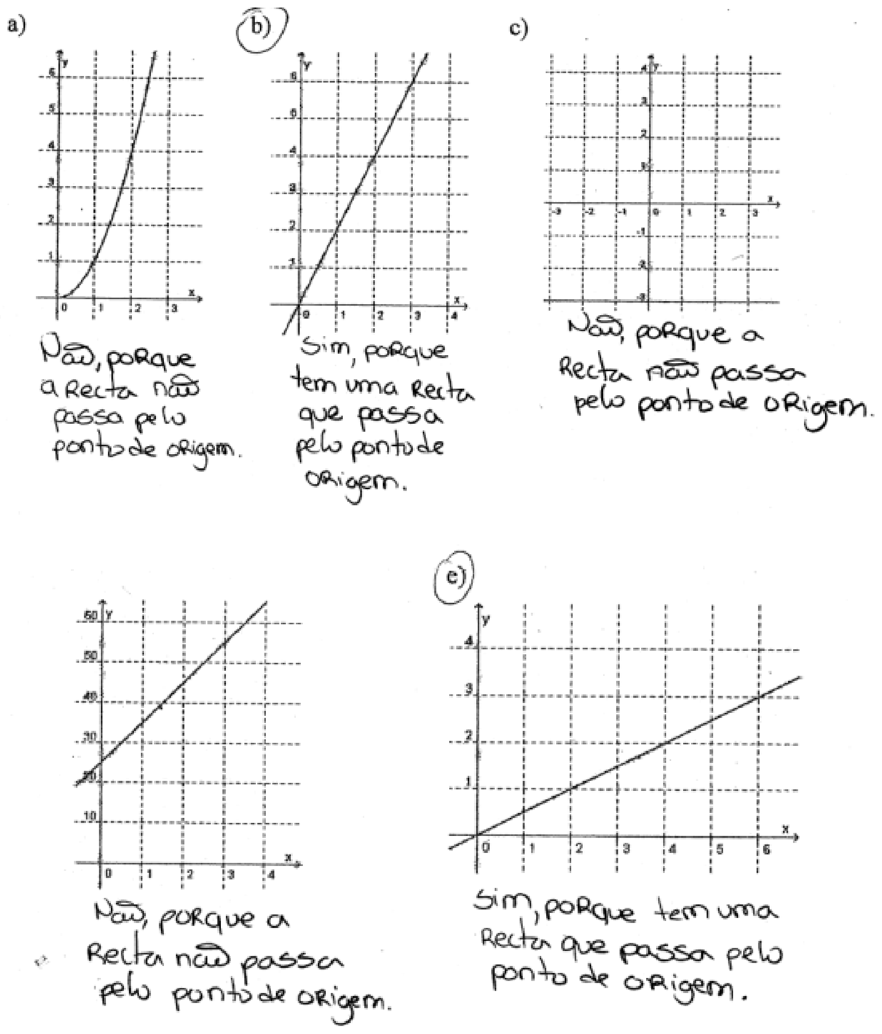


Figura 130. Resposta à questão 3 da tarefa 4.

As alunas recorrem ao facto de estar representada uma linha recta que passa no ponto de origem do referencial para identificarem as funções em b) e e). Apresentam, também, uma justificação para o facto das outras representações não serem funções. Em relação à representação gráfica da alínea a), e apesar de não a identificarem como uma função de proporcionalidade directa, apresentam um argumento que não está correcto – consideram que está representada uma linha recta, ao invés de uma linha curva, e que esta não passa pela origem do referencial, o que é falso.

7.3.5. Tarefa 5

Na tarefa 5 os alunos interpretam a informação apresentada através de um anúncio sobre uma situação a modelar através de uma função de proporcionalidade directa e traduzem uma relação expressa em linguagem natural por uma relação em linguagem matemática, uma expressão algébrica e um gráfico de barras. A tarefa é distribuída aos alunos tal como as anteriores, sem nenhum esclarecimento prévio.

7.3.5.1. Análise da situação de proporcionalidade directa descrita na notícia de jornal. Através da análise de uma notícia de jornal sobre a descida dos preços dos combustíveis, Marina e Filipa encontram várias informações que devem seleccionar e utilizar na resolução das questões propostas. Para calcular o preço de cada litro de combustível antes e depois da alteração dos preços, utilizam a regra de três simples para efectuar o cálculo:

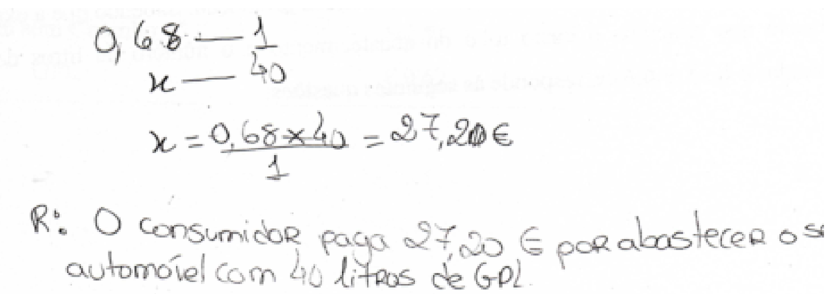


Figura 131. Resposta à pergunta 1.1. da tarefa 5.

No que diz respeito à questão 1.2., as alunas começam por estabelecer com a professora o seguinte diálogo:

Professora: Sim, Filipa.
Filipa: “Quanto poupa o consumidor se abastecer o automóvel com 40 litros de GPL, apenas no dia 4/08/2008”…

Professora: Quanto é que ele poupa…

Filipa: Se aumenta dois cêntimos…

Professora: Sim…

Filipa: Temos de ver quanto é em 40 litros…

Marina: Oh professora, eu fiz assim: 0,66 está para 1, então *x* está para 40.

Professora: Sim…

Marina: Vai dar 22,4. Como 40 litros a 0,68 dava 27,2, fiz 27,20 menos 26,40 que dá 0,80. São 80 cêntimos que ele poupa, não é?

Professora: Filipa, concordas com a resolução?

Filipa: Sim…

Marina e Filipa identificam correctamente o preço do combustível no dia seguinte à alteração, utilizando o mesmo método de cálculo para produzir uma resposta. Terminam a sua resposta efectuando o cálculo da diferença entre o preço antigo e o novo preço. Os cálculos efectuados estão patentes na figura 132.

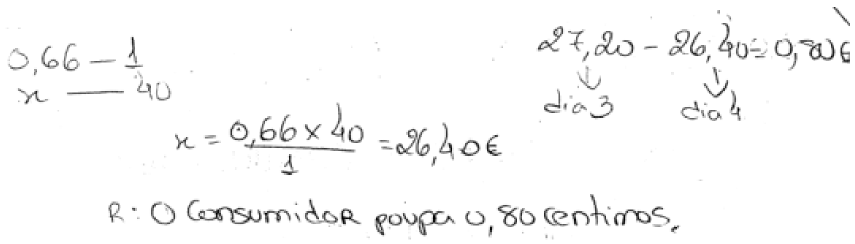


Figura 132. Resposta à pergunta 1.2. da tarefa 5

No que concerne à pergunta 1.3., as alunas devem identificar, dado um custo final e o número de litros adquiridos, se o consumidor abasteceu antes ou depois da alteração dos preços. As alunas utilizam uma estratégia de tentativa/erro, começando a calcular o custo de 38 litros de combustível GPL, para 0,66 cêntimos por litro. Como o valor encontrado coincide com o valor apresentado no enunciado, respondem com sucesso à pergunta.

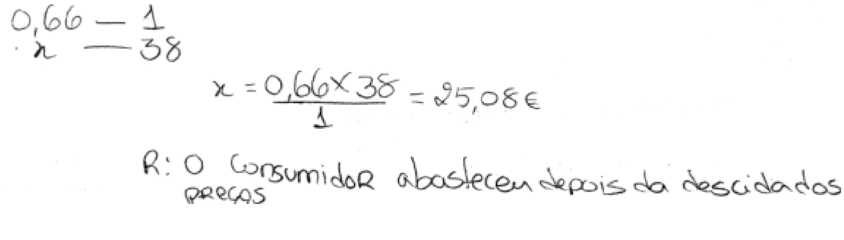


Figura 133. Resposta à pergunta 1.3. da tarefa 5

A pergunta 1.4. pede para determinar a constante de proporcionalidade presente na relação de proporcionalidade relativa aos dois dias em estudo. As alunas fazem-no correctamente e quando respondem à pergunta 1.5., evidenciam esse cálculo, escrevendo correctamente as duas expressões pedidas:

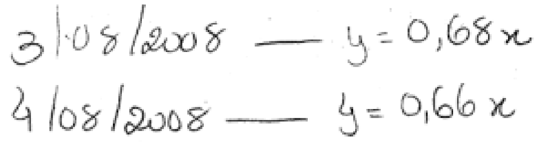


Figura 134. Resposta à pergunta 1.5. da tarefa 5

7.3.5.2. Análise da situação de proporcionalidade directa com base na expressão algébrica. Quando iniciam a resolução da questão 2, e com base na expressão algébrica sugerida pelo enunciado, os alunos devem identificar a constante de proporcionalidade e o seu significado, determinar a imagem dado um objecto e um objecto dada uma imagem. Assim, na pergunta 2.1., interpretam o enunciado dizendo que:

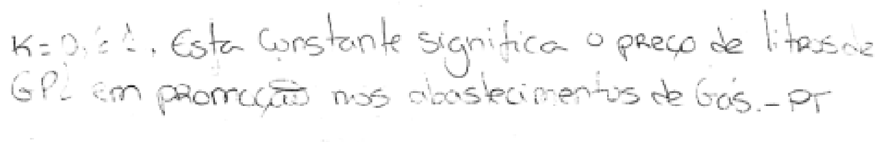


Figura 135. Resposta à pergunta 2.1. da tarefa 5

Filipa e Marina identificam correctamente a constante de proporcionalidade expressa na expressão algébrica $y=0,61x$ presente no enunciado da questão. Identificam também o seu significado, dizendo que esta corresponde ao preço de um litro de combustível.

A pergunta 2.2. pede aos alunos para calcular a imagem dado um objecto (pergunta 2.2.1.) e um objecto dada uma imagem (pergunta 2.2.2.). Na pergunta 2.2.1., as alunas solicitam a presença da professora para confirmar o que devem fazer:

Marina: Para nós sabermos isto [aponta para o enunciado da pergunta 2.2.1], temos que usar uma "regra de 3 simples"…

Professora: Não sei… Vocês têm alguma informação no enunciado da questão?

Marina: Temos a função.

Professora: Então, o 35 é o quê? É um objecto ou é uma imagem?

Marina: É um objecto.

Filipa: Imagem é o *x*.

Professora: Não, imagem é o *y*. Então, 35 é um objecto e vou substituir onde?

Marina: No *x*.

Professora: Tenham em atenção. Se substituem na expressão um *x*, têm que substituir todos. Está bem?

A professora questiona as aulas sobre o que representa o valor 35 na notação das funções, ao que as alunas respondem que corresponde ao objecto e que deve ser colocado no lugar de *x*. A professora relembra que ao substituir uma ocorrência das letras *x* deve substituir todos as outras. Nesta pergunta, Marina e Filipa utilizam a notação própria das funções, usando-as de forma correcta e chegando aos resultados pretendidos, conforme se pode ver na imagem seguinte:

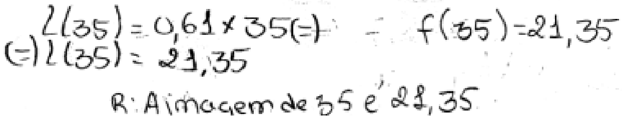


Figura 136. Resposta à pergunta 2.2.1. da tarefa 5

No entanto, quando respondem à pergunta 2.2.2., não utilizam a mesma notação, recorrendo à utilização da regra de três simples.

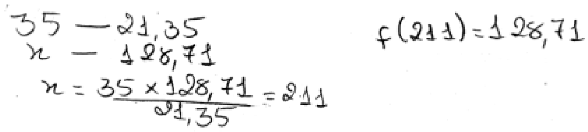


Figura 137. Resposta à pergunta 2.2.2. da tarefa 5

As alunas utilizam o valor encontrado na pergunta anterior e com ele estabelecem a relação que lhes permite encontrar o número de litros de combustível adquirido pelo consumidor.

7.3.5.3. Interpretação de dados e utilização da proporcionalidade directa na resolução de problemas. A pergunta 2.3. pede aos alunos que calculem quanto poderiam ter poupado se tivessem abastecido a mesma quantidade noutro posto. As alunas estabelecem com a docente o seguinte diálogo:

Filipa: Esta questão (lê o enunciado da questão 2.3.). Se ele gastou isto…

Professora: Sim…

Filipa: Era para ver os litros. Mas quantos litros ele gastou?

Professora: É isso que estás a calcular?

Filipa: Estou. Se um litro está para 0,66, logo *x* está para 39,96.

Professora: Escrevam o que estão a dizer.

Marina: Mas depois ainda temos de fazer outra conta.

Professora: Sim? Para saber o quê?

Marina: Para saber quanto é que ele pagava… Quanto é que ele poupava indo a um posto de gás em promoção.

Professora: Força. Continuem.

As alunas já tinham iniciado mentalmente uma resolução. No entanto, junto da professora, obtiveram a confirmação de que estavam a utilizar um caminho viável. Começam por calcular o número de litros de combustível adquiridos com uma determinada quantidade monetária e utilizando a regra de três simples. Depois, verificam quanto custam esses mesmos litros num posto de abastecimento em promoção, utilizando o mesmo método de trabalho. Só depois podem comparar os dois preços. As alunas produzem a seguinte resposta, onde os métodos utilizados são visíveis:

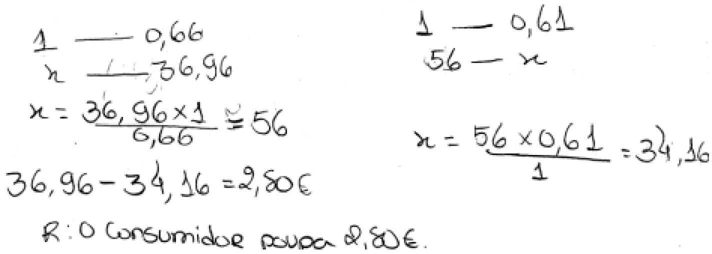


Figura 138. Resposta à pergunta 2.3. da tarefa 5

A questão 3 apresenta os dados através de uma tabela e de um gráfico. No que concerne à pergunta 3.1., as alunas utilizam os dados provenientes do gráfico apresentado para calcular quantos litros de combustível foram vendidos em Agosto de 2008.

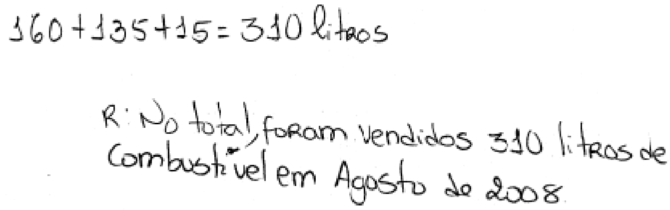


Figura 139. Resposta à pergunta 3.1. da tarefa 5

Já na pergunta 3.2., Marina e Filipa têm de relacionar os dados apresentados pela tabela e pelo gráfico, para determinar quanto dinheiro recebeu o posto por todo o combustível vendido. Apresentam a seguinte resolução:

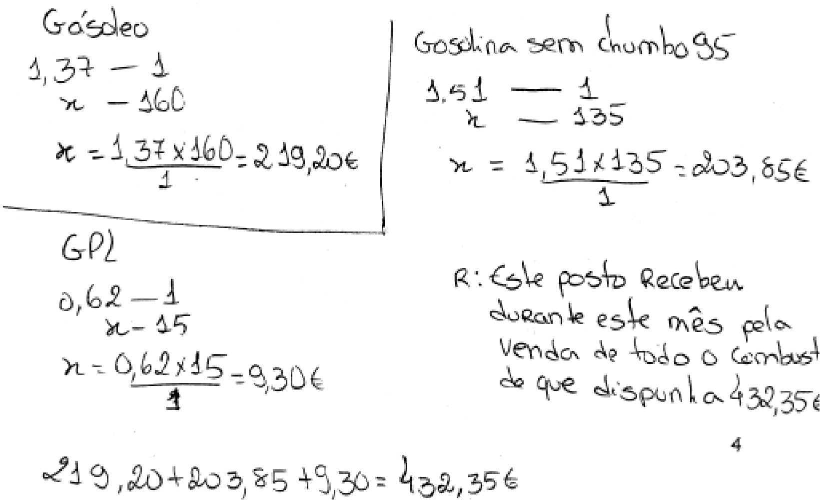


Figura 140. Resposta à pergunta 3.2. da tarefa 5

As alunas começam por calcular o lucro obtido com a venda do gasóleo, da gasolina sem chumbo e do GPL, fazendo novamente uso da regra de três simples. Seguidamente, somam os valores encontrados e chegam ao valor pretendido.

