UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Contributo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional: Uma experiência de ensino no 6.º ano

Sandra Cristina Nunes Soeiro

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade de Didática da Matemática

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro da Ponte

2017

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Contributo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional: Uma experiência de ensino no 6.º ano

Sandra Cristina Nunes Soeiro

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro da Ponte

Mestrado em Educação

Didática da Matemática

2017

Resumo

Esta investigação teve como objetivo compreender se o trabalho com tarefas que explorem e interliguem conceitos essenciais da proporcionalidade direta, como as noções de razão, fração, razões equivalentes e diferentes representações como proporção, tabelas e gráficos, promove a compreensão da proporcionalidade direta e do significado da constante de proporcionalidade e se contribui para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. O quadro teórico envolve aspetos fundamentais do raciocínio proporcional e a importância e conceitos-chave para o seu desenvolvimento, bem como a análise das dificuldades dos alunos. O estudo seguiu uma metodologia de Investigação Baseada em *Design*, com base numa experiência de ensino, desenvolvida com uma turma de 29 alunos, do 6.º ano. O trabalho na unidade de ensino decorreu no ano letivo de 2016/2017, durante os meses de dezembro e janeiro. A unidade de ensino foi constituída por uma ficha de avaliação diagnóstica, nove tarefas e um teste escrito. A análise das produções escritas dos alunos procurou identificar estratégias usadas e principais dificuldades. Atendeu à evolução dos alunos na compreensão de relações entre duas medidas de grandeza, da constante de proporcionalidade e no uso de estratégias proporcionais e na identificação da existência de proporcionalidade.

Os resultados mostram que o trabalho com razões, frações e equivalência de frações proporcionou a compreensão das relações entre as medidas de grandeza, das relações multiplicativas e o aprofundamento do sentido de invariância e covariância. Este trabalho fomentou o uso de estratégias proporcionais, escalar e funcional, mas pontualmente surgiu o uso da estratégia pré-proporcional, de composição/decomposição (*building-up)*. De um modo geral, os alunos identificaram situações onde existia ou não existia proporcionalidade direta, recorrendo a várias estratégias. As dificuldades reportaram-se ao trabalho envolvendo a constante de proporcionalidade ou medidas de grandezas representadas por dízimas ou numerais mistos. Os alunos revelaram ter noção da existência da constante de proporcionalidade e identificaram-na com relativa facilidade, mas mostraram dificuldade na interpretação do seu significado no contexto dos problemas.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional, razão, constante de proporcionalidade, estratégia, dificuldade.

Abstract

This research aimed to understand whether work with tasks which explore and interconnect essential direct proportionality concepts, such as ratio notions, fraction, equivalent and different ratio representations like proportion, charts and graphics, promote the understanding of direct proportionality and the meaning of the principle of proportionality and whether it contributes for the development of proportional reasoning. The theoretical board involves fundamental aspects of proportional reasoning and the importance of key-concepts for its development, as well as the analysis of students´ difficulties. The study followed an investigation methodology Based on Design, supported by a teaching experience, developed with a class of 29 students, from the 6th grade. The work in the teaching unit occurred in the school year of 2016/2017, during the months of December and January. The teaching unit was formed by a diagnostic evaluation form, nine tasks and a written test. The analysis of the students´ written productions aimed to identify used strategies and main difficulties. It took into consideration the students´ evolution in the comprehension of relations between two magnitude measures, direct proportionality and in the use of proportional strategies and identification of the existence of proportionality.

The results show that the work with reasons, fractions and equivalence of fractions made the understanding of relations between magnitude measures, multiplicative relations and the deepening of the sense of invariance and covariance, possible. This work fomented the use of proportional strategies, both scalar and functional, but at some point the use of the pre-proportional strategy came up, as well as the composition/decomposition (building-up). Overall, students identified situations where direct proportionality existed and did not exist, making use of various strategies. The difficulties were reported to the work involving the principle of proportionality or the magnitude measures represented by tithes and mixed numerals. The students revealed that they were aware of the existence of the principle of proportionality and could easily identify it, but showed difficulty with the interpretation of its meaning in the problems context.

Key words: Proportional reasoning, ratio, constant of proportionality, strategy, difficulty.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível com o apoio e ajuda direta ou indiretamente de algumas pessoas, que contribuíram para que prosseguisse com este ciclo de estudos e realizasse este trabalho.

Agradeço, especialmente, ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pelo seu apoio, trabalho, paciência e orientação sem os quais jamais teria conseguido realizar este projeto e alcançado esta etapa. Obrigada Professor!

Aos meus filhos, Carolina e Dinis, pelo seu apoio e sua compreensão ao longo dos dois últimos anos, pelas inúmeras horas de ausência por dedicação a este trabalho de mestrado.

Aos meus pais pelo apoio e auxílio à minha componente familiar.

A todos os alunos que participaram neste estudo, pela sua disponibilidade, colaboração, empenho e trabalho, sem eles este estudo não teria sido possível.

Aos encarregados de educação que prontamente autorizaram a participação dos seus educandos e pelas suas palavras de encorajamento.

Aos colegas deste curso, pelo companheirismo, em especial à Isabel que sempre me deu a sua palavra de conforto e incentivo nos momentos mais difíceis. Pela sua ajuda, dedicação e amizade o meu bem-haja, Isabel.

À Direção do meu Agrupamento de Escolas e aos colegas de trabalho e amigos, pelo encorajamento e disponibilidade em ajudar.

A todos, o meu muitíssimo, obrigada!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Tabelas

Capítulo I

Introdução

Este trabalho consiste numa investigação no âmbito do tópico da proporcionalidade direta que visa compreender como os alunos podem desenvolver e comunicar estratégias de resolução de tarefas envolvendo o uso de conceitos de proporcionalidade e do raciocínio proporcional. Neste capítulo apresento a motivação que me levou a realizar o estudo, o seu objetivo e as questões a que procuro responder através da realização desta investigação, baseada numa experiência de ensino.

1.1. Motivação e pertinência do estudo

Os alunos, desde cedo, relacionam de forma intuitiva grandezas proporcionais, por relações aditivas de dobros e metades (Spinillo, 1994). No entanto, ao longo da minha experiência profissional tenho vindo a deparar-me com dificuldades dos alunos na resolução de situações que envolvem proporcionalidade direta e raciocínio proporcional. Muitos apresentam alguma dificuldade em pensar, relacionando quantidades de forma proporcional, especialmente em tarefas de maior complexidade, quando envolvem quantidades representadas com números racionais ou quando o seu contexto não lhes é familiar. De acordo com Silvestre (2012), o raciocínio proporcional integra três aspetos principais: (i) Capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) Compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) Capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões). É preciso compreender as dificuldades dos alunos para melhor apoiar o desenvolvimento do seu raciocínio proporcional, usando progressivamente estratégias de um nível mais avançado, recorrendo a relações de natureza multiplicativa (Silvestre & Ponte, 2013).

Na maioria dos países, o tópico da Proporcionalidade Direta é trabalhado, integrado ou não no domínio da Álgebra, ao nível do 2.º ciclo, com continuidade no 3.º ciclo. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) refere como propósito principal do ensino da Álgebra "Desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (p. 40). Este programa apresenta uma referência à transição do 1.º para o 2.º ciclo neste domínio e salienta a proporcionalidade direta como um aspeto importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> No 1.º ciclo, trabalha-se com as estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. No 2.º ciclo, este assunto é aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade directa, razão e proporção.
>
> São trabalhadas relações associadas a sequências numéricas e a proporcionalidade directa, que é uma relação importante no desenvolvimento do pensamento algébrico presente em muitas situações do quotidiano dos alunos (envolvendo, por exemplo, problemas de natureza multiplicativa nas compras ou em receitas culinárias, percentagens e escalas). Os alunos devem usar a proporcionalidade para fazer previsões e distinguir a relação de proporcionalidade directa de outros tipos de relações. (ME, 2007, p. 40)

Neste contexto os alunos devem trabalhar com situações que envolvem relações proporcionais e distinguir entre situações que apresentam ou não relações de proporcionalidade direta. Simultaneamente, devem desenvolver a capacidade de resolver problemas de comparação e valor omisso (perante três termos de uma proporção encontrar o quarto termo em falta).

Este documento curricular apresenta como objetivos gerais a serem alcançados pelos alunos:

- ser capazes de explorar, investigar regularidades;
- compreender a noção de proporcionalidade directa e usar o raciocínio proporcional;

> . ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas. (p. 40)

Os documentos curriculares mais recentes, *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (MEC, 2013), também enquadram o tópico da Proporcionalidade Direta no domínio da Álgebra. No entanto as suas indicações neste domínio são pouco esclarecedoras e minimalistas em termos de orientações metodológicas, apresentando uma referência ao domínio de forma superficial interligando-o com o domínio dos Números e Operações:

> Relativamente aos domínios Números e Operações e Álgebra, conclui-se neste ciclo o estudo das operações elementares sobre frações e completa-se a construção dos números racionais, introduzindo os negativos. Os alunos deverão, à entrada do 3.º ciclo, mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens) e tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas. (MEC, 2013, p. 14)

O mesmo documento indica que no âmbito da proporcionalidade direta, especificamente devem-se abordar:

> . Noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta;
> . Proporções; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; regra de três simples;
> . Escalas em mapas;
> . Problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes.

Estes objetivos são um contributo insuficiente para o desenvolvimento dos aspetos fundamentais ao raciocínio proporcional, de relevante importância para a formação dos alunos neste nível de ensino. É atribuída pouca enfâse às relações de variação entre as medidas de grandeza, privilegiando a aplicação de procedimentos que tendem a constituir regras mecanizadas que os alunos memorizam e aplicam sem compreensão das relações entre variáveis.

Pelo seu lado, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) destaca que os alunos devem ser capazes de compreender relações entre tabelas, gráficos e símbolos e selecionar as representações que mais se adequem ao objetivo em estudo. A compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de situações do dia-a-dia. É necessário que os alunos, desde os primeiros anos, tomem contacto com a noção de variação e desenvolvam simultaneamente bases sólidas a nível do cálculo. Estes aspetos, futuramente, ajudá-los-ão na compreensão do conceito de linearidade e na noção que um declive representa a taxa constante da variação de uma função linear.

Tal como indicam Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010), o raciocínio proporcional é bastante complexo e requer um desenvolvimento ao longo do tempo:

> A compreensão da proporcionalidade desenvolve-se ao longo dos anos, mas a maturidade não garante o desenvolvimento do raciocínio proporcional, muitos adultos não aplicam raciocínio proporcional. A complexidade do raciocínio proporcional destaca-se pelo facto de apesar de se aplicar a regra de três simples não garante habilidade no raciocínio proporcional (Lobato et al., 2010, p. 48).

Assim, raciocinar proporcionalmente vai muito para além de conhecer a regra de três simples, muitas vezes usada sem compreensão. Este raciocínio envolve compreensão e agilidade em relacionar quantidades ou grandezas proporcionalmente, com flexibilidade na utilização de estratégias adequadas à resolução de problemas.

Segundo Lobato et al. (2010), é importante proporcionar aos alunos, deste nível de ensino, tarefas que lhes permitam desenvolver o seu raciocínio proporcional, interligando conhecimentos e compreensões essenciais como as noções de razão, razões equivalentes, proporção e constante de proporcionalidade. Além disso, é também fundamental promover nos alunos flexibilidade no uso de estratégias de resolução de problemas, levando-os a realizar comparações de natureza multiplicativa, sem recorrer sistematicamente à regra de três simples.

Cramer, Post e Currier (1993), salientam a importância dos alunos perceberem aspetos essenciais que caraterizam situações proporcionais, nomeadamente que: (i) existe sempre uma relação multiplicativa que relaciona as duas quantidades, os espaços de medida estão sempre relacionados por uma multiplicação; (ii) uma proporção pode ser vista como uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois espaços de medida; (iii) todos os pares (razões) de uma proporção podem-se reduzir sempre à mesma fração, a razão unitária; (iv) existe um fator constante que relaciona as quantidades e que se pode considerar numa regra de funcionamento $y = mx$, em que m

é o referido fator constante e (v) graficamente uma situação proporcional é representada por uma linha que se inclina para a direita e passa pela origem.

Em Portugal têm sido realizados vários estudos de investigação, principalmente, no âmbito da realização de dissertações de mestrado e teses de doutoramento, que por implementação de propostas pedagógicas, experiências de ensino ou estudos de caso, analisaram aspetos ligados ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Alguns estudos pretenderam, também compreender como se desenvolveu o processo de ensino-aprendizagem com a realização de tarefas que envolveram situações de proporcionalidade direta ou de distinção entre situações proporcionais das não proporcionais. Assim, Silvestre (2006, 2012) realizou duas investigações com intuito de compreender esse processo de ensino-aprendizagem. A primeira (Silvestre, 2006) visou analisar o modo como decorria a aprendizagem da proporcionalidade com tarefas de investigação e problemas de proporcionalidade direta recorrendo ao uso de novas tecnologias, nomeadamente a folha de cálculo (*Excel*). Num segundo estudo (Silvestre, 2012), a autora desenvolveu uma experiência de ensino para analisar o desenvolvimento do raciocínio proporcional atendendo às estratégias e dificuldades que os alunos revelavam na resolução de tarefas e problemas de cunho investigativo/exploratório, também com recurso à folha de cálculo. Pedro (2013) e Garcez (2016) desenvolveram experiências de ensino que envolveram o pensamento algébrico e a capacidade de generalização com resolução de tarefas que relacionaram Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta, identificando as estratégias de generalização e representações usadas pelos alunos e o seu contributo para o desenvolvimento do raciocínio algébrico. Apesar dos estudos realizados sobre o tema, precisamos de perceber mais profundamente as dificuldades dos alunos e perceber quais são as formas de promover um ensino-aprendizagem eficaz da proporcionalidade direta contribuindo para potenciar desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Assim, com este estudo, pretendo perceber como a compreensão dos conceitos e relações proporcionais podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos, fundamental para o estudo da Matemática e de outras disciplinas escolares em anos mais avançados, bem como para resolução de situações que nos surgem no quotidiano (Dole et al., 2012; NCTM, 2007). Pretendo que este estudo seja um contributo não só para o meu desenvolvimento profissional e melhoria da minha prática letiva, mas que possa também ser útil a professores que se interessam pelo tema e que atentem às dificuldades dos alunos de modo a terem uma base de reflexão mais alargada para promover o ensino- aprendizagem.

Para o efeito proponho-me desenvolver uma experiência de ensino norteada pela conjetura de ensino aprendizagem que assenta na exploração de uma sequência de tarefas assente nas noções de razão, fração e equivalência de razões e em várias representações como proporções, tabelas e gráficos, na tentativa de perceber se constitui um alicerce ao desenvolvimento do raciocínio proporcional e, em particular, da noção de constante de proporcionalidade. Envolve perceber, simultaneamente, se esta abordagem favorece o desenvolvimento do uso de relações multiplicativas e se, como estratégias de resolução, os alunos recorrem ao uso de estratégias proporcionais, em situações de proporcionalidade direta, e se adquirem capacidade para distinguirem situações proporcionais das não proporcionais. A análise dos resultados da experiência de ensino permitirá saber se de facto a abordagem contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

1.2. Objetivo e questões de estudo

Este estudo tem por objetivo compreender se o trabalho com tarefas que explorem e interliguem conceitos essenciais da proporcionalidade direta, como as noções de razão, fração, razões equivalentes, proporções e várias representações, pode promover a compreensão dessas mesmas noções e contribuir para a compreensão da proporcionalidade direta e do significado da constante de proporcionalidade.

Para poder alcançar este objetivo realizo uma experiência de ensino numa turma de 6.º ano. De acordo com as recomendações atuais para o ensino da Matemática (NCTM, 2007; Ponte, 2005), a exploração de tarefas é feita a pares para favorecer a interação entre alunos e são promovidos momentos de discussão coletiva, para partilha de estratégias de resolução, tendo em vista contribuir e ampliar a compreensão de todos os alunos. Especificamente, procuro responder às seguintes questões:

(i) Ao longo da unidade de ensino, que compreensão, os alunos demonstram, do significado de constante de proporcionalidade e das relações multiplicativas em problemas de proporcionalidade direta?
(ii) Que estratégias de resolução os alunos usam para a resolução de problemas de proporcionalidade direta?

(iii) Que estratégias os alunos usam para identificarem a existência ou não de proporcionalidade direta?
(iv) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no trabalho com problemas de proporcionalidade direta e na distinção entre as situações proporcionais e não proporcionais?

1.3. Organização do estudo

Este estudo está organizado em duas partes. A primeira parte constitui a vertente de natureza mais teórica do estudo. Começa com a apresentação da pertinência e propósito do estudo, objetivo e questões de estudo que constituem o capítulo I. Os fundamentos teóricos onde se baseia este trabalho, o raciocínio proporcional e as noções relativas à proporcionalidade direta, são apresentados no capítulo II.

A segunda parte constitui a vertente de natureza mais empírica do estudo. O capítulo III relata como se desenvolveu o estudo piloto e os aspetos relevantes provenientes da sua realização que contribuíram para este estudo. A unidade de ensino é descrita no capítulo IV, sendo apresentados os seus pressupostos com referência à sua ancoragem nas orientações curriculares. A metodologia pela qual se rege a investigação é apresentada no capítulo V, explicitando os métodos de recolha e o processo de análise de dados e uma breve caracterização dos participantes do estudo, incluindo questões de ética. O desenvolvimento da unidade de ensino e a análise dos dados atendendo às questões de estudo compõem o capítulo VI. Por último o capítulo VII apresenta as conclusões procurando dar resposta às questões de estudo e discutindo o objetivo definido. Este capítulo finaliza com uma reflexão pessoal sobre o desenvolvimento deste trabalho e o seu contributo para a minha prática letiva.

Capítulo II

Enquadramento Curricular e Didático

Neste capítulo apresento uma revisão de literatura sobre a proporcionalidade e o raciocínio proporcional. Inicio com uma abordagem sobre conceções da Álgebra, domínio onde se integra o tópico da Proporcionalidade Direta. Destaco a capacidade de raciocínio proporcional, o seu desenvolvimento e importância, bem como alguns aspetos gerais deste raciocínio. Abordo, também, conceitos essenciais à compreensão de relações proporcionais e do raciocínio proporcional, bem como tipos de problemas, estratégias e dificuldades dos alunos. Concluo com uma revisão de estudos efetuados sobre o ensino da proporcionalidade e do raciocínio proporcional.

2.1. Álgebra e pensamento algébrico

A Álgebra, tema onde se integra a Proporcionalidade Direta, não se resume ao trabalho com o simbolismo formal, que constitui apenas um dos seus aspetos. Podemos caraterizar o pensamento algébrico como a capacidade de representar simbolicamente situações e de resolver problemas usando procedimentos algébricos: "Aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 10).

A Álgebra é uma ferramenta que possibilita a resolução de problemas reais, devendo ser trabalhada desde cedo com os alunos. Como indica o NCTM (2007), "a Álgebra é o fio condutor curricular desde os primeiros anos" (p. 39), pois possibilita aos alunos construir uma base que os prepara para o trabalho algébrico mais aprofundado no 3.º ciclo e ensino secundário. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações, aspetos aplicáveis a outros domínios da Matemática (Quadro 1).

Quadro 1- Vertentes fundamentais do pensamento algébrico, apresentado por Ponte et al. (2009, p. 11).

Vertentes do pensamento algébrico	
Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

O pensamento algébrico envolve a capacidade de compreender modelos, relações e funções, representar e analisar situações e estruturas matemáticas, usando símbolos algébricos, utilizar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas, e analisar a variação em diferentes contextos (NCTM, 2007). O pensamento algébrico atende não só aos objetos mas também às relações existentes entre os objetos, representando e raciocinando sobre essas relações, tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades (Ponte, 2006).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) veio integrar desde o 1.º ciclo perspetivas para desenvolvimento do pensamento algébrico, sugerindo a realização de investigações em sequências numéricas e o estudo de padrões numéricos dentro do tópico “Sequências e Regularidades”, integrado no domínio dos “Números e Operações”. Este programa sugeria que os alunos desenvolvessem capacidades para identificar relações e para usar linguagem simbólica, começando a expressar relações matemáticas, aspetos que constituem uma base para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. No 2.º e 3.º ciclo, o programa dava continuidade ao desenvolvimento do pensamento algébrico e da capacidade de representar simbolicamente situações, bem como à resolução de problemas usando procedimentos algébricos. Segundo Ponte et al. (2010), o ensino da proporcionalidade enquadra-se na Álgebra, recorrendo ao trabalho com regularidades e relações.

2.2. O raciocínio proporcional e o seu desenvolvimento

2.2.1. O raciocínio proporcional

Para Lamon (2012), o raciocínio proporcional refere-se à habilidade para lidar com situações e justificar afirmações sobre relações envolvendo proporções diretas simples e proporções inversas. Requer ser capaz de lidar com situações onde existe uma relação invariante (constante) entre duas quantidades ligadas mas que variam juntas, bem como saber argumentar e explicar relações. Esta habilidade desenvolve-se antes de aprender a usar símbolos como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A autora refere ainda que o raciocínio proporcional é usado para descrever maneiras sofisticadas de pensar matematicamente. Na sua perspetiva, este raciocínio é um dos melhores indicadores de que o aluno alcançou entendimento sobre números racionais e sobre relações multiplicativas e constitui uma base para a aprendizagem de conceitos mais complexos.

Vários autores (Dole et al., 2012; Lamon, 2012; Lobato, Ellis, Charles & Zbiek, 2010) consideram que o raciocínio proporcional se desenvolve de forma lenta ao longo do tempo. Muitos adultos não desenvolvem este tipo de raciocínio, revelando dificuldades em resolver problemas em variadas situações, de natureza escolar ou do quotidiano e, quando o fazem, recorrem a procedimentos mecanizados, sem compreender, muitas vezes, o contexto da situação. Assim, procuram compensar esta habilidade subdesenvolvida usando regras de Álgebra, Geometria e Trigonometria, que usam sem a necessária compreensão. Nesta situação os alunos não estão preparados para lidar com situações reais de Estatística, Biologia, Geografia, etc., que requerem o uso de noções de proporcionalidade (Lamon, 2012).

As orientações curriculares do estado de Ontário, no Canadá (Service Ontario, 2012), ressaltam a importância e a dificuldade do ensino-aprendizagem deste tópico, destacando que "o raciocínio proporcional é difícil de definir, não é algo que qualquer um pode ou não pode fazer, mas é desenvolvido ao longo do tempo […] tem a ver com a habilidade em pensar e fazer comparações multiplicativas entre duas quantidades" (p. 3). O raciocínio proporcional envolve pensar e estabelecer relações e comparações entre valores ou quantidades. A habilidade de pensar e raciocinar proporcionalmente é um fator essencial no desenvolvimento da capacidade de um indivíduo entender e aplicar Matemática.

Raciocinar proporcionalmente envolve também a capacidade de distinguir situações de natureza proporcional de relações que não o são, bem como compreender que as relações proporcionais são de natureza multiplicativa e não aditiva e ter capacidade para resolver problemas em variados contextos, representações numéricas e linguagem sem que isso influencie a sua resolução, demonstrando flexibilidade de raciocínio (Oliveira & Garcia, 2013). Para o desenvolvimento deste tipo de raciocínio, é importante ser capaz de considerar situações de mudança e distinguir se envolvem relações em termos aditivos (situações não proporcionais) ou multiplicativos (situações proporcionais), isto é, saber distinguir e lidar com comparações em termos absolutos e relativos (Dole et al., 2012).

Para Lobato et al. (2010), aprender a raciocinar de forma proporcional leva tempo e decorre das mudanças que os alunos efetuam na sua forma de pensar, aumentando a sua adaptação à construção e relacionamento de razões e proporções. As orientações curriculares (ME, 2007; NCTM, 2007) indicam que este tipo de raciocínio deve ser promovido desde cedo na escola partindo de tarefas e experiências relacionadas com o meio dos alunos, favorecendo a compreensão dos contextos e o relacionamento de quantidades antes do ensino de processos e regras de cálculo. Como sublinha Spinillo (1994), apesar do raciocínio proporcional ser desenvolvido antes e fora da escola, é nesta que os conhecimentos iniciais e espontâneos são sistematizados e efetivos.

O raciocínio proporcional é de grande importância para compreensão de relações e para a capacidade de tomar decisões e resolver problemas dentro de várias áreas do conhecimento e mesmo de situações da vida quotidiana. Na verdade, para além da Matemática, o raciocínio proporcional é usado em muitas outras áreas como a Ciência, Música, Geografia, e em atividades do dia-a-dia. As pessoas usam raciocínio proporcional no cálculo para selecionarem as melhores compras, taxas e investimentos, em trabalhos com desenhos e mapas, para conversões monetárias, para realizar conversões de medidas ou de valores monetários, para ajustar receitas, etc. (Service Ontario, 2012). No âmbito das Ciências pode apresentar-se o raciocínio proporcional como um elo fundamental com a Matemática, uma vez que se exige a sua aplicação na resolução de situações diárias, nomeadamente em situações de probabilidades e na composição de misturas. A este respeito, Dole et al. (2012) exemplificam: "note-se o risco que decorre se administrar doses incorretas na medicina ou na mistura de produtos químicos na aplicação de um pesticida" (p. 2). Na mesma perspetiva, Lamon (2012), destaca que esta forma de raciocínio abre a porta para a Matemática e Ciência da escola secundária e, eventualmente, para carreiras em Matemática.

Por isso, o NCTM (1989) considera que "merece o tempo e o esforço necessários para assegurar o seu cuidadoso desenvolvimento" (p. 82). A habilidade em pensar proporcionalmente é um fator essencial no desenvolvimento da capacidade de um indivíduo de entender e aplicar Matemática (Service Ontario, 2012). No entanto, este tipo de raciocínio vai muito para além do domínio da Educação Matemática, pois é usado em diversos contextos (Oliveira & Garcia, 2013). Lamon (2012) considera útil distinguir o raciocínio proporcional do conceito de proporcionalidade, argumentando que a proporcionalidade desempenha um papel fundamental em aplicações dominadas por princípios físicos e o raciocínio proporcional é um pré-requisito à compreensão dos contextos e à aplicação das situações baseadas em proporcionalidade. Para a autora, o raciocínio proporcional é multifacetado envolvendo ser capaz de explicar, interpretar e reconhecer a proporcionalidade. Integra a capacidade de representar relações proporcionais de várias maneiras, inclusive em gráficos, em tabelas e em equações.

2.2.2. Aspetos do raciocínio proporcional

Lamon (2012) afirma que ter raciocínio proporcional é ser capaz de lidar com situações onde existe uma relação invariante (constante) entre duas quantidades ligadas mas que variam juntas. Pelo seu lado, Cramer, Post e Currier (1993) salientam como componente crítica das situações proporcionais a relação multiplicativa que existe entre dois espaços de medida, como por exemplo: M_1 (número de maçãs) e M_2 (preço). Esta relação apresenta-se de dois modos:

- Relação multiplicativa *entre quantidades em dois espaços de medida* M_1 ($\frac{a}{b}$) *e* M_2 ($\frac{c}{d}$), isto é $M_1 = k \times M_2$ e suas respetivas quantidades e neste caso o fator multiplicativo (k) é constante, o valor unitário ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ocorre que $a \times k = c$ e $b \times k = d$) (invariância). A representação gráfica desta situação apresenta sempre uma linha reta que passa pela origem e inclina-se para a direita. Em representação de fração, pode apresentar diferentes razões que são apresentadas como frações equivalentes em que a forma irredutível é a razão unitária (valor unitário).
- Relação multiplicativa *dentro das duas quantidades de cada um dos espaços de medida:* M_1 ($\frac{a}{b}$) *e* M_2 ($\frac{c}{d}$), sendo que ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ocorre que $a \times k = b$ e $c \times k = d$), k neste caso não representa um valor unitário mas corresponde a "quantas vezes se aumenta a quantidade *a* para chegar a b então aumenta-se c o mesmo número de vezes para dar d" (covariância).

A complexidade do raciocínio proporcional requer flexibilidade na forma de pensar e exige o envolvimento de vários conceitos fortemente interligados (Service Ontario, 2012) tal como se ilustra na Figura 1.

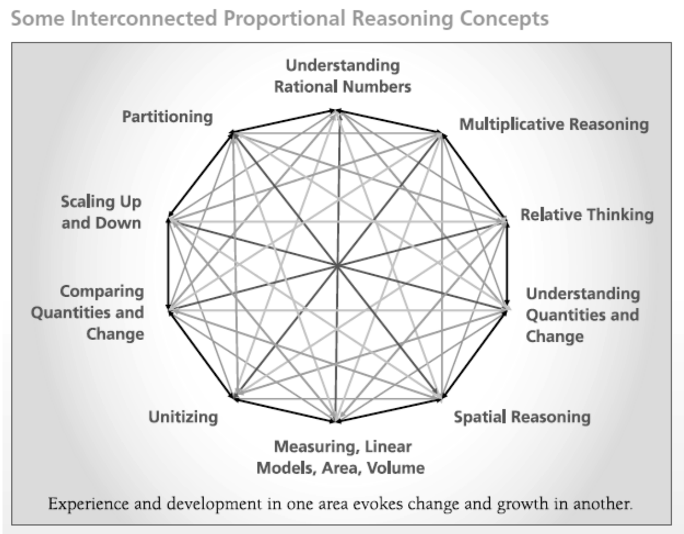


Figura 1. - Conceitos interligados no raciocínio proporcional (Service Ontario, 2012, p.4).

As interligações apresentadas proporcionam uma compreensão de cinco conceitos que integram o raciocínio proporcional, nomeadamente:

(i) *Unitização e raciocínio espacial*, envolvendo ser capaz de visionar uma quantidade particular, fazendo agrupamentos. É fundamental para desenvolver o conceito de valor unitário uma vez que “a capacidade de usar unidades compostas é uma das diferenças mais óbvias entre os alunos que trabalham bem com proporções, daqueles que não o fazem”.

(ii) *Pensamento multiplicativo,* ser capaz de raciocinar simultaneamente sobre várias ideias ou quantidades. Requer pensar em situações em termos relativos em vez de termos absolutos. Ajuda os alunos a fazerem transição do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo que deverá ocorrer o mais cedo possível.

(iii) *Compreensão das relações entre quantidades e da sua alteração,* o que envolve relacionar quantidades em termos relativos e perceber a relação de covariância, ou seja, perceber como a variação de uma quantidade coincide com a variação da outra. Este conceito de relacionar e alterar quantidades desempenha um papel central em nossas vidas diárias e é essencial ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

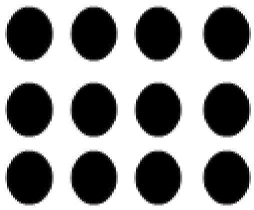
(iv) *Divisão, medição, taxas unitárias e raciocínio espacial*, conceitos ligados ao raciocínio proporcional porque envolvem a divisão de um todo em partes iguais, determinando a comparação relativa, ou seja, a comparação das medidas de duas coisas diferentes através de estratégias como estimar e verificar, medir, efetuar divisões sucessivas de uma unidade. A compreensão de porções iguais, valores relativos e taxas é a pedra angular da matemática e das situações do dia-a-dia. Atividades de divisão, partição, exigem o uso de estratégias de equivalência e permitem avançar no seu nível de transição do pensamento aditivo para o multiplicativo.

(v) *Compreensão dos números racionais:* Os números racionais, que se podem representar por frações, são um desafio para a compreensão dos alunos, uma vez que representam números expressos em relação a outros números, em vez de quantidades fixas, como números inteiros. As frações são o suporte para a compreensão da Álgebra.

O percurso de desenvolvimento do raciocínio proporcional permite a aquisição de diversas capacidades. Procurando salientar as suas características mais importantes, Lamon (2012) indica que os alunos, usualmente:

- Não pensam unicamente em termos de uma unidade ou de taxas unitárias, tais como $\frac{13\text{ km}}{1\text{ litro combustivel}}$ mas pensam em termos de unidades complexas, aplicando a razão não reduzida à unidade [unidade composta] $\frac{26\text{ km}}{2\text{ litros de combustivel}}$.
- Exibem maior eficiência na resolução de problemas pois possuem a capacidade de pensar em termos de unidades compostas, por exemplo, em casos em que o preço unitário produz dízimas infinitas. Se 3 laranjas custam 0,68€, é mais eficiente pensar no preço de 12 laranjas como 0,68€ × 4 (4 grupos de 3), ou seja 2,72€

- Compreendem a equivalência e o mesmo valor relativo.
- Observam uma unidade exibida em uma matriz e veem imediatamente quantos objetos estão em $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12,}, \frac{2}{3,}, \frac{3}{4}, \ldots$



- Interpretam quantidades de forma flexível. Por exemplo, sabendo que 3 maçãs custam 24 cêntimos, interpretam que o custo por maçã é de 8 cêntimos ou que $\frac{1}{8}$ de maçã custa 1 cêntimo. Prestam atenção ao valor por unidade.
- Apresentam flexibilidade no trabalho com frações e números decimais.
- Desenvolvem estratégias (às vezes estratégias pessoais) para lidar com problemas como encontrar frações situadas entre duas determinadas frações.
- Usam mentalmente divisores exatos, com vantagens no cálculo. Por exemplo para determinarem $\frac{3}{8}$ facilmente relacionam esta fração com $\frac{1}{8}$, ou para determinar 80% relacionam esta percentagem com 10% ou 20%.
- Têm o sentido de covariação. Isso significa que conseguem analisar quantidades que se alteram em simultâneo, discutindo a direção de mudança (o que se alterou e como) e a taxa de mudança, e determinam relações que permanecem inalteradas.
- Identificam contextos quotidianos em que as proporções são ou não são úteis. Distinguem situações proporcionais de não-proporcionais e não aplicam cegamente um algoritmo se a situação não envolver relações proporcionais.
- Desenvolvem um vocabulário para explicar seu pensamento em situações proporcionais.
- Usam estratégias escalares, raciocinando para cima e para baixo, tanto na descoberta do valor em falta como em problemas de comparação, trabalhando com quantidades expressas em frações, numerais decimais ou em percentagens.
- Entendem, no 7.º ou 8.º ano, as relações em situações proporcionais simples e inversamente proporcionais, podendo descobrir por si mesmos o algoritmo de multiplicação e divisão cruzada.

2.2.3. Conceitos-chave para o desenvolvimento do raciocínio proporcional

Tanto a partir das vivências do meio como da escolaridade, múltiplos elementos vão estimulando a realização de conexões e promovendo a compreensão e a evolução do raciocínio proporcional. O conhecimento neste campo é construído com base em alicerces cuja compreensão é importante para o desenvolvimento e progressão deste raciocínio. Para Lamon (2012), estes alicerces assentam na compreensão do número racional e da noção de fração que, por sua vez, permitem a construção dos conceitos de razão e proporção bem como das relações multiplicativas (Gurl, Artzt & Sultan, 2013; Lobato et al., 2010), tal como a descoberta do significado das relações de covariância e invariância e da constante de proporcionalidade existentes nas relações proporcionais (Lamon, 2012). Pelo seu lado, Dole et al. (2012) consideram que o estudo de tópicos matemáticos como número racional, incluindo frações, decimais, percentagens, desenho em escala e proporções, é importante para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Dizem os autores:

> O pensamento e o raciocínio proporcional relaciona-se com o reconhecer da relação multiplicativa entre a relação base e a situação proporcional à qual ela é aplicada. Além disso, o raciocínio proporcional também depende de fundamentos sólidos de tópicos associados, particularmente à multiplicação e divisão, às frações e conceitos fracionários nomeadamente de equivalência. Embora a compreensão da razão e da proporção esteja entrelaçada com muitos tópicos matemáticos, a essência do raciocínio proporcional é a compreensão da estrutura multiplicativa das situações proporcionais (Dole et al., 2012, p. 195).

Razão e proporção

Para Lobato et al. (2010), o raciocínio proporcional implica várias compreensões, nomeadamente entender o significado de razão, taxa/rácio, comparação multiplicativa e unidade composta/valor unitário. Para além disso, inclui efetuar conexões entre razões, frações e quocientes e compreender ideias básicas que levem o aluno a desenvolver raciocínios de nível mais sofisticado.

Os conceitos de razão e proporção têm subjacente uma comparação multiplicativa, ou seja, uma situação proporcional é baseada em relações multiplicativas e não em relações aditivas. Gurl, Artzt e Sultan (2013) consideram que, para a sua compreensão, é essencial proporcionar aos alunos oportunidades de aprendizagem apropriadas. Além disso, destacam que o início da compreensão assenta na razão, porque esta é um alicerce para a formação de proporções e raciocínio proporcional. Pelo seu lado, Lobato et al. (2010) indicam que a compreensão das relações existentes nas razões e proporções é extremamente valiosa e útil, dado que este conceito oferece maneiras de pensar quantitativamente sobre os fenómenos do mundo real. Estes autores consideram ser essencial desenvolver noções básicas essenciais ao desenvolvimento e compreensão de relações proporcionais em contexto escolar (Quadro 2).

Constante de proporcionalidade

Lamon (2012) refere que o modelo matemático para relações diretamente proporcionais é uma função linear da forma $y = kx$, onde k é designado por *constante de proporcionalidade*. Duas quantidades são proporcionais quando variam de tal maneira que mantêm uma proporção constante: $y/x = k.$ A constante k desempenha também um papel essencial na compreensão de relações inversamente proporcionais. O modelo matemático para proporção inversa é $k = xy$.

A constante de proporcionalidade apresenta vários significados dependendo do contexto, num gráfico é a inclinação, numa representação em tabela, pode ser a diferença entre qualquer entrada e a anterior ou, de forma equivalente, pode ser a taxa na qual uma quantidade muda em relação a outra, expressa como uma taxa unitária. Em geral, em situações de taxa, é a taxa constante, na leitura de mapas, é a escala, em reduções ou ampliações em figuras semelhantes, é o fator de escala (Lamon, 2012).

Relações multiplicativas

Os alunos fazem comparações absolutas desde o início do ensino básico, usando noções aditivas para determinar se uma quantidade é maior ou menor que outra. No entanto, raciocinar proporcionalmente implica estabelecer comparações relativas, requerendo o uso de noções multiplicativas para comparar quantidades de diferentes maneiras (Gurl, Artzt & Sultan, 2013). Como indica o Service Ontario (2012), o pensamento multiplicativo constitui uma coluna dorsal em Matemática pois possibilita efetuar interconexões importantes envolvendo multiplicação, divisão, frações, números decimais, razões, percentagens e funções lineares. A compreensão das relações multiplicativas requer tempo, envolvendo trabalho com uma variedade de situações e oportunidades de as realizar de múltiplas maneiras.

Quadro 2 – Conhecimentos essenciais para a compreensão de relações proporcionais, segundo Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010).

1	O raciocínio com relações envolve atender e coordenar duas quantidades.
2	Uma razão é uma comparação multiplicativa entre duas quantidades ou é uma união de duas quantidades numa unidade composta.
3	A formação de uma razão como medida do contexto do mundo real envolve isolar esse atributo de outros atributos e compreender o efeito de mudar cada quantidade no atributo que interessa.
4	Um número de conexões matemáticas que se estabelecem entre razões e frações: a. Razão serve para efetuar a comparação entre "parte-parte", a fração não ("parte-todo"); b. Razões e frações podem ser pensadas como conjuntos parcialmente sobrepostos; c. Razões podem ser significativamente interpretadas como frações.
5	Razões podem ser significativamente interpretadas como quocientes.
6	Uma proporção é uma relação de equivalência entre duas razões. Numa proporção, a razão de duas quantidades permanece constante à medida que os valores das quantidades correspondentes vão mudando.
7	O raciocínio proporcional é complexo e requer a compreensão de: a. Razões equivalentes podem ser criadas através da multiplicação/ divisão de uma unidade composta; b. Se uma quantidade numa razão é multiplicada ou dividida por um determinado fator, então também a outra quantidade deve ser multiplicada ou dividida pelo mesmo fator mantendo a relação proporcional; c. Dois tipos de razões – unidades compostas ou comparações multiplicativas estão relacionados.
8	Uma proporção é um conjunto infinito de razões equivalentes.
9	O raciocínio proporcional é fundamentalmente raciocinar de forma a fazer sentido, podendo ser generalizado em algoritmos para resolver problemas de proporcionalidade.
10	Pistas superficiais presentes no contexto de um problema não fornecem provas suficientes de relações proporcionais entre quantidades.

O raciocínio proporcional depende do pensamento multiplicativo e da compreensão da operação de multiplicação, podendo ser essencial para representar de forma simbólica as situações multiplicativas que se estabelecem, permitindo aos alunos fazerem conexões entre situações proporcionais (Dole et al., 2012). Algebricamente, estas relações podem ser expressas na regra $y = mx$. Graficamente, $y = mx$, representa uma reta que passa pela origem, onde m é o valor unitário ou constante de proporcionalidade, fator constante que relaciona duas quantidades entre dois espaços de medida (Cramer, Post & Currier 1993).

Tipos de problemas de aplicação de raciocínio proporcional

A resolução e análise de situações proporcionais requerem a aplicação de raciocínio proporcional. Segundo Dole et al. (2012), existem três tipos principais de situações que envolvem relações proporcionais: (i) Proporção direta simples, (ii) Proporção inversa, e (iii) Proporção complexa.

Uma *proporção direta* ocorre quando duas quantidades mudam de forma similar, ou seja, se uma aumenta a outra também aumenta, e o fator de aumento é o mesmo para ambas as quantidades. Por exemplo: Se para uma mistura de sumo se juntam dois copos de água para $\frac{1}{3}$ de copo de concentrado, então para 8 copos de água junta-se $1\frac{1}{3}$ do copo de concentrado. A comparação [razão] entre a quantidade de água e de concentrando é sempre a mesma, a quantidade de concentrado é sempre de $\frac{1}{6}$ da quantidade de água.

Uma *proporção inversa* decorre de se relacionar o aumento de uma quantidade com a diminuição da outra quantidade. Por exemplo, a execução de um trabalho varia inversamente com o número de pessoas que o executam. Assim, 6 pessoas levam 4 dias para executar um trabalho, se duplicar o número de pessoas o tempo de realização reduz-se para metade. Esta situação representa um produto que se mantém, alterando-se os fatores tal como se esquematiza no quadro 3, apresentado por Lamon (2012, p. 7).

Finalmente, uma *proporção complexa* envolve por exemplo a densidade, como relação entre volume de um corpo e a sua massa, correspondendo a relacionar duas variáveis. A compreensão de uma situação desta natureza requer um profundo entendimento e habilidade em trabalhar com a proporção direta simples. Um exemplo é comparar o volume e a massa de dois objetos, como um cubo de ferro e um cubo do mesmo tamanho mas de madeira.

Quadro 3 - Relações multiplicativas numa situação de proporcionalidade inversa (Lamon, 2012, p. 7).

Número de pessoas	Número de dias	Pessoa por dia
6	4	= 24
8	3	=24
4	6	= 24
2	12	= 24
1	24	= 24

Proporcionar aos alunos diferentes tipos de problemas permite promover a sua habilidade no raciocínio proporcional e perceber as suas capacidades. No intuito de desenvolver a compreensão dos alunos, Lobato et al. (2010) sugerem cinco tipos de problemas sobre raciocínio proporcional:

(i). *Problemas de comparação*, permitem colocar aos alunos, duas razões e pedir-lhes para determinar se a primeira relação é superior ou igual à segunda. Este tipo de problemas também envolve efetuar comparações multiplicativas.

(ii). *Problemas de transformação*, apresentam uma razão ou duas razões equivalentes, pedindo aos alunos para alterar uma ou mais quantidades requerendo que verifiquem se isso altera a proporção, ou para determinar como uma determinada alteração de uma ou mais quantidades muda a relação.

(iii). *Problemas de valor médio*. Estes problemas apresentam um cenário de compreensão estrutural sob a forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ e pedem aos alunos para fixarem o valor $\frac{x}{}$ de forma a manter a mesma relação.

(iv). *Problemas de parte-parte e parte-todo.* Os problemas desta categoria expressam um conjunto em termos de dois ou mais subconjuntos.

(v). *Problemas de semelhança geométrica e dimensional*, envolvem semelhanças e escalas (aumento e redução de tamanhos), sendo os mais difíceis para os alunos.

O *Rational Number Project* (Cramer & Post, 1993) usou três tipos diferentes de tarefas para avaliar a proporcionalidade: (i) *Valor em falta* [valor omisso], (ii) *Comparação numérica*, e (iii) *Previsão e comparação qualitativa*:

(i). *Problemas de valor em falta ou de valor omisso*, onde são conhecidos três termos, desconhecendo-se o quarto, e onde a informação dada pode ser representada como razões.

(ii). *Problemas de comparação numérica*, onde são apresentadas duas razões. Não é forçosamente necessária uma resposta numérica, no entanto, as razões devem ser comparadas. Podem envolver uma comparação qualitativa com questões do género: "Qual o sumo de laranja com sabor mais forte a laranja", ou "As misturas terão o mesmo gosto, a mesma cor?"

(iii). *Problemas qualitativos de previsão e comparação*, em que as comparações não dependem de valores numéricos específicos. Este pensamento é uma parte do pensamento proporcional. Os problemas qualitativos requerem efetuar previsão e comparação exigindo que os alunos compreendam o sentido das proporções. Permitem que pensem qualitativamente para verificar a viabilidade de respostas e estabelecer parâmetros adequados para situações problemáticas. A inclusão destes problemas no ensino incentiva os alunos a usar tais abordagens e a melhorem os seus cálculos e resolução de problemas.

Silvestre e Ponte (2013), para além dos problemas que envolvem relações proporcionais, referem ainda os *problemas pseudoproporcionais*. Trata-se de problemas com uma estrutura sintática semelhante aos de valor omisso, mas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis, como por exemplo: "*Um pianista precisa de cinco minutos para executar uma peça musical. Quanto tempo precisam três pianistas para executar o mesmo tema?*" (p. 17). Estes problemas requerem a capacidade de distinguir situações proporcionais das não proporcionais, no exemplo o número de pianistas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de execução.

Estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade

As estratégias que os alunos podem apresentar decorrem da aplicação de relações multiplicativas recorrendo ao uso da razão unitária ("*Quanto para um?*") – ou do fator de mudança ou fator escalar ("*Quantas vezes como*?"); ou podem recorrer à comparação de razões ou aplicar a regra do algoritmo do produto cruzado (regra de três simples). A estratégia gráfica é uma forma de identificar razões equivalentes e descobrir um valor omisso. Outra estratégia usada, mas não relacionada com o raciocínio multiplicativo é a descoberta de um valor por composição/decomposição (*building-up)* das quantidades, adicionando metades e/ou dobros (Ponte et al., 2010; Silvestre &

Ponte, 2013). As estratégias de raciocínio podem classificar-se em: (i) Escalar (quando é efetuada uma transformação “dentro” da mesma variável (ii) Funcional (quando é efetuada uma relação “entre” duas variáveis) (Figura 2).

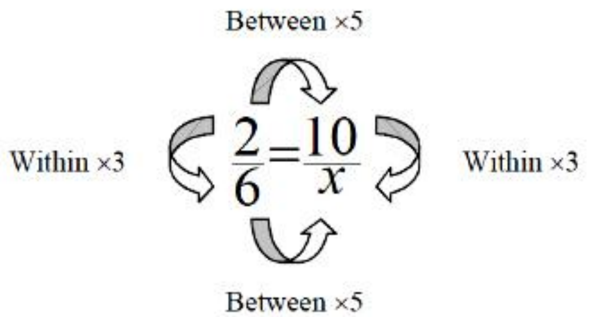
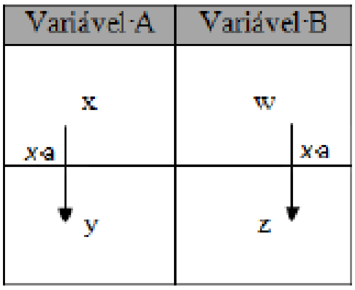


Figura 2. - Estratégias *between* (entre) ou funcionais e *within* (dentro) ou escalar (Artut & Pelen, 2015, p. 115).

O uso de determinada estratégia decorre da evolução do raciocínio proporcional do aluno. Na resolução de problemas que envolvem proporcionalidade direta os alunos começam por usar estratégias de composição/decomposição ou estratégias de natureza aditiva não proporcionais. Em situações de uso de um fator multiplicativo entre as duas quantidades (covariância) é designada por estratégia proporcional escalar, que evolui da estratégia pré-proporcional. Num nível mais avançado os alunos aplicam estratégias de natureza multiplicativa, designadas de estratégias funcionais (Silvestre & Ponte, 2013). Ponte et al. (2010) salientam a importância a dar às relações multiplicativas que existem numa relação de proporcionalidade direta, no sentido de que estas envolvem dois aspetos, a covariação e a invariância entre grandezas (Figura 3).

Como resultado da investigação do *Rational Number Project*, Cramer e Post, (1993) destacaram-se quatro estratégias distintas de soluções: (i) taxa unitária (ou constante de proporcionalidade), (ii) fator de mudança, (iii) fração e (iv) produto cruzado (ou regra de três simples). A estratégia que envolve a razão unitária ou constante de proporcionalidade, decorre do dar a resposta a "*Qual o valor de uma unidade?*" exemplo, “*Quantos quilómetros por minuto?*”. A estratégia de fator de mudança ou variação implica o dar resposta a: “*Quantas vezes mais?*”. Por exemplo: “*Se em 20 minutos percorre 4 km para percorrer 12 km que corresponde a 3 vezes mais então demorará 3× 20 minutos ou seja 60 minutos*”. A facilidade na utilização deste método está relacionada com os aspetos numéricos do problema. Os alunos seriam menos propensos a usar este método se o fator a ser usado não fosse um número inteiro por exemplo, se o fator fosse $\frac{2}{7}$, como na situação: "*Se leva 20 minutos a percorrer 7 km, quanto tempo leva a percorrer 2 km*?". A estratégia de fração refere-se a quando os alunos usam a ideia de equivalência. Os alunos trabalham as razões como frações, aplicando a regra de frações equivalentes. Finalmente, a estratégia do algoritmo do produto cruzado [regra de três simples] é um processo extremamente eficiente, mas mecânico desprovido de significado no mundo real. Exemplo, "*20 minutos para 4 km então para 12 serão x*?"; mas qual o sentido de multiplicar km por minutos? No mesmo estudo, Cramer e Post (1993) concluíram que num problema que não apresente uma situação de proporcionalidade, grande parte dos alunos aplicam a regra de três simples inadequadamente, enquanto os alunos que não tinham aprendido esse algoritmo foram melhor sucedidos, usando outras estratégias de resolução de problemas, nomeadamente a de valor unitário ou de fração equivalente.

Covariação de grandezas (representadas por variáveis)



Invariância entre grandezas (representadas por variáveis):

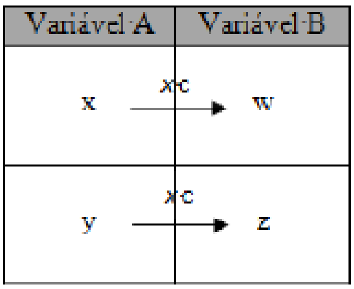


Figura 3. - Relações multiplicativas proporcionais (Ponte et al. 2010, p. 3).

2.3. O ensino-aprendizagem da proporcionalidade

2.3.1. Dificuldades na aprendizagem da proporcionalidade

Lobato et al. (2010) indicam que, apesar de os alunos usarem com facilidade relações de dobros ou metades, se uma situação envolver números mais complicados, não conseguem estabelecer relações proporcionais. Nos estudos do *Rational Number Project*, Cramer, Post e Currier (1993) constataram que tanto nas tarefas tipo valor omisso como nas de comparação em que o fator multiplicativo correspondia a um número decimal ou fração, os alunos revelaram maiores dificuldades mesmo em situações que apresentavam a mesma estrutura, recorrendo por vezes a estratégias aditivas. Concluíram que trabalhar com números não inteiros diminui o nível de desempenho dos alunos e altera a sua forma de raciocinar. A situação foi recorrente na resolução de problemas de escalas, que se revelaram significativamente mais difíceis.

Pelo seu lado, Oliveira e Garcia (2013) indicam que outro aspeto que dificulta o trabalho dos alunos com situações proporcionais advém das várias interpretações das diferentes representações da forma fracionária $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. Estas são pouco exploradas no ensino das frações e dos números racionais, havendo uma ênfase da interpretação $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ como relação parte-todo em detrimento das interpretações de quociente, operador e razão. Na perspetiva das autoras, a fraca exploração destes significados da fração compromete o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Outro aspeto que suscita alguma dificuldade nos alunos refere-se ao trabalho com a constante de proporcionalidade, k. Este, por vezes, torna-se complexo porque k é um "personagem escorregadio", uma vez que o seu significado muda em cada contexto particular. Frequentemente não aparece explicitamente no contexto do problema, pois é um elemento estrutural que se encontra escondido nos detalhes e que é preciso saber procurar (Lamon, 2012).

2.3.2. Estratégias para melhorar o ensino-aprendizagem

O ensino usual da proporcionalidade enfatiza o uso da regra de três simples e o produto cruzado, o que não promove a compreensão das relações. Como refere Lamon (2012), geralmente, os alunos não usam o raciocínio proporcional quando aplicam regras memorizadas ou algoritmos. Apesar de resolverem problemas de proporcionalidade com procedimentos memorizados, isso não quer dizer que pensem proporcionalmente. Por isso, diversos autores (Cramer et al., 1993; Gurl, Artzt & Sultan, 2013; Lamon, 2012; Oliveira & Garcia, 2013) consideram fundamental trabalhar com aspetos essenciais e componentes conceptuais importantes para desenvolver o raciocínio proporcional.

Lobato et al. (2010) destacam que o próprio professor tem de ter uma sólida compreensão da Matemática, compreendendo de uma forma aprofunda as ideias matemáticas, pois só assim pode ajudar os seus alunos a desenvolver uma compreensão sólida e duradoura de razões, proporções e raciocínio proporcional. Na sua perspetiva, uma compreensão mais aprofunda sobre este tópico requer do professor:

(i). Saber distinguir diferentes tipos de problemas, conhecer quando aplicar determinadas estratégias e usar vocabulário relevante.
(ii). Distinguir relações onde há proporcionalidade das que não são proporcionais.
(iii). Compreender o que significam razões equivalentes e ser hábil no uso de diferentes estratégias para as gerar.
(iv). Distinguir o que os alunos precisam de aprender, e o que se espera que estes aprendam, estendendo a aprendizagem para além do que está no currículo. Como, por exemplo, incluir o trabalho com gráficos pois permite observar o modo como se ligam as razões e proporções e como se integram em funções lineares, aspeto com que os alunos irão trabalhar mais tarde mas ainda não entendem.
(v). Ter capacidade de argumentar e ser capaz de refutar e justificar a ideia errada que todas as razões são frações, e ser capaz de ilustrar as relações conceptuais entre frações e razões e de utilizar a notação fração para expressar razões.

Para a progressão dos alunos, através de um percurso que parta da compreensão dos conceitos de razão e proporção de modo a alcançar o raciocínio proporcional, Lobato et al. (2010) indicam que estes precisam de realizar quatro mudanças cognitivas: (i) Transitar da comparação absoluta com uma quantidade concentrando-se na importância de relacionar duas quantidades; (ii) Passar das comparações aditivas para a formação de razões com duas quantidades; (iii) Efetuar a transição usando estratégias de unidade composta para aplicar em comparações multiplicativas; e (iv) Fazer a transição para desenvolver de forma fácil proporções criando um conjunto infinito de razões equivalentes.

O documento curricular do estado de Ontário (Service Ontario, 2012) destaca sugestões curriculares no sentido de proporcionar aos alunos o trabalho com diversos tipos de problemas, envolvendo relações aditivas e relações multiplicativas (proporcionais) e promover a discussão entre as suas diferenças, contribuindo, assim, para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. As sugestões de estratégias apresentadas para o ensino comportam:

(i). Proporcionar aos alunos situações que abrangem diversos contextos e se relacionem com o seu mundo.
(ii). Oferecer problemas de natureza qualitativa e quantitativa. Os alunos poderão envolver-se no desenvolvimento de relações proporcionais sem manipular quantidades com números.
(iii). Ajudar os alunos a distinguirem entre situações proporcionais e não proporcionais.
(iv). Encorajar discussões e experiências em que comparem e elaborem razões e proporções.
(v). Ajudar os alunos a relatar o seu raciocínio proporcional para perceber o que realmente sabem; por exemplo se estabelecem conexão entre as frações de unidade e as taxas unitárias como noções muito semelhantes.
(vi). Reconhecer que a regra de três simples, como estratégia mecânica para resolver proporções, não desenvolve o raciocínio proporcional e que os alunos precisam ser flexíveis no pensamento e adquirir várias estratégias.

Na mesma linha de pensamento, Dole et al. (2012) ressaltam a importância de, aquando da promoção do pensamento multiplicativo, não descuidar também as discussões sobre relações aditivas para que se relacionem ambos os pensamentos. Os autores consideram que deve promover-se a discussão de situações em termos aditivos e em termos multiplicativos colocando questões específicas, por forma de incentivar o pensamento matemático. Um exemplo: "Uma menina tem 6 *tazos* e o menino tem 9 *tazos*." A partir desta situação podem colocar-se várias questões que permitam estabelecer relações aditivas e multiplicativas, contribuindo para a sua distinção:

- Exemplos de questões que requerem pensamento aditivo: *Quem tem mais tazos? Quantos tazos, tem a mais o menino? Quantos tazos, tem a menos a menina?*

- Exemplos de questões que requerem pensamento multiplicativo: *Que parte de uma dúzia de tazos tem a menina? Que parte de uma dúzia de tazos tem o menino? Ambos os meninos têm 3 super tazos, qual a percentagem que cada criança tem de super tazos?*

No trabalho em sala de aula, Oliveira e Garcia (2013) consideram como propostas de ensino relevantes aquelas que promovem a negociação de diferentes significados da representação $\frac{a}{b}$, que devem ser aplicadas em diversos contextos para desenvolver o raciocínio proporcional e resolvidas recorrendo a estratégias de resolução que vão além da aplicação mecânica do produto cruzado. Para as autoras, o conceito de razão em diversos contextos não tem tido a atenção suficiente no ensino. Este cinge-se à reprodução mecânica de regras algébricas em detrimento da investigação e interpretação da situação que envolve um determinado problema e que estimula o pensamento proporcional. As autoras consideram importante a resolução e discussão de tarefas que promovam a negociação do significado de razão, construído pelos alunos. De forma semelhante, Dole et al. (2012) indicam que, de modo a realizar um ensino para compreensão e promotor do raciocínio, é essencial proporcionar aos alunos oportunidades de aprendizagem para que explorem e discutam várias experiências que desencadeiam o saber formar situações proporcionais usando linguagem multiplicativa, considerado como indicador de raciocínio proporcional.

