Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Imersões Isométricas
de Variedades de Kähler em Variedades com Curvatura Holomorfa Constante

Cláudia Vicente Bicho

Dissertação
Mestrado em Matemática

2013

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Imersões Isométricas
de Variedades de Kähler em Variedades com Curvatura Holomorfa Constante

Cláudia Vicente Bicho

Dissertação
Mestrado em Matemática

Dissertação orientada por
Maria João Pablo da Trindade Ferreira

2013

Resumo

O objectivo principal desta dissertação é o estudo das imersões isométricas, particularmente as que estão definidas em variedades de Kähler, com valores em variedades de curvatura holomorfa constante não nula. Nesse sentido, apresentam-se conceitos e resultados de imersões isométricas, focados no conceito de nulidade relativa. Estudam-se ainda as propriedades de estruturas complexas, variedades complexas e variedades de Kähler. O teorema, cuja demonstração termina este trabalho, (por Marcos Dajczer e Lucio Rodríguez) centra-se nas imersões isométricas com nulidade relativa não nula em todos os pontos e afirma que as imersões que gozam dessa propriedade são as aplicações holomorfas.

Palavras-Chave: curvatura holomorfa, estrutura complexa, imersão isométrica, nulidade relativa, variedades Kähler

Abstract

The main goal of this dissertation is the study of isometric immersions, particularly those defined on Kähler manifolds with values on manifolds of non-zero constant holomorphic curvature. With that in mind, are presented concepts and results on isometric immersions, with special focus on the concept of relative nulity. There's also the study of properties of complex structures, complex manifolds and Kähler manifolds. The theorem, which proof ends this work, (by Marcos Dajczer and Lucio Rodríguez) focus on isometric immersions with non-zero relative nulity at all points and states that immersions with that property are the holomorphic maps.

Key-words: complex structure, holomorphic curvature, isometric immersion, Kähler manifolds, relative nulity

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação não teria sido possível sem o apoio e incentivo de diversas pessoas ao longo da minha vida.

A todos professores que, ao longo do meu percurso académico, me ajudaram e desafiaram permitindo-me ser melhor a cada etapa. Particularmente, aos professores do Departamento de Matemática da FCUL pelo incentivo a seguir em frente nos últimos anos. E em especial, à minha orientadora, Professora Maria João Pablo, pelo apoio, dedicação e disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais, irmã, namorado e amigos que, com compreensão, me auxiliam e apoiam, principalmente nos momentos mais difíceis.

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação vão ser exploradas as imersões isométricas de uma variedade de Kähler numa variedade de curvatura holomorfa constante não nula. O resultado principal, que, ao longo do texto, será denominado *"Teorema de Dajczer-Rodríguez"*, afirma que as imersões isométricas estudadas, com nulidade relativa positiva em todos os pontos do domínio, são aplicações holomorfas. A demonstração deste resultado que é aqui apresentada foi baseada no artigo *"On Isometric Immersions into complex space forms"* de Marcos Dajczer e Lucio Rodríguez (ver [5]).

A leitura deste trabalho pressupõe familiaridade com conceitos de variedades diferenciáveis e riemannianas e conhecimento de resultados básicos de geometria riemanniana. Apesar disso, no primeiro capítulo será feita uma breve apresentação dos conceitos e resultados utilizados ao longo do texto, de modo a proporcionar um acompanhamento aos leitores com menos preparação nesta área e introduzir as notações e convenções escolhidas. Serão portanto apresentados conceitos e resultados de geometria riemanniana introdutória com especial foco nas equações fundamentais das imersões isométricas (*Equação de Gauss*, *Equação de Coddazzi* e *Equação de Ricci*).

No segundo capítulo será aprofundado o estudo das imersões isométricas, começando, na primeira secção, com o enunciado do teorema fundamental para subvariedades (que afirma que as três equações referidas acima caracterizam a imersão). De seguida é apresentado o estudo da folheação da nulidade relativa, numa imersão isométrica com valores numa variedade riemanniana de curvatura seccional constante. Será apresentado o conceito de *nulidade relativa* e serão demonstrados resultados relacionados com a completude das folhas e o índice de nulidade relativa mínima.

No terceiro capítulo apresentar-se-á o estudo das variedades complexas e de Kähler. Começando com o conceito de estrutura complexa num espaço vectorial, serão estudadas as propriedades das variedades e conexões afim complexas e quase complexas, seguidas dos conceitos de métricas hermitiana e de Kähler. O capítulo termina com a definição de curvatura seccional holomorfa.

No quarto e último capítulo é apresentada, de início, uma secção sobre a curvatura de subvariedades de Kähler. Seguidamente, faz-se, então, a demonstração do *"Teorema de Dajczer-Rodríguez"* e termina-se este texto com uma consequência imediata deste teorema, na última secção.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vão ser apresentados alguns resultados e fórmulas básicas de geometria riemanniana de modo a apoiar a compreensão do trabalho a um leitor mais inexperiente e apresentar notações que vão ser utilizadas ao longo de todo o texto.

1.1 Conceitos Básicos

Represente-se por $\bigotimes^n T^*M$ (respectivamente, $\bigotimes^n T^*M \otimes TM$) o fibrado cuja fibra num ponto x é constituída pelo conjunto das aplicações n-lineares $T_xM \times \cdots \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $T_xM \times \cdots \times T_xM \longrightarrow T_xM$). E represente-se por $\Gamma(\bigotimes^n T^*M)$ (respectivamente, $\Gamma(\bigotimes^n T^*M \otimes TM)$) o conjunto das secções do mesmo fibrado.

Seja M uma variedade riemanniana de dimensão n e sejam X, Y, Z, W campos vectoriais em M.

Definição 1.1.1. Define-se a *curvatura* R de M como o tensor $R \in \Gamma(\otimes^3 T^*M \otimes TM)$ definido por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Proposição 1.1.2. *A curvatura R de uma variedade riemanniana goza da seguinte propriedade: Para cada par de campos vectoriais X, Y em M, o operador $R(X,Y) : TM \longrightarrow TM$ que a cada campo vectorial Z associa o campo vectorial $R(X,Y)Z$ é linear.*

Proposição 1.1.3 (Identidade de Bianchi)**.**

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Definição 1.1.4. Considere-se a seguinte notação para o tensor $R \in \Gamma(\otimes^4 T^* M)$ dado por:

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(Z,W)Y, X\rangle$$

para X, Y, Z, W campos vectoriais em M, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica da variedade riemanniana M.
A este tensor dá-se o nome de *tensor curvatura riemanniana.*

Proposição 1.1.5. *O tensor curvatura riemanniana satisfaz:*

1. $R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0$;
2. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;
3. $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;
4. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

Sejam $X, Y \in T_xM$, $\{X = V_1, \ldots, V_n\}$ uma base ortonormal de T_xM em $x \in M$.

Definição 1.1.6. Define-se a *curvatura de Ricci* na direcção X como:

$$\operatorname{Ric}(X) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(V_i, X)X, V_i \rangle$$

Definição 1.1.7. Define-se o *tensor de Ricci* de M como:

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \operatorname{tr}(Z \longrightarrow R(Z, X)Y)$$

Tem-se

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(V_i, X)Y, V_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} R(V_i, Y, V_i, X)$$

e, consequentemente

$$\operatorname{Ric}(X) = \operatorname{Ric}(X, X)$$

1.2 As Equações Fundamentais das Imersões Isométricas

Sejam M e $\tilde{M}$ variedades diferenciáveis de dimensão n e $m = n + p$ respectivamente.

Definição 1.2.1. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ diz-se uma *imersão* se a derivada $df(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}\tilde{M}$ é injectiva para todo o $x \in M$.

A $p = m - n$ chama-se a *codimensão* de f.

Se M e $\tilde{M}$ forem variedades riemannianas com métricas g_M e $g_{\tilde{M}}$, respectivamente, uma imersão $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ diz-se uma *imersão isométrica* se $g_M(X, Y)(x) = g_{\tilde{M}}(df(x)X, df(x)Y)$, para cada $x \in M$ e cada $X, Y \in T_xM$.

Relembre-se que, se $g_{\tilde{M}}$ é uma métrica riemanniana em $\tilde{M}$, $g_{\tilde{M}} \in \Gamma(\bigotimes^2 T^*\tilde{M})$. Então, se $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ é uma imersão pode definir-se uma métrica g_M em M fazendo, em cada ponto $g_M(X,Y) = f^{-1}g_{\tilde{M}}(X,Y)$, onde, $\forall \eta \in \Gamma(\bigotimes^2 T^*\tilde{M})$ e para cada x, $f^{-1}\eta \in \Gamma(\bigotimes^2 T^*M)$ define-se como:

$$f_x^{-1}\eta(X,Y) = \eta(df(x)(X), df(x)(Y))$$

Assim, a imersão f torna-se uma imersão isométrica.

Seja $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ uma imersão isométrica. Em cada $x \in M$, há uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f a U é um mergulho para $f(U)$. Logo, U pode ser identificado com a sua imagem por f, isto é, f é, localmente, a aplicação inclusão. Então, o espaço tangente a M em x pode ser considerado como um subespaço do espaço tangente a $\tilde{M}$ em x e pode escrever-se:

$$T_x\tilde{M} = T_xM \oplus T_xM^{\perp}$$

onde $T_xM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_xM em $T_x\tilde{M}$.

Definição 1.2.2. Dá-se o nome de *fibrado normal a M* ao fibrado vectorial sobre M definido por

$$TM^{\perp} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM^{\perp} = \{(x,v) : x \in M, v \in T_xM^{\perp}\}$$

Então, tem-se o fibrado vectorial, denominado fibrado vectorial imagem recíproca:

$$T\tilde{M}_{|_{f(M)}} = \{X \in T\tilde{M} : \Pi(X) \in f(M), \text{ onde } \Pi : T\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M} \text{ é a projecção}\}$$

isto é, $T\tilde{M}_{|_{f(M)}}$ é o fibrado vectorial sobre M cuja fibra em x é $T_x\tilde{M} = T_xM \oplus T_xM^{\perp}$, $\forall x \in M$. Desta forma, o fibrado $T\tilde{M}_{|_{f(M)}}$ é a soma de Whitney do fibrado tangente a TM com $TM^{\perp}$, isto é,

$$T\tilde{M}_{|_{f(M)}} = TM \oplus_W TM^{\perp}$$

Em relação a esta decomposição, têm-se as projecções

$$\begin{aligned} (\ )^T &: T\tilde{M}_{|_{f(M)}} \longrightarrow TM \\ (\ )^{\perp} &: T\tilde{M}_{|_{f(M)}} \longrightarrow TM^{\perp} \end{aligned}$$

a que se dá o nome de tangencial e normal, respectivamente.

Seja $\tilde{M}$ uma variedade riemanniana com dimensão $n+p$ e conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ e seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica.
Dados campos vectoriais $X,\ Y \in TM$, tem-se

$$\tilde{\nabla}_X Y = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^T + \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{\perp}$$

Vem facilmente da unicidade da conexão de Levi-Civita que $\left(\tilde{\nabla}\right)^T$ é a conexão de Levi-Civita de M e vai ser notada por ∇.

Logo, obtém-se

Fórmula de Gauss.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \tag{1.2.1}$$

que define uma aplicação α chamada a *segunda forma fundamental* de f, onde $\alpha \in \Gamma(\bigodot^2 T^*M \otimes T^{\perp}M)$, isto é, α é secção do fibrado cuja fibra em x é o conjunto das aplicações bilineares simétricas $T_xM \times T_xM \longrightarrow T_x^{\perp}M$.
A simetria e bilinearidade de α sobre o anel $C^{\infty}(M)$ das funções diferenciáveis em M conclui-se imediatamente das propriedades das conexões de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ e ∇.