7.4. Pensamento funcional depois da experiência

À semelhança da primeira entrevista, a entrevista final é constituída por uma tarefa com duas questões. O início da entrevista contém questões que permitem a Marina e Filipa adquirir a calma e a concentração necessárias à realização da tarefa. A primeira questão prende-se com a identificação de funções, perante um conjunto de correspondências representadas por diagramas sagitais. Pretende-se que justifiquem a sua escolha. De seguida, e para cada uma das correspondências seleccionadas, as alunas devem indicar o domínio e o contradomínio. A segunda questão coloca um conjunto de perguntas baseadas numa situação do quotidiano de modo a poder concluir se a correspondência entre duas variáveis (peso e respectivo custo) representa uma função e se esta função representa uma situação de proporcionalidade directa.

7.4.1. Conceito de função

Antes de responder à questão sobre quais as correspondências apresentadas por diagramas sagitais, correspondem a funções, a professora questiona as alunas sobre a noção de função. De seguida, pede que apresentassem uma justificação para a selecção das correspondências que representassem funções:

> **Professora:** Filipa e Marina (...) Quando é que dizemos que temos uma função?
>
> **Marina:** Dizemos que temos uma função quando a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.
>
> **Professora:** Muito bem. Então vamos olhar para essas correspondências. A primeira correspondência, a correspondência *f*, é uma função?
>
> **Filipa:** Sim.
>
> **Professora:** A *g*?
>
> **Filipa:** É.
>
> **Professora:** Porquê? Justifica.
>
> **Filipa:** Porque… A cada elemento do conjunto a corresponde um e um só elemento do conjunto B.
>
> **Professora:** Muito bem! A correspondência *h*… Marina…
>
> **Marina:** Não.
>
> **Professora:** E porquê?
>
> **Marina:** Porque há um elemento do conjunto de partida que corresponde a pelo menos dois do conjunto de chegada.
>
> **Professora:** Certo! E a função *i*?
>
> **Marina:** A *i*… Não.
>
> **Professora:** Não é? Porquê?
>
> **Marina:** Não, porque há pelo menos um elemento do conjunto de chegada… De partida que corresponde a pelo menos dois do conjunto de chegada.
>
> **Investigadora:** E a *j*?
>
> **Filipa:** A *j*… É.
>
> **Professora:** É?
>
> **Filipa:** É, porque a cada elemento do conjunto A corresponde um e um só do conjunto B.
>
> **Professora:** Corresponde a um?
>
> **Marina:** Eu acho que não é professora.

Professora: Então porquê?

Marina: Tem um elemento que não tem nada.

Filipa: Mas isso não interessa.

Professora: Não? Relembrem-me lá a noção de função.

Marina: A cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Professora: Corresponde um e um só? Então? ... O elemento 3 corresponde a alguma coisa?

Marina: Não.

Professora: E então?

Marina e Filipa: Não.

Professora: E então?

Marina: Não é função.

Professora: Não?

Marina e Filipa: Não.

Professora: Pois não. E a *k*?

Marina: É.

Professora: Porque…

Filipa: Porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

Professora: Então, diga-me lá quais é que vocês disseram. A *f*, a *g*…

Filipa: *k*.

Professora: E a *k*. Muito bem!

As alunas evidenciam uma noção correcta de função. Contudo, quando justificam o facto de a correspondência *j* não representar uma função, não o fazem de forma correcta. A professora voltou a perguntar a definição de função e verificar cada que o elemento 3, do conjunto de partida não tem correspondência no conjunto de chegada.

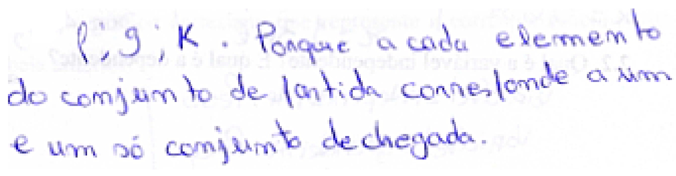

f, g, k. Porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde a um e um só conjunto de chegada.

Figura 141. Resposta à pergunta 1.1. da entrevista final

As alunas evidenciam ter adquirido a noção de função. No que diz respeito às noções de domínio e contradomínio de uma função, indicam que o domínio diz respeito aos valores tomados pela variável independente e o contradomínio aos valores da variável dependente:

Professora: O que é que é o domínio?
Filipa: O domínio é o conjunto dos objectos.
Professora: E o conjunto dos objectos está situado onde?
Filipa: No… No conjunto de partida.
Professora: E o contradomínio?
Filipa: É o conjunto...
Marina: É... É… É o conjunto de chegada…
Professora: Sim… É o conjunto das…
Marina: Imagens.
Professora: Que está contido no conjunto…
Marina: De chegada.
Professora: Então, vamos lá. Para a função *f*, qual o domínio e o contradomínio?
Marina: Ana, Inês e Sara… O do *k*…
Filipa: Escreve já o contradomínio da *f*.
Marina: É Paulo, Joaquim e António.
Professora: Agora, para a função g…
Marina: Azul, verde e vermelho. Agora, o contradomínio é Porto e Lisboa.
Filipa: Porto e Lisboa.
Professora: Hum… Hum… Agora falta só para a *k*. Qual é que é?
Marina: É 3, 7 e 5.
Filipa: É 3… 7… 5.
Marina: E o contradomínio é 8.

A resposta escrita à pergunta demonstra conhecimento da notação própria das funções, apesar de não escreverem o sinal de igual entre a notação de domínio e contradomínio com os conjuntos que os representem:

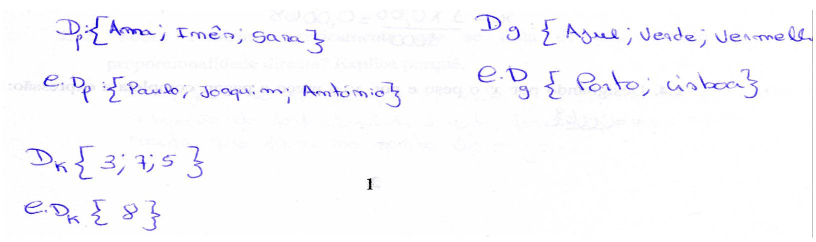


Figura 142. Resposta à pergunta 1.2. da entrevista final.

A questão 2 apresenta uma situação que faz corresponder a variável peso à variável custo. Após a leitura da pergunta 2.1., a professora intervém dizendo:

> **Professora:** Eu quero saber se a correspondência entre o peso e o preço é uma função.
>
> **Filipa:** É.
>
> **Professora:** É? Porquê?
>
> **Filipa:** Porque a cada elemento dos quilos...
>
> **Professora:** A cada peso…
>
> **Filipa:** A cada peso corresponde um e um só preço.

Filipa responde correctamente usando as variáveis peso e preço em estudo, justifica correctamente que estamos na presença de uma função, evidenciando o domínio desta noção em estudo. Marina escreve de imediato a resposta dada pela colega na sua última intervenção.

7.4.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

Na pergunta 2.2., e tendo em consideração a situação apresentada, os alunos devem completar uma tabela onde são indicados alguns objectos e algumas imagens. As alunas utilizam o método da regra de três simples para efectuar os cálculos necessários. Assim, tem lugar o seguinte diálogo:

> **Professora:** Têm o peso, em gramas, e o preço em euros. Como é que vão fazer?
>
> **Marisa:** Então aqui, professora… É que aqui está em quilogramas… Temos que reduzir a gramas. Um quilo é 6,80.
>
> **Professora:** Sim… e…
>
> **Marina:** E agora é fazer... 100…
>
> **Filipa:** Um quilo são quantas gramas?
>
> **Marina:** Um quilo… Temos que reduzir um quilo a gramas...
>
> **Professora:** E então? Quantos quilogramas são um quilo?

Marina começa a sua resolução considerando que se deve reduzir um quilograma a gramas. Efectua a redução mas de forma incorrecta.

Marina: 100 gramas.

Professora: 100 gramas é um quilo?

Filipa: Não, é só 1000.

Professora: Concordas Marina?

Marina: Sim.

Professora: Exactamente! Então, 1000 gramas correspondem a um quilo…

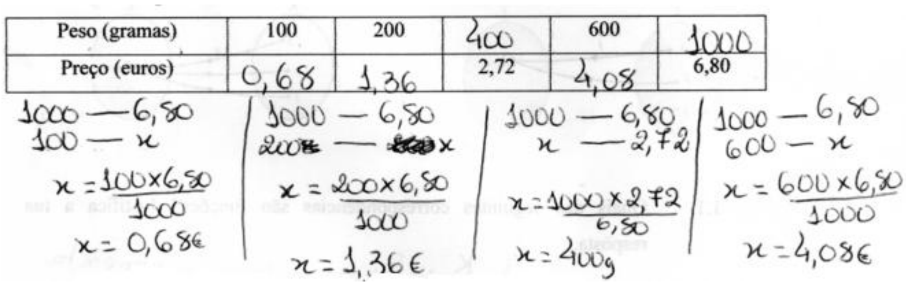
Marina: Então, 1000 gramas correspondem a 6,80. 100 corresponde a *x*.

(…)

Filipa: Dá 68.

Professora: 0,68.

Para efectuar o cálculo do custo de 100 gramas, as alunas utilizam a regra de três simples. Utilizam o mesmo processo para calcular o custo, em euros, de 200 e 600 gramas. O mesmo método é utilizado para calcular o peso que se pode adquirir com 2,72 euros. No que diz respeito ao peso a comprar com 6,80 euros, não têm dúvidas em considerar que era 1 quilo ou 1000 gramas. A imagem 143, apresenta os seus cálculos:



Peso (gramas)	100	200	400	600	1000
Preço (euros)	0,68	1,36	2,72	4,08	6,80

Figura 143. Resposta à pergunta 2.2. da entrevista final.

As alunas voltam a usar este processo quando pretendem calcular o custo de 2 quilogramas (pergunta 2.6.) e a quantidade de carne que se pode comprar com 5,44 euros (pergunta 2.7.). Nas perguntas 2.9. e 2.10., para além dos cálculos efectuados pelo mesmo processo, acrescentam uma notação diferente das perguntas anteriores, como se pode ver na figura 144.

Para responder às duas perguntas, as alunas apresentam uma notação que relaciona objectos com as respectivas imagens ao escrever *f(1,35)=9,18* e *f(1600)=10,88*, apesar da unidade de peso não ser a mesma nas duas situações, quilograma na pergunta

2.8. e grama na pergunta 2.10.. De qualquer modo, o método de cálculo que privilegiam é a regra de três simples.

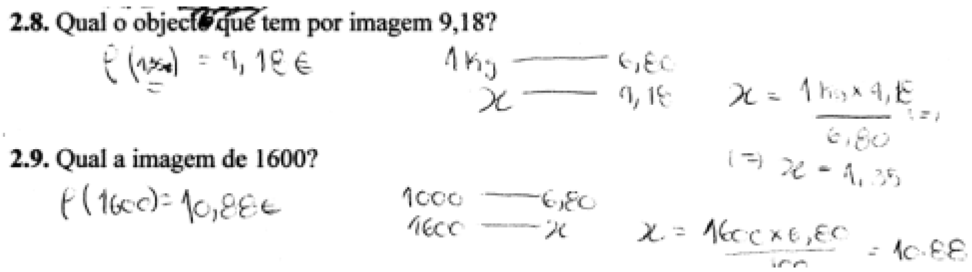


Figura 144. Resposta às pergunta 2.9. e 2.10. da entrevista final.

7.4.3. Representação de funções lineares e afins

7.4.3.1. Representação gráfica. Antes de iniciar a resolução da pergunta 2.11., as alunas têm o seguinte diálogo com a professora:

> **Professora:** Constrói o gráfico que representa a correspondência… Já sabem que têm uma situação de proporcionalidade.
>
> **Marina:** Directa.
>
> **Professora:** Que tipo de gráfico é que esperam obter?
>
> **Marina:** Um gráfico...
>
> **Professora:** De que tipo é o gráfico que representa uma situação de proporcionalidade directa?
>
> **Marina:** A recta que passa pelo ponto de origem.
>
> **Professora:** E agora? O que têm de fazer?
>
> **Marina:** Vamos desenhar os eixos...
>
> **Professora:** Que escala é que vão usar?
>
> **Filipa:** De 5 em 5.
>
> **Marina:** Pode ser de 4 em 4.
>
> **Filipa:** Então, aqui é zero.
>
> **Professora:** Quantos pontos são necessários para marcar uma recta?
>
> **Marina e Filipa:** 2.
>
> **Professora:** Já têm um não têm? Já têm o ponto zero zero. Só falta mais um ponto. Que outro ponto é que tu queres marcar?
>
> **Filipa:** Então é um qualquer?
>
> **Professora:** Têm aí 5 pontos. Basta um.
>
> **Marina:** Não precisamos de marcar os cinco.

Professora: Exacto. Basta mais um porque já têm marcado o zero zero.

Filipa: Então…

Professora: E o 100 corresponde a...

Filipa: 0,68.

Professora: Então onde é que está o ponto?

(Desenham o gráfico)

Professora: Que recta é que vão obter?

Marina: Uma recta que passa pela origem.

Professora: Não se esqueçam da legenda dos eixos. Podes confirmar graficamente que se trata de uma relação de proporcionalidade directa?

Marina: Sim, porque temos uma recta que passa pelo ponto de origem.

Quando questionadas sobre o que esperam obter da representação gráfica de uma situação de proporcionalidade directa, Filipa e Marina afirmam que é uma linha recta que passa pela origem do referencial. No entanto, através do diálogo estabelecido entre alunas e professora, podemos constatar que não sabem bem como construir essa linha recta. Com a insistência da professora, chegam à conclusão que necessitam apenas do ponto de origem do referencial e de um ponto. No final constatam que obtêm o que esperavam:

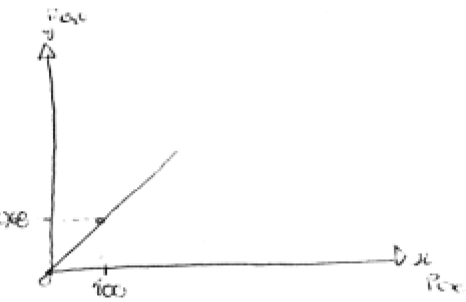


Figura 145. Resposta às pergunta 2.11. da entrevista final.

Para construir o gráfico que representa a correspondência registada na tabela, Marina e Filipa consideram 100 gramas de peso e o seu respectivo custo. Assinalam no sistema de eixos ortonormado que tinham acabado de construir o posto correspondente a este par de coordenadas. De seguida, e porque uma situação de proporcionalidade fica representada por uma recta que passa na origem do referencial, desenham a recta que passa pelo ponto O(0,0) e pelo ponto Q(100, 0.68).

As alunas identificam uma função de proporcionalidade directa como uma função cuja expressão geral é da forma $y=kx$. Intuitivamente, estão a representar funções lineares e identificam a sua representação como uma recta que passa na origem do referencial.

7.4.3.2. Representação algébrica. Para determinar a expressão algébrica que representa a situação descrita, as duas alunas começam por encontrar a constante de proporcionalidade:

> **Professora:** Designando por *x* o peso e por *y* o preço, completa a expressão.
>
> **Filipa:** Eu acho que aqui é 6,80.
>
> **Professora:** 6,80 é o preço de quê?
>
> **Filipa:** Do quilograma.
>
> **Professora:** Do quilograma. Se comprares 200 gramas, multiplicas por 6,80, para saberes o preço?
>
> **Filipa:** Acho que não.
>
> **Marina:** Não, não pode ser.
>
> (…)
>
> **Professora:** Como é que se calcula?
>
> **Marina:** Não, temos que ir acrescentando. Temos 0,68.
>
> **Professora:** Mas isso é por cada 100 gramas. Então, por cada 100 gramas acrescentas 0,68, não é? 200 gramas… O que é que estás a calcular agora?
>
> **Marina:** Estou a fazer: se 100 gramas é 0,68… Estou a calcular quanto é que é uma grama.
>
> **Professora:** Hum… Hum… Quanto é que é?
>
> **Marina:** É 0,0068.
>
> **Professora:** Hum… Hum…
>
> **Filipa:** Então aqui vai ficar 0,0068?
>
> **Professora:** Não sei. Então, se uma grama custa 0,0068, se eu comprar 100 gramas, o que é que eu faço?
>
> **Marina:** Temos que multiplicar as 100 gramas por 0,0068 que nos vai dar os 68 cêntimos.

Marina e Filipa consideram inicialmente a constante de proporcionalidade como sendo o preço de quilograma, ou seja, k=6,8. Quando confrontadas com a hipótese de comprar apenas 100 gramas, por exemplo, percebem que não estavam a identificar a constante correctamente, sugerindo que se deva saber qual o preço de um grama do produto. Desta forma, encontram a constante de proporcionalidade e, baseando-se neste cálculo, respondem à pergunta 2.5., escrevendo:

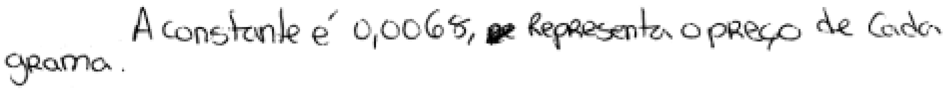


Figura 146. Resposta às pergunta 2.5. da entrevista final.