Lamon (2012) refere que diversos estudos mostram que, se desde cedo o ensino proporcionar experiências reais para que os alunos trabalhem com frações, com tarefas envolvendo o "partir/repartir a unidade", isso promove a compreensão básica de número racional e os alunos aprofundam essa compreensão, tal como o raciocínio proporcional. Considera que o trabalho e a exploração conceptual de razões e proporções são uma base para o ensino e aprendizagem.

Pelo seu lado, Gurl, Artzt e Sultan (2013) defendem que a exploração de tarefas de nível crescente de exigência que trabalhem razões e proporções permitem a construção dos seus conceitos de razão e de proporção com a subjacente comparação multiplicativa. Este tipo de tarefas, para além de permitir começar a estabelecer bases para o conceito de razão, desenvolve o pensamento proporcional dando aos alunos oportunidade de perceberem a necessidade de efetuarem comparações relativas e constatarem a diferença entre estas e as comparações aditivas. Progressivamente, uma outra tarefa deve encorajar o uso de variáveis quando os alunos desconhecem uma quantidade. Neste caso, podem atribuir um valor e desta forma estão a criar flexibilidade de pensamento e a tomarem decisões sobre comparações.

O uso de diversas representações é um aspeto importante das tarefas a desenvolver. Segundo Gurl, Artzt e Sultan, (2013) um processo para trabalhar o conceito de razão decorre de representações de situações de vida real, do uso do valor unitário e de várias representações para resolver problemas, incluindo tabelas, gráficos e equações e percentagens. Trabalhar com estas representações permite a realização de comparações e o desenvolver várias maneiras de raciocinar.

Dole (2008) ressalta a importância do uso de tabelas para apoiar o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para ajudar os alunos a desenvolver estratégias mentais e apoiar as estratégias de pensamento para resolver problemas de proporção, a autora defende o uso de tabelas. As tabelas de relação incentivam a utilização de estratégias de número, como reduzir para metade, duplicar e multiplicar por 10. Uma tabela de relação é uma ferramenta que auxilia o atender e o identificar da relação entre duas quantidades. Pelo uso de tabelas de proporção, os alunos podem ser guiados a explorar o número de padrões e relacionamentos que ocorrem na tabela e considerar por que a relação entre as quantidades é multiplicativa.

Também Cramer, Post e Currier (1993) referem que, a partir das tabelas, os alunos têm a oportunidade de ver os diferentes padrões de números dentro e entre os espaços de medida, inerentes às situações proporcionais. Partindo de uma tabela, a construção do gráfico destaca a ideia de que em todas as situações proporcionais formam uma linha reta que passa pela origem. Ao comparar os padrões de números e gráficos de situações proporcionais e não proporcionais os alunos podem ver que situações proporcionais apresentam características únicas.

Por outro lado, Cramer, Post e Currier (1993) atendem a estudos que mostram que, para minimizar dificuldades dos alunos, estes podem efetuar experiências físicas com situações proporcionais e não proporcionais. Em tarefas de natureza exploratória, os alunos recolhem dados e elaboraram tabelas e gráficos, determinando regras para relacionar pares de quantidades, em que $y = mx$. Este tipo de atividade permite a evolução da compreensão sobre lidar com fator multiplicativo não inteiro e melhora o desempenho em situações cujo contexto não seja familiar.

De la Cruz (2013) destaca a importância em atender ao contexto e à estrutura numérica, ao selecionar tarefas voltadas para o raciocínio proporcional. Considera que os professores devem envolver os seus alunos em situações de resolução de problemas.

Inicialmente, o objetivo deve incidir no desenvolvimento da compreensão da proporcionalidade e da relação multiplicativa entre razões. As tarefas iniciais devem apresentar uma estrutura numérica que envolva números inteiros, para que as relações multiplicativas sejam facilmente percebíveis. O contexto do problema deve ser familiar aos alunos para que, mais facilmente adquiriram o sentido da proporcionalidade. Os professores, ao selecionar tarefas, devem atender à estrutura numérica e ao contexto, aspetos que influenciam o pensamento dos alunos e a forma, deles próprios, descobrirem modos de resolver os problemas.

2.4. Investigações sobre o ensino-aprendizagem da proporcionalidade

Tal como em Portugal, também noutros países o ensino da proporcionalidade direta centra-se na resolução de tarefas do manual, privilegiando o uso da regra do produto cruzado, regra de três simples (Cramer, Post & Currier, 1993; Dole et al. 2012). Dada a importância deste tópico matemático para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, têm vindo a ser realizados diversos estudos sobre o ensino-aprendizagem. Esses estudos envolvem, também, os fundamentos teóricos dos aspetos do desenvolvimento do raciocínio proporcional, alguns incluindo uma vertente empírica, cujos participantes são alunos ou professores. De um modo geral, focam-se nas dificuldades e estratégias dos alunos, bem como em aspetos do ensino e do próprio entendimento, sobre o raciocínio proporcional, por parte dos professores.

Por exemplo, Cramer e Post (1993) numa investigação no âmbito do *Rational Number Project*, focaram aspetos de relevo sobre o ensino-aprendizagem relacionados com o raciocínio proporcional. A investigação teve como base uma experiência de ensino, com tarefas que envolveram problemas criativos, envolvendo raciocínio proporcional. A análise do desempenho dos alunos permitiu avaliar a sua compreensão das relações multiplicativas e perceber se a variedade das tarefas, o seu contexto e a sua complexidade numérica dificultaram a sua resolução. Por análise da resolução das tarefas, os autores descobriram que os alunos tiveram mais sucesso quando a razão apresentava uma relação multiplicativa com um número inteiro como múltiplo de uma das quantidades. Quando essa relação não era um número inteiro, os alunos muitas vezes aplicaram estratégias aditivas. Esta estratégia é considerada um erro típico de raciocínio proporcional, que os investigadores consideram merecer discussão. Os investigadores destacaram que o contexto do problema, bem como a natureza das relações numéricas, influenciaram o desempenho dos alunos. Dos quatro contextos estudados, o contexto relacionado com escalas foi significativamente mais difícil para os alunos. No entanto, os autores destacaram que o uso de raciocínio proporcional não deve ser afetado radicalmente por uso de relações numéricas menos usuais ou pelo contexto do problema. Neste sentido, sugerem que os professores devem variar as relações numéricas e o contexto de problemas envolvendo raciocínio proporcional. Simultaneamente aconselham que se proporcione o uso de estratégias mais intuitivas, como o uso da constante de proporcionalidade e do fator de mudança. Referem também que, para uma aprendizagem significativa, os professores não atendam apenas ao conteúdo de livros didáticos, uma vez que estes centram o ensino no conhecimento processual (regra de três simples).

Mais recentemente, Tjoe e de la Torre (2014) analisaram a capacidade dos alunos do ensino básico na resolução de problemas proporcionais na descoberta do valor em falta e em diferenciar situações proporcionais de relações não-proporcionais. O estudo envolveu dois grupos distintos, em termos de níveis de desempenho, de alunos do 8.º ano. Foram tidos como dados de análise as resoluções de um teste que envolvia razões e proporções para descoberta de um valor em falta e problemas para reconhecimento da existência de proporcionalidade. Os resultados revelaram que os alunos revelaram melhor desempenho nos problemas de valor omisso, registando-se diferenças no desempenho entre os dois grupos de alunos. No entanto nos problemas de identificação da existência de proporcionalidade, registou-se baixo nível de desempenho. Os autores destacaram não se registar grandes diferenças nos resultados dos dois grupos de alunos, chegando a notar pior desempenho no grupo de alunos considerados de maior proficiência.

Uma análise das diferenças de desempenho entre os dois itens e dentro do mesmo grupo de alunos, mostrou que o efeito dos componentes estruturais dos problemas de identificação da existência de proporcionalidade contradiz, de certo modo, estudos anteriores sobre o efeito das diferenças nos componentes estruturais dos problemas de valor omisso. O estudo revelou uma variedade de evidências de que a capacidade de resolver problemas de valor omisso, de certo modo, não teve implicação direta na resolução de problemas de identificação da existência de proporcionalidade. Em particular, mostrou que, ter aptidão ou deter o mecanismo de resolução de problemas de valor omisso não é sinónimo de raciocinar proporcionalmente. Concluíram que, a experiência matemática dos alunos, em problemas de raciocínio proporcional, evoluiu para uma prática mecânica de resolução, deixando para trás qualquer avaliação subordinada ao pensamento crítico. O estudo demonstrou, também, que as caraterísticas estruturais dos problemas de valor omisso e de identificação da existência de proporcionalidade, afetaram o desempenho dos alunos. Os resultados foram ao encontro das preocupações de vários professores de Matemática sobre o uso de certas de estratégias de raciocínio proporcional e sugerem que a resolução de problemas de valor omisso não é condição suficiente par avaliar a capacidade dos alunos de pensar proporcionalmente. Deste modo, os autores salientaram a importância de melhorar o ensino e a preparação das aulas, enfatizando as discussões em da sala de aula sobre como comparar e alcançar diferentes formas de resolver situações proporcionais e não proporcionais. Na sua perspetiva, ajudar os alunos a adquirirem habilidade implica promover a modelação de problemas proporcionais e não proporcionais da vida real com a Matemática, fazendo uso do raciocínio proporcional no 6.º, 7.º e 8.º ano.

Nasution e Lukito (2015) desenvolveram uma investigação que visava perceber como os alunos do 5.º ano aprendiam proporções e como o seu raciocínio proporcional informal se desenvolvia para um nível mais formal. O objetivo de estudo centrou-se na questão: "Como os alunos do 5.º ano podem aprender a raciocinar proporcionalmente de maneira informal?". Foi realizado no ano letivo de 2013/2014, numa escola privada da Indonésia e envolveu 30 alunos. A recolha de dados incluiu várias fontes, registos vídeo, produções escritas e entrevistas aos alunos e notas de campo. Os autores desenvolveram uma IBD, assente numa base teórica que constituiu o alicerce para construção de materiais de apoio à aprendizagem, neste caso, cinco atividades a desenvolver numa experiência de ensino, para posterior análise retrospetiva. Para conceção dos materiais atenderam, também, aos princípios da Educação Matemática Realista. O estudo foi composto por quatro fases (i) projeto preliminar (ii) experiência piloto, (iii) experiência de ensino e (iv) análise retrospetiva.

Na primeira fase foi delineada a conjetura, associada a uma trajetória de aprendizagem hipotética. Na experiência piloto foi desenvolvida uma atividade com seis alunos, para posterior análise retrospetiva, de forma a perceber quais as possíveis trajetórias de aprendizagem e proceder aos ajustes necessários para se colocar em prática na sala de aula. A conjetura sobre a aprendizagem também foi ajustada. A experiência de ensino teve início com um teste inicial. Pela sua análise, os investigadores perceberam quais os conhecimentos preliminares e as estratégias que os alunos usaram, resumindo-se as tentativas de resolver o problema usando a sua compreensão sobre frações. Após a atividade em sala de aula e análise dos dados, os autores concluíram que é preciso mais tempo para desenvolver a capacidade de raciocinar proporcionalmente da forma informal até à formal, pois essa transição é composta por várias fases: (i) Raciocínio não-proporcional, (ii) Raciocínio proporcional informal, (iii) Raciocínio quantitativo, e (iv) Raciocínio proporcional formal. A maneira de estabelecer o raciocínio informal é iniciar o ensino-aprendizagem com um problema contextualizado para que os alunos reconheçam as situações onde as proporções podem ser usadas. Reconhecendo o problema, os alunos podem argumentar sobre as suas estratégias de resolução e desenhar seus modelos. Os autores ressaltam a importância dos modelos, representações pictóricas construídas pelos alunos, uma vez que estes desempenharam um papel importante na construção de uma ligação entre o conhecimento informal e a argumentação mais sofisticada. Na sua perspetiva, este aspeto estimula os alunos a entender a ideia de proporcionalidade.

Artut e Pelen (2015) realizaram uma pesquisa para investigarem as estratégias usada pelos alunos do 6.º ano na resolução de problemas e saber se as estratégias, por eles usadas, se alteravam consoante o tipo e a estrutura numérica dos problemas. O estudo envolveu 165 alunos do 6.º ano, escolhidos aleatoriamente, de três escolas públicas, no ano letivo de 2013/2014. O instrumento de recolha de dados foi um teste que continha problemas proporcionais e não proporcionais com 12 itens de natureza aberta, elaborados de acordo com os objetivos do currículo em vigor. A análise de dados foi descritiva a partir da avaliação das respostas dos alunos sobre os problemas e a comparação de diferentes categorias. A análise mostrou que os alunos usaram 7 estratégias diferentes na resolução de problemas proporcionais e 6 estratégias diferentes na resolução de problemas não proporcionais. Em problemas de valor omisso e de comparação, a análise revelou que os alunos apresentaram estratégias diferentes sendo a mais usada a do fator de mudança. Nos problemas não proporcionais, os alunos também usaram estratégias distintas, mas o uso de estratégias aditivas destacou-se, embora também tenham usado a estratégia multiplicativa. Em problemas de situações proporcionais que envolviam números inteiros e números decimais quer em relações "entre" e "dentro" das unidades de medida, os resultados do estudo indicaram que a estrutura numérica dos problemas afetou as estratégias utilizadas. Os alunos revelaram tendência para usar estratégias multiplicativas na presença de razões inteiras e usar estratégias aditivas na ausência de razões inteiras, independentemente das situações serem proporcionais ou não proporcionais. Isso mostra que os alunos têm dificuldade em distinguir situações proporcionais e não-proporcionais. Os autores sugerem que os alunos devem ser encorajados a perceber as estruturas matemáticas subjacentes aos problemas, para que possam ser bem-sucedidos ao distinguir problemas proporcionais e não proporcionais. Nesse sentido, os alunos devem ser confrontados com problemas proporcionais e não-proporcionais com várias estruturas numéricas, a fim de superar o uso excessivo da proporcionalidade com estratégias errôneas decorrentes da estrutura numérica dos problemas.

Num estudo focado nos professores, Kastberg, D'Ambrosio e Davis (2012), no relatório *Understanding proportional reasoning for teaching,* relatam um estudo empírico envolvendo professores e alunos. O seu estudo focou-se no trabalho do professor na planificação de aulas e de tarefas que fomentassem o uso do raciocínio proporcional. Os autores apresentaram como importante para a planificação de tarefas com o objetivo de apoiar o desenvolvimento dos alunos, que os professores compreendam a maneira de pensar dos alunos e antecipem os seus raciocínios e suas estratégias de resolução. Salientaram, também, a importância do uso de várias ferramentas, como tabelas, para relações proporcionais e atividades contextualizadas, para que os alunos desenvolvam estratégias de resolução. Os professores foram desafiados a planear o percurso de ensino-aprendizagem, atendendo a instruções e questões que apoiassem o raciocínio proporcional. Eles próprios começaram por resolver as tarefas que selecionaram. Posteriormente as suas resoluções foram analisadas e comparadas com as resoluções dos alunos.

A análise de dados revelou que os professores recorreram a estratégias algorítmicas eficientes mas de reduzida compreensão para os alunos. Por sua vez, os alunos, ao resolverem as tarefas que constituíam novas experiências, usaram o conhecimento que detinham revelando compreensão e discussão sobre objetivo das questões. Os alunos, intuitivamente, recorreram ao uso de várias estratégias envolvendo os números racionais, diferentes das usadas pelos professores. Verificou-se um desajuste entre o que os professores consideravam que eram as soluções naturais e as resoluções intuitivas que os alunos inferiram. A análise do trabalho dos alunos permitiu estabelecer uma ligação entre os formalismos tipicamente utilizados para resolver problemas e as compreensões intuitivas que desenvolveram. Para os autores, essa perceção constitui uma forma de compreender como se processa o desenvolvimento do aluno e de estabelecer uma base para a planificação do ensino. As conclusões ressaltaram a importância dos professores promoverem em sala de aula discussões sobre as estratégias usadas pelos alunos, o que constitui uma oportunidade para construir matemática apta e flexível.

Weber, Pierone e Strom (2016) desenvolveram um estudo com intuito de perceber que argumentos os professores de Matemática usam na resolução de tarefas destinadas a suscitar o raciocínio proporcional. Atenderam aos problemas revelados pelos professores nas operações numéricas que envolviam relacionar quantidades. O estudo envolveu a realização de entrevistas semiestruradas a nove professores. Ao longo da realização de cinco entrevistas tentaram investigar e caracterizar o pensamento dos professores quando trabalhavam em tarefas que envolviam relações proporcionais. Inicialmente, tinha-se que os professores atendiam às quantidades e ao uso de operações quantitativas. Considerava-se que, uma operação quantitativa é a forma de combinar ou comparar duas quantidades, por processo aditivo ou multiplicativo, embora não se deva confundir com a forma de combinar ou comparar dois números. Os dados indicaram que os professores não atenderam às quantidades e operaram apenas com os números, chegando a recorrer inapropriadamente a relações aditivas para combinar duas quantidades, sem relacionar proporcionalmente as quantidades.

Em Portugal, o ensino da proporcionalidade direta enfatiza a aplicação de regras e procedimentos, nomeadamente a regra de três simples como forma simples de resolução de situações proporcionais, tanto a nível do currículo como dos manuais escolares. Neste campo foram feitos alguns estudos de mestrado e de doutoramento, muitos desenvolvendo experiências de ensino, alguns integraram estudos de caso ou análise de percursos de aprendizagem de alunos. Silvestre (2006) realizou um estudo seguindo uma metodologia qualitativa, baseada em estudos de caso e integrando entrevistas realizadas a três alunos. O estudo baseou-se numa unidade de ensino com atividades de investigação/exploração e resolução de problemas, com recurso ao uso da folha de cálculo. O seu objetivo era analisar o modo como se desenvolvia a aprendizagem da proporcionalidade nos alunos de 6.º ano e saber se estes distinguiam situações de proporcionalidade direta de situações onde tal relação não existia; quais os sistemas de representação que utilizavam e que estratégias usavam na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta. Os resultados mostraram que, de um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existia uma relação proporcional daquelas em que tal relação não existia e que se mostraram capazes de mobilizar os conhecimentos adquiridos ao longo do desenvolvimento da unidade de ensino. A identificação de regularidades dentro e entre grandezas foi a estratégia usada para verificar a existência de proporcionalidade direta. Para a resolução de problemas, os alunos desenvolveram estratégias multiplicativas próprias associadas às estratégias funcionais e escalares. A representação preferida consistiu no uso de tabelas para organizar e ajudar na interpretação dos dados.

O estudo de Costa (2007) teve o intuito de analisar o raciocínio proporcional dos alunos antes e depois do ensino formal da Proporcionalidade Direta. O estudo foi realizado numa turma do 6.º ano com 28 alunos tendo como objetivo saber que tipos de estratégias os alunos usavam, em que situações usavam estratégias mais formais e o modo como identificavam situações em que existia ou não proporcionalidade direta. Para a recolha de dados foi utilizado um teste inicial, reflexões das aulas, um teste final e entrevistas a 6 alunos. O estudo permitiu perceber que mesmo antes do ensino formal do tema os alunos eram capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias de forma a resolver tarefas envolvendo raciocínio proporcional. As estratégias apresentadas foram bastante diversificadas, incluindo estratégias multiplicativas, escalares e funcionais. Ao longo do trabalho os alunos foram adotando estratégias mais formais como o produto cruzado. De um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que não existe.

Pelo seu lado, Sousa (2010) realizou um estudo para analisar o raciocínio proporcional dos alunos na resolução de tarefas contextualizadas envolvendo os conceitos de Proporcionalidade Direta e Inversa. O objetivo do estudo era perceber que estratégias os alunos usavam para resolver problemas de proporcionalidade direta ou inversa, que evolução demonstravam na forma de representar funções de proporcionalidade direta ou inversa, qual o papel dos seus conhecimentos informais na resolução de problemas de proporcionalidade direta ou inversa, bem como as dificuldades que revelavam. O estudo foi realizado numa turma de 17 alunos do Curso de Formação e Educação (tipo 2) de Manutenção Hoteleira. A parte empírica do estudo decorreu numa escola rural, E.B. e Secundária na ilha da Madeira, no segundo período do ano de 2008/09, da qual a investigadora não era professora da disciplina de Matemática, seguindo um *design* de estudo de caso. A recolha de dados envolveu a realização de um diário de aula, em que a principal fonte de dados reportou-se às produções escritas dos alunos e a entrevistas efetuadas individualmente a dois alunos. Os alunos entrevistados foram escolhidos por terem desempenhos e atitudes diferentes na disciplina de Matemática.

Da análise feita aos dados recolhidos, concluiu-se que, estas atividades letivas contribuíram para motivar os alunos para uma aprendizagem mais profunda, significativa e eficaz da Matemática e para uma visão mais positiva e adequada das disciplinas envolvidas, promovendo o desenvolvimento da resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa. Os alunos revelam preferência por tabelas para representar os dados, tendo em vista não só organizá-los mas também interpretar os problemas. As suas dificuldades estão mais presentes nas representações, gráfica e algébrica. Os resultados mostram que, mesmo antes do ensino formal do tema, os alunos foram capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias de forma a resolver tarefas envolvendo raciocínio proporcional. De um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta daquelas em que não existe.

Num segundo estudo de Silvestre (2012), a autora procurou analisar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio proporcional dos alunos do 6.º ano, ou seja como se desenvolvia o raciocínio proporcional no quadro de uma unidade de ensino marcada por tarefas de cunho investigativo/exploratório e problemas, pela utilização da folha de cálculo e pelo trabalho em pequeno grupo na sala de aula. A unidade de ensino de natureza exploratória foi desenvolvida em duas turmas com descrição e análise dos percursos de aprendizagem de quatro alunos, dois de cada turma. A recolha de dados incluiu a observação dos alunos na realização de tarefas, gravações em vídeo, a recolha de cópias dos registos escritos dos alunos, testes e entrevistas. Do estudo concluiu-se que os alunos melhoraram a sua capacidade em distinguir relações de proporcionalidade direta de relações que não o são, embora alguma dificuldade tenha persistido após a unidade de ensino. Também concluiu que, antes da unidade de ensino, os alunos tinham um desempenho diferente na resolução de problemas que envolviam a relação de proporcionalidade direta, usando frequentemente estratégias não proporcionais e pré-proporcionais na resolução de problemas de valor omisso e estratégias proporcionais na resolução de alguns problemas de comparação. No trabalho realizado, os alunos usaram várias representações, incluindo elementos pictóricos e razões. Durante e no final da unidade de ensino os alunos revelaram tendência para usar estratégias proporcionais bem como tabelas em conjunto com linguagem natural escrita. O desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos pareceu estar relacionado com o trabalho realizado em torno da exploração da natureza multiplicativa da proporcionalidade direta e o uso de múltiplas representações.

Pedro (2013) desenvolveu uma experiência de ensino no âmbito dos tópicos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta. A unidade, com sete tarefas, foi trabalhada numa turma do 6.º ano e envolvia sequências pictóricas e regularidades numéricas, algumas das quais com o recurso à folha de cálculo, com o objetivo de promover a capacidade de generalização e a introdução progressiva da linguagem simbólica, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O estudo pretendeu identificar as estratégias de generalização e as representações que os alunos utilizavam para exprimir essa generalização, bem como o modo como os alunos evoluíram. A recolha de dados baseou-se nas resoluções escritas de quatro alunos. Ao longo do trabalho os alunos foram gradualmente recorrendo a estratégias de tipo funcional e na sua maioria foram progredindo no uso de uma linguagem mais formal. No entanto, em algumas tarefas, os alunos voltaram a usar linguagem natural, talvez pelo grau de dificuldade da estrutura envolvida ou da sua familiaridade e confiança com a estratégia adotada. Ao transitarem das tarefas em que a relação funcional surgia sob a forma de sequência pictórica para duas tarefas que apresentavam situações de proporcionalidade direta em tabelas, os alunos foram capazes de usar raciocínios funcionais, apoiados em relações numéricas e usaram linguagem simbólica.

O estudo de Garcez (2016) baseou-se num trabalho realizado com uma turma de 6.º ano ao longo de treze aulas com aplicação de oito tarefas, envolvendo sequências pictóricas e regularidades numéricas, contemplando os tópicos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta. A autora tentou identificar as estratégias de generalização que os alunos utilizavam, assim como as representações a que recorriam para exprimir a generalização e de que forma estas contribuíram para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Analisou também o desenvolvimento do raciocínio proporcional com o objetivo perceber de que modo o trabalho realizado podia contribuir para o processo de generalização através de diferentes formas de representação. A análise dos dados reportou-se às resoluções escritas de cinco alunos. Os resultados mostraram que, mesmo antes do ensino formal do tema, os alunos são capazes de utilizar diferentes tipos de estratégias na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade direta e conseguem desenvolver raciocínios funcionais, apoiados em relações numéricas. De um modo geral, os alunos distinguiram situações em que existe proporcionalidade direta de situações em que não existe e identificam a constante de proporcionalidade. No entanto, demonstram alguma dificuldade em lhe atribuir um significado de acordo com a situação.

Capítulo III

Estudo-Piloto

Com intuito de preparar o trabalho de investigação e a conceção de tarefas estruturadas que permitam desenvolver atividade matemática no âmbito de uma experiência de ensino realizei um estudo-piloto. Este contribuiu significativamente para o planeamento e elaboração das tarefas conducentes à aprendizagem dos alunos. Suscitou, ainda, uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido, seus pontes fortes e aspetos a melhorar, antecipando dificuldades a ter em conta no planeamento da unidade de ensino. Estes aspetos ajudaram a melhor organizar e preparar a investigação e a aperfeiçoar a definição da conjetura e das questões de estudo.

3.1. Primeira fase

Após a decisão tomada sobre a temática do estudo, o meu primeiro objetivo foi perceber que estratégias os alunos usavam na resolução de situações com relações proporcionais e não proporcionais. Numa abordagem exploratória sobre a proporcionalidade direta com aplicação de raciocínio proporcional, propus uma tarefa (Anexo 4) envolvendo problemas pseudoproporcionais (onde não existe proporcionalidade), de valor omisso (apresentam três elementos de uma proporção e solicitam a determinação do quarto elemento) e de comparação (para análise de existência de proporção) (Silvestre & Ponte 2013).

A tarefa. Partindo de uma tarefa (Silvestre, 2012) envolvendo situações de proporcionalidade direta, de comparação e de valor omisso, e problemas pseudoproporcionais, pretendi compreender o que os alunos retiveram em termos de conceitos de proporcionalidade direta e que estratégias de resolução utilizavam, uma vez que o tópico da proporcionalidade direta, já havia sido lecionado no final do 1.º período. A turma trabalhou a tarefa no final do 2.º período, em duas aulas de 90 minutos, a primeira com a apresentação e a exploração da tarefa e a segunda com a discussão em sala de aula. A tarefa foi trabalhada em três fases, tal como indicado em Ponte (2005): (i) introdução; (ii) exploração, um trabalho realizado a pares por forma a existirem momentos de interação, (iii) discussão em grupo, possibilitando a turma partilhar as suas estratégias de resolução e conclusões.

Participantes. A tarefa foi trabalhada numa turma de 6.º ano, com 29 alunos, da qual fui professora titular. Os alunos desta turma apresentavam na sua maioria um nível médio de desempenho (numa avaliação quantitativa os alunos são avaliados com nível três e quatro), destacando-se um pequeno grupo de alunos com nível acima da média, com facilidade em apresentar estratégias, justificações e argumentações.

Metodologia. Este pequeno momento investigativo seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa, pois pretendia analisar e compreender as estratégias de resolução e a aprendizagem que os alunos efetuaram e assim aprofundar o meu conhecimento, sobre como os alunos raciocinam e que dificuldades apresentam. As produções dos alunos foram analisadas a partir de uma tabela cujas categorias incidiram sobre as estratégias de resolução usadas pelos alunos com base na sua natureza: (i) estratégia não proporcional ou de natureza aditiva; (ii) estratégia pré-proporcional; (iii) estratégia proporcional de natureza multiplicativa, como apresentado por Silvestre e Ponte (2013). Para além destas três categorias de análise ainda foi possível analisar se os alunos reconheciam situações de existência de relação proporcional.

Resultados. Pela análise das produções dos alunos foi possível verificar que estes usaram estratégias diversificadas, dependendo do contexto. Em problemas de comparação para averiguar a existência de proporcionalidade, um número considerável de alunos adotou estratégias aditivas por composição/decomposição ou aplicou a identidade fundamental das proporções, efetuando o produto dos extremos pelo produto dos meios. Para resolução de problemas de valor omisso os alunos usaram relações multiplicativas (por um fator comum). Também recorreram com frequência ao uso da regra de três simples. Os alunos não revelam dificuldades significativas na distinção entre situações de relação proporcional e situações não proporcionais, mas, no problema pseudoproporcional, cerca de metade da turma não reconheceu a existência de relação não proporcional.

Como a turma já havia trabalhado este tópico, muitos alunos usaram a regra de três simples como estratégia de resolução nos problemas de valor omisso, no entanto nem sempre obtendo a resposta correta. Num dos problemas (proporcionalidade inversa), um grande número de alunos, ao aplicar a regra, alcançou um resultado impossível. Só em discussão coletiva, orientada pela professora e quando questionados quanto à possibilidade do resultado, é que ponderaram. Neste momento surgiu um impasse, pois não sabiam explicar como era possível a regra de três simples, que corretamente representada, não era processo de resolução. Convidados a intervir, diversos alunos que aplicaram uma estratégia multiplicativa (usando o fator escalar), apresentaram à turma a sua estratégia, que conduzia ao resultado adequado.

Conclusão. Pode constatar-se que o raciocínio proporcional vai de facto muito além da aplicação da regra de três simples. A análise da atividade dos alunos mostrou que, muitos utilizaram esta estratégia sem uma compreensão clara do que estavam a fazer, o que limitou a sua capacidade de resolução de problemas. Foi notório quando um resultado não era possível, por vezes os alunos não assumiram uma atitude crítica perante tal, e mesmo que tivessem perceção de erro, dificilmente procuram outra estratégia, o que sugeriu falta de flexibilidade na utilização de estratégias. Em suma, retiradas algumas conclusões sobre as estratégias que os alunos usaram, tornou-se evidente que, para promover o desenvolvimento do raciocínio proporcional, é importante proporcionar tarefas de exploração e discussões coletivas em sala de aula que envolvam a comunicação de várias estratégias.

3.2. Segunda fase

Por forma a planear tarefas a desenvolver posteriormente na experiência de ensino, e atendendo a aspetos importantes a integrar nas aprendizagens dos alunos, concebi três tarefas que incluíssem a aplicação de conhecimentos e o estabelecimento de conexões entre razões e proporções. Procurei usar diversas representações de razão, proporção e envolver a noção de constante de proporcionalidade, de modo a promover a compreensão de relações multiplicativas e alcançar generalizações. Pretendi com este trabalho perceber se os alunos aprofundavam a sua compreensão em relação aos conceitos básicos essenciais (Lobato et al., 2010) e se resolviam problemas de valor omisso sem recorrerem à regra de três simples, mas usando outras estratégias, nomeadamente recorrendo à constante de proporcionalidade, e se alcançavam generalizações.

As tarefas. Para elaborar as tarefas, atendi ao quadro apresentado Lobato et al. (2010), (ver p. 19), com referência aos conceitos básicos a serem compreendidos pelos alunos, nomeadamente o estabelecer de conexões entre razões e proporções como forma de desenvolver raciocínio proporcional. O ponto de partida focou o aprofundar o conceito de razão e a relação entre duas quantidades ou grandezas, podendo uma razão ser representada por quociente ou unidade composta. Outro aspeto que tive em conta, atendeu, à distinção entre as noções de razão e fração, quando uma razão pode ou não ser considerada fração e como a razão pode ser considerada unidade de medida.

Ainda na conceção das tarefas (Anexo 5) tive em atenção trabalhar com proporções para desenvolver a capacidade nos alunos de relacionar duas quantidades e formar um conjunto de razões equivalentes. O contexto dos problemas era familiar aos alunos mas envolveu trabalhar com diferentes tipos de grandezas (discretas e contínuas) e com vários valores numéricos. Alguns itens integravam a constante de proporcionalidade para aprofundar o seu significado e enfatizar o seu uso como estratégia de resolução. Nestas tarefas foram integradas situações com problemas de comparação, situações de análise da existência de proporcionalidade direta, situações de valor omisso e pseudoproporcionais.

Este trabalho foi realizado com os alunos no final do ano letivo, na penúltima semana de aulas. As duas primeiras tarefas foram trabalhadas em 4 blocos de 90 minutos, um primeiro bloco de 90 minutos foi destinado às duas fases, a de apresentação e de exploração a pares com interação entre alunos e o segundo bloco destinado à discussão coletiva. Só um pequeno grupo de alunos realizou a terceira e última tarefa. Os restantes alunos da turma estiveram ausentes por participarem em atividades de final de ano. Assim, para esta tarefa, a fase da discussão já não ocorreu por falta de tempo. No entanto a análise, das produções escritas, permitiu recolher informação sobre o que os alunos apreenderam com as duas tarefas anteriores, em termos de construção de proporções e se alcançaram generalizações.

Participantes. Uma turma de 6.º ano, na qual também fui professora titular, era formada por 31 alunos, no geral com um nível bastante bom em termos de desempenho. Os alunos eram muito participativos em expor ideias, estratégias e justificações. A turma apresentava um número reduzido de elementos com algumas dificuldades mas que interagiam bem com os colegas existindo um clima de entreajuda. Foi uma turma que apresentou uma boa envolvência no trabalho da aula.

Metodologia. À semelhança da primeira fase do estudo piloto, esta segunda fase de investigação, apresentou uma abordagem qualitativa e interpretativa, no sentido de perceber se os alunos estabeleceram conexões entre os diversos conceitos básicos relativos ao raciocínio proporcional, que estratégias de resolução resultaram e se alcançaram generalizações. Surgiu uma pequena investigação sobre a minha própria prática numa experiência de ensino com intuito de perceber se as tarefas estavam bem estruturadas e levavam à promoção de aprendizagem. Pela análise da atividade e produção dos alunos tentei perceber como estes pensaram, que estratégias usaram e se efetuaram generalizações. Em suma, este pequeno estudo pretendeu esboçar uma Investigação Baseada em *Design.*

As produções dos alunos foram analisadas, sendo a síntese, dos dados recolhidos, registada em tabelas. As tabelas envolveram categorias relativas a níveis da compreensão e estabelecimento de relações entre os conceitos essenciais, estratégias de resolução (aditivas, pré-proporcionais ou proporcionais), generalizações e o nível de adequação das tarefas.

Resultados. Pela análise das produções dos alunos, pude constatar que estes compreenderam a distinção entre as noções de razão e fração. De um modo geral, os alunos conseguiram identificar quando uma razão representava uma fração mas revelaram dificuldades no conceito de razão como medida. Os alunos calcularam e identificaram constante de proporcionalidade, no entanto poucos relacionaram a constante de proporcionalidade com o seu significado. Contudo, usam-na para alcançarem uma expressão geradora (generalização) ou para identificarem a existência de proporcionalidade direta.

Um número considerável de alunos formou proporções e razões equivalentes usando um fator multiplicativo. No preenchimento de tabelas com valores omissos, os alunos recorreram a fatores multiplicativos, mas também usaram o cálculo de metades ou dobros, efetuando composições ou decomposições até alcançarem o valor em falta, ou usaram estratégias aditivas partindo de valores conhecidos. Apresentaram algumas dificuldades em trabalhar com números racionais e numerais mistos, na maior parte das vezes usando dízimas infinitas e não usando a representação em número fracionário.

Nos problemas pseudoproporcionais, nenhum aluno identificou a existência de uma relação não proporcional. Em problemas de comparação de reduzida complexidade e com números inteiros, os alunos resolveram as tarefas com alguma facilidade. Para verificar a existência de proporcionalidade direta, utilizaram um valor multiplicativo para constatar se formavam razões equivalentes, ou calcularam o quociente das razões. Se a situação implicava dois processos, efetuar uma relação proporcional e posteriormente uma não proporcional por relação aditiva (por exemplo, acrescentar um valor ao resultado, a outro descoberto), apresentaram maiores dificuldades.

Conclusão. Atendendo aos resultados e ao trabalho desenvolvido, percebi a relevância em proporcionar tarefas que trabalhem várias representações e vários valores numéricos, bem como várias grandezas, uma vez que possibilitam aos alunos estabelecer relações entre elas e lidar com situações de diversos contextos. Considero que se deve enfatizar o trabalho com números racionais, nomeadamente fracionários e numerais mistos, proporcionando aos alunos a oportunidade para desenvolverem agilidade para trabalharem com diversos valores numéricos, pois nestas situações apresentam mais dificuldades. A exploração de situações problemáticas e a discussão em sala de aula sobre as diversas estratégias e representações, para análise da mais adequada, possibilitam uma melhor compreensão.

Um aspeto importante prende-se com a necessidade de proporcionar situações que permitam a compreensão da noção de razão como comparação entre duas quantidades mas também como relação de medida, no intuito de levar os alunos a usarem esse conceito como estratégia na descoberta de valores omissos ou na comparação de situações proporcionais.

Além disso, problemas pseudoproporcionais deverão ser intercalados com os de comparação e de valor omisso, uma vez que os alunos fixam-se nas relações proporcionais, e acabam por não distinguir situações que não apresentam proporcionalidade, neste tipo de problemas.

Em termos de constante de proporcionalidade, o trabalhar da sua noção e da relação unitária de umas das grandezas, é um suporte à generalização e uma forma de os alunos recorrerem ao seu uso na resolução tanto em situações problemáticas de comparação, como de valor omisso. No entanto, e por acompanhar o trabalho dos alunos, percebi que o relacionar da constante de proporcionalidade em situações de generalização ou construção de uma expressão geradora para descoberta de qualquer uma das grandezas a partir da outra (a razão relaciona duas grandezas) é uma estratégia difícil para os alunos pois requer uma profunda compreensão do conceito e a aplicação de raciocínio proporcional.

3.3. Balanço do estudo-piloto

A realização do estudo piloto proporcionou-me uma excelente experiência e uma base para reflexão sobre como organizar o estudo a realizar. Ao ponderar sobre o trabalho desenvolvido compreendi que a conceção das tarefas tinha muitos aspetos a melhorar, pois revelaram falhas quer de redação, quer na estrutura. Alguns itens teriam de ser reformulados ou mesmo retirados. Compreendi, também, a pertinência de melhorar o encadeamento dos itens.

A conceção de tarefas para uma experiência de ensino, requer um planeamento e uma análise cuidadosa, sendo uma atividade complexa que exige ter presente uma estrutura coerente que leve os alunos em atividade exploratória a evoluir e a estabelecer conexões e inferências culminado no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Outro aspeto que o estudo piloto me permitiu compreender, diz respeito à necessidade de aprofundar conhecimentos sobre o tópico, para que eu própria possa adquirir mais agilidade no trabalho, exploração e interligação dos conceitos, e assim me permita planear um ensino eficiente, a desenvolver em sala de aula, antecipando quais as dificuldades dos alunos para lhes oferecer meios e estratégias para as superarem e desse modo contribuir para uma aprendizagem mais eficaz.

Capítulo IV

A Unidade de Ensino

Neste capítulo apresento a unidade de ensino que serve de base a este estudo, elaborada a partir da conjetura de ensino-aprendizagem que se foca na exploração de uma sequência de tarefas assente nas noções de razão, fração e equivalência de razões e em várias representações como proporções, tabelas e gráficos, averiguando se constitui um alicerce para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, em particular, da noção de constante de proporcionalidade. Apresento as opções a que atendi para o planeamento da unidade de ensino e na conceção das tarefas, fazendo referência à dinâmica de sala de aula e à forma de avaliação do trabalho realizado, decorrentes da revisão de literatura e das orientações curriculares. Por fim, apresento os materiais elaborados para a experiência de ensino, com referência a cada tarefa e fichas de avaliação, bem como a planificação da unidade de ensino incluindo as competências a alcançar.

4.1. A unidade de ensino como parte de uma Investigação Baseada em *Design*

Este estudo decorre de numa Investigação Baseada em *Design* (IBD), integra o objetivo de estudar processos de aprendizagem ou de mudança e a forma de os promover em contextos naturais focando a aprendizagem dos alunos (Ponte et al., 2016). A conjetura formulada é a diretriz para implementar a experiência de ensino através de uma sequência de tarefas elaborada para apoiar os processos de aprendizagem (Nasution & Lukito, 2015). A conceção dos materiais teve em conta as orientações curriculares do PMEB, (ME, 2007 e MEC, 2013) atendendo aos objetivos definidos nos atuais documentos oficiais portugueses e referências do documento

Princípios e Normas para a Matemática (NCTM, 2007) e a base teórica, componente da revisão de literatura, apresentada no capítulo II.

Uma vez que o desenvolvimento do pensamento proporcional é um processo que se gera lentamente, revestindo-se de alguma complexidade, a unidade de ensino foi concebida para tentar gerar soluções eficazes e praticáveis tentando resolver ou pelo menos, agilizar a aprendizagem de conceitos que ampliem a compreensão da proporcionalidade e promovam o desenvolver do raciocínio proporcional, nos alunos, e no sentido de testar a conjetura formulada, que assenta na exploração de uma sequência de tarefas assente nas noções de razão, fração e equivalência de razões e em várias representações como proporções, tabelas e gráficos, averiguando se constitui um alicerce para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, em particular, da noção de constante de proporcionalidade. As tarefas que constituem os referidos materiais de ensino, a aplicar durante a experiência de ensino e o trabalho resultante, são posteriormente foco de análise retrospetiva (Gravemeijer, 2016), com objetivo de compreender as implicações do trabalho desenvolvido e o progresso da compreensão dos alunos. A realização da unidade no contexto de sala de aula parte da exploração das tarefas que os alunos são convidados a resolver, simultaneamente são incentivados a participar em tipos de discurso com normas de participação estabelecidas (Cobb et al. 2003).

4.2. A unidade de ensino e as orientações curriculares

O ensino da proporcionalidade direta deve assentar na construção, com compreensão, de relações multiplicativas e os alunos devem ganhar habilidade em relacionar quantidades da mesma natureza e de naturezas diferentes, aspeto que promove a progressão do raciocínio proporcional.

O tópico constitui um aspeto do domínio da Álgebra, a trabalhar desde os primeiros anos de escolaridade, como apresentado no Programa *de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), que a nível do 1.º ciclo integra a abordagem a ideias algébricas no trabalho com sequências e a estabelecer relações entre os números e as operações (p. 7). A nível do 1.º e 2.º ano, este documento apresenta como objetivo específico o elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números. A nível do 3.º e 4.º ano, o tópico apresenta como objetivos: (i) investigar regularidades numéricas; e (ii) resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional. Indica como sugestões metodológicas o explorar regularidades numéricas, os múltiplos e o trabalhar com tabelas com relações proporcionais como representação de apoio à resolução de problemas. Já no 2.º Ciclo, o tópico da Proporcionalidade Direta, integra como objetivos específicos: (i) compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade; (ii) utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões; e (iii) resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta. O documento apresenta ainda como sugestões metodológicas: (i) envolver a distinção de situações em que não existe proporcionalidade de situações em que existe, solicitando neste caso, a contante de proporcionalidade; (ii) usar situações que envolvam percentagens e escalas, e a análise de tabelas e gráficos; e (iii) propor situações que permitam verificar a propriedade fundamental das proporções (p. 41). Indica ainda o trabalho de relações associadas a sequências numéricas e a proporcionalidade direta, como uma relação importante no desenvolvimento do pensamento algébrico presente em muitas situações do quotidiano dos alunos.

As atuais orientações curriculares constantes do *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (MEC, 2013), iniciam o trabalho com sequências e regularidades integrado no Domínio dos Números e Operações a nível do 2.º ano. O principal objetivo passa pela resolução de "problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência dada a lei de formação e a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida" (p. 9). No 6.º ano, o Domínio da Álgebra integra três subdomínios: (i) Potências de expoente natural (ii) Sequências e Regularidades" e (iii) Proporcionalidade Direta. Para o tópico da Proporcionalidade Direta são apresentados como conteúdos de ensino: a noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante proporcionalidade; proporção, extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades e regra dos três simples; escalas em mapas; problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta grandezas mutuamente dependentes. As Metas Curriculares, no mesmo documento, apresentam descritores que de forma pormenorizada indicam o que os alunos devem ser capazes de identificar, reconhecer, determinar e saber para relacionar grandezas diretamente proporcionais, nomeadamente:

. Identificar uma grandeza como «diretamente proporcional» a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica também multiplicada por esse número.

. Reconhecer que uma grandeza é diretamente proporcional a outra da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante e utilizar corretamente o termo «constante de proporcionalidade».

. Reconhecer que se uma grandeza é diretamente proporcional a outra então a segunda é diretamente proporcional à primeira e as constantes de proporcionalidade são inversas uma da outra.

. Identificar uma proporção como uma igualdade entre duas razões não nulas e utilizar corretamente os termos «extremos», «meios» e «termos» de uma proporção.

. Reconhecer que numa proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

. Determinar o termo em falta numa dada proporção utilizando a regra de três simples ou outro processo de cálculo.

. Saber que existe proporcionalidade direta entre distâncias reais e distâncias em mapas e utilizar corretamente o termo «escala».

Na resolução de Problemas:

. Identificar pares de grandezas mutuamente dependentes distinguindo aquelas que são diretamente proporcionais.

. Resolver problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta. (p. 45)

A proporcionalidade direta envolve a capacidade de pensar proporcionalmente e a compreensão sobre as relações multiplicativas que se podem estabelecer entre e dentro das medidas de grandeza (Artut & Pelen, 2015; Lamon, 2012; Silvestre, 2012), e o implícito aprofundamento dos aspetos de covariação e de invariância.

No entanto, estes aspetos não têm merecido a valorização necessária, no ensino em Portugal e nos outros países. Quando ocorre o trabalho com grandezas diretamente proporcionais, o ensino foca-se basicamente na transmissão de regras e procedimentos mecanizados, como a propriedade fundamental das proporções e a regra de três simples, não enfatizando a compreensão das relações existentes entre duas quantidades.

A unidade de ensino procura apresentar uma alternativa à aprendizagem baseada na memorização de regras mecanizadas. Procura promover nos alunos a descoberta de modos de resolução e sua discussão em sala de aula, enfatizando formas de pensar e modos de relacionar quantidades, envolvendo o sentido de covariação e de invariância, nas relações multiplicativas.

4.3. Planificação da unidade de ensino

O planeamento e a conceção da unidade de ensino atende aos objetivos constantes nas orientações curriculares, apresentadas nos diversos documentos oficiais, interligando com aspetos fundamentais identificados pela revisão de literatura sobre a proporcionalidade direta e o raciocínio proporcional. Simultaneamente considera os aspetos sobre como os alunos aprendem. Os materiais produzidos para a experiência de ensino assentam numa unidade de ensino constituída por uma sequência de tarefas organizadas de modo coerente, envolvendo várias representações e contextos promotores de aprendizagem. O conjunto de aulas é planeado para ser desenvolvido ao longo de 22 tempos de 50 minutos distribuídos por cinco tempos semanais, em que dois desses tempos decorrem consecutivamente num dia da semana.

A planificação também atende à componente teórica do documento *Princípios e Normas para a Matemática* (NCTM, 2007), no sentido em que a aprendizagem da proporcionalidade direta se desenvolve através do trabalho com as noções de proporções, percentagem, semelhanças, equações lineares, declive, frequência relativa e probabilidades. A conceção das tarefas pressupõe atividade que desenvolva o raciocínio proporcional. Desse modo, envolve a capacidade de reconhecer quantidades relacionadas proporcionalmente e usar números, tabelas, gráficos e equações para relacionar e pensar sobre quantidades. Simultaneamente, e como defende Lamon (2012), promove o trabalho com frações, razões, constante de proporcionalidade, que propicia a raciocinar proporcionalmente. Dá, também, oportunidade para o uso do raciocínio proporcional no sentido de desenvolver a habilidade de detetar, expressar, analisar e explicar relações proporcionais.

A planificação atende, também, ao que refere de la Cruz (2013) no sentido de que a seleção de tarefas procura envolver os alunos na resolução de problemas, voltados para o raciocínio proporcional, uma vez que convida a que eles próprios desenvolvam as suas estratégias de resolução. Contudo a elaboração ou seleção de tarefas implica atender ao contexto e à estrutura numérica, uma vez que são dois aspetos que condicionam o desempenho dos alunos. Deste modo, e como a autora argumenta, uma vez que os alunos neste nível estão a desenvolver a sua compreensão inicial sobre a proporcionalidade, as tarefas iniciais apresentam um contexto que lhes é familiar e uma estrutura numérica que relaciona as quantidades representadas por números pequenos e inteiros, para que as relações multiplicativas sejam facilmente percebidas, decorrendo num maior sucesso na descoberta de resoluções.

Ponte e Quaresma (2015) referem que a natureza das tarefas deve ser diversificada, incluindo exercícios, problemas, investigações e explorações. Os exercícios são tarefas estruturadas de desafio reduzido que visam sobretudo a consolidação de conhecimentos e os problemas são tarefas estruturadas de desafio elevado que visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno possui. Já as investigações são tarefas abertas de desafio elevado que visam o desenvolvimento de novos conceitos ou o uso de conceitos já conhecidos. As explorações são tarefas abertas de desafio reduzido que visam, sobretudo a construção de novos conceitos.

As tarefas selecionadas para esta unidade de ensino incidem em exercícios, problemas e explorações, uma vez que se pretende que os alunos inicialmente, com tarefas de exploração de menor desafio, vão intuitivamente construindo novos conhecimentos, para que depois sejam consolidados ao longo da unidade por resolução de exercícios, interpolados por alguns problemas e investigações de forma a fazerem uso dos conceitos adquiridos. As tarefas de exploração, segundo Ponte, Quaresma e Branco (2012), requerem um trabalho atento de interpretação da situação, atender às questões a investigar e a construir representações, servindo principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos, não competindo ao professor a exposição desses conceitos e procedimentos para que os alunos pratiquem e memorizem. Ponte e Quaresma (2015) destacam também a importância da abordagem exploratória ou investigativa do ensino da Matemática em que os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões e na construção das suas próprias estratégias de resolução podendo usar diversas representações matemáticas. Como não dispõem de um método imediato de resolução das questões, os alunos têm de mobilizar o seu conhecimento, construindo e aprofundando a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas.

4.4. Dinâmica da sala de aula e avaliação

No desenvolvimento da unidade de ensino, como professora assumo a principal responsabilidade pela criação de um ambiente de aprendizagem estabelecendo situações que levem os alunos a pensar e a refletir sobre Matemática. Como refere o *National*

Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007), o ambiente de sala de aula deve conduzir os alunos no sentido de questionar, resolver problemas, discutir as suas ideias e procurar situações de resolução e soluções. Este documento ressalta ainda a importância dos alunos em justificar os seus raciocínios, formular conjeturas, procurar formas de resoluções e apresentar seus argumentos. Destacam ainda que, para se conduzir os alunos neste clima de aula, é necessário proporcionar-lhes diferentes atividades. Também Ponte (2005) refere que um único tipo de tarefa dificilmente atinge todos os objetivos curriculares, devendo-se variar o tipo de tarefas, selecionando-as em função dos acontecimentos e das respostas que se vão obtendo dos alunos.

O trabalho nas tarefas, em sala de aula, decorre em três momentos: (i) formulação da tarefa com a sua apresentação à turma, de forma a envolver os alunos no trabalho; (ii) o desenvolvimento do trabalho, da atividade dos alunos, momento em o professor procura averiguar se estes estão a trabalhar a informação dada, formulando questões, ensaiando e testando conjeturas, apresentando justificações e (iii) síntese e conclusão final, momento em que o professor procura saber a que conclusões os alunos chegaram e que justificações apresentam. Ao longo do desenrolar da atividade, o professor mantem e promove o diálogo para estimular a comunicação entre os alunos, enquanto estes vão trabalhando na tarefa proposta, e no final conduz a discussão coletiva (Ponte et al.,1998).

Como professora, no momento do trabalho autónomo dos alunos, procuro perceber as estratégias e as ideias matemáticas envolvidas nas suas resoluções, de forma a identificar potenciais ideias a partilhar em grande grupo. Atendo também, às representações usadas e aos conceitos mobilizados a selecionar e sequenciar, de forma a ampliar o pensamento dos alunos no momento da discussão. Ao selecionar as ideias a partilhar na discussão, evita-se repetições e garante-se que são apresentadas e discutidas ideias matemáticas importantes (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014).

Ainda no momento da atividade dos alunos, no momento da monotorização, o meu papel como professora passa, também, pela realização da avaliação contínua, efetuando perguntas aos alunos, observando o seu trabalho, o que permite perceber se existe um progresso satisfatório em relação aos objetivos para decidir como prosseguir (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998).

O último momento da aula, fase da discussão coletiva, é muito importante para a aprendizagem da Matemática com compreensão. Constitui um momento de discussão e comunicação matemática, que para o *National Council of Teachers of Mathematics*

(NCTM, 2007), é uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática, uma vez que as ideias partilhadas tornam-se objeto de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção. Este momento contribui para a construção de significados, consolidação de ideias, em que os alunos se tornam mais claros e convincentes nas argumentações. Nas comunicações os intervenientes podem aprimorar o seu pensamento e estabelecer conexões.

A discussão coletiva é orientada pelo professor, após a monitorização da atividade dos alunos e a seleção das estratégias e ideias a serem discutidas. O papel do professor numa discussão coletiva inclui diversas ações, como no modelo apresentado por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) (Figura 4).

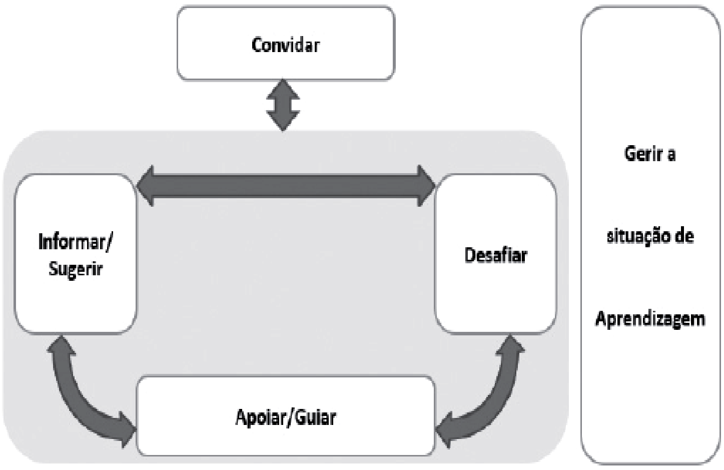


Figura 4. - Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas, (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013, p. 59).

Os autores apresentam ações diretamente relacionados com aspetos matemáticos. Nomeadamente, o professor pode: (i) *convidar*, para aliciar os alunos a partilharem as suas ideias; (ii) *apoiar/guiar* com o propósito dos alunos continuarem a participar a resolverem um problema, podendo colocar-lhes questões; (iii) *desafiar*, os alunos de modo a ajudá-los a evoluir nas suas ideias, para que avancem quer em termos de representações, de interpretação de enunciados, de estabelecer conexões e de argumentar ou avaliar; e (iv) *informar/sugerir*, quando introduz informação, proporciona argumentos e valida as respostas dos alunos. A primeira ação distingue-se das restantes pois tem como propósito iniciar a discussão, as outras alimentam a discussão. Desafiar e sugerir contribuem para ajudar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais alargada das ideias partilhadas.

Ainda em termos de avaliação dos alunos, o documento *Princípios e Normas para a Matemática* (NCTM, 2007) refere que a avaliação quando realizada corretamente ajuda o professor a tomar decisões acerca do conteúdo e da forma do ensino (avaliação formativa), pode também ser usada para determinar as aquisições dos alunos (avaliação sumativa). O processo avaliativo não deve focar-se apenas na análise das tarefas, mas também, no atender aprofundadamente à forma como os alunos pensam sobre as tarefas e como estão a progredir. Para além das informações recolhidas pelos testes devem ser recolhidas evidências de fontes diversas para perceção do que cada aluno sabe e é capaz de fazer. Desta forma a avaliação dos alunos, nesta unidade de ensino é baseada numa diversidade de instrumentos de avaliação. Atendo à avaliação de carater formativo, percebendo como os alunos progridem ao longo do trabalho nas tarefas. O ponto de partida é o desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica, seguindo-se a observação do desempenho dos alunos tendo em atenção a sua atividade nas tarefas, incluindo o empenho, as atitudes, a participação e interajuda com os colegas, a capacidade de argumentação e participação oral nas discussões coletivas, qualidade das intervenções, e a evolução da sua aprendizagem. O processo avaliativo também integra a avaliação sumativa com o desempenho dos alunos na tarefa de realização individual e no teste escrito, que finaliza a unidade de ensino.

4.5. Materiais de apoio à experiência de ensino: As tarefas

A realização da unidade de ensino, para concretização da conjetura de ensino-aprendizagem, assenta na realização de uma sequência de tarefas formuladas de forma estruturada para orientar os alunos num percurso de construção da aprendizagem. A conjetura desenrola-se numa trajetória desde a aprendizagem da noção de razão interligando com fração, conduzindo à descoberta da equivalência de razões e formação de proporções, que pode ser descoberta intuitivamente pelos alunos. A noção de proporção, envolvendo a igualdade entre razões, permite também, que, de modo intuitivo, se estabeleçam relações multiplicativas no sentido de covariância e invariância. A relação de razão como quociente induz à descoberta de constante de proporcionalidade. As noções destes conceitos de proporcionalidade compõem possíveis ingredientes para a compreensão e resolução de problemas de proporcionalidade e distinção entre situações proporcionais das que não o são.