Tem-se que para cada $x \in M$ e $X,\ Y \in TM$, a aplicação $\alpha_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM^{\perp}$, dada por $\alpha_x(X, Y) = \alpha(X, Y)(x)$ depende só dos valores de X e Y em x.

Definição 1.2.3. Quando a segunda forma fundamental é identicamente nula em $x \in M$, diz-se que f é *totalmente geodésica em* $x \in M$.

Diz-se que f é uma *imersão totalmente geodésica* quando é totalmente geodésica em todos os pontos de M. Neste caso, é um facto interessante que as geodésicas de M são geodésicas de $\tilde{M}$.

Considerem-se os campos vectoriais X de TM e ξ de $TM^{\perp}$ e note-se por $A_{\xi}X$ a componente tangencial de $-\tilde{\nabla}_X\xi$, isto é,

$$A_{\xi}X = -\left(\tilde{\nabla}_X\xi\right)^T$$

Visto que para todo o $Y \in TM$, se tem $0 = X\langle\xi, Y\rangle = \langle\tilde{\nabla}_X\xi, Y\rangle + \langle\xi, \tilde{\nabla}_X Y\rangle$, vem

$$\langle A_{\xi}X, Y\rangle = \langle\alpha(X, Y), \xi\rangle$$

Em particular, $A : TM^{\perp} \longrightarrow Hom(TM, TM)$[1] é um tensor definido por $A(\xi) = A_{\xi}X$.
A aplicação $A_{\xi} : TM \longrightarrow TM$ é também simétrica, i.e., $\langle A_{\xi}X, Y\rangle = \langle X, A_{\xi}Y\rangle$ para todo $X,\ Y \in TM$.

A aplicação A_{ξ} é chamado o *operador de Weingarten* (ou, por abuso de linguagem, a segunda forma fundamental na direcção normal ξ).

É fácil de ver que a componente normal de $\tilde{\nabla}_X\xi$, que é notada por $\nabla^{\perp}_X\xi$, define uma conexão compatível no fibrado normal $TM^{\perp}$.

Diz-se que $\nabla^{\perp}$ é a *conexão normal* de f, e obtém-se

Fórmula de Weingarten.

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -A_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X\xi \tag{1.2.2}$$

[1]Dados E e F fibrados vectoriais sobre M, $Hom(E, F)$ representa o fibrado cuja fibra em x é o conjunto dos homomorfismos $E_x \longrightarrow F_x$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, derivam-se as equações básicas para uma imersão isométrica, nomeadamente as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Equação de Gauss.

$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$

onde R e $\tilde{R}$ são os tensores curvatura de M e $\tilde{M}$, respectivamente.

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ e $\tilde{K} = \langle \tilde{R}(X,Y)Y,X\rangle$ forem as curvaturas seccionais em M e $\tilde{M}$ dos planos gerados pelos vectores ortogonais $X,\ Y \in T_xM$, a equação de Gauss vem

$$K(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle - \parallel \alpha(X,Y) \parallel^2$$

Equação de Codazzi.

$$\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\nabla^{\perp}_X \alpha\right)(Y,Z) - \left(\nabla^{\perp}_Y \alpha\right)(X,Z)$$

onde, por definição

$$\left(\nabla^{\perp}_X \alpha\right)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

Aqui, $\nabla^{\perp}$ pode ser visto como uma conexão no fibrado vectorial $Hom(TM \times TM \times TM^{\perp})$.

Seja $R^{\perp}$ o tensor curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, isto é,

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

para todo $X,\ Y \in TM^{\perp}$.

Vem das fórmulas de Gauss e Weingarten que a componente normal de $\tilde{R}(X,Y)\xi$ satisfaz a

Equação de Ricci.

$$\left(\tilde{R}(X,Y)\xi\right)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y)$$

A equação de Ricci também pode ser escrita como

$$\langle \tilde{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$$

onde $X,\ Y \in TM$, $\xi,\ \eta \in TM^{\perp}$ e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

Analogamente, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$\left(\tilde{R}(X,Y)\xi\right)^{T} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi)$$

onde, por definição

$$(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^T \xi} X$$

De seguida, escrevam-se as equações de uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}_c^{n+p}$ onde, de aqui em diante, $\tilde{M}_c$ nota uma variedade com curvatura seccional constante c.
Neste caso, o tensor curvatura $\tilde{R}$ de $\tilde{M}$ é dado por

$$\tilde{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$$

para todo $X,\ Y \in T\tilde{M}$, onde, $\forall Z \in T\tilde{M}$, $(X\wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$.

Então, para $X,\ Y,\ Z,\ W \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$, a equação de Gauss mantém-se e as equações de Codazzi e Ricci são, respectivamente,

(i) $(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z)$ ou, de forma equivalente,
$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi)$

(ii) $R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)$ ou, de forma equivalente,
$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$

Vamos agora ver como ficam estas equações no caso de hipersuperfícies. Seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e seja $x \in M$.
Dado $X \in T_xM$, $Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$, é fácil ver que a *Fórmula de Gauss* fica

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y\rangle \xi$$

Por outro lado, visto que ξ é um campo vectorial unitário normal, tem-se $\langle \tilde{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$, logo $\nabla^{\perp}_X \xi = 0 \ \forall X \in TM$.

Então, a *fórmula de Weingarten* fica

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X$$

Usando o facto que $\alpha(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle \xi$, vê-se que as equações de Gauss e Codazzi podem ser escritas como

(i)

$$R(X,Y)Z = \left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^T + \left(A_\xi X \wedge A_\xi Y\right) Z$$

(ii)

$$\left(\tilde{R}(X,Y)\xi\right)^T = \left(\nabla_Y A_\xi\right) X - \left(\nabla_X A_\xi\right) Y$$

onde, por definição,

$$\left(\nabla_X A_\xi\right) Y = \nabla_X \left(A_\xi Y\right) - A_\xi \nabla_X Y$$

No caso em que $\tilde{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente,

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y) + A_\xi X \wedge A_\xi Y$$

e

$$\left(\nabla_X A_\xi\right) Y = \left(\nabla_Y A_\xi\right) X$$

Viu-se, portanto, que uma imersão isométrica verifica as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

No próximo capítulo será apresentado o resultado que diz que as mesmas três equações são suficientes para caracterizar uma imersão isométrica com valores numa variedade riemanniana de curvatura seccional constante.

Capítulo 2

Imersões Isométricas

2.1 Teorema Fundamental das Subvariedades

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental das Subvariedades).
Seja M^n uma variedade riemanniana simplesmente conexa.
Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vectorial de característica p munido de uma estrutura riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com conexão compatível ∇'.
Seja $\alpha \in \Gamma(\bigotimes^2 T^*M \times E)$ simétrica.
Defina-se, para cada secção ξ de E, um morfismo de fibrados vectoriais $A_\xi : TM \longrightarrow TM$ por

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle, \qquad X, Y \in TM$$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c, então existe uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow Q_c^{n+p}$ (Q_c^{n+p} representa uma variedade riemanniana de dimensão $n+p$ completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante c) e um isomorfismo de fibrados vectoriais $\tilde{f} : E \longrightarrow TM^\perp$ ao longo de f de tal forma que $\forall X, Y \in TM$ e $\forall \xi, \eta$ secções locais de E,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\
\tilde{f}\alpha(X, Y) &= \tilde{\alpha}(X, Y) \\
\tilde{f}\nabla'_X \xi &= \nabla^\perp_X \tilde{f}(\xi)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}$ e $\nabla^\perp$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

Uma demonstração deste teorema pode ver-se em [3].

2.2 Folheação da Nulidade Relativa

Definição 2.2.1. Seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica e seja x ponto de M.
Defina-se o subespaço de T_xM:

$\Delta(x) = \{X \in T_xM : \alpha(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_xM\}$ é o *subespaço de nulidade relativa de f em x.*

A dimensão $\nu(x)$ de $\Delta(x)$ diz-se o *índice de nulidade relativa* de f em x.

Relembrem-se as definições:

Definição 2.2.2. Seja M uma variedade riemanniana.
D diz-se uma *distribuição* de M se D é um subfibrado vectorial de TM.
D diz-se uma distribuição *involutiva* se, sempre que $X, \ Y \in \Gamma(D)$, se tem $[X,Y] \in \Gamma(D)$
D diz-se uma distribuição *integrável* se, $\forall x \in M$, existe uma subvariedade N de M tal que $x \in N$ e $\forall y \in N$ se tem $T_yN = D_y$.
Note-se que toda a distribuição integrável é involutiva.
Também se tem que uma distribuição involutiva é localmente integrável. (Ver [9])

Seja M^n uma variedade riemanniana e seja D uma distribuição suave definida num subconjunto aberto $U \subset M$. Considere-se D involutiva e com folhas totalmente geodésicas.

Defina-se $D^\perp$ em U : $x \in U \longmapsto D_x^\perp$, o subfibrado de TM cuja fibra em x é $D_x^\perp$.

A cada $X \in D$ associa-se um morfismo de fibrados $C_X : D^\perp \longrightarrow D^\perp$, $C_XY = -P(\nabla_Y X)$, onde $P : TU \longrightarrow D^\perp$ é a projecção ortogonal.
Obtém-se deste modo o morfismo de fibrados $C : D \longrightarrow Hom(D^\perp, D^\perp)$.

Pode considerar-se $C : D \times D^{\perp} \longrightarrow D^{\perp}$, $C(X,Y) = C_X Y$ para $X \in D$, $Y \in D^{\perp}$ e tem-se que $C(X,Y)$ é um tensor:
Seja $h \in C^{\infty}(U)$.

$$\begin{aligned} C(hX,Y) &= C_{hX}Y = -P(\nabla_Y hX) = -P(Y(h)X + h\nabla_Y X) = \\ &= -(Y(h)X + h\nabla_Y X)^{\perp} = -(Y(h)X)^{\perp} - (h\nabla_Y X)^{\perp} = \\ &= -hP(\nabla_Y X) = hC_X Y = hC(X,Y) \\ C(X,hY) &= C_X hY = -P(\nabla_{hY}X) = -P(h\nabla_Y X) = hC_X Y = hC(X,Y) \end{aligned}$$

Note-se que, dados $X, Y \in D^{\perp}$,

$$\begin{aligned} C_X Y = C_Y X &\Leftrightarrow -P(\nabla_Y X) = -P(\nabla_X Y) \\ &\Leftrightarrow P(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X \in D^{\perp} \end{aligned}$$

ou seja, $D^{\perp}$ é involutiva se e só se C_X é simétrica $\forall X \in D$.

Neste caso, C_X é precisamente o operador forma na direcção X da inclusão das folhas de $D^{\perp}$ em M.

Sejam $Z \in D$ e Y secção de $D^{\perp}$. Visto que $\nabla_Z W \in D \; \forall W \in D$, tem-se:

$$0 = Z\langle Y, W\rangle = \langle \nabla_Z Y, W\rangle \tag{2.2.1}$$

e, logo $\nabla_Z Y \in D^{\perp}$ $\forall Z \in D$, Y secção de $D^{\perp}$.