Marina e Filipa completam a expressão que relaciona o peso com o preço a pagar dizendo:

Professora: Então, como é que completas o espaço na 2.4.?
Marina: Fica *y=0,0068x*.

As duas alunas justificam que as duas variáveis são directamente proporcionais identificando a expressão algébrica que a representa.

Professora: Olhem para a expressão que têm e tentem justificar se é ou não uma situação de proporcionalidade directa.
Marina: É.
Professora: Porquê?
Marina: Porque para cada grama, vamos multiplicar por 0,0068.
Professora: Porque é que é o 0,0068? Que nome é que toma?
Marina: Constante de proporcionalidade directa.

Utilizam a comparação da expressão que obtêm com a expressão algébrica geral de uma função de proporcionalidade, isto é *y=kx*, representando *k* a constante de proporcionalidade. Deste modo, conseguem estabelecer uma correspondência entre a representação gráfica e a expressão algébrica que lhe corresponde, ou seja, a representação simbólica.

7.5. Evolução do grupo

Neste capítulo, apresento o desempenho de Filipa e Marina em três fases do estudo, a primeira entrevista, durante a realização da unidade de ensino e a segunda entrevista. De seguida, analiso o seu desempenho numa ficha de avaliação individual realizada no dia 17 de Fevereiro de 2009, onde são postos à prova os seus conhecimentos após a leccionação da unidade de ensino.

7.5.1. Conceito de função

Na questão 2 da 1.ª parte da ficha de avaliação (questões de escolha múltipla), os alunos devem identificar qual das correspondências (apresentadas na forma de referencial cartesiano, diagrama sagital ou tabela) representa uma função. Filipa e Marina identificam a representação (D) como sendo uma função.

Na questão 4 da 2.ª parte (questões de desenvolvimento), as alunas devem indicar se a tabela que completaram anteriormente representa uma função. Filipa justifica que a tabela representa uma função apesar de não o fazer de forma correcta, referindo a correspondência entre dois conjuntos, mas não mencionando que deve existir uma correspondência unívoca entre os elementos dois conjuntos.

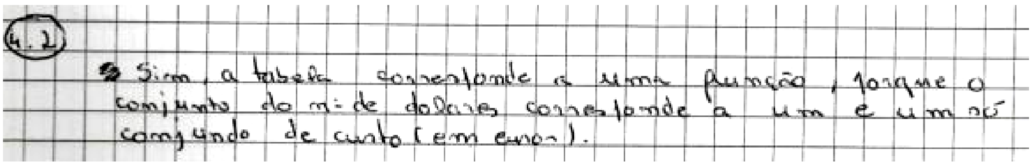

4.2) Sim, a tabela corresponde a uma função, porque o conjunto do nº de dólares corresponde a um e um só conjunto de custo (em euros).

Figura 147. Ficha de Avaliação, 2.ª parte, Filipa, Pergunta 4.2..

Marina apresenta uma justificação adequada às variáveis em causa, identificando correctamente a variável independente como sendo "o número de dólares" e a variável dependente como sendo "o custo":

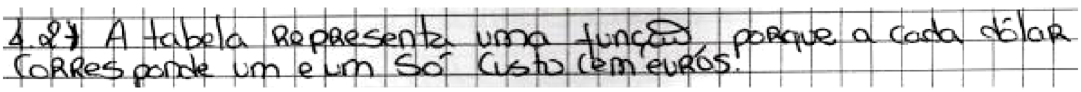

4.2) A tabela Representa uma função porque a cada dólar Corresponde um e um só Custo (em euros).

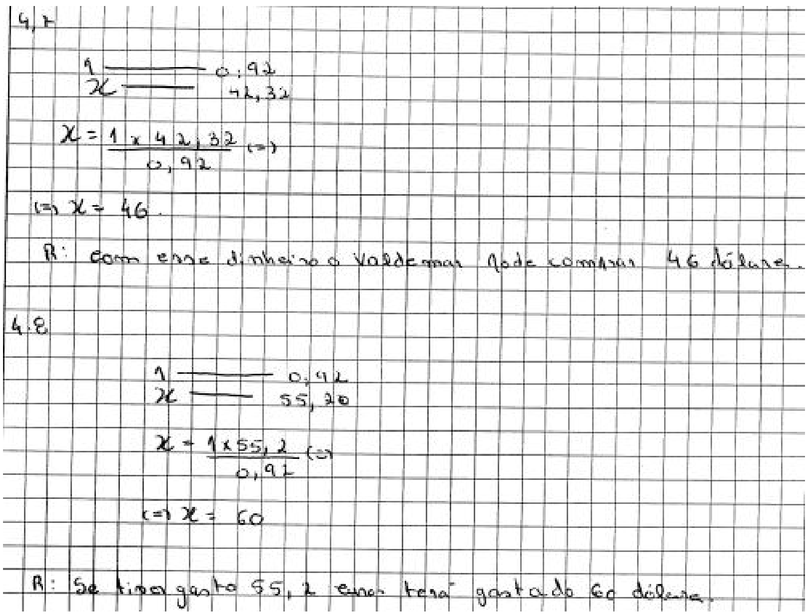
Figura 148. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Marina, Pergunta 4.2..

A questão 6 apresentada uma situação através da sua representação gráfica, que faz corresponder à idade o respectivo número de horas de sono. Quando questionadas, na pergunta 6.2., se o gráfico apresentado representa uma função, Marina e Filipa respondem correctamente particularizando de acordo com as variáveis em estudo. Ambas as alunas identificam correctamente as variáveis independente e dependente como sendo a idade (em anos) e o número de horas de sono, respectivamente.

7.5.2. Mudança de representação (verbal, gráfica, simbólica e tabular)

7.5.2.1. Representação tabular. Na pergunta 4.1., tendo em conta a informação dada através da representação verbal "Sabendo que naquele dia cada dólar lhe custou 0,92 euros", os alunos devem completar uma tabela, Marina e Filipa optam pelo uso da regra de três simples, usando por base a relação 'um dólar corresponde a 0,92 euros'. Completam correctamente a tabela inserindo os valores das variáveis independente e dependente em falta. Nas perguntas 4.7. e 4.8., as alunas utilizam o mesmo método para calcular, respectivamente, o número de dólares que podem adquirir com uma determinada quantidade de euros, ou quanto custa um determinado número de dólares (Figura 149).

7.5.2.2. Representação algébrica. Na pergunta 4.4., as alunas devem escrever uma expressão algébrica que represente a tabela que acabam de completar. Marina escreve como resposta *y=0,92x*, mostrando ter identificado a constante de proporcionalidade de permite fazer a sua complementação. Filipa apresenta apenas a forma genérica de uma função que representa uma proporcionalidade, ao responder *y=kx*.


4.7

$1 \text{ ——— } 0{,}92$
$x \text{ ——— } 42{,}32$

$x = \frac{1 \times 42{,}32}{0{,}92} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 46.$

R: Com esse dinheiro o Valdemar pode comprar 46 dólares.

4.8

$1 \text{ ——— } 0{,}92$
$x \text{ ——— } 55{,}20$

$x = \frac{1 \times 55{,}2}{0{,}92} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 60$

R: Se tiver gasto 55,2 euros terá gastado 60 dólares.

Figura 149. Ficha de Avaliação, 2.ª parte, Filipa, Perguntas 4.7. e 4.8..

7.5.2.3. Representação gráfica. Ainda na questão 4, na pergunta 4.9., as alunas devem representar, através de um gráfico cartesiano, a correspondência registada na pergunta 4.1. através de uma tabela. Filipa faz a representação gráfica indicada na figura 150.

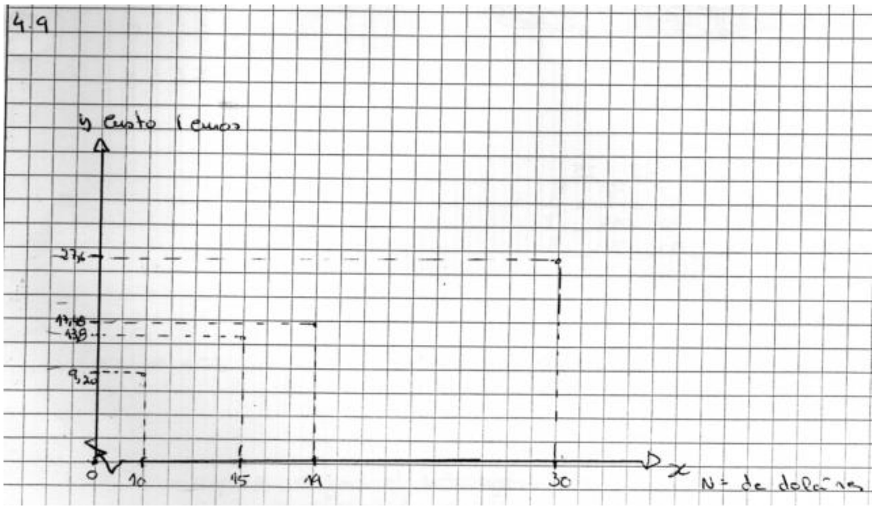


Figura 150. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Filipa, Pergunta 4.9..

Filipa estabelece, de forma eficaz, a correspondência entre eixos e variáveis, procedendo à identificação dos eixos. No entanto, não cria uma escala correcta para o eixo das abcissas. Representa unicamente o quadrante onde as variáveis assumem valores positivos. Não apresenta qualquer justificação para a afirmação que a representação gráfica corresponde a uma situação de proporcionalidade.

Marina, pelo seu lado, representa a correspondência da seguinte forma:

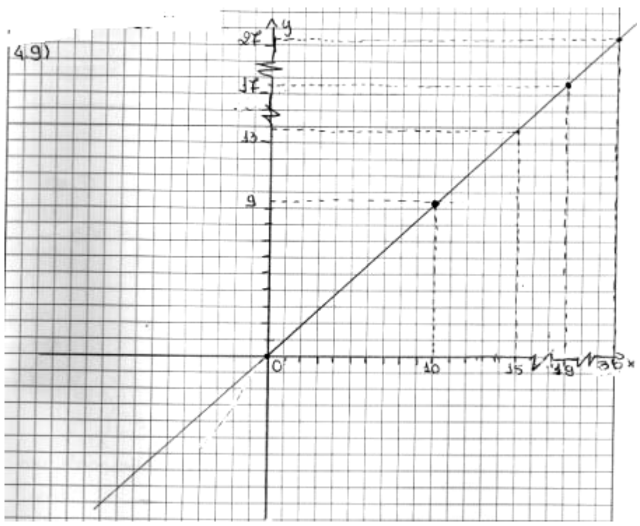


Figura 151. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Marina, Pergunta 4.9..

Deste modo, Marina apresenta uma representação diferente. Não identifica os eixos de acordo com as variáveis independente e dependente, mas desenha os quatro quadrantes. A escala que começa por construir mostra-se inadequada e, numa tentativa de não desperdiçar o sistema de eixos desenhado, opta por encurtar a escala com vista a representar todos os pontos da tabela. Constrói a recta que passa pelos pontos marcados e pelo ponto de origem do referencial, o que permite responder à pergunta 4.10. da seguinte forma:

Figura 152. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Marina, Pergunta 4.10..

Na questão 6, e dada a representação gráfica apresentada, Marina identifica correctamente os objectos, dadas as respectivas imagens, e as imagens, dados os respectivos objectos. No entanto, apresenta a sua resposta de forma corrente, dizendo “A imagem de 12 é 11” e “O objecto que tem por imagem 16 é 2”, nas perguntas 6.6. e 6.7., respectivamente.

Filipa, pelo seu lado, responde do seguinte modo:

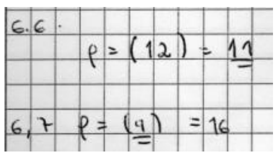


Figura 153. Ficha de Avaliação, 2.ªparte, Filipa, Perguntas 6.6. e 6.7..

Deste modo, Filipa tenta apresentar a sua resposta usando a terminologia própria das funções, apesar de incluir um sinal de igual antes dos parêntesis e de errar a pergunta 6.7., identificando o 16 como um valor da variável independente e não da variável dependente.

7.5.3. Representação de funções lineares e afins

Na questão 5, os alunos devem considerar três funções apresentadas analiticamente, onde $f(x)=2x+3$, $g(x)=x-3$ e $h(x)=2x$. Nas perguntas 5.1. e 5.2., os alunos devem calcular imagens de objectos e objectos dadas as suas imagens, respectivamente. Filipa não responde às questões 5.1. e 5.2., enquanto Marina responde correctamente à pergunta 5.1. e erradamente à pergunta 5.2.. Este facto talvez se possa justificar pela dificuldade em resolver equações do 1.º grau. Em relação à pergunta 5.3., onde era pedido aos alunos que identificassem, através da expressão algébrica de três funções, qual correspondia a uma função de proporcionalidade directa, Marina não responde e Filipa identifica, erradamente, a função f como sendo uma função de proporcionalidade directa não justificando a sua resposta.

Capítulo 8

Conclusão

Este capítulo apresenta uma síntese do estudo realizado e procura responder às respectivas questões, atendendo aos resultados obtidos. Faz também uma reflexão sobre a presente experiência de investigação e termina com algumas recomendações.

8.1. Síntese do estudo

A realização deste estudo tem por base o meu interesse em compreender as dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções, nomeadamente na fase de introdução do conceito, e o modo de as ultrapassar. Assim, o objectivo do estudo é saber de que forma a realização de tarefas de investigação e exploração, recorrendo ao GeoGebra, contribui para a aprendizagem das funções e para o seu uso na interpretação de situações e resolução de problemas. Para isso, considero as seguintes questões:

(i) Que compreensão evidenciam os alunos do conceito de função?
(ii) São capazes de representar graficamente uma função linear e uma função afim dadas algebricamente? Que dificuldades revelam?
(iii) São capazes de representar algebricamente uma função linear e uma função afim dadas graficamente? Que dificuldades revelam?
(iv) Têm facilidade/flexibilidade em passar de uma de representação para outra (verbal, gráfica, simbólica e tabular)? Que dificuldades revelam?
(v) Que uso fizeram do GeoGebra? Que domínio conseguiram deste software? Que vantagens e/ou problemas trouxe o uso deste software para a aprendizagem deste tema por parte dos alunos?

Esta unidade de ensino destina-se a alunos do 8.º ano, no estudo do tópico "Funções" com a aplicação do programa GeoGebra, e engloba o estudo do conceito de função e sua representação gráfica e as funções de proporcionalidade directa, linear e afim. A investigação tem por base a resolução de tarefas de investigação e exploração, por considerar que estas permitem aos alunos fazer descobertas, explorações, pesquisas, desenvolver a autonomia e o espírito crítico e favorecer a tomada de decisões.

A investigação recorre uma metodologia qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo, uma vez que pretendo estudar um fenómeno no seu contexto natural (Bodgan & Biklen, 1994). Optei por desempenhar simultaneamente os papéis de investigadora e professora, uma vez que é na interacção entre observador e observado que emerge o conhecimento que pretendo alcançar. A investigação tem por base as minhas aulas, onde tenho um papel activo, e tudo se articula a partir da minha prática e do trabalho que os alunos realizam tendo por base as tarefas propostas. Os dados recolhidos foram obtidos através de duas entrevistas – uma realizada antes e outra depois da leccionação da unidade de ensino – um registo de observações de aulas e de documentos produzidos pelos alunos (resoluções escritas das tarefas propostas e os testes escritos). A primeira fase de análise de dados coincidiu com a respectiva recolha, de modo a garantir a esta alguma orientação e assegurar que os dados seriam suficientemente completos para a análise posterior (Bodgan & Biklen, 1994). A segunda fase de análise ocorreu após a recolha de todos os dados, tendo em vista responder ao objectivo e às questões do estudo.

8.2. Conclusões do estudo

De seguida, abordo separadamente os aspectos focados em cada uma das questões do estudo.

8.2.1. Conceito de função

Antes do início da leccionação da unidade de ensino, e apesar de ainda não terem estudado formalmente a noção de função, Joana e Joaquim conseguem identificar uma situação de proporcionalidade directa, ou seja, intuitivamente, conseguem identificar uma função que representa uma situação de proporcionalidade directa. Além disso, dada uma representação gráfica, evidenciam, também, reconhecer, se representa ou não uma situação de proporcionalidade directa. Pelo seu lado, Filipa e Marina elaboram uma resposta que sugere que se recordam de ter trabalhado com situações de proporcionalidade directa, indicando a constante de proporcionalidade e interpretando-a à luz do problema. Dada uma representação gráfica, evidenciam, também, reconhecer se uma determinada situação representa ou não uma situação de proporcionalidade directa.