A experiência de ensino tem como ponto de partida uma ficha de avaliação diagnóstica, com objetivo de perceber quais os conhecimentos prévios que os alunos detêm sobre relações proporcionais e não proporcionais. Inicia com a apresentação de uma relação entre umas quantidades, que envolve o conhecimento da noção de razão. A partir desse item propõem-se situações para descoberta de valor omisso, que permitem perceber se os alunos descobrem o valor em falta e que estratégias usam.

Em seguida são colocadas três afirmações com diferentes situações (adaptadas de Ponte et al., 2009), uma situação pseudoproporcional, uma situação de proporcionalidade direta simples e uma situação de proporcionalidade inversa – pretende-se perceber se os alunos distinguem situações proporcionais das que não o são, através da análise das justificações dadas sobre a veridicidade das afirmações apresentadas.

São propostas situações de comparação qualitativa, embora com a apresentação de dados numéricos para análise, partindo de uma razão apresentada. Pretende-se analisar se os alunos compreendem se a relação proporcional existe ou não. Perante uma situação não proporcional, os alunos têm de comparar as razões apresentadas para identificação da inexistência de uma proporção e que a alteração daí decorre (tonalidade de azul formado por mistura de uma determinada quantidade de branco com outra quantidade de azul. Se a razão não se mantiver, qual a alteração no tom de azul). Surge uma tabela para os alunos completarem com base na razão inicial, mas relacionando as medidas de grandeza de forma proporcional. O preenchimento da tabela permite perceber as estratégias e o nível de raciocínio proporcional dos alunos, se estabelecem relações aditivas ou multiplicativas, se aplicam relações "entre" e "dentro" dos dois espaços de medidas e se recorrem da mesma forma a um fator multiplicativo inteiro como a um fator multiplicativo não inteiro (Cramer & Post, 1993).

Ainda se integram mais três problemas. Dois são problemas de comparação, um qualitativo e outro quantitativo, com intuito de perceber as estratégias usadas e que justificações são apresentadas. Um outro problema é pseudoproporcional mas com um contexto diferente do apresentado anteriormente.

Tarefa 1. A primeira ficha de trabalho apresenta uma tarefa com um contexto acessível aos alunos e que requer a formação informal de razões tendo como base o estabelecimento de comparações entre duas quantidades. Inicia-se com comparação de duas quantidades em termos absolutos, desencadeando posteriormente comparações em termos relativos para promover a distinção entre os dois tipos de comparação (adaptado de Curl, Artzt & Sultan, 2013). Simultaneamente, no trabalho com razões, inclui-se o trabalho com frações por forma a distinguir quando uma razão representa uma fração (atendendo a Lobato et al., 2010 e Lamon, 2012). Pretende que os alunos percebam que o valor de uma razão pode ser conhecido por determinação de um quociente (como numa fração), interligando com o conceito de dízima. Envolve a noção de percentagem promovendo-se a reflexão e interligando com o conceito de fração que se pode representar por uma razão de consequente 100. Estes conceitos integrados são destacados na discussão coletiva, com a minha orientação colocando questões de orientação ou focalização. Conclui com a determinação do valor de determinadas percentagens, como intuito de compreender as diferentes estratégias usadas pelos alunos.

Tarefa 2. A tarefa promove novamente o trabalho do conceito de razão, num outro contexto (adaptado de Curl, Artzt & Sultan, 2013), com intuito de chegar à construção de uma razão formal, proceder à identificação dos seus termos, à sua leitura e explicação, consolidando o seu conceito. Requer o realizar de comparação entre quantidades em termos absolutos e em termos relativos destacando a sua distinção. Envolve o determinar do valor de uma razão, por cálculo de um quociente. Volta a trabalhar percentagens, dentro de um novo contexto. Introduz a elaboração e conceção de proporções de forma intuitiva e o desenvolvimento de relações de covariância. Aquando do momento da discussão, os alunos apresentam as proporções que elaboraram e procedem à sua explicação formal, identificando os seus termos.

Tarefa 3. Esta tarefa apresenta um conjunto de itens (adaptados de Curl, Artzt & Sultan, 2013). Os primeiros itens apresentam um carater fechado seguindo-se outros com carácter semiaberto para que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar com razões e procedam à sua explicação formal. Seguem-se itens que requerem a formação de proporções, com intuito de se estabelecerem relações de covariância, trabalhando simultaneamente o fator multiplicativo inteiro e decimal. Introduz a análise de situações de relações proporcionais e não proporcionais, num contexto real aos alunos promovendo a identificação e distinção de situações entre situações proporcionais da que não o são. Uma tabela apresentada para preenchimento, com relações de proporcionalidade entre as grandezas (minutos/preço), permite desenvolver relações de covariância e invariância, intuitivamente a descoberta e possível uso da constante de proporcionalidade (preço por minuto) e chegar à generalização ($y = kx$). A tarefa integra, também, itens relacionados com contextos reais que exigem dos alunos ponderar sobre situações apresentadas (*Qual a situação mais económica?*), para tomada de decisão, viabilizando a apresentação de opiniões e de estratégias de cálculo, desenvolvendo a capacidade de argumentação.

Tarefa 4. A tarefa foi elaborada com base em referências como Cramer, Post e Currier (1993) e Dole et al. (2012). Para além de trabalhar com relações multiplicativas, apresenta também relações aditivas de forma a serem interpretadas e discutidas para evidenciar as diferenças entre ambas, incentivando o raciocínio matemático. Atende a aspetos salientados pelos autores, no âmbito das representações, na medida em que promove o trabalho com tabelas que apresentam relações proporcionais e não proporcionais e a sua representação gráfica cujas coordenadas representam as razões apresentadas nas tabelas. Como tal, permite aos alunos a descoberta das características de um gráfico representativo de uma situação proporcional. De modo intuitivo os alunos podem identificar as diferenças relativas a gráficos que apresentam relações não proporcionais ou que representam relações diretamente proporcionais. A tarefa também apresenta problemas que requerem a descoberta do valor em falta e o estabelecimento de comparações, quer quantitativas quer qualitativas, a descoberta da constante de proporcionalidade e a interpretação do seu significado. Os últimos itens trabalham a leitura e interpretação de gráficos que apresentam relações proporcionais, permitindo aos alunos interligar das duas grandezas, relacionando-as, podendo compreender que as relações diretamente proporcionais permitem a descoberta de qualquer uma das grandezas/variáveis baseando-se na constante de proporcionalidade existente.

A resolução da tarefa foi planeada para três tempos de 50 minutos, para a atividade dos alunos e a discussão em turma, mas para não requerer um número maior de aulas, foi elaborada uma ficha de trabalho, para realização de forma autónoma, fora da sala de aula, como trabalho de casa. A resolução da ficha requer a construção de dois gráficos que representem as tabelas trabalhadas na aula. Com isso pretende-se que sejam analisadas as linhas que unem os pontos das coordenadas, permitindo aos alunos constatar a diferença entre elas. Com este trabalho também se pretende destacar a caraterística comum às linhas representativas de gráficos com relações proporcionais. As conclusões dos alunos são posteriormente discutidas em sala de aula.

Tarefa 5. A tarefa, adaptada de Curl, Artzt e Sultan (2013), tem um contexto real envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, de fácil compreensão para os alunos, número de bombons e preço. Apresenta uma situação em que cinco amigos dão diferentes quantias de dinheiro para comprar uma caixa de bombons e posteriormente número de bombons que recebem deve ser proporcional à quantia de dinheiro dada. Os alunos têm de descobrir o número de bombons proporcional a diferentes quantias de dinheiro. Para além disso têm de representar as razões formadas pelas duas variáveis num gráfico, traçando a linha que une as coordenadas, constatando a característica semelhante aos gráficos trabalhados na tarefa anterior. A atividade matemática inclui a descoberta do valor unitário de cada unidade (bombom). Na resolução dos itens seguintes os alunos podem usar ou não como estratégia o valor unitário para descoberta de preço de um determinado número de bombons. Pretende que alcancem a forma de descobrir o preço de uma caixa com um qualquer número de bombons, podendo fazê-lo por linguagem natural ou formar uma expressão geradora. Assim visa-se analisar se os alunos conseguem alcançar uma generalização e a expressão algébrica. Surgem novamente itens que possibilitam o trabalho com frações e percentagens para que os alunos interliguem estes diversos tópicos e estabeleçam conexões entre eles, como vários autores salientam como importante no trabalho com razões e proporções, nomeadamente, Lamon (2012), Curl, Artzt e Sultan (2013) e Lobato et al. (2010).

Tarefa 6. A tarefa foi concebida num contexto real, a confeção de um sumo de laranja, adicionando determinada quantidade/partes de sumo concentrado e determinada quantidade/partes de água. Este tipo de problema é sugerido por diversos autores nomeadamente Cramer, Post e Currier (1993) e Dole et al. (2012). O objetivo consiste em consolidar o trabalho com razões e proporções e raciocinar sobre proporções. O conjunto de itens apresenta um maior grau de dificuldade, uma vez que requer relacionar quantidades com base numa razão inicial cujo valor corresponde a uma dízima infinita. As relações a estabelecer envolvem o uso de frações e numerais mistos, estruturas numéricas onde os alunos revelam maiores dificuldades (Cramer, Post & Currier, 1993). O valor unitário de cada variável corresponde a um valor não inteiro e os alunos têm de efetuar relações multiplicativas cujo operador é um número racional não inteiro e usar numerais mistos para apresentar o valor em falta.

A tarefa pretende que os alunos interpretem e comparem duas quantidades e como estas se relacionam, num contexto que lhes pode ser familiar. Requerendo, num problema de comparação que raciocinem sobre as razões apresentadas, a relação existente não é proporcional uma vez que foi formada por uma relação aditiva. Daí após a descoberta da inexistência de uma proporção, os alunos têm de interpretar qual a consequência no sabor do sumo, levando-os a estabelecer uma comparação em termos qualitativos, a enfatizar em discussão coletiva. Sugere-se, seguidamente a formação de razões e proporções estabelecendo fatores multiplicativos em problemas de comparação quantitativa. O trabalho estende-se ao relacionar das quantidades com uma fração e uma percentagem e pensar sobre uma quantidade em termos de parte-parte e parte-todo. O item que requer o estabelecer relações proporcionais no preenchimento de uma tabela, promove o uso de operadores multiplicativos, quer inteiros, quer decimais em relações "entre" e "dentro" das medidas de grandeza. Simultaneamente permite analisar se os alunos usam estratégias proporcionais ou se recorrem ao uso de estratégias de composição/decomposição ou ao uso do valor da constante de proporcionalidade.

Tarefa 7. Esta tarefa é de resolução individual num tempo de 50 minutos também num contexto familiar dos alunos. Consiste na alteração proporcional das quantidades dos ingredientes de uma receita, um problema apresentado por diversos autores (por exemplo, Curl, Artzt & Sultan, 2013), em documentos com orientações curriculares (problemas de natureza multiplicativas em receitas culinárias, PMEB, 2007). O contexto desta tarefa foi adaptado de Ponte, Quaresma e Mata Pereira (2015). São propostos uma série de problemas que envolvem a descoberta de valor em falta, cuja resolução implica o estabelecimento de relações multiplicativas usando fatores inteiros e decimais, para estabelecer relações de covariância e de invariância entre as grandezas ou aplicação da constante de proporcionalidade. Envolve também um item para determinar uma generalização, podendo ser apresentada uma expressão algébrica, ou explicação por linguagem natural. O último item requer a descoberta da quantidade de ingredientes da receita envolvendo o cálculo de uma determinada percentagem.

Tarefa 8. Uma tarefa com um conjunto de itens para serem resolvidos numa aula de 50 minutos, que iniciam o trabalho com escalas de uma forma mais intuitiva (adaptada de Curl, Artzt & Sultan, 2013) e de problemas apresentados no manual do aluno (MSI 6, Areal Editores). Com as situações apresentadas pretende-se trabalhar com razões através das quais os alunos possam estabelecer uma comparação entre o tamanho do desenho e o da realidade. Assim deseja-se promover a compreensão desta relação e a construção do conceito de escala. A escala é entendida como uma razão cujo antecedente é sempre 1 e que este se relaciona permanentemente com 1 cm do desenho que corresponde a um valor variável na realidade. A tarefa permite, também, a formação de proporções com uso de estratégias dentro e entre as variáveis para determinar um tamanho no desenho ou no real.

Tarefa 9. Apresenta um conjunto de itens com vários problemas, alguns adaptados do manual do aluno (MSI 6, Areal Editores) e da Prova de Aferição de 2011, sendo pretendido que a sua resolução envolva a formação de proporções suscitando o uso do fator multiplicativo “entre” e “dentro” das grandezas, como estratégia para descoberta do valor em falta (seguindo a mesma estrutura da tarefa anterior). É esperado que os alunos consolidem aprendizagens e adquiram flexibilidade no trabalho com escalas.

Teste final. Após o trabalho nas tarefas apresentadas, é aplicado um teste escrito que envolve, a formação de razões e proporções, frações e percentagens, problemas de valor omisso, de comparação e pseudoproporcionais. São apresentadas propostas de situações proporcionais e não proporcionais, a trabalhar em tabelas e gráficos. O teste inclui a descoberta de percentagens no cálculo de uma quantidade à semelhança do que foi trabalhado ao longo da unidade de ensino. A análise das resoluções dos alunos visa perceber as estratégias por eles usadas, as suas dificuldades e o seu nível de evolução. O enunciado, de alguns itens, foi adaptado de manuais escolares, como: “À descoberta da Geografia - 7.º ano” (Santillana, 2006) e “Matemática 6.º ano” (Santillana, 2011).

Quadro 4 - Planificação da Unidade de Ensino.

Tarefa	**Conteúdos/ Conceitos**	**Objetivos**	**Tipo de problema**	**Representa- -ções**	**Modo de trabalho na aula**	**Tempo de 50' Previstos**	**Calenda- rização Prevista**
Tarefa Diagnóstica	Razão Proporção Relação proporcional Relação não proporcional	• Compreender o nível de conhecimentos dos alunos sobre relações proporcionais com diferentes representações. • Perceber as estratégias usadas em situações de proporcionalidade e de não proporcionalidade.	Problemas: Valor omisso Pseudopropor-cional Comparação	Tabelas Razão Fração Quociente Percentagem Linguagem natural	Individual	1	2 dezembro
Tarefa 1 *Os grupos desportivos*	Razão (informal) Proporção (informal) Percentagem	• Comparar quantidades em termos absolutos e relativos e perceber as suas diferenças. • Construção intuitiva de razão e proporção • Ler e escrever razões. • Relacionar razão, fração, quociente e percentagem • Compreender a percentagem como uma razão de consequente 100 • Percentagem como quociente de uma razão • Compreender que duas razões formam uma proporção quando tem o mesmo valor numérico e representam a mesma percentagem. • Converter razões e quocientes em percentagens • Cálculo de percentagem.	Exploração da formação de razões e proporções Comparação	Tabelas Razão Fração Quociente Percentagem Linguagem natural	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva	2	5 e 6(1t) dezembro
Tarefa 2 *Remates à baliza*	Razão (formal) Proporção (formal) Percentagem	• Ler e escrever razões • Ler e formar proporções • Estabelecer relações de comparação entre quantidades	Valor omisso Comparação	Razão Fração Quociente Percentagem	Em três momentos sucessivos: Apresentação da	1	6 (1t) dezembro

		• Estabelecer relações multiplicativas de invariância • Converter quociente em percentagem			tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva		
Tarefa 3 *iPad*	Razão Proporção Constante de proporcionalidade Relações proporcionais Relações não proporcionais	• Ler e escrever razões e proporções linguagem formal • Explorar relações comparativas e construir diversas razões e por proporções • Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância. • Determinar a constante de proporcionalidade (informal) • Efetuar generalização • Distinguir situações proporcionais de não proporcionais • Estabelecer relações comparativas-selecionar condições vantajosas/económicas	Valor omisso Valor unitário Comparação	Razão Fração Tabelas	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva	2	9 e 12 dezembro
Tarefa 4 *De volta aos treinos!*	Razão Proporção Constante de proporcionalidade Relações proporcionais Relações não proporcionais	• Ler e escrever razões e proporções linguagem formal • Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância • Distinguir situações proporcionais de não proporcionais • Reconhecer a propriedade fundamental das proporções. • Reconhecer que a constante de proporcionalidade –o invariante pode ser apresentado na forma de razão ou de quociente • Determinar a constante de proporcionalidade • Explicar o significado do invariante (constante de proporcionalidade) • Estabelecer relações comparativas por análise de tabelas e gráficos	Exploração Valor omisso Valor unitário Comparação	Razão Fração Quociente Tabela Gráfico	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares ; discussão coletiva	3	13 e 15 dezembro

Tarefa 5 *Caixa de chocolates*	Razão Proporção Constante de proporcionalidade Relações proporcionais Percentagem	• Ler e escrever razões e proporções linguagem formal • Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância. • Reconhecer que a constante de proporcionalidade –o invariante pode ser apresentado na forma de razão ou de quociente. • Converter razões representadas numa tabela em coordenadas num gráfico. • Indicar uma regra em linguagem natural ou numa expressão algébrica para expressar a relação entre duas grandezas.	Comparação Valor omisso Conversão Valor unitário	Tabela Gráfico Fração Razão Percentagem	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva	2	5 e 6 janeiro
Tarefa 6 *Refresco*	Razão Proporção Constante de proporcionalidade Relações proporcionais Relações não proporcionais	• Relações proporcionais • Reconhecer relações multiplicativas numa situação de proporcionalidade. • Reconhecer a propriedade fundamental das proporções. • Distinguir fração de razão • Determinar uma percentagem • Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância. • Indicar uma regra em linguagem natural ou numa expressão algébrica para expressar a relação entre duas grandezas • Distinguir situações proporcionais de não proporcionais.	Valor omisso Pseudopropor-cional Qualitativo Valor unitário Comparação	Tabela Fração Razão Quociente Percentagem	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva	3	10 e 12 Janeiro
Tarefa 7 *Delícia de chocolate*	Razão Proporção Constante de proporcionalidade Relações proporcionais	• Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância • Distinguir situações proporcionais de não proporcionais	Valor omisso Pseudopropor-cional Valor unitário	Tabela Fração Razão Percentagem	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho	1	13 janeiro

	Relações não proporcionais Percentagem	• Fazer generalização • Calcular percentagens			individual; discussão coletiva		
Tarefa 8 *Viagem*	Razão Fração Proporção Escala	• Escrever razões entre dimensão no desenho e dimensão no real • Estabelecer relações multiplicativas de covariação e de invariância • Compreender a escala como uma razão de antecedente 1.	Valor omisso	Fração Razão Gráfico	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares; discussão coletiva	1	16 janeiro
Tarefa 9 *Figuras à escala*	Fração Proporção Escala	• Escrever razões entre dimensão no desenho e dimensão no real • Criar proporções entre a dimensão no desenho e a da realidade por relações multiplicativas de covariância e invariância • Determinar uma escala estabelecendo uma proporção • Calcular dimensões reais por análise da escala	Valor omisso	Fração Razão	Em três momentos sucessivos: Apresentação da tarefa; trabalho a pares ; discussão coletiva	2	17(2t) janeiro
Revisões (inclui correção e discussão da tarefa 7)	Todos os trabalhados ao longo da unidade	Esclarecimento de dúvidas Sugestões de problemas colocados pelos alunos sobre proporcionalidade direta, razões, proporções, percentagens, e escalas.	Todos os trabalhados		Individual e discussão coletiva	2	19 e 20 janeiro
Ficha de avaliação		Avaliar as aprendizagens realizadas pelos alunos.			Individual	2	24 janeiro
						Total 22	

Capítulo V

Metodologia de investigação

Neste capítulo apresento a opção da metodologia para este estudo, bem como o *design*. Como já referido, trata-se de uma Investigação Baseada em *Design* (IBD), tendo por base uma experiência de ensino a realizar numa turma de 6.º ano. Simultaneamente, constitui uma investigação sobre a minha própria prática com observação participante. O capítulo inclui uma caraterização da turma que integra os participantes, os instrumentos e procedimentos de recolha e análise de dados.

5.1. Opções metodológicas

O estudo decorre de uma investigação qualitativa sob o paradigma interpretativo, uma vez que a investigação decorre num ambiente natural, a sala de aula, em trabalho de interação com os participantes. Eu terei o papel de professora-investigadora, sendo o principal instrumento da recolha dos dados (Bogdan & Biklen, 1994), efetuando uma observação direta dos alunos, em ação, no seu contexto natural. Os dados resultantes da observação participante, nomeadamente, as intervenções dos alunos, as produções e as notas de campo formam o conjunto de dados a organizar para uma posterior análise.

A Investigação é Baseada em *Design* (*Design Research).* Como suporte ao estudo é desenvolvido um conjunto de tarefas, no âmbito de uma experiência de ensino, integrada nesta metodologia usada na investigação em educação matemática. A metodologia pressupõe a formulação de uma conjetura com objetivo de promover a aprendizagem dos alunos e compreender os processos que lhe são subjacentes, isto é, no sentido de "estudar processos de aprendizagem ou mudança e a forma de os promover em contexto natural" (Ponte et al., 2016, p. 77).

Gravemeijer (2016) refere que a Investigação Baseada em *Design* teve origem em projetos curriculares inovadores, comportando um duplo objetivo, desenvolver teoria e projetar intervenções educacionais. As teorias têm o papel primordial, à medida que as intervenções são realizadas, perspetivando um ensino inovador. O processo de conceção e experimentação implica que enquanto as experiências de ensino geram teorias também coloca essas teorias à prova. No entanto, o objetivo não é aceitar ou rejeitar teorias, mas revê-las, refiná-las ou melhorá-las.

Pelo seu lado, para Sandoval (2004), este paradigma evoluiu principalmente como um meio para o estudo inovador dos ambientes de aprendizagem, muitas vezes incluindo novas tecnologias educacionais ou outras abordagens complexas, em sala de aula. Também este autor sublinha que a atividade desenvolvida é orientada pela teoria. Desenvolve-se uma conjetura atendendo a uma ideia de como se desenvolve a aprendizagem. Se os dados recolhidos não forem ao encontro do que era previsto tende-se a refinar a conjetura teórica inicial. A análise retrospetiva é uma fase importante na Investigação Baseada em *Design* ajudando o investigador a reestruturar a conjetura e projetar um novo estudo.

Cobb, Jackson e Dunlap (2016) destacam que a metodologia de Investigação Baseada em *Design* constitui um contexto para o desenvolvimento de teorias de aprendizagem e ensino. O investigador que conduz um estudo de *design* cria um projeto inicial, neste caso uma unidade de ensino, para suportar os processos de aprendizagem. O implementar do projeto gera dados que visam testar e revisar as conjeturas teóricas previamente estabelecidas. Na fase da experimentação o investigador interage com os alunos, e tenta antecipar a sua aprendizagem. Durante a atividade nas tarefas, concebidas atendendo à teoria, vai colocando perguntas e acompanhando o aluno, com intenção de o incentivar a refletir sobre a sua atividade matemática. Os principais resultados de uma experiência de ensino são tipicamente construtivistas e consistem em modelos conceptuais da componente teórica, que respondem pela aprendizagem dos alunos. Esta abordagem metodológica enfatiza principalmente a interpretação do raciocínio dos alunos, decorrendo na adaptação da experiência de ensino tendo em vista a melhoria de projetos educacionais.

A investigação envolve observação e análise reflexiva sobre o trabalho de intervenção desenvolvido com alunos, tendo em vista compreender se a conjetura formulada promoveu alguma mudança na aprendizagem. A investigação é desenvolvida em três fases, (i) fase da preparação, decorre a formulação da conjetura de ensino-aprendizagem com duas dimensões interligadas, o conteúdo e a componente pedagógica, reportando-se aos processos que irão resultar em aprendizagem. Ainda nesta fase especifica-se os objetivos para a aprendizagem dos alunos, atende-se aos seus conhecimentos pré existentes e capacidades, para delinear o percurso a planificar, atendendo a um contexto teórico, aspetos apresentados por Ponte et al. (2016); (ii) fase da realização, implementa-se o percurso delineado, tendo sempre presente o objetivo de compreender como decorre a aprendizagem. A par efetua-se a recolha de dados e uma reflexão regular sobre os acontecimentos da aula, numa tentativa de os analisar e interpretar para dar seguimento à planificação das futuras atividades; e (iii) fase da análise retrospetiva da experiência, embora a análise e reflexão sejam recorrentes ao logo de todo o processo, no final efetuar-se a análise final dos dados subjacente à tentativa de produzir novas teorias, decorrentes da conjetura inicial.

A investigação sobre a minha própria prática também conduz o presente estudo, uma vez que pretendo produzir conhecimento para uma compreensão mais esclarecedora da problemática do ensino da proporcionalidade direta e o processo de desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para além do meu papel de professora titular da turma, assumo simultaneamente o papel de investigadora, num trabalho colaborativo com os meus alunos, os participantes, para tentar perceber o modo como estes pensam Matemática. Este duplo papel permite-me uma relação privilegiada e rica na interação com os participantes, na recolha de dados. Pretendo assim realizar uma atividade refletiva e inquirida, um processo fundamental para a construção do meu conhecimento e desenvolvimento profissional (Ponte, 2002), uma vez que sinto necessidade de compreender e adquirir melhor preparação para proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem.

5.2. Calendarização

O estudo envolve vários momentos sucessivos e interligados, em que cada fase suporta a definição e estruturação da fase seguinte. Numa fase inicial, com base na revisão de literatura, foi formulado o quadro teórico sobre o tema, envolvendo a aprendizagem da proporcionalidade direta, o esboço da conjetura e das questões do estudo. Tendo em vista elaborar uma unidade de ensino mais estruturada e consistente, planifiquei e realizei um estudo piloto. A realização do estudo piloto, no ano letivo de 2015/2016 permitiu perceber como os alunos reagem às tarefas, que dificuldades revelam, que estratégias usam na sua atividade, e que justificações partilham. A análise das produções dos alunos e dos registos como interagiram em contexto se sala de aula, permitiu percecionar o raciocínio matemático efetuado. Para além disso, constituiu uma base reflexiva para definição ou reformulação da conjetura e da realização da experiência constituída por uma sequência de tarefas estruturada que visa envolver os alunos na sua aprendizagem e promover o desenvolvimento do seu raciocínio proporcional.

Estas etapas criaram condições para o planeamento e conceção da unidade de ensino a desenvolver no estudo principal, sustentadas pelo aprofundamento de conhecimentos provenientes do quadro teórico, que foi sendo progressivamente ampliado. A realização do estudo principal decorreu no ano letivo de 2016/2017, nos meses de dezembro e janeiro, sendo previstos 22 tempos de 50 minutos. De cada aula foram recolhidas as produções dos alunos e fotocopiadas ou digitalizadas, para posterior devolução dos originais e análise das cópias. Atende-se também aos registos áudio e às notas de campos, para assim efetuar uma análise detalhada das produções e recolher informação que possibilite dar resposta às questões de estudo. Concluo com uma análise de todo o trabalho desenvolvido, apresentando-se as conclusões e uma reflexão pessoal.

5.3. Os participantes do estudo

Os participantes com os quais desenvolverei o trabalho para este estudo, são alunos de uma turma de 6.º ano, de uma escola básica de 2.º e 3.º ciclo do distrito de Santarém. A turma é constituída por 28 alunos, 13 rapazes e 15 raparigas com idades compreendidas entre os 11 e os 15 anos. A turma apresenta alguma heterogeneidade, alguns alunos apresentam dificuldades na disciplina de Matemática. Um dos alunos beneficia de um Programa Educativo Individual ao abrigo do Decreto-lei n.º 3/2008 por Necessidades Educativas Especiais de Caracter Permanente, necessitando de apoio individualizado pois tem grandes dificuldades a Matemática. Da turma fazem parte três alunos que estão a repetir este ano de escolaridade. Selecionei esta turma porque fui sua professora titular de Matemática e Ciências Naturais no 5.º ano. Foi uma turma onde se desenvolveu uma boa relação entre professora-alunos.

Quadro 5 - Calendarização do estudo.

2016 /2017	Motivação e objetivos do estudo	Quadro Teórico	Estudo Piloto				Reformulação da conjetura Planificação da unidade de ensino	Aplicação das tarefas Recolha de dados	Análise de dados	Conclusões Reflexão final
			Recolha de dados 1ª fase	Planificação e conceção das tarefas 2.ª fase	Recolha de dados 2.ª Fase	Análise das produções dos alunos e Conclusões				
março	✓	✓	✓							
abril				✓						
maio		✓		✓	✓	✓				
junho	✓	✓				✓				
julho						✓				
agosto										
setembro		✓					✓			
outubro		✓					✓			
novembro		✓					✓			
dezembro		✓						✓		
janeiro	✓							✓	✓	
fevereiro									✓	
março									✓	
abril									✓	
maio									✓	
junho	✓	✓							✓	
julho	✓	✓								✓
agosto		✓								✓
setembro										

Alguns alunos são bastante empenhados e participativos, costumam trabalhar bem a pares, existindo um clima de interajuda. No entanto outros alunos apresentam bastantes dificuldades, e alguns estão pouco motivados para o trabalho e mesmo para a vida escolar. Durante o decorrer da investigação, uma aluna vinda de outro país integrou a turma. A aluna adaptou-se muito bem, chegou a participar na realização de algumas tarefas da unidade de ensino revelando-se interessada e participativa, quer no seu trabalho individual quer na discussão em sala de aula.

Para a realização do estudo serão tidas em conta todas as produções escritas dos alunos. As resoluções serão organizadas e analisadas para perceber as principais estratégias e dificuldades.

5.4. Instrumentos e procedimentos de recolha de dados

Os dados referem-se aos materiais em bruto que vou recolher durante a realização da experiência de ensino, elementos que formam a base de análise (Bogdan & Biklen, 1994). Para esta recolha utilizo vários processos e instrumentos.

Produções dos alunos. Uma fonte de dados consiste no que os participantes escrevem, podendo ser considerados como fontes de férteis descrições de como os alunos produziram o material e da forma como pensaram (Bogdan & Biklen, 1994). Este material constitui a principal fonte que revela como os alunos compreendem, as representações que usam e deste modo permitem analisar a forma como estabelecem conexões e como raciocinam. São dados que podem fornecer pistas úteis para a compreensão sobre a aprendizagem dos alunos. As produções escritas permitem a análise detalhada dos procedimentos de cálculo e sua categorização, decorrendo na perceção das estratégias usadas. No seu conjunto permitem perceber como a turma evoluiu ao longo da unidade de ensino, como se desenvolveu, de um modo geral, o raciocínio proporcional e quais as dificuldades patentes. Simultaneamente, também permitem avaliar a evolução de cada aluno.

Gravações áudio. Trata-se de um processo de apoio à perceção da forma como decorre a aula os diálogos entre alunos e intervenções quer dos alunos quer da professora. Permite uma análise mais realista da ação dos alunos, complementando as produções escritas e a notas de campo.

Fotografia. Para Bogdan e Biklen (1994), a fotografia "está intimamente ligada à investigação qualitativa" (p. 183). Para investigadores educacionais as fotografias não representam respostas, mas ferramentas para chegarem a respostas. No meu entender as fotos são um bom processo para captar registos no quadro, mostrando as sínteses resultantes das discussões coletivas, momentos capturados que apresentam evidências da riqueza de estratégias e da sua variedade, alcançada pelos participantes.

Notas de campo. "O resultado bem-sucedido de um estudo de observação participante em particular, mas também de outras formas de investigação qualitativa, baseia-se em notas de campo detalhadas, precisas e extensivas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Neste sentido elaborei um *diário de bordo* com registos relativos à observação de cada aula da experiência de ensino. Este instrumento proporciona recolha de material acerca dos procedimentos e estratégias empregues ao longo do estudo.

5.5. Análise dos dados

Bogdan e Biklen (1994) apresentam do seguinte modo a análise de dados:

> É o processo de busca e organização sistemático do material recolhido pelos instrumentos de recolha de dados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses dados e de permitir apresentar aos outros o que se encontrou. Na análise de dados, trabalham-se os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido, conduzindo à tomada de decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros (p. 205).

A análise dos dados acompanha o desenvolvimento do trabalho da investigação, conjuntamente com notas de campo. Estas notas constam de anotações diárias sobre momentos de aula, comportamentos dos alunos, dificuldades reveladas, argumentações apresentadas e discussões, fomentando reflexões escritas sobre o balanço da atividade dos alunos, a serem completadas com os registos áudio. Para que a análise das produções dos alunos seja mais eficaz, estas são digitalizadas ou fotocopiadas para que a fase analítica seja feita com tempo. Os dados são analisados e de acordo com os procedimentos que os alunos usaram nas suas resoluções de problemas de proporcionalidade direta, valor omisso e de comparação e na identificação da existência de proporcionalidade.

As categorias de análise dos procedimentos usados pelos alunos têm em vista descrever a natureza das estratégias usadas, alguns serão selecionados e apresentados em tabelas de síntese para melhor organização e interpretação. Estes procedimentos de análise e a identificação das dificuldades dos alunos visam alcançar as respostas às questões do estudo. Para elaboração das tabelas representativas da natureza das estratégias usadas, foram tidas em conta as categorias de análise apresentadas por Silvestre (2012) (Quadro 6).

Quadro 6 - Categorias de análise dos procedimentos dos alunos e respetivas estratégias, (Silvestre, 2012, p. 81).

Descrição dos procedimentos dos alunos		**Estratégias**
Revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis	Revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza o fator escalar ou funcional. Compreende e utiliza as propriedades da multiplicação. • Determina a constante de proporcionalidade e descreve o seu significado. • Escreve a razão e descreve o seu significado.	Proporcional
	Não revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza a composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos e multiplicativos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza a razão unitária e procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Determina a razão unitária mas nem sempre sabe explicar o seu significado.	Pré-Proporcional
	Não revela compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza a composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza procedimentos de contagem associados à representação pictórica e/ou contagem unitária.	Não proporcional
Não revela compreensão da Relação de covariação e/ou invariância das variáveis	• Utiliza parte dos dados do problema. • Utiliza procedimentos de cálculo sem sentido.	nd
(nd, significa não descriminada)		

As categorias de análise apresentadas constituíram um instrumento de análise útil, facilitando a organização e o enquadramento dos procedimentos, que os alunos usaram, compondo um base de conhecimento do nível do raciocínio proporcional envolvido.

Para apresentação da categorização dos procedimentos usados nas resoluções de algumas tarefas, nomeadamente de resolução individual da tarefa 7 e teste final, foram elaboradas tabelas mais simples, como apresenta o quadro 7, apenas com a especificação das estratégias usadas na resolução nos problemas de valor omisso, para melhor perceção da evolução no uso de estratégias proporcionais pela turma. O quadro 8 categoriza as estratégias de resolução em problemas de determinação e interpretação do significado da constante de proporcionalidade, razão unitária, adaptado da categorização dos procedimentos de Silvestre (2012), apresentada no quadro 6.

Quadro 7 - Categorias de análise das estratégias usadas nos problemas de valor omisso.

Estratégias	
Não proporcional	. Aditiva
Pré-proporcional	. Composição/decomposição
Proporcional	. Escalar . Funcional
Não descriminada	. Apresenta cálculos sem sentido
Não Responde	

Quadro 8 - Categorias de análise das estratégias usadas para identificação da constante de proporcionalidade.

Estratégias	
Pré-proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade mas não explica o seu significado.
Proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade e interpreta o seu significado.
Não responde	

A apresentação da análise dos dados é redigida em forma de narrativa, procurando revelar como os alunos evoluíram na sua compreensão e uso de estratégias multiplicativas e da constante de proporcionalidade, descrevendo as dificuldades observáveis nas suas produções escritas, tentando relacioná-las com as dificuldades indicadas no quadro teórico.

Seleciono algumas produções ou fotografias, a incluir neste trabalho, no capítulo VI, que retratem de forma mais explícita, os modos de pensar e procedimentos usados e que espelhem semelhanças de outras respostas e resoluções, dos vários alunos da turma. Também são inseridas outras produções ou fotografias que ilustrem as dificuldades e erros comuns ou que mostrem um raciocínio ou procedimento usado por um aluno, que se tenha destacado dos restantes elementos da turma.

5.6. Questões éticas

Para a realização deste estudo, solicitei atempadamente, a autorização da Direção do Agrupamento (Anexo 1), no mês de junho de 2016, sendo esta aprovada pelo Conselho Pedagógico no início do ano letivo 2016/2017. Neste pedido assumi manter o anonimato da escola e dos alunos participantes e de informar e solicitar a autorização dos respetivos encarregados de educação.

Na reunião de pais e encarregados de educação no primeiro dia de aulas, do ano letivo 2016/2017, em colaboração com a Diretora de Turma, foi dado a conhecer a pretensão da realização do estudo, os seus objetivos e procedimentos, tendo em conta o posterior pedido de autorização por escrito (Anexo 2). Foi informado que seriam recolhidas as produções escritas dos alunos e efetuadas gravações áudio que constituiriam os dados para análise. Também foi esclarecido que a realização do estudo não prejudicaria a concretização do Programa de Matemática definido para o 6.º ano Todos os encarregados de educação deram a sua autorização.

Aos alunos foi transmitido por mim, logo no início do ano letivo, qual a intenção do estudo, em que consistia e como planeava implementá-lo. O apelo à sua participação foi prontamente aceite por todos, chegando a revelarem entusiasmo em participar. No sentido de proteger os alunos participantes, foram atribuídos nomes fictícios a todos, uma vez que as suas produções foram recolhidas, analisadas e digitalizadas para figurarem como exemplos ilustrativos neste trabalho.

Capítulo VI

Realização da Unidade de Ensino

Neste capítulo descrevo a realização da experiência de ensino relativa à Unidade da Proporcionalidade Direta. Apresento como se desenrolou o trabalho em sala de aula, os momentos da aula, ambiente de aprendizagem, a atividade dos alunos na realização das tarefas e as explicações e justificações sobre as resoluções que efetuaram, destacando o seu raciocínio.

6.1. Aspetos gerais do desenvolvimento da unidade de ensino

A unidade de ensino foi concebida de acordo com a planificação anual da escola, embora com algum atraso em termo de calendarização, uma vez que a lecionação do tópico da Proporcionalidade Direta deveria ser realizada até ao final do 1.º período. As tarefas foram trabalhadas nos cinco tempos semanais, cada um com a duração de 50 minutos, sendo que num dos dias da semana decorriam duas aulas (50’+50’). O tópico foi iniciado no final do 1.º período, no início do mês de dezembro, com a realização de uma avaliação diagnóstica, seguida de oito aulas com a realização de três tarefas do conjunto total de nove que foram planeadas e elaboradas para a experiência de ensino. O trabalho teve continuidade no 2.º período, ao longo do mês de janeiro, mas ultrapassou o número de aulas previstas. Assim, inicialmente foram previstas 22 aulas, como mostra o quadro 4 do capítulo IV, mas a unidade de ensino acabou por decorrer em 29 aulas de 50 minutos como se pode observar no quadro 9.

A ficha de avaliação diagnóstica teve como objetivo perceber que conhecimentos os alunos detinham antes do ensino formal da Unidade da Proporcionalidade Direta, bem como que estratégias usavam na resolução de problemas de valor omisso e de comparação quantitativa e qualitativa envolvendo relações proporcionais, se conseguiam distinguir situações diretamente proporcionais de não proporcionais e de proporcionalidade inversa e que justificações apresentavam.

Quadro 9 - Calendarização da operacionalização da Unidade de Ensino.

Calendarização das aulas dadas		Aulas 50 minutos
Teste Diagnóstico	2 de dezembro	$1 \times 50'$
Tarefa 1	5 e 6 dezembro	$3 \times 50'$
Tarefa 2	9 e 12 dezembro	$2 \times 50'$
Tarefa 3	13 e 15 dezembro	$3 \times 50'$
Tarefa 4	5, 6 e 9 janeiro	$3 \times 50'$
Tarefa 5	10 e 12 janeiro	$3 \times 50'$
Tarefa 6	13, 16 e 17 janeiro	$4 \times 50'$
Tarefa 7	19 janeiro	$1 \times 50'$
Tarefa 8	20 e 23 janeiro	$2 \times 50'$
Tarefa 9	24 e 26 janeiro	$3 \times 50'$
Revisões Incluiu a discussão sobre a resolução da tarefa 7	27 e 30 janeiro	$2 \times 50'$
Teste Escrito	31 janeiro	$2 \times 50'$
Total de aulas		$29 \times 50'$

As tarefas propostas aos alunos caracterizam-se por apresentarem uma natureza essencialmente exploratória. Iniciou-se sempre pela leitura da tarefa, momento em que promovia a discussão sobre a interpretação dos enunciados e dava esclarecimentos sobre dúvidas colocadas de modo a ajudar os alunos na sua atividade no momento que se seguia, o trabalho autónomo. Este segundo momento foi realizado a pares com partilha e entreajuda entre colegas. Por vezes, os alunos que terminavam a resolução mais rapidamente que os restantes poderiam juntar-se a outro par no intuito de o ajudar. Em determinados momentos, quando circulava pela sala para observar ou auxiliar algum grupo de alunos, procedi a gravações áudio, registando assim as suas dúvidas, justificações e explicações e raciocínios realizados.

Após os momentos de trabalho autónomo tiveram lugar momentos de discussão coletiva. As discussões em determinadas aulas fizeram-se normalmente em dois momentos, um após uma parte da tarefa e outro após a segunda parte dependendo da extensão da tarefa ou das dificuldades manifestadas pelos alunos. Por vezes, iniciava-se a discussão coletiva para partilha de ideias e de explicações ou justificações, para que os alunos com maiores dificuldades não ficassem parados sem produção de trabalho, numa tentativa de os encorajar a continuarem a resolver a parte restante. Em alguns casos, os alunos desistiam quando encontravam dificuldades, logo nos primeiros itens, como aconteceu ao iniciarem a ficha de avaliação diagnóstica. A discussão ajudou-os a compreenderem e a relacionarem conhecimentos e a construírem noções que os motivaram para continuar a trabalhar autonomamente. As discussões coletivas foram momento ricos não só pela partilha mas também pelo facto de favorecerem a compreensão de conceitos e procedimentos e permitirem estabelecer conexões, ajudando os alunos a progredir e a aumentar os seus conhecimentos.

6.2. A ficha de avaliação diagnóstica

A ficha diagnóstica (Anexo 6) iniciava com a apresentação de uma relação entre duas quantidades, uma razão. A grande dificuldade dos alunos na interpretação da situação relacional levou-me a intervir de imediato. Assim, solicitei a participação voluntária dos alunos para explicarem como interpretavam o que estava representado. Os alunos envolveram-se na discussão, que se iniciou com uma observação de Daniel:

Daniel: A pergunta tem um erro, porque a fração no denominador tem um número decimal (2,5) e não pode! Só pode ser um número inteiro.
Alguns alunos referiram: Pois, Professora, não estou a perceber…
Filipe: Não é uma fração, é uma razão!
Professora: E o que é uma razão?
Mariana: É quando temos duas quantidades.
Professora: Como assim?
Mariana: Neste caso, para fazer dois quilos e meio de queijo é preciso dez litros de leite.
Filipe: É um quarto?
Professora: O que queres dizer com é um quarto?
Filipe: Pois. Não sei explicar… 2,5 é um quarto de 10… O leite é um quarto do queijo.
Professora: Como? Pensa lá um bocadinho na relação entre as duas quantidades. Será que o leite é um quarto do queijo?

Filipe: Não, não! É ao contrário. O queijo corresponde a um quarto do leite.

Professora: *(Para a turma)* Vamos lá acertar ideias, segundo o Filipe, a quantidade de queijo corresponde a que quantidade de leite?

Tomé: A quantidade de queijo é um quarto em relação à quantidade do leite.

Professora: Muito bem! Então vamos continuar o nosso trabalho…

Após o momento de apresentação da ficha diagnóstica e da interpretação do enunciado do primeiro item, os alunos iniciaram o trabalho. Os resultados globais estão apresentados na Tabela 1. Nas situações de valor omisso, os alunos apresentaram dificuldade em encontrar o valor unitário (quantidade de queijo em quilogramas, para um litro de leite). No item que dizia respeito a uma relação cujo fator correspondia ao triplo (encontrar a quantidade de leite para o triplo da quantidade de queijo) os alunos, de um modo geral, não encontraram dificuldades. Nas situações de comparação qualitativa, conseguiram perceber as situações que correspondiam ou não a uma proporção, no entanto revelaram algumas dificuldades em justificar a sua resposta. O mesmo aconteceu em relação à situação da proporcionalidade inversa, tendo identificado que, se são duas pessoas a realizar um trabalho, o tempo de execução é menor do que se for uma só pessoa. No entanto poucos alunos apresentaram a justificação completa, ou seja, indicaram que duas pessoas levariam metade do tempo, do que no caso de ser apenas uma pessoa.

Nos dois problemas de comparação quantitativa, os resultados apresentam discrepância, talvez devido ao grau de dificuldade. O problema resolvido com mais facilidade apresentava uma relação do triplo dentro de cada variável que compunha cada razão. O outro problema envolvia uma situação para identificar qual a compra mais económica, tendo aqui os alunos revelado maiores dificuldades. Os alunos que, o efetuaram com sucesso, recorreram à estratégia de descoberta do valor unitário, o preço por fatia de piza. Alguns alunos não estabeleceram uma relação entre número de fatias de piza e preço e efetuaram uma comparação em termos absolutos e não em termos relativos, respondendo que a piza com mais fatias era mais económica porque dava para mais pessoas.

O item que apresentou maior dificuldade foi o de completar uma tabela com relações proporcionais, partindo da razão 4:3. Quase todos os alunos que completaram a tabela basearam-se uma relação aditiva e não multiplicativa, seguindo o raciocínio que existia a diferença de uma unidade entre as duas quantidades (4 - 3 = 1 e não que uma medida de branco correspondia a $\frac{3}{4}$ de azul ou que 2 medidas de branco correspondiam a 1,5 medidas de azul, ou que 1 medida de azul correspondia $\frac{4}{3}$ ou 1 $\frac{1}{3}$ medidas de branco).

Os alunos não conseguiram efetuar relações nem de covariância nem de invariância. Nesta situação apenas duas alunas completaram duas proporções das quatro pretendidas, apresentando o resultado do valor em falta que resultava do fator multiplicativo que correspondia a um número inteiro.

No caso de situações não proporcionais, nomeadamente nos problemas pseudoproporcionais, menos de metade dos alunos distinguiu corretamente que as situações apresentadas não apresentavam uma relação proporcionalmente direta, uma vez que as duas quantidades não mudavam diretamente, pois apesar de uma das quantidades aumentar a outra mantinha-se.

Os resultados alcançados pelos alunos na ficha de avaliação diagnóstica estão representados na tabela 1.

6.3. Tarefa 1: Grupos Desportivos

A realização desta tarefa (Anexo 7) foi efetuada em três aulas de 50 minutos com três discussões em turma, uma em cada aula. A tarefa iniciou-se com uma comparação em termos absolutos entre duas quantidades (como mostra a Figura 5.1.), o que não suscitou qualquer dúvida nos grupos.

> **Grupos desportivos**
>
> 1- Catarina, a Inês e o Rui andam na mesma turma mas residem em diferentes freguesias. Cada um dos amigos pertence ao Grupo Desportivo da sua Freguesia. Os Grupos Desportivos são formados por jovens, rapazes e raparigas. O Grupo Desportivo Gym, ao qual a Catarina pertence, é composto por **21 raparigas**. O grupo do Rui, o Grupo Desportivo dos Templários por **40 raparigas**.
>
> 1.1. Indica qual o grupo que possui mais raparigas?

Figura 5.1. - Item 1., tarefa 1.

Todos os alunos efetuaram a comparação correta em termos absolutos. No entanto, alguns, como Guida, não apresentaram uma justificação apenas indicando que " *É o Grupo Templário que tem maior número de raparigas*". Henrique, entre outros alunos, apresentou a justificação completa, como representado na Figura 5.1.1., "*O Grupo Templários tem maior número de raparigas uma vez que 40 > 21*".

Tabela 1- Resultados da turma na ficha de avaliação diagnóstica.

	Questões											
	Noção de razão	Valor omisso			Pseudo-proporcional	Comparação	Proporção Inversa	Comparação Qualitativo	Valor omisso Tabela	Comparação Qualitativo	Comparação Quantitativo	Pseudo-proporcional
Item	1.1	1.2	1.2.1	1.2.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4	5	5.1
Respostas Corretas	**0,68**	**0,68**	**0,43**	**0,76**	**0,46**	**0,93**	**0,61**	**0,50**	**0,07**	**0,50**	**0,39**	**0,46**
% total	**68%**	**68%**	**43%**	**76%**	**46%**	**93%**	**61%**	**50%**	**7%**	**50%**	**39%**	**46%**

R: É o grup Desportivo dos Templários com 40 raparigas.

É o grupo desportivo dos templarios porque 40 > 21.

Figura 5.1.1. - Respostas de Guida e Henrique.

Os itens seguintes pediam aos alunos para efetuar comparações em termos relativos. Pretendia-se que os alunos fossem estabelecendo relações de comparação entre duas quantidades, formando razões e realizando comparações relativas, para assim irem distinguindo comparações absolutas de comparações relativas (Figura 5.1.2.).

1.1.1. Sabendo que o Grupo Desportivo Gym é formado por **30 jovens** e o Grupo Desportivo dos Templários por **100 jovens**.

a) Regista a **comparação entre o número de raparigas e o número total de jovens**.

Figura 5.1.2. - Item 1.1.1., tarefa 1.

Aquando da apresentação da tarefa, durante a sua leitura, aparentemente não surgiram dúvidas, no entanto, no decorrer da atividade os alunos foram solicitando ajuda por estarem com alguma dificuldade na representação da comparação/razão. Para ajudar, convidei os alunos a apresentarem as suas ideias sobre como estavam a interpretar o que era pedido no enunciado, a que se referia a comparação e como registar:

Mariana: A comparação quer dizer que é uma razão.
Professora: E o que é uma razão?
Mariana: É quando duas quantidades têm uma relação as duas. Por exemplo, é como estava lá na ficha diagnóstica, 10 e 2,5 … 2,5 é um quarto de 10.
Ana: Para termos 2,5 kg de queijo precisávamos de 10 litros de leite.
Professora: E uma razão representa-se como?
Ana: É como uma fração?
Professora: Será que só se pode representar sobre a forma de fração?
Tomé: Também como uma dízima.
Professora: E como descobres o valor da dízima?
Os alunos ficam em silêncio…
Ana: Números racionais…
Professora: Como descobrem a dízima ou seja, o valor da razão?
Maria José: É a dividir.

Professora: OK, é a dividir. Então podemos representar uma razão sobre a forma de quê? Qual o termo que usamos quando nos referimos ao resultado da divisão?

Maria José: *(pouco segura)* Por um quociente?!

Professora: Isso, mesmo, muito bem! A razão também se pode representar sobre a forma de quociente.

Foi feito o registo no quadro da conclusão alcançada pelos alunos, após intervenção de Mariana (tal como mostra a Figura 5.1.3.)

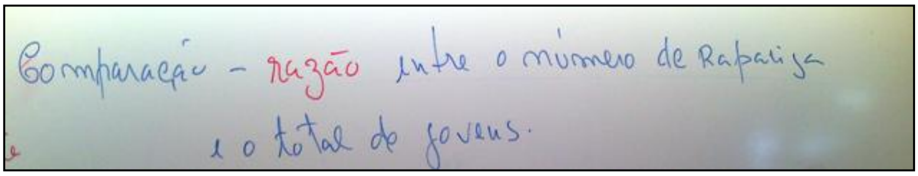


Figura 5.1.3. - Registo da conclusão alcançada pelos alunos.

A partir daqui, os alunos prosseguiram o trabalho. Frequentemente iam solicitando a minha opinião, mostraram-se inseguros e questionavam se estavam a representar da forma correta, se era assim. Com o desenrolar da atividade fui constatando que todos os alunos conseguiram formar as razões corretamente.

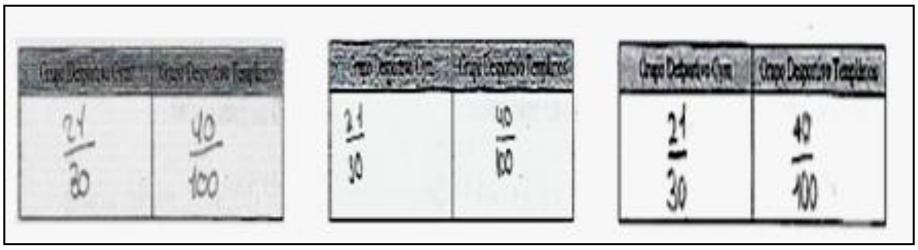


Figura 5.1.4. - Respostas ao item 1.1.1. da tarefa 1., de Mariana, Henrique e Emídio.

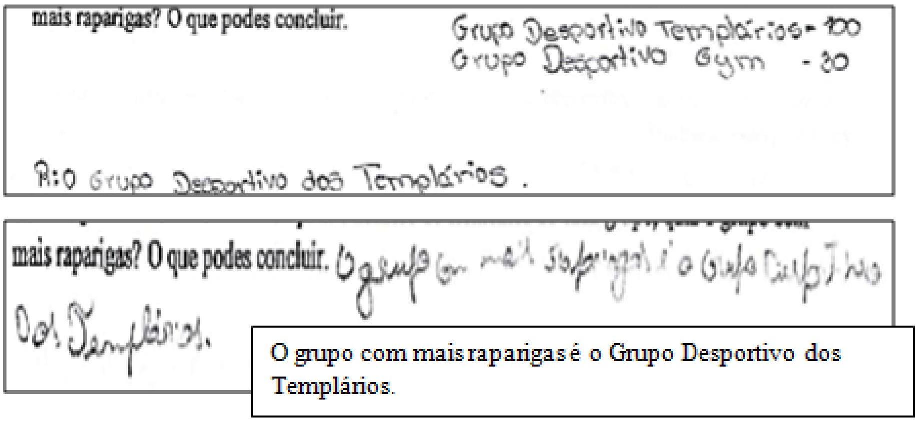
O item 1.1.2. (Figura 5.1.5) requeria a realização de comparações relativas entre duas quantidades representadas por duas razões. A questão levou a alguma discussão entre os grupos de alunos.

1.1.2. Agora com estes dados compara o número de elementos de cada grupo, qual o grupo com mais raparigas? O que podes concluir.

Figura 5.1.5. – Item 1.1.2., tarefa 1.

Notei alguma confusão e dificuldade quando relacionavam as quantidades em termos relativos. Só após a discussão entre os alunos e várias intervenções, pareceu que os alunos começaram a compreender esse tipo de comparação, isto é, que 21 em termos absolutos seria menor que 40, mas que numa comparação relativa tendo em conta o total, a situação alterava-se, uma vez que 21 em 30 é maior que 40 em 100.

Poucos alunos, como Filipe e Daniel, continuaram a efetuar comparações em termos absolutos, indicando que 40 raparigas representavam mais do que 21 raparigas, ou porque atenderam ao total dos alunos como mostra o trabalho de Filipe, ou talvez por interpretação incorreta da questão (Figura 5.1.6.).


mais raparigas? O que podes concluir.

Grupo Desportivo Templários - 100
Grupo Desportivo Gym - 30

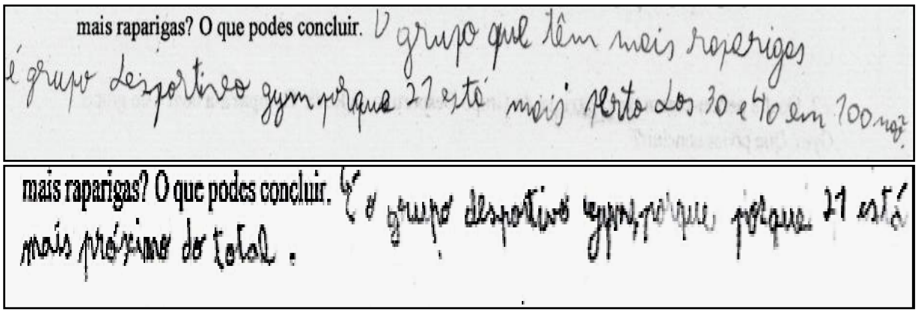
R: O Grupo Desportivo dos Templários.

mais raparigas? O que podes concluir. O grupo com mais raparigas é o Grupo Desportivo dos Templários.

O grupo com mais raparigas é o Grupo Desportivo dos Templários.

Figura 5.1.6. - Respostas evidenciando comparações absolutas, de Filipe e Daniel.

No final da tarefa constatei que quase todos os alunos efetuaram comparações em termos relativos embora recorrendo a várias estratégias. Vários alunos, como Henrique e Carlos, estabeleceram uma comparação entre a parte e o todo, alcançando que 21 em 30 é maior que 40 em 100 uma vez que 21 está mais perto do número total (Figura 5.1.7.).

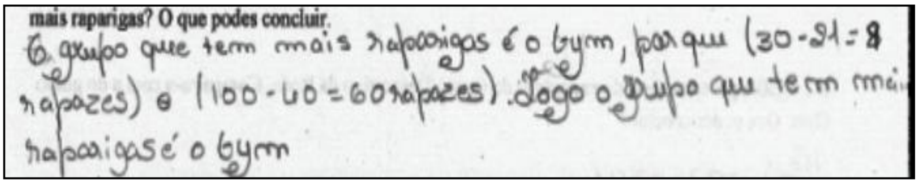

mais raparigas? O que podes concluir. O grupo que têm mais raparigas é grupo desportivo gym porque 21 está mais perto dos 30 e 40 em 100

mais raparigas? O que podes concluir. É o grupo desportivo gym, porque 21 está mais próximo do total.

Figura 5.1.7. - Respostas evidenciando relação parte-todo, por Henrique e Carlos.

Alguns alunos, talvez para melhor perceção da relação entre o número de raparigas e o número total de jovens, determinaram o número de rapazes que compunham cada um dos Grupos Desportivos (Figura 5.1.8.). Como Alice e Sara, evidenciaram que no grupo *Gym* com 21 raparigas, afinal só existiam 9 rapazes e que no grupo Templários com 40 raparigas, existia um número superior de rapazes, 60.