Em particular, a derivada covariante de TM induz naturalmente uma derivada covariante no fibrado vectorial $D^* \otimes Hom(D^{\perp}, D^{\perp})$ sobre M. Para $Z \in D$, X secção de D, Y secção de $D^{\perp}$, tem-se:

$$(\nabla_Z C_X)Y = \nabla_Z(C_X Y) - C_X \nabla_Z Y$$

Proposição 2.2.3. *O operador $C_{\gamma'}$ ao longo de uma geodésica γ contida numa folha de D satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{D}{dt}C_{\gamma'} = C_{\gamma'}^2 + P(R(\cdot, \gamma')\gamma')$$

Demonstração. Seja Y secção de TM, $Z \in D$.
Usando a conclusão de (2.2.1), vem que $\nabla_Z P(Y) \in D^\perp$.
Também se tem $\nabla_Z(Y - P(Y)) \in D$.
Logo, $P(\nabla_Z Y) = P\left(\nabla_Z(Y - P(Y)) + \nabla_Z P(Y)\right) = \nabla_Z P(Y)$

Considere-se $X = \dfrac{d\gamma}{dt}$ e seja Y secção de $D^\perp$.
Ao longo de γ, tem-se:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X C_X)\,Y &= \nabla_X(C_X Y) - C_X(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X\left(-P(\nabla_Y X)\right) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= -P(\nabla_X \nabla_Y X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X) \\
&= P\big(R(Y,X)X - \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[Y,X]} X\big) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X) \\
&= P\left(R(Y,X)X\right) - P(\nabla_Y \nabla_X X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X) \\
&= P\left(R(Y,X)X\right) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X)
\end{aligned}$$

Visto que

$$P(\nabla_{\nabla_Y X} X) = P\left(\nabla_{P(\nabla_Y X)} X\right) = -C_{\gamma'} P(\nabla_Y X) = C_{\gamma'}^2 Y$$

obtém-se

$$\left(\frac{D}{dt} C_{\gamma'}\right) Y = C_{\gamma'}^2 Y + P\left(R(Y, \gamma')\gamma'\right)$$

$\square$

Seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica.
Note-se por ν_0 o *índice de nulidade relativa mínima* de f:

$$\nu_0(x) = \min_{x \in M} \nu(x)$$

Proposição 2.2.4. *Seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Tem-se:*

(i) Em qualquer subconjunto aberto onde ν é constante, $x \longmapsto \Delta(x)$ é uma distribuição chamada a distribuição de nulidade relativa.

(ii) O conjunto $\theta = \{x \in M : \nu(x) = \nu_0\}$ é aberto.

Demonstração.

(i) Assuma-se $\dim \Delta(x) = m$ para todos os pontos $x \in U$, onde U é um aberto de M.
Dado $Y \in \Delta(x)$, tem-se $\alpha(X,Y) = 0\ \forall X \in T_xM$. Logo $\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle A_\xi X, Y \rangle = 0\ \forall X \in T_xM\ \forall \xi \in T_x^\perp M$. Donde $\{A_\xi X\} \in \Delta^\perp(x)$.

Veja-se que os $A_\xi X$ geram $\Delta^\perp(x)$.
Tem-se que $\Delta(x) = \bigcap_{\xi \in T_x^\perp M} \ker A_\xi$. Dada $\xi_1, \ldots, \xi_p$ base de $T_x^\perp M$, vem $\Delta(x) = \bigcap_{i=1}^p \ker A_{\xi_i}$. Então

$$\Delta^\perp(x) = \bigcup_{i=1}^{p} (\ker A_{\xi_i})^\perp \tag{2.2.2}$$

Dada a aplicação linear $A_{\xi_i} : T_xM \longrightarrow T_xM$, tem-se que $\dim \ker A_{\xi_i} + \dim \operatorname{Im} A_{\xi_i} = n \Leftrightarrow \dim \ker A_{\xi_i} = \dim (\operatorname{Im} A_{\xi_i})^\perp$.
De $\{A_\xi X\} \in \Delta^\perp(x)$, visto acima, vem $\ker A_{\xi_i} \subset (\operatorname{Im} A_{\xi_i})^\perp$, logo conclui-se $\ker A_{\xi_i} = (\operatorname{Im} A_{\xi_i})^\perp \Leftrightarrow (\ker A_{\xi_i})^\perp = \operatorname{Im} A_{\xi_i}$.
Voltando a (2.2.2), vem $\Delta^\perp(x) = \bigcup_{i=1}^p \operatorname{Im} A_{\xi_i}$. Logo, $\Delta^\perp(x)$ é o espaço gerado por $\left\{A_\xi X : \forall X \in T_xM,\ \xi \in T_xM^\perp\right\}$.

Visto que $\Delta(x)$ tem dimensão m, vem que $\dim \Delta^\perp(x) = n - m$. Então, dado $x_0 \in U$, existem $X_1, \ldots, X_{n-m} \in T_{x_0}M$ e $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m} \in T_{x_0}^\perp M$ tais que $\Delta^\perp(x_0)$ é o espaço gerado por $\left\{A_{\xi_j} X_j\right\}_{1 \leq j \leq n-m}$.
Tomem-se extensões locais suaves de $X_1, \ldots, X_{n-m}$ e $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}$ em TM e $TM^\perp$, respectivamente.
Por continuidade, os campos vectoriais $\left\{A_{\xi_j} X_j\right\}_{1 \leq j \leq n-m}$ permanecem linearmente independentes numa vizinhança $V \subset U$ de x_0 e, logo, geram $\Delta^\perp$.

Conclui-se que $\Delta^{\perp}$ é uma distribuição suave em U e, logo, Δ também o é.

(ii) Seja $x_0 \in \theta$ e considere-se, como em cima $\Delta^{\perp}(x_0)$ o espaço gerado por $\left\{A_{\xi_j} X_j\right\}_{1\leq j\leq n-\nu_o}$.
Pelo argumento de (i), $\left\{A_{\xi_j} X_j\right\}_{1\leq j\leq n-\nu_0}$ ainda são linearmente independentes numa vizinhança U de x_0.
Então, dado $x \in U$, $\dim \Delta^{\perp}(x) \geq n - \nu_0$.
Se $\dim \Delta^{\perp}(x) > n - \nu_0$, vem $\dim \Delta(x) < \nu_0$, o que é impossível.
Logo $\dim \Delta^{\perp}(x) = n - \nu_0$ e $\dim \Delta(x) = \nu_0$ numa vizinhança de x_0. Donde θ é aberto.

$\square$

Teorema 2.2.5. *Seja $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica e seja $\Theta \subset M$ um conjunto aberto onde o índice de nulidade relativa ν é igual a uma constante m.*
Então, em Θ, tem-se:

(i) A distribuição de nulidade relativa Δ é suave e integrável e as folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\tilde{M}_c^{n+p}$;

(ii) Se $\gamma : [0, b] \longrightarrow M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0, b[)$ está contida numa folha de Δ, então $\nu(\gamma(b)) = m$;

(iii) As folhas da distribuição de nulidade relativa mínima são completas sempre que M é completa.

Antes de demonstrar o teorema, veja-se o seguinte lema, nas condições do teorema:

Lema 2.2.6. *Para cada $W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0))$, existe um único campo vectorial Y ao longo de $\gamma_{|[0,b[}$ tal que*

(1) $Y(0) = W$;

(2) $\dfrac{D}{dt}Y + C_{\gamma'}Y = 0$, $0 \leq t < b$

e Y estende-se de forma suave a $t = b$.

Demonstração. Seja $W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0)) \subset T_{\gamma(0)}M^n$ e seja Y um campo vectorial ao longo de $\gamma_{|_{[0,b[}}$.
Tome-se uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de T_xM ao longo de γ. Então $W = \sum_i^n w_i X_i$ e $Y = \sum_i^n y_i X_i$.
Considere-se que y_i, $i = 1, \dots, n$ verificam, para $0 \leq t < b$:

$$\begin{cases} \frac{D}{dt} y_1 + C_{\gamma'} y_1 = 0, \quad y_1(0) = w_1 \\ \vdots \\ \frac{D}{dt} y_n + C_{\gamma'} y_n = 0, \quad y_n(0) = w_n \end{cases}$$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, pelo que, para cada i, tem-se, por Cauchy, a existência e unicidade de y_i. Donde se obtém um campo Y único que verifica as condições $Y(0) = W$ e $\dfrac{D}{dt} Y + C_{\gamma'} Y = 0$, como se pretendia.

Veja-se agora que se pode estender Y de forma suave a $t = b$.

Fazendo a segunda derivada, vem

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D^2}{dt^2} Y + \frac{D}{dt} C_{\gamma'} Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y - \frac{D}{dt}(C_{\gamma'}) Y + C_{\gamma'} \frac{D}{dt} Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y - \frac{D}{dt}(C_{\gamma'}) Y - C_{\gamma'}^2 Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y + P\left(R(Y, \gamma')\gamma'\right) \\ &= \frac{D^2}{dt^2} Y + cY \end{aligned}$$

onde foi utilizada a proposição (2.2.3).
Logo, Y é solução de uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem com coeficientes constantes em $[0, b[$ e, logo, estende-se a $t = b$. $\square$

Veja-se agora a demonstração do teorema:

Demonstração.

(i) Sejam $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$. Veja-se que Δ é involutiva.
Tem-se

$$\left(\nabla^{\perp}_{Z}\alpha\right)(X,Y) = \nabla^{\perp}_{Z}\alpha(X,Y) - \alpha(\nabla_Z X, Y) - \alpha(X, \nabla_Z Y) = 0$$

Pela equação de Codazzi vem,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Z,Y) &= \left(\tilde{R}(X,Z)Y\right)^{\perp} + \left(\nabla_Z\alpha\right)(X,Y)\\ &= \left[c\left(\langle Z,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle Z\right)\right]^{\perp} = 0\end{aligned}$$

Por outro lado, também se tem

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Z,Y) &= \nabla^{\perp}_{X}\alpha(Z,Y) - \alpha(\nabla_X Z, Y) - \alpha(Z, \nabla_X Y)\\ &= -\alpha(Z, \nabla_X Y)\end{aligned}$$

Donde, $\alpha(Z, \nabla_X Y) = 0\ \forall Z \in TM$. Então $\nabla_X Y$ pertence a Δ e, analogamente, $\nabla_Y X$ também. Logo, Δ é involutiva (e, consequentemente, integrável) com folhas totalmente geodésicas em M. Como $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) = \nabla_X Y \in \Delta$ (e, analogamente, $\tilde{\nabla}_Y X \in \Delta$), vem o mesmo resultado para $\tilde{M}$.

(ii) Seja L a folha de Δ que contém $\gamma([0,b[)$ e seja Z um campo vectorial paralelo ao longo de γ tal que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. Então $\nu(\gamma(0)) \leq \nu(\gamma(b))$.

Veja-se que $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$:
Seja $W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0))$ e seja, para cada W, Y o campo vectorial ao longo de $\gamma_{|[0,b[}$ único nas condições do lema. Considere-se $X = \dfrac{d\gamma}{dt}$ em Δ.
Tem-se, utilizando a equação de Codazzi e o lema:

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_{\gamma'}\alpha(Y,Z) &= \left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Y,Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right)\\ &= \left(\nabla^{\perp}_{Y}\alpha\right)(X,Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right)\\ &= -\alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha\left(\frac{D}{dt}Y, Z\right)\\ &= \alpha\left(C_{\gamma'}Y + \frac{D}{dt}Y, Z\right) = 0\end{aligned}$$

Logo, $\parallel \alpha(Y,Z) \parallel$ é constante ao longo de γ. Como $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$, $\parallel \alpha(Y,Z) \parallel (\gamma(b)) = 0$ e vem que $\alpha(Y,Z)$ se anula ao longo de γ.
Então, tem-se $\alpha(Y,Z)(\gamma(0)) = \alpha\left(Y(\gamma(0)), Z(\gamma(0))\right) = \alpha(W, Z(\gamma(0)) = 0$, $\forall W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0))$. Logo, $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$.

Então $\nu(\gamma(0)) \geq \nu(\gamma(b))$.
Das duas desigualdades vem então $\nu(\gamma(b)) = \nu(\gamma(0)) = m$.

(iii) Se M é completa, as geodésicas γ em M têm domínio $]-\infty, +\infty[$.
Seja L uma folha de Δ.
Suponha-se, com vista a um absurdo, que exite uma geodésica máxima $\gamma :]\alpha, \beta[\longrightarrow L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0 < \beta$.
Então, em particular, $\gamma\left([0,\beta[\right) \subset L$. Por (ii) vem que $\gamma\left([0,\beta]\right)$ ainda está em L. Donde se conclui que, a haver uma geodésica máxima definida num intervalo, este é, necessariamente, fechado. Veja-se que isso também não é possível.