Ao longo do estudo, Joana e Joaquim adquirem a noção de função e usam-na para justificar situações que lhes são apresentadas. Distinguem correspondências que representam funções, quer sob a forma de diagrama sagital quer sob a forma de gráficos, apesar de cometerem alguns erros na sua análise. No entanto, quando confrontados com um erro, corrigem-no de imediato. Indicam o domínio e o contradomínio de uma função, utilizando a notação adequada, apesar de existirem pequenos erros na representação do domínio. Utilizam vocabulário específico e, quando a informação é apresentada sob a forma de tabela, constroem a representação gráfica com facilidade, utilizando um sistema de eixos coordenados. Os alunos do outro grupo, Filipa e Marina apresentam também dificuldades na construção dos diagramas sagitais devido ao facto de não terem presente noções já estudadas anteriormente, como as noções de quadrado perfeito, raiz quadrada de um número e outras. Não colocam orientação nas correspondências que estabelecem entre o conjunto de partida e o conjunto de chegada, mas indicam o domínio e o contradomínio da função, utilizando notação e vocabulários adequados. No que diz respeito à informação apresentada sob a forma de tabela, utilizam um sistema de eixos no qual representam convenientemente os valores da variável independente e estabelecem correctamente a sua legenda. Nem sempre escolhem a escala apropriada para a representação dos valores nos eixos coordenados e, por vezes, estes valores são representados nos eixos de acordo com a ordem em que surgem na tabela.

No final do estudo, Joaquim identifica correctamente as correspondências que representam funções. Joana e Joaquim evidenciam ter adquirido a noção de função, bem como as noções de domínio e de contradomínio. Acrescentam, ainda, que o domínio diz respeito aos valores tomados pela variável independente e o contradomínio aos valores da variável dependente. Usam as variáveis independente e dependente para justificar correctamente o facto de estarem ou não na presença de uma função, particularizando-as para as situações concretas. No entanto, evidenciam ainda algumas dificuldades em escrever o que justificam oralmente. Já Filipa e Marina utilizam a definição de função mas nem sempre de forma correcta, devido a uma má interpretação as variáveis em causa. Evidenciam ter adquirido a noção de função, apesar de, por vezes cometerem erros. Contudo, quando a professora remete para a sua definição, alteram de forma correcta a sua resposta. No que respeita às noções de domínio e contradomínio de uma função, afirmam que o domínio se refere aos valores tomados pela variável independente e o contradomínio aos valores da variável dependente. A resposta escrita às perguntas evidencia conhecimento da notação própria das funções.

Em conclusão, ao longo da unidade de ensino, os quatro alunos vão aperfeiçoando o seu trabalho, mantendo um bom desempenho. Joana e Joaquim mostram uma boa capacidade de trabalho, superam os erros, relativos à análise de gráficos e ao uso de notação adequada, que cometiam no inicio e durante a leccionação da presente unidade de ensino e continuam a ter bons resultados, conseguindo trabalhar de forma eficaz e autónoma. Pelo seu lado, Filipa e Marina, que tinham mais dificuldades no que respeita à construção e análise de gráficos, identificação das variáveis independente e dependente usadas, começam lentamente a efectuar um trabalho autónomo mais satisfatório, apesar de, por vezes, ainda solicitarem a professora para confirmar o seu trabalho.

Verifica-se, assim, que os alunos apresentam dificuldades na apreensão e aplicação do conceito de função, do mesmo modo que aconteceu nos trabalhos de Sfard (1991), Ponte (1992), Sierpinska (1992), Willoughby (1997), Kaput (1999), Duval (2002) e Sajka (2003). Com o objectivo de minimizar estas dificuldades, e de acordo com as sugestões de Sfard (1991) e Ponte (1992), o conceito de função foi introduzido (através da tarefa 2), recorrendo a várias representações. Na verdade, esta tarefa mostrou-se muito útil, pois, mais tarde, sempre que necessário, eu recorria a ela para esclarecer as dúvidas evidenciadas pelos alunos na realização das outras tarefas desta unidade de ensino. Deste modo, considero que o processo utilizado para introduzir a noção de função se mostrou eficaz, levando os quatro alunos alvo deste estudo a desenvolver de modo adequado a sua compreensão do conceito de função.

8.2.2. Representação de funções lineares e afins

No início da leccionação da unidade, e no que diz respeito à representação gráfica, os dois grupos estudados mostram ter noção de termos como ‘referencial cartesiano’, ‘ponto’, ‘coordenadas’, ‘eixo das abcissas e das ordenadas’. No entanto, no que respeita à sua marcação, necessitam da ajuda da professora no sentido de encaminhar os seus raciocínios, não evidenciando dificuldades na escrita das coordenadas de pontos.

Em relação à *representação gráfica* de situações de proporcionalidade directa, Joana e Joaquim identificam os eixos onde devem representar os valores das variáveis mas mostram dificuldades na escolha da escala apropriada para os eixos. Marcam os pontos que lhes são apresentados mas, quando elaboram a representação gráfica, não apresentam o sistema de eixos nas suas duas dimensões, positiva e negativa, ou orientação dos eixos. Do mesmo modo, Marina e Filipa representam e identificam coordenadas de pontos num referencial cartesiano. Apesar de não referirem termos como ‘variável independente’ e ‘variável dependente’, identificam correctamente o eixo onde representar estas variáveis. Mostram ter conhecimento da terminologia relativa à marcação de pontos num referencial cartesiano e não têm dificuldade na escolha da escala apropriada para os eixos coordenados. No entanto, cometem incorrecções na representação gráfica. Por exemplo, apenas representam o quadrante resultante do cruzamento dos semi-eixos positivos e representam as linhas auxiliares por um traço contínuo quando deveria ser a tracejado. No que respeita à marcação dos pontos de uma tabela, fazem-no de imediato sem necessitar da ajuda da professora. No que concerne à representação gráfica de uma situação de proporcionalidade directa, traçam a recta que une os pontos marcados e quando questionadas sobre as características que essa recta tem de verificar para representar uma situação de proporcionalidade directa, as alunas não sabem responder. No entanto, quando a professora as questiona faseadamente, vão-se lembrando dos conteúdos estudados no ano anterior e justificam convenientemente as suas respostas.

No que diz respeito à *representação algébrica*, e apesar de ainda não terem aprendido formalmente a noção de expressão algébrica de uma função, Joana, Joaquim, Filipa e Marina conseguem determinar a expressão que define a situação apresentada, tendo em conta o significado atribuído às variáveis x e y (variáveis independente e dependente).

Ao longo do estudo, os quatro alunos vão adquirindo familiaridade com a notação usada no estudo das funções. Quando se solicita que identifiquem gráficos de funções de proporcionalidade directa, isto é, gráficos que representam funções lineares, fazem-no recorrendo às características próprias de um gráfico desta natureza, ou seja, recorrem ao facto de estar representada uma linha recta que passa no ponto de origem do referencial. Joana e Joaquim seleccionam correctamente os gráficos com tais características, apesar de não apresentarem um motivo pelo qual excluem outros. Já Filipa e Marina justificam verbalmente o motivo pelo qual estamos ou não perante uma função.

No final do estudo, para passar da representação tabular para a gráfica, Joana e Joaquim utilizam de imediato a constante de proporcionalidade como unidade para construir a escala do eixo das ordenadas. Têm a noção que uma situação de proporcionalidade directa é representada por uma recta que passa na origem e que para representar essa recta, basta representar dois pontos da tabela. Identificam uma função de proporcionalidade directa como uma função cuja expressão geral é da forma $y = kx$. Intuitivamente, estão a representar funções lineares e identificam a sua representação como uma recta que passa na origem do referencial. Para determinar a expressão algébrica que representa a situação descrita, os dois alunos começam por encontrar a constante de proporcionalidade. Justificam que as duas variáveis são directamente proporcionais identificando a expressão algébrica que representa a relação entre elas. Ao identificarem uma função de proporcionalidade directa como uma função cuja expressão geral é da forma $y=kx$, Filipa e Marina estão a representar funções lineares e identificam a sua representação como uma recta que passa na origem do referencial. Deste modo, conseguem estabelecer uma correspondência entre a representação gráfica e a expressão algébrica que lhe corresponde, ou seja, a representação simbólica.

Kaput (1999) indica que os alunos sentem dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as várias representações. De facto, a associação entre a expressão algébrica e a representação gráfica de uma situação de proporcionalidade apresenta-se como uma dificuldade para os quatro alunos estudados. Uma forma de ultrapassar estas dificuldades é, segundo o autor, a realização de tarefas que envolvam os diversos sistemas de representação. A realização das tarefas 3 e 4 foi de encontro a esta indicação. Segundo Duval (2002), cada uma das representações transmite informações específicas sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função. Para este autor, a compreensão do conceito só é possível quando se alcança a coordenação das várias representações. Este tipo de tarefas mostrou-se importante, permitindo aos alunos uma abrangência de formas de representar a mesma situação. Assim sendo, os alunos conseguiram esclarecer as dúvidas que inicialmente mostravam sentir, mostrando-se capazes de aplicar os novos conhecimentos de forma eficaz.

8.2.3. Mudança de representação

Durante a primeira entrevista, Joana e Joaquim utilizavam os conhecimentos adquiridos para reconhecer uma situação de proporcionalidade directa, através da análise gráfica e tabular. No que concerne à mudança de representação verbal para tabular, recorrem frequentemente à utilização da regra de três simples, aprendida no 6.º ano e usada no 7.º, quando pretendem mudar de representação, explicando o procedimento usado. No entanto, Joana e Joaquim não utilizam apenas este processo. Começam por utilizar esta regra mas, no preenchimento de tabelas, utilizam outros processos baseados na determinação da constante de proporcionalidade. Percebem que, através da divisão ou multiplicação, o uso dessa constante lhes facilita os cálculos. Na mudança da representação tabular para a representação gráfica, usam os pares ordenados encontrados ou facultados, marcando-os num sistema de eixos ortonormados. Filipa e Marina também utilizam a regra de três simples, mas com menor frequência. Identificam a constante de proporcionalidade e utilizam-na como estratégia multiplicativa para calcular novos pontos. Utilizam também uma estratégia aditiva quando somam as coordenadas de dois pontos já calculados para determinar as coordenadas de um terceiro ponto.

Ao longo do estudo, Joana e Joaquim manifestam dificuldades na interpretação de enunciados (representação verbal). Continuam a utilizar a regra de três simples e continuam a utilizar outras estratégias, baseadas no uso da constante de proporcionalidade, para calcular outros valores. Além disso, esta identificação permite aos alunos completar correctamente a expressão algébrica fazendo a mudança de representação gráfica ou tabular para a representação algébrica. Identificam as variáveis independente e dependente subjacentes a cada situação. Pelo seu lado, Filipa e Marina continuam a usar estratégias multiplicativas e aditivas, não usando com tanta frequência a regra de três simples. Conseguem estabelecer a correspondência entre os valores apresentados no eixo das abcissas como sendo os valores que *x* pode tomar e os valores situados no eixo das ordenadas com os valores que *y* pode tomar.

Quando se apresenta uma função linear dada pela sua expressão algébrica, a partir da qual os alunos têm de completar uma tabela determinando imagens de objectos que são números negativos ou números fraccionários e determinando objectos cujas imagens são números fraccionários representados na forma decimal, Joana e Joaquim utilizam a expressão algébrica apresentada, resolvendo uma equação sempre que necessário. No entanto, quando calculam uma imagem, dado um objecto, apenas substituem o valor da variável independente no segundo membro da equação, apesar de calcularem acertadamente. Quando alertados para esse facto, voltam atrás e corrigem a resolução, apresentando por fim a resolução correcta. Já Filipa e Marina mostram saber que a expressão algébrica que representa uma situação de proporcionalidade directa é dada por $y=kx$ e que k deve assumir valor numérico, sugerindo o valor que k deve ter no contexto do problema apresentado. No entanto, mostram dificuldades em estabelecer uma relação entre a representação gráfica apresentada e as variáveis independente e dependente com a sua expressão algébrica. É necessário levá-los a relembrar qual a expressão algébrica geral de uma função de proporcionalidade directa e identificar o que significa cada factor. Utilizam a notação específica das funções, determinam graficamente um objecto dada uma imagem, e uma imagem, dado um objecto. Interpretam o significado dos valores encontrados neste contexto e formulam uma generalização ao representarem algebricamente uma função. Quando calculam uma imagem, dado um objecto, não o fazem de maneira correcta, o que vem confirmar a não apropriação da notação algébrica característica das funções. No que diz respeito à identificação de funções de proporcionalidade directa, as alunas referem que, para se tratar de uma função desta natureza, é necessário que esteja representada uma linha recta a passar pela origem do referencial. Apresentam justificações para o facto de outras representações não serem funções.

No final do estudo, Joana e Joaquim continuam a usar a regra de três simples como o seu método preferido, apesar de, em determinadas situações utilizarem outras estratégias, nomeadamente estratégias aditivas, que têm por base valores anteriormente calculados, ou estratégias multiplicativas, nomeadamente fazendo uso da constante de proporcionalidade. Utilizam a comparação da expressão que obtiveram com a expressão algébrica geral de uma função de proporcionalidade, isto é $y=kx$, representando k a constante de proporcionalidade. Deste modo, conseguem estabelecer uma correspondência entre a representação gráfica e a expressão algébrica que lhe corresponde, ou seja, a representação simbólica. No entanto, não conseguem calcular o objecto que, através da função, tem imagem cinco. Este facto talvez se possa justificar pela dificuldade em resolver equações do 1.º grau, como se veio a verificar quando se iniciou o estudo das equações de grau superior ao 1.º. Já Filipa e Marina, dada a insegurança que sentem no seu trabalho, privilegiam a regra de três simples para completar o preenchimento de tabelas. Apresentam o uso de notação que relaciona objectos com as respectivas imagens. Quando questionadas sobre o que esperam obter da representação gráfica de uma situação de proporcionalidade directa, afirmam que é uma linha recta que passa pela origem do referencial, mostrando ter adquirido a noção gráfica de função de proporcionalidade directa e identificam uma função desta natureza como uma função cuja expressão geral é da forma $y=kx$. Intuitivamente, estão a representar funções lineares e identificam a sua representação como uma recta que passa na origem do referencial.

Goldin (2003) e Duval (2002, 2004) indicam que as funções utilizam frequentemente uma ou mais representações e é na mudança de representação que os alunos mostram sentir mais dificuldade. É na ligação entre fórmulas, gráficos, diagramas e expressões verbais das relações, como na interpretação de gráficos e na manipulação de símbolos, que residem as dificuldades sentidas. Carraher & Schliemann (2007) afirmam que é no trabalho paralelo com as várias representações que reside o essencial do estudo. No presente estudo, verificou-se que, através da resolução das várias tarefas que compõem esta unidade de ensino, englobando os quatro tipos de representações, as dificuldades inicialmente sentidas pelos alunos se foram dissipando, terminando os alunos por apresentar uma aprendizagem significativa em relação ao início do estudo.

8.2.4. Uso do *software* GeoGebra

Antes do início da leccionação da unidade, os alunos tiveram contacto com o *software* GeoGebra, tomando conhecimento dos vários menus que o constituem, trabalhando, principalmente, as suas potencialidades geométricas. Ao longo do estudo, foram apresentadas as potencialidades algébricas e gráficas. Tal como sugerem Bardini, Pierce e Stacey (2004), o trabalho realizado com recurso à tecnologia permite resolver problemas graficamente, permitindo ao aluno estudar um maior número de hipóteses de resolução usando diferentes representações. De facto, a construção no GeoGebra permite explorar um enunciado e concluir que o gráfico que representa a relação entre duas variáveis é, em certos casos, um conjunto de pontos que se situam sobre uma recta que passa na origem do referencial, ou seja, representa uma relação de proporcionalidade directa.

Os alunos necessitam de um tempo inicial e de preparação, tal como indicam Bardini, Pierce e Stacey (2004), razão pela qual a tarefa 3 demorou mais do que previsto. Por exemplo, os quatro alunos deparam-se com situações que implicam a utilização de uma janela inapropriada que não permite visualizar o que lhes é sugerido. Após a intervenção da professora, no sentido de ampliar ou reduzir a janela, Joana e Joaquim justificam correctamente que uma dada representação gráfica traduz uma função de proporcionalidade directa, enquanto Filipa e Marina não chegam à conclusão pretendida, ou seja, que a recta representada pelo arrastamento sugerido passa na origem do referencial.

Em conclusão, pode dizer-se que os alunos se mostraram motivados para a utilização de um software, por constituir uma experiência não muito frequente nas suas aulas de Matemática. Contudo, e tal como os autores indicados mencionam, a utilização de tecnologias fica aquém do esperado, preferindo os alunos utilizar, sempre que podem, processos de raciocínio numérico.