Destacaram, desta forma, que o grupo com maior número de raparigas (40) acabava por ter um número superior de rapazes (60) concluindo assim, que o Grupo Templários em proporção detinha menor número de raparigas, 21, do que o Grupo *Gym*


mais raparigas? O que podes concluir.
O grupo que tem mais raparigas é o Gym, porque (30-21=8 rapazes) e (100-40=60 rapazes). Logo o grupo que tem mais raparigas é o Gym

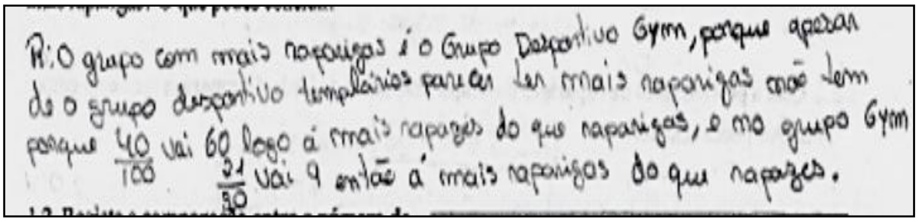
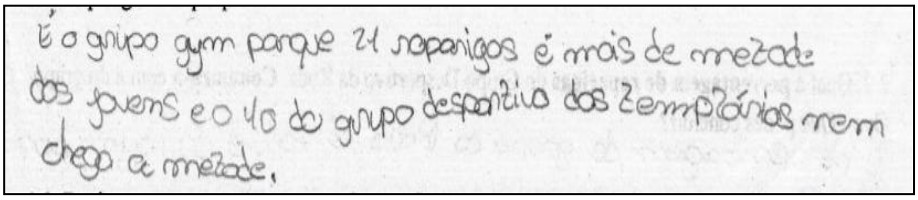
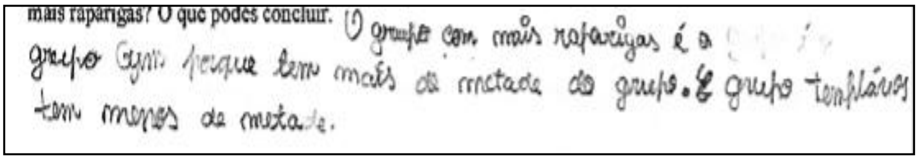

R: O grupo com mais raparigas é o Grupo Desportivo Gym, porque apesar do grupo desportivo templários parecer ter mais raparigas não tem porque 40/100 vai 60 logo á mais rapazes do que raparigas, e no grupo Gym 21/30 vai 9 então á mais raparigas do que rapazes.

Figura 5.1.8. - Respostas evidenciando a relação parte-todo, com referência ao número de rapazes, por Alice e Sara.

As respostas que mais semelhanças apresentaram, emergiram do relacionar a comparação, entre as duas quantidades, atendendo ao padrão de metade, de que são exemplo as apresentadas por Mariana, Emídio e Sílvia. Os alunos destacaram se o número de raparigas atingia ou não a metade do número total de jovens (Figura 5.1.9.). Foi uma forma diferente de relacionar a parte com o todo.


É o grupo gym porque 21 raparigas é mais de metade dos jovens e o 40 do grupo desportivo dos templários nem chega a metade.


mais raparigas? O que podes concluir. O grupo com mais raparigas é o grupo Gym porque tem mais de metade do grupo. E grupo templários tem menos de metade.

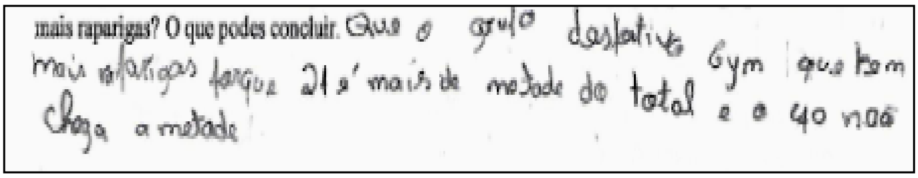

mais raparigas? O que podes concluir. Que o grupo desportivo Gym que tem mais raparigas porque 21 é mais de metade do total e o 40 não chega a metade

Figura 5.1.9. - Respostas evidenciando a comparação da parte-todo, com padrão metade, por Mariana, Emídio e Sílvia.

Neste item os alunos, de um modo geral, apresentaram as suas conclusões notando-se que compreenderam o valor de uma razão com base na comparação multiplicativa, relacionando as quantidades que compunham os seus termos, antecedente e consequente. Aparentemente as razões não foram equiparadas a frações, notando que $\frac{21}{30} > \frac{40}{100}$.

A atividade desenvolvida revelou que os alunos usaram raciocínios comparativos diferentes. Um pequeno número de alunos atendeu ao relacionar quantidades só em termos absolutos, mas de um modo geral denotou-se que estabeleceram a comparação entre as duas quantidades que formavam cada uma das razões. Não houve evidência de terem relacionado que uma razão teria o valor superior à outra, mas sim, que compararam a relação do antecedente com o consequente (parte-todo) ou, de forma implícita, se o valor da razão era maior ou menor que 0,5.

Os itens seguintes envolviam o trabalho com razões, frações e percentagens, promovendo a oportunidade para os alunos estabelecerem conexões entre estes tópicos matemáticos. A elaboração de razões, solicitada pela questão 1.2., (Figura 5.1.10.), ainda suscitou algumas dúvidas, e mais uma vez, o meu apoio foi sendo solicitado, por vezes por dúvida no termo a colocar no consequente (número de raparigas ou o número total de jovens, como no item anterior). Por algumas intervenções de alunos para a turma, por minha solicitação, todos acabaram por representar as razões de forma correta, como apresentado na Figura 5.1.11.

1.2. Regista a **comparação entre o número de rapazes e o número de raparigas**:

Figura 5.1.10. - Item 1.2., tarefa 1.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários
9 rapazes / 27 raparigas	60 rapazes / 40 raparigas

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários
$\frac{9}{21}$	$\frac{60}{40}$

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários
$\frac{9}{21}$	$\frac{60}{40}$

Figura 5.1.11. - Respostas evidenciando razões, por Filipe, Emídio e Henrique.

Planeei conduzir a discussão coletiva de modo a enfatizar a designação dos termos de uma razão, antecedente e consequente. Seguidamente lancei uma questão: "*As razões apresentadas ao item 1.2. poderão ser consideradas frações?*" Desta forma pretendi que os alunos refletissem sobre os dois itens anteriores (item 1.1.1., na Figura 5.1.2. e o item 1.2., Figura 5.1.10.). Esta discussão decorreu do seguinte modo:

Professora: Então, hoje o que estivemos a trabalhar?
Vários alunos colocam o braço no ar:
Tomé: Com razões.
Professora: Ou?
Filipe: Frações!
Professora: Razões, frações, é tudo a mesma coisa?
Mariana: Na razão estamos a comparar as duas coisas, as duas quantidades.
Professora: Será que todas as razões serão frações. Reparem no que registaram na pergunta 1.1.1. e na 1.2.

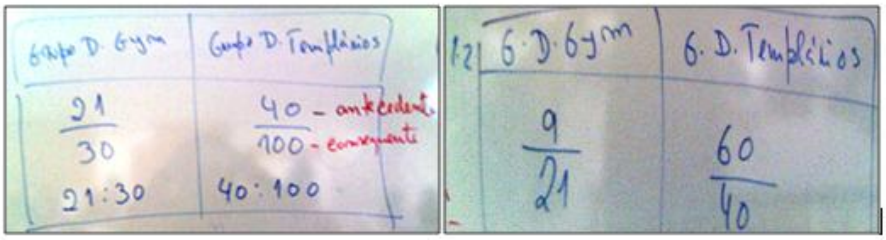


Figura 5.1.12. - Apresentação das respostas às perguntas 1.1.1. e 1.2. durante a discussão em grande grupo.

Professora: Na pergunta 1.1.1., as razões apresentam que relação?
Mariana: A razão entre as 21 raparigas em 30 jovens.
Professora: Qual o consequente?
Maria José: 30.
Professora: O que representa 30?
Maria José: É o total dos alunos.
Professora: Será que neste caso podes considerar esta razão como uma fração?
Maria José: Sim, porque é o número de raparigas para o total.
Professora: Observemos agora o que apresentam as razões da pergunta 1.2.
Ana: Agora é 9 em 21. O 9 são os rapazes e 21são as raparigas.
Professora: Há aqui a comparação entre uma parte e o todo, ou o total?
Ana: Não aqui, não.
Professora: Então será que as razões escritas na 1.2. poderão ser frações, vamos pensar um pouco!
Ana: Pois, aqui talvez não, porque no consequente não é o total. Apresentam-se duas partes, a das raparigas e a dos rapazes.

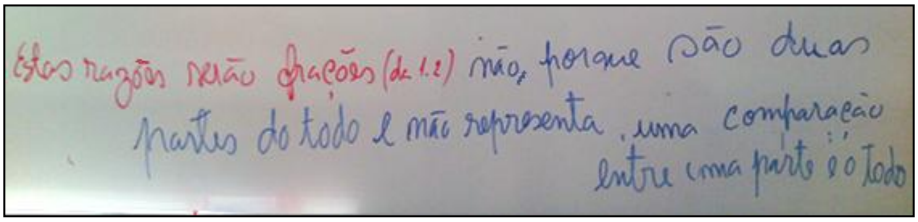


Figura 5.1.13. - Conclusão construída pelos alunos após a intervenção de Ana.

A discussão possibilitou a reflexão dos alunos de modo a concluírem quais das razões apresentadas poderiam representar também frações. A conclusão foi registada no quadro como mostra a Figura 5.1.13.

De um modo geral, não se registaram grandes dificuldades na formação de frações como requeria o item 1.2.3. (Figura 5.1.14.). Todos os alunos apresentaram as frações tal como Filipe e Mariana, no entanto nem todos as apresentaram na forma irredutível, como Guida que não simplificou as frações, como seria suposto (Figura 5.1.15.).

1.2.3. Indica **a fração de rapazes** de cada grupo:

Figura 5.1.14. - Item 1.2.3., tarefa1.

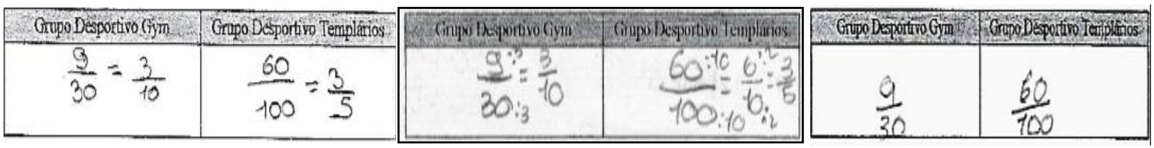


Figura 5.1.15. - Respostas ao item 1.2.3. evidenciando frações, por Filipe, Mariana e Guida.

O item 1.2.4. (Figura 5.1.16.) requeria que os alunos convertessem a razão, aqui também com significado de fração (o número de rapazes para o número total de jovens), em percentagem. No Grupo Templários uma vez que o consequente já era 100, pretendia-se que os alunos reconhecessem que, se o todo já é 100, então o antecedente corresponde ao valor da percentagem.

1.2.4. Qual a **percentagem** de rapazes do Grupo de Desportivo Templários? Mostra com chegaste à resposta.

Figura 5.1.16. - Item 1.2.4., tarefa 1.

Deste modo os alunos poderiam relacionar os termos e construir o conceito, que numa razão cujo consequente é 100 o seu antecedente representa o valor da percentagem. Não foi um conceito alcançado por todos. Vários alunos como Mariana e Alice, determinaram o valor da dízima de cada razão para o converterem no valor da percentagem, como pode verificar-se na Figura 5.1.17.

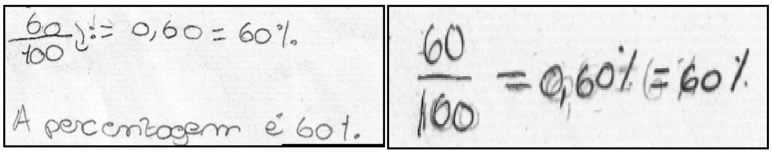


Figura 5.1.17. - Determinação da percentagem recorrendo ao valor em dízima, por Mariana e Alice.

No entanto percebi que outros alunos compreenderam a razão de consequente 100 como forma de determinar uma percentagem e aparentemente recorreram ao conceito para apresentarem a percentagem de rapazes do Grupo Templários como ilustra a Figura 5.1.18.

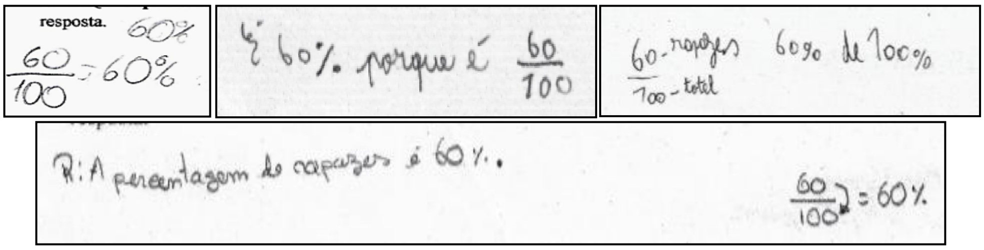


Figura 5.1.18. - Respostas evidenciando a razão de consequente 100 convertida em percentagem, por Guida, Henrique, Carlos e Sara.

Guida talvez tenha estabelecido a relação entre a razão de consequente 100 e o valor do antecedente para determinar o valor da percentagem. No entanto há maior evidência dessa relação nas respostas dadas por Henrique e Carlos e subentende-se esse raciocínio na resposta apresentada por Sara. Os alunos determinaram o valor da percentagem por uso das duas estratégias mencionadas.

Na questão seguinte, 1.2.5. (Figura 5.1.19.) pretendia a conversão de duas razões ou frações (uma vez que se trata de uma relação parte-todo) em percentagem.

1.2.5. Qual a **percentagem** de raparigas de ambos os Grupos? Mostra com chegaste à resposta.

Figura 5.1.19. - Item 1.2.5., tarefa 1.

Na razão cujo consequente não é divisor de 100, $(\frac{21}{30})$, de um modo geral os alunos recorreram ao valor da razão em termos decimais, dízima, para posterior conversão em percentagem, como ilustra a Figura 5.1.20., com a resolução de Mariana e

Alice. Note-se que nenhum aluno recorreu à representação da razão com consequente 100, por exemplo recorrendo à escrita de razões equivalentes: $\frac{21}{30} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$. Uma justificação possível para não recorrerem a esta estratégia, poderá dever-se à pouca flexibilidade no trabalho com equivalência de frações.

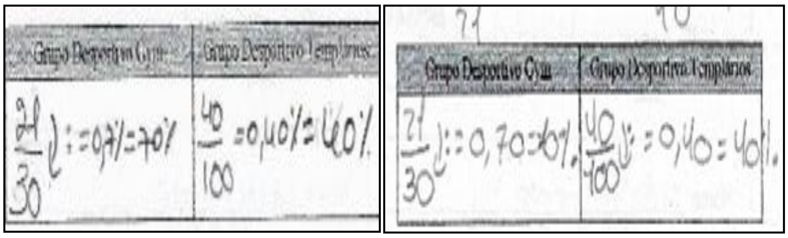


Figura 5.1.20. - Respostas evidenciando a determinação de uma percentagem recorrendo ao valor da razão em dízima, por Mariana e Alice.

Na razão/fração cujo consequente/denominador era 100, aparentemente, alguns alunos estabelecem a relação entre o valor da percentagem com o antecedente de uma razão de consequente 100, como na Figura 5.1.21. Henrique e Sara apresentaram só o valor da percentagem sem qualquer outra referência, possivelmente porque relacionaram que a razão $\frac{40}{100}$ (40 em 100) corresponde a 40%. Carlos evidenciou ter estabelecido essa relação, indicando apenas a razão para apresentar o valor da percentagem, parecendo ter relacionado o valor da percentagem com o valor do antecedente.

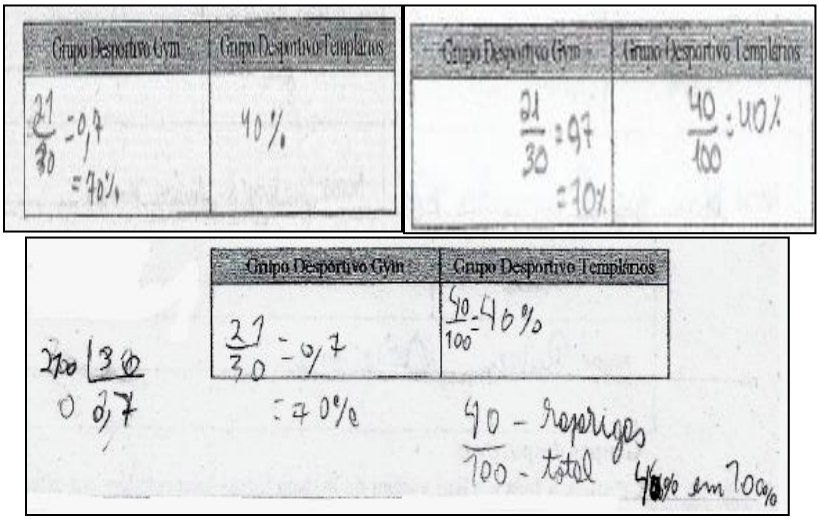


Figura 5.1.21. - Exemplo da determinação de uma percentagem recorrendo à dízima em razão cujo consequente não é 100 e relacionando o antecedente com o valor em percentagem numa razão de consequente 100, por Henrique, Sara e Carlos.

No momento da discussão, promovi o destaque desta relação, para enfatizar que, uma percentagem poder ser representada por uma razão de consequente 100, sendo o valor do antecedente, que indica uma parte de 100, o valor da percentagem.

O item 2. (Figura 5.1.22.), introduziu de modo intuitivo a noção de proporção. Os alunos tinham de comparar duas razões determinando o seu valor, e deste modo, poderiam constatar que duas razões com termos diferentes podiam representar o mesmo valor, tal como na equivalência de frações, e também que representariam a mesma percentagem.

2.1.1. Atende à comparação que indicaste entre o **número de raparigas** e o **número total de jovens** do Grupo Desportivo Gym e do Grupo Desportivo da Roda.

a) Calcula o **valor** de cada uma **das razões**.
O que podes concluir.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Roda

2.2. Qual a **percentagem de raparigas** do Grupo Desportivo da Roda. **Compara-a** com a do grupo Gym. Que podes concluir?

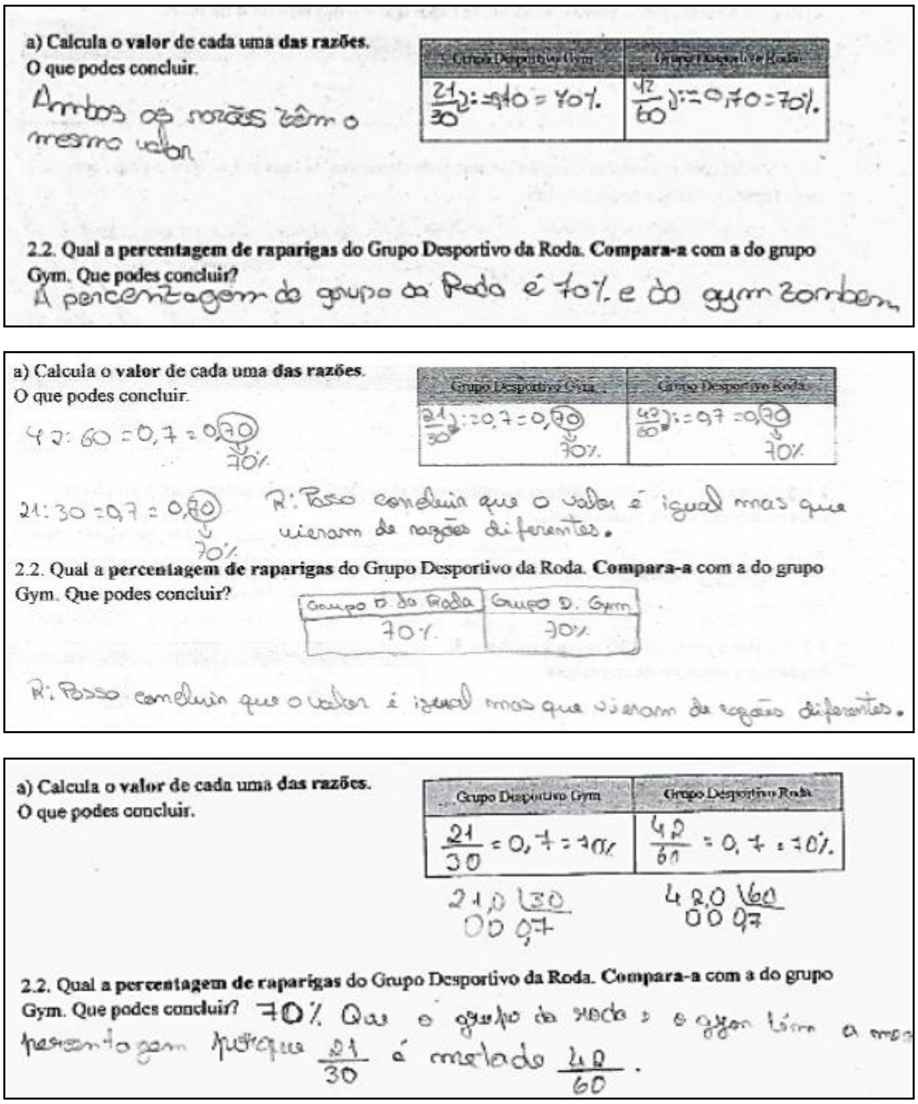
Figura 5.1.22. - Item 2.1.1. e 2.2., tarefa 1.

De um modo geral os alunos não revelaram grandes dificuldades e mais uma vez se destacou a estratégia do recurso ao valor da dízima para determinar uma percentagem, como apresentado pelos alunos, na Figura 5.1.23.

Os alunos não apresentaram conclusões ou, quando o fizeram, pareceu não saberem explicar ou evidenciar que as razões com termos diferentes podiam ser equivalentes. É o caso de Mariana que determinou o valor e a percentagem referindo que são iguais mas sem referência às duas razões e à sua equivalência. Sara determinou que as duas razões eram diferentes mas que representavam o mesmo valor, mas parece não ter estabelecido qualquer relação de equivalência, apenas referiu que "tinham o mesmo valor mas vieram de razões diferentes".

Os alunos concluíram que as razões tinham o mesmo valor e representavam a mesma percentagem mas não justificaram a resposta mesmo que de forma incompleta. A justificação mais completa é a de Catarina, que de algum modo estabeleceu uma relação de equivalência entre as razões.

De um modo geral, os alunos ou não apresentaram qualquer justificação ou não a apresentaram de forma completa, parecendo não atenderam que as razões eram equivalentes, apesar de determinarem o seu valor e constatarem que representavam o mesmo valor e a mesma percentagem.


a) Calcula o valor de cada uma das razões.
O que podes concluir.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Roda
21/30 := 0,70 = 70%	42/60 := 0,70 = 70%

Ambos as razões têm o mesmo valor

2.2. Qual a percentagem de raparigas do Grupo Desportivo da Roda. Compara-a com a do grupo Gym. Que podes concluir?
A percentagem do grupo da Roda é 70% e do gym também

a) Calcula o valor de cada uma das razões.
O que podes concluir.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Roda
21/30 := 0,7 = 0,70 → 70%	42/60 := 0,7 = 0,70 → 70%

42 : 60 = 0,7 = 0,70 → 70%
21 : 30 = 0,7 = 0,70 → 70%
R: Posso concluir que o valor é igual mas que vieram de razões diferentes.

2.2. Qual a percentagem de raparigas do Grupo Desportivo da Roda. Compara-a com a do grupo Gym. Que podes concluir?

Grupo D. da Roda	Grupo D. Gym
70%	70%

R: Posso concluir que o valor é igual mas que vieram de razões diferentes.

a) Calcula o valor de cada uma das razões.
O que podes concluir.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Roda
21/30 = 0,7 = 70%	42/60 = 0,7 = 70%

2.2. Qual a percentagem de raparigas do Grupo Desportivo da Roda. Compara-a com a do grupo Gym. Que podes concluir? 70% Que o grupo da roda e o gym têm a mesma percentagem porque 21/30 é metade 42/60.

Figura 5.1.23. - Exemplos de respostas apresentadas no item 2.1. e 2.2., por Mariana, Sara e Catarina.

Com o item 2.3. (Figura 5.1.24.) era pretendido que os alunos calculassem percentagens de uma quantidade, nomeadamente determinar uma percentagem de 60 jovens.

2.3. Os Grupos Desportivos têm jovens com idades entre os 10 e os 18 anos.
Dos 60 jovens que constituem o Grupo Desportivo da Roda, **10% têm 11** anos, **20% tem 12** anos e **25% tem 15** anos. Quantos são os jovens:
a) Com **11** anos b) Com **12** anos c) Com **15** anos

Figura 5.1.24. - Item 2.3., tarefa 1.

A estratégia mais usada pelos alunos para determinar o valor de uma determinada percentagem, foi o uso da conversão em dízima, e o seu uso como fator multiplicativo, como efetuado por Carlos, Sara e Alice (Figura 5.1.25.).

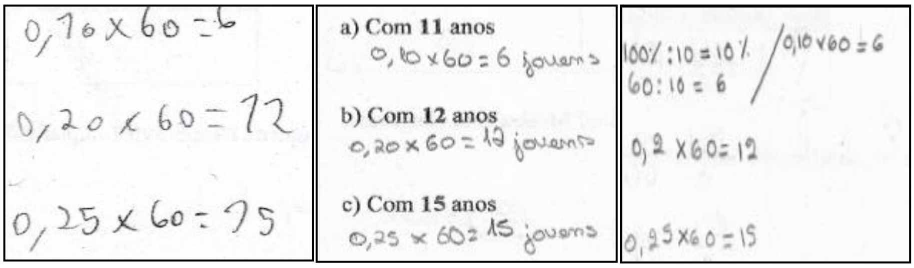


Figura 5.1.25. - Cálculo de percentagem recorrendo à sua representação em forma de dízima, por Carlos, Sara e Alice.

Um pequeno número de alunos efetuou o cálculo da percentagem recorrendo à estratégia partitiva, como Mariana (Figura 5.1.26.), estabelecendo uma relação proporcional entre 10% e a décima parte, 20% e a quinta parte, e 25% e a quarta parte.

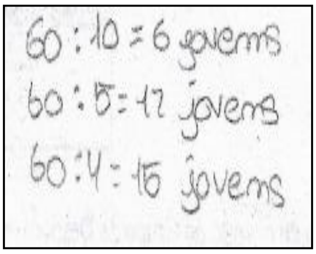


Figura 5.1.26. - Cálculo de percentagem por estratégia partitiva, por Mariana.

Ainda pude constatar que alguns alunos determinaram o número de jovens a que correspondia 10% por estratégia partitiva (60 ÷ 10 correspondia assim a 6 jovens) e por composição e decomposição do seu valor, determinaram 20% (2 × 10% ou 2 × 6 jovens = 12 jovens) e calcularam o valor de 5% (10% ÷ 2 isto é, 6 jovens ÷ 2 = 3 jovens) de forma a determinarem o valor de 25% por composição (12 + 3 = 15 jovens). Neste tipo de resolução os alunos revelaram um raciocínio pré-proporcional, compondo e decompondo quantidades efetuando adições, cálculo de metade e de dobro, para determinarem o valor de cada percentagem, como apresentado no trabalho realizado por Maria José (Figura 5.1.27.).

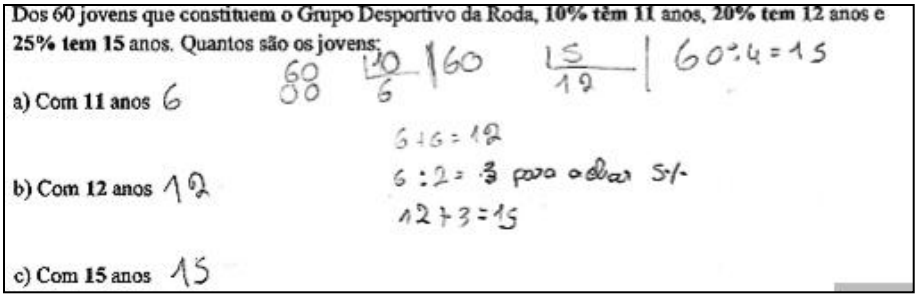


Figura 5.1.27. - Cálculo de percentagem por composição/decomposição, por Maria José.

Os alunos revelaram alguma flexibilidade em trabalhar e relacionar percentagem e dízimas. Também evidenciaram efetuar relações proporcionais, embora sem usar proporções. Poderiam ter recorrido a frações equivalentes como por exemplo: para determinarem 10% poderiam efetuar $\frac{60}{100} = \frac{6}{10}$, e daí poderiam complementar com $\frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25}$. Mais uma vez os alunos, neste tipo de tarefa, pareceram não efetuar conexões entre percentagens e frações que representam uma parte em 100 e também não estabeleceram relações de equivalência recorrendo a um fator multiplicativo.

6.4. A tarefa 2: Remates à baliza

A tarefa (Anexo 8) foi planeada para ter uma duração de 50 minutos mas, para a sua realização, foram necessárias duas aulas de 50 minutos. Os alunos levaram mais tempo que o previsto principalmente a concretizarem as respostas com justificação. A discussão coletiva foi um pouco prolongada.

O trabalho requeria novamente a distinção entre uma comparação absoluta e uma comparação relativa e a construção de razões, agora de forma mais formal. Também, introduzia informalmente a formação de proporções. No decorrer da monotorização do trabalho, constatei que alguns alunos ainda apresentaram dúvidas na perceção da diferença entre os dois tipos de comparação (absoluta e relativa). Revelaram dificuldades em compreender que uma situação pode apresentar um cenário diferente dependente do tipo de comparação que se efetua.

No primeiro item (Figura 5.2.1.) era pretendida uma comparação em termos absolutos. Os alunos teriam de aduzir quem havia marcado mais golos. Nesta situação, era o Rui, uma vez que marcou 5 golos e a Catarina só marcou 3 golos (5> 3).

1. O Rui e a Catarina foram treinar juntos no campo da escola.
No treino, a Catarina fez **10 remates** à baliza e acertou **3**, fez assim **3 golos**.
O Rui fez **20 remates** e marcou **5** golos.

1.1. Quem fez mais golos neste jogo?

1.2. Escreve a **razão entre o número de golos e o número de remates**:

a) Da Catarina

b) Do Rui

c) Analisa as razões que acabaste de escrever. Quem obteve melhor desempenho neste jogo? Justifica.

Figura 5.2.1. - Itens 1.1. e 1.2., tarefa 2.

No segundo item, os alunos tinham de apresentar a razão que representava a comparação entre o número de golos marcados e o respetivo número de remates surgindo as razões $\frac{3}{10}$ e $\frac{5}{20}$. Estes dois itens foram realizados por todos os alunos, sem aparentes dificuldades.

A questão alínea c) do item 1.2. (Figura 5.2.1.), que requeria a comparação em termos relativos, foi a que suscitou dúvidas e alguma discussão entre pares. Os alunos teriam de analisar e comparar o número de golos em relação ao número de remates efetuados. Era suposto depreenderem que 3 golos marcados em 10 remates efetuados, era uma situação mais favorável, do que marcar 5 golos em 20 remates. No entanto, pude depreender que existiu alguma dificuldade da sua parte na compreensão de qual seria o melhor desempenho. A discussão entre os alunos assentava na ideia que, uma vez que 3 golos representavam menor quantidade do que 5 golos, não poderia representar um cenário de melhor desempenho. O diálogo entre Tomás e Carlos ilustra a questão discutida:

Tomás: A Catarina é que marcou mais golos em comparação com os remates!

Carlos: Não percebo! Como? Se a Catarina marcou menos, porque só marcou 3 golos, e 3 é menos que 5.

Tomás: Mas fez menos remates!

Carlos: Sim, está bem, mas 3 continua a ser menos do que 5, por isso marcou menos!

Tomás: Sim, mas tens de ver o número de remates. O Rui fez 20 remates, o dobro da Catarina. Se ela rematasse 20 vezes, fazia em vez de 3, 6 golos, que é o dobro. Por isso marcou mais, em relação ao Rui.

Esta discussão permitiu que Carlos alcançasse alguma compreensão sobre a relação entre o antecedente e o consequente que formavam as duas razões. O aluno pôde concluir que afinal 3 golos em 10 remates correspondia a melhor desempenho do que 5 golos em 20 remates, mas denotou-se que ficou algo apreensivo, pois não apresentou uma justificação completa (Figura 5.2.2.).

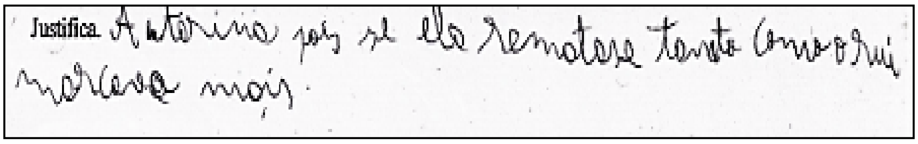


Figura 5.2.2. - Justificação apresentada, por Carlos.

Registaram-se respostas que evidenciaram o efetuar de uma comparação absoluta em vez de relativa, talvez decorrente de uma fraca interpretação do que era pedido, como no caso de Mariana (Figura 5.2.3.). A aluna relacionou inadequadamente o maior número de remates com o esforço e não com o desempenho. Ou seja, Mariana atendeu ao desempenho mas interpretando-o como esforço ou empenho, não como uma situação de sucesso. Conclui-se que a aluna não estabeleceu uma comparação entre o número de golos concretizados e o respetivo número de remates, em cada razão.

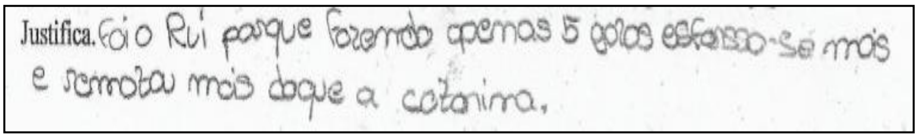
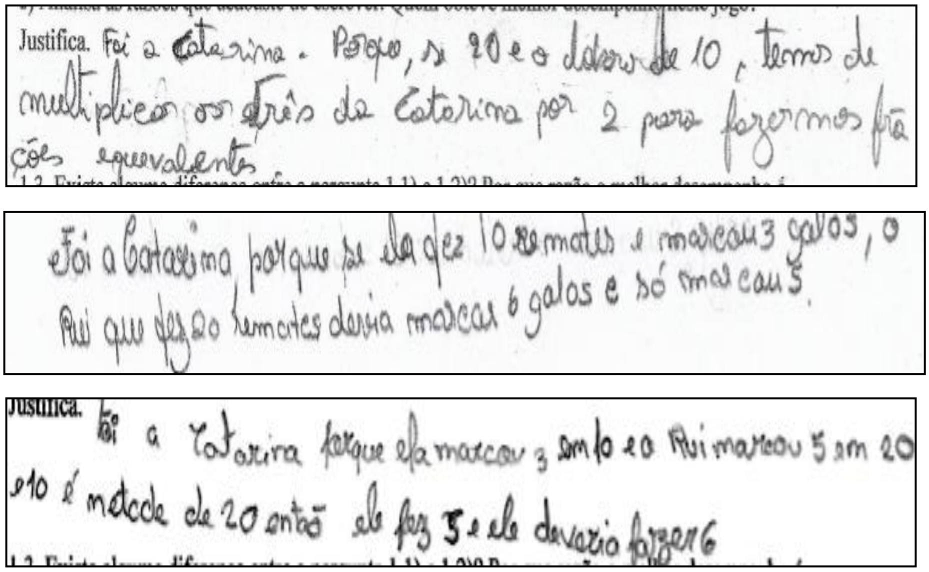


Figura 5.2.3. - Justificação incorreta apresentada, por Mariana.

Várias respostas apresentaram justificações semelhantes, como as de Tomás, Sílvia e Alice (Figura 5.2.4.) que evidenciaram ter efetuado uma comparação entre as duas razões. Na comparação que fizeram reconheceram que o número de remates, 10, o consequente de uma razão, correspondia ao dobro de remates da outra razão, 20. Destacaram que o número de golos concretizados não correspondia ao dobro (3 golos para 5 golos em vez de ser para 6 golos). Desta forma os alunos efetuaram, de modo intuitivo, uma comparação entre duas razões, reconhecendo a não existência de equivalência.

O seu trabalho mostrou que atenderam à equivalência de frações, como processo de resolução e interpretação da situação colocada, embora o tenham explicado em linguagem natural.



Justifica. Foi a Caterina. Porque, se 20 é o dobro de 10, temos de multiplicar os três da Caterina por 2 para fazermos frações equivalentes

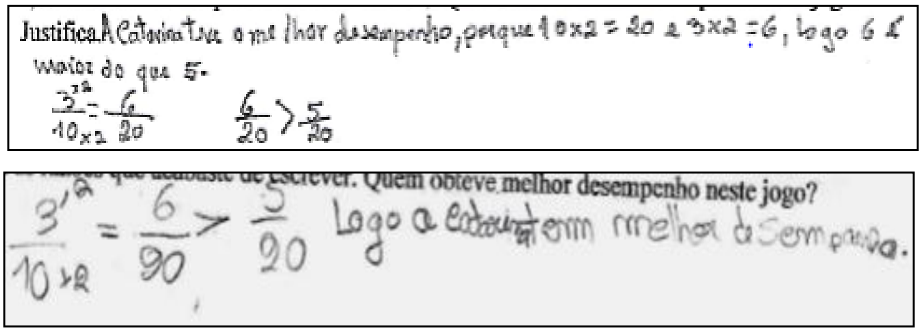
Foi a Catarina porque se ela fez 10 remates e marcou 3 golos, o Rui que fez 20 remates devia marcar 6 golos e só marcou 5.

Justifica. Foi a Catarina porque ela marcou 3 em 10 e o Rui marcou 5 em 20 e 10 é metade de 20 então ele fez 5 e ele deveria fazer 6

Figura 5.2.4. - Respostas evidenciando comparações dentro das variáveis, em linguagem natural, de Tomás, Sílvia e Alice.

A resposta de Tomás mostra que este procedeu à equivalência de frações, apresentando o respetivo procedimento de cálculo. Implicitamente notou que estas frações não são equivalentes, pois não concluiu a justificação. Sílvia e Alice seguiram o mesmo raciocínio mas apresentaram uma justificação completa em linguagem natural. Compreende-se que as alunas constataram que a razão equivalente a $\frac{3}{10}$ seria $\frac{6}{20}$.

Poucos alunos estabeleceram uma relação de equivalência em linguagem simbólica. Foi o caso de Maria José e Angelina, que recorreram ao fator multiplicativo ($\times$ 2) para transformar $\frac{3}{10}$ em $\frac{6}{20}$ (Figura 5.2.5.). Deste modo evidenciaram que em 20 remates deveriam ter sido concretizados 6 golos e a razão representava a concretização de apenas 5 golos. As alunas indicaram que $\frac{6}{20} > \frac{5}{20}$, revelando que compreenderam a situação e estabeleceram uma comparação relativa.



Justifica. A Catarina teve o melhor desempenho, porque 10x2 = 20 e 3x2 = 6, logo 6 é maior do que 5.

$\frac{3^{\times 2}}{10_{\times 2}} = \frac{6}{20}$ $\frac{6}{20} > \frac{5}{20}$

Quem obteve melhor desempenho neste jogo?

$\frac{3^{\times 2}}{10_{\times 2}} = \frac{6}{90} > \frac{5}{20}$ Logo a Catarina tem melhor desempenho.

Figura 5.2.5. - Respostas recorrendo à equivalência de frações para efetuar a comparação entre as razões, por Maria José e Angelina.

Henrique revelou ter um raciocínio mais sofisticado, relacionou que 5 em 20 correspondia a um quarto, e indicou que $\frac{3}{10}$ é maior que um quarto (Figura 5.2.6.). Foi o único aluno a estabelecer uma relação comparativa por esta estratégia.

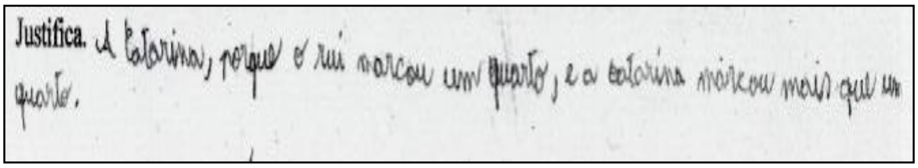

Justifica. A Catarina, porque o Rui marcou um quarto, e a Catarina marcou mais que um quarto.

Figura 5.2.6. - Resposta relacionando a razão com o valor da fração $\frac{1}{4}$, por Henrique.

Um aluno, Sérgio, recorreu à determinação do valor de cada uma das razões. Como procedimento recorreu à descoberta do quociente que representava cada razão, para assim comparar e justificar qual a de maior valor (Figura 5.2.7.).

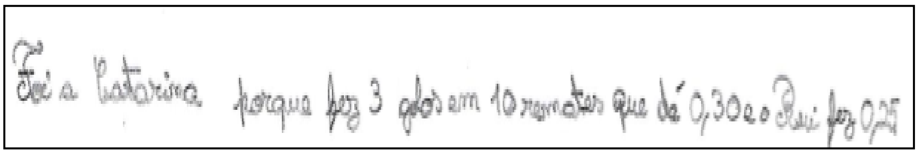

Foi a Catarina porque fez 3 golos em 10 remates que dá 0,30 e o Rui fez 0,25

Figura 5.2.7. - Resposta com justificação baseada no valor de cada razão, de Sérgio.

Os alunos recorreram a várias estratégias para produzirem as suas justificações. Estas envolveram o trabalho com frações, sua representação em dízima e equivalência de frações, por forma a estabelecerem uma comparação entre as razões, reconhecendo a que representava o melhor desempenho. Um pequeno número de alunos apenas referiu quem obteve melhor desempenho, mas não apresentou justificação.

O item 1.3. (Figura 5.2.8.) pretendia aprofundar a compreensão sobre o facto que uma situação que envolve duas grandezas pode mudar quando os valores são variáveis e se efetuam comparação em termos relativos. Os alunos por análise das questões e como síntese concluiriam que, a situação que em termos absolutos reportava-se a 3 maior que 5 (golos), mas ao envolver outra grandeza, remates, e comparando-as entre si, o maior número de golos passava a não representar o melhor resultado. Em termos relativos, 3 em 10 representava um valor maior que 5 em 20.

1.3. Existe alguma diferença entre a pergunta 1.1) e 1.2)? Por que razão o melhor desempenho é diferente de marcar mais golos? Que operações aritméticas efetuas e como poderás justificar a resposta a esta questão?

Figura 5.2.8. - Item 1.3., tarefa 2.

Os alunos teriam de analisar as relações, que haviam efetuado nos itens anteriores, de modo a reconhecer a diferença entre comparação absoluta e comparação relativa. Muitos alunos não apresentaram qualquer resposta, talvez, pela complexidade da questão e revelaram não compreender o que era pedido.

Basicamente os alunos identificaram que as questões eram diferentes mas não explicaram porquê. Foi o caso de Carlos. O aluno, por não apresentar qualquer justificação, aparentemente, continuou a revelar dificuldades nas comparações relativas (Figura 5.2.9.).

Figura 5.2.9. - Resposta sem justificação, de Carlos.

Mariana, apesar do seu trabalho em grupo com Ana, continuou a efetuar uma interpretação incorreta da situação (Figura 5.2.10.). A sua resposta revela alguma confusão. Não foi clara na sua justificação, continuando a focar-se no empenho e não no sucesso em concretizar golos.

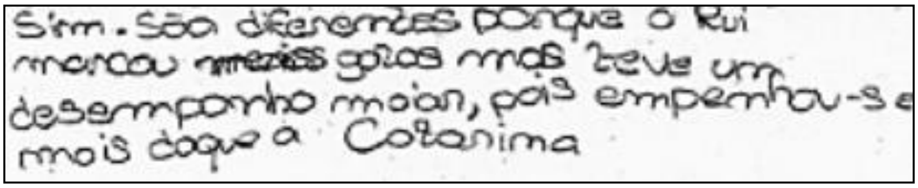


Figura 5.2.10. - Resposta com a interpretação incorreta, de Mariana.

Ao contrário o seu par, Ana, pareceu estabelecer uma correta interpretação e compreensão da situação, efetuando o quociente de cada razão como estratégia para descobrir qual a razão de maior valor. Não formou uma explicação completa, apenas evidenciou simbolicamente (Figura 5.2.11.) que o valor de uma era superior ao da outra.

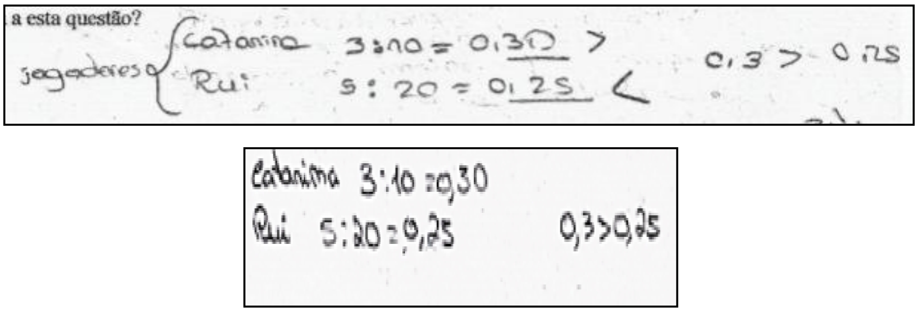


Figura 5.2.11. - Resposta evidenciando o valor de cada razão, sem justificação completa, por Ana e Sílvia.

Tal como Ana, Sílvia também usou o mesmo procedimento (Figura 5.5.11.) destacando que um quociente era maior que o outro 0,3> 0,25. Estas repostas foram semelhantes às apresentadas por vários alunos. Muitos não construíram respostas completas e limitaram-se a efetuar o procedimento de cálculo matemático, como é exemplo a resposta de Sara (Figura 5.2.12.). Basicamente evidenciaram o cálculo do quociente determinando quanto representava cada razão, mas não apresentaram qualquer conclusão.

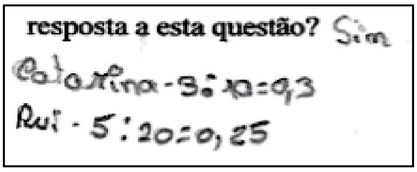

resposta a esta questão? Sim
Catarina - 3:10=0,3
Rui - 5:20=0,25

Figura 5.2.12. - Resposta evidenciando apenas o procedimento de cálculo, por Sara.

Tomás evidenciou compreender a diferença entre comparação em termos absolutos e relativos, distinguindo as duas situações e identificando qual a operação que lhe permitia justificar o melhor desempenho (Figura 5.2.13.). Embora no item anterior o aluno tenha recorrido à relação do dobro, nesta situação referiu que efetuaria o quociente entre o antecedente e o consequente, revelando flexibilidade no uso de estratégias. Para a mesma situação apresentou processos diferentes de resolução.

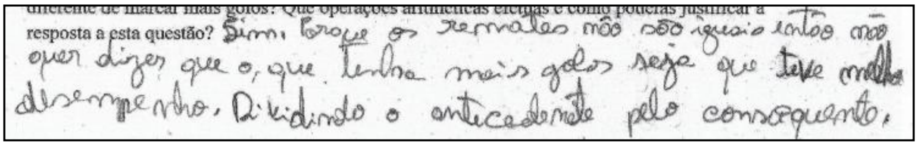

resposta a esta questão? Sim, Porque os remates não são iguais então não quer dizer que o, que tenha mais golos seja que teve melho desempenho. Dividindo o anticedente pelo consequento.

Figura 5.2.13. - Resposta com explicação sobre as diferenças entre as questões colocadas, por Tomás.

Angelina, que no item anterior resolveu a situação recorrendo à equivalência de frações, neste item apresentou que a operação a efetuar seria o quociente e apresentou-o para as duas razões, destacando que $\frac{3}{10} = 0{,}3$ e $\frac{5}{20} = 0{,}25$ e expôs que 0,3 > 0,25.

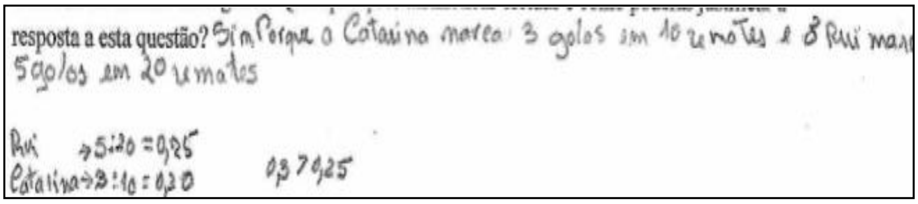

resposta a esta questão? Sim Porque o Catarina marca 3 golos em 10 remates e o Rui marca 5 golos em 20 remates
Rui → 5:20 = 0,25
Catarina → 3:10 = 0,30
0,3 > 0,25

Figura 5.2.14. - Resposta baseada no cálculo dos quocientes e sua comparação, por Angelina.

De um modo geral, os alunos distinguiram comparações absolutas de comparações relativas, embora não apresentassem respostas completas. Constatou-se que os alunos discutiram entre si ideias e opiniões, levando algum tempo até alcançarem conclusões.

Os alunos calcularam o valor da razão, usaram a dízima para comparem qual a razão que era maior, associando-a ao melhor desempenho. A estratégia mais usada reportou-se assim à determinação do valor do quociente, como meio de efetuar comparações relativas. Além disso salientaram-se alguns alunos que começaram a envolver trabalho com números racionais e a recorrer à equivalência de frações para efetuar comparações entre duas razões.

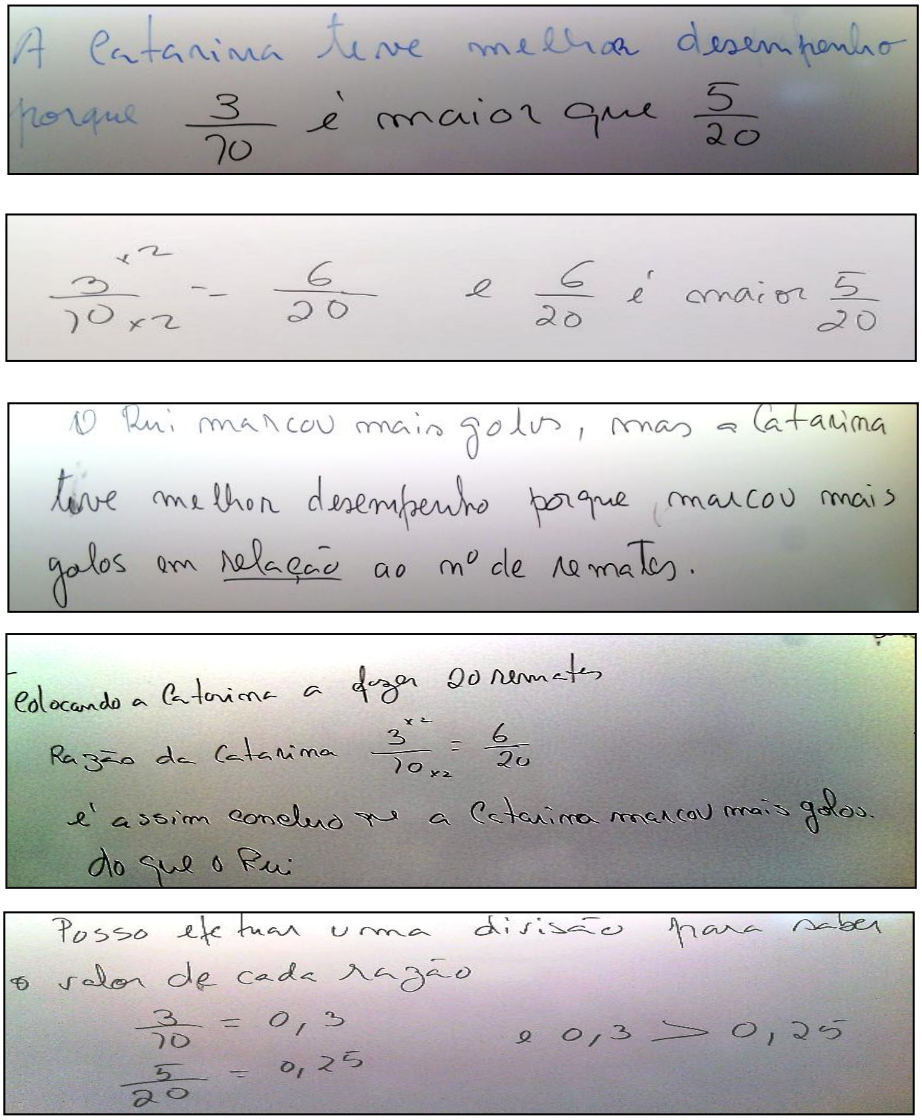


Figura 5.2.15. - Sínteses das conclusões e justificações apresentadas na discussão coletiva à questão 1.3.

Ao longo da atividade apercebi-me que poucos alunos foram bem-sucedidos neste item, revelou-se confuso e de difícil compreensão. Para a discussão coletiva planeei a exposição de conclusões, enfatizando as diferentes estratégias usadas.
As imagens da Figura 5.2.15. mostram as sínteses e procedimentos apresentados, que resultaram da discussão coletiva, registadas de acordo com o que os alunos desenvolveram.

Na segunda aula foram realizados os itens 2., 2.1. (Figura 5.2.16.) e 3. (Figura 5.2.23.), que tinham o intuito de iniciar os alunos na formação de proporções, de modo informal. Os itens apresentavam a estrutura da representação de uma proporção $- = -$, que era necessário completar. Por observação os alunos poderiam constatar que seria semelhante à representação de duas frações equivalentes.

2. A Inês, entrou no jogo e fez 12 remates.

2.1.Se a Inês teve um desempenho igual ao do Rui, quantos golos marcou? $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Figura 5.2.16. - Itens 2., 2.1., tarefa 2.

Tendo como ponto de partida a razão $\frac{5}{20}$, os alunos teriam de formar uma razão equivalente, cujo consequente fosse 12 . Esta questão enquadrava-se numa situação de descoberta do valor em falta $\frac{5}{20} = \frac{?}{12}$, que correspondia ao número de golos marcados.

Os alunos levaram algum tempo a estabelecer uma relação entre as razões, começando lentamente a atender à formação de frações equivalentes. Depreenderam pela representação já apresentada no enunciado. A dificuldade decorreu em escrever uma fração equivalente a $\frac{5}{20}$ com denominador/consequente 12, pois não encontravam um fator multiplicativo inteiro que transformasse 12 em 20. Muitos alunos não realizavam trabalho, para os ajudar tentei conduzir à descoberta da relação de invariância entre os termos da razão $\frac{5}{20}$, colocando a questão "*Não encontram uma relação entre o antecedente e o consequente*? *Uma relação entre o número de golos marcados e o número de remates efetuados?*" A questão não foi fácil para os alunos. Só após algum tempo de discussão entre pares foi surgindo a relação que 5×4 = 20. O quádruplo do antecedente determinava o consequente.

Entretanto, surgiu outro obstáculo, decorrente da necessidade de efetuarem a operação inversa para descoberta do valor em falta que resultava da descoberta da quarta parte de 12. A quarta parte do consequente determinava o antecedente. Mas com a minha intervenção e entreajuda entre pares, de um modo geral, os alunos foram - estabelecendo relações de invariância, “entre” as variáveis.

Destacou-se um aluno, Tomás, que estabeleceu uma relação de covariância recorrendo ao mínimo múltiplo comum entre os dois consequentes. Mais uma vez, o aluno usou uma estratégia diferente, tendo em conta o que realizou ao longo da tarefa. O aluno recorreu à determinação do mínimo múltiplo comum entre os dois consequentes [m. m. c. (20,12) = 60], para determinar frações equivalentes $\frac{5}{20}=\frac{15}{60}$ e $\frac{?}{12}=\frac{15}{60}$, como mostra a Figura 5.2.17. Tomás não apresentou o fator multiplicativo a que recorreu para determinar o valor em falta, possivelmente efetuou a equivalência mentalmente (se $12 \times 5 = 60$ logo $15\ \div 5 = 3$).

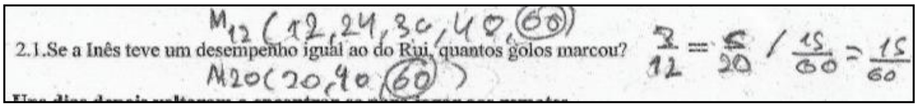


Figura 5.2.17. - Resposta evidenciando a determinação do mínimo múltiplo comum, entre os consequentes, para formar frações equivalentes, por Tomás.

Alice e Ana recorreram à mesma estratégia, após diálogo com Tomás que mencionou a sua forma de pensar.

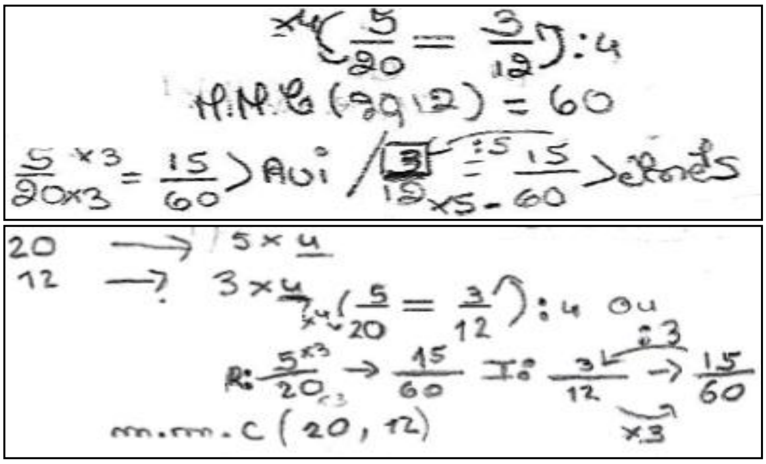


Figura 5.2.18. - Resolução recorrendo a estratégias de invariância e de covariância na equivalência de frações, por Alice e Ana.

Mas as alunas apresentaram o fator multiplicativo que aplicaram. Após a etapa da determinação do mínimo múltiplo comum [m. m. c. (20,12) = 60], evidenciaram o fator multiplicativo 5, que usaram na relação de covariância (“dentro”) da mesma variável, notando que $\frac{15}{60}=\ \frac{3}{12}$ cujo fator multiplicativo é 5, uma vez que $60 \div 5 = 12$, logo $15 \div 5 = 3$, explícito na resolução de Alice e de Ana (Figura 5.2.18.).