Considere-se $\gamma(\beta) = q$, $\dfrac{d\gamma}{dt}(\beta) = v$ para alguns q,v.
Tome-se agora uma geodésica $\tilde{\gamma}$ em L definida em $[\beta, \beta+\epsilon[$, $\epsilon > 0$ com início $\tilde{\gamma}(\beta) = q$ e velocidade inicial $\dfrac{d\tilde{\gamma}}{dt}(\beta) = v$.
Considere-se então a curva

$$c(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in]\alpha, \beta] \\ \tilde{\gamma}(t), & t \in [\beta, \beta+\epsilon[\end{cases}$$

Note-se que $c(\beta^-) = c(\beta^+) = q$ e $\dfrac{dc}{dt}(\beta^-) = \dfrac{d\gamma}{dt}(\beta) = v = \dfrac{d\tilde{\gamma}}{dt}(\beta) = \dfrac{dc}{dt}(\beta^+)$, pelo que $c(t)$ é suave, donde é uma geodésica em L com domínio $]\alpha, \beta+\epsilon[$, o que contradiz a hipótese de γ ser máxima.
Logo, qualquer geodésica máxima em L tem necessariamente domínio $]-\infty, +\infty[$, pelo que L é completa.

$\square$

Exemplo 2.2.7. Seja $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície plana tal que $\nu = 1$ em M.
Então a distribuição Δ é integrável e tem folhas totalmente geodésicas que são rectas.

Capítulo 3

Variedades Complexas

3.1 Estrutura Complexa em Espaços Vectoriais

Definição 3.1.1. Seja V um espaço vectorial real. Chama-se *estrutura complexa* em V a um endomorfismo linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -1$ (onde 1 representa a transformação identidade em V).

Um espaço vectorial real V com uma estrutura complexa J pode tornar-se um espaço vectorial complexo, definindo o produto por um escalar complexo da seguinte forma:

$$(a + ib)X := aX + bJX, \qquad X \in V,\ a, b \in \mathbb{R}$$

A dimensão real de V deve ser par e a sua dimensão complexa é metade da real.
Reciprocamente, dado um espaço vectorial complexo V de dimensão complexa n, considere-se J o endomorfismo linear definido por

$$JX = iX, \qquad X \in V$$

Se V for considerado como um espaço vectorial real de dimensão $2n$, então J é uma estrutura complexa de V.

Tome-se agora V como um espaço vectorial complexo da forma descrita acima e seja $X_1, \ldots, X_n$ base de V como espaço vectorial complexo.

Então $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ é composto por elementos linearmente independentes e tem dimensão $2n$, logo é base de V enquanto espaço vectorial real.
Então tem-se que, dada uma estrutura complexa J num espaço vectorial real V de dimensão $2n$, existem elementos $X_1, \ldots, X_n$ de V tais que $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ é base de V.

Proposição 3.1.2. *Sejam J e J' estruturas complexas em espaços vectoriais reais V e V', respectivamente.*
Considerem-se V e V' como espaços vectoriais complexos da forma natural. Então uma aplicação linear real $f : V \to V'$ é linear complexa se e só se $J' \circ f = f \circ J$.

Definição 3.1.3. Um *produto interno hermitiano* num espaço vectorial real V com uma estrutura complexa J é um produto interno h tal que

$$h(JX, JY) = h(X, Y), \qquad \forall X, Y \in V$$

Vem da definição que $h(JX, X) = 0 \ \forall X \in V$.

Proposição 3.1.4. *Seja h um produto interno hermitiano num espaço vectorial real V de dimensão $2n$ com estrutura complexa J.*
Então existem elementos $X_1, \ldots, X_n$ de V tais que $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ é uma base ortonormada de V em relação ao produto interno h.

A cada produto interno hermitiano h em V em relação à estrutura complexa J, associa-se um elemento $\varphi \in \bigotimes^2 V^*$ da seguinte forma:

$$\varphi(X, Y) = h(X, JY) \qquad X,\ Y \in V$$

Verifique-se que φ é anti-simétrica:

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= h(X, JY) = h(JX, J^2Y) = h(JX, -Y) \\ &= -h(JX, Y) = -h(Y, JX) = -\varphi(Y, X) \end{aligned}$$

Vem que φ também é invariante por J.

3.2 Variedades Complexas e Quase Complexas

Seja M uma variedade suave de dimensão real $2n$.

Definição 3.2.1.

- Diz-se que um atlas suave $\mathcal{A}$ de M é *holomorfo* se, para quaisquer duas cartas $z : U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ e $w : V \to V' \subset \mathbb{C}^n$ em $\mathcal{A}$, a aplicação de transição $z_{|_{U\cap V}} \circ w^{-1}_{|_{U'\cap V'}}$ é holomorfa.
  Qualquer atlas holomorfo determina unicamente um atlas holomorfo maximal.
- A um atlas holomorfo maximal dá-se o nome de *estrutura complexa*.
- Diz-se que M é uma *variedade complexa* de dimensão n se M estiver munido de um atlas holomorfo.
- A qualquer carta da estrutura complexa correspondente dá-se o nome de *carta holomorfa* de M.
- Uma *superfície de Riemann* ou *curva complexa* é uma variedade complexa de dimensão complexa 1.
- Dizemos que uma aplicação $f : M \to N$ entre variedades complexas é *holomorfa* se, para todas as cartas holomorfas $z : U \to U'$ de M e $w : V \to V'$ de N, a aplicação $w \circ f \circ z^{-1}$ é holomorfa no seu domínio.
- Diz-se que f é *biholomorfa* se é bijectiva e f e f^{-1} são holomorfas.
- Um *automorfismo* de uma variedade complexa M é uma aplicação biholomorfa $f : M \to M$.

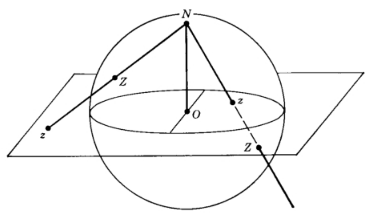
Note-se que subconjuntos abertos de variedades complexas herdam uma estrutura complexa.

Os teoremas da função inversa e da função implícita também se verificam no caso de aplicações holomorfas entre variedades complexas. Analogamente ao caso real têm-se também as noções de imersões e mergulhos holomorfos e de subvariedades complexas.

Exemplo 3.2.2.

1. Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto.
   Então M, com o atlas constituído pela carta $id : U \to U$ é uma variedade complexa.

2. *Esfera de Riemann*

   Considere-se a esfera unitária

   $$S^2 = \big\{(w,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : w\overline{w} + h^2 = 1\big\}$$

   Sejam $N = (0,1)$ e $S = (0,-1)$ o pólo Norte e o pólo Sul de S^2, respectivamente.
   As projecções estereográficas $\pi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ e $\pi_S : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{C}$ são dadas por $\pi_N(w,h) = (1-h)^{-1}w$ e $\pi_S(w,h) = (1+h)^{-1}w$, respectivamente.
   A aplicação transição $\pi_{S|_{S^2\setminus\{N,S\}}} \circ \pi^{-1}_{N|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é dada por $(\pi_S \circ \pi_N^{-1})(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Esta aplicação é suave e, logo, π_N e π_S definem um atlas suave de S^2. No entanto não é holomorfa.
   Obtém-se uma aplicação holomorfa se π_S for substituído pelo seu conjugado $\overline{\pi_S}$. Então a aplicação de transição é $\overline{\pi_S} \circ \pi_N^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ e, logo o atlas de S^2 constituído por π_N e $\overline{\pi_S}$ é holomorfo.

   A *esfera de Riemann* é S^2 com a estrutura complexa determinada por este atlas. Esta estrutura complexa em S^2 é única a menos de difeomorfismo.
   Como será visto de seguida, a esfera de Riemann é biholomorfa à recta complexa[1] $\mathbb{C}P^1$, descrita no próximo exemplo.

[1] Entenda-se *recta complexa* como um subespaço vectorial complexo de dimensão 1.

3. *Espaços projectivos complexos*

Como um conjunto, o espaço projectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é o espaço de todas as rectas complexas em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Seja z um vector não nulo, $z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Note-se por $[z]$ a recta complexa gerada por z. A $(z_0, \ldots, z_n)$ dá-se o nome de *coordenadas homogéneas* de $[z]$.

Seja $0 \leq j \leq n$. Faça-se $U_j = \{[z] \in \mathbb{C}P^n : z_j \neq 0\}$. Cada $[z]$ em U_j intersecta o hiperplano afim $z_j = 1$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ em exactamente um ponto. Assim, pode obter-se uma aplicação

$$a_j : U_j \to \mathbb{C}^n,\ a_j\left([z]\right) = \frac{1}{z_j}\left(z_0, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n\right)$$

onde $\hat{z}_j$ indica que a coordenada z_j é retirada.

Então tem-se que a_j é uma bijecção.

Para $j < k$, a aplicação de transição $a_j \circ a_k^{-1}$ é definido em $\{w \in \mathbb{C}^n,\ w_j \neq 0\}$ e obtém-se inserindo 1 como k-ésima variável, multiplicando o $(n+1)$-vector resultante por $(w_j)^{-1}$ e retirando a j-ésima variável 1:

$$a_j \circ a_k^{-1} : \{w \in \mathbb{C}^n : w_j \neq 0\} \to \{w \in \mathbb{C}^n : w_{k-1} \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} a_j \circ a_k^{-1}(w_0, \ldots, w_{k-1}, w_{k+1}, \ldots w_n) &= a_j\left([(w_1, \ldots, w_{k-1}, 1, w_{k+1}, \ldots, w_n)]\right) \\ &= \frac{1}{w_j}\left(w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_{k-1}, 1, w_{k+1}, \ldots, w_n\right) \end{aligned}$$

Logo, as aplicações de transição são holomorfas.

$\mathbb{C}P^n$ munido do altlas das aplicações a_j é, portanto, uma variedade complexa de dimensão n.

Quando $n = 1$, dá-se o nome de *recta projectiva complexa.*

Quando $n = 2$, dá-se o nome de *plano projectivo complexo.*

Para $m \leq n$, a aplicação $f : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$, $[z] \to [z, 0]$ é um mergulho holomorfo.

Mais geralmente, se $A : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ é uma aplicação linear injectiva, então a aplicação induzida, $f : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$, $[z] \to [Az]$ é um mergulho holomorfo.

Logo, $\mathbb{C}P^m$ pode ser visto de várias maneiras diferentes como subvariedade complexa de $\mathbb{C}P^n$.

Para a esfera de Riemann do exemplo anterior, o mapa $f : S^2 \to \mathbb{C}P^1$

$$\begin{cases} [\pi_N(p), 1] & \text{se } p \neq N \\ [1, \overline{\pi_S}(p)] & \text{se } p \neq S \end{cases}$$

está bem definido e é biholomorfo. Logo, identifica a esfera de Riemann com a recta projectiva complexa.

Definição 3.2.3. Seja M uma variedade complexa. Diz-se que um fibrado vectorial complexo $E \to M$ é *holomorfo* se E está munido de um atlas maximal de trivializações cujas funções transição são holomorfas e a projecção $E \to M$ é holomorfa.

Exemplo 3.2.4.

1. O fibrado tangente TM com a sua estrutura complexa J é um fibrado vectorial complexo sobre M.
   As coordenadas usuais para o fibrado tangente têm mapas de transição holomorfos e, logo, fazem de TM uma variedade complexa e fibrado vectorial holomorfo sobre M.

2. Se $E \to M$ é holomorfo, então os fibrados tensoriais associados a E são holomorfos. Por exemplo, o fibrado dual E^* é holomorfo.

3. Seja $E \to M$ um fibrado vectorial holomorfo e $f : N \to M$ uma aplicação holomorfa.
   Então o *pull-back* $f^*E \to N$ é holomorfo.[2]

[2]Define-se o *pull-back* $f^*E \longrightarrow N$ como o fibrado vectorial em que a fibra de f^*E em cada ponto $x \in N$ é a fibra de E em $f(x)$.