8.3. Reflexão sobre a experiência

É a altura de fazer uma reflexão sobre o trabalho realizado por mim e pelos alunos, as dificuldades sentidas na aplicação da unidade pedagógica, a minha evolução enquanto professora e de propor recomendações para futuros trabalhos.

O facto de ter sido professora destes alunos no 7.º ano de escolaridade trouxe benefícios para este estudo, uma vez que eu tinha estabelecido com eles uma boa relação e sabia o que podia esperar deles. Todos os alunos da turma estavam entusiasmados e ansiosos por participar no estudo. Além disso, tinham gosto de aprender e de saber mais. Nos momentos de realização das tarefas, utilizei o trabalho em pares porque considero que para a realização de tarefas de natureza exploratória/investigativa é mais vantajoso que o trabalho individual, uma vez que os alunos podem discutir as suas descobertas e partilhá-las com o seu par e, posteriormente, com a toda a turma. Os pares foram por mim escolhidos, uma vez que conhecia bem os alunos. A escolha dos dois pares para estudo de caso foi feita de modo a incluir alunos que tentavam justificarem os seus raciocínios, ainda que por vezes errados, facto importante quando se pretende analisar os seus produtos escritos, e por revelarem disponibilidade para participar neste estudo. No entanto, os pares construídos nem sempre funcionaram bem, por diversas razões, nomeadamente questões ligadas à fase da vida que atravessam. Por outro lado, a utilização das aulas de Estudo Acompanhado alternadas com as aulas onde são realizadas as tarefas de natureza exploratória/investigativa foi importante, uma vez que os alunos eram levados a realizar os exercícios e problemas do manual escolar de forma individual. Eram esclarecidas dúvidas que surgiam em relação ao trabalho realizado na sala de aula e ao trabalho que realizam em casa. O trabalho individual não deve ser esquecido, uma vez que é necessário que os alunos se apercebam das suas próprias dificuldades e que se consigam desembaraçar sozinhos nas diversas situações.

A minha decisão de escolher o 8.º ano no tema “Funções” deve-se ao facto de já ter leccionado algumas vezes este ano de escolaridade e saber que, por norma, alguns alunos desinteressam-se e deixam de investir no seu estudo, até porque os seus interesses e motivações tendem a colocar em segundo plano as questões de ordem académica. Além disso, o conceito de função acompanha os alunos durante todo o seu percurso escolar, nomeadamente na Aritmética, como operações entre números (a um par ordenado corresponde um número bem determinado), na Geometria, relacionando conjuntos de pontos com as suas imagens através de transformações geométricas, em Probabilidades, relacionando os acontecimentos com as respectivas probabilidades e em Álgebra como relações entre variáveis que representam grandezas. Ao fazer esta opção, tive a possibilidade de fazer uma gestão curricular tendo como objectivo proporcionar momentos de reflexão e de discussão. Dado ter sido professora da maior parte dos alunos no 7.º ano, sabia que este tópico foi trabalhado no ano lectivo anterior, e até que ponto.

Nesta unidade de ensino, existiu sempre um bom ambiente na sala de aula e foi motivador observar o entusiasmo e o envolvimento dos alunos nas tarefas e no trabalho desenvolvido, bem como observar a forma como os alunos evoluíam, no que concerne à sua autonomia, à medida que resolviam as tarefas propostas. A minha decisão de trabalhar o GeoGebra deve-se ao facto de considerar que este apela à participação activa dos alunos, favorecendo a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos e levando-os a melhorar a sua relação com a Matemática. Considero, também, que o computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens realizadas no âmbito deste tema, oferecendo múltiplas representações e facilitando a transição entre elas, permitindo a interactividade com objectos matemáticos e uma melhor visualização dos conceitos, e incentivando a formulação de conjecturas. Além disso, as tecnologias, quando usadas como meio e não como fim, adquirem um papel motivador e potenciador de aprendizagens. Todos estes pressupostos foram amplamente confirmados durante a realização das aulas desta unidade. No entanto, como era a primeira vez que os alunos estavam este *software*, havia pares que tinham um melhor desempenho que outros. A gestão da diversidade levantou-me algumas dificuldades, nomeadamente quando alguns pares queriam obter a minha opinião em relação ao que fizeram e outros que ainda estavam a tentar compreender o enunciado.

Assim, parece-me que a proposta pedagógica subjacente a esta unidade de ensino se mostrou adequada, em termos gerais. Contudo, existem alguns aspectos que no futuro devem ser reformulados. Um problema é o tempo. Os alunos levaram mais tempo a resolver a primeira tarefa do que o inicialmente previsto por mim, tendo eu optado por deixar que a finalizassem, fazendo a discussão geral na aula seguinte de Matemática ou de Estudo Acompanhado. Isto deve-se ao facto de não ter sido feita qualquer leitura inicial do enunciado, deixando a interpretação da tarefa a cargo dos alunos, à sua reduzida autonomia e à sua dificuldade na interpretação de enunciados. Contudo, convém referir que na resolução da tarefa 2, apesar de ter sido seguida a mesma metodologia, os alunos mostraram-se mais céleres na sua resolução, uma vez que o seu grau de autonomia foi aumentando. A tarefa 3 demorou mais tempo do que o previsto devido à utilização do GeoGebra e as tarefas 4 e 5, como eram mais pequenas, foram discutidas no mesmo dia em que foram realizadas.

Outro aspecto a realçar prende-se com a disponibilidade da sala de Informática. Esta sala estava sujeita à utilização por todas as turmas da escola. Nem sempre as aulas de Matemática podiam ser leccionadas nesta sala. Foi necessário efectuar trocas de salas de aula e de disciplinas dentro do Conselho de Turma. Esta dificuldade logística carece da boa vontade de todos os docentes da escola.

A metodologia de investigação parece-me ter sido adequada ao estudo. Numa primeira fase planifiquei o trabalho e, de seguida, entrevistei os alunos. Depois, ocorreu a fase de ensino e observação na sala de aula. Posteriormente, decorreram as segundas entrevistas e, por fim, a análise de dados e a reflexão.

Como professora, não poderia estar mais satisfeita com a realização deste estudo e com os resultados obtidos. Esta experiência constitui um marco muito importante no meu percurso profissional. Penso que, de um modo geral, alcancei o objectivo a que me propus. Considero que fiz algo pelos meus alunos e que fui capaz de fazer com que alguns deles tivessem bom desempenho. Como afirmam Sierpinska e Kilpatrick (1998), o duplo papel de professora/investigadora colocou-me numa posição privilegiada, por planificar e ensinar, mas também por analisar e reflectir sobre as minhas aulas. É preciso realçar que a compreensão dos conceitos fundamentais é um processo lento, pelo que é necessário bastante tempo para que os alunos consigam corrigir concepções erróneas e ultrapassar dificuldades. O estudo das Funções não se completa em meses, mas são precisos vários anos de trabalho, tratando-se de uma aprendizagem que não se esgota num só ano de escolaridade.

Este estudo sugere diversas recomendações para os professores de Matemática e para a investigação educacional. Assim, os seus resultados ajudam a elucidar os professores sobre os erros cometidos pelos alunos, bem como o modo como estes pensam e as estratégias que adoptam para resolver as situações com que são confrontados. Deste modo, penso ser necessário a divulgação de propostas como esta junto de professores, contendo exemplos de exploração/investigação e sugestões metodológicas. Acredito o ensino se deve basear cada vez mais em tarefas de natureza exploratória/investigativa, seguindo-se uma reflexão conjunta sobre os conteúdos matemáticos e processos de resolução diversificados que possam ter sido usados. Além disso, parece-me importante que os professores continuem a investigar a sua prática profissional, para compreenderem o modo como esta influencia os erros cometidos e as dificuldades sentidas pelos alunos.

Para concluir, espero que este trabalho de investigação incentive outros professores a investigar de que forma o uso de tecnologias na sala de aula pode facilitar as aprendizagens dos alunos, neste e noutros campos da Matemática.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Org.), Formação profissional de professores no ensino superior (vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

Bardini, C., Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematical Education*, *2*(3), 353-376

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brunheira, L., & Fonseca, H. (1996). Investigar na aula de Matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 193-201). Lisboa: Projecto MPT e APM. [Acedidio em 18 de Janeiro de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/14Livro-Lina,Lena.PDF]

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Tarefa e actividade. [Acedido em 18 de Janeiro de 2009 de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/christiansen-walther%2086.pdf]

Cunha, H., Oliveira, H. & Ponte, J. P. (1996). Investigações matemáticas na sala de aula. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 173-191). Lisboa: APM.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1-16.

Duval, R. (2004). Registros de representación, comprensión y aprendizage: Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizages intelectuales (pp. 25-83). Cali, Colombia: Peter Lang.

Fey, J. (1991). Tecnologia e Educação Matemática – Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. *Cadernos de Educação e Matemática (2)* (pp. 45-79). Lisboa: APM.

Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. P. (1999) As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM. [Acedido em 18 de Janeiro de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/99%20Fons.-Br.-Ponte%20(ProfMat-MPT.pdf]

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 133-135). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 176-201). New York: Routledge.

Greeno, J. & Hall, R. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. Journal Article Excerpt, 78, (pp. ?).

Hohenwarter, M. (2004), Bidirectional dynamic geometry and algebra with GeoGebra. *Proceedings of the German Society of Mathematics Education's annual conference on Mathematics Teaching and Technology*. Soest, Germany.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In D. Küchemann (Ed.). *Procedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Hollar, J. & Norwood, K. (1999). The effects of a graphing-approach intermediate algebra curriculum on students' understanding of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 220-226.

Hunting, R. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. In JMC Journal of mathematical Behavior, 16(2), 145-165.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-135). Mahwah: Erlbaum.

Lessard-Hérbert, M., Goyette, G., Boutin, G. (1990). Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas. Lisboa: Instituto Piaget

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2002). The teacher's role in supporting students' connection between realistic situations and conventional symbols systems. *Mathematics Education Research Journal, 2,* 99-120.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Ministério da Educação. (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem*. 3.º ciclo, vol. II. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (1997). *Programa de Matemática 10.º, 11.º e 12.ºanos*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Monk, S. (2003). Representation in School Mathematics Learning to Graphs and Graphing to Learn. *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics, 17*, 250 – 262.

Mourão, A. (2002). *A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções.* In http://meduc.fc.ul.pt/mod/resource/view.php?id=2594

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (tradução de Magda Melo). Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM. Neves, C., Monteiro, S., Rocha, G., Silva, A. & Ponte, J. P. (2006). A folha de Cálculo e a aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 317-333). Lisboa: SPCE.

Oliveira, H. (1998). Vivência de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante, 7*(2), 71-98.

Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. P. & Cunha, M. (1999). *Investigações matemáticas na sala de aula: um projecto colaborativo* [Acedido em 23 de Dezembro de 2008 de http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto11.PDF]

Oliveira, H. M., Segurado, M. I., & Ponte, J. P. (1999). Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 175-182). Lisboa: Projecto MPT e APM [Acedido em 18 de Janeiro de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/p_87-96.pdf]

Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM [Acedido em 18 de Janeiro de 2009 de http://ia.fc.ul.pt/textos/p_97-110.pdf]

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Org.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Oliveira, H. (2008). Entrevista clínica e aprendizagem. In Entrevista Clínica [Acedido em 23 de Dezembro de 2008 de http://meduc.fc.ul.pt/course/view.php?id=95].

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8. (http://math.coe.uga.edu/tme/v03n2/Ponte.pdf)

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. Quadrante, 3(1), 3-18.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática*: Textos seleccionados (pp. 119-137). Lisboa: Projecto MPT e APM. (publicado originalmente em inglês em 1992).

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Cap. 4, Lisboa: Universidade Aberta. (http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/bibliografia.htm)

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: DES do ME [Acedido em 07 de Janeiro de 2009 de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Ponte-Boavida-Graca-Abrantes(Cap4-Dinamica).pdf]

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.) Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 23-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J.P., Matos, A. & Branco, N. (2008). *Sequências e funções: Materiais de apoio ao professor* (documento de trabalho).

Porfírio, J., & Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 111-118). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function - a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 229-254.

Scheuermann, A., & Garderen, D. (2008). Analyzing students' use of graphic representations: Determining misconceptions and error patterns for instruction. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 13, 471-477.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Org.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 57-73). Lisboa: APM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Silva, J. (2003). A matemática, a tecnologia e a escola. *Educação e Matemática 71* (p. 1-2). Lisboa: APM.

Silvestre, A., & Ponte, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea*, *5*(10), 61-89.

(http://www.estacio.br/mestrado/educacao/revista/numero10/4.asp)

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function* (p. 25-58). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain*. Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91

(http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/skovsmose(Cenarios)%2000.pdf)

Tripathi, P. N. (2008). Multiple representations: Developing mathematical understanding through. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 13, 438-445.

Tuckman, B. (1994). Manual de investigação em educação. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Willoughby, S. S. (1997). Function from kindergarten through sixth grade. *Teaching Children Mathematics*, *3*(6), 314-319.

Varandas, J. (2000). Avaliação de investigações matemáticas: Uma experiência (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

ANEXO I

Tarefas da proposta pedagógica

TAREFA 1 - TARIFÁRIOS

Questão 1:

No anúncio publicitário do tarifário "Mais segundos" da empresa de comunicações TELEM pode ler-se:

TELEM, COMUNICAÇÕES

Mais segundos

Tarifário nacional único

Para todas as redes	0,32 cêntimos por segundo

Preço de todas as chamadas até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos. A taxação é realizada ao segundo, após os 5 segundos iniciais.

1.1. De acordo com a informação dada, indica quanto paga o consumidor por uma chamada cuja duração total é de:

- 1.1.1. 2 segundos;
- 1.1.2. 5 segundos;
- 1.1.3. 10 segundos;
- 1.1.4. 15 segundos;
- 1.1.5. 1 minuto.

1.2. Quanto paga um consumidor que realize uma chamada com duração de 3 minutos e 47 segundos? Justifica a tua resposta.

1.3. E quanto paga por uma chamada com duração de 3 minutos e 48 segundos? Justifica a tua resposta.

1.4. Como varia, segundo a segundo, o valor a pagar por uma chamada com duração máxima de 5 segundos? E como varia o valor a pagar por uma chamada com duração superior a 5 segundos? Qual a diferença entre os dois casos?

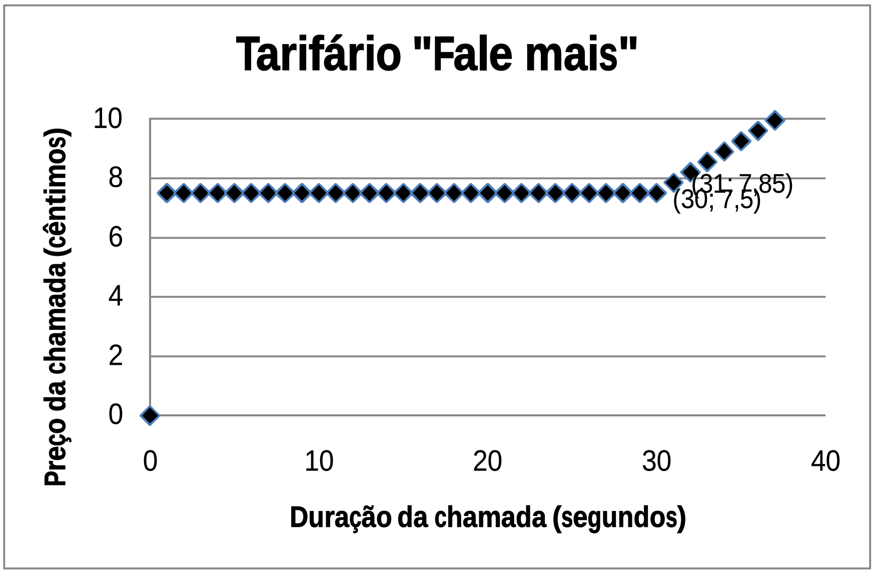
1.5. Num referencial cartesiano representa graficamente este tarifário até aos 20 segundos.

1.6. Indica porque motivo, nos primeiros 5 segundos, os pontos do gráfico estão contidos numa recta horizontal.

1.7. Descreve o que sucede aos pontos do gráfico a partir dos 5 segundos. Justifica a tua resposta.

Questão 2:

A figura mostra a representação gráfica da relação entre o tempo de duração da chamada e o valor a pagar, num outro tarifário para todas as redes, "Fale mais", também da TELEM.



2.1.Completa a tabela que representa este tarifário:

x	0		30	31	37		60
y		7,5				12,75	

2.2.Num pequeno texto descreve as informações que é possível obter a partir das representações gráfica e tabular deste tarifário.

TAREFA 2: MÁQUINA DAS PERGUNTAS

O João pretende utilizar um novo programa no seu computador, a "Máquina das perguntas". O programa gera ecrãs semelhantes ao da figura 1.

Na caixa da esquerda, deve ser introduzido um elemento, por exemplo, o nome de um país. Na caixa da direita, o programa devolve um novo elemento, neste caso o nome da sua capital. Os temas vão variando.