No entanto, Ana cometeu um erro, usando o fator multiplicativo incorreto (×3) na determinação do valor em falta, talvez por distração, uma vez que determina o valor corretamente.

Ambas as alunas apesar de apresentarem um raciocínio correto que lhes permitiu descobrir o valor em falta, acabaram por não apresentar a razão encontrada na representação formal da proporção. As alunas formaram duas proporções, $\frac{5}{20} = \frac{15}{60}$ e $\frac{3}{12} = \frac{15}{60}$. Deste modo não interligaram as razões representativas de cada uma das situações, não mostrando formalmente a proporção pretendida $\frac{5}{20} = \frac{3}{12}$. À semelhança de outros alunos da turma, as alunas estabeleceram, também, uma relação de invariância entre os termos de cada razão evidenciando a descoberta do fator multiplicativo $(\times 4)$, e por uso desta estratégia funcional, formaram a proporção.

Henrique e Mariana deram respostas (Figura 5.2.19.), que constituem exemplos que evidenciam o uso da estratégia de invariância, estabelecendo uma relação multiplicativa "entre" as medidas de grandeza, exibindo a proporção formalmente requerida.

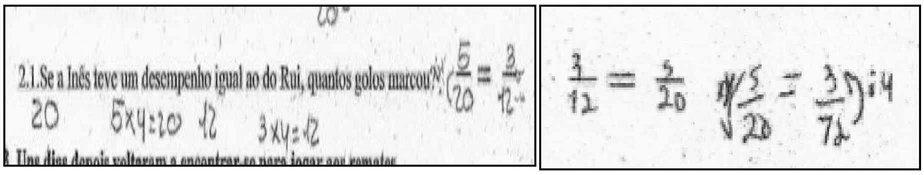


Figura 5.2.19. - Resoluções evidenciando relações de invariância, de Mariana e Henrique.

Estas duas estratégias destacaram-se na discussão coletiva. Alice apresentou, ainda, outra ilação a que chegou no decorrer da discussão, possivelmente quando relacionou o antecedente com o consequente. A aluna descobriu que o primeiro correspondia à quarta parte do segundo e que essa relação teria de se manter para a formação de uma proporção. A sua explicação foi registada no quadro (Figura 5.2.20.).

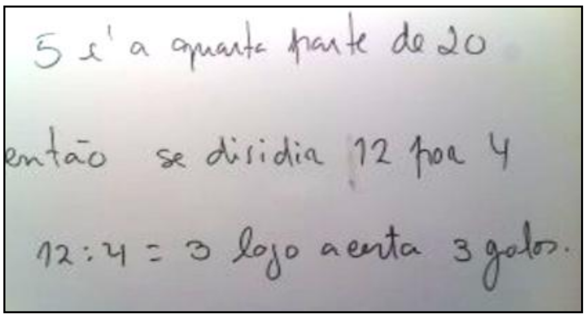


Figura 5.2.20. - Registo da conclusão, de Alice.

Também, no momento da discussão coletiva, Filipe fez uma observação, talvez atendendo à intervenção de Alice. O aluno referiu que poder-se-ia ter transformado $\frac{5}{20}$ numa fração irredutível $\frac{1}{4}$, (razão unitária), uma vez que $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. A partir desta fração, $\frac{1}{4}$, formar-se-ia a fração equivalente com consequente 12 ou seja $\frac{3}{12}$. Esta inferência foi registada no quadro, conjuntamente com a relação de invariância que o aluno estabeleceu no seu trabalho autónomo, aquando da formação da proporção.

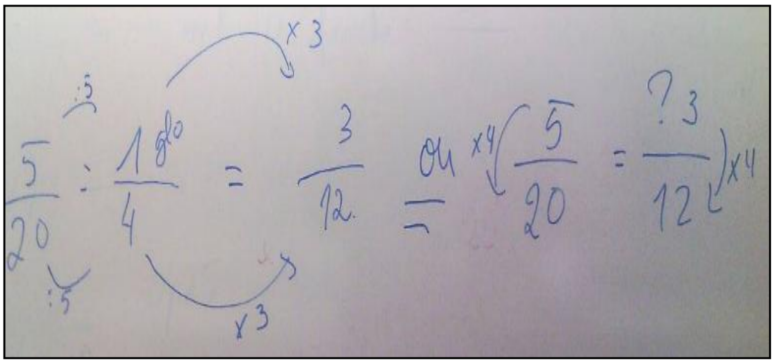


Figura 5.2.21. - Estratégia de equivalência de frações com base na fração unitária e estratégia funcional, apresentadas por Filipe.

Foi registado no quadro a estratégia que Tomás apresentou à turma (Figura 5.2.22.). Nesta destacou-se o uso do m. m. c. e recordou-se a sua utilidade na construção de frações equivalentes. Este momento permitiu relacionar frações e razões, e o uso do m.m.c. como um procedimento auxiliar na formação de proporções.

Possivelmente, com estas conclusões, promoveu-se a realização de conexões entre os tópicos matemáticos.

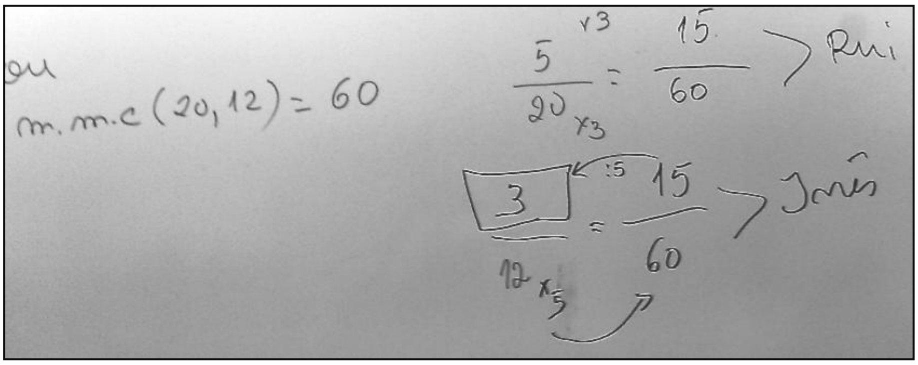


Figura 5.2.22. - Registo da determinação do mínimo múltiplo comum, entre os consequentes para formação de proporções, por Tomás.

Foi necessário chamar a atenção para o facto do processo de formação da proporção não ter sido concretizado da forma correta, uma vez que quem recorreu a esta estratégia apresentou duas proporções em vez de apenas uma proporção, como era solicitado.

A formação de uma outra proporção era pedida na resposta ao item 3.1. (Figura 5.2.23.). A atividade no item anterior facilitou a construção desta proporção. Todos os alunos realizaram a sua formação com sucesso e estabeleceram a relação de invariância entre os elementos de cada razão, mantendo o fator multiplicativo (× 2) ou efetuando o seu inverso.

A Catarina **rematou 14** vezes e o Rui **rematou 20** vezes.

3.1. Agora escreve uma situação usando esses números, em que o desempenho da Catarina seja igual ao desempenho do Rui: $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$. Explica como pensaste.

Figura 5.2.23. - Item 3.1., Tarefa 2.

Os alunos evidenciaram o uso da relação de invariância entre os termos de cada uma das razões, como apresentado nas imagens da Figura 5.2.24., determinando, implicitamente, que o número de golos correspondia a metade do número de remates. Esta relação foi enfatizada na discussão coletiva, quando lancei a questão "*Qual a relação entre o número de golos marcados e o número de remates efetuados?*", na tentativa de contribuir para compreensão da comparação estabelecida, do seu significado e das suas variáveis.

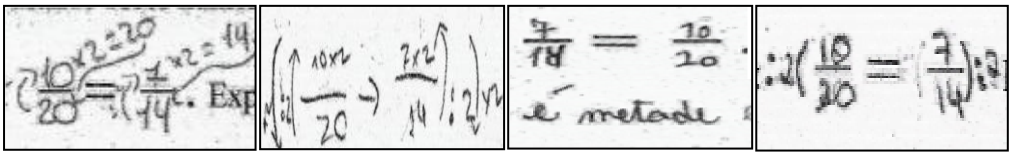


Figura 5.2.24. - Respostas evidenciando relações de invariância, por Mariana, Ana, Henrique e Sara.

A discussão pretendia também suscitar a reflexão nos alunos, para que relacionassem as medidas de grandeza e o contexto da proporção construída, que aparentemente todos realizaram (Figura 5.2.25.).

Nos itens 2. e 3., era pretendido que os alunos, ao formarem proporções, começassem a estabelecer relações de invariância e de covariância, e evidenciassem relações multiplicativas. A análise das suas resoluções mostrou que de facto os alunos estabelecerem essas relações, na sua maior parte através do uso de estratégia funcional, estabelecendo relações entre as variáveis.

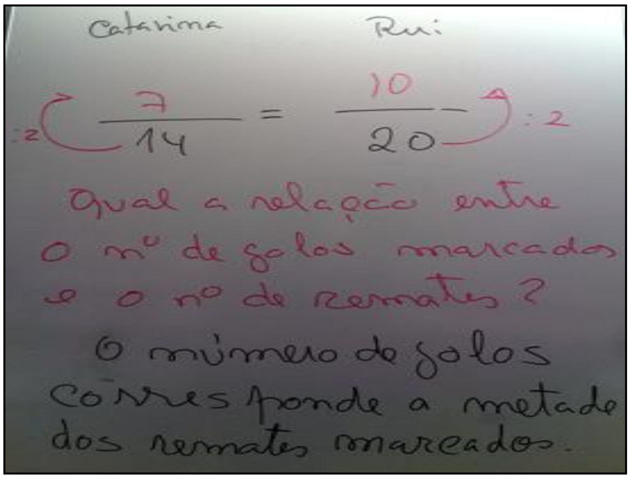


Figura 5.2.25. - Registo no quadro da comparação entre as duas quantidades de cada razão.

Alguns alunos apresentaram dificuldades no início do trabalho. No entanto e uma vez que o item 3., já não levantou dúvidas, poder-se-á tomar esse facto como um indicador de compreensão do sentido de invariância de grandezas ou da estratégia funcional. O trabalho em grupo com posterior discussão coletiva sobre as relações estabelecidas e explicação do raciocínio efetuado, possivelmente contribuiu para que os alunos com dificuldades, descobrissem e compreendessem as relações multiplicativas que se podem efetuar na construção de proporções.

6.5. Tarefa 3: O *iPad* da Inês

Esta tarefa (Anexo 9) foi planeada para ter uma duração de duas aulas de 50 minutos e visava perceber se os alunos apresentavam melhor desempenho na formação de proporções e em estabelecer relações dentro e entre medidas de grandeza. O tempo de resolução da tarefa foi superior ao esperado pela professora. Os alunos desenvolveram a atividade com alguma lentidão, denotando ainda insegurança na formação de proporções.

Os dois primeiros itens (Figura 5.3.1.) requeriam a apresentação formal de razões e sua leitura e explicação. Aparentemente não suscitaram dúvidas aos alunos. A observação da atividade mostrou que as razões solicitadas eram formadas corretamente.

No entanto, no item 1.3. destacou-se alguma confusão na formação das razões. Como o item apresentava uma estrutura semiaberta, suscitou algumas dúvidas, levando os alunos a solicitarem a minha ajuda, para que confirmasse se haviam efetuado as razões de forma correta. Denotou-se alguma falta de confiança.

1. A Inês tem um *iPad* com vários itens, **30 *apps*** (aplicações), **algumas músicas** e **18 livros**.
Dos 18 livros, 10 são de mistério e 8 são sobre desporto.

1.1. Qual é a **razão entre o número de *apps* e o número de livros**:

1.2. Qual é a **razão entre o número de livros para o número de *apps***:

1.3. **Escreve outras razões** que comparem o **número de itens de um tipo** para o **número de itens de outro tipo** e faz a sua leitura:

Figura 5.3.1. - Item 1., tarefa 3.

A leitura das razões de forma formal não foi concretizada corretamente por todos os alunos, apesar do meu apoio e da ajuda entre pares. Alguns alunos não efetuaram uma leitura estruturada das razões apresentadas, como no caso de Ana e Sara (Figura 5.3.2.), alunas que apenas identificaram o significado do antecedente e do consequente.

$\frac{10}{18}$	10 de mistério para 18 livros do total.
$\frac{8}{18}$	18 livros desporto 10 para 18 do total de livros

$\frac{10}{18}$	10 são livros de mistério e 18 livros
$\frac{8}{18}$	8 são livros de desporto e 18 livros

Figura 5.3.2. - Respostas evidenciando leitura de uma razão de forma não formal, por Ana e Sara.

No trabalho de outros alunos registou-se outro tipo de deficiência, em termos de leitura formal das razões, nomeadamente na falta de referência à palavra "número". Na sua explicação, alguns alunos, não atenderam ao conceito de razão como representação da relação entre as duas quantidades representadas por um número. As respostas de Maria José e de Tomás foram exemplos dessa situação (Figura 5.3.3.), pois a explicação das razões descuidou o rigor formal.

$\frac{8}{10}$	Razão entre os livros de desporto e os de mistério
$\frac{30}{8}$	Razão entre as apps e os livros de desporto

$\frac{10}{18}$	razão entre os livros mistério pelo total de livros
$\frac{8}{18}$	razão entre os livros de desporto pelo total de livros

Figura 5.3.3. - Respostas com a explicação incompleta de uma razão, por Maria José e Tomás.

Apesar das deficiências referidas, um grupo considerável de alunos concretizou a formação e a explicação formal das razões, como se apresenta nos exemplos da Figura 5.3.4., com o trabalho de Henrique e Marta.

$\frac{10}{8}$	É a razão entre o número e livros de mistério e os de desporto
$\frac{10}{18}$	É a razão entre os livros de mistério e o total de livros

$\frac{10}{30}$	Razão entre o número de livros de mistérios e o número de apps.
$\frac{8}{10}$	Razão entre o número de livros de desporto e o número de livros de mistérios.

Figura 5.3.4. - Respostas evidenciando a leitura formal de uma razão, por Henrique e Marta.

Registou-se um número reduzido de alunos que apenas apresentou as razões mas não efetuou a respetiva explicação.

Seguiram-se os itens 1.4. e 1.5. (Figura 5.3.5.) que foram concebidos para promover a formação de proporções e construção do seu conceito formal. Os alunos levaram bastante tempo a estabelecer uma relação de igualdade entre as razões e a descoberta do termo em falta. Embora já tivessem trabalhado com proporções na tarefa anterior, nesta tarefa não se apresentava a estrutura da representação da igualdade entre duas razões $\frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$. Possivelmente, a ausência dessa estrutura causou algum obstáculo na concretização da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1.4. A Inês reparou que a razão entre o número de livros de mistério e o número de *apps* é a **mesma** que a razão entre o número de livros e o número de músicas. Quantas músicas, tem o seu *iPad*?

1.5. A Inês instalou mais algumas aplicações, ficando com ***35 apps***. Quantas músicas terá que gravar no seu *iPad*, **para manter a igualdade entre as duas razões,** à semelhança do que efetuaste na alínea 1.4. ?

Figura 5.3.5. - Itens 1.4. e 1.5., tarefa 3.

No decorrer do trabalho, percebi a dificuldade dos alunos na tentativa de estabelecerem uma relação de igualdade entre as frações, $\frac{10}{30} = \frac{18}{x}$. Por esta estratégia não alcançaram uma relação, uma vez que não encontravam forma de transformar 10 em 18, não conseguindo determinar o fator multiplicativo, possivelmente por este não ser um número natural.

A professora observou os alunos quando estes discutiam e se interrogavam de como haveriam de proceder para encontrar uma relação que lhes permitisse descobrir o valor em falta. Por vezes solicitavam a minha ajuda. O apoio dado cingiu-se no recordar do trabalho realizado na aula anterior, para que relembrassem as igualdades que haviam estabelecido entre o número de golos e o número de remates. Foi uma forma de suscitar nos alunos a formação de conjeturas.

Após algum tempo, um número muito reduzido, de alunos, conseguiu estabelecer uma relação entre das variáveis$\left(\frac{10}{30}\right)$, por estratégia funcional, reconhecendo o fator multiplicativo 3, uma vez que $10 \times 3 = 30$. Deste modo poderiam identificar a existência de uma relação do triplo, ou que o número de livros de mistério correspondia à terça parte do número de *apps*. Houve necessidade de apoiar determinados grupos/pares de alunos, lançando pistas, no sentido de relacionarem as duas medidas de grandeza: "*Será que conseguem verificar alguma relação entre o antecedente e o consequente, ou seja, entre o número de livros de mistério e o número de apps?*" Os alunos demoraram algum tempo a descobrirem a relação do triplo entre as duas grandezas que lhes permitiria descobrir o valor em falta $\frac{10}{30} = \frac{18}{?}$. No decorrer da atividade, de um modo geral, os alunos acabaram por usar a estratégia funcional, estabelecendo uma relação multiplicativa, por uso do fator $\times 3$, percebendo o valor em falta, como é exemplo o trabalho de Henrique e Alice, que reflete as semelhanças encontradas nas respostas de vários alunos (Figura 5.3.6.).

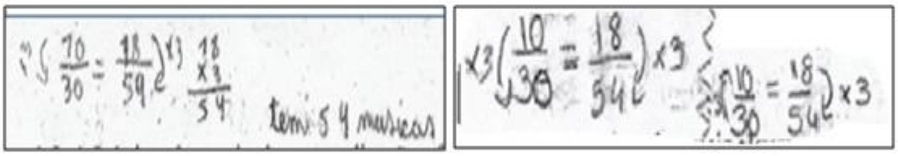
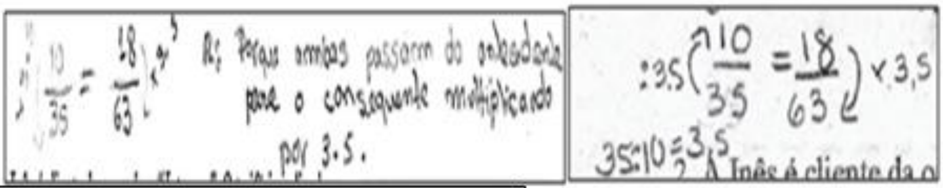


Figura 5.3.6. - Respostas evidenciando o uso da estratégia funcional, de Henrique e Alice.

Na formação da outra proporção, no item 1.5., poder-se-ia estabelecer uma relação de invariância cujo fator multiplicativo correspondia ao numeral decimal (3,5). A situação apresentava que o número de *apps* correspondia a 3,5 vezes mais que o número de livros de mistério, formando a proporção $\frac{10}{35} = \frac{18}{?}$.

Os alunos revelaram maior dificuldade na resolução deste item do que no item anterior. Não lhes foi tão fácil relacionar 10 com 35 como foi relacionar que 30 era triplo de 10. Poucos foram os alunos que facilmente realizaram a operação inversa, por $35 \div 10 = 3{,}5$ como procedimento para descoberta do fator multiplicativo. Outros levaram algum tempo a descobrir como estabelecer uma ligação entre as duas varáveis, recorrendo por vezes à ajuda de colegas. Ana e Alice deram respostas semelhantes, que exemplificam como descobriram o fator multiplicativo ($35 \div 10 = 3{,}5$) e como efetuaram os procedimentos de cálculo (Figura 5.3.7.).



R: Porque ambos passam do antecedente para o consequente multiplicando por 3.5.

Figura 5.3.7. - Respostas evidenciando a descoberta do fator multiplicativo, e o seu uso na estratégia funcional, por Ana e Alice.

Filipe estabeleceu uma estratégia aditiva, que resultou num processo incorreto de resolução, uma vez que no item 1.4. a proporção correspondia a $\frac{10}{30} = \frac{18}{\mathbf{54}}$**,** mas no item 1.5. o consequente alterou-se de 30 para 35 ($\frac{10}{30}$ passou a $\frac{10}{35}$). O aluno atendeu que de 30 para 35 adicionava 5 unidades, procedendo de igual forma para a descoberta do valor omisso, com base na razão encontrada no item anterior ($\frac{18}{\mathbf{54}}$). Desse modo, determinou a soma do consequente 54 com 5 resultando em 59 (54 + 5= 59), e formou a proporção $\frac{10}{35} = \frac{18}{\mathbf{59}}$, (Figura 5.3.8.). Embora não tenha explicitado o procedimento de cálculo, explicou-me o seu raciocínio oralmente.

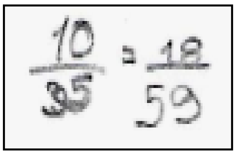


Figura 5.3.8. - Resposta evidenciando o uso incorreto de estratégia aditiva, por Filipe.

Tomás, foi um de dois alunos que, usou uma estratégia em termos aditivos adicionando o valor da metade do antecedente com o consequente da razão do item anterior (Figura 5.3.9.). Por coincidência o valor encontrado correspondeu ao valor correto, mas o procedimento em si não apresentou uma relação válida ou um raciocínio coerente com a situação. O aluno explicou o seu raciocínio, quando interpelado pela professora, mas a sua explicação não lhe permitiu detetar o erro.

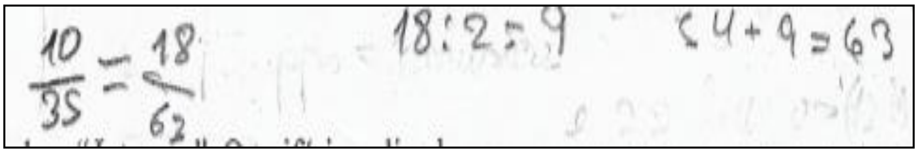


Figura 5.3.9. - Estratégia incorreta na descoberta do valor em falta, por Tomás.

Os itens que requeriam a formação de proporções fomentaram a discussão entre pares. Por monotorização do trabalho desenvolvido pelos alunos, verifiquei dificuldades na formação das proporções, bem como na descoberta de relações de invariância, “entre” as duas grandezas (número de livros e número de *apps*). Desta forma os alunos não conseguiram formar uma razão equivalente que determinaria a relação entre o número de livros e o valor em falta, referente ao número de músicas que não era conhecido, por uso de estratégia funcional.

Nenhum aluno estabeleceu uma relação de equivalência de razões recorrendo a um fator multiplicativo, talvez por não efetuarem a conexão que 10×1,8 = 18. Não se registou nenhuma evidência de descoberta do fator multiplicativo 1,8 que compunha as proporções em ambas as situações. Por uso desse fator multiplicativo estabeleciam-se relações multiplicativas, uma vez que 10×1,8 = 18, então 30×1,8 = 54, logo surgiria a proporção $\frac{10}{30} = \frac{18}{\mathbf{54}}$. No outro item poder-se-ia efetuar o mesmo procedimento, com uso do fator 1,8 entre as duas razões, uma vez que 35×1,8 = 63, logo compreendia-se a proporção $\frac{10}{35} = \frac{18}{\mathbf{63}}$.

A realização destes cinco itens e sua discussão em turma decorreu nas duas aulas inicialmente previstas para toda a tarefa. Assim a segunda parte da tarefa foi concretizada numa terceira aula. Essa segunda parte iniciava o trabalho com tabelas. O contexto do problema envolvia relações diretamente proporcionais destacadas com representação em tabela (Figura 5.3.10.). Durante o trabalho autónomo para a resolução das situações apresentadas, constatei que os alunos revelaram facilidade em estabelecer a relação entre tempo e dinheiro, e que o contexto foi de fácil compreensão para os alunos.

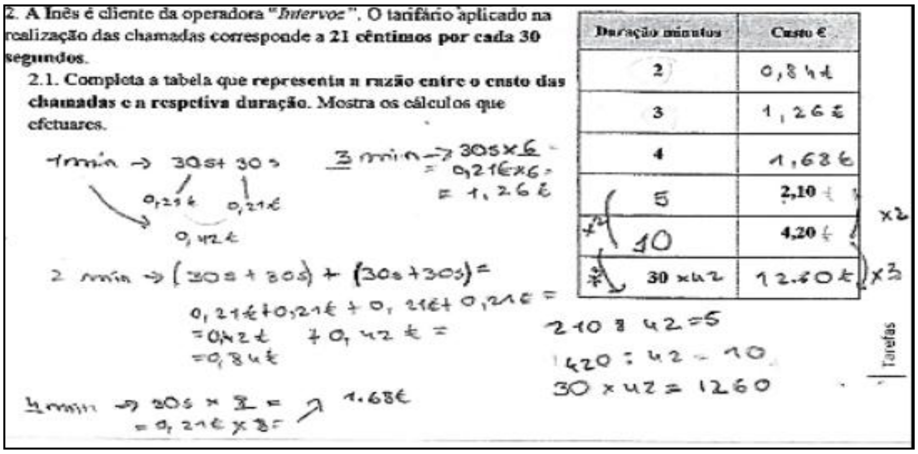
2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração.** Mostra os cálculos que efetuares.

Duração minutos	Custo €
2	
3	
4	
	2,10
	4,20
30	

Figura 5.3.10. - Item 2., tarefa 3.

Por observação das resoluções pude perceber que os alunos recorreram a várias estratégias para completarem a tabela. Ana, por exemplo, recorreu a várias estratégias (Figura 5.3.11.), o valor de custo para os primeiros minutos foi calculado por composição/decomposição, usando o valor adicional de 0,21€. A aluna apresentou o processo de cálculo em linguagem simbólica.


2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração.** Mostra os cálculos que efetuares.

1min → 30s + 30s
0,21€ 0,21€
0,42€

3 min → 30s × 6 = 0,21€ × 6 = 1,26€

2 min → (30s + 30s) + (30s + 30s) =
0,21€ + 0,21€ + 0,21€ + 0,21€ =
= 0,42€ + 0,42€ =
= 0,84€

4 min → 30s × 8 = = 0,21€ × 8 = 1.68€

Duração minutos	Custo €
2	0,84€
3	1,26€
4	1,68€
5	2,10€
10	4,20€
30 × 42	12.60€

×2 ×3

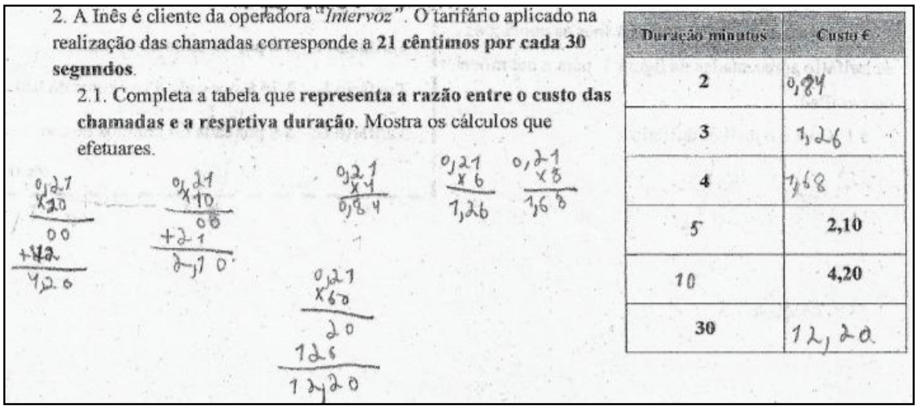
210 : 42 = 5
420 : 42 = 10
30 × 42 = 1260

Tarefas

Figura 5.3.11. - Resposta evidenciando o uso da estratégia de composição/decomposição e de relações de covariância por Ana.

O trabalho de Ana revelou que concluiu, após a descoberta do valor de dois minutos, que para determinar o valor de uma chamada, deveria multiplicar o valor de 0,21€ pelo dobro dos minutos, por exemplo, o custo de 3 minutos corresponderia ao valor do produto de 0,21€ pelo dobro de 3 ($0{,}21€ \times 6$). Para determinar o número de minutos, a aluna recorreu ao valor unitário, ou seja, preço por minuto. Deste modo usou, intuitivamente, a constante de proporcionalidade para efetuar o quociente do preço total pelo preço unitário, procedimento que determinava o número de minutos ($2,10€ \div 0{,}21€ = 10'$). A aluna ainda estabeleceu relações de covariância, dentro de cada variável, recorrendo ao valor do dobro e do triplo ($\frac{5}{2{,}10} = \frac{10}{4{,}20} = \frac{30}{12{,}60}$), talvez por serem valores simples e de fácil relacionamento.

Henrique apresentou uma resolução semelhante à de Ana. No entanto usou só uma estratégia para determinar o valor em falta. O aluno efetuou o produto de 0,21€ pelo dobro do número de minutos (Figura 5.3.12.), descobrindo o preço de qualquer número de minutos, completando a tabela. Estabeleceu, deste modo, uma relação proporcional entre o preço de 30 segundos e o número de minutos.

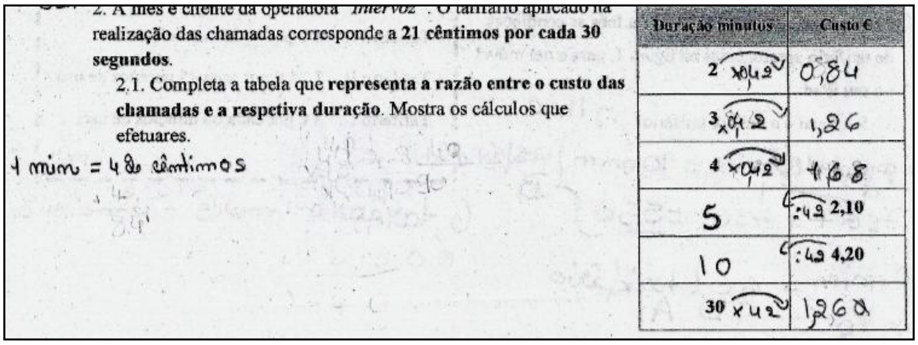

2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração**. Mostra os cálculos que efetuares.

Duração minutos	Custo €
2	0,84
3	1,26
4	1,68
5	2,10
10	4,20
30	12,20

Figura 5.3.12. - Resposta evidenciando uma relação proporcional entre o valor de 30 segundos e o número de minutos, produto do preço de 30 segundos pelo dobro do número de minutos, por Henrique.

Alice recorreu, de forma intuitiva, ao uso da constante de proporcionalidade, o preço por minuto (0,42€). Para descobrir o valor de qualquer número de minutos, a aluna efetuou o produto desse número por 0,42€. Para determinar o número de minutos de um determinado valor monetário, efetuou a operação inversa (Figura 5.3.13.).


2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração**. Mostra os cálculos que efetuares.

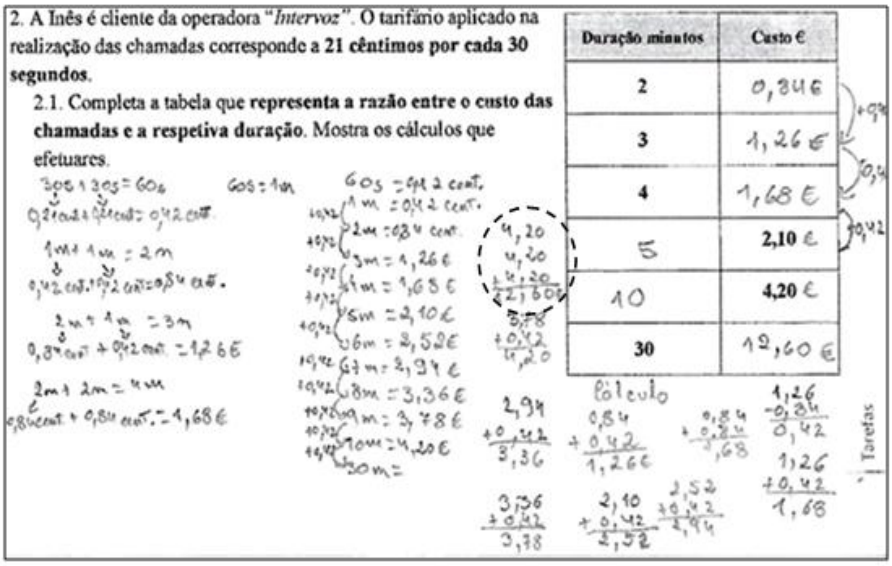
1 min = 42 cêntimos

Duração minutos	Custo €
2 ×0,42	0,84
3 ×0,42	1,26
4 ×0,42	1,68
5	:42 2,10
10	:42 4,20
30 ×42	12,60

Figura 5.3.13. - Resposta evidenciando o uso da constante de proporcionalidade, por Alice.

A aluna usou a constante de proporcionalidade k. Alice estabeleceu, deste modo, uma relação de invariância entre as medidas de grandeza com uso da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo. Foi uma estratégia que poucos alunos descobriram. A aluna percebeu que $x \times k$ determinaria o preço de qualquer número de minutos. Houve a perceção desta estratégia aquando da discussão coletiva com a participação de Alice, que explicou o seu raciocínio à turma. Deste modo os restantes alunos puderam tomar conhecimento deste procedimento.

De um modo geral, os alunos descobriram de forma intuitiva a constante de proporcionalidade e usaram-na na descoberta dos valores em falta. No entanto, o seu valor foi aplicado mediante o uso da estratégia de composição/decomposição. Esta estratégia foi usada por vários alunos à semelhança do trabalho realizado por Angelina.


2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração**. Mostra os cálculos que efetuares.

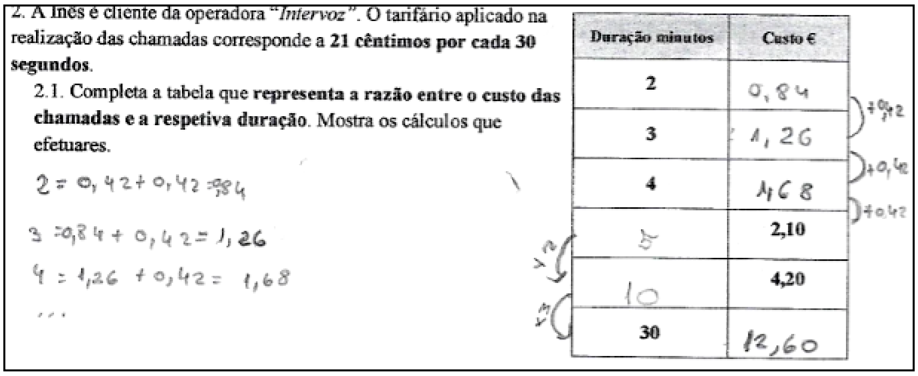
Duração minutos	Custo €
2	0,84€
3	1,26€
4	1,68 €
5	2,10 €
10	4,20 €
30	12,60 €

Figura 5.3.14. - Resposta evidenciando o uso de uma estratégia por composição/decomposição, com somas sucessivas do preço por minuto, por Angelina.

A aluna foi apresentando, minuciosamente, sucessivas adições do preço por minuto 0,42€, (Figura 5.3.14.). Quando tentou descobrir o valor de 30 minutos, não usou um fator multiplicativo 3, para cálculo do triplo de 10, mas adicionou três parcelas de 4,20€.

Sílvia apresentou uma estratégia semelhante, mas foi compondo valores de somas com o valor de um minuto (0,42€) até alcançar os valores em falta, chegando gradualmente ao custo de 4 minutos. A partir daí, usou a estratégia funcional com aplicação do dobro, provavelmente atendendo que 2,10€ correspondia a metade de 4,20€ e ao triplo do custo de 10 minutos ($3 \times 4{,}20€$), para determinar o custo de 30 minutos (Figura 5.3.15.).

As estratégias usadas passaram, assim, por descoberta do valor por minuto, sendo este usado, de um modo geral, como parcela aditiva em estratégias de composição/decomposição, ou em relações de dobros e triplos.


2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração**. Mostra os cálculos que efetuares.

2 = 0,42 + 0,42 = 0,84

3 = 0,84 + 0,42 = 1,26

4 = 1,26 + 0,42 = 1,68

...

Duração minutos	Custo €
2	0,84
3	1,26
4	1,68
5	2,10
10	4,20
30	12,60

Figura 5.3.15. - Resposta evidenciando o uso de estratégias de composição/decomposição e escalar, em simultâneo, por Sílvia.

Deste modo, os alunos aplicaram estratégias pré-proporcionais envolvendo procedimentos aditivos e multiplicativos e gradualmente descobriram os valores em falta. Também evidenciaram compreender o significado da constante de proporcionalidade e alguns, intuitivamente, usaram o seu valor como fator multiplicativo na determinação do preço de uma determinada chamada.

Nos itens 2.2. e 2.3. (Figura 5.3.16.), os alunos responderam com facilidade, uma vez que já haviam determinado o preço por minuto, mas indicaram a adição como operação para descoberta desse valor, e não referiram o quociente entre o preço e o número de minutos.

2.2. Qual **o preço de chamada por minuto**? Que operação efetuaste para o descobrir?

2.3. Qual será o custo de uma chamada com 45 minutos de duração? Mostra como chegaste à tua resposta.

Figura 5.3.16. - Itens 2.2. e 2.3., tarefa 3.

Compreendeu-se que o uso de relações aditivas tenha sido elevado devido, talvez, à simplicidade do contexto do problema. Esse facto, possivelmente, contribuiu para o uso desse procedimento, uma vez que era mais fácil e rápido efetuar a adição de duas parcelas (0,21€ + 0,21€).

No entanto, para determinarem o valor de uma chamada de 45 minutos, no item 2.3., metade dos alunos da turma, recorreu ao valor unitário 0,42€ como fator multiplicativo. Isso aconteceu mesmo com alunos que haviam efetuado relações aditivas por composição/decomposição, nos itens anteriores, como são exemplos as respostas de Angelina e Sílvia (Figura 5.3.17.).

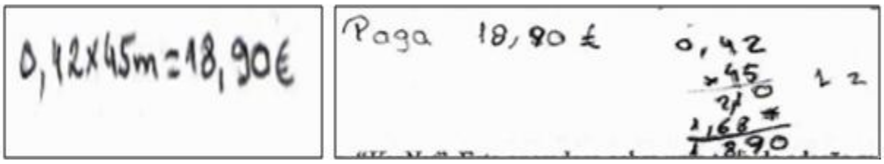


Figura 5.3.17. - Respostas evidenciando o uso do valor do preço por minuto, constante de proporcionalidade, por Angelina e Sílvia.

A outra parte da turma usou estratégia de composição/decomposição para alcançar o valor de 45mintuos. Os alunos decompuseram 45 minutos em 30' + 10'+ 5' e adicionaram o respetivo custo de cada grupo de minutos, 12,60€ + 4,20€ + 2,10€, totalizando 18,90€, como é o caso do trabalho de Maria José (Figura 5.3.18.).

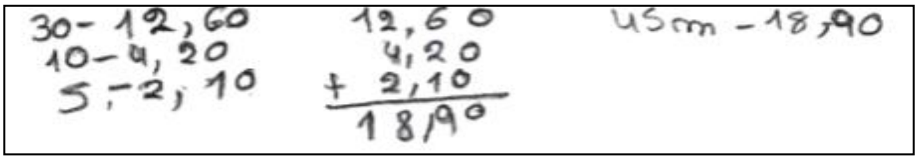


Figura 5.3.18. - Resposta evidenciando adição dos valores anteriormente determinados, estratégia de composição/decomposição usada, por Maria José.

Outros alunos, pela mesma estratégia, decompuseram 45 minutos em 30'+ 15' e determinaram metade do valor de 30 minutos, ou seja, do valor de 15 minutos que corresponderia a 6,30€, para uso na adição do custo de cada grupo de minutos (30 + 15 = 45). Deste modo procederam à soma das respetivas quantias, 12,60€ + 6,30€ = 18, 90€, como é exemplo o trabalho de Tomás (Figura 5.3.19.).

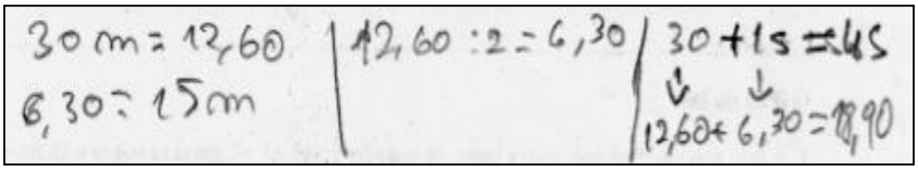


Figura 5.3.19. - Reposta evidenciando uma estratégia de composição/decomposição, por Tomás.

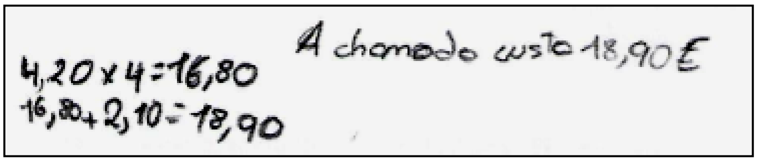


Figura 5.3.20. - Resposta evidenciando outro procedimento no uso da estratégia por composição/decomposição, envolvendo simultaneamente uma relação multiplicativa, por Guida.

Guida determinou o preço de 40 minutos efetuando o quádruplo do valor de 10 minutos ao qual adicionou o custo de 5 minutos, envolvendo um produto e uma adição e por composição/decomposição determinou o valor final (Figura 5.3.20.).

O item 3., apresentava outra tabela (Figura 5.3.21.) com o mesmo contexto mas envolvendo grandezas sem relação diretamente proporcional. Era pretendido que os alunos identificassem e distinguissem grandezas proporcionais de grandezas não proporcionais.

3. A Catarina tem outra operadora, "*VozNet*". Esta operadora cobra uma taxa de adesão mensal de 5€ e o valor da chamada por minuto encontra-se na tabela abaixo.

Duração minutos	2	3	4	5	30
Custo €	0,70	1,05	1,2	1,40	7,90

3.1-Observa e analisa a tabela.

a) As grandezas (duração/custo) são diretamente proporcionais? Explica porquê?

Figura 5.3.21. - Item 3., tarefa 3.

Nem todos os alunos identificaram que as grandezas não eram proporcionais, um número reduzido de alunos não apresentou qualquer resposta. Outros argumentaram que existia proporcionalidade direta uma vez que o número de minutos aumentava e o preço também. Assim, não efetuaram uma comparação ou não adotaram um procedimento que lhes permitisse chegar à conclusão que a situação não apresentava proporcionalidade entre todas as medidas de grandeza.

Tal como alguns outros alunos, Guida determinou o valor unitário, preço por minuto, e verificou por composição que as primeiras duas razões eram diretamente proporcionais. Não verificou que a condição não se mantinha para todas as razões restantes, levando-a a uma incorreta interpretação (Figura 5.3.22.).

R: Sim, Porque se dividirmos 0,70 cent. em dois dá 0,35 e se aos 0,70 adicionarmos 0,35 dá 1,05 por isso é uma proporcional direta.

Figura 5.3.22. - Resposta evidenciando uma interpretação incorreta, sobre a existência de proporcionalidade direta, de Guida.

No entanto, de um modo geral, os alunos identificaram que as grandezas não eram diretamente proporcionais, surgindo uma variedade de justificações. Alice, tal como vários alunos, apresentou a razão unitária e constatou que até ao terceiro minuto essa razão mantinha-se mas que se alterava a partir do quarto minuto. A aluna apresentou uma argumentação que remeteu para a não existência de uma sequência, concluindo que as grandezas não eram diretamente proporcionais (Figura 5.3.23.). Revelou compreender a situação e o seu contexto.

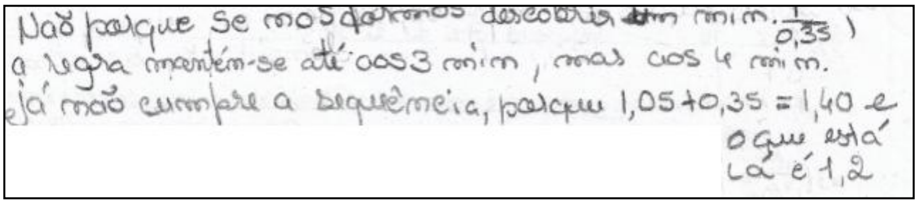
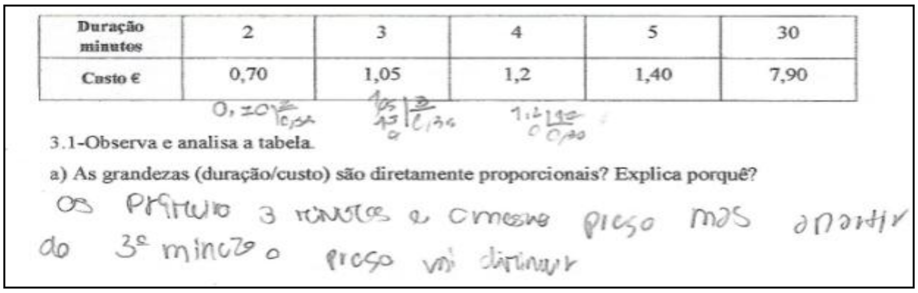

Não porque se mostrarmos descobrimos ~~um~~ min. $\frac{1}{0,35}$)
a regra mantém-se até aos 3 min, mas aos 4 min.
já não cumpre a sequência, porque 1,05+0,35 = 1,40 e
o que está
lá é 1,2

Figura 5.3.23. - Argumento evidenciando a não existência de uma sequência na relação entre o preço e o tempo, de Alice.

Os alunos também depreenderam que até ao terceiro minuto, o preço por minuto era constante e que depois a partir do daí o preço por minuto era menor. Não houve menção ao termo constante, uma vez que ainda era desconhecido para os alunos.

Emídio foi um dos poucos alunos que, determinou o preço por minuto efetuando o cálculo do quociente entre o preço e o número de minutos. Por tal procedimento matemático alcançou a conclusão que, a partir do quarto minuto, o preço por cada unidade/minuto ficava menor (Figura 5.3.24.).



Duração minutos	2	3	4	5	30
Custo €	0,70	1,05	1,2	1,40	7,90

0,70 | 2 → 0,35   1,05 | 3 → 0,35   1,2 | 4 → 0,30

3.1-Observa e analisa a tabela.

a) As grandezas (duração/custo) são diretamente proporcionais? Explica porquê?

Os primeiros 3 minutos e o mesmo preço mas a partir do 3º minuto o preço vai diminuir

Figura 5.3.24. - Resposta evidenciando a estratégia de determinação do valor unitário, de cada razão, por Emídio.

Um pequeno grupo de alunos, como Angelina, estabeleceu relações aditivas percebendo que o valor de minuto para minuto não era constante. Não usou uma estratégia proporcional, com uma verdadeira compreensão do contexto, uma vez que não evidenciou o custo por cada minuto, mas sim a diferença do preço de um minuto para outro (Figura 5.3.25.). Esta estratégia poderia levar a uma incorreta interpretação, induzindo que quando perfizessem 4 minutos, o custo por minuto era de 0,15€.

Duração minutos	2	3	4	5	30
Custo €	0,70	1,05	1,2	1,40	7,90

+0,35 +0,15

3.1-Observa e analisa a tabela.

a) As grandezas (duração/custo) são diretamente proporcionais? Explica porquê? Não Porque de 2 minutos para 3 soma-se 0,35 € e de 3 minutos para 4 soma-se 0,15 €.

$\frac{1^m}{0,35} = \frac{2}{0,70} = \frac{3}{1,05} = \frac{4}{1,20}$

Figura 5.3.25. - Resposta evidenciando o uso de estratégia aditiva, por Angelina.

Nas questões 4. e 5., os alunos teriam de analisar e diferenciar situações para tomar uma decisão sobre qual a mais económica. A questão 4. (Figura 5.3.26.) envolvia uma situação aditiva que poderia levar os alunos ao erro caso não atendessem ao valor a adicionar.

4. Se ambas, as amigas, falarem **30 minutos por mês**. Qual a operadora **mais económica**?

Figura 5.3.26. - Item 4., tarefa 3.

No momento da leitura, um aluno referiu "*Esta pergunta tem rasteira!*" Nesse momento salientei que é uma situação muito comum em contratos que se fazem na nossa vida quotidiana. Existem situações que nos são propostas e, por vezes não estamos alerta descuidando determinados pormenores que fazem a diferença. Apesar da chamada de atenção sobre a possível "rasteira", um pequeno grupo de cinco alunos não atendeu ao facto de se ter de adicionar aos 7,90€ referentes aos 30 minutos de conversação a taxa mensal de 5€. Como tal, referiram que a situação mais económica era aquela em que se pagava 7,90€, valor menor do que na outra situação, em que se pagaria 12,60€, por 30 minutos de conversação, como é exemplo a resposta de Ana, (Figura 5.3.27.) que revelou não ter atendido a todos os elementos do problema.

30 — 7,90€ R: A mais económica é a "VozNet" porque
30 — 12,60€ 7,90€ é menos que 12,60€.

Figura 5.3.27. - Resposta evidenciando uma interpretação incorreta, por não atender a todos os elementos do problema, de Ana.

Um maior número de alunos teve em atenção todos os dados do problema, o que os levou a tomar a decisão relativa à situação mais económica, como é exemplo a resposta de Sílvia (Figura 5.3.28.). A aluna procedendo à adição da taxa mensal do valor de 30 minutos, os 7,90€ alcançou o valor válido de 12,90€, ajudando-a a efetuar uma correta comparação entre as duas situações.

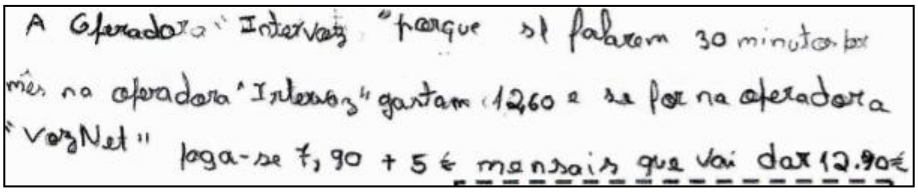
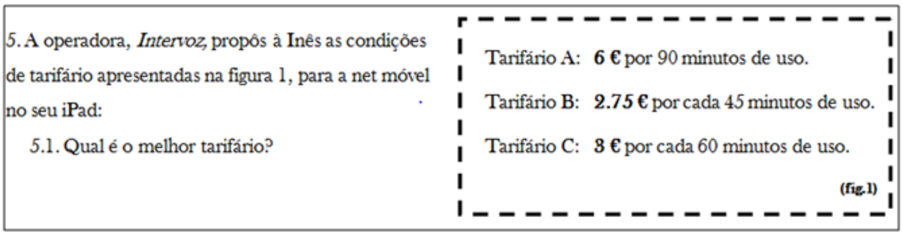

A Operadora "Intervoz" porque se falarem 30 minutos por mês na operadora "Intervoz" gastam 12,60 e se for na operadora "VozNet" paga-se 7,90 + 5 € mensais que vai dar 12.90€

Figura 5.3.28. - Resposta evidenciando o uso correto da estratégia aditiva para comparação das situações, de Sílvia.

Um considerável número de alunos não apresentou qualquer resposta ou optou por uma das situações mas não apresentou qualquer argumento nem procedimento para justificar a escolha.

O item 5. (Figura 5.3.29.), foi resolvido por poucos alunos. Verificou-se dificuldades em comparar e perceber as diferenças entre as três situações que permitiam selecionar a opção mais económica.


5. A operadora, *Intervoz*, propôs à Inês as condições de tarifário apresentadas na figura 1, para a net móvel no seu iPad:

5.1. Qual é o melhor tarifário?

Tarifário A: **6 €** por 90 minutos de uso.

Tarifário B: **2.75 €** por cada 45 minutos de uso.

Tarifário C: **3 €** por cada 60 minutos de uso.

(fig.1)

Figura 5.3.29. - Item 5., tarefa 3.

Alguns alunos resolveram parte do problema facilmente, comparando o tarifário A e o C (mais económico), e o A com o B (mais económico). Os dois tarifários A e C estabeleciam uma relação de dobro em termos do preço (3€ para 6€) mas verificava-se que essa relação não se mantinha em relação ao número de minutos. O dobro do dinheiro não correspondia ao dobro dos minutos (90') e, efetuando um raciocínio proporcional, os alunos argumentaram que 6€ corresponderia ao preço de 120 minutos e não de 90 minutos.

O mesmo acontecia entre o tarifário A e o B (mais económico). Existia uma relação de dobro entre o número de minutos (45 minutos para 90 minutos), mas a metade dos minutos (45') custaria menos de metade do preço, 2,75€ em vez de 3€. Perante as diversas opções os alunos raciocinaram proporcionalmente, distinguindo a situação mais vantajosa.

As dificuldades surgiram na comparação entre o Tarifário B e C. Apenas sete alunos conseguiram relacionar as três opções entre si. Guida foi a única aluna que determinou o valor unitário referente a cada tarifário (Figura 5.3.30.), chegando a uma correta conclusão, uma vez que pode constatar que o tarifário C apresentava um preço por minuto mais barato. A aluna usou calculadora.

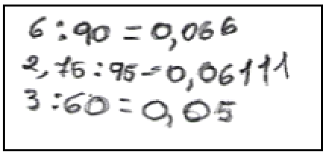


Figura 5.3.30. - Resposta evidenciando a determinação do valor unitário, por Guida.

Sílvia, para comparar os tarifários A e B, apresentou as relações proporcionais corretas, $\frac{45'}{2.75} = \frac{90'}{5.50}$, evidenciando que as razões apresentadas não eram proporcionais, uma vez que $\frac{45'}{2.75} \neq \frac{90'}{6}$, representando o seu argumento recorrendo a linguagem natural (Figura 5.3.31.). Entre os tarifários A e C, efetuou também um raciocínio proporcional, apresentando, em linguagem natural, a proporção $\frac{90'}{6} = \frac{180'}{12}$ efetuando o dobro de cada quantidade da primeira razão. Posteriormente converteu 180' em 3h, que, como indicou, custariam 12€. No seu trabalho evidenciou que, pelo tarifário C, as 3h custariam 9€ e não 12€, destacando o tarifário C, como o mais económico.

Figura 5.3.31. – Comparação por relações multiplicativas, de Sílvia.

Mas a aluna efetuou um erro quando, indicou o tarifário B mas por análise dos dados apresentados, estes reportavam-se ao do tarifário A. O erro conduziu à resposta correta. Implicitamente a aluna deduziu que B sendo mais económico que A e C mais económico que B, logo C seria o melhor tarifário.

Tomás, à semelhança de outros alunos, determinou o preço para 90 minutos tendo em conta cada um dos tarifários, usando a estratégia de composição/decomposição. O aluno mostrou que 90 minutos custariam apenas 4,50€ pelo tarifário C, enquanto pelo tarifário A custariam 6€ e pelo tarifário B custariam 5,50€. Demonstrou por essa estratégia que o tarifário C seria mais económico (Figura 5.3.32.).

TC = 3€ = 60 m
1,5€ = 30 m] 90 m = 4,5€

TA = 6€ = 90 m

TB = 2,75€ = 45 m / 45 x 2 = 90 / 2,75 x 2 = 5,50 por 90 m

Tarefas

Figura 5.3.32. - Resposta evidenciando comparações por estratégia de composição/decomposição, de Tomás.

Estas estratégias foram apresentadas na discussão coletiva, possivelmente ajudaram alguns alunos a compreender que o estabelecimento de relações proporcionais permite comparar preços e ajuda na tomada de decisões.

6.6. Tarefa 4: De volta aos treinos

Esta tarefa (anexo 10) foi resolvida em duas aulas de 50 minutos, com dois momentos de discussão coletiva e uma outra aula de 50 minutos destinada à conclusão da tarefa com um momento de discussão coletiva onde, simultaneamente procedeu-se à discussão sobre o trabalho desenvolvido numa ficha de trabalho que os alunos levaram para trabalho de casa.

A primeira parte da tarefa era constituída por um problema que envolvia uma situação não proporcional e três problemas de proporcionalidade direta, um de descoberta do valor omisso e dois de comparação (Figura 5.4.1.).

1. Apesar de pertencerem a Grupos Desportivos diferentes os amigos, Catarina, Rui e Inês por vezes treinam juntos. Hoje combinaram encontrarem-se no campo de treinos dos Templários.

1.1. Quando a Inês chegou, a Catarina já tinha dado **3** voltas à pista de corrida. Sabendo que a seguir correram lado a lado, quando a Catarina completou **9** voltas, quantas voltas fez a Inês? Mostra como chegaste à resposta.

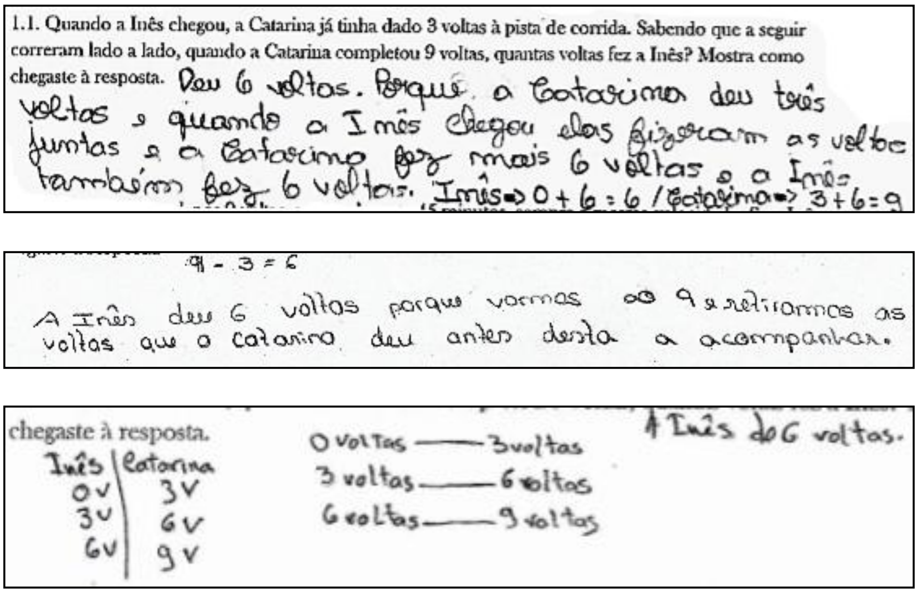
1.2. A Catarina para dar as **9** voltas, correu durante **45** minutos, sempre à mesma velocidade. Se a Inês a acompanhou quanto tempo demorou a correr **6** voltas? Mostra como chegaste à resposta.

1.3. O Rui por vezes também treina com as colegas e em **32** minutos dá <u>oito</u> voltas à pista. O Rui será mais rápido que as amigas? Explica como pensaste.

2. No dia anterior o Rui havia treinado com a Catarina na pista de treinos do Grupo Gym.
O Rui deu **9** voltas em **36** minutos e a Catarina deu **4** voltas em **16** minutos. Qual dos amigos foi mais rápido? Explica como pensaste.