Definição 3.2.5. Seja M uma variedade diferenciável real.
Diz-se que um automorfismo J do fibrado tangente é uma *estrutura quase complexa* em M se, para cada $x \in M$, J é um endomorfismo do espaço tangente T_xM tal que $J^2 = -1$ (onde 1 nota a transformação identidade de T_xM).
A uma variedade munida de uma estrutura quase complexa dá-se o nome de *variedade quase complexa*.

Proposição 3.2.6. *Qualquer variedade quase complexa tem dimensão par e é orientável.*

Demonstração. Uma estrutura quase complexa J em M define uma estrutura complexa em cada espaço tangente T_xM. Já foi visto que $\dim T_xM$ é par.
Seja $2n = \dim M$.
Em cada espaço tangente T_xM fixe-se uma base $X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n$.
Veja-se que qualquer outra base difere desta por uma transformação linear com determinante positivo.
Seja $Y_1, \ldots, Y_n, JY_1, \ldots, JY_n$ outra base de T_xM e seja A a aplicação linear tal que $Y_i = AX_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por linearidade, tem-se $JY_i = J(AX_i) = AJX_i$.
Então, o determinante da matriz de mudança de base vem

$$\left| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right| = |A|^2 > 0$$

$\square$

Veja-se, de seguida, que qualquer variedade complexa possui uma estrutura quase complexa natural.
Considere-se o espaço $\mathbb{C}^n$ dos n-úplos de números complexos $(z_1, \ldots, z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j,\ j = 1, \ldots, n$.
Em relação ao sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, define-se uma

estrutura quase complexa, J, chamada *estrutura complexa natural* do seguinte modo:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial y_j}\qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_j}\qquad j=1,\dots,n$$

Proposição 3.2.7. *Uma aplicação f de um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^m$ preserva as estrutras quase complexas de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, isto é, $df\circ J=J\circ df$ se e só se f é holomorfa.*

Demonstração. Seja $(w_1,\dots,w_m)$ com $w_k=u_k+iv_k$, $k=1,\dots,m$ o sistema de coordenadas natural em $\mathbb{C}^m$.
Expresse-se f em termos deste sistema de coordenadas em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$:

$$\begin{cases} u_k=u_k\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\right) \\ \\ v_k=v_k\left(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\right)\end{cases}\qquad k=1,\dots,m$$

Então f é holomorfa se e só se são verificadas as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial v_k}{\partial y_j}=0 \\ \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_j}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}=0\end{cases}\qquad j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,m$$

Por outro lado, tem-se (quer f seja holomorfa ou não)

$$\begin{cases} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)+\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right) \\ \\ df\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)+\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)\end{cases}\qquad j=1,\dots,n$$

Destas fórmulas e da definição de J em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$ dada acima, vem que $df\circ J=J\circ df$ se e só se f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, o que prova o pretendido. Verifique-se:

$$
\begin{aligned}
df\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) &= df\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} \\
J\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) &= J\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}
\end{aligned}
$$

Donde,

$$(df \circ J)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (J \circ df)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial v_k}{\partial y_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \ \wedge \ \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

De forma análoga se verifica que

$$(df \circ J)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = (J \circ df)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial v_k}{\partial y_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \ \wedge \ \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

□

Para definir uma estrutura quase complexa numa variedade complexa M, transfere-se a estrutura quase complexa de $\mathbb{C}^n$ para M através de cartas.
A proposição anterior implica que uma estrutura quase complexa pode ser definida em M independentemente da escolha das cartas.

Definição 3.2.8. Uma estrutura quase complexa J numa variedade M é chamada *estrutura complexa* se M é uma variedade diferenciável subjacente a uma variedade complexa que induz J da forma descrita acima.

Definição 3.2.9. Sejam M e M' variedades quase complexas com estrutura quase complexa J e J', respectivamente.
Uma aplicação $f : M \to M'$ diz-se *quase complexa* se $J' \circ df = df \circ J$.

Da proposição anterior, vem:

Proposição 3.2.10. *Sejam M e M' variedades complexas.*
Uma aplicação $f : M \to M'$ é holomorfa se e só se f é quase complexo em relação às estruturas complexas de M e M'.

Em particular, duas variedades complexas com a mesma variedade diferenciável subjacente são idênticas se as estruturas quase complexas correspondentes coincidem.
Dada uma estrutura quase complexa J numa variedade M, o campo tensorial $-J$ também é uma estrutura quase complexa, que se diz *conjugada* de J.

Em geral, dados dois campos tensoriais A e B de tipo $(1,1)$ numa variedade M, pode construir-se a torção de A e B que é um campo tensorial de tipo $(1,2)$.

Definição 3.2.11. Particularizando para o caso em que ambos A e B são uma estrutura quase complexa J, define-se a *torção* ou *tensor de Nijenhuis* de J como sendo o campo tensorial N de tipo $(1,2)$ dado por

$$N(X,Y) = 2\{[JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]\}$$

onde X, Y são campos vectoriais de M.

Definição 3.2.12. Um estrutura quase complexa diz-se *integrável* se não tiver torção. $(N = 0)$.

Teorema 3.2.13 (Newlander-Nirenberg)**.** *Uma estrutura quase complexa é uma estrutura complexa se e só se é integrável.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7].

3.3 Conexões em Variedades Quase Complexas

Definição 3.3.1. Seja Γ uma conexão linear (ou afim) numa variedade quase complexa M. Se a estrutura quase complexa J é paralela em relação a Γ, diz-se que Γ é *quase complexa*.

Recorde-se que a *torção* T de uma conexão afim é dada, para X, Y campos vectoriais em M, por:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Teorema 3.3.2. *Toda a variedade quase complexa M admite uma conexão afim quase complexa tal que a sua torção T é dada por $N = 8T$*

Demonstração. Considere-se uma conexão afim sem torção, arbitrária em M com derivada covariante ∇ e seja Q o campo tensorial de tipo $(1,2)$ definido por

$$4Q\,(X,Y) = (\nabla_{JY} J)\,X + J\,((\nabla_Y J)\,X) + 2J\,((\nabla_X J)\,Y)$$

onde X e Y são campos vectoriais.
Considere-se uma conexão afim cuja derivada covariante $\tilde{\nabla}$ é definida por

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - Q(X,Y)$$

É fácil verificar que $\tilde{\nabla}$ é uma derivada covariante numa conexão afim.
Prove-se que é quase complexa. Para tal, veja-se que $\tilde{\nabla}_X(JY) = J(\tilde{\nabla} Y)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(JY) &= \nabla_X(JY) - Q(X,JY) = \\
&= (\nabla_X J)\,Y + J\,(\nabla_X Y) - Q\,(X,JY) \\
J\left(\tilde{\nabla}_X Y\right) &= J\,(\nabla_X Y - Q\,(X,Y)) \\
&= J\,(\nabla_X Y) - J\,(Q\,(X,Y))
\end{aligned}$$

Para provar a igualdade, tem que se mostrar $(\nabla_X J)Y - Q(X,JY) = -J(Q(X,Y))$, ou seja, $Q(X,JY) - J(Q(X,Y)) = (\nabla_X J)Y$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
4Q(X,JY) &= (\nabla_{J^2Y}J)X + J((\nabla_{JY}J)X) + 2J((\nabla_X J)JY) = \\
&= -(\nabla_Y J)X + J((\nabla_{JY}J)X) + 2J((\nabla_X J)\circ JY) \\
4J(Q(X,Y)) &= J\left((\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X) + 2J((\nabla_X J)Y)\right) = \\
&= J((\nabla_{JY}J)X) + J^2((\nabla_Y J)X) + 2J^2((\nabla_X J)Y)
\end{aligned}$$

Donde,

$$4\left(Q(X,JY) - J(Q(X,Y))\right) = 2J((\nabla_X J)\circ JY) + 2(\nabla_X J)Y$$

Por outro lado, de $0 = \nabla_X(J^2) = (\nabla_X J)J + J(\nabla_X J)$, vem $2J((\nabla_X J)\circ JY) = 2J(J(\nabla_X J)\circ J^2 Y) = -2J(J\circ(\nabla_X J)Y) = 2(\nabla_X J)Y$.
Donde se prova a igualdade pretendida. Logo, tem-se que $\tilde{\nabla}$ comuta com J, ou seja, J é paralelo em relação à conexão dada por $\tilde{\nabla}$.

A torção T de $\tilde{\nabla}$ é dada por

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y] \\
&= \nabla_X Y - Q(X,Y) - \nabla_Y X + Q(Y,X) - [X,Y] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] - Q(X,Y) + Q(Y,X)
\end{aligned}$$

Visto que, por hipótese, ∇ não tem torção, $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$.
Donde, $T(X,Y) = -Q(X,Y) + Q(Y,X)$.

Da definição de Q, vem:

$$\begin{aligned}
4(Q(Y,X) - Q(X,Y)) &= (\nabla_{JX}J)\,Y + J\left((\nabla_X J)Y\right) + 2J\left((\nabla_Y J)X\right) - \\
&\quad - (\nabla_{JY}J)\,X - J\left((\nabla_Y J)X\right) - 2J\left((\nabla_X J)Y\right) \\
&= (\nabla_{JX}J)\,Y + J\left((\nabla_Y J)X\right) - J\left((\nabla_X J)Y\right) - (\nabla_{JY}J)\,X
\end{aligned}$$

Estes quatro termos podem ser re-escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{JX}J)\,Y &= \nabla_{JX}(JY) - J(\nabla_{JX}Y) \\
J\left((\nabla_Y J)X\right) &= J(\nabla_Y JX) + \nabla_Y X \\
(\nabla_{JY}J)\,X &= \nabla_{JY}(JX) - J\left(\nabla_{JY}X\right) \\
J\left((\nabla_X J)Y\right) &= J\left(\nabla_X(JY)\right) + \nabla_X Y
\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima e tendo em consideração que ∇ não tem torção, obtém-se:

$$\begin{aligned} 4T(X,Y) &= (\nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX)) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \\ &\quad -J\,(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) - J\,(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) \\ &= [JX, JY] - [X,Y] - J\,([JX,Y]) - J\,([X,JY]) \\ &= \frac{1}{2} N \end{aligned}$$

Donde se conclui $N = 8T$ como pretendido. □

Corolário 3.3.3. *Uma variedade quase complexa M admite uma conexão afim quase complexa se e só se a estrutura quase complexa não tem torção.*

Demonstração. Assuma-se que M admite uma conexão afim quase complexa e note-se a sua derivada covariante por ∇.
Utilizando ∇ na demonstração do teorema anterior, então, de $\nabla J = 0$ vem $Q = 0$ e, logo, $T = 0$.
A outra implicação é um caso particular do teorema. □

Proposição 3.3.4. *Seja M uma variedade quase complexa com estrutura quase complexa J.*
Então a torção T e a curvatura R de uma conexão afim quase complexa satisfazem:

1. $T(JX,JY) - J(T(JX,Y)) - J(T(X,JY)) - T(X,Y) = -\frac{1}{2}N(X,Y)$, $\forall X, Y$ *campos vectoriais, onde* $N(X,Y)$ *é a torção de* J
2. $R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y)$, $\forall X, Y$ *campos vectoriais*

Demonstração. O resultado vem de utilizar $\nabla J = 0$ nas definições de torção e curvatura:

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ R(X,Y) &= \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \end{aligned}$$

Veja-se:

$$\begin{aligned}
T(JX,JY) &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - [JX,JY] \\
&= (\nabla_{JX}J)Y + J(\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_{JY}X) - [JX,JY] \\
&= J(\nabla_{JX}Y) - J(\nabla_{JY}X) - [JX,JY] \\
J(T(JX,Y)) &= J\left(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX) - [JX,Y]\right) \\
&= J\left(\nabla_{JX}Y - (\nabla_Y J)X - J(\nabla_Y X) - [JX,Y]\right) \\
&= J(\nabla_{JX}Y) + \nabla_Y X - J[JX,Y] \\
J(T(X,JY)) &= J\left(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X - [X,JY]\right) \\
&= J\left((\nabla_X J)Y + J(\nabla_X Y) - \nabla_{JY}X - [X,JY]\right) \\
&= -\nabla_X Y - J(\nabla_{JY}X) - J[X,JY]
\end{aligned}$$

Donde o primeiro membro da equação é igual a

$$-[JX,JY] + J[JX,Y] + J[X,JY] + [X,Y] = -\frac{1}{2}N(X,Y)$$

Prove-se agora a segunda equação:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(JZ) &= \nabla_X\nabla_Y(JZ) - \nabla_Y\nabla_X(JZ) - \nabla_{[X,Y]}(JZ) \\
&= \nabla_X\left(J(\nabla_Y Z)\right) - \nabla_Y\left(J(\nabla_X Z)\right) - J(\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= J(\nabla_X\nabla_Y Z) - J(\nabla_Y\nabla_X Z) - J(\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= J\left(R(X,Y)Z\right)
\end{aligned}$$

□

3.4 Métricas Hermitianas e Métricas de Kähler

Definição 3.4.1. Diz-se que uma métrica riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ numa variedade quase complexa M é *métrica hermitiana* se é invariante para a estrutura quase complexa J, i.e.,

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle \qquad X,\ Y \text{ campos vectoriais}$$

Uma métrica hermitiana define, portanto, um produto interno hermitiano em cada espaço tangente T_xM em relação à estrutura complexa definida por J.