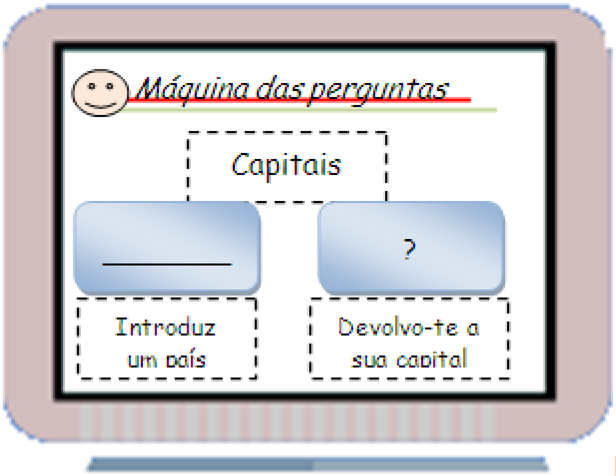


Figura 10

Questão 1:

No tema "Capitais", o João introduziu "Eslovénia" e obteve o nome da sua capital, como se pode observar nas figuras 2 e 3:

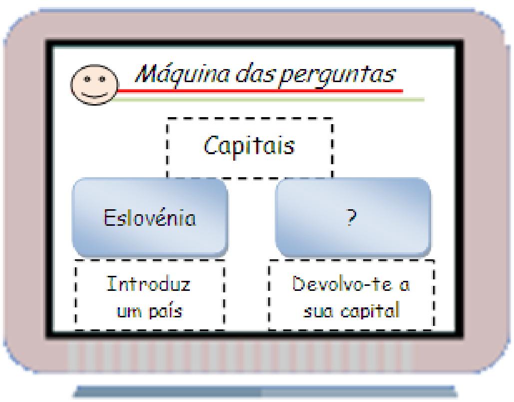


Figura 2

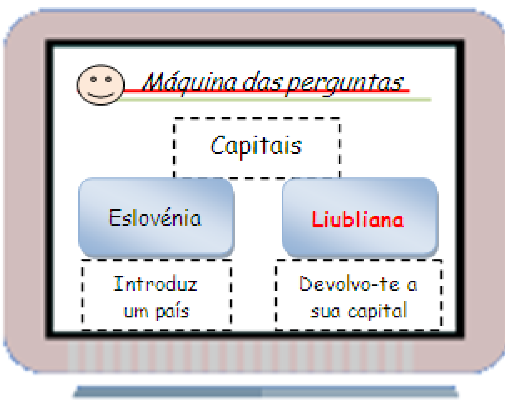
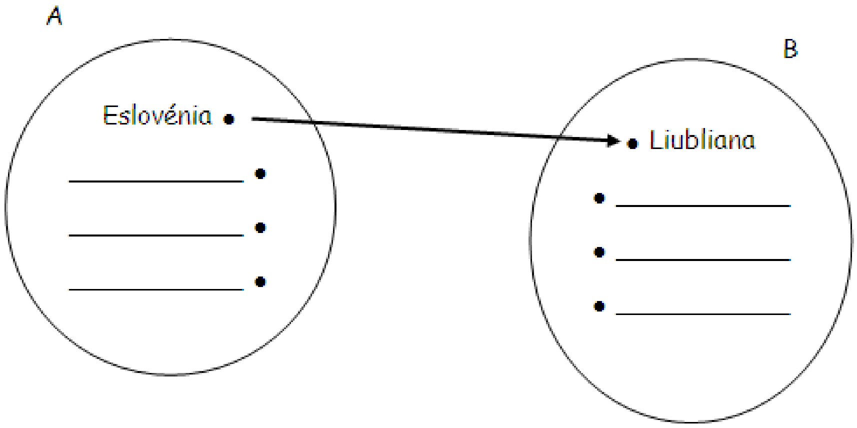


Figura 3

1.1. Sugere três objectos que o João pode introduzir neste tema e a resposta que esperas que o computador lhe devolva.

1.2. Com os objectos de 1.1 completa os espaços em branco. Estabelece a correspondência entre o conjunto de países A = {Eslovénia, __________, __________, __________} e o conjunto de cidades B = {Liubliana, __________, __________, __________}, colocando as setas que associam os elementos correspondentes no seguinte *diagrama sagital*.



Nesta correspondência observa-se que:

- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital);
- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde apenas um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital) isto é, essa capital é única.

Quando uma correspondência verifica estas duas condições diz-se que é uma *função*:

- Cada elemento do conjunto A designa-se por objecto;
- Cada elemento do conjunto B que corresponde a algum elemento do conjunto A designa-se por imagem;
- Ao conjunto de todos os objectos, dá-se o nome de domínio da função e representa-se por D;

  D = {Eslovénia, __________, __________, __________}
- Ao conjunto de todas as imagens dá-se o nome de contradomínio e representa-se por D' ou CD;

  CD = {Liubliana, __________, __________, __________}

Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento do primeiro conjunto associa um e um só elemento do segundo conjunto (correspondência unívoca).

Questão 2:

Os ecrãs seguintes mostram quatro temas: Número de letras, Potências, Raízes e Números menores:

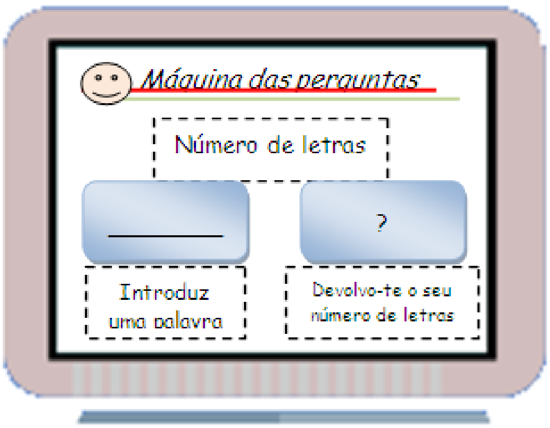


Figura 4

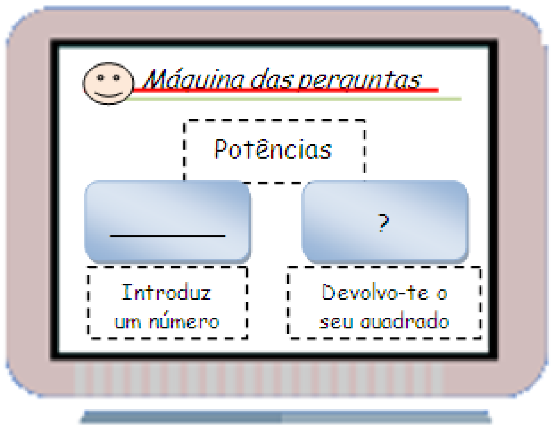


Figura 5

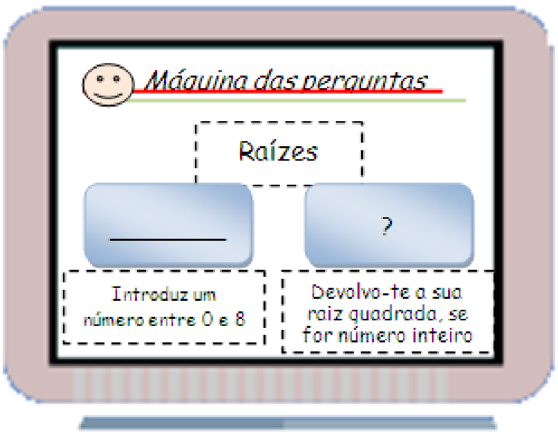


Figura 6

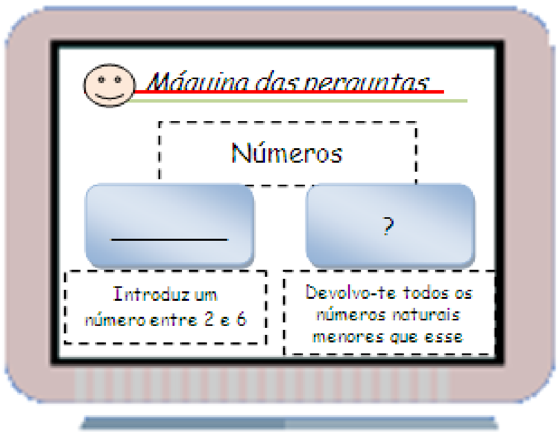


Figura 7

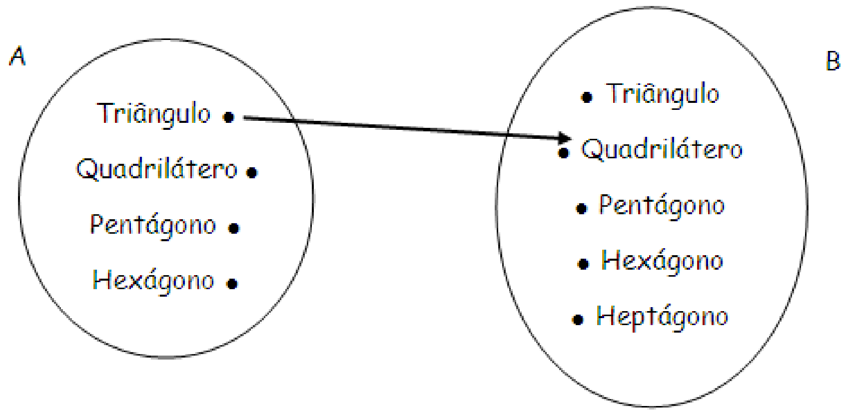
2.1. Para cada um dos temas apresentados, indica três elementos diferentes que o João pode introduzir e as respostas que esperas que o computador devolva. Representa cada uma das correspondências usando diagramas sagitais.

2.2. Indica quais destas correspondências são funções. Justifica a tua resposta.

2.3. Para as funções que identificaste em 2.2, indica o seu domínio e contradomínio.

Questão 3:

Um outro tema do programa de computador tem de nome “Polígonos”. Neste tema introduz-se o nome de um polígono e o computador devolve o nome de um polígono que tem mais um lado que o polígono inicial. O João começou a construir um diagrama sagital para representar essa correspondência:



3.1. Completa o diagrama sagital, associando os objectos às respectivas imagens.

3.2. Esta correspondência é uma função. Indica o seu domínio e contradomínio.

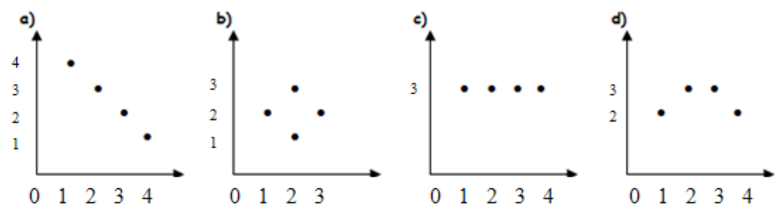
3.3. Indica:

a) Qual é a imagem de “Hexágono”? E de “Triângulo”?;

b) Que objecto(s) corresponde(m) à imagem “Pentágono”?

Questão 4:

Uma correspondência pode ser representada por um conjunto de pontos de um gráfico cartesiano – para cada ponto, a abcissa indica um objecto e a ordenada indica a respectiva imagem. Os gráficos que se seguem representam quatro correspondências:



4.1. Indica quais destas correspondências são funções e quais não o são. Justifica a tua resposta.

4.2. Para cada uma das funções que identificaste em 4.1 indica o domínio e o contradomínio.

Questão 5:

Na tabela que se segue está representada uma correspondência entre duas variáveis. Esta correspondência é uma função:

x	2	4	6	9	12	15
y	1	4,5	3	4,5	6	7,5

5.1. Indica o seu domínio e contradomínio.

5.2. Nesta correspondência há dois objectos distintos que têm a mesma imagem. Indica quais são os objectos e a respectiva imagem.

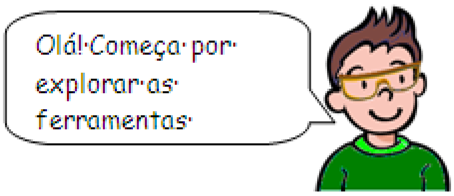
5.3. Constrói um gráfico cartesiano que represente a função.

TAREFA 3: PERÍMETROS

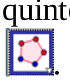
O João vai fazer um trabalho de casa de Matemática sobre o perímetro de polígonos regulares – polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos também congruentes. Este trabalho de casa é constituído por duas questões: a primeira refere-se à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado e o seu perímetro; a segunda é semelhante, mas diz respeito ao caso do triângulo equilátero.

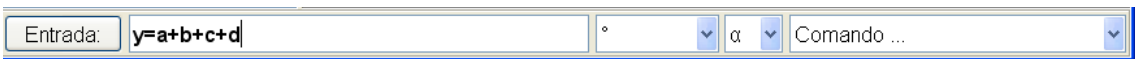
Como o João gosta bastante de programas de computador, decide usar o *GeoGebra*. Mas primeiro vai ajudar-te a conhecer melhor este programa.

Segue os passos do João:

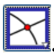


I – Constrói um quadrado e um ponto num gráfico do seguinte modo:

- Abre o *GeoGebra* e, no menu *Exibir*, faz aparecer na janela de visualização os eixos coordenados e o quadriculado.
- No quinto ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Polígono Regular* . Desenha um lado e indica o número de lados do polígono regular. O *GeoGebra* cria o quadrado ABCD, cujos lados são os segmentos de recta *a*, *b*, *c* e *d*.
- Define a variável independente, x, como sendo igual ao comprimento do lado do quadrado, indicando no campo de entrada a expressão $x = a$ e carregando em *Enter*. O programa marca uma recta vertical que intersecta o eixo dos *xx* no ponto de abcissa *a*.
- Define a variável dependente, y, como sendo igual ao perímetro do quadrado. Para tal podes indicar no campo de entrada uma expressão para o perímetro, como se mostra a seguir e carregar em *Enter*.



O programa marca uma recta horizontal que intersecta o eixo das ordenadas no valor de y igual à soma dos comprimentos dos quatro lados do quadrado cujo comprimento do lado é igual ao valor indicado no eixo das abcissas.

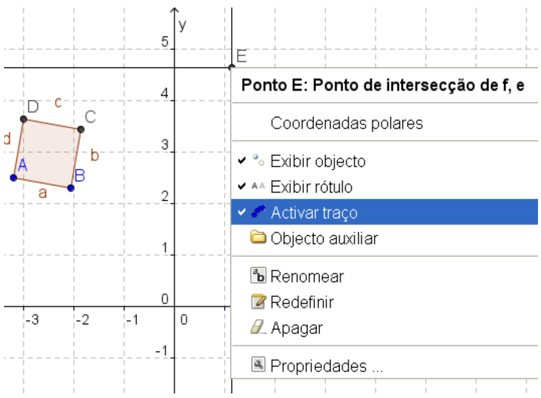
- No segundo ícone da barra de ferramentas selecciona a opção *Intersecção de dois objectos*. De seguida selecciona cada uma das rectas construídas, pressionando sobre elas o botão esquerdo do rato. O *GeoGebra* cria o ponto E que resulta da intersecção pretendida.

II – Regista, para o quadrado que acabaste de construir no *GeoGebra*:

- a) O valor da abcissa do ponto E e o seu significado neste contexto.
- b) O valor da ordenada do ponto E e o seu significado neste contexto.

III – Utiliza o *GeoGebra* para construir pontos referentes a quadrados com lados de diversos comprimentos:

- Selecciona o ícone *Mover*. Clica com o botão do lado direito do rato em cima do ponto E. Selecciona a opção *Activar traço* como mostra a figura:



- Clica no ponto B e, sem soltar, arrasta-o.

IV – Regista o que acontece no gráfico. (Sugestão: podes mover os eixos coordenados para melhorar a visualização com o ícone *Mova os eixos coordenados*).

V – Resolve agora a primeira questão do trabalho de casa do João. Para isso, utiliza a construção que elaboraste no *GeoGebra* e move o ponto B, colocando-o onde considerares mais adequado.

Trabalho de casa – Questão 1

1. As perguntas que se seguem dizem respeito à relação que existe entre o comprimento do lado do quadrado, qualquer que seja o seu valor, e o seu perímetro.

   1.1. Indica qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2,34 cm.

   1.2. Indica quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é 15,52 cm.

   1.3. Completa a tabela com os valores em falta:

x	0,5	1	2	2,34		
y			8		15,52	26

   1.4. Verifica-se que o perímetro do quadrado é directamente proporcional ao seu lado. Explica porquê e indica qual é a constante de proporcionalidade e qual o seu significado geométrico.

   1.5. Completa a expressão algébrica que representa essa relação de proporcionalidade:

$$y = \_\_\_ \times x$$

VI – Na barra de entrada do *GeoGebra* introduz a expressão algébrica. Descreve o que acontece.

VII – Observa que:

Uma função com uma expressão algébrica do tipo $y = k \times x$ (ou $f(x) = k \times x$), $k \neq 0$, tem o nome de *função de proporcionalidade directa* ou *função linear*.

x é um objecto; $y = f(x)$ é a sua imagem; k é a constante de proporcionalidade.