Figura 5.4.1. - Primeiros itens, 1.1., 1.2., 1.3. e 2., tarefa 4.

O primeiro item (1.1.) consistia num problema não proporcional, com uma relação aditiva entre as grandezas. Foi de fácil resolução para os alunos, sendo resolvido por todos. Surgiram pequenas diferenças nas argumentações apresentadas decorrentes dos diferentes procedimentos de cálculo efetuados ou representações usadas. As respostas de Catarina, Ana e Angelina, (Figura 5.4.2.9.) mostram diferentes procedimentos e representações.


1.1. Quando a Inês chegou, a Catarina já tinha dado 3 voltas à pista de corrida. Sabendo que a seguir correram lado a lado, quando a Catarina completou 9 voltas, quantas voltas fez a Inês? Mostra como chegaste à resposta. Deu 6 voltas. Porquê a Catarina deu três voltas e quando a Inês chegou elas fizeram as voltas juntas e a Catarina fez mais 6 voltas e a Inês também fez 6 voltas. Inês => 0 + 6 = 6 / Catarina => 3 + 6 = 9

9 - 3 = 6
A Inês deu 6 voltas porque vamos ao 9 e retiramos as voltas que a Catarina deu antes desta a acompanhar.

chegaste à resposta.

Inês	Catarina
0v	3v
3v	6v
6v	9v

0 voltas —— 3 voltas
3 voltas —— 6 voltas
6 voltas —— 9 voltas

A Inês deu 6 voltas.

Figura 5.4.2. - Respostas evidenciando procedimentos e representações diferentes usados na questão 1.1., por Catarina, Ana e Angelina.

Catarina apresentou uma estratégia aditiva. Às voltas já dadas adicionou o número de voltas dadas em conjunto 3 + 6 = 9, perfazendo o número total de voltas e concluindo que eram necessárias 6 voltas para alcançar o total. Ana, como a maior parte dos alunos da turma, efetuou a diferença entre o número total de voltas e o número de voltas corridas em conjunto (9 – 3 = 6), determinando, desse modo, o número de voltas dadas em conjunto. Angelina elaborou uma tabela para evidenciar as relações entre as voltas corridas pelas duas corredoras, tendo sido a única aluna a efetuar este tipo de representação.

O item 1.2. correspondia a um problema de valor omisso, que os alunos resolveram sem grandes dificuldades usando, também, várias estratégias. Angelina, Ana e Tomás (Figura 5.4.3.) apresentaram estratégias semelhantes, foram dos poucos alunos que representaram uma razão do tipo $\frac{a}{b}$ indicando a relação entre o número de voltas e o tempo. Alguns alunos completaram a igualdade entre duas razões, formando uma proporção. Usaram o operador funcional, × 5, que relacionava as medidas de grandezas e que permitiu determinar o valor em falta. Revelaram relacionar esse fator funcional com o valor unitário, evidenciando o significado correto nomeadamente que correspondia ao tempo por volta (5 minutos por volta).

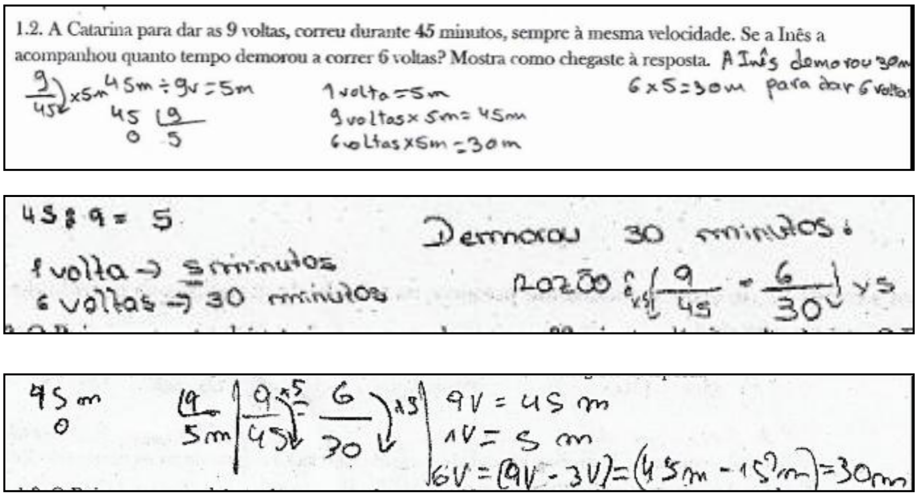


Figura 5.4.3. - Respostas evidenciando o uso do valor unitário como fator multiplicativo numa estratégia funcional, por Angelina, Ana e Tomás.

Angelina, embora não tenha completado a proporção, formou uma das razões evidenciando o fator multiplicativo que relacionava as duas grandezas, voltas/tempo. Pude constatar, no entanto, que os alunos, Angelina, Ana e Tomás evidenciaram a descoberta do tempo de cada volta, como ponto de partida. Intuitivamente descobriram a constante de proporcionalidade e usaram-na como fator multiplicativo, estabelecendo uma relação “entre” de cada medida de grandeza, usando uma estratégia funcional para alcançar o valor em falta. Tomás, para além de usar uma estratégia funcional, usou também uma estratégia de composição/decomposição, talvez para demonstrar que, resolvendo por outro processo, o resultado se mantinha. Alice, simplesmente, compôs a proporção (Figura 5.4.4.), evidenciando o fator multiplicativo que usou no procedimento, talvez inferindo a estratégia, pelo trabalho realizado nas tarefas anteriores.

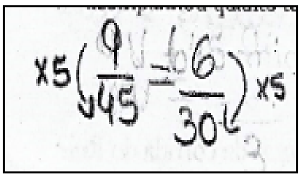
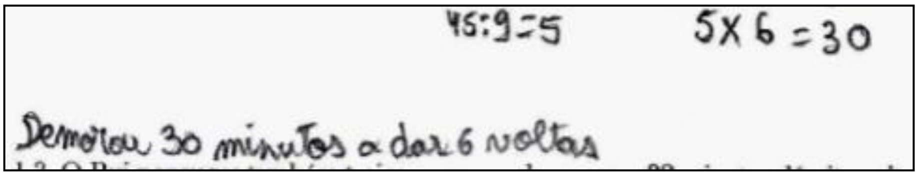


Figura 5.4.4. - Resposta evidenciando o uso de estratégia funcional na formação de uma proporção, por Alice.

A aluna provavelmente não sentiu necessidade de determinar o valor unitário, percebendo que bastaria completar a proporção com uso de uma relação multiplicativa. Pareceu entender a simplicidade do uso da estratégia funcional, como forma de completar uma proporção e de alcançar o valor em falta.

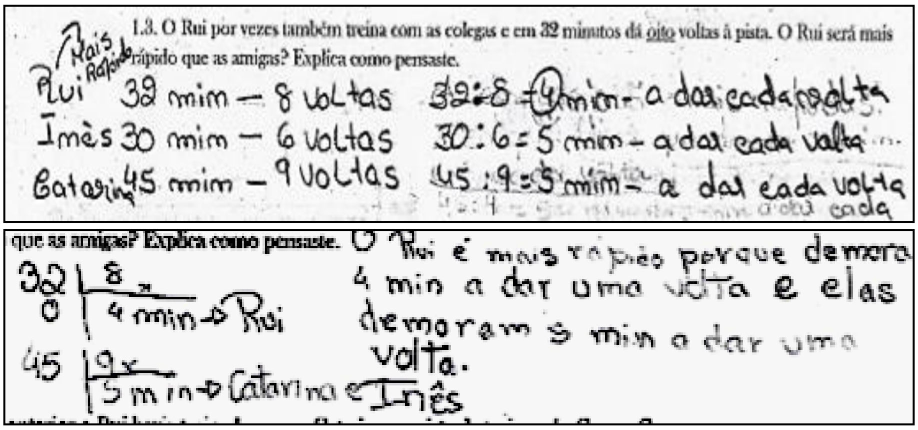
Henrique, à semelhança de vários alunos da turma, apenas apresentou o quociente entre o tempo e o número de voltas, como processo para determinar o tempo por minuto (constante de proporcionalidade). Seguidamente, aplicou o quociente como fator multiplicativo determinando o valor em falta, o tempo correspondente a 6 voltas (Figura 5.4.5.), no entanto não apresentou uma proporção.


45:9=5 5X6=30

Demorou 30 minutos a dar 6 voltas

Figura 5.4.5. - Valor unitário como fator multiplicativo, por Henrique.

Nos item 1.3. e 2., que apresentavam problemas de comparação, os alunos tinham de estabelecer uma relação comparativa entre duas razões. Verificou-se que poucos alunos formaram uma proporção para alcançar uma conclusão. De um modo geral, determinaram o valor por minuto. Recorreram ao cálculo do quociente entre o tempo demorado e o número de voltas percorridas, tal como apresentaram Alice e Leonor, (Figura 5.4.6.). Por determinação e análise do quociente, puderam perceber que, numa das situações o tempo por volta era de 5 minutos, enquanto noutra, o tempo por volta era de 4 minutos, identificando assim o corredor mais rápido.


1.3. O Rui por vezes também treina com as colegas e em 32 minutos dá oito voltas à pista. O Rui será mais rápido que as amigas? Explica como pensaste.

Rui mais rápido

Rui 32 mim — 8 voltas 32:8 = 4 mim - a dar cada volta

Inês 30 mim — 6 voltas 30:6 = 5 mim - a dar cada volta

Catarina 45 mim — 9 voltas 45:9 = 5 mim - a dar cada volta

que as amigas? Explica como pensaste.

32 | 8 ; 0 | 4 min → Rui

45 | 9 ; 5 min → Catarina e Inês

O Rui é mais rápido porque demora 4 min a dar uma volta e elas demoram 5 min a dar uma volta.

Figura 5.4.6. - Resposta evidenciando a determinação da constante de proporcionalidade e interpretação do seu significado, por Alice e Leonor.

Apenas quatro alunos apresentaram a razão $\frac{8}{32}$ que representava a relação entre o número de voltas e o tempo. Por uso da estratégia funcional, evidenciaram o fator multiplicativo que relacionava as duas grandezas $(\times 4)$, como por exemplo Sara e Angelina (Figura 5.4.7.). Atenderam a que no item anterior o fator multiplicativo era 5 e neste item era 4, e efetuaram uma interpretação correta do significado de ambos os fatores. Revelaram compreender o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema e usam-no como argumento, notando que na primeira situação, $\frac{9}{45}$, cada volta decorria em 5 minutos enquanto na segunda situação, $\frac{8}{32}$, cada volta decorria em 4 minutos, sendo a corrida mais rápida.

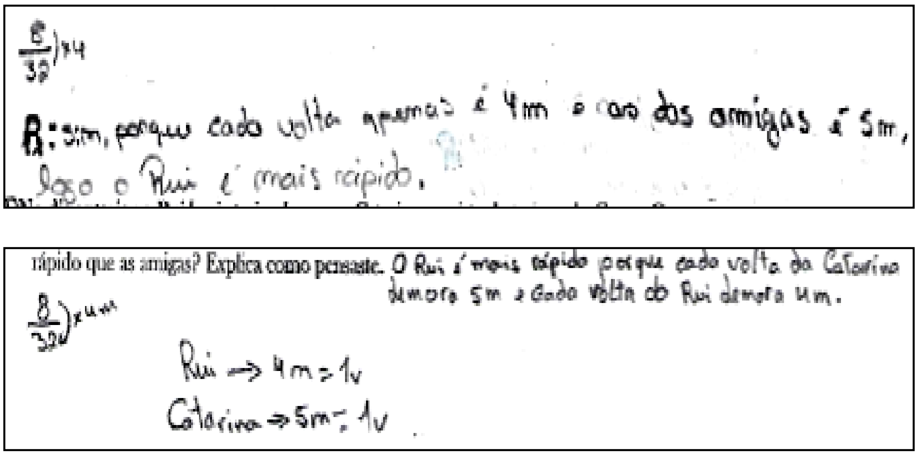


Figura 5.4.7. - Resposta evidenciando o uso da estratégia funcional e respetivo fator multiplicativo, determinante do tempo por volta, por Sara e Angelina.

Na resolução do item 2., mais uma vez, apenas quatro alunos usaram a estratégia escalar na formação de uma proporção, que comparava as duas razões. Praticamente foram os mesmos alunos que o fizeram no item 1.3. Um exemplo é Sara (Figura 5.4.8.) que pareceu compreender que o fator multiplicativo que relacionava a duas medidas de grandeza era o mesmo, interpretando que a velocidade, então, seria a mesma em ambas as situações.

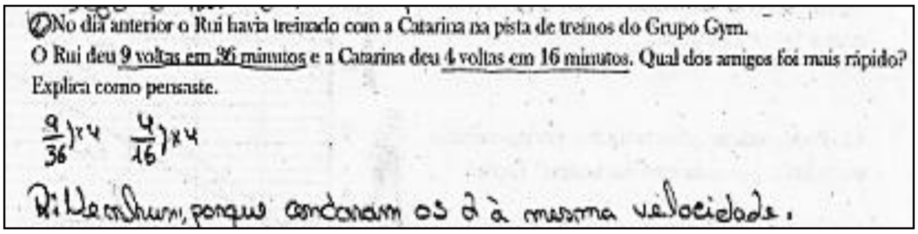


Figura 5.4.8. - Resposta evidenciando o uso de estratégia funcional, no problema de comparação, por Sara.

Três alunos recorreram, também, à representação semelhante a uma tabela, para apresentar as relações que se poderiam estabelecer entre as medidas de grandeza, percebendo a existência de uma regularidade. É o caso do trabalho de Sílvia (Figura 5.4.9.).

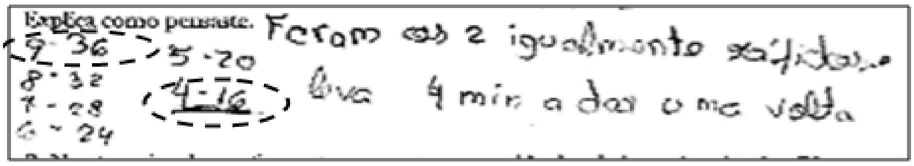


Figura 5.4.9. - Reposta evidenciando a formação de tabela para estabelecer relações entre as grandezas, por Sílvia.

Os restantes alunos (21) efetuaram, uma comparação dos valores de cada uma das razões. Usaram como procedimento, o cálculo do quociente entre os termos de cada razão. O valor encontrado foi corretamente interpretado, uma vez que, os alunos explicaram que esse quociente era representativo do tempo por volta, como Henrique apresentou (Figura 5.4.10.). Deste modo e de forma intuitiva, compreenderam o significado da constante de proporcionalidade.

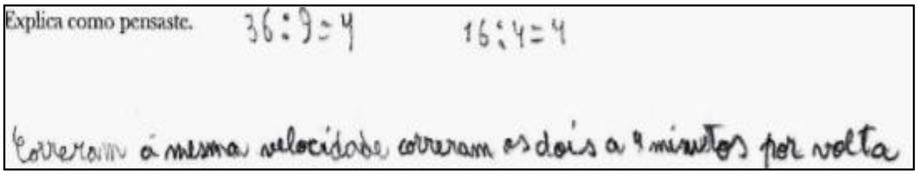


Figura 5.4.10. - Resposta evidenciando o valor unitário e sua interpretação correta, no problema de comparação, por Henrique.

Na discussão coletiva, os alunos apresentaram as suas estratégias de resolução no quadro, explicando qual o raciocínio que efetuaram, como ilustram as Figuras 5.4.11. a 5.4.15.

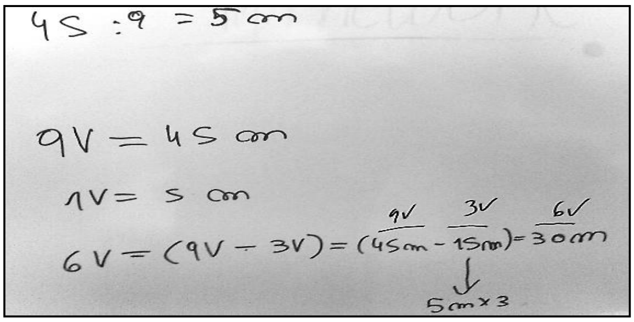
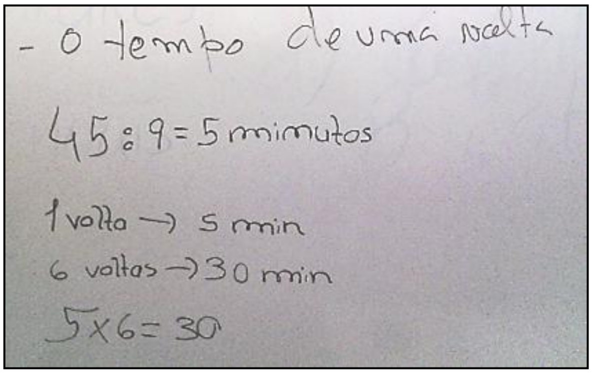
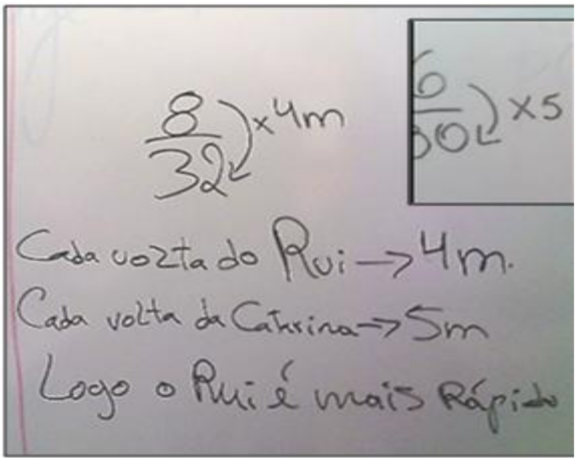


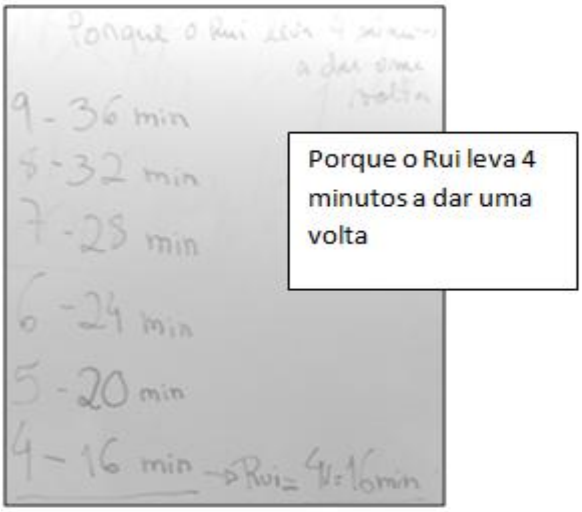
Figura 5.4.11. - Estratégia por composição/decomposição, apresentada e explicada, por Tomás, como resolução da questão 1.2.



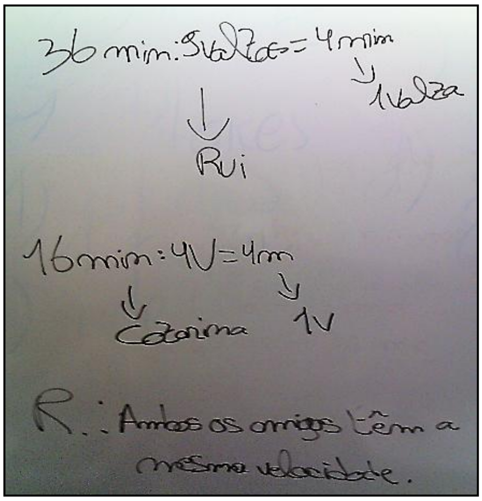
5.4.12. - Determinação do valor unitário e seu uso como fator multiplicativo, para descoberta do valor em falta, por Ana.



5.4.13. - Apresentação da estratégia funcional para comparação de duas razões e interpretação do significado de cada fator multiplicativo, por Mariana.



5.4.14. - Comparação entre razões, com representação similar a uma tabela, por Leonor, como resolução da questão 2.



5.4.15. - Determinação do valor unitário, contante de proporcionalidade, para comparação do tempo por volta, por Catarina, na questão 2.

A segunda parte da tarefa apresentava duas tabelas para análise. Uma representava grandezas diretamente proporcionais e a outra, relações não proporcionais. Pretendia promover a distinção entre grandezas diretamente proporcionais das que não o são (Figura 5.4.16.).

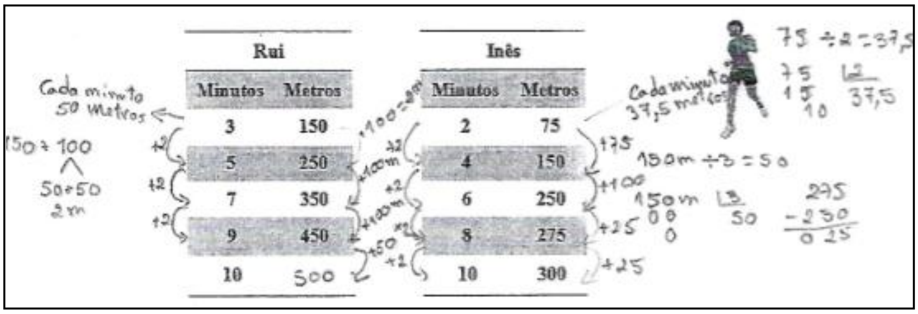
3. Nos torneios desportivos o tempo gasto na corrida de atletismo é registado. Observa as tabelas elaboradas a partir dos registos da corrida do Rui e da Inês.

Rui	
Minutos	**Metros**
3	150
5	250
7	350
9	450
10	

Inês	
Minutos	**Metros**
2	75
4	150
6	250
8	275
10	300

Figura 5.4.16. - Item 3., tarefa 4.

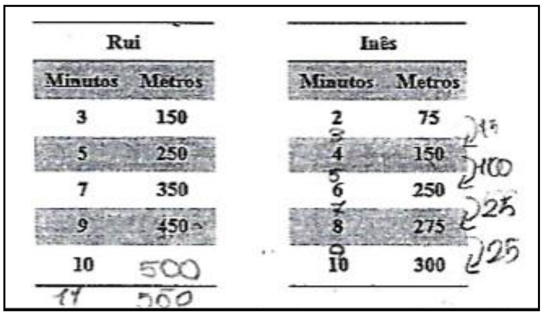
Apenas seis alunos, entre os quais Angelina e Guida, anotaram as relações que conseguiram estabelecer, nas respetivas tabelas, como ilustra o seu trabalho, nas Figuras 5.4.17. e 5.4.18., respetivamente. Angelina identificou as relações aditivas entre os vários valores de cada grandeza e determinou o valor unitário, 50 metros por minuto. As suas anotações mostram que a aluna percebeu a existência de uma constante de proporcionalidade na primeira tabela (Rui) nomeadamente que, a cada 2 minutos corresponderiam 100 metros, e da não existência de um valor constante na relação entre as variáveis na outra tabela (Inês).



Rui		Inês	
Minutos	Metros	Minutos	Metros
3	150	2	75
5	250	4	150
7	350	6	250
9	450	8	275
10	500	10	300

Figura 5.4.17. - Anotação de relações aditivas dentro das variáveis mas com evidência da constante de proporcionalidade na relação proporcional, por Angelina.

Guida registou as relações aditivas dentro de cada variável na segunda tabela evidenciando que o número de metros era diferente. Talvez por análise dos elementos contantes na primeira tabela (representativa da corrida do Rui), concluiu que o número de metros percorrido por cada minuto seria sempre de 50, revelando esse raciocínio ao estender a tabela pois completou o valor para os 10 e 11 minutos de forma correta.



Rui		Inês	
Minutos	Metros	Minutos	Metros
3	150	2	75
5	250	4	150
7	350	6	250
9	450	8	275
10	500	10	300
11	550		

Figura 5.4.18. - Relações aditivas dentro das variáveis evidenciando a não existência de um valor constante, por Guida.

Tendo por base a análise das tabelas, era colocada uma série de questões de focalização para orientar a atividade dos alunos (Figura 5.4.19.). Pretendia que estes identificassem as diferenças das relações entre as medidas de grandezas (tempo/distancia) de ambas as tabelas.

3.1. Com base na análise das tabelas, responde às seguintes questões. Apresenta todos os cálculos ou explica como chegaste às respostas.

a) Poderás calcular **quantos metros** corre o Rui em **10** minutos? Se sim, quantos metros são?
b) Poderás dizer **quantos minutos** levará o Rui a correr **550**m? Se sim, quantos minutos levará?
c) Poderás dizer **quantos minutos** levará a Inês correr **350** metros? Justifica a tua resposta.
d) O que poderás concluir em relação às grandezas tempo/distância na corrida do **Rui** e da **Inês**?
e) Qual a **constante de proporcionalidade** presente na relação de grandezas da corrida do Rui?

Figura 5.4.19. - Questões, do item 3., para interpretação das relações entre grandezas, apresentadas nas tabelas, tarefa 4.

Os alunos completaram a primeira tabela, com a distância correspondente a 10 minutos, no entanto não mostraram qualquer relação entre as variáveis nem como descobriram esse valor. Possivelmente identificaram o valor constante e, por cálculo mental, indicaram a distância em questão. O estabelecimento destas relações diretamente proporcionais foi apresentado de forma mais evidente no trabalho com as restantes questões.

De um modo geral, os alunos alcançaram o valor em falta, nas alíneas a) e b), relacionando as variáveis proporcionalmente. Registaram-se diferenças nas respostas, a nível do procedimento matemático usado para determinar a distância por minuto, o valor unitário e nas representações usadas.

Ana foi uma das alunas que apresentou a constante de proporcionalidade e usou o seu valor, estabelecendo um padrão nas relações aditivas (Figura 5.4.20.).

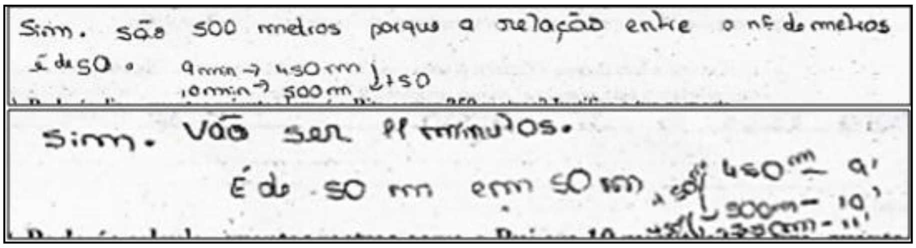


Figura 5.4.20. - Respostas evidenciando o uso do valor da constante de proporcionalidade em relações aditivas para descoberta do valor em falta, às alíneas a) e b), por Ana.

Cerca de metade dos alunos da turma apresentaram estratégias semelhantes, quando estabeleceram relações aditivas, notando a existência de uma sequência regular entre as varáveis, como foi o caso de Angelina.

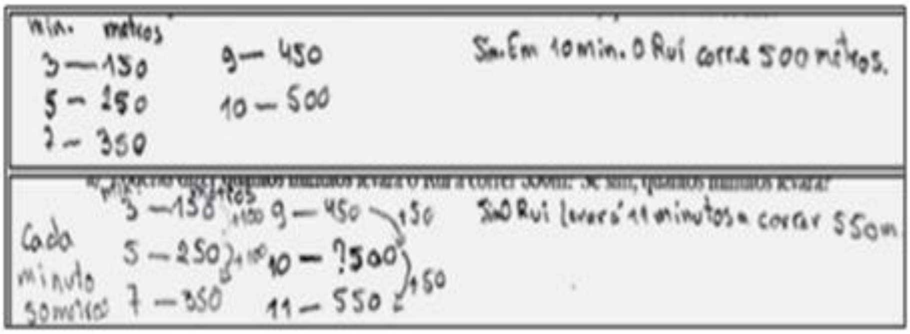


Figura 5.4.21. - Respostas evidenciando o uso do valor da constante de proporcionalidade em relações aditivas para descoberta do valor em falta, às alíneas a) e b), com representação em tabela, por Angelina.

Esta aluna revelou ter efetuado esse mesmo raciocínio e apresentou a sua resposta com recurso a um género de tabela, como fez várias vezes. Estabeleceu as relações entre medidas de grandeza notando a sequência presente entre cada uma delas, identificando o valor constante, 50 metros por minuto (Figura 5.4.21.).

A outra parte da turma efetuou procedimentos idênticos aos de Filipe (Figura 5.4.22.). O aluno também recorreu ao valor da constante de proporcionalidade mas usou-o como fator multiplicativo para estabelecer as relações entre grandezas e determinar o valor em falta.

Figura 5.4.22. - Respostas evidenciando o uso do valor da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo para descoberta do valor em falta, às alíneas a) e b), por Filipe.

Alice determinou a constante de proporcionalidade e revelou compreender o seu significado. Para além de aplicar o valor da constante, também explicou a utilidade desse valor na determinação de qualquer número de metros, alcançando a generalização (Figura 5.4.23.).

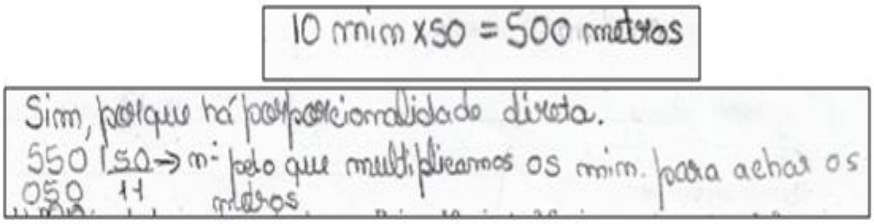


Figura 5.4.23. - Resposta evidenciando o uso com compreensão da constante de proporcionalidade, por Alice.

A alínea c) envolvia a descoberta do valor em falta, mas as relações não eram diretamente proporcionais, ou seja, não era possível determinar esse valor. A questão revelou-se de difícil entendimento. Quatro alunos não apresentaram resposta.

Alguns alunos apresentaram um valor incorreto, uma vez que não identificaram a não existência de proporcionalidade direta. Alguns não apresentaram qualquer tipo de procedimento, estratégia ou raciocínio efetuado. Quatro alunos determinaram o quociente da primeira razão, distância/tempo ($75 \div 2 = 37{,}5$), numa tentativa de apresentar a constante de proporcionalidade, ou valor unitário. No entanto, não procederam ao cálculo do quociente para as restantes razões, o que os impediu de concluírem que os seus valores diferiam. Consequentemente não perceberam a inexistência de proporcionalidade direta, como é exemplo a resposta de Palmira (Figura 5.4.24.).

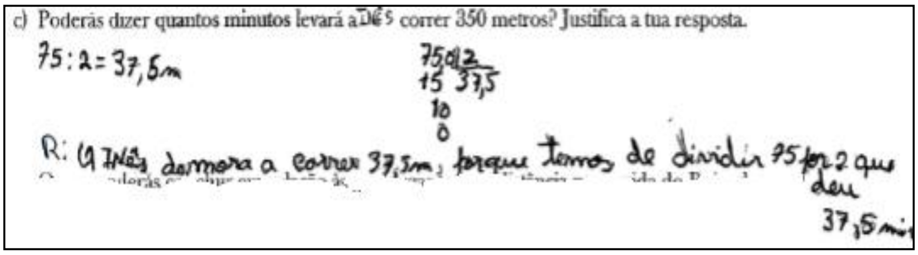


Figura 5.4.24. - Resposta sem evidência de uma conclusão, de Palmira.

Um aluno, Filipe, identificou que não haveria nenhum produto entre 37,5 metros (distância por minuto na primeira razão), por um número inteiro que resultasse em 350 metros (Figura 5.4.25.). O aluno efetuou uma relação comparativa dentro das medidas de grandeza $\frac{1}{37,5} = \frac{11}{337,5} = \frac{12}{375}$ tendo como base a razão unitária. No entanto cometeu erros de cálculo. Usando uma estratégia válida, tentou mostrar que não existia proporcionalidade direta, uma vez que não se poderia formar uma razão equivalente com consequente 350. Corretamente as proporções que deveria ter formado, numa situação proporcional, seriam: $\frac{1}{37,5} = \frac{9}{337,5} = \frac{10}{375}$.

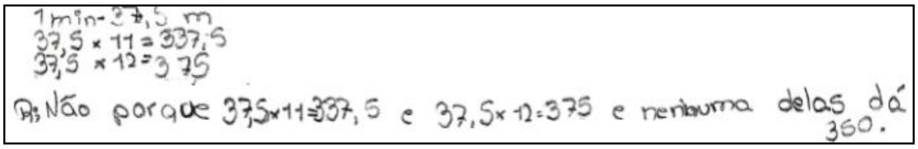


Figura 5.4.25. - Resposta à alínea c) evidenciando a determinação de uma razão unitária notando a inexistência de proporção, por Filipe.

Outros alunos, nos seus argumentos, revelaram compreender que não existia uma relação proporcional entre as grandezas apresentadas e que, por esse facto, não era possível a determinação do valor em falta, como Alice justificou (Figura 5.4.26.).

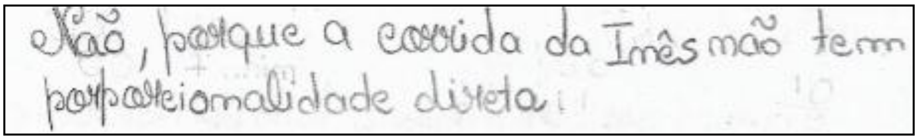


Figura 5.4.26. - Resposta argumentando a não existência de proporcionalidade direta, por Alice.

Poucos alunos, como Ana, relacionaram com o Tópico das “Sequências e Regularidades”, e fizeram referência à inexistência de uma sequência (Figura 5.4.27.)

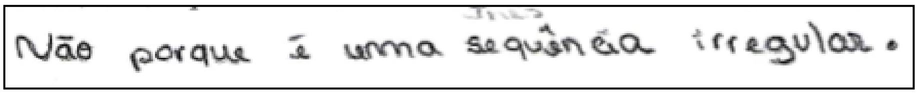

Não porque é uma sequência irregular.

Figura 5.4.27. - Resposta evidenciando a inexistência de uma sequência regular, interligando com a inexistência de proporcionalidade, de Ana.

Surgiram duas respostas que revelaram compreensão do significado da não existência de uma constante de proporcionalidade e desta forma interpretaram que a velocidade era variada [a velocidade da corrida não era constante]. Um exemplo é a resposta de Guida (Figura 5.4.28.).

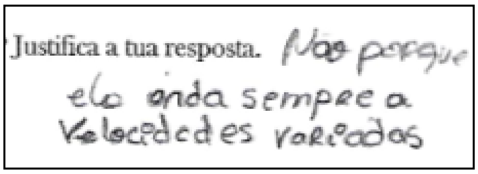
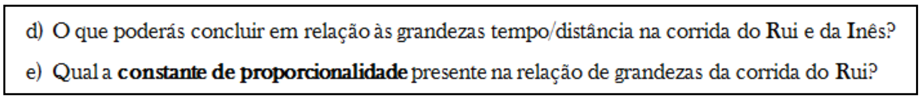

Justifica a tua resposta. Não porque ele anda sempre a velocidades variadas

Figura 5.4.28. - Compreensão da inexistência de constante de proporcionalidade, em linguagem natural, por Guida.

A existência ou não de uma constante de proporcionalidade foi identificada. No entanto, apesar de perceberam a existência de proporcionalidade direta ou de um valor constante, poucos alunos conseguiram explicar o seu significado e que relação se estabelecia com esse valor.

Surgiram diversas respostas às alíneas d), e), (Figura 5.4.29.), mas só um pequeno número de alunos apresentou uma resposta que de facto identificava a existência ou não de proporcionalidade direta, em cada uma das situações. Talvez a questão da alínea d) apresentasse alguma ambiguidade.

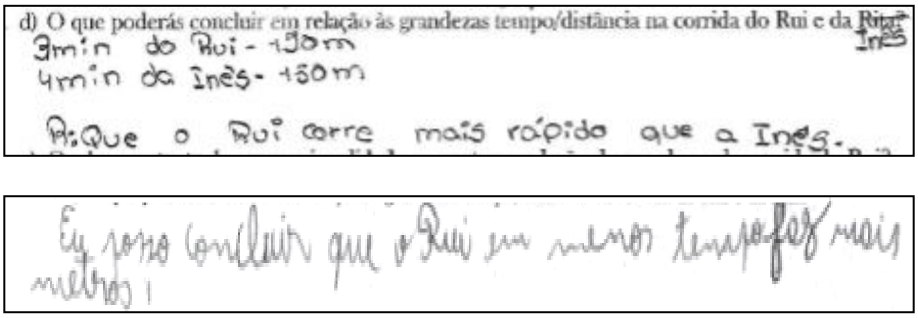

d) O que poderás concluir em relação às grandezas tempo/distância na corrida do Rui e da Inês?

e) Qual a **constante de proporcionalidade** presente na relação de grandezas da corrida do Rui?

Figura 5.4.29. - Item 3., alíneas d), e), tarefa 4.

As respostas que mais semelhanças apresentaram resultaram da comparação entre tempo e distância percorrida referindo qual o corredor mais rápido. No entanto pretendia-se que os alunos identificassem que as grandezas tempo/distância na corrida do Rui, apresentavam uma relação proporcional ou contrário do que acontecia na corrida da Inês.

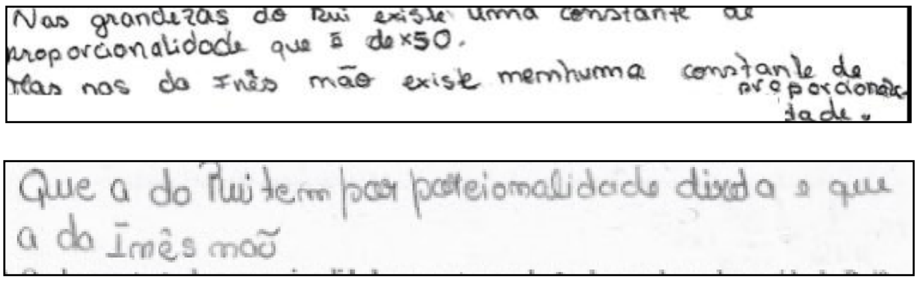
De um modo geral, os alunos efetuaram a comparação entre o que cada tabela apresentava, atendendo apenas a alguns dados do problema. Observaram que a primeira tabela, representativa da corrida do Rui, indicava que 150 metros eram percorridos em 3 minutos. E que a segunda tabela, representativa da corrida da Inês, indicava que os 150 metros eram percorridos em 4 minutos. Desta forma concluíram que o Rui seria mais rápido do que a Inês, conclusão correta, mas não a pretendida. Os alunos não relacionaram as medidas das grandezas de cada tabela, atendendo à existência ou não de proporcionalidade direta, como são exemplo as respostas de Filipe e Carlos (Figura 5.4.30.).


d) O que poderás concluir em relação às grandezas tempo/distância na corrida do Rui e da ~~Rita~~? Inês
3min do Rui - 150m
4min da Inês - 150m
R: Que o Rui corre mais rápido que a Inês.

Eu posso concluir que o Rui em menos tempo fez mais metros!

Figura 5.4.30. - Respostas evidenciando o não atender à existência ou à inexistência de relações proporcionais, de Filipe e Carlos.

Um pequeno grupo de alunos identificou corretamente que a tabela representativa da corrida do Rui apresentava relações de proporcionalidade direta, ao contrário da tabela representativa da corrida da Inês. Nesta última, como notaram Ana e Alice (Figura 5.4.31.), nem sempre se verificavam relações proporcionais. As alunas mencionaram a existência de uma constante de proporcionalidade na corrida do Rui. Alice justificou que só a corrida do Rui apresentava relações diretamente proporcionais.


Nas grandezas do Rui existe uma constante de proporcionalidade que é de ×50.
Mas nos da Inês não existe nenhuma constante de proporcionalidade.

Que a do Rui tem porporcionalidade direta e que a do Inês não

Figura 5.4.31. - Respostas evidenciando a existência ou a inexistência de proporcionalidade direta, de Ana e Alice.

A resposta de Rute (Figura 5.4.32.) revelou compreensão, de forma implícita, que a corrida da Inês não apresentava proporcionalidade direta, argumentando que "*A Inês não corre sempre à mesma distância"* [não corria sempre à mesma velocidade].

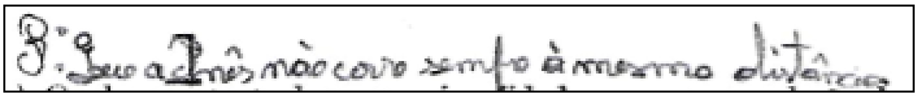


Figura 5.4.32. - Resposta evidenciando alguma compreensão da inexistência de proporcionalidade direta, de Rute.

Na alínea e) os alunos deveriam identificar a constante de proporcionalidade e referir o seu significado. Registou-se uma evolução na compreensão dos alunos, uma vez que nesta alínea, de um modo geral, identificaram a constante de proporcionalidade, 50 metros por minuto, e interpretaram o seu significado, como é exemplo a resposta de Sara e Carlos (Figura 5.4.33.). A explicação de Carlos revela alguma confusão, mas compreende-se que o aluno percebeu a existência e significado do valor da constante.

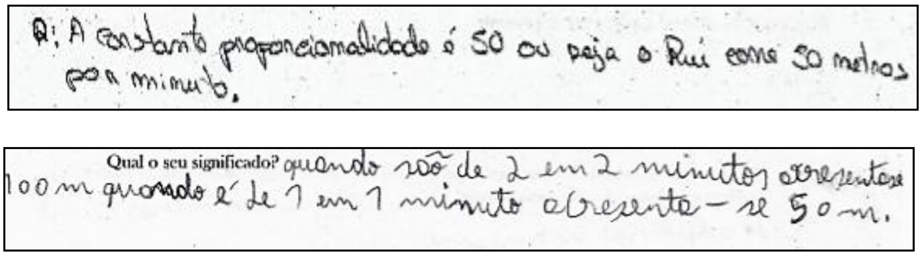


Figura 5.4.33. - Respostas evidenciando o valor da constante de proporcionalidade e seu significado, de Sara e Carlos.

Outros alunos, para além de apresentarem o valor da constante de proporcionalidade, atenderam ao seu significado. Estabeleceram que correspondia ao fator multiplicativo constante (k) que permitiria descobrir a distância em metros correspondente a qualquer tempo em minutos $y = kx$, como apresentaram Ana e Filipe em linguagem natural e Guida em linguagem natural mas com a respetiva expressão algébrica (Figura 5.4.34.). De algum modo os alunos conseguiram alcançar uma generalização.

Com base nas tabelas do item 3., foi preparada uma ficha de trabalho, para solicitava a construção de dois gráficos baseados nos elementos constantes nas referidas tabelas (uma com relação proporcional a outra sem relação proporcional). Os alunos poderiam relacionar que cada razão, como par ordenado, que corresponderia a uma coordenada a representar graficamente. Tratou-se de uma atividade a realizar como trabalho de casa uma vez que, para a sua construção, iria ser necessária mais uma aula. Na discussão coletiva, na aula seguinte, foram discutidas as características de cada linha traçada, a passar pelos pontos das coordenadas, em cada gráfico. Pretendia que, com tal discussão, os alunos pudessem observar e perceber as diferenças ou caraterísticas de cada linha traçada. Destacar-se-ia a distinção do formato da linha que apresentava uma relação não proporcional do da linha traçada no gráfico representativo de grandezas diretamente proporcionais.

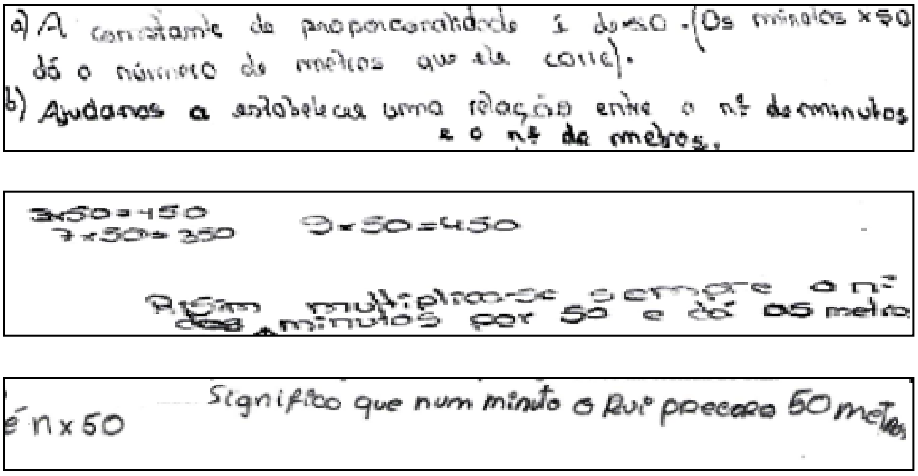


Figura 5.4.34. - Respostas evidenciando que a constante de proporcionalidade é o valor que relaciona as variáveis e permite a generalização, por Ana, Filipe e Guida.

Com o item 4., pretendia-se que os alunos trabalhassem e interpretassem gráficos que representavam as coordenadas correspondentes às razões, tempo/distância percorrida (Figura 5.4.35.).

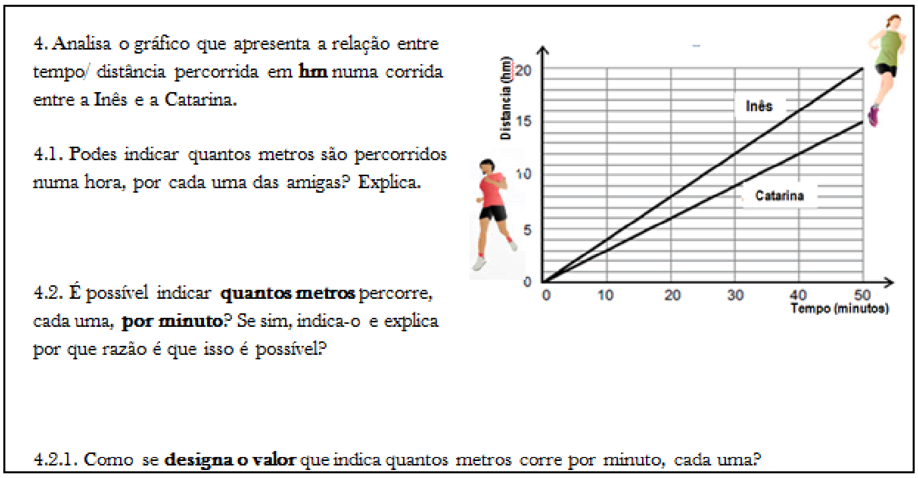


Figura 5.4.35. - Item 4., tarefa 4.

Foi uma atividade que os alunos gostaram de realizar, embora alguns solicitassem esclarecimentos pontuais sobre a leitura do gráfico. Após pequena interação com os alunos verifiquei que estes facilmente interpretaram a relação entre as medidas de grandezas e constatavam que estas eram diretamente proporcionais.

No entanto, durante a realização do trabalho autónomo, detetei que seis alunos não produziram trabalho. Observaram o gráfico e, com a minha ajuda, aparentemente interpretaram as relações entre tempo e distância percorrida, mas acabaram por não dar uma resposta escrita. Talvez não tenham identificado a existência de proporcionalidade direta presente na representação gráfica e, por isso, não produziram trabalho escrito. Em determinados casos, durante a realização da tarefa, foi necessário relembrar as medidas de comprimento, uma vez que, o gráfico apresentava a unidade de medida em hectómetros sendo necessário efetuar a conversão para metros na construção das respostas.

Perante o item 4.1., que solicitava a distância percorrida em 60 metros, os alunos revelaram alguma falta de empenho. Possivelmente, por não estar indicado diretamente no gráfico a distância correspondente a 60 minutos. Os alunos não revelaram grande determinação para a descoberta da respetiva distância. A questão tornou-se trabalhosa, pois era necessário efetuar conversões de hectómetros para metros e determinar uma constante de proporcionalidade, distância por unidade de tempo (minuto). Por observação/leitura do gráfico, os alunos poderiam também identificar a distância correspondente a cada 10 minutos.

Perante a descoberta do valor por minuto ou por cada 10 minutos poderiam calcular o valor em falta, a distância correspondente a 60 minutos. Talvez, devido à necessidade da questão ser resolvida por etapas, alguns alunos não produziram trabalho. Possivelmente, nem todos compreenderam que poderiam determinar o valor para 60 minutos, uma vez que as grandezas eram diretamente proporcionais. Bastava-lhes ler no respetivo gráfico a distância por minuto ou por 10 minutos.

Pretendendo levar os alunos a trabalharem proporções, fui sugerindo para que usassem essa representação. Ia desafiando: "*Porque não apresentam as várias razões entre o tempo e a distância!*". A sugestão foi acatada por alguns alunos que registaram as sucessivas razões equivalentes, $\frac{10}{300}=\frac{20}{600}=\frac{30}{900}=\frac{40}{1200}=\frac{50}{1500}=\frac{\mathbf{60}}{\mathbf{1800}}$. Esta estratégia possibilitou-lhes relacionar as coordenadas do gráfico com as razões entre tempo/distância. Mas poucos alunos, como Sara (Figura 5.4.36.), usaram esta estratégia.

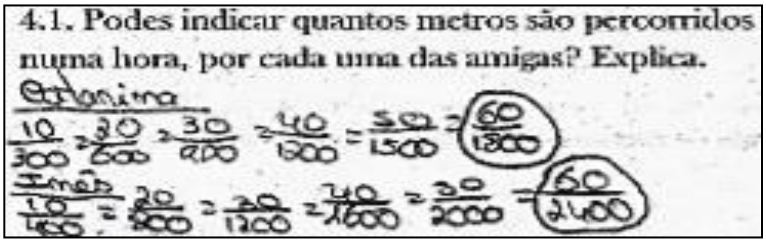


Figura 5.4.36. - Formação de sucessivas razões equivalentes, alcançando o valor em falta, por Sara.

Alice foi uma das alunas que identificou a constante de proporcionalidade correspondente ao valor unitário existente em cada situação (Figura 5.4.37.) e usou o seu valor como fator multiplicativo na descoberta do valor em falta. Concluiu com a apresentação de cada uma das razões representativa de cada situação gráfica, cujo antecedente representava os 60 minutos e no respetivo consequente, o valor em falta, $\frac{60}{2400}$ e $\frac{60}{1800}$, respetivamente.

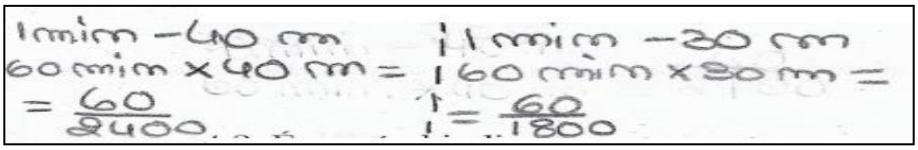


Figura 5.4.37. - Apresentação do valor da constante de proporcionalidade e o seu uso para determinar o valor em falta, por Alice.

Filipe fez a leitura do gráfico corretamente para descoberta do valor do tempo correspondente por cada 10 minutos. Também usou uma estratégia de invariância entre as medidas de grandeza, embora tenha representado essa relação de forma informal. Não recorreu à representação de razão ou proporção (Figura 5.4.38.).

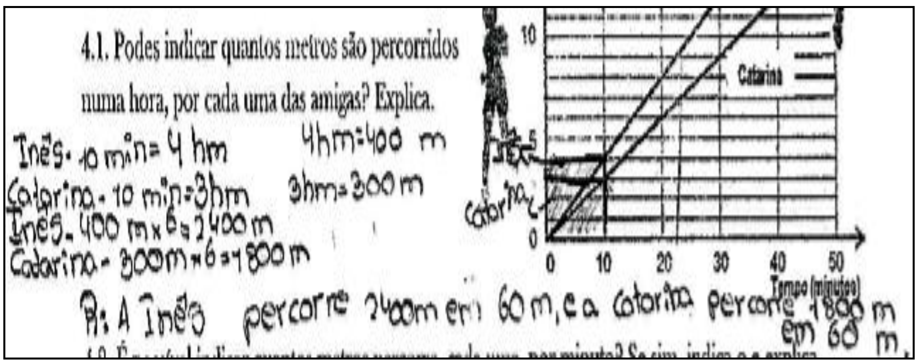
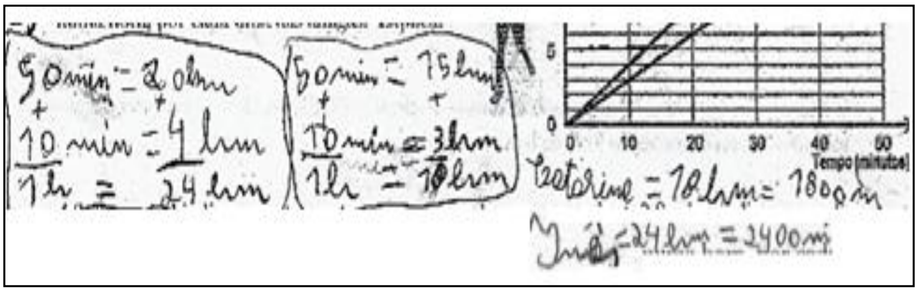


Figura 5.4.38. - Resposta evidenciando a identificação da distância por cada 10 minutos e o uso de estratégia de invariância, por Filipe.

O aluno determinou o valor de 10 minutos e usou o fator multiplicativo 6, para transformar as razões $\frac{10}{400}$ e $\frac{10}{300}$ nas razões equivalentes $\frac{60}{2400}$ e $\frac{60}{1800}$, alcançando para os 60 minutos a respetiva distância percorrida por cada corredora.

Carlos e Henrique, entre outros alunos, usaram uma estratégia de composição/decomposição. Decompondo 60 minutos em 50’ + 10’, adicionaram as distâncias correspondentes. Deste modo determinaram a soma de 20 hectómetros com 4 hectómetros, numa das corridas. Para a outra corrida, determinaram a soma de 15 hectómetros com 3 hectómetros. Concluíram com a resposta, apresentando os resultados devidamente convertidos em metros, conforme solicitado na questão (Figura 5.4.39.).



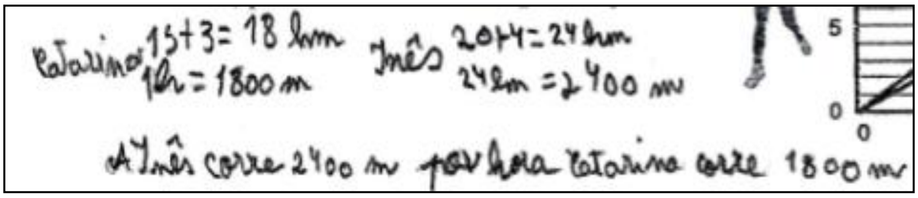


Figura 5.4.39. - Respostas evidenciando o uso de estratégia aditiva, de Carlos e Henrique.

Ana, tal como o seu par, apresentou apenas que era possível indicar a distância percorrida em 60 minutos, uma vez que existia proporcionalidade direta ou constante de proporcionalidade, mas não apresentou o valor (Figura 5.4.40.). A resposta incompleta, talvez se devesse à forma como a questão estava formulada, uma vez que não solicitava diretamente a indicação da distância proporcional a 60 minutos.

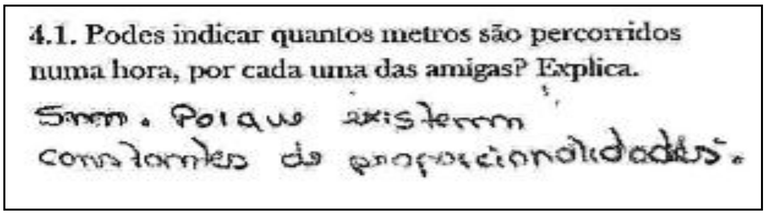
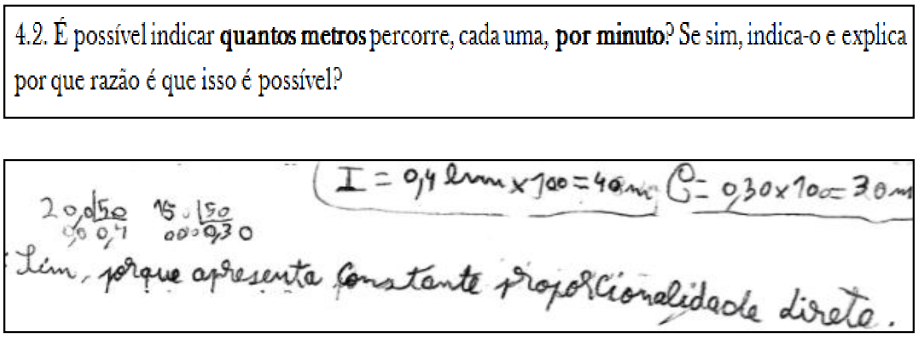


Figura 5.4.40. - Justificação evidenciando a existência de proporcionalidade direta, de Ana.

A questão 4.2. requeria a descoberta e interpretação da constante de proporcionalidade, a distância em metros por minuto para cada corrida. Seria necessário os alunos atenderem à existência de proporcionalidade direta e registarem o valor da constante em cada corrida. Poucos alunos alcançaram o pretendido. De um modo geral, os que apresentaram uma resposta correta, apenas determinaram o valor da constante de proporcionalidade. Optaram pelo cálculo do quociente, do valor do tempo pelo valor da distância, como é exemplo a resposta de Carlos (Figura 5.4.41.). O aluno também justificou que foi possível determinar o valor da distância por minuto, porque cada situação apresentava um valor constante, identificando a existência de constante de proporcionalidade.



4.2. É possível indicar **quantos metros** percorre, cada uma, **por minuto**? Se sim, indica-o e explica por que razão é que isso é possível?

I = 0,4 km x 100 = 40 m C = 0,30 x 100 = 30 m

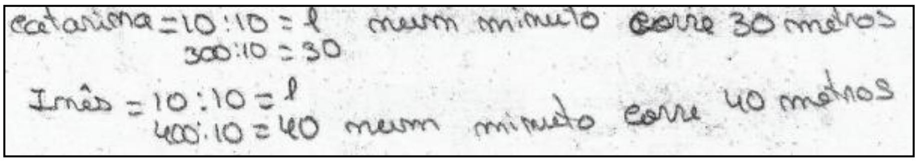
20 ⌊50 0,4   15 ⌊50 0,30

Sim, porque apresenta constante proporcionalidade direta.