Definição 3.4.2. Uma variedade quase complexa (respectivamente, variedade complexa) com uma métrica hermitiana diz-se uma *variedade quase hermitiana* (respectivamente, *variedade hermitiana*).

Proposição 3.4.3. *Toda a variedade quase complexa com uma métrica riemanniana admite uma métrica hermitiana.*

Demonstração. Dada uma variedade quase complexa M, considere-se uma qualquer métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Então obtém-se uma métrica hermitiana h fazendo:

$$h(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \langle JX, JY \rangle \qquad X,\ Y \text{ campos vectoriais}$$

$\square$

Na secção 1 deste capítulo, a cada produto interno hermitiano num espaço vectorial V foi associada uma forma bilinear anti-simétrica em V.
Aplicando a mesma construção a uma métrica hermitiana numa variedade quase complexa M, obtém-se uma 2-forma em M.
Mais explicitamente,

Definição 3.4.4. A *2-forma fundamental* ou *forma de Kähler* α de uma variedade quase hermitiana M com estrutura quase complexa J e métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define-se por

$$\alpha(X, Y) = \langle X, JY \rangle \qquad \forall X,\ Y \text{ campos vectoriais}$$

Visto que a métrica é invariante por J, também o é α, ou seja, $\alpha(JX, JY) = \alpha(X, Y)$.

A estrutura quase complexa J não é, em geral, paralela em relação à conexão riemanniana definida pela métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Na verdade, tem-se:

Proposição 3.4.5. *Seja M uma variedade hermitiana com estrutura quase complexa J e métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*
Seja α a forma de Kähler, N a torção de J e ∇ a derivada covariante da conexão riemanniana definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Então, para cada X, Y e Z campos vectoriais em M, tem-se:

$$4\left(\langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle\right) = 6\,\mathrm{d}\alpha(X, JY, JZ) - 6\,\mathrm{d}\alpha(X, Y, Z) + \langle N(Y, Z), JX \rangle$$

Demonstração. Tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X (JY) - J(\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X (JY), Z \rangle + \langle \nabla_X Y, JZ \rangle \end{aligned}$$

Aos dois termos acima aplica-se a seguinte fórmula (Fórmula de Koszul):

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \end{aligned}$$

A proposição vem agora das definições de α, N e de derivada exterior (seguinte fórmula):

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{d}\alpha(X, Y, Z) &= X(\alpha(Y, Z)) + Y(\alpha(Z, X)) + Z(\alpha(X, Y)) - \\ &\quad - \alpha([X, Y], Z) - \alpha([Z, X], Y) - \alpha([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Veja-se:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X (JY), Z \rangle &= X\langle JY, Z \rangle + (JY)\langle X, Z \rangle - Z\langle X, JY \rangle + \\ &\quad + \langle [X, JY], Z \rangle + \langle [Z, X], JY \rangle + \langle X, [Z, JY] \rangle \\ 2\langle \nabla_X Y, JZ \rangle &= X\langle Y, JZ \rangle + Y\langle X, JZ \rangle - (JZ)\langle X, Y \rangle + \\ &\quad + \langle [X, Y], JZ \rangle + \langle [JZ, X], Y \rangle + \langle X, [JZ, Y] \rangle \end{aligned}$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
2\langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle \;\; = \;\; & (JY)\langle X, Z\rangle - Z\langle X, JY\rangle + \langle[X, JY], Z\rangle + \langle[Z, X], JY\rangle + \\
& +\langle X, [Z, JY]\rangle + Y\langle X, JZ\rangle - (JZ)\langle X, Y\rangle + \langle[X, Y], JZ\rangle + \\
& +\langle[JZ, X], Y\rangle + \langle X, [JZ, Y]\rangle \qquad (3.4.1)
\end{aligned}
$$

No outro membro, tem-se:

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{d}\alpha(X, JY, JZ) \;\; = \;\; & X\alpha(JY, JZ) + (JY)\alpha(JZ, X) + (JZ)\alpha(X, JY) - \\
& -\alpha([X, JY], JZ) - \alpha([JZ, X], JY) - \alpha([JY, JZ], X) \\
= \;\; & X\langle Y, JZ\rangle + (JY)\langle Z, X\rangle - (JZ)\langle X, Y\rangle + \langle[X, JY], Z\rangle + \\
& +\langle[JZ, X], Y\rangle - \langle[JY, JZ], JX\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{d}\alpha(X, Y, Z) \;\; = \;\; & X\langle Y, JZ\rangle + Y\langle Z, JX\rangle + Z\langle X, JY\rangle - \langle[X, Y], JZ\rangle - \\
& -\langle[Z, X], JY\rangle - \langle[Y, Z], JX\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}\langle N(Y, Z), JX\rangle = \langle[JY, JZ], JX\rangle - \langle[Y, Z], JX\rangle - \langle[Y, JZ], X\rangle - \langle[JY, Z], X\rangle
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
3\,\mathrm{d}\alpha(X, JY, JZ) - 3\,\mathrm{d}\alpha(X, Y, Z) + \frac{1}{2}\langle N(Y, Z), JX\rangle = \\
(JY)\langle Z, X\rangle - (JZ)\langle X, Y\rangle + \langle[X, JY], Z\rangle + \langle[JZ, X], Y\rangle - \\
-Y\langle Z, JX\rangle - Z\langle X, JY\rangle + \langle[X, Y], JZ\rangle + \langle[Z, X], JY\rangle - \\
-\langle[Y, JZ], X\rangle - \langle[JY, Z], X\rangle \qquad (3.4.2)
\end{aligned}
$$

Comparando (3.4.1) com (3.4.2), obtém-se o pretendido. □

Como aplicação da proposição, tem-se:

Teorema 3.4.6. *Para uma variedade quase hermitiana M com estrutura quase complexa J e métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A conexão riemanniana definida pela métrica é quase complexa.*

2. *A estrutura quase complexa não tem torção e a forma de Kähler é fechada.*

Demonstração. Assuma-se que a conexão riemanniana é quase complexa. Então, pelo corolário 3.3.3, J não tem torção.
Visto que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e J são ambos paralelos em relação à conexão riemanniana, α também o é. Em particular, pela definição, $\mathrm{d}\alpha = 0$ e, logo, α é fechada.

Considere-se agora que J não tem torção e α é fechada. Então $\mathrm{d}\alpha = N = 0$. Donde, pela proposição anterior, $\langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle = 0$. Logo, $\nabla_X J = 0$ $\forall X$ campo vectorial. Donde a conexão é quase complexa. $\square$

Corolário 3.4.7. *Para uma variedade hermitiana M, as seguintes proposições são equivalentes:*

1. *A conexão riemanniana definida pela métrica hermitiana é quase complexa.*

2. *A forma de Kähler α é fechada.*

Definição 3.4.8. Uma métrica hermitiana numa variedade quase complexa é chamada uma *métrica de Kähler* se a forma de Kähler é fechada.
Uma variedade quase complexa (respectivamente, complexa) munida de uma métrica de Kähler diz-se uma *variedade quase Kähler* (respectivamente, *variedade de Kähler*)

Oservação 3.4.9. *Uma variedade quase hermitiana com* $\mathrm{d}\alpha = 0$ *e* $N = 0$ *era usualmente chamada uma* variedade pseudo-Kähler*. Com o teorema 3.2.13 que implica que uma variedade quase complexa com $N = 0$ é uma variedade complexa, tem-se que uma variedade pseudo-Kähler é necessariamente uma variedade de Kähler.*

Proposição 3.4.10. *A curvatura R e o tensor de Ricci,* Ric*, de uma variedade de Kähler têm as seguintes propriedades:*

1. *a)* $R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y)$

   b) $R(JX, JY) = R(X,Y)$

   X, Y *campos vectoriais.*

2. *a)* $\mathrm{Ric}(JX, JY) = \mathrm{Ric}(X,Y)$

   b) $\mathrm{Ric}(X,Y) = \dfrac{1}{2}\{$*traço de* $J \circ R(X, JY)\}$

   X, Y *campos vectoriais*

Demonstração.

1. Numa variedade de Kähler, pelo corolário anterior, a conexão riemanniana é quase complexa.

   a) Vem da proposição 3.3.4.

   b) Relembre-se que $\langle R(X,Y)V, U\rangle = \langle R(U,V)Y, X\rangle$ para cada U, V, X, Y campos vectoriais.

   Então tem-se

$$\begin{aligned}\langle R(JX, JY)V, U\rangle &= \langle R(U,V)JY, JX\rangle \overset{a)}{=} \langle J(R(U,V)Y), JX\rangle \\ &= \langle R(U,V)Y, X\rangle = \langle R(X,Y)V, U\rangle\end{aligned}$$

   Donde se conclui $R(JX, JY) = R(X,Y)$.

2. Relembre-se que o tensor de Ricci Ric de uma variedade riemanniana se define como $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(V,X)Y)$ e note-se que as igualdades (*) vêm do facto de ser considerada uma base para T_xM da forma $X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n$.

a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(JX,JY) &= \operatorname{tr}(V \to R(V,JX)JY) \\
&\overset{(*)}{=} \operatorname{tr}(JV \to R(JV,JX)JY) \\
&\overset{1b)}{=} \operatorname{tr}(JV \to R(V,X)JY) \\
&\overset{1a)}{=} \operatorname{tr}(JV \to J(R(V,X)Y)) \\
&= \operatorname{tr}(V \to R(V,X)Y) \\
&= \operatorname{Ric}(X,Y)
\end{aligned}$$

b) Lembre-se a primeira identidade de Bianchi (numa conexão sem torção): $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(X,Y) &= \operatorname{tr}(V \to R(V,X)Y) \\
&= \operatorname{tr}(V \to -J(R(V,X)JY)) \\
&= \operatorname{tr}(V \to J(R(X,JY)V) + J(R(JY,V)X))
\end{aligned}$$

Mas, por 1b), vem:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(V \to J(R(JY,V)X)) &= \operatorname{tr}(JV \to J(R(JY,JV)X)) \\
&\overset{(*)}{=} \operatorname{tr}(JV \to J(R(Y,V)X)) \\
&= \operatorname{tr}(V \to R(Y,V)X) \\
&= \operatorname{tr}(V \to -R(V,Y)X) \\
&= -\operatorname{Ric}(Y,X) = -\operatorname{Ric}(X,Y)
\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{tr}(V \to J(R(X,JY)V)) - \operatorname{Ric}(X,Y)$. Donde se conclui a igualdade pretendida.