O gráfico de uma função de proporcionalidade directa é uma recta que contém a origem do referencial.

VIII – Abre uma nova janela de visualização no *GeoGebra* e traça o gráfico da função g que representa a relação entre o comprimento do lado do triângulo equilátero ABC, qualquer que seja o seu valor, e o perímetro correspondente.

IX – Resolve agora a segunda questão do trabalho de casa do João relativo aos triângulos equiláteros. Para isso podes utilizar a construção que elaboraste no *GeoGebra* e mover o ponto B, colocando-o onde considerares mais adequado.

Trabalho de casa – Questão 2

2. A função g relaciona o comprimento do lado do triângulo equilátero, qualquer que seja o seu valor, e o perímetro correspondente.

   2.1. A função g é uma função de proporcionalidade directa? Justifica.

   2.2. Completa:

   a) $g(3) =$ ______

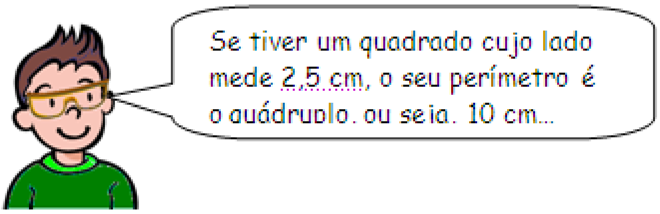
   b) $g($_____$) = 18{,}3$

   Em cada uma das igualdades anteriores indica qual é o objecto e a respectiva imagem. Explica qual é o significado de cada um destes valores neste contexto.

   2.3. Escreve uma expressão algébrica que represente a função g.

X – Resolve as seguintes questões adicionais que o João colocou a si mesmo quando olhou de novo para as representações gráficas que obteve:

Questões adicionais

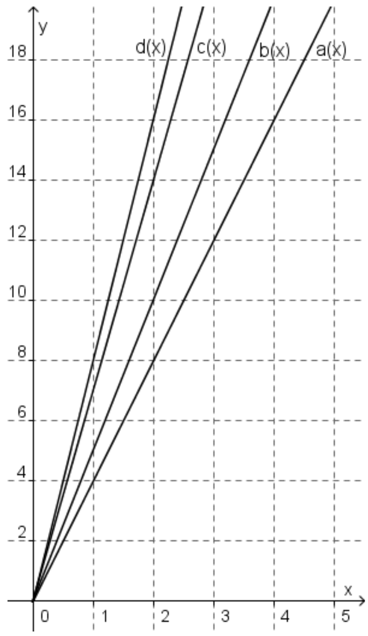


1. Se tiver um triângulo equilátero com 8 cm de lado, qual será o comprimento do lado do quadrado com o mesmo perímetro deste triângulo?

2. Qual será o comprimento do lado do triângulo equilátero que tem o mesmo perímetro que o quadrado descrito pelo João?

TAREFA 4 – VÁRIAS REPRESENTAÇÕES

Na figura estão representadas graficamente as relações entre o comprimento do lado e o perímetro de quatro polígonos regulares.



Numa breve composição indica:

– a que polígono regular corresponde cada uma das funções representadas graficamente na figura;

– uma expressão algébrica que represente cada uma das funções de proporcionalidade directa representadas;

– a constante de proporcionalidade referente a cada uma das quatro situações;

– o efeito da alteração do valor da constante de proporcionalidade directa no gráfico da função.

Questão 1:

Considera um polígono regular cujo lado tem 3,4 cm de comprimento e cujo perímetro é 20,4 cm.

1.1. De que polígono regular se trata?

1.2. Escreve uma expressão algébrica que represente a função que a cada valor do comprimento do lado associa o perímetro deste polígono regular.

1.3. Representa graficamente essa função usando o *GeoGebra*.

Questão 2:

Para a função de expressão algébrica $f(x) = \frac{3}{2}x$:

2.1.Completa a tabela:

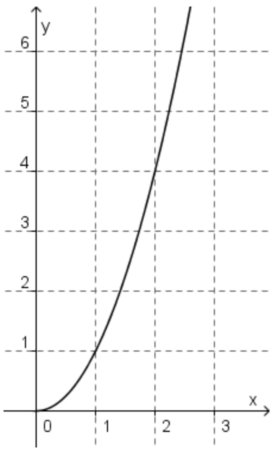
x	-7	-2		1		$\frac{50}{9}$
$f(x)$			0		4,5	

2.2. Elabora uma representação gráfica da função f numa folha de papel quadriculado.

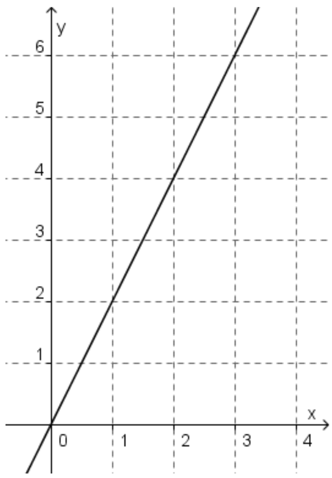
Questão 3:

Quais dos gráficos seguintes representam uma função linear? Justifica a tua resposta.

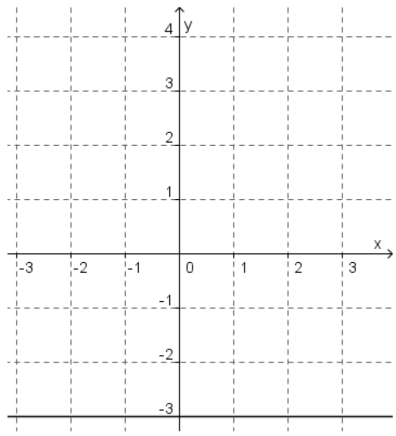
a)



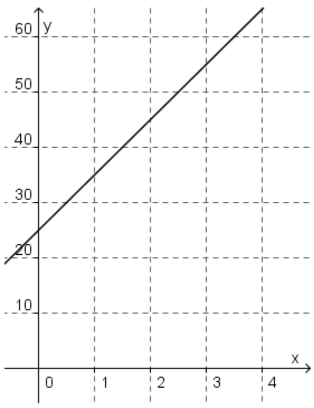
b)



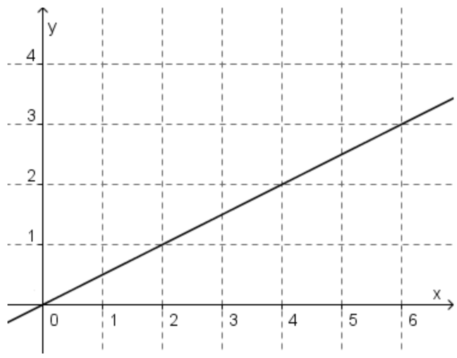
c)



d)



e)



TAREFA 5 – COMBUSTÍVEIS

Lê atentamente a seguinte notícia:

Descida dos combustíveis

O preço dos combustíveis estará mais baixo dois cêntimos a partir da meia-noite de hoje, nos postos de abastecimento de combustível em todo o país, segundo avança a Agência Noticiosa de Informações Europeias.

Esta é a segunda baixa no preço dos combustíveis no espaço de uma semana, situação que se deve a uma tendência de descida das cotações internacionais do crude e dos produtos refinados.

No entanto, de acordo com indicações do mercado internacional, prevê-se uma inversão na tendência actual de descida, pelo que se espera uma subida dos preços dos produtos petrolíferos refinados durante as próximas semanas. Em contrapartida, para um futuro próximo prevê-se que o preço do GPL se mantenha inalterado.

Este tipo de energia tem sido cada vez mais procurado pelos consumidores, devido ao seu preço mais apelativo e às vantagens que traz para a preservação ambiental, sobretudo a redução da emissão de gases nocivos à camada de ozono.

Novos preços dos combustíveis nas bombas da Petro-PT:

Gasóleo: € 1, 39
Gasolina sem Chumbo 95: € 1,52
GPL: € 0,66

Fonte: Jornal *Mais informação*
03/08/2008

Questão 1:

De acordo com os dados da notícia da figura responde às seguintes questões:

1.1. Quanto paga um consumidor que abasteça o seu automóvel com 40 litros de GPL durante o dia 03/08/2008?

1.2. Quanto poupa o consumidor se abastecer o automóvel com 40 litros de GPL apenas no dia 04/08/2008?

1.3. Um consumidor abasteceu o seu automóvel com 38 litros de GPL e pagou 25,08 euros. Abasteceu antes ou depois da descida dos preços?

1.4. O valor a pagar depende do número de litros abastecidos de GPL. Existe uma relação de proporcionalidade directa entre estas duas variáveis. Indica as constantes de proporcionalidade relativas aos dias 03/08/2008 e 04/08/2008.

1.5. Escreve as expressões algébricas que definem as funções que relacionam o número de litros de GPL abastecidos com o preço a pagar por litro, antes e depois da descida.

Questão 2:

Nos postos de abastecimento da Gás-PT, o GPL está em promoção. Sabendo que a expressão algébrica da função que relaciona o custo total do abastecimento e o número de litros deste combustível abastecidos é $l(x) = 0{,}61x$, responde às seguintes questões:

2.1. Qual é a constante de proporcionalidade? Que significado tem essa constante?

2.2. Relativamente a esta função, determina:

a) A imagem de 35;

b) O objecto cuja imagem é 128,71.

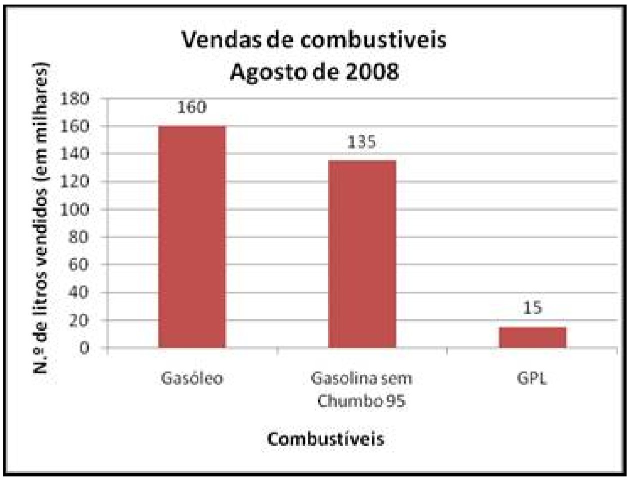
2.3. No dia 4, um consumidor abasteceu o seu automóvel com GPL num posto da Petro-PT cujo preço por litro, como vimos na questão 1, era de 0,66 euros, e gastou 36,96 euros. Se tivesse abastecido num posto Gás-PT, quanto teria poupado?

Questão 3:

Tal como se previa, ao longo do mês de Agosto de 2008 os preços dos combustíveis sofreram várias alterações. Os preços médios por litro praticados num posto de abastecimento da Combo-PT estão indicados na tabela seguinte:

Combustíveis	Preços médios por litro (08/2008)
Gasóleo	€ 1,37
Gasolina sem Chumbo 95	€ 1,51
GPL	€ 0,62

O gráfico da figura mostra o número de litros de cada um dos combustíveis vendidos neste posto da Combo-PT no mês de Agosto de 2008:



3.1. No total, quantos litros de combustível foram vendidos por este posto da Combo-PT em Agosto de 2008?

3.2. Determina quanto dinheiro recebeu este posto durante este mês pela venda de todo o combustível de que dispunha.

ANEXO II

Questões finais – Ficha de Avaliação

QUESTÕES FINAIS - FICHA DE AVALIAÇÃO

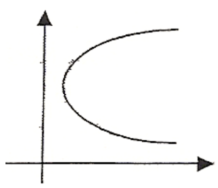
1ª Parte

- As **sete** questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Coloca um círculo em volta da letra que correspondente à alternativa que seleccionares para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresentes cálculos nem justificações.

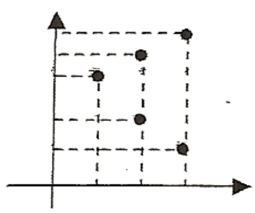
Questão 2:

Qual das correspondências seguintes representa uma função:

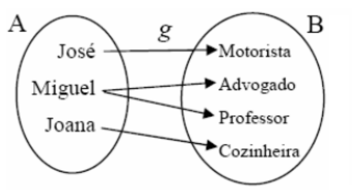
(A)



(B)



(C)



(D)

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	4

2ª Parte

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Questão 4:

O Valdemar viajou de Portugal para Florida. Antes de viajar foi ao banco trocar euros por dólares.

4.1. Sabendo que naquele dia cada dólar lhe custou $0,92$ euros, completa a tabela.

Nº de dólares	0	10		19	
Custo (em euros)			13,8		27,6

4.2. A tabela representa uma função? Justifica.

4.3. Qual é a variável independente? E qual é a dependente?

4.4. Designando por x o nº de dólares e por y o seu custo, completa a expressão: $y = \_\_\_\_ x$.

4.5. As grandezas nº de dólares e custo são directamente proporcionais? Justifica a tua resposta.

4.6. Qual é a constante de proporcionalidade? O que representa no contexto do problema?

4.7. O Valdemar tinha economizado 42,32 euros para gastar nas férias. Quantos dólares pôde comprar com este dinheiro?

4.8. Se tiver gasto 55,2 euros, quantos dólares comprou?

4.9. Constrói um gráfico cartesiano que represente a correspondência registada na tabela anterior.

4.10. Podes confirmar graficamente que se trata de uma relação de proporcionalidade directa? Explica porquê.

Questão 5:

Considera as funções definidas por $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x - 2$; $h(x) = 2x$.

5.1. Calcula $f(0)$ e $g(-1)$.

5.2. Determina o valor de x de modo que $f(x) = -5$.

5.3. Alguma das funções indicadas é de proporcionalidade directa? Justifica.

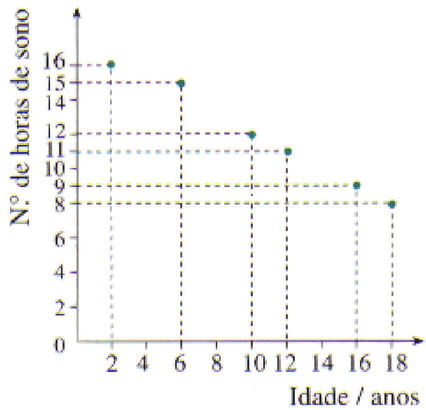
5.4. Representa graficamente a função f.

5.5. Qual é o declive e a ordenada na origem da função f?

5.6. Duas destas funções são representadas por rectas paralelas. Quais? Justifica a tua resposta.

Questão 6:

Na figura está representada graficamente a correspondência *f* que à idade faz corresponder o número de horas de sono.



6.1. De acordo com o gráfico indica:

6.1.1. A idade da Rita, sabendo que precisa de dormir 15 horas.

6.1.2. O número de horas que deve dormir o Manuel, que tem 10 anos.

6.2. Justifica que se trata de uma função.

6.3. Qual a variável independente?

6.4. Qual a variável dependente?

6.5. Indica o domínio e o contradomínio da função.

6.6. Qual é a imagem de 12?

6.7. Qual é o objecto que tem por imagem 16?

ANEXO III

Entrevistas

Guião da Entrevista Inicial

- *Registo da data e da hora do início da gravação.*

- *Questões iniciais:*
  - Por que nome pretendes ser tratado?
  - Que idade tens?
  - Em que ano andas?
  - Como foi o teu percurso escolar?
    - Já repetiste algum ano? Qual?
    - Como te vês a ti mesmo como aluno?
    - A Matemática é uma das disciplinas em que tens melhores resultados ou tens resultados mais fracos? Porque achas que isso acontece?
    - Costumas estudar Matemática em casa? Estudas sozinho ou tens ajuda de alguém? Como fazes para estudar Matemática?
    - Já alguma vez tiveste explicador a Matemática?

- *Resolução da Tarefa I:*

Questão 1:

- Expliquem como se representa um ponto $P(x, y)$ num sistema de eixos ortonormado xOy.
- A que eixo corresponde a coordenada x?
- E a coordenada y?
- Quais são as coordenadas da origem do referencial?

Questão 2:

- O que acontece, relativamente às coordenadas de um ponto, quando há um deslocamento para a esquerda?
- E para a direita?
- E para cima?
- E para baixo?
- O que representa o termo abcissa?
- E ordenada?
- Como calculam a média de três números? E de oito números?

Questão 3:

- Observando uma expressão algébrica, é possível saber se uma grandeza é directamente proporcional a outra grandeza? Como?
- Observando um gráfico, é possível saber se uma grandeza é directamente proporcional a outra grandeza?
- O que é a constante de proporcionalidade? O que representa?

- *Questões finais:*
  - Acharam fáceis ou difíceis as tarefas que realizaram nesta entrevista?
  - Que dificuldades sentiram?
  - Houve alguma que tivessem gostado mais de fazer? Porquê?