Figura 5.4.41. - Resposta identificando a determinação da constante de proporcionalidade e respetiva justificação, de Carlos.

Sara foi das poucas alunas que implicitamente converteu a razão inicial entre o número de minutos e o número de metros percorridos, $\frac{10}{300}$, numa razão equivalente, 1:30, usando o divisor 10, de modo não formal. A aluna indicou a relação de 1 minuto para 30 metros, interpretando corretamente que num se minuto percorria 30 metros. Usou a mesma estratégia para a outra situação (do gráfico), notando que num minuto percorria-se 40 metros, uma vez que a razão seria 1:40 (Figura 5.4.42.).

Filipe revelou ter efetuado o mesmo raciocínio. No entanto, explicou também o procedimento matemático a efetuar por linguagem natural (Figura 5.4.43.).



catarina = 10 : 10 = 1 num minuto corre 30 metros
300 : 10 = 30
Inês = 10 : 10 = 1
400 : 10 = 40 num minuto corre 40 metros

Figura 5.4.42. - Determinação do valor da constante de proporcionalidade e interpretação do seu significado, por Sara.

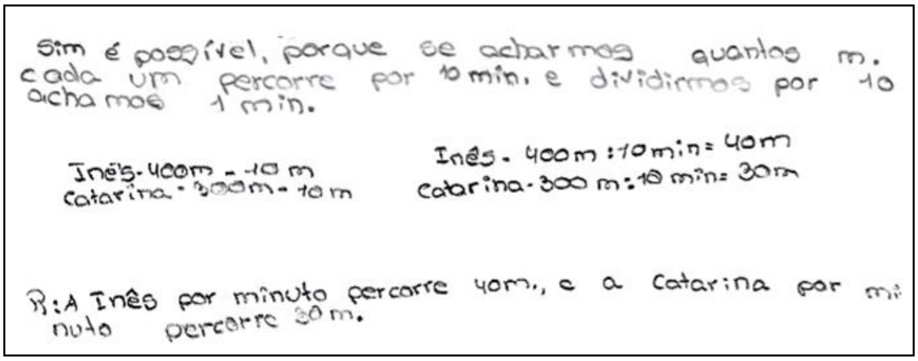


Figura 5.4.43. - Determinação do valor da constante de proporcionalidade com explicação do procedimento, por Filipe.

Alice foi a única aluna a evidenciar a relação de invariância entre as duas medidas de grandeza, interpretado que o fator multiplicativo correspondia ao valor da distância por minuto. Apresentou também neste item as proporções representativas de cada corrida, mostrando uma vez mais o valor multiplicativo (30 e 40) usado “entre” das variáveis (Figura 5.4.44.).

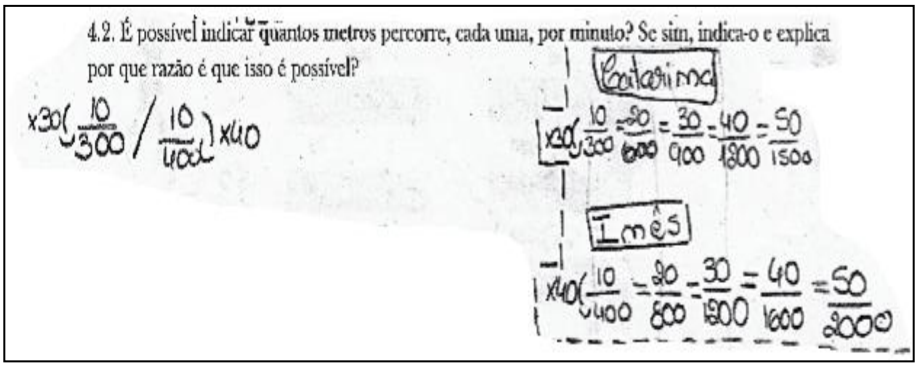


Figura 5.4.44. - Resposta evidenciando o uso de estratégia funcional relacionando o fator multiplicativo com a constante de proporcionalidade, de Alice.

Na última questão era pretendida a identificação de que o valor anterior, distância por minuto, era designado de *constante de proporcionalidade*. Sete alunos identificaram essa designação. Talvez a questão fosse pouco explícita. Na discussão coletiva, alguns alunos apresentaram as relações que haviam estabelecido e procedimentos usados, tendo usado várias estratégias. A Figura 5.4.45. mostra a resolução que Tomás apresentou à turma. A sua intervenção, explicando a sua forma de pensar recorrendo à estratégia pré-proporcional, por composição/decomposição, talvez tenha ajudado os alunos com mais dificuldades a compreenderem a resolução da questão 4.1.

A Figura 5.4.46. apresenta uma das estratégias na determinação da constante de proporcionalidade, com indicação da razão unitária, de Mariana. A aluna mostrou que a cada 1 minuto correspondiam 30 metros, destacando o trabalho com proporções. Acompanhando a discussão, os alunos podiam visualizar os gráficos projetados no quadro interativo. Foi um recurso que permitiu interligar a representação gráfica com as explicações dos alunos oradores, possibilitando à turma aperceber-se que as coordenadas representavam as razões entre variáveis e que uma das linhas mostrava que a cada 10 minutos se avançavam 3hm ou 300 metros e a outra mostrava que a cada 10 minutos ocorria um avanço de 4hm ou 400 metros.

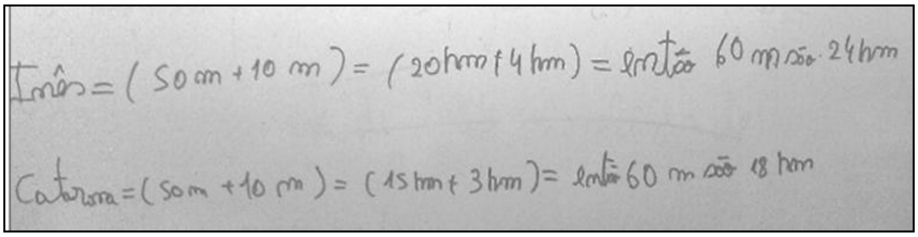


Figura 5.4.45. - Apresentação da estratégia de composição/decomposição como processo de resolução da questão 4.1., por Tomás.

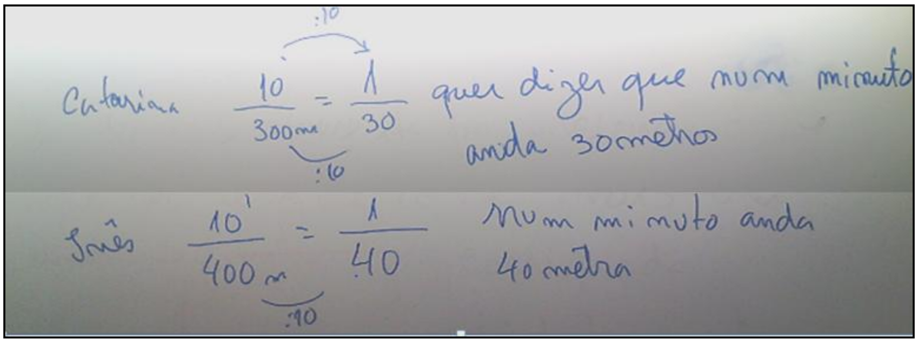


Figura 5.4.46. - Apresentação da formação de proporção alcançando a razão unitária, e a interpretação da constante de proporcionalidade, na questão 4.2., por Mariana.

Posteriormente, procedeu-se à discussão coletiva, sobre atividade desenvolvida com realização da ficha de trabalho de casa (Figura 5.4.47.). A construção dos gráficos foi elaborada por todos. A professora chamou a atenção dos alunos, sobre cada linha traçada. Procedeu-se à análise de cada uma, comparando-se as suas caraterísticas, observando e relacionando o formato da linha que representava a situação de proporcionalidade direta com a que representava a situação não proporcional.

1. Representa os dados das tabelas, cada uma das razões, num gráfico. Une as coordenadas de cada gráfico, com uma linha.

Rui

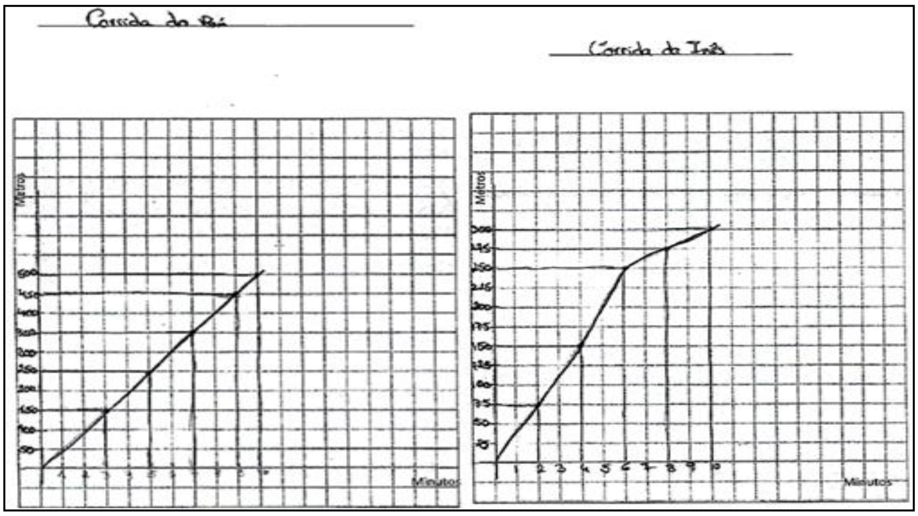
Minutos	Metros
3	150
5	250
7	350
9	450
10	

Inês

Minutos	Metros
2	75
4	150
6	250
8	275
10	300

Figura 5.4.47. - Tarefa de trabalho de casa.

Os alunos facilmente perceberam que, as linhas representativas de situações proporcionais eram todas semelhantes, retilíneas, sem apresentarem curvas e que nasciam no ponto de origem. Atendeu-se simultaneamente aos gráficos elaborados no trabalho de casa e ao gráfico da aula, relativo ao item 4. Todos os gráficos eram representativos de situações proporcionais e todos tinham linhas com as mesmas caraterísticas que contrastavam com a linha representativa da situação não proporcional, que não era retilínea. Aparentemente esta conclusão foi alcançada por todos. O trabalho de Angelina. (Figura 5.4.48.), ilustra a atividade realizada, de um modo geral, pelos alunos, e as conclusões retiradas por análise dos gráficos.



2. Analisa cada um dos gráficos e a linha que traçaste em cada um deles. Que diferenças verificas? O que podes concluir? Verifico que o Rui correu sempre à mesma velocidade por isso a linha é reta e a Inês correu em velocidades diferentes, por isso a linha tem curvas. Posso concluir que o Rui é mais rápido do que a Inês.

Figura 5.4.48. - Trabalho evidenciando a construção dos gráficos e as respetivas linhas, e as conclusões alcançadas, por Angelina.

6.7. Tarefa 5: Caixa de chocolates

A tarefa 5 (Anexo 11) foi trabalhada não em duas aulas de 50 minutos, mas em três aulas. Após a apresentação e diálogo sobre o que era pretendido, percebi que os primeiros itens não suscitaram dúvidas. Os alunos demonstraram entusiasmo na sua atividade.

O primeiro item tinha como ponto de partida a razão entre o número total de bombons e o seu custo, $\frac{60}{15}$, (60:15). A tarefa propunha aos alunos a descoberta de uma determinada quantidade de dinheiro ou de bombons estabelecendo relações diretamente proporcionais (Figura 5.5.1.). A quantidade de bombons a receber era proporcional à quantia dada em euros.

Caixa de chocolates!

1. Os três amigos, Rui, Inês e Catarina, juntamente com mais outros 2 colegas compraram uma caixa de chocolates por 15€, que contêm 60 bombons! Mas nem todos contribuíram com a mesma quantia de dinheiro, como podes observar na tabela apresentada.

Quando distribuírem os bombons entre si, o número de bombons que cada um receberá será **proporcional** à quantia que deu.

1.1. Com base na informação apresentada, na tabela, indica quantos bombons deverá receber cada amigo: Podes apresentar as proporções completando a tabela.

	Quantia €	N.º bombons
Inês	3€	
Catarina	2€	
Rui	4€	
Paulo	1€	
Laura	5€	

Figura 5.5.1. - Item 1., tarefa 5.

Os alunos estabeleceram as relações proporcionais sem grandes dificuldades. Usaram várias estratégias, nomeadamente, descoberta do valor unitário, uso de estratégia escalar (covariância) e de estratégia funcional (invariância). Poucos alunos estabeleceram relações de covariância na formação das proporções para descoberta do valor em falta, como Tomás. O aluno partindo dos dados do problema apresentou a razão entre o valor em euros e o número total de bombons ($\frac{15}{60}$). Seguidamente formou proporções, recorrendo a razões equivalentes, e descobriu o valor em falta, o número de bombons, para os montantes indicados na tabela (Figura 5.5.2.). No entanto, o aluno não usou a mesma estratégia para todos os montantes. Depreendeu-se que descobriu o número de bombons para o valor de um euro e depois estabeleceu relações multiplicativas para descoberta dos restantes valores em falta. Mostrou que, se 1 euro correspondia a quatro bombons, proporcionalmente, quatro euros corresponderiam a 16 bombons e dois euros corresponderiam a 8 bombons. Recorreu implicitamente a fatores multiplicativos (4 bombons × 4 = 16 bombons e 4 bombons× 2 = 8 bombons). É possível que tenha alcançado os produtos por cálculo mental.

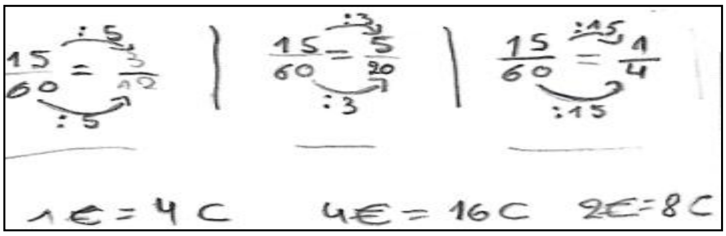
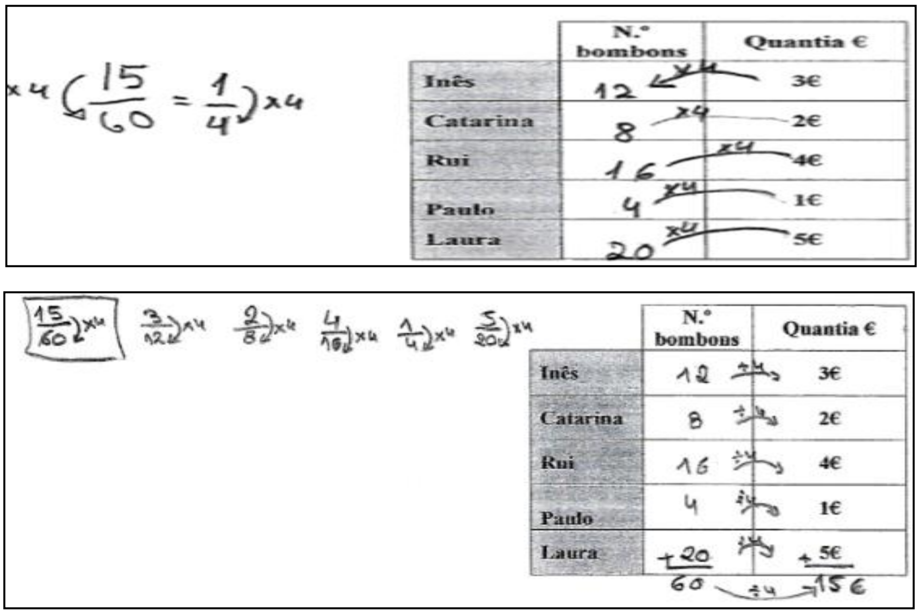


Figura 5.5.2. - Resolução evidenciando o uso da estratégia escalar, equivalência de razões na descoberta do valor em falta, por Tomás.

Alguns alunos estabeleceram uma relação de invariância, usando uma estratégia funcional, para relacionarem o valor monetário com o número de bombons, como são exemplo as respostas de Duarte e Angelina (Figura 5.5.3.).



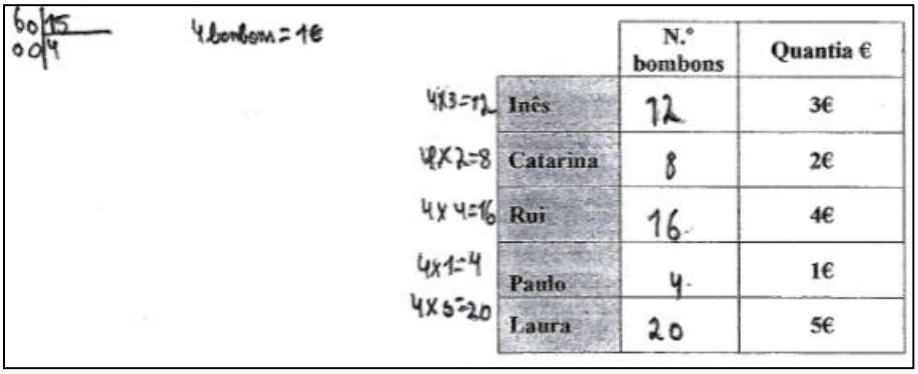
	N.º bombons	Quantia €
Inês	12	3€
Catarina	8	2€
Rui	16	4€
Paulo	4	1€
Laura	20	5€

	N.º bombons	Quantia €
Inês	12	3€
Catarina	8	2€
Rui	16	4€
Paulo	4	1€
Laura	20	5€
	60	15 €

Figura 5.5.3. - Resolução evidenciando o uso de estratégia funcional e do fator multiplicativo no cálculo do valor omisso, por Duarte e Angelina.

Deste modo, os alunos notaram que o número de bombons correspondia ao quádruplo do número de euros. Evidenciaram o fator multiplicativo 4, a usar no cálculo para descoberta do número de bombons (valor em falta), respeitante a cada montante.

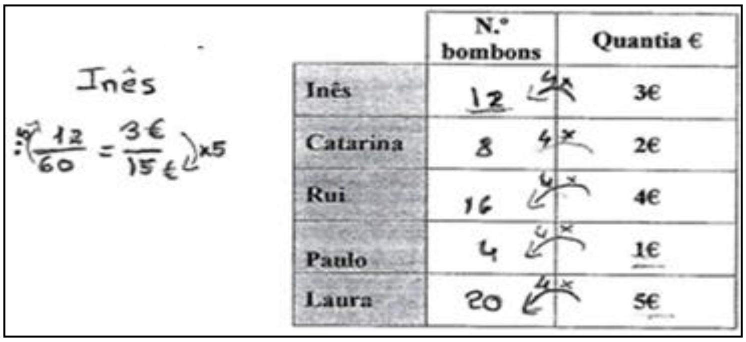
De um modo geral, os alunos optaram, como procedimento, pela determinação do quociente do número total de bombons pelo custo. Assim determinaram o número de bombons que se comprariam com um euro (com 1 € comprar-se-iam 4 bombons). Após concluírem que a relação existente era o quádruplo, usaram o fator multiplicativo ×4, como mostra na Figura 5.5.4., com o trabalho de Henrique.


60|15
00|4
4 bombom = 1€

		N.º bombons	Quantia €
4x3=12	Inês	12	3€
4x2=8	Catarina	8	2€
4x4=16	Rui	16	4€
4x1=4	Paulo	4	1€
4x5=20	Laura	20	5€

Figura 5.5.4. - Determinação do número de bombons comprados com 1 euro, e uso do seu valor como fator multiplicativo, por Henrique.

Sílvia foi uma das alunas que recorreu à formação de uma proporção para a descoberta do valor em falta, usando uma estratégia funcional. Após a formação da proporção possivelmente depreendeu que a relação entre o valor monetário e a quantidade de bombons era o quádruplo e completou a tabela (Figura 5.5.5.).


Inês

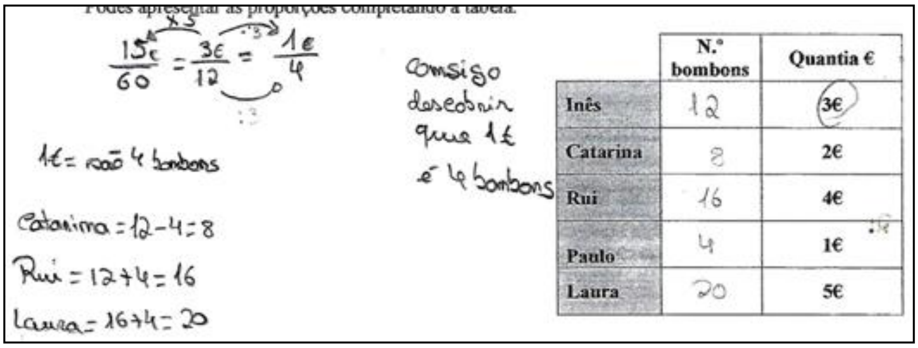
$$\frac{12}{60} = \frac{3€}{15€} \times 5$$

	N.º bombons		Quantia €
Inês	12	4×	3€
Catarina	8	4×	2€
Rui	16	4×	4€
Paulo	4	4×	1€
Laura	20	4×	5€

Figura 5.5.5. - Resposta evidenciando o uso da estratégia funcional para descoberta de relação proporcional entre valor monetário e número de bombons, de Sílvia.

Na formação da proporção, a aluna não partiu da razão apresentada no enunciado, razão entre as duas medidas de grandeza, 60 bombons para 15 euros ($\frac{60}{15}$), que poderia ter usado para completar a outra razão ($\frac{3}{?}$), 3 euros para x bombons. Em vez disso, elaborou uma proporção igualando duas razões da mesma natureza (3 euros estariam para 15 euros assim como x bombons estariam para 60 bombons), e implicitamente formou a proporção $\frac{3}{15} = \frac{?}{60}$. Possivelmente, notou que 15 € correspondiam ao quíntuplo de 3 €. Estabeleceu que o número de bombons proporcional aos 3 euros corresponderia, também, à quinta parte do total de bombons. Na relação multiplicativa que formou dentro de cada variável, evidenciou a apresentação da quinta parte de 60 bombons, ou seja 12 bombons ($\frac{3}{15} = \frac{12}{60}$).

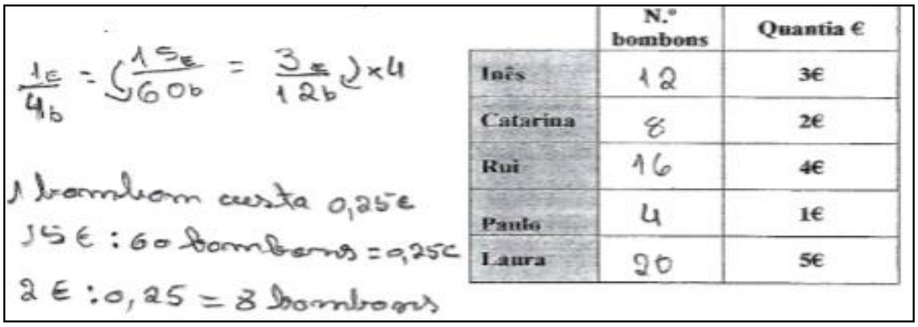
Sara, tal como o seu par, estabeleceu relações de covariância entre a razão inicial, $\frac{15}{60}$, e a razão que requeria a descoberta do valor em falta, correspondente a 3 euros, ($\frac{3}{12}$). Usando a mesma estratégia, alcançou o valor para 1 euro ($\frac{1}{4}$). A aluna com a formação de proporções notou que 1 euro correspondia proporcionalmente a 4 bombons (Figura 5.5.6.). Partindo dessa descoberta, foi efetuando relações aditivas, usando a estratégia de composição/descomposição, até alcançar os valores em falta.



	N.º bombons	Quantia €
Inês	12	3€
Catarina	8	2€
Rui	16	4€
Paulo	4	1€
Laura	20	5€

Figura 5.5.6. - Resposta evidenciando o uso de estratégia escalar, e de composição/decomposição para determinação do valor em falta, de Sara.

De um modo geral, os alunos usaram como procedimento matemático a determinação do quociente do valor de 60 bombons por 15 euros (60:15), para alcançarem um fator multiplicativo. Esse fator permitiu-lhes descobrir o número de bombons proporcional a determinado valor monetário. Apenas três alunos efetuaram, um procedimento que lhes permitisse alcançar o valor unitário, preço de um bombom, como é exemplo o trabalho de Catarina (Figura 5.5.7.) e de Leonel (Figura 5.5.8.).



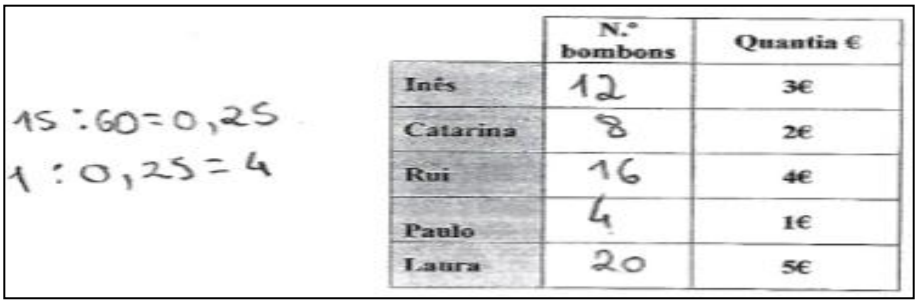
	N.º bombons	Quantia €
Inês	12	3€
Catarina	8	2€
Rui	16	4€
Paulo	4	1€
Laura	20	5€

Figura 5.5.7. - Resposta evidenciando o uso de várias estratégias, para o preenchimento da tabela. Uso de estratégia funcional e valor unitário, por Catarina.

Os alunos efetuaram o quociente entre o valor total do custo da caixa 15€, pelo número total de bombons, 60, obtendo o valor de vinte cinco cêntimos por cada bombom.

Catarina apenas apresentou o procedimento para descoberta dos primeiros valores em falta. Na primeira linha da tabela descobriu o valor em falta usando uma estratégia funcional, na formação de uma proporção $\frac{15}{60} = \frac{3}{12}$. Na segunda linha da tabela para descobrir o valor em falta procedeu de forma diferente. Recorreu ao preço por unidade e, por processo partitivo decorrente do quociente de 2 € por 0,25 €, mostrou que o número de bombons que correspondiam proporcionalmente a 2 € seria de 8. Possivelmente por cálculo mental, recorreu ao valor do dobro para indicar o número de bombons proporcional a 4 €. Para 1 €, subentende-se que usou uma relação de covariância ou equivalência de razões, uma vez que não mostrou como alcançou $\frac{1}{4}$. Para os 5 € não mostrou qualquer processo de cálculo, não se percebendo qual a estratégia usada.

Leonel descobriu o valor unitário, efetuando o quociente entre o custo total e o número total de bombons ($15\ € \div 60 = 0{,}25\ €$). Seguidamente, apresentou o quociente que lhe permitiu determinar o número de bombons proporcional a um euro. No entanto não mostrou o procedimento de cálculo, que efetuou para o preenchimento da tabela, possivelmente, foi estabelecendo, mentalmente, quantas vezes aumentavam os 4 bombons em relação número de vezes que aumentava a quantia em euros.



15 : 60 = 0,25
1 : 0,25 = 4

	N.º bombons	Quantia €
Inês	12	3€
Catarina	8	2€
Rui	16	4€
Paulo	4	1€
Laura	20	5€

Figura 5.5.8. - Descoberta do valor unitário, sem evidência do processo de cálculo para preenchimento da tabela, por Leonel.

O item 1.2. (Figura 5.5.9.) sugeria a construção do gráfico representativo dos pares ordenados correspondentes às razões apresentadas na tabela do item anterior.

Todos os alunos conseguiram construir o gráfico corretamente, tendo sido uma atividade realizada com empenho.

Figura 5.5.9. - Item 1.2., tarefa 5.

Durante a construção do gráfico, observei que nem todos os alunos traçaram a linha que unia os pontos das coordenadas. Só procederam ao seu traçado depois da chamada de atenção, da minha parte, ao salientar a sua importância numa posterior análise. Esse destaque tinha o intuito de enfatizar as características da linha traçada, linha retilínea com início no ponto de origem (semirreta), representativa de uma situação proporcional, consolidando as noções trabalhadas na tarefa anterior. Terminado o trabalho autónomo, os alunos apresentavam os seus gráficos corretamente construídos, de como é exemplo o trabalho de Carla e de Mariana, (Figura 5.5.10.).

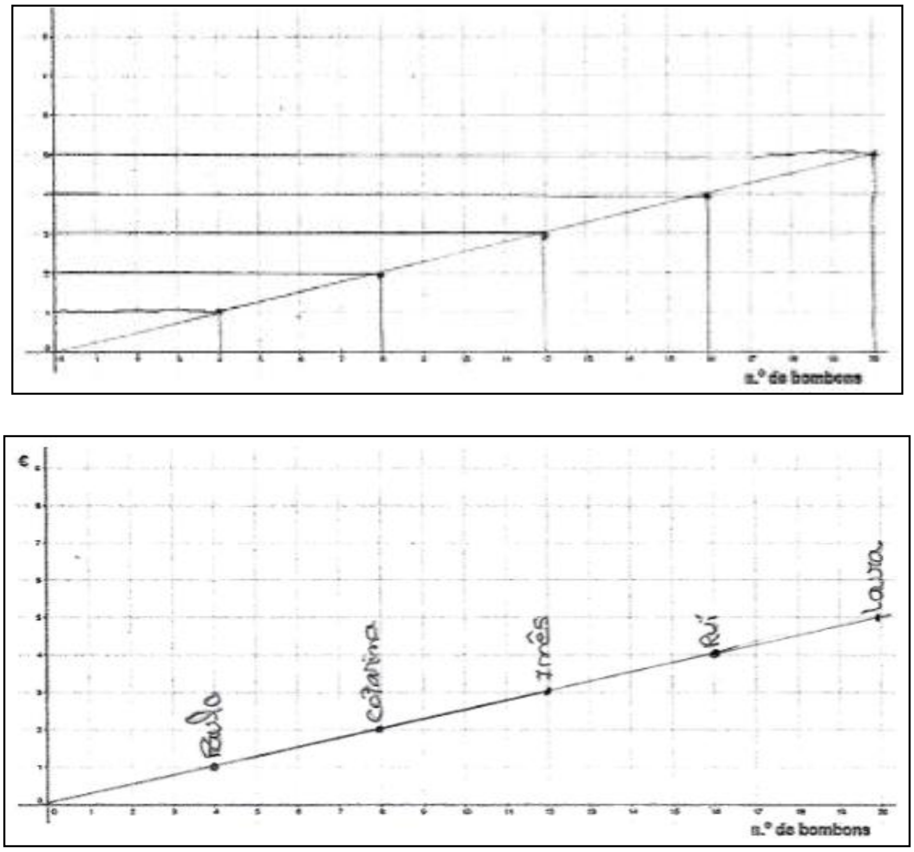


Figura 5.5.10. - Gráficos evidenciando a situação proporcional, de Carla e Mariana.

Os itens 1.2.1., 1.2.2. e 1.2.3. (Figura 5.5.11.), conduziam à determinação e ao uso do valor unitário ou da constante de proporcionalidade, aplicado ao cálculo do preço de qualquer quantidade de bombons.

> 1.2.1. Qual o valor de cada unidade (1 bombom)?
>
> 1.2.2. Se uma caixa dos mesmos chocolates contiver 36 bombons, qual o preço da caixa? E qual o preço de uma caixa com 90 bombons?
>
> 1.2.3. Como se pode calcular o preço de uma caixa de chocolates com qualquer número (n) de bombons? Explica por palavras tuas ou por uma expressão numérica.

Figura 5.5.11. - Itens 1.2.1., 1.2.2. e 1.2.3., tarefa 5.

Todos os alunos determinaram o valor unitário, preço de um bombom, e pôde observar-se vários processos para seu cálculo. Ana usou a estratégia escalar na formação de uma proporção (Figura 5.5.12.). Partindo da razão entre o número de bombons e o preço, ($\frac{4}{1}$), relacionou que 4 bombons custavam 1 euro, tentando compor uma razão equivalente que representasse o custo de um bombom, $\frac{1}{x}$ (implicitamente). Deste modo, alcançou a razão unitária por cálculo da quarta parte, concluindo a proporção $\frac{4}{1} = \frac{1}{0{,}25}$ e notando que um bombom custaria 0,25€.

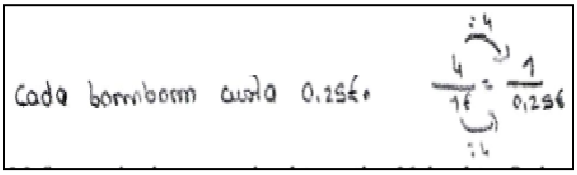


Figura 5.5.12. - Resposta evidenciando o valor unitário alcançado por formação de uma proporção por estratégia escalar, de Ana.

Um pequeno número, de alunos, determinou o valor unitário por composição/decomposição, efetuando divisões sucessivas com determinação de metades, de que é exemplo a resposta de Palmira. (Figura 5.5.13.). A aluna primeiramente atendeu ao valor de 1 euro, o custo de 4 bombons. Por um raciocínio pré-proporcional, foi descobrindo as metades dos valores monetários, que proporcionalmente corresponderiam à metade do número de bombons. Implicitamente, relacionou que cinquenta cêntimos seria o custo de 2 bombons e que metade de cinquenta cêntimos, ou seja, vinte cinco cêntimos seria o preço de 1 bombom, preço de uma unidade.

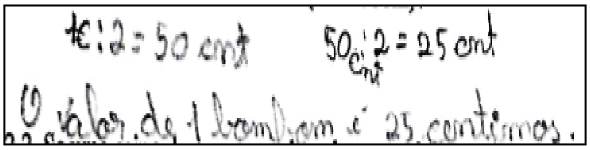
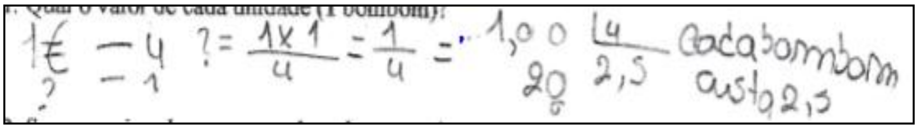


Figura 5.5.13. - Resposta evidenciando estratégia pré-proporcional determinando quocientes sucessivos até alcançar o valor pretendido, por Palmira.

Maria José foi a única aluna que, recorreu à regra de três simples para alcançar o valor unitário (Figura 5.5.14.). Esta estratégia não foi trabalhada em sala de aula, depreendendo-se que a aluna realizou a sua aprendizagem fora da escola. No entanto finalizou com o algoritmo da divisão, com um erro de cálculo, devido ao incorreto posicionamento da vírgula. O quociente obtido respeitou a 2,50€, em vez de 0,25€. Deste modo, denotou-se uma falta de espírito crítico ou de pensamento proporcional. Por analise do resultado, a aluna poderia ter notado que, seria impossível 1 bombom custar 2,50 €, uma vez que 4 bombons custavam 1 €.



5.5.14. - Resposta evidenciando o uso da estratégia de regra de três simples, estratégia funcional, de Maria José.

De um modo geral, a estratégia mais usada reportou-se à determinação do quociente do custo pelo respetivo número de bombons. Este procedimento permitiu aos alunos determinar o preço unitário mas tiveram como referência 1 euro e o respetivo número de bombons, como Angelina e Filipe (Figura 5.5.15.) que efetuaram o quociente do valor de um euro pelo respetivo número de bombons, $1\ € \div 4 = 0{,}25\ €$.

Figura 5.5.15. - Respostas evidenciando o quociente como processo de determinação do valor unitário, de Angelina e Filipe.

Ainda se verificou que alguns alunos efetuaram os quocientes entre todas as razões apresentadas na tabela, como é exemplo a resposta de Carla (Figura 5.5.16.), talvez para comprovar que o valor era constante, mostrando a existência de uma constante de proporcionalidade.

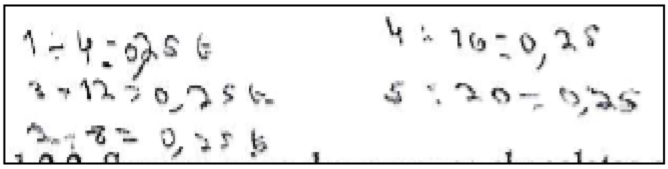


Figura 5.5.16. - Resposta evidenciando que o valor unitário é constante, por Carla.

Catarina foi, a única aluna, que efetuou o quociente usando os valores totais, $15\ € \div 60 = 0{,}25\ €$, (Figura 5.5.17.), procedimento direto e rápido na determinação do valor unitário.

Figura 5.5.17. - Resposta evidenciando o quociente entre as quantidades totais como estratégia para determinar valor unitário, por Catarina.

O item 1.2.2. requeria o uso da constante de proporcionalidade na determinação do preço de caixas de chocolate com um determinado número de bombons. Foi um item resolvido por todos os alunos. Foram usados procedimentos corretos e alcançados os preços solicitados, embora tenham surgido alguns erros de cálculo. Os alunos, de um modo geral, recorreram ao uso do valor da constante de proporcionalidade direta, como fator multiplicativo, de que são exemplo as respostas de Angelina e Ana (Figura 5.5.18.).

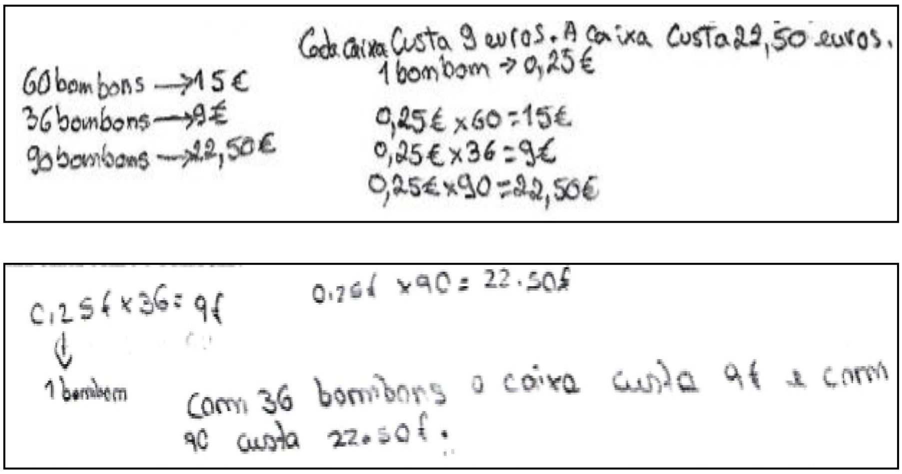


Figura 5.5.18. - Respostas evidenciando o uso da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo, de Angelina e Ana.

Alguns alunos não usaram o valor da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo. Efetuaram procedimentos pré-proporcionais, com adições sucessivas, como estratégia para alcançarem o valor pretendido, como Leonor, (Figura 5.5.19.). A aluna, após determinar o custo de 30 bombons, os 7,50€, efetuou adições sucessivas de parcelas de 0,25 €, o valor unitário, até alcançar o preço de 36 bombons, os 9 euros. Continuou efetuando relações aditivas, usando possivelmente dados da tabela, até alcançar o preço de 90 bombons.

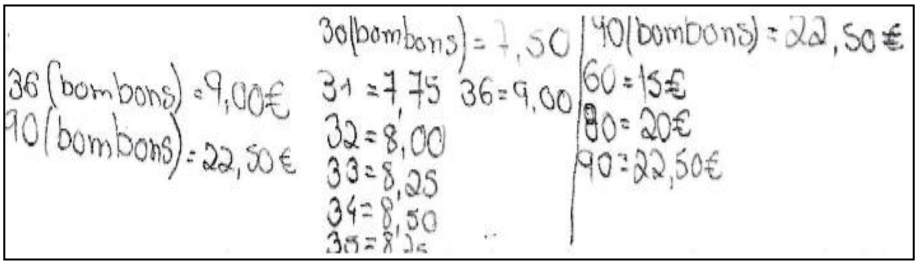


Figura 5.5.19. - Resposta evidenciando o uso do valor da constante de proporcionalidade como parcela em relações aditivas, estratégia de composição/decomposição, de Leonor.

Carlos, tal como o seu par, optou por uma estratégia de composição/decomposição e uma estratégia funcional. Recorrendo ao valor do preço de 30 bombons ou seja 7,50€, usou-o como parcela aditiva. O aluno efetuou composições sucessivas com 7,50€, até alcançar o valor de 90 bombons, (uma vez que 90 correspondia a três vezes o custo de 30 bombons), logo adicionou três parcelas de 7,50€, (Figura 5.5.20.). O aluno não usou o mesmo procedimento para determinar o custo de 36 bombons, mostrando que recorreu ao valor da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo. Evidenciou flexibilidade no uso de estratégias, adotando, possivelmente a que lhe seria mais fácil para cada situação.

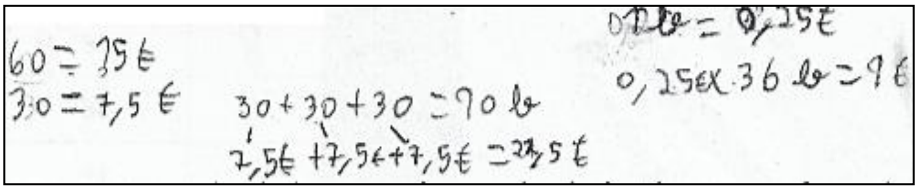


Figura 5.5.20. - Resposta evidenciando estratégia de composição/decomposição e o uso da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo, de Carlos.

Filipe mostrou estabelecer a relação de $\frac{1}{4}$ entre o preço e o respetivo número de bombons. Assim recorreu à determinação da quarta parte do número de bombons, como procedimento para calcular o respetivo preço, efetuando o algoritmo da divisão como procedimento matemático (Figura 5.5.21.).

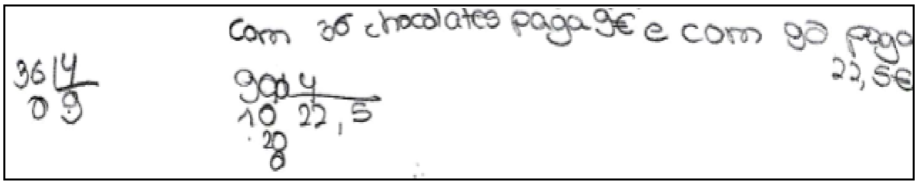


Figura 5.5.21. - Resposta evidenciando a relação de quarta parte, de Filipe.

Catarina, foi a aluna que recorreu ao uso da regra de três simples. Note-se que no item anterior, a aluna determinou o valor unitário (Figura 5.5.22.), mas neste item não recorreu à constante de proporcionalidade, recorreu à estratégia ainda não explorada em sala de aula, para determinar o valor em falta.

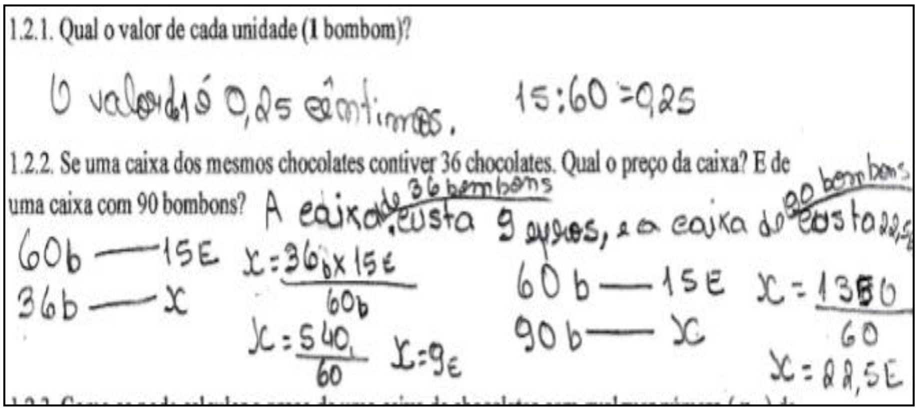
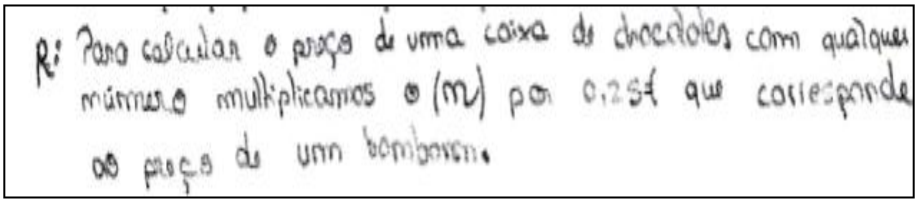


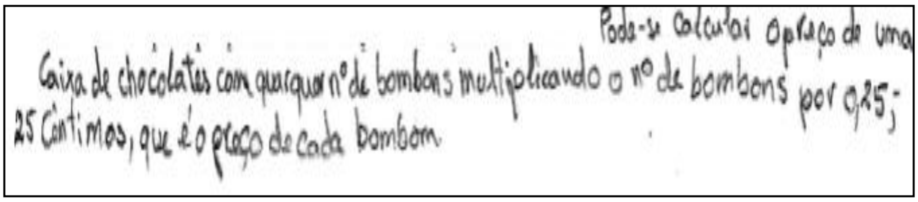
Figura 5.5.22. - Resposta evidenciando o uso da regra de três simples, por Catarina.

Embora nem todos os alunos tenham usado o valor da constante de proporcionalidade para descobrir o valor em falta, nos itens 1.2.1. e 1.2.2., mas, em reposta ao item 1.2.3. todos mostraram recorrer a esse valor, 0,25€, para determinar preço de qualquer quantidade de bombons. Dessa maneira percebi que os alunos revelaram compreensão do significado da constante de proporcionalidade.

As respostas com mais semelhanças, como as de Ana e Angelina (Figura 5.5.23.), apresentaram a explicação em linguagem natural sobre o processo de como usar o valor da constante de proporcionalidade na determinação do preço de uma caixa, que contivesse um qualquer número de bombons. Outros alunos apresentaram uma expressão algébrica, $n \times 0{,}25$, como são exemplo as respostas de Alice e Roberto (Figura 5.5.24.).

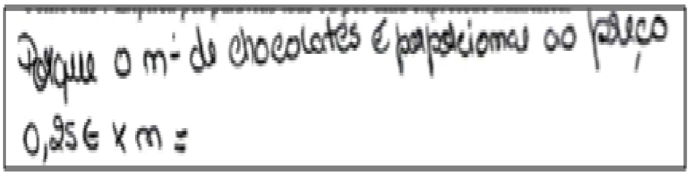


R: Para calcular o preço de uma caixa de chocolates com qualquer número multiplicamos o (m) por 0,25€ que corresponde ao preço de um bombom.



Pode-se calcular o preço de uma caixa de chocolates com qualquer nº de bombons multiplicando o nº de bombons por 0,25; 25 cêntimos, que é o preço de cada bombom.

Figura 5.5.23. - Respostas evidenciando como usar o valor da constante de proporcionalidade numa generalização, por Ana e Angelina.



Porque o nº de chocolates é proporcional ao preço
0,25€ × m =

n × 0,25

Figura 5.5.24. - Resposta evidenciando uma expressão algébrica, por Alice e Roberto.

Concluiu-se que os alunos usaram o valor da constante de proporcionalidade para efetuar uma generalização, como era suposto. Alguns conseguiram determinar uma expressão algébrica, talvez por inferência com conceitos do tópico “Sequências e Regularidades”. Os alunos que não alcançaram a expressão em linguagem simbólica interpretaram corretamente o significado da constante de proporcionalidade. Souberam, explicar em linguagem natural, a função do valor constante (k) na resolução de determinados problemas de proporcionalidade.

Na discussão coletiva surgiram outras formas de resolução, uma vez que em diálogo e com a exposição de ideias, os alunos foram inferindo outras estratégias e outras formas de relacionar as medidas de grandeza. À medida que apresentavam as suas estratégias e procedimentos realizados ou inferindo outras, algumas foram registadas no quadro ou por mim ou pelo aluno participante, como mostram as Figuras 5.5.25., a 5.5.30.

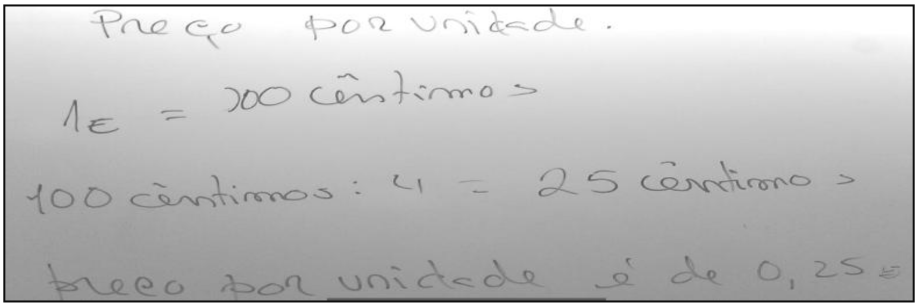


Figura 5.5.25. - Apresentação de estratégia alcançada durante a discussão, usando a relação da quarta parte na descoberta do valor unitário, convertendo 1 euro em 100 cêntimos e calculando um quarto, por Carlos.

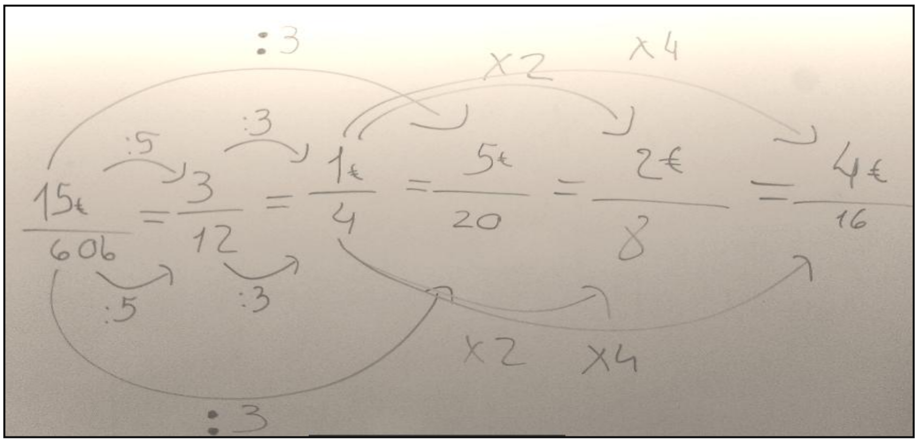


Figura 5.5.26. - Estratégia alcançada durante a discussão coletiva, com formação de várias razões equivalentes destacando os operadores escalares, na determinação do valor em falta.

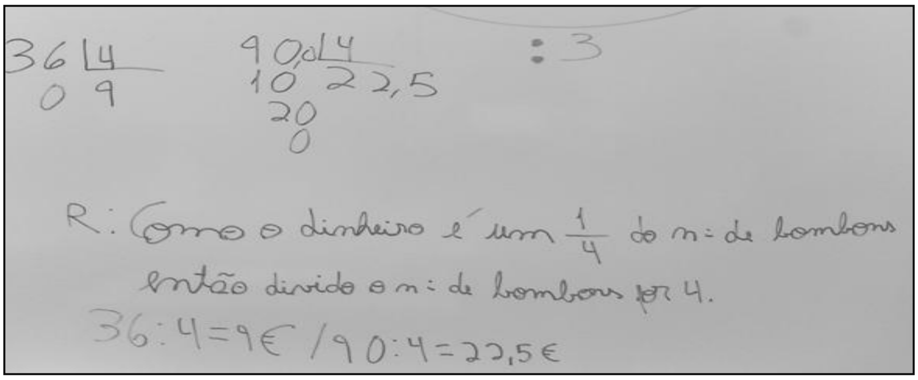


Figura 5.5.27. - Apresentação da relação da quarta parte entre as medidas de grandeza, por Filipe.

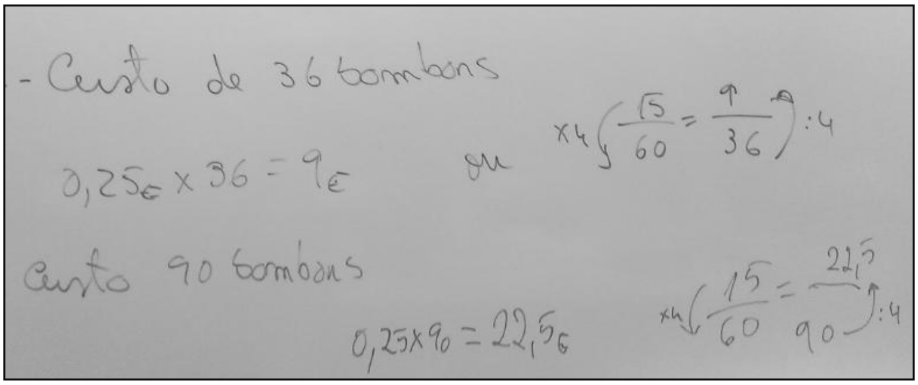


Figura 5.5.28. - Determinação do preço de 36 ou 90 unidades usando o valor da constante de proporcionalidade como fator multiplicativo ou estabelecendo relações entre as variáveis, por estratégia funcional, por vários alunos.

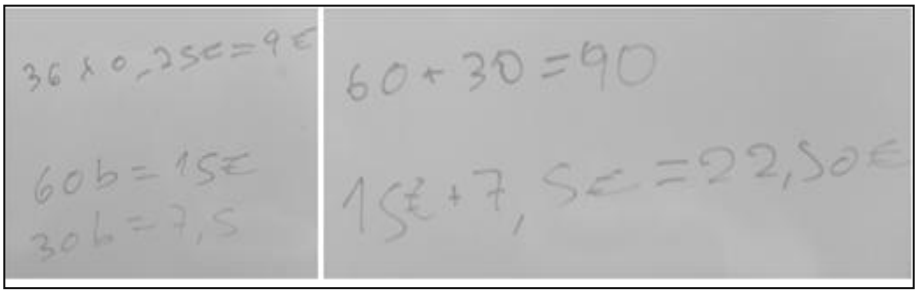


Figura - 5.5.29. - Apresentação da estratégia de composição/decomposição usada por Tomás.

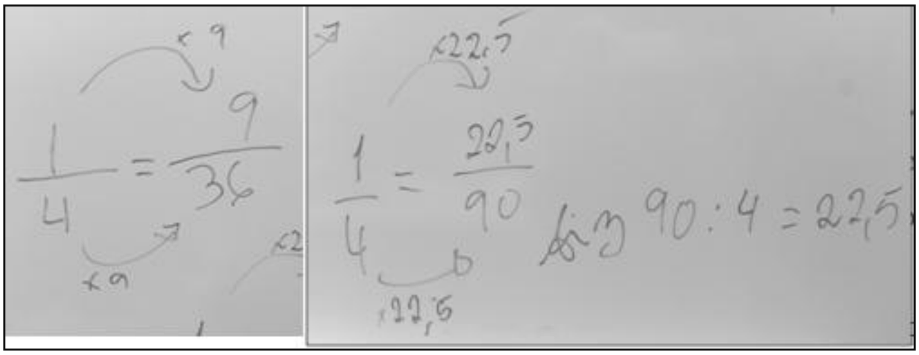


Figura 5.5.30. - Relações multiplicativas dentro das variáveis, estratégia escalar, usadas e apresentadas, por Alice e Vitória respetivamente.

O item 2. (Figura 5.5.31.) visava consolidar o trabalho com números racionais, relacionando razões, frações e percentagens em relações proporcionais.

2. Em relação à situação da Inês:

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou?

b) Que **fração** de chocolates recebeu?

2.1. A **fração** de dinheiro que a Inês pagou corresponde **a que percentagem** do preço total da caixa?

Figura 5.5.31. - Item 2., tarefa 5.

De uma maneira geral, todos os alunos formaram as frações de forma correta, salvo um número reduzido de alunos, nomeadamente seis, que não apresentou resposta , em que dois desses formaram as frações solicitadas de forma incorreta, como é exemplo a resposta de Leonor. A aluna apresentou não a fração do montante pago (3€) relativamente ao custo total (15€), não evidenciando o pretendido, $\frac{3}{15}$ ou $\frac{1}{5}$. Formou, sim, a razão entre o preço e o respetivo número de bombons $\frac{3}{12}$, 3 euros para 12 bombons (Figura 5.5.32.).

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou? $\frac{3}{12}$

b) Que **fração** de chocolates recebeu? $\frac{12}{60}$

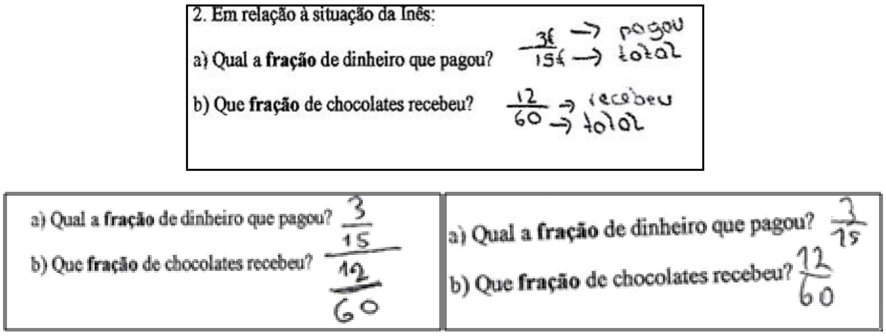
2.1. A **fração** de dinheiro que a Inês pagou corresponde **a que percentagem** do preço total da caixa?

$\frac{12}{15} =$

Figura 5.5.32. - Resposta evidenciando a incorreta formação de frações dentro do contexto apresentado, na alínea a) e no item 2.1., por Leonor.

Para formar a fração respeitante ao número de bombons, a aluna estabeleceu corretamente a relação parte-todo ($\frac{12}{60}$). Na alínea c) novamente, a aluna voltou a não relacionar corretamente uma parte do todo. Em vez de apresentar a fração de dinheiro paga$\frac{3}{15}$ ou $\frac{1}{5}$ e a respetiva percentagem (20%), apresentou a razão entre o número de bombons recebido e o preço total $\frac{12}{15}$. Não chegou a determinar qualquer percentagem. Denotou-se alguma confusão ao relacionar a parte com o todo dentro da mesma grandeza.

Os alunos, de um modo geral, corresponderam ao que era solicitado e alcançaram a percentagem representativa do valor da fração. No entanto também se verificou que as respostas não apresentavam as frações na forma irredutível, como são exemplos, os trabalhos de Ana, Carlos e Tomás (Figura 5.5.33.).



2. Em relação à situação da Inês:

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou? $\frac{3€}{15€}$ → pagou → total

b) Que **fração** de chocolates recebeu? $\frac{12}{60}$ → recebeu → total

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou? $\frac{3}{15}$

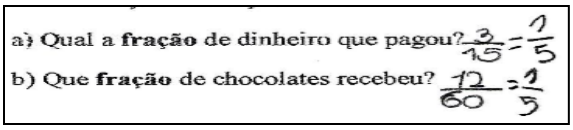
b) Que **fração** de chocolates recebeu? $\frac{12}{60}$

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou? $\frac{3}{15}$

b) Que **fração** de chocolates recebeu? $\frac{12}{60}$

Figura 5.5.33. - Respostas evidenciando a formação das frações solicitadas, embora não na sua forma irredutível, por Ana, Carlos e Tomás.

Por formação e apresentação das frações na sua forma irredutível, os alunos poderiam constatar que estas seriam exatamente as mesmas. A fração do dinheiro pago seria igual à fração do número de bombons recebido. A fração do valor pago correspondia a $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ e a fração do número de bombons recebidos correspondia a $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Esta situação foi tida em conta para posterior discussão em grupo. Esse momento contou com a participação de Filipe que foi o único aluno a efetuar a simplificação das frações, como mostra a Figura 5.5.34.



a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou? $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

b) Que **fração** de chocolates recebeu? $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

Figura 5.5.34. - Resposta evidenciando a formação das frações solicitadas, na sua forma irredutível, por Filipe.

No item 2.1., os alunos tinham de determinar a percentagem representativa da fração paga $\frac{3}{15}$ ou $\frac{1}{5}$ notando que corresponderia 20%. Basicamente, todos os alunos que apresentaram a percentagem, fizeram-no de forma correta. Duas alunas relacionaram incorretamente que $\frac{1}{5}$ correspondia a 25%. De um modo geral, o valor da percentagem foi determinado pelo quociente representativo da fração, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{3}{15}$, ou seja, 0,2 = 20%, como nas respostas de Ana e Filipe (Figura 5.5.35.).

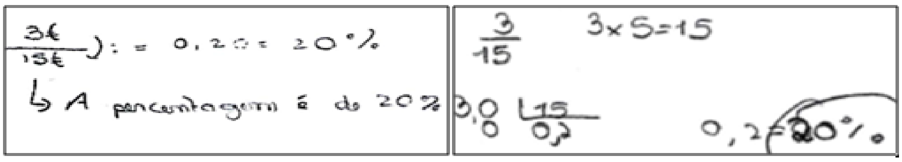


Figura 5.5.35. - Respostas evidenciando a determinação da percentagem por cálculo do quociente, por Ana e Filipe.

Tomás foi um aluno que, por linguagem natural estabeleceu a relação entre a fração paga, $\frac{3}{15}$ e $\frac{1}{5}$. Apresentou o seu argumento destacando que havia sido pago a quinta parte dos 15 €, o equivalente em percentagem à quinta parte de 100%. Notando que corresponderia a 20%, uma vez que 100% ÷ 5 = 20%, (Figura 5.5.36.).

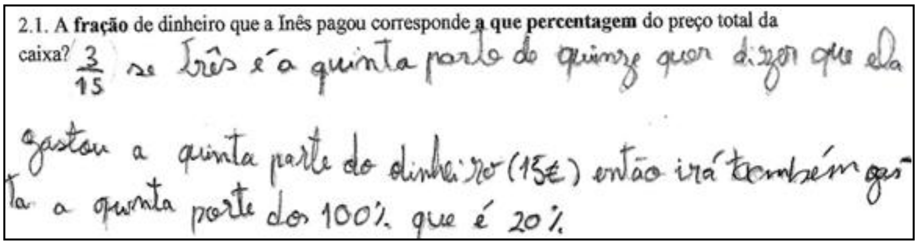


Figura 5.5.36. - Resposta evidenciando o relacionar da fração $\frac{3}{15}$ com a quinta parte e determinação da quinta parte de 100%, de Tomás.

Carlos, par de Tomás, seguiu o mesmo raciocínio mas usou uma representação pictórica para determinar $\frac{1}{5}$ de 100%, ou seja, uma das cinco partes de 100%, mostrando que $\frac{1}{5}$ corresponderia a 20% (Figura 5.5.37.).

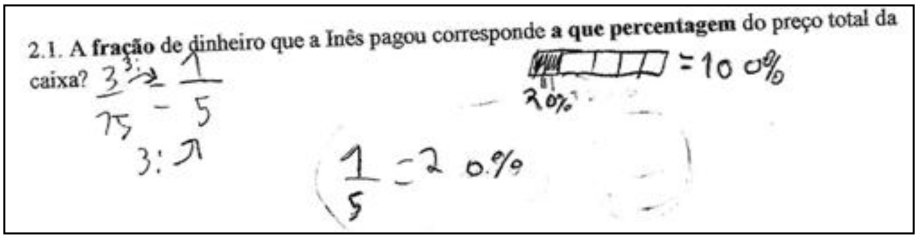


Figura 5.5.37. - Resposta evidenciando o relacionar da fração $\frac{3}{15}$ com $\frac{1}{5}$ e a representação pictórica de $\frac{1}{5}$ de 100%, de Carlos.

Na discussão coletiva orientei a participação dos alunos de forma a enfatizar o que havia sido planeado para o trabalho autónomo mas não alcançado. Pretendia que os alunos verificassem que a fração de dinheiro paga ($\frac{3}{15}$ equivalente a $\frac{1}{5}$) correspondia à mesma fração relativa ao número de bombons a receber ($\frac{12}{60}$ equivalente a $\frac{1}{5}$). Muitos dos alunos só atenderam à simplificação das frações durante o momento de discussão. Foquei esta relação com intuito dos alunos poderem constatar que a fração de dinheiro paga era igual à fração de bombons recebida, uma vez que as grandezas eram diretamente proporcionais.

Durante a discussão também se relacionou o total pago com a percentagem total, por formação de uma proporção, notando que 15 € corresponderiam a 100%.

Recorrendo à estratégia escalar estabeleceram relações de covariância e, formaram a proporção $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, como mostra a Figura 5.5.38.

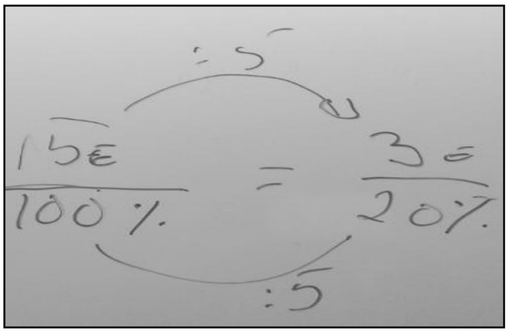


Figura 5.5.38. - Apresentação do uso da estratégia escalar para formação da proporção e determinação do valor em falta correspondente ao valor da percentagem.

Nesta última alínea, que envolvia a descoberta da percentagem, apercebi-me que deveria ter colocado mais um item a solicitar a percentagem de bombons recebida. Seria uma forma de reforçar, uma vez mais, que nessa situação de proporcionalidade direta, também a percentagem paga seria igual à percentagem de bombons recebida. Deste modo no momento da discussão lancei a questão aos alunos: "*Qual será a percentagem de bombons recebida*?"

Novamente, Tomás pediu para intervir e explicar uma relação de covariância entre a quantidade de bombons recebida do total. O aluno apresentou que percebeu que 12 bombons recebidos seriam a quinta parte do total. Sendo os 60 bombons o total, logo o correspondente a 100%, e a quinta parte de 100% seria 20% (Figura 5.5.39.). Deste modo evidenciou que a percentagem de bombons recebida também era de 20%, igual à percentagem da quantia paga (3€ em 15€ que correspondia a 20%), como se mostra na Figura 5.5.36.

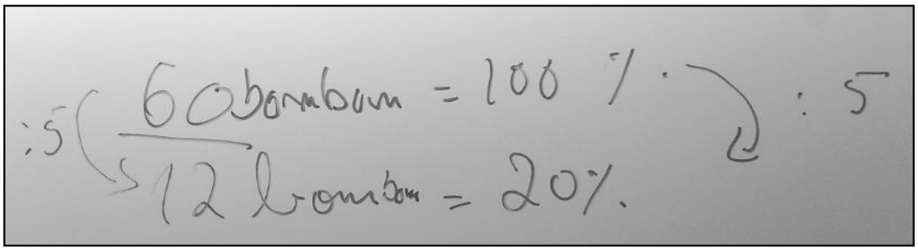


Figura 5.5.39. - Apresentação de estratégia de covariância dentro das variáveis, na determinação da percentagem, por Tomás.

6.8. Tarefa 6: Refresco

A tarefa (Anexo 12) foi resolvida ao longo de quatro tempos de 50 minutos. Esta tarefa apresentava um grau de exigência superior às anteriores. Esse maior grau de exigência estava relacionado, não com o contexto do problema, mas coma a estrutura numérica, a razão inicial 2:3 que relacionava as duas grandezas correspondia a uma dízima infinita. Envolvia, assim, o trabalho com números racionais representados por frações, dízimas, finitas e infinitas e numerais mistos. O enunciado, item 1., apresentava a forma de preparar um sumo à base de sumo concentrado e água, na razão 2:3, requerendo a interpretação desta razão e o relacionar das duas quantidades de modo proporcional (Figura 5.6.1.).

1. Depois dos treinos os amigos vão sempre a casa de um deles para lanchar. É costume prepararem sumo feito à base de concentrado de laranja ao qual adicionam água.
O frasco de concentrado de laranja refere: **Adicionar sumo concentrado e água na razão de 2:3.**
1.1. Como se deve proceder para preparar o sumo?

Figura 5.6.1. - Item 1., tarefa 6.

Aquando da apresentação da tarefa, deparei-me com a falta de compreensão por parte de muitos alunos, que questionavam: "_*Como proceder para preparar o sumo? Como assim?*". Tornou-se necessária a minha intervenção, dando pistas ou sugerindo hipóteses, como: "*Imaginem que usam um copo como medida, quantos copos terão de colocar com concentrado e quantos com água?"*. Perante este cenário e após algum tempo, iniciei uma pequena a discussão coletiva, uma vez que era desejável os alunos relacionassem as duas grandezas com compreensão, incentivando a progressão no trabalho autónomo. Assim teve lugar o seguinte diálogo:

Professora: Quem é que quer explicar como se deve proceder para preparar o sumo?
O Tomás voluntaria-se, no entanto como é o aluno que mais vezes participa e apresenta o seu raciocínio, a professora dá a vez à Alice.
Professora: Tomás, se não te importas; vamos dar a palavra à Alice. Explica Alice, como procederias?
Alice: Temos que juntar duas partes de concentrado para três de água!
Professora: Sim, Alice. Mas imagina que estás em tua casa e vais preparar o sumo, como procedes para fazer o sumo?
A Alice fica em silêncio algum tempo e nenhum colega intervém.
Professora: Imagina, pegas num jarro para preparar o sumo e como fazes, na prática?
Alice: Então coloco três copos de água e junto dois copos de concentrado.

Professora: Por exemplo, muito bem! Agora ficou mais claro para vocês sobre como proceder para fazer o sumo seguindo a razão 2:3.
Fernando: E pode ser em litros?
Professora: Pode! E se fosse em litros, como fazias?
Fernando: Então, punha dois litros de concentrado e juntava três litros de água.
Professora: Sim, também está correto.
A turma anuiu e deu-se continuidade ao trabalho autónomo.

Fernando apresentou esse raciocínio na sua produção escrita. A sua interpretação perante a turma, possivelmente, foi tida em atenção por outros colegas, como Leonor, que apresentou na sua resposta a relação estabelecida e mencionada pelo colega. Associou a razão apresentada a um contexto prático do dia-a-dia, usando como unidade de medida, o litro.

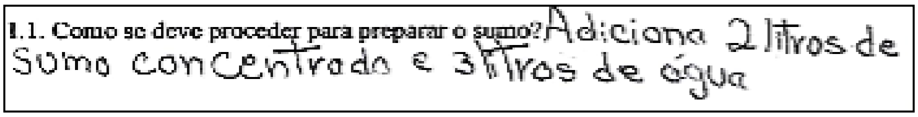

1.1. Como se deve proceder para preparar o sumo? Adiciona 2 litros de sumo concentrado e 3 litros de água

Figura 5.6.2. - Resposta evidenciando a interpretação da razão apresentada, associando a um contexto prático, de Leonor.

Outros alunos apresentaram a forma de preparar o sumo concentrado usando outra unidade de medida, copos. Interligaram adequadamente as quantidades de copos de cada líquido, como é exemplo a resposta de Vitória (Figura 5.6.3.), associando o significado da razão a uma situação prática.

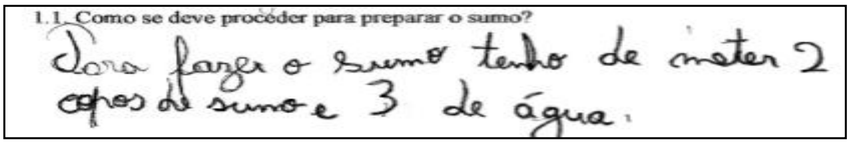

1.1. Como se deve procéder para preparar o sumo?
Para fazer o sumo tenho de meter 2 copos do sumo e 3 de água.

Figura 5.6.3. - Resposta evidenciando a interpretação da razão relacionando-a com uma situação prática, de Vitória.

De um modo geral, os alunos referiram-se ao número de medidas, como é exemplo a resposta de Mariana (Figura 5.6.4.), revelando compreender e interpretar uma razão de modo generalizado.

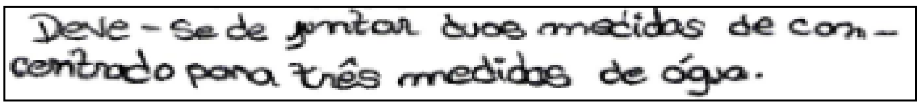
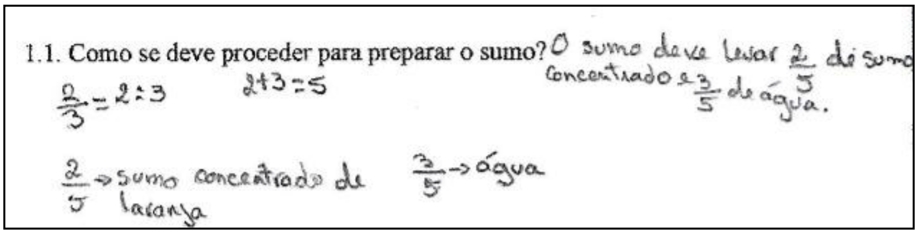

Deve-se de juntar duas medidas de con-
centrado para três medidas de água.

Figura 5.6.4. - Resposta evidenciando a interpretação da razão de um modo generalizado, por Mariana.

Angelina foi a única aluna que relacionou cada quantidade com uma fração. Atendendo ao total do número de medidas usadas, 5, formou a fração corresponde a cada parte no todo. A aluna relacionou que eram usadas 2 partes de sumo concentrado para 3 partes de água. Formou a fração de sumo concentrado, correspondente a $\frac{2}{5}$ e a fração de água, correspondente a $\frac{3}{5}$ (Figura 5.6.5.). Desta forma apresentou um nível sofisticado de raciocínio, efetuando a conexão entre razão e fração. No entanto, não explicou como proceder ao preparado do sumo na prática.

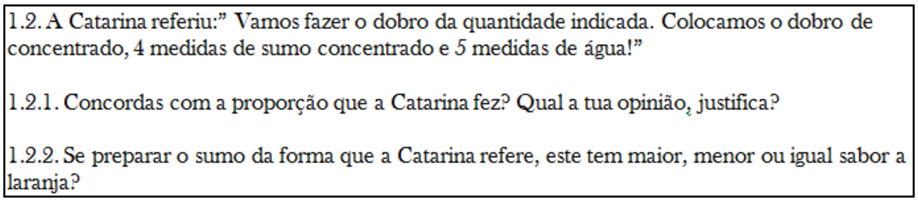

1.1. Como se deve proceder para preparar o sumo? O sumo deve levar $\frac{2}{5}$ de sumo concentrado e $\frac{3}{5}$ de água.

$\frac{2}{3} = 2:3$ $\quad 2+3=5$

$\frac{2}{5} \rightarrow$ sumo concentrado de laranja $\quad \frac{3}{5} \rightarrow$ água

Figura 5.6.5. - Resposta evidenciando a flexibilidade em relacionar razões e frações, por Angelina.

Com o item 1.2. (Figura 5.6.6.) procurei perceber se os alunos ainda recorriam ao raciocínio aditivo. A razão inicial (2:3) apresentava uma unidade de diferença entre os termos. Pretendia perceber se ao requer o aumento da quantidade de sumo para o dobro, os alunos atendiam ao aumento das duas quantidades por comparação relativa ou por comparação aditiva. Se ao usar o dobro das medidas de concentrado, 4 medidas, consideravam o uso de mais uma medida de água, 5 medidas como quantidade proporcional (4 de concentrado + 1 = 5 medidas de água, comparação aditiva). Este tipo de raciocínio aditivo foi usado, pela aluna, numa situação semelhante no teste de avaliação diagnóstica com a razão (4:3).


1.2. A Catarina referiu:" Vamos fazer o dobro da quantidade indicada. Colocamos o dobro de concentrado, 4 medidas de sumo concentrado e 5 medidas de água!"

1.2.1. Concordas com a proporção que a Catarina fez? Qual a tua opinião, justifica?

1.2.2. Se preparar o sumo da forma que a Catarina refere, este tem maior, menor ou igual sabor a laranja?

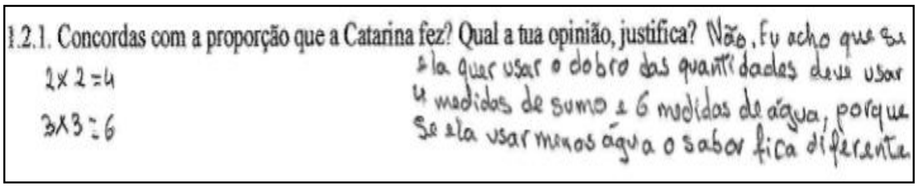
Figura 5.6.6. – Item 1.2., tarefa 6.

Nenhum aluno efetuou um raciocínio aditivo contrariamente ao que ocorreu no problema com a mesma estrutura, no teste diagnóstico. Deste modo pressupõe-se que houve uma evolução na forma de pensar dos alunos.

De um modo geral, os alunos estabeleceram uma relação multiplicativa e nas suas produções escritas, de algum modo, referiram que teriam de aumentar as duas quantidades para o dobro. Pôde verificar-se que houve referência ao uso do fator multiplicativo 2, simultaneamente nos dois termos da razão. Os alunos concluíram que não seria correto o uso de 5 medidas de água mas de 6, dobro das partes de água indicadas na razão inicial $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

As respostas de Angelina, Mariana, Carla e Duarte são exemplos que apresentam semelhanças com as apresentadas pela turma. Os alunos identificaram corretamente que numa proporção, ao efetuar o dobro de uma das medidas de grandeza, a outra medida de grandeza terá de corresponder, também, ao dobro da quantidade, evidenciando o sentido de covariância. Assinalaram-se pequenas diferenças na forma como explicaram, ou justificaram ou na representação que usaram.

Angelina identificou a quantidade correta de medidas a usar, relevando compreensão, uma vez que argumentou que, se o aumento de ambas as medidas de grandeza não fosse proporcional, o sabor ficaria alterado, (Figura 5.6.7.).


1.2.1. Concordas com a proporção que a Catarina fez? Qual a tua opinião, justifica? Não, Eu acho que se ela quer usar o dobro das quantidades deve usar 4 medidas de sumo e 6 medidas de água, porque se ela usar menos água o sabor fica diferente.

2×2=4
3×3=6

Figura 5.6.7. – Resposta evidenciando a quantidade para manter a proporção, atribuindo significado à não existência da proporção, de Angelina.

Mariana foi uma das alunas que, apresentou as razões, decorrentes da situação, notando que a correta seria $\frac{4}{6}$ por ser equivalente à razão inicial. Usou o fator multiplicativo 2 e indicou que $\frac{4}{5}$ seria uma razão incorreta, não equivalente (Figura 5.6.8.).

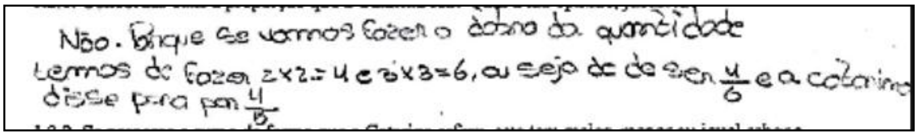

Não. Porque se vamos fazer o dobro da quantidade temos de fazer 2×2=4 e 3×3=6, ou seja de de ser $\frac{4}{6}$ e a Catarina disse para por $\frac{4}{5}$

Figura 5.6.8. - Resposta evidenciando a razão correta para formar a proporção, de Mariana.

Carla apresentou a representação da proporção, de forma correta, para o sumo ser preparado de forma proporcional, como forma de justificar que 5 medidas de água não seriam uma quantidade proporcional (Figura 5.6.9.), à semelhança de outros alunos.

Duarte recorreu à formação de uma razão equivalente e indicou que essa razão teria de ser $\frac{4}{6}$, representante de 4 medidas de sumo concentrado para 6 medidas de água (Figura 5.6.10.).

Os alunos recorreram ao uso de razões equivalentes, atendendo à razão inicial, formando proporções, mesmo que de forma implícita.

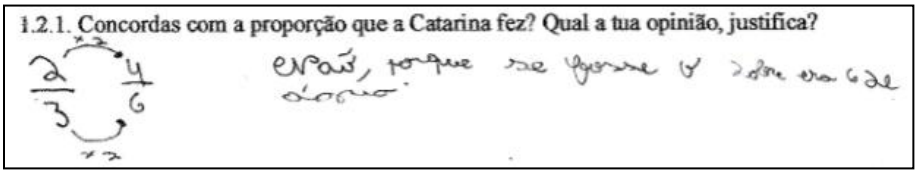


Figura 5.6.9. - Resposta baseada na formação da proporção, por Carla.

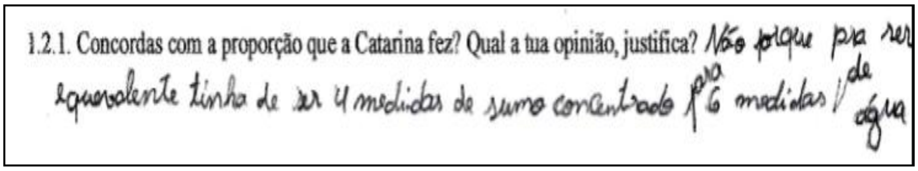


Figura 5.6.10. - Resposta evidenciando a necessidade de efetuar uma razão equivalente na formação de uma proporção, de Duarte.

O item 1.2.2. não suscitou grande dificuldade. Os alunos justificaram que o sabor a laranja seria mais intenso. Rute salientou que o sumo ficaria com maior sabor a laranja pois levou menor quantidade de água do que deveria, como mostra a Figura 5.6.11. Justificações semelhantes foram apresentadas por dez alunos.

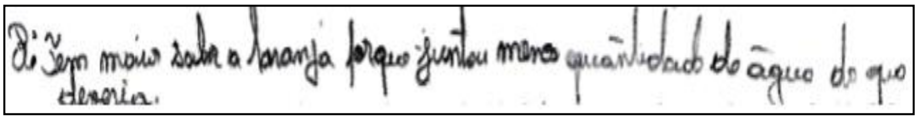


Figura 5.6.11. - Resposta justificando a alteração do sabor do sumo por inexistência de proporção, de Rute.

Treze alunos apenas referiram que o sumo teria um sabor mais forte ou mais intenso a laranja, sem apresentação de qualquer argumento. Registou-se um pequeno número de alunos a referir que o sumo teria menor sabor a laranja, mas não justificaram a sua afirmação.

Em discussão coletiva foi lançada a questão sobre o pensamento inerente ao item 1.2.1., "*Qual o raciocínio efetuado uma vez que era apresentada a razão entre as medidas de sumo concentrado e as medidas de água, para elaboração do dobro do sumo com 4:5, em vez de 4:6*?".

Professora: Qual foi o raciocínio da Catarina quando em vez de colocar 6 partes de água colocou apenas 5?
Tomás: Eu acho que foi assim. Ela pensou como de 2 para 3 era mais um, então, pensou que colocando 3 de concentrado metia 4 de água, para 4 de concentrado era 5 de água. Pensou que era sempre mais 1.
Professora: E ao pensar dessa forma, que se vai sempre adicionar mais 1 unidade de água é um pensamento correto para efetuar o sumo sempre na mesma proporção?
Tomás: Não!
Ana coloca o braço no ar para intervir…
Ana: Não, temos que fazer sempre a multiplicar ou a dividir!

Prolonguei um pouco mais a tarefa com intuito de levar os alunos a determinarem o valor unitário, e a compreenderem melhor as relações que se poderiam estabelecer no contexto do problema com intuito de ajudar no trabalho que se seguia com os restantes itens.

Professora: Muito bem. Suponhamos agora que pretendem fazer metade do sumo. É só para uma pessoa! Como devem fazer? Ou seja usando apenas um copo de concentrado, quantos copos de água são necessários?
Sílvia: Um e meio de água!
Professora: E porquê, um e meio?
Sílvia: Porque se colocamos metade do concentrado também temos que colocar metade dos copos de água e metade de três é um e meio.
Professora: Então agora, vamos fazer o dobro do sumo e colocamos 4 medidas de concentrado, como refere o enunciado vamos colocar mais uma de água ou seja 5? (*a professora referiu-se à questão 1.2.1.)*
Sílvia: Não!
Professora: Não, Porquê?
Sílvia: Porque fazendo o dobro do sumo, o dobro de 2 é 4 mas o dobro de 3 não é 5 é 6!
Professora: Então se colocar 5 de água, o que quer isso dizer?
Sílvia. Que não é uma proporção, e o sabor vai ser diferente!

O conjunto de questões do item 2., (Figura 5.6.12.), iniciava com a formação de uma razão, apresentada por todos os alunos de forma correta.

2. A Inês prepara o sumo com base em 6 copos de 10 cl de concentrado para 9 copos de 10 cl de água.
2.1. Qual a razão entre o número de partes de concentrado para o número de partes de água.

2.1.1. A Inês elabora o sumo com base na razão indicada no frasco do sumo concentrado? Justifica ou mostra porquê.

2.1.2. E se usar a razão 17: 25,5 será que corresponde a uma razão equivalente? Justifica.

2.2. Qual a fração do número de partes de água no sumo.

2.3. Qual a percentagem de concentrado no preparado de sumo.

2.4. Se a Inês prepara um jarro de 1000*ml* de sumo usando a razão indicada, 2:3, quantos ***ml***'s usará de concentrado? E de água?

Figura 5.6.12. - Item 2., tarefa 6.

A questão, 2.1.1., requeria o estabelecer de uma relação de igualdade entre duas razões (formar uma proporção), enquadrando-se num problema de comparação. O problema suscitou algumas dúvidas, talvez pela forma da sua redação. Após algum trabalho de interação entre colegas ou com a professora, os alunos conseguiram perceber que existia uma relação do triplo das quantidades.

De algum modo a relação do triplo foi evidenciada, como são exemplos as respostas de Angelina, Sara e Ana.

Angelina usou e evidenciou o fator multiplicativo 3, para mostrar a relação do triplo entre as quantidades, (Figura 5.6.13.).

2.1.2. A Inês elabora o sumo com base na razão indicada no frasco do sumo concentrado? Justifica ou mostra porquê. Sim.

$$\frac{2}{3} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{6}{9}$$

Figura 5.6.13. - Resposta evidenciado a relação do triplo com uso do fator multiplicativo estabelecendo uma relação "dentro" das variáveis, por Angelina.

Sara justificou em linguagem natural pouco formal, que existia uma relação do triplo das quantidades que formavam as razões, (Figura 5.6.14.).

Sim, porque a razão $\frac{6}{9}$ é o triplo da razão $\frac{2}{3}$.

Figura 5.6.14. - Resposta evidenciando a relação do triplo das quantidades, em linguagem natural, por Sara.

Ana apresentou que, partindo da razão que formou no item anterior $\frac{6}{9}$ a terça parte das quantidades correspondia à razão inicial. A aluna procedeu de forma correta recorrendo ao procedimento da operação inversa (Figura 5.6.15.), simplificando a razão formada de modo a alcançar a razão inicial.

Figura 5.6.15. - Resposta evidenciando a relação da terça parte na equivalência de razões, por Ana.

Um grupo de trabalho (3 alunas), possivelmente não atendeu à razão indicada no item anterior e estabeleceu uma relação entre a razão indicada no frasco 2:3 e o dobro das quantidades dessa razão, como é exemplo a resposta de Rute (Figura 5.6.16.).

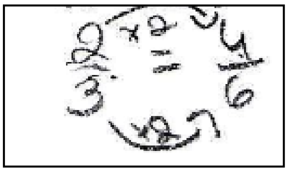


Figura 5.6.16. – Resposta não correta, apresentando uma relação entre razões não adequada à questão, de Rute.

O item 2.1.2. foi o item que criou mais dificuldades, como já esperava, uma vez que o operador escalar seria um número racional. Teriam de encontrar um fator multiplicativo que correspondia a um número não inteiro. Só cinco alunos conseguiram descobrir o fator multiplicativo não natural, representado em dízima. Perceberam que a razão $\frac{2}{3}$ era equivalente a $\frac{17}{25{,}5}$ usando o fator $\times$ 8,5, como é exemplo a resposta de Leonor (Figura 5.6.17.).

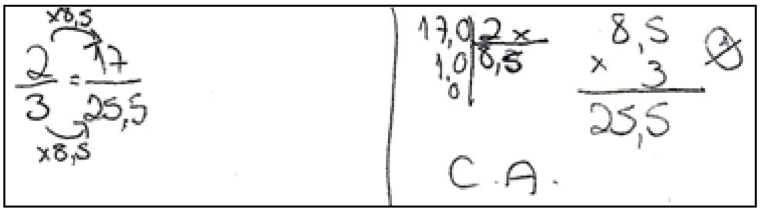


Figura 5.6.17. - Resposta evidenciando o uso do fator multiplicativo e o procedimento que permitiu descobrir esse fator, por Leonor.

A aluna apresentou o procedimento de cálculo que usou para perceber qual o fator multiplicativo a usar. O procedimento mostrou o quociente representante dos dois antecedentes ($17 \div 2 = 8,5$) de cada razão. Seguidamente usou esse quociente como fator multiplicativo ($8,5 \times 3 = 25,5$) comprovando que o produto do valor do quociente pelo consequente da razão inicial era de facto o consequente da segunda razão (25,5).

Outra estratégia usada, embora também por um pequeno número de alunos reportou-se ao cálculo do quociente do consequente pelo antecedente de cada uma das razões, ($25,5 \div 17 = 1,5;\ 3 \div 2 = 1,5$). Este procedimento permitiu-lhes notar que o quociente era o mesmo, existindo assim uma proporção, como é exemplo a resposta de Alice (Figura 5.6.18.), que mostrou o operador funcional,1,5.

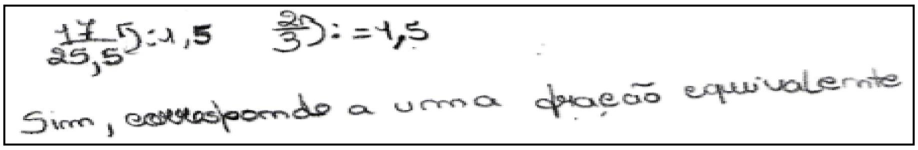


Figura 5.6.18. - Resposta evidenciando a determinação do valor de cada razão mostrando que as razões são equivalentes, de Alice.

As respostas com maiores semelhanças insinuavam que não havia uma equivalência entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{17}{25,5}$. Muitos alunos não conseguiram estabelecer uma relação proporcional e uma da justificações que apresentaram no decorrer do seu trabalho autónomo reportava a: " *Não é possível porque não dá para transformar 2, que é número par, em 17, que é número ímpar*." ou, " *25,5 não é múltiplo de 3, porque é número decimal*".

A resposta de Angelina é um exemplo, uma vez que, argumentou que os termos da razão apresentada não eram múltiplos dos termos da razão $\frac{6}{9}$, do item 2.1., esta equivalente à razão inicial a $\frac{2}{3}$. Supõem-se que a aluna tenha atendido a $\frac{17}{25,5}$ como razão não equivalente a $\frac{6}{9}$, logo não equivalente a $\frac{2}{3}$ (Figura 5.6.19.).

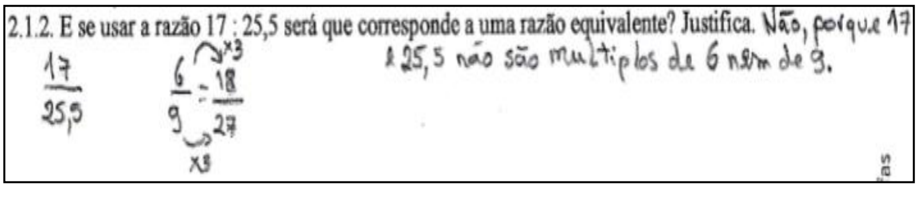
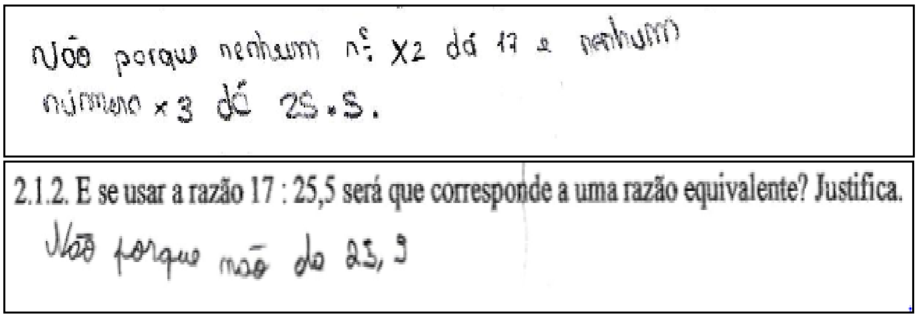


Figura 5.6.19. - Resposta evidenciando a não perceção da existência de equivalência entre as duas razões, por Angelina.

Ana e Tomé, também apresentaram respostas incorretas à semelhança de vários alunos, evidenciando que não era possível a equivalência entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{17}{25,5}$ (Figura 5.6.20.).

Ana atendeu aos múltiplos de 2 e de 3 por fator natural. A resposta de Tomé foi, mais um exemplo, uma vez que tomou 25,5 como um número não múltiplo de 3 por ser um número decimal. Os alunos não acharam ser possível determinar um produto de 3 por um fator não inteiro.

Alguns alunos, não apresentaram qualquer resposta.



Não porque nenhum nº x2 dá 17 e nenhum número x3 dá 25.5.

2.1.2. E se usar a razão 17 : 25,5 será que corresponde a uma razão equivalente? Justifica.

Não porque não dá 25,5

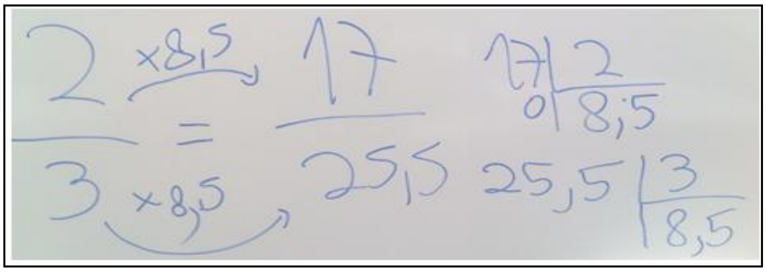
Figura 5.6.20. - Respostas evidenciando o uso apenas de número naturais como fator multiplicativo, de Ana e Tomé.

Pôde observar-se pelo desenrolar da atividade que os alunos, no geral, atenderam apenas a fatores multiplicativos naturais, não estenderam ou ponderam no uso de números racionais, representados em dízima.

Durante o trabalho autónomo, por observação das dificuldades que iam surgindo e atendendo ao que os alunos iam referindo, fui mencionando que desenhar as medidas poderia ajudar a resolver e a perceber as relações [uma vez que esta estratégia foi usada por alunos no ano anterior aquando da atividade desenvolvida no decorrer do estudo piloto (Anexo 5, Tarefa 2, parte II). Os alunos da turma apresentaram alguma relutância em desenhar uma representação pictórica ou em efetuar esquemas, para tentarem perceber as relações entre as quantidades. Poderiam, desta forma concluir que, a cada medida de concentrado correspondia 1,5 ou $1\frac{1}{2}$ medidas de água, base para alcançar todas as outras razões equivalentes. Nesta situação os alunos não atenderam ao valor unitário, 1,5 medidas de água por cada medida de concentrado. Nem todos atenderam que o valor constante não era um número inteiro. Esta referência já havia sido focada na discussão coletiva, por Sílvia, mas que não foi tida em conta.

Uma vez que, os alunos revelaram dificuldades na compreensão, aquando do trabalho autónomo, promovi a discussão coletiva após a conclusão do item 2.1.2. As duas discussões tiveram sempre o intuito de enfatizar as relações entre as duas quantidades, sempre que possível recorrendo a exemplos práticos do dia-a-dia, de modo a proporcionar uma maior compreensão do contexto do problema. Tentei também, promover maior segurança na resolução do item 3. e 4. da segunda parte da tarefa.

Todos os itens foram discutidos. Alguns alunos foram intervindo e apresentando oralmente as relações entre as razões efetuadas, partindo da razão inicial $\frac{2}{3}$. Com facilidade relacionaram que a razão $\frac{6}{9}$ correspondia ao triplo das quantidades da razão inicial. O item que de facto suscitou maiores dificuldades referiu-se à comparação da razão inicial $\frac{2}{3}$ com a razão $\frac{17}{25,5}$. Foram debatidos e apresentados em turma procedimentos e raciocínios que permitiram efetuar a comparação entre as duas razões, evidenciando que formavam uma proporção, como mostra a Figura 5.6.21. ilustrando a apresentação de Vitória. A aluna mostrou que o fator multiplicativo escalar era 8,5 e qual o procedimento de cálculo que lhe permitiu descobrir esse fator. A sua apresentação, possivelmente, possibilitou a constatação pelos outros alunos que o quociente entre os antecedentes e entre os consequentes era o mesmo.



5.6.21.- Resposta, registada no quadro, evidenciando o fator multiplicativo que permitiu verificar a existência de proporção, por Vitória.

Tomás explicou à turma que havia determinado a razão unitária estabelecendo que $\frac{17}{25,5}$ era equivalente a $\frac{1}{1,5}$ e que, pelo operador escalar, $\times 2$, alcançaria razão inicial $\frac{2}{3}$. O aluno mostrou, assim, a formação de razões equivalentes para evidenciar a existência de uma proporção (Figura 5.6.22.), destacando a formação da razão unitária como ponto de partida para formar outras razões equivalentes.

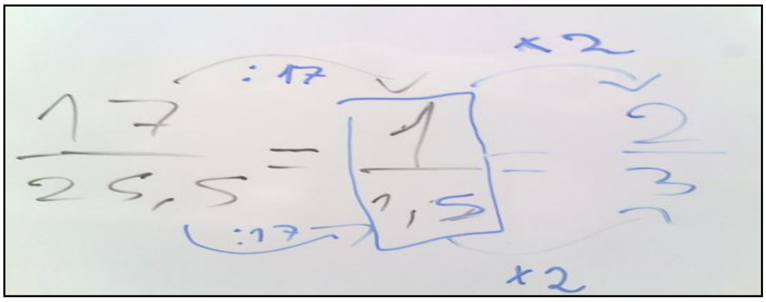


Figura 5.6.22. - Resposta, registada no quadro, evidenciando a equivalência de frações, mostrando a existência de proporção, por Tomás.

Após a discussão sobre as resoluções dos alunos, o trabalho avançou com a resolução dos restantes itens. Os itens 2.2. e 2.3. trabalhavam novamente com a relação entre razões, frações e percentagens (Figura 5.6.23.).

2.2. Qual a fração do número de partes de água no sumo.

2.3. Qual a percentagem de concentrado no preparado de sumo.

2.4. Se a Inês prepara um jarro de $1000ml$ de sumo usando a razão indicada, 2:3, quantos ***ml***'s usará de concentrado? E de água?

Figura 5.6.23. - Item 2.2., 2.3. e 2.4., da tarefa 6.

Antecipei que seriam dois itens de fácil resolução, mas por observação das produções escritas, pude constatar que só um pouco mais de metade da turma apresentou as frações corretas, como são exemplo as respostas de Rute e Filipe (Figura 5.6.24.), ao item 2.2.

Figura 5.6.24. - Respostas evidenciando as frações solicitadas ao item 2.2., por Rute e Filipe.

Dos alunos com as respostas corretas, nem todos evidenciaram a fração na forma irredutível, cingindo-se apenas à razão entre a parte e o todo, como Angelina (Figura 5.6.25.). A aluna que no primeiro item desta tarefa trabalhou com a fração de concentrado e de água (como se mostrou na Figura 5.6.5.), neste item ficou-se pela representação da razão entre o número de parte de água e o total/todo, ($\frac{9}{15}$), embora correta, mas não simplificada para $\frac{3}{5}$.

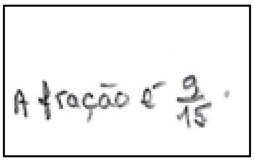


Figura 5.6.25. - Resposta evidenciando a razão correta, não correspondendo à fração solicitada na forma irredutível, por Angelina.

No item 2.3., a determinação da percentagem a que correspondia o concentrado de laranja, de um modo geral foi corretamente alcançado. Nove alunos não determinaram a percentagem correta ou porque determinaram o valor da razão inicial, como Sara (Figura 5.6.26.), ou por apresentarem alguns dados do problema sem determinarem um valor conclusivo.

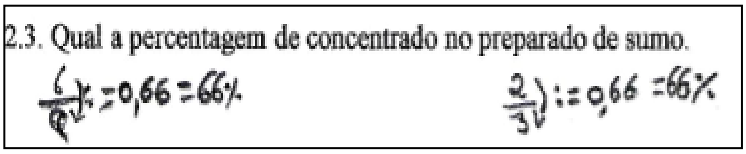


Figura 5.6.26.- Resposta evidenciando a incorreta interpretação do problema, partindo da razão inicial invés da fração do concentrado de sumo, por Sara.

Alguns alunos, como Ana e Filipe, recorreram à estratégia de equivalência de razões/frações formando uma razão de consequente 100, como mostra a Figura. 5.6.27.

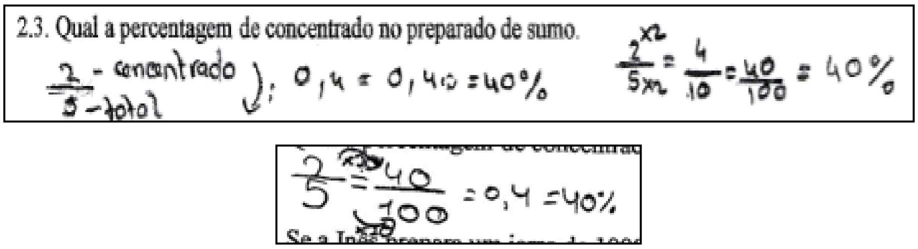


Figura 5.6.27.- Resposta revelando flexibilidade no relacionar percentagens, quocientes e frações, por Ana e Filipe.

Ana determinou corretamente o valor da percentagem do concentrado por dois processos. A aluna calculou o valor da fração, convertendo-o em percentagem e também usou a estratégia de equivalência de frações. Formou frações equivalentes até alcançar a fração/razão representante de um valor em 100. Na fração/razão 40 em 100, evidenciou que essa fração/razão correspondia a 40%. A aluna revelou flexibilidade em relacionar razões, frações, quocientes e percentagens, à semelhança de alguns outros alunos.

Filipe mostrou ter recorrido à equivalência de frações para alcançar um valor em 100 e, determinando o seu quociente, 0,4, converteu-o em percentagem, 40%.

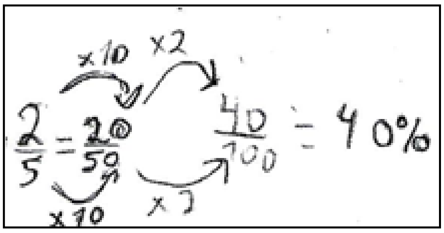


Figura 5.6.28. – Resposta evidenciando a equivalência de frações/razões para determinação do valor da percentagem, por Carlos.

Carlos, tal como o seu par, determinou a percentagem usando a equivalência de frações para alcançar o valor em 100 e, deste modo, notou que a razão encontrada determinava 40 em 100, convertendo-a assim em 40% (Figura 5.6.28.). Houve evidência do estabelecimento de relações multiplicativas, de natureza escalar, dentro das medidas de grandeza.

Sílvia e o seu par recorreram à representação pictórica, notando a divisão do todo em 5 partes e correlacionando que cada parte, em percentagem, correspondia a 20%. A aluna apresentou desta forma a percentagem correspondente à parte de concentrado $2 \times 20\% = 40\%$ e a parte de água correspondente a 3 das 5 partes de 20% cada (Figura 5.6.29.).

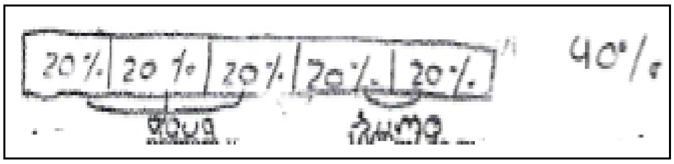


Figura 5.6.29. - Resposta baseada na representação pictórica destacando cada uma das 5 partes do todo correspondente a 20%, por Sílvia.

O item 2.4. não foi de fácil resolução. Fui percorrendo a sala e verificando necessidade de interagir e de apoiar os alunos. Perante situações de fraca compreensão fui sugerindo que poderiam desenhar. Indiquei que o desenho do jarro como o todo poderia ajudar na compreensão do todo, a quantidade de 1000 mililitros e perceber a razão 2:3. Uma vez mais, os alunos teriam que pensar em termos fracionários, relação parte-todo, atender ao todo dividido em 5 partes e avaliar o valor de uma parte,

$1000\,ml \div 5 = 200\,ml$, depreendendo o valor 200 ml como $\frac{1}{5}$ de 1000 ml. As produções de nove alunos mostraram que, possivelmente aceitaram a minha sugestão pois recorreram à representação pictórica. Esta representação provavelmente ajudou-os na perceção do valor de $\frac{1}{5}$ ou em como proceder para determinarem o valor de $\frac{1}{5}$ de 1000 ml, como são exemplo as respostas de Sara e Sílvia (Figura 5.6.30.). Sara apresentou o jarro dividido em 5 partes e pintou 3, talvez para salientar as 3 partes de água. Procedeu à descoberta do quociente dos 1000 ml por 5. Sílvia, que já no item anterior recorreu a este tipo de representação, destacou as 5 partes que compunham o todo e o valor de cada uma, implicitamente, o valor de $\frac{1}{5}$, os 200 ml. Depreende-se que a aluna quando se referiu à palavra "sumo" quereria dizer "sumo concentrado".

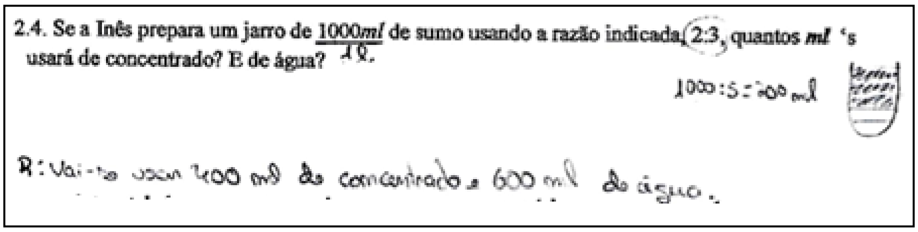


Figura 5.6.30. - Respostas evidenciando a representação pictórica como estratégia para determinação do valor de $\frac{1}{5}$ de 1000ml, por Sara e Sílvia.

Ana, cujas produções mostraram vários processos, estratégias e raciocínios, efetuou também uma representação pictórica. Mas também determinou $\frac{1}{5}$ pelo quociente de 1000 ml por 5. A aluna usou o valor do quociente, o valor unitário (200 ml), para determinar por relações multiplicativas as quantidades solicitadas. Calculou as 2 partes de concentrado, $2 \times 200ml = 400ml$ e as 3 partes de água, $3 \times 200ml = 600ml$ (Figura 5.6.31.).

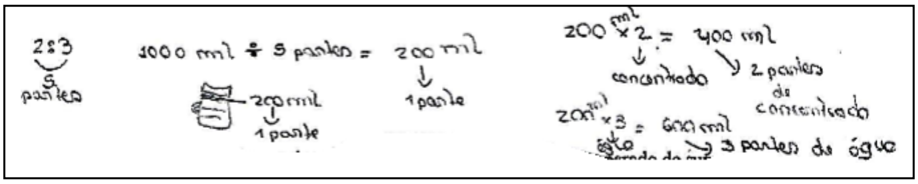


Figura 5.6.31. - Resposta evidenciando a estratégia do uso do valor unitário na determinação dos valores em falta, por Ana.

Filipe foi dos poucos alunos que apresentou a fração equivalente à fração correspondente ao sumo concentrado. Numa tentativa de alcançar uma fração/razão cujo total (denominador/consequente) seriam os 1000 ml, apenas escreveu até metade do valor $\frac{2}{5} = \frac{200}{500}$, (Figura 5.6.32.).

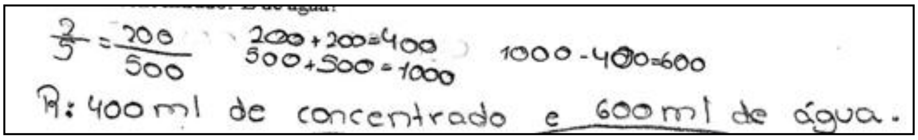


Figura 5.6.32. - Resposta evidenciando como estratégia a equivalência de frações e a composição/decomposição para determinar o valor em falta, por Filipe.

Após a formação da proporção, Filipe usou uma estratégia de composição/decomposição para alcançar o valor pretendido da quantidade de concentrado e de água. Na discussão coletiva, o aluno apresentou à turma o seu raciocínio, mas quando registou no quadro procedeu à apresentação das sucessivas razões/frações equivalentes até alcançar a quantidade de sumo concentrado em 1000ml de sumo, $\frac{400}{1000}$, como mostra a Figura 5.6.33.

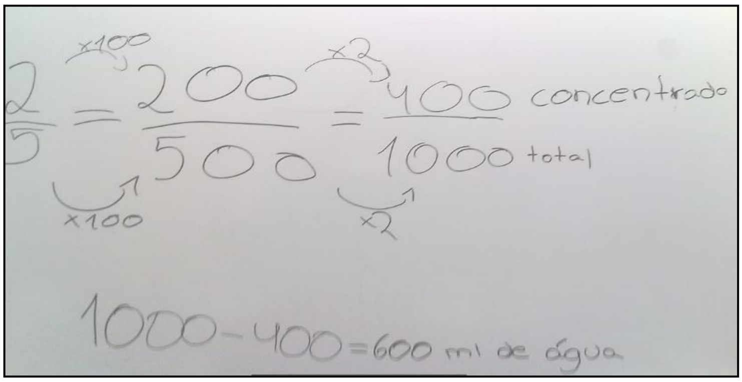


Figura 5.6.33. - Apresentação à turma das sucessivas frações equivalentes à inicial, alcançando o valor em falta, por Filipe.

Um grupo de doze alunos não apresentou resposta ou utilizou alguns dados do problema e procedimentos de cálculo sem sentido.

O item 3. (Figura 5.6.34.) suscitou bastantes dúvidas, como já esperava, pois havia antecipado dificuldades na formação da tabela com relações proporcionais, uma vez que obrigava a trabalhar com frações e numerais mistos.

3. Completa a tabela com o número de copos que são necessários para o preparado de sumo ter sempre o mesmo sabor, sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais.

N.º de copos de Concentrado		1	2		$3\ \frac{2}{3}$		7
N.º de copos de água	1		3	$4\frac{1}{2}$		9	

Figura 5.6.34.- Item 3., tarefa 6.

Os alunos iam solicitando o meu apoio para determinar alguns valores em falta, ou na representação a usar, principalmente quando eu ia destacado que não poderiam usar valores em dízimas infinitas. Apesar de na tabela constarem números inteiros, frações e numerais mistos, os alunos tendencialmente usaram números em forma de dízima, incluindo dízimas infinitas, ou a sua representação por arredondamento. Perante tal facto lancei a questão à turma:

> **Professora:** "Meninos! Estou a verificar que no vosso trabalho, muitos de vós estais a usar dízimas infinitas…
> Vejamos, como medem ou colocam num copo 0,6(6) de concentrado de sumo se é uma quantidade representada por número infinito?

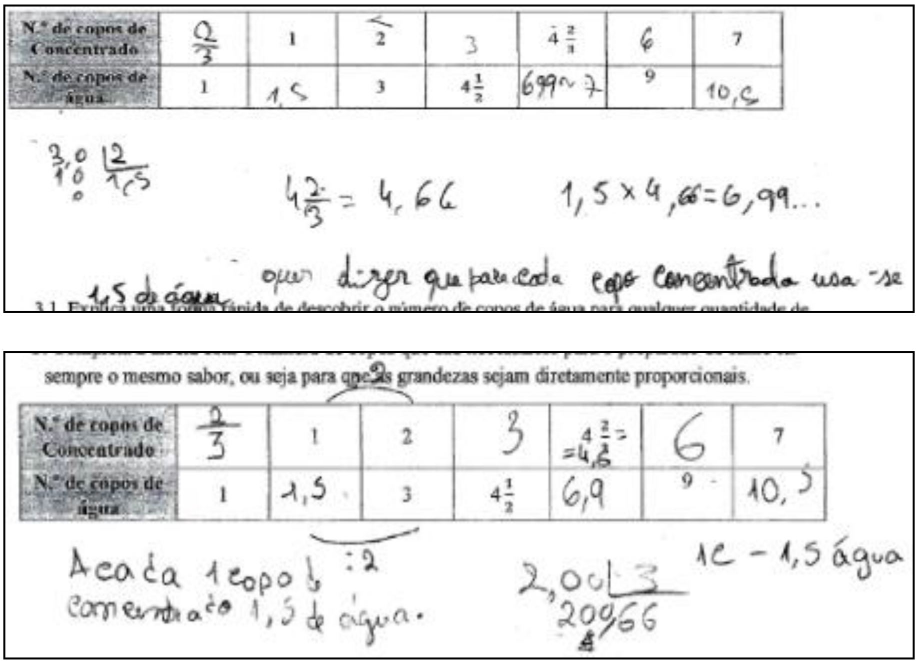
Este item revelou-se de difícil resolução. Seria necessário compreender o valor unitário para cada unidade de medida, ou descobrir a constante de proporcionalidade entre cada medida de grandeza. Requeria-se a perceção de que 1 unidade de sumo concentrado correspondia proporcionalmente a 1,5 ou1 $\frac{1}{2}$ medidas de água, sendo o seu inverso, $\frac{2}{3}$, a quantidade de sumo concentrado para cada medida de água. Verificou-se que esta relação de $\frac{2}{3}$ foi de difícil compreensão para os alunos. Apenas seis alunos completaram a tabela de forma totalmente correta, como é exemplo a resposta de Filipe (Figura5.6.35.).

3. Completa a tabela com o número de copos que são necessários para o preparado de sumo ter sempre o mesmo sabor, ou seja para que as grandezas sejam diretamente proporcionais.

N.º de copos de Concentrado	$\frac{2}{3}$	1	2	$3\frac{1}{2}$	$4\ \frac{2}{3}$	6	7
N.º de copos de água	1	1,5	3	$4\frac{1}{2}$	7	9	$10\frac{1}{2}$

Figura 5.6.35. - Resposta evidenciando relações multiplicativas dentro das medidas de grandeza, por Filipe.

Algumas respostas, como de Tomás e Maria José, mostraram pequenas imprecisões, uma vez que usaram o valor da dízima infinita nos cálculos ou procederam a arredondamentos (Figura 5.6.36.). Tomás alcançou de forma correta os valor em falta destacando-se que determinou o valor unitário, 1,5 copos de água por cada copo de concentrado. Em determinadas situações usou o valor da dízima infinita procedendo ao arredondamento de resultados, o que lhe permitiu alcançar os valores corretos. O aluno não mostrou algumas das relações que estabeleceu, possivelmente realizou-as por cálculo mental. Maria José usou possivelmente a mesma estratégia e cometeu pequenas imprecisões por uso do valor de dízima infinita, simultaneamente, também usou relações multiplicativas entre as razões.



N.º de copos de Concentrado	2/3	1	2	3	4 2/3	6	7
N.º de copos de água	1	1,5	3	4 1/2	6,99~7	9	10,5

4 2/3 = 4,66 1,5 × 4,66 = 6,99...

1,5 de água quer dizer que para cada copo concentrado usa-se

sempre o mesmo sabor, ou seja para que as grandezas sejam diretamente proporcionais.

N.º de copos de Concentrado	2/3	1	2	3	4 2/3 = 4,6	6	7
N.º de copos de água	1	1,5	3	4 1/2	6,9	9	10,5

A cada 1 copo de concentrado 1,5 de água.

1C – 1,5 água

Figura 5.6.36. - Respostas evidenciando o uso do valor unitário na determinação do valor em falta, por Tomás e Maria José.

Os alunos revelaram acentuadas dificuldades na descoberta do valor unitário, da constante de proporcionalidade e no uso do seu valor para completarem a tabela com os valores em falta. Cerca de metade da turma ou não realizou trabalho ou fê-lo de forma pouco correta, apenas completando alguns valores em falta, nomeadamente os valores de mais fácil determinação por relações multiplicativas de dobros ou metades ou de triplos, como são exemplo os trabalhos de Emídio, Tomé e Sara (Figura 5.6.37.).

Estes exemplos de respostas representaram os