□

3.5 Curvatura Seccional Holomorfa

Seja V um espaço vectorial real de dimensão $2n$ com estrutura complexa J. Considere-se um tensor

$$R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfazendo as quatro condições seguintes:

a) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

b) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

c) $R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0$

d) $R(JX,JY,Z,W) = R(X,Y,JZ,JW) = R(X,Y,Z,W)$

É sabido que b) é uma consequência de a) e c) e que o tensor curvatura riemanniana satisfaz a), b) e c) em cada ponto da variedade.

Além de a), b) e c), o tensor curvatura riemanniana de uma variedade de Kähler satisfaz d).
Na verdade uma das igualdades de d) é o mesmo que 1b) da Proposição 3.4.10 e a outra pode ser deduzida também da Proposição 3.4.10.

Proposição 3.5.1. *Sejam R e T dois tensores satisfazendo as condições a) e c) acima.*
Se $R(X,Y,X,Y) = T(X,Y,X,Y)$, $\forall X,Y \in V$, então $R = T$.

Este resultado será utilizado na próxima proposição que é o seu análogo complexo. Uma demonstração do resultado enunciado acima pode ser vista em [6].

Proposição 3.5.2. *Sejam R e T dois tensores satisfazendo as quatro condições acima.*
Se $R(X,JX,X,JX) = T(X,JX,X,JX)$, $\forall X \in V$, então $R = T$.

Demonstração. Pode assumir-se $T = 0$ e considerar $R - T = 0$ em vez de R e T.

Considere-se o tensor

$$S : (X,Y,Z,W) \in V \times V \times V \times V \to R(X,JY,Z,JW) + R(X,JZ,Y,JW) + R(X,JW,Y,JZ)$$

Este tensor é simétrico em X, Y, Z e W (por a), b) e d))
Pela hipótese $T = 0$, S anula-se para $X = Y = Z = W$.
Então $0 = S(X+Y,X+Y,X+Y,X+Y) + S(X-Y,X-Y,X-Y,X-Y) =$

$12S(X,Y,X,Y) \Rightarrow S(X,Y,X,Y) = 0$, $\forall X, Y \in V$.
Donde vem $0 = S(X, Y+W, X, Y+W) = 2S(X,Y,X,W) \Rightarrow S(X,Y,X,W) = 0$, $\forall X, Y, W \in V$.
Por fim, obtém-se $0 = S(X+Z, Y, X+Z, W) = 2S(X,Y,Z,W) \Rightarrow S(X,Y,Z,W) = 0$, $\forall X, Y, Z, W \in V$.
Então conclui-se que S é identicamente nulo.

Fazendo $X = Z$ e $Y = W$, obtém-se:

$$2R(X, JY, X, JY) + R(X, JX, Y, JY) = 0 \tag{3.5.1}$$

Por outro lado, por c), tem-se:

$$R(X, JX, Y, JY) + R(X, Y, JY, JX) + R(X, JY, JX, Y) = 0$$

o que, por a) e d) é equivalente a:

$$R(X, JX, Y, JY) - R(X, Y, X, Y) - R(X, JY, X, JY) = 0 \tag{3.5.2}$$

Fazendo (3.5.1)-(3.5.2), tem-se:

$$3R(X, JY, X, JY) + R(X, Y, X, Y) = 0 \tag{3.5.3}$$

Substituindo Y por JY em (3.5.3), vem

$$3R(X, Y, X, Y) + R(X, JY, X, JY) = 0 \tag{3.5.4}$$

De (3.5.3) e (3.5.4) obtém-se $R(X,Y,X,Y) = 0$. Do caso real obtém-se $R = 0$. $\square$

Além de um tensor R, considera-se um produto interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V.
Defina-se:

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{4}\left(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle + \langle X, JZ\rangle\langle Y, JW\rangle - \right. \\ &\quad \left. -\langle X, JW\rangle\langle Y, JZ\rangle + 2\langle X, JY\rangle\langle Z, JW\rangle\right) \end{aligned}$$

Proposição 3.5.3. *O tensor R_0 satisfaz a), b) c) e d) e as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,X,Y) &= \frac{1}{4}\left(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 + 3\langle X,JY\rangle^2\right) \\ R_0(X,JX,X,JX) &= \langle X,X\rangle^2 \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração é imediata. □

Seja p um plano, i.e., um subespaço de dimensão 2 em V e seja X, Y uma base ortonormal de p.
Sabe-se que $K(p)$, que é definida como

$$K(p) = R(X,Y,X,Y)$$

depende apenas do ponto p e é independente da escolha da base ortonormal de p.

Proposição 3.5.4. *Seja R um tensor satisfazendo a), b), c) e d).*
Se $K(p) = c$ para todos os planos p que são invariantes por J, então $R = cR_0$.

Demonstração. Um plano p é invariante por J se e só se $\{X,\ JX\}$ é uma base ortonormal para p, $\forall X$ vector unitário em p.
A hipótese é, então, equivalente a

$$R(X,JX,X,JX) = c \qquad \forall X \text{ vector unitário em } V$$

Pela proposição anterior vem então que $R(X,JX,X,JX) = cR_0(X,JX,X,JX)$, $\forall X \in V$. Aplicando a proposição 3.5.2, conclui-se que $R = cR_0$. □

Para cada plano p no espaço tangente T_xM, a curvatura seccional $K(p)$ é definida por $K(p) = R(X,Y,X,Y)$, onde $\{X,Y\}$ é uma base ortonormal para p.

Definição 3.5.5. Se p é invariante pela estrutura complexa J, então $K(p)$ é chamada a *curvatura seccional holomorfa* por p.

Se p é invariante por J e X é um vector unitário em p, então X, JX é uma base ortonormal para p e, logo,

$$K(p) = R(X, JX, X, JX)$$

A proposição 3.5.2 então implica que as curvaturas seccionais holomorfas $K(p)$, $\forall p \in T_xM$ invariante por J, determinam o tensor curvatura riemanniana R em x.

Capítulo 4

Teorema de Dajczer-Rodriguez

4.1 Curvatura de Subvariedades de Kähler

Seja $\tilde{M}$ uma variedade de Kähler de dimensão complexa $n+p$ com estrutura complexa J e métrica de Kähler $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja M uma subvariedade complexa de $\tilde{M}$ de dimensão complexa n. Então M é uma variedade de Kähler com a estrutura complexa induzida J e métrica induzida $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Proposição 4.1.1. *Seja α a forma de Kähler de uma subvariedade complexa M de uma variedade de Kähler $\tilde{M}$. Então*

$$\alpha(JX,Y) = \alpha(X,JY) = J(\alpha(X,Y))$$

$\forall X,\ Y$ *campos vectoriais em* M.

Demonstração. Para a conexão de Kähler $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}$ e campos vectoriais X e Y em M, escreve-se

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$$

onde $\nabla_X Y$ é a componente tangencial e $\alpha(X,Y)$ a componente normal.
Sabe-se (do caso real) que $\nabla_X Y$ é a conexão riemanniana de M.
Tem-se

$$\tilde{\nabla}_X(JY) = \nabla_X(JY) + \alpha(X,JY)$$

onde JY também é um campo vectorial em M.
Como $\tilde{\nabla}$ é Kähleriana, tem-se

$$\tilde{\nabla}_X(JY) = J(\tilde{\nabla}_X Y) = J(\nabla_X Y) + J(\alpha(X,Y))$$

Como ambos os espaços tangentes T_xM e o espaço normal $T_x^{\perp}M$ são invariantes por J, obtém-se

1. $\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y)$
2. $\alpha(X, JY) = J(\alpha(X, Y))$

A primeira equação reforça que ∇ é kähleriana.
Da segunda equação e da simetria de $\alpha(X, Y)$ em X e Y, tem-se

$$\alpha(JX, Y) = \alpha(Y, JX) = J(\alpha(Y, X)) = J(\alpha(X, Y))$$

$\square$

Proposição 4.1.2. *Seja M uma subvariedade complexa de uma variedade de Kähler $\tilde{M}$ com forma de Kähler α.*
Sejam R e $\tilde{R}$ os campos tensoriais curvatura riemanniana de M e $\tilde{M}$, respectivamente.
Então:

$$R(X, JX, X, JX) = \tilde{R}(X, JX, X, JX) - 2\langle\alpha(X, X), \alpha(X, X)\rangle$$

$\forall X$ campo vectorial em M.

Demonstração. Recorde-se a Equação de Gauss:

$$\tilde{R}(W, Z, X, Y) = R(W, Z, X, Y) + \langle\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle - \langle\alpha(Y, Z), \alpha(X, W)\rangle$$

Da equação de Gauss e utilizando a proposição anterior, vem então:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, JX, X, JX) &= R(X, JX, X, JX) + \langle\alpha(X, JX), \alpha(JX, X)\rangle - \\
&\quad -\langle\alpha(JX, JX), \alpha(X, X)\rangle \\
&= R(X, JX, X, JX) + \langle J(\alpha(X, X)), J(\alpha(X, X))\rangle - \\
&\quad -\langle J^2(\alpha(X, X)), \alpha(X, X)\rangle \\
&= R(X, JX, X, JX) + \langle\alpha(X, X), \alpha(X, X)\rangle + \langle\alpha(X, X), \alpha(X, X)\rangle \\
&= R(X, JX, X, JX) + 2\langle\alpha(X, X), \alpha(X, X)\rangle
\end{aligned}$$

$\square$

Com esta proposição verifica-se que a curvatura seccional holomorfa de M não excede a do espaço ambiente $\tilde{M}$. Em particular, tem-se:

Proposição 4.1.3. *Seja $\tilde{M}$ uma variedade de Kähler com curvatura seccional holomorfa não positiva.*
Então qualquer subvariedade complexa M de $\tilde{M}$ tem curvatura seccional holomorfa não positiva.

4.2 Teorema de Dajczer-Rodriguez

Veja-se agora a demonstração do teorema principal deste trabalho.

Considere-se $\mathbb{C}Q_c^N$ um espaço forma complexo simplesmente conexo com curvatura holomorfa constante c.

Teorema 4.2.1. *Seja $f : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}Q_c^N$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica de uma variedade de Kähler num espaço forma complexo de curvatura holomorfa constante $c \neq 0$. Se $\nu(x) > 0$ em todos os pontos, então f é holomorfa.*

Demonstração. Pela equação de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^T + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z \\ &= \left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^T + \langle A_\xi Y, Z\rangle A_\xi X - \langle A_\xi X, Z\rangle A_\xi Y \\ &= \left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^T + \langle \alpha(Y,Z), \xi\rangle A_\xi X - \langle \alpha(X,Z), \xi\rangle A_\xi Y \\ &= \left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^T + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$\forall X, Y, Z \in TM$

Por outro lado, visto que $\mathbb{C}Q_c^N$ tem curvatura holomorfa constante c, $\tilde{R}$ satisfaz

$$\left\langle \tilde{R}(X,Y)Z,W \right\rangle = \frac{c}{4}\Big[\langle W,X\rangle\langle Z,Y\rangle - \langle W,Y\rangle\langle Z,X\rangle + \langle W,\tilde{J}X\rangle\langle Z,\tilde{J}Y\rangle -$$
$$= -\langle W,\tilde{J}Y\rangle\langle Z,\tilde{J}X\rangle + 2\langle W,\tilde{J}Z\rangle\langle X,\tilde{J}Y\rangle\Big] \tag{4.2.2}$$

Considere-se $X \in T_xM$ e $Y \in \Delta(x)$ (Y existe pois $\nu(x) > 0$).

Utilizando (4.2.1) e (4.2.2) e considerando que $\alpha(Y,Y) = \alpha(X,Y) = 0$ e

$$\begin{aligned}\left\langle (\tilde{R}(X,Y)Y)^T, X \right\rangle &= \left\langle (\tilde{R}(X,Y)Y), X \right\rangle - \left\langle (\tilde{R}(X,Y)Y)^\perp, X \right\rangle \\ &= \left\langle (\tilde{R}(X,Y)Y), X \right\rangle\end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Y,X\rangle &= \left\langle \tilde{R}(X,Y)Y,X \right\rangle \\ &= \frac{c}{4}\left[\langle Y,Y\rangle\langle X,X\rangle - \langle X,Y\rangle^2 + 3\langle X,\tilde{J}Y\rangle^2\right] \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Considere-se uma base ortonormal $Y = X_1, \ldots, X_{2n}$.

Considere-se $S : T_xM \longrightarrow T_xM$ a aplicação dada por $S = \pi \circ \tilde{J}$, onde $\pi : T_x\mathbb{C}Q_c^N \longrightarrow T_xM$ é a projecção ortogonal.
Tendo em conta que $\langle X_1, Y\rangle = \langle Y,Y\rangle = |Y|^2 = 1$ e $\langle X_j, Y\rangle = 0$ $\forall j \neq 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(Y) &= \sum_{j=1}^{2n}\left\langle \tilde{R}(X_j,Y)Y,X_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{c}{4}\left[\langle Y,Y\rangle\langle X_j,X_j\rangle - \langle X_j,Y\rangle^2 + 3\langle X_j,\tilde{J}Y\rangle^2\right] \\ &= \frac{c}{4}\left[\sum_{j=1}^{2n}\langle X_j,X_j\rangle - \sum_{j=1}^{2n}\langle X_j,Y\rangle^2 + 3\sum_{j=1} 2n\langle X_j,\pi\tilde{J}Y\rangle^2\right] \\ &= \frac{c}{4}\left[2n - 1 + 3\sum_{j=1}^{2n}\langle X_j,SY\rangle\langle SY,X_j\rangle\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{4}\left[2n-1+3\langle SY,SY\rangle\right]\\
&= \frac{c}{4}\left[2n-1+3|SY|^2\right] \qquad (4.2.4)
\end{aligned}
$$

Visto que M^{2n} é variedade de Kähler e $Y \in \Delta(x)$, tem-se, também de (4.2.1) e (4.2.3),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(Y) &= \sum_{j=1}^{2n} \langle R(X_j,Y)JY, JX_j\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{2n} \left\langle \tilde{R}(X_j,Y)JY, JX_j\right\rangle\\
&= \frac{c}{4}\sum_{j=1}^{2n}\Big[\langle JX_j, X_,\rangle\langle JY,Y\rangle - \langle JX_j,Y\rangle\langle JY,X_j\rangle + \langle JX_j,\tilde{J}X_j\rangle\langle JY,\tilde{J}Y\rangle -\\
&\quad - \langle JX_j,\tilde{J}Y\rangle\langle JY,\tilde{J}X_j\rangle + 2\langle JX_j,\tilde{J}JY\rangle\langle X_j,\tilde{J}Y\rangle\Big]\\
&= \frac{c}{4}\sum_{j=1}^{2n}\Big[-\langle JX_j, X_,\rangle\alpha(Y,Y) + \langle X_j,JY\rangle\langle JY,X_j\rangle + \langle JX_j,\tilde{J}X_j\rangle\langle JY,\tilde{J}Y\rangle -\\
&\quad - \langle JX_j,\tilde{J}Y\rangle\langle JY,\tilde{J}X_j\rangle + 2\langle JX_j,\tilde{J}JY\rangle\langle X_j,\tilde{J}Y\rangle\Big]\\
&= \frac{c}{4}\sum_{j=1}^{2n}\Big[\langle X_j,JY\rangle^2 + \langle JX_j,\tilde{J}X_j\rangle\langle JY,\tilde{J}Y\rangle - \langle JX_j,\tilde{J}Y\rangle\langle JY,\tilde{J}X_j\rangle +\\
&\quad +2\langle JX_j,\tilde{J}JY\rangle\langle X_j,\tilde{J}Y\rangle\Big]\\
&= \frac{c}{4}\sum_{j=1}^{2n}[\langle X_j,JY\rangle\langle JY,X_j\rangle + \langle JX_j,SX_j\rangle\langle JY,SY\rangle - \langle JX_j,SY\rangle\langle JY,SX_j\rangle +\\
&\quad +2\langle JX_j,SJY\rangle\langle X_j,SY\rangle]\\
&= \frac{c}{4}\left[\langle JY,JY\rangle + \langle SY,JY\rangle\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle - \sum_{j=1}^{2n}\langle JX_j,SY\rangle\langle JY,SX_j\rangle + \right.\\
&\quad \left. +2\sum_{j=1}^{2n}\langle JX_j,SJY\rangle\langle X_j,SY\rangle\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{4}\Bigg[1+\langle SY,JY\rangle\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle-\sum_{j=1}^{2n}(-\langle X_j,JSY\rangle)(-\langle SJY,X_j\rangle)+\\
&\quad +2\sum_{j=1}^{2n}\langle JX_j,SJY\rangle\langle JX_j,JSY\rangle\Bigg]\\
&= \frac{c}{4}\Bigg[1+\langle SY,JY\rangle\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle-\langle SJY,JSY\rangle+2\langle JSY,SJY\rangle\Bigg]\\
&= \frac{c}{4}\Bigg[1+\langle SY,JY\rangle\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle+\langle SJY,JSY\rangle\Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

Juntando (4.2.4) e (4.2.5), tem-se:

$$2n-1+3|SY|^2=1+\langle SY,JY\rangle\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle+\langle SJY,JSY\rangle$$

Considere-se agora $T=JS$. Então tem-se:

$$
\begin{aligned}
|SY|^2 &= |JSY|^2=|TY|^2\\
\langle SY,JY\rangle &= -\langle JSY,Y\rangle=-\langle TY,Y\rangle\\
\sum_{j=1}^{2n}\langle SX_j,JX_j\rangle &= -\sum_{j=1}^{2n}\langle JSX_j,X_j\rangle=-\sum_{j=1}^{2n}\langle TX_j,X_j\rangle=-\operatorname{tr}T\\
\langle JSY,SJY\rangle &= \langle TY,\tilde{J}JY\rangle=-\langle\tilde{J}TY,JY\rangle=-\langle STY,JY\rangle=\langle T^2Y,Y\rangle
\end{aligned}
$$

Donde a equação acima, vem:

$$2n-2+3|TY|^2=\langle TY,Y\rangle\operatorname{tr}T+\langle T^2Y,Y\rangle \tag{4.2.6}$$

Visto que $|Y| = 1$ e T é composição de transformações ortogonais e uma projecção, tem-se $|TY| \leq |Y|$. Donde se obtém

$$\begin{aligned}
|TY| &= \phi \in [0,1] \\
|\langle TY, Y\rangle| &\leq |TY||Y| = \phi \\
|\langle T^2Y, Y\rangle| &\leq |T^2Y||Y| \leq |TY| = \phi \\
|\operatorname{tr} T| &= |\sum_{j=1}^{2n} \langle TX_j, X_j\rangle| \leq \sum_{j=1}^{2n} |\langle TX_j, X_j\rangle| = |\langle TY, Y\rangle| + \sum_{j=2}^{2n} |\langle TX_j, X_j\rangle| \\
&\leq |TY| + \sum_{j=2}^{2n} |TX_j| \leq \phi + \sum_{j=1}^{2n} |X_j| = \phi + 2n - 1
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$2n - 2 + 3\phi^2 \leq \phi\,(\phi + 2n - 1) + \phi \tag{4.2.7}$$

ou, de forma equivalente,

$$\phi^2 - n\phi + n - 1 \leq 0$$

Observe-se que, para $n \geq 2$, visto que $\phi \in [0,1]$, o primeiro membro é não negativo:
$\phi^2 + n(1-\phi) - 1 \geq \phi^2 + 2(1-\phi) - 1 = \phi^2 - 2\phi + 1 = (\phi - 1)^2 \geq 0$

Das duas desigualdades vem então que $\phi^2 - n\phi + n - 1 = 0$, donde $\phi = 1$ é a única solução.
Então, de (4.2.6) e (4.2.7), vem

$$2n + 1 = \langle TY, Y\rangle \operatorname{tr} T + \langle T^2Y, Y\rangle \leq 2n + 1$$

Então as desigualdades acima têm, necessariamente de ser igualdades. Em particular tem-se $|\operatorname{tr} T| = \phi + 2n - 1 = 2n$.
Tem-se também (para $Y \in \Delta(x)$) $|\langle TY, T\rangle| = |TY||Y| = 1$. Para $Z \in \Delta^{\perp}(x)$ com $|Z| = 1$, vem $|\langle TZ, Z\rangle| \leq |TZ||Z| \leq |Z|^2 = 1$.
Como $|\operatorname{tr} T| = 2n$, vem, necessariamente, $|\langle TZ, Z\rangle| = 1$. Mais precisamente, para $\operatorname{tr} T = 2n$, todos os valores próprios têm de ser 1 e para $\operatorname{tr} T = -2n$ têm todos de ser -1.

Logo, $T = \pm I$. Ou seja, por definição de T, $J\pi\tilde{J} = \pm I$.

Fazendo a identificação natural de T_xM com $df(x)(T_xM) \subset T_{f(x)}\mathbb{C}Q_c^N$, vem

$$\tilde{J} \circ df = df \circ J \tag{4.2.8}$$

Pela proposição 3.2.10, vem que f é holomorfa, como se queria ver. $\square$

4.3 Corolário

Ficou assim visto que as imersões isométricas de uma variedade de Kähler conexa numa variedade de curvatura holomorfa constante $c \neq 0$ são holomorfas. Para isso foi preciso apenas a condição local $\nu(x) > 0\ \forall x$.

O caso $c = 0$, que pode ser visto em [4], é tratado de forma diferente do caso estudado aqui e, consequentemente, saía do âmbito deste trabalho.

Uma aplicação interessante e quase imediata do teorema é:

Corolário 4.3.1. *Seja $f : M^{2n} \longrightarrow Q_c^N$, $n \geq 2$ uma imersão isométrica de uma variedade de Kähler numa variedade real de curvatura seccional constante $c \neq 0$. Então $\nu(x) = 0$ em todos os pontos.*

Demonstração. Componha-se f localmente com a inclusão de Q_c^N em $\mathbb{C}Q_c^N$ que é totalmente geodésica.
No teorema considerou-se ν positivo e concluiu-se que o espaço tangente à imersão é invariante para $\tilde{J}$, em (4.2.8).
No entanto, neste caso, isso não é possível pois $f(M)$ está contido numa subvariedade real de $\mathbb{C}Q_c^N$.
Logo $\nu(x) = 0$ em todos os pontos. $\square$

Bibliografia

[1] Ballmann, W., *Lectures on Kähler Manifolds*, ESI Lectures in Mathematics an Physics, European Mathematical Society

[2] Carmo, M. do, *Geometria Riemanniana*, Coleção projeto Euclides, IMPA (2011)

[3] Dajczer, M., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series, 13, Publish or Perish, Inc (1990)

[4] Dajczer, M.; Rodríguez, L., *Complete real Kähler submanifolds*, J. Reine Angew, Math. 419, 1-8 (1991)

[5] Dajczer, M.; Rodríguez, L., *On isometric immersions into complex space forms*, Math. Ann. 299, 223-230 (1994)

[6] Kobayashi, S.; Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, Interscience Publishers (1963)

[7] Kobayashi, S.;Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Volume II, Wiley Classics Library Edition, Wiley-Interscience (1996)

[8] Lee, John M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, 176, Springer (1997)

[9] Spivak, Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume I, Brandeis University (1970)

Índice