- *Registo da hora do final da gravação.*

Tarefa - Entrevista Inicial

Questão 1:

Para localizar pontos no plano podemos utilizar um referencial cartesiano. Este é constituído por dois eixos, perpendiculares entre si, que se cruzam num ponto a que se chama origem do referencial. Cada um desses eixos tem uma orientação, indicada por uma seta, e uma graduação, como podes observar na figura 1:

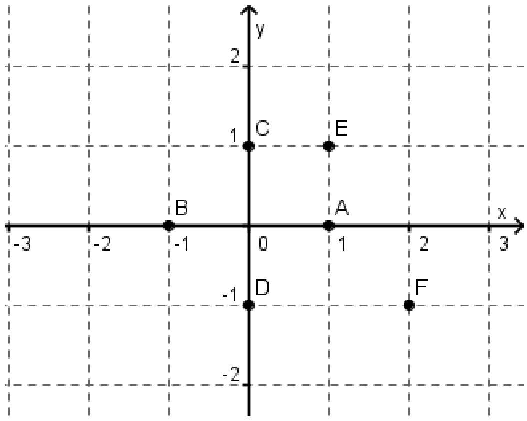


Figura 1

1.1. Imagina que te encontras na origem do referencial. Descreve como te deslocas desse ponto até ao ponto A efectuando apenas deslocamentos na horizontal e/ou na vertical.

1.2. Descreve, igualmente, como te deslocas da origem do referencial para os pontos B, C, D, E e F fazendo o mesmo tipo de deslocamentos.

1.3. Escreve as coordenadas dos pontos B, C, D, E e F representados no referencial da figura 1.

1.4. Observa as coordenadas dos pontos assinalados no referencial da figura 1 e indica:

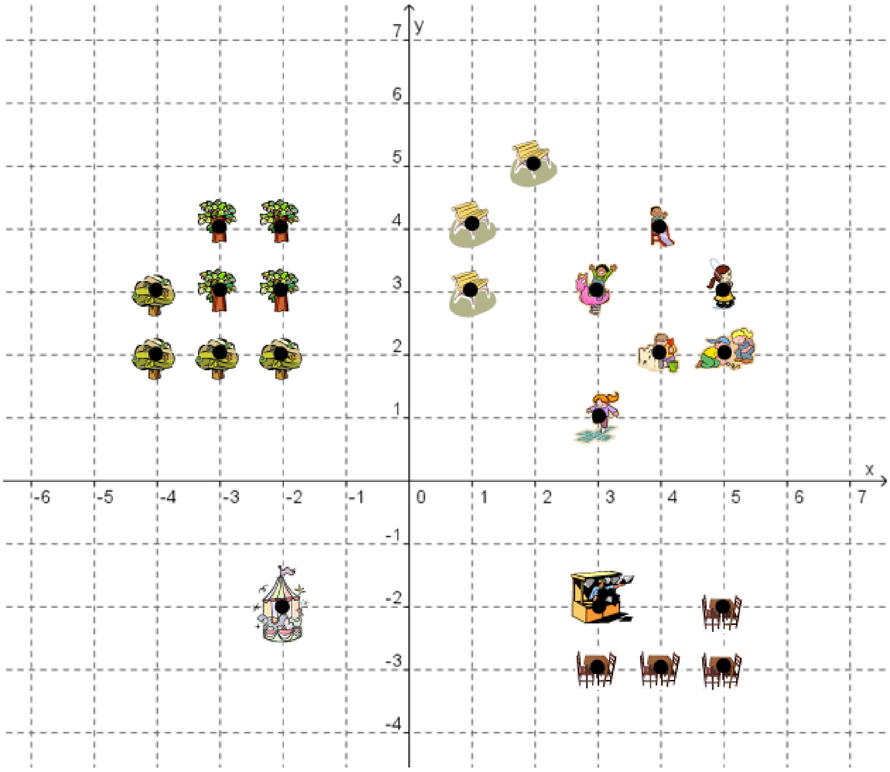
a) Todos os pontos que têm a mesma ordenada;

b) Todos os pontos que têm a mesma abcissa;

c) Todos os pontos que têm a abcissa igual à ordenada.

Questão 2:

A figura representa um parque infantil num referencial cartesiano. Deves deslocar-te pelo parque de acordo com as instruções do mapa do tesouro e registar as coordenadas dos pontos correspondentes ao final de cada etapa. Com essas coordenadas descobrirás o local onde se encontra o tesouro.



Partida – Coloca o teu peão na origem do referencial.

Etapa 1 – Desloca-te duas unidades para a esquerda.

Etapa 2 – Desloca-te até à árvore mais próxima.

Etapa 3 – Avança 5 unidades para a direita e desloca-te 1 unidade para baixo.

Etapa 4 – Vai comprar uma revista ao quiosque.

Etapa 5 – Vai até à zona dos bancos de jardim que está acima do parque infantil e senta-te no banco mais afastado da origem do referencial.

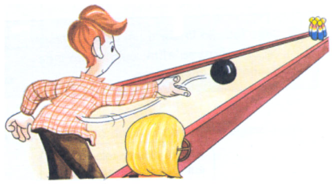
Final – Vai até ao local do tesouro.

Etapas	**Coordenadas**
Partida	(0,0)
Etapa 1	
Etapa 2	
Etapa 3	
Etapa 4	
Etapa 5	
Final	X (x, y)

O tesouro está no ponto X. A abcissa deste ponto é igual à soma das abcissas dos pontos correspondentes ao final de cada etapa. A sua ordenada é igual à média aritmética das ordenadas desses pontos. Indica as coordenadas do ponto X, onde está o tesouro.

Questão 3:

No Domingo, o Jorge e a Vera decidiram ir jogar bowling no clube Bolex. Na recepção foram informados que teriam de pagar 3,75 euros por cada jogo realizado. Resolveram então fazer uma tabela que relacionasse o preço a pagar com o número de jogos realizados.



3.1. Indica quanto terá de pagar se pretender jogar 9 jogos.

3.2. Na carteira, o Jorge tem 18,75 euros e a Vera tem 11,25 euros. Querem realizar um campeonato. Quantos jogos podem realizar?

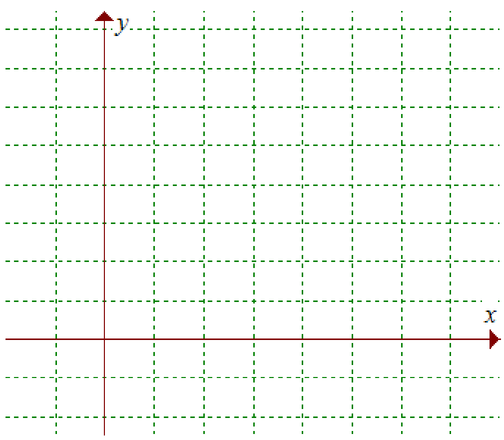
3.3. Completa a tabela seguinte:

Número de Jogos	1	2		4		
Preço (euros)			37,50		18,75	11,25

3.4. O preço a pagar é directamente proporcional ao número de Jogos a efectuar. Explica porquê, indica qual é a constante de proporcionalidade e qual o seu significado.

3.5. Se x representar o número de jogos realizados e y representar o preço em euros, completa a expressão algébrica que traduz essa relação de proporcionalidade: $y = \_\_\_\_ \times x$. Explica o teu raciocínio.

3.6. Representa graficamente a situação. Podes confirmar graficamente que se trata de uma relação de proporcionalidade directa? Explica porquê.



Guião da Entrevista Final

- *Registo da data e da hora do início da gravação.*
- *Relembra-me o teu nome.*
- *Resolução da Tarefa 2:*

Questão 1:

- Quando é que podemos dizer que temos uma função?
- O que é o domínio de uma função? E o contradomínio?

Questão 2:

- Qual a variável independente? Em que eixo é que se representa esta variável?
- Qual a variável dependente? Em que eixo é que se representa esta variável?
- Qual a expressão geral de uma função de proporcionalidade directa?
- O que é a constante de proporcionalidade?
- O que é um objecto? E uma imagem?
- Qual a representação gráfica de uma função de proporcionalidade directa?

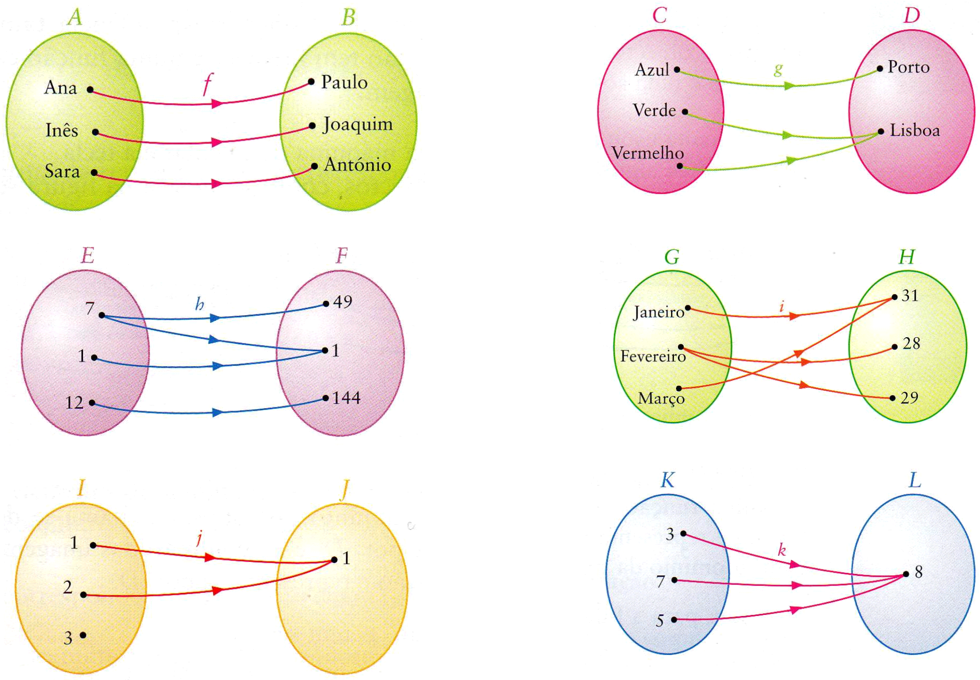
- *Questões finais:*
  - O que pensam sobre as tarefas que realizaram nesta entrevista?
  - Que dificuldades sentiram?
  - Em que aspectos te sentiste mais à vontade?
  - Em relação às tarefas que realizaste em sala de aula, que experiências te marcaram mais? (a que mais gostaram, a que menos gostaram, a que vos pareceu mais simples ou mais complicada)
  - Tens algum comentário a fazer?

- *Registo da hora do final da gravação.*

Tarefa - Entrevista Final

Questão 1:

Considera as seguintes correspondências:



1.1. Quais das seguintes correspondências são funções? Justifica a tua resposta.

1.2. Para cada uma das funções, indica o domínio e o contradomínio.

Questão 2:

O Salvador comprou uma embalagem de bifes de frango. Na etiqueta lia-se:

2.1. A correspondência entre Peso e Preço é uma função? Justifica.

2.2. Completa a tabela:

Peso (gramas)	100	200		600	
Preço (euros)			2,72		6,80

2.3. Qual é a variável independente? E qual é a dependente?

2.4. As grandezas peso e preço são directamente proporcionais? Justifica a tua resposta.

2.5. Designando por x o peso e por y o preço a pagar, completa a expressão: $y = \_\_\_\_ x$.

2.6. Qual é a constante de proporcionalidade? O que representa no contexto do problema?

2.7. Quanto custa uma embalagem de bifes de frango com o peso de 2 kg?

2.8. Se pagar 5,44 euros, qual o peso da embalagem comprada?

2.9. Qual o objecto que tem por imagem 9,18?

2.10. Qual a imagem de 1600?

2.11. Para $x = 0$, qual é o valor de y?

2.12. Constrói um gráfico cartesiano que represente a correspondência registada na tabela anterior.

2.13. Podes confirmar graficamente que se trata de uma relação de proporcionalidade directa? Explica porquê.

ANEXO IV

Autorizações

Pedido de Autorização – Conselho Executivo

Exmo(a). Sr(a).
Presidente do Conselho Executivo
da Escola ____________________

Eu, Anabela Fernandes Ferreira Candeias, professora do grupo 500, venho solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o projecto de investigação em educação intitulado "Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *software* GeoGebra". Este projecto visa dar novos contributos sobre o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo o uso de tecnologias, pode contribuir para a aprendizagem das funções, em alunos do 8.º ano de escolaridade, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto implicará a recolha de dados de alunos do 8.º ano, referentes à disciplina que lecciono. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 8.º __, ao longo do 2º Período nas diversas tarefas propostas. Serão objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interacções geradas entre eles; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os encarregados de educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento, para possibilitar a participação dos alunos que nele pretendam vir a colaborar.

11 de Novembro de 2008
Pede deferimento,

____
(Anabela Fernandes Ferreira Candeias)

Comunicação – Grupo Disciplinar

Exma. Sra.
Coordenadora do Grupo 500

Eu, Anabela Fernandes Ferreira Candeias, professora de Matemática do 8.º __, venho comunicar que esta turma irá participar, durante o 2.º Período, no projecto de investigação em educação intitulado "Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *software* GeoGebra". Este projecto visa dar novos contributos sobre o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo o uso de tecnologias, pode contribuir para a aprendizagem das funções, em alunos do 8.º ano de escolaridade, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto encontra-se deferida pelo Conselho Executivo, em comunicação datada de 20 de Novembro de 2008. Os objectivos do estudo serão, também, dados a conhecer à Directora de Turma do 8.º __, aos alunos e aos encarregados de educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respectivos encarregados de educação serão duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 8.º __, devidamente autorizados, sendo objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interacções geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respectivos encarregados de educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.
Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes neste processo.

15 de Dezembro de 2008

A professora de Matemática,

Tomei Conhecimento:
A Coordenadora Grupo 500

Comunicação – Directora de Turma

Exma. Sra.
Directora de Turma do 8.º __

Eu, Anabela Fernandes Ferreira Candeias, professora de Matemática do 8.º __, venho comunicar que a turma irá participar, durante o 2.º Período, no projecto de investigação em educação intitulado "Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *software* GeoGebra". Este projecto visa dar novos contributos sobre o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo o uso de tecnologias, pode contribuir para a aprendizagem das funções, em alunos do 8.º ano de escolaridade, e integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projecto encontra-se deferida pelo Conselho Executivo, em comunicação datada de 20 de Novembro de 2008. Os objectivos do estudo serão, também, dados a conhecer ao grupo disciplinar de Matemática, aos alunos e aos Encarregados de Educação. O interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respectivos Encarregados de Educação serão duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 8.º __, devidamente autorizados, sendo objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interacções geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respectivos Encarregados de Educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes.

15 de Dezembro de 2008

A professora de Matemática

____

Tomei Conhecimento:

A Directora de Turma do 8.º __,

____

Pedido de Autorização – Encarregados de Educação

Exmo. Sr.
Encarregado de Educação

Eu, Anabela Fernandes Ferreira Candeias, professora de Matemática do 8.º __, venho comunicar que pretendo realizar com esta turma, durante o 2.º Período, um projecto de investigação em educação intitulado "Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *software* GeoGebra". Este projecto visa dar novos contributos sobre o modo como a resolução de tarefas com carácter exploratório e investigativo, envolvendo o uso de tecnologias, pode contribuir para a aprendizagem das funções, em alunos deste ano de escolaridade.

Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo com grande probabilidade resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, nomeadamente no campo da Álgebra. No entanto, o interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respectivos encarregados de educação (preenchendo e assinando a ficha anexa), são duas condições essenciais para que se efective a sua participação neste projecto.

O trabalho a realizar terá por base o desempenho dos alunos do 8.º __, devidamente autorizados, sendo objecto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das discussões geradas entre alunos; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização destas entrevistas decorrerá, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respectivos encarregados de educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objectivo desta investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Os alunos participantes e os respectivos encarregados de educação serão informados, ao longo do 2.º Período ou sempre que considerem necessitar de algum esclarecimento adicional, sobre o modo como estão a decorrer as actividades.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes neste processo,

15 de Dezembro de 2008

A professora de Matemática,

____

(Anabela Fernandes Ferreira Candeias)

Autorização

Eu, encarregado de Educação do(a) aluno(a) ____________________________, n.º ____, da turma __, do 8ºano de escolaridade, tomei conhecimento dos objectivos do projecto de investigação em educação intitulado "Aprendizagem das funções no 8.º ano com o auxílio do *software* GeoGebra", que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 2.º Período, e __________________________ (autorizo/não autorizo) a participação do meu educando.

Relativamente às entrevistas realizadas, ou a outras actividades que envolvam o meu educando, no âmbito deste projecto de investigação, ________________________ (autorizo/não autorizo) a sua gravação em áudio e/ou vídeo e uso para efeitos de investigação, com a salvaguarda do respectivo anonimato.

Ourique, _____ de __________________ de 2009

O Encarregado de Educação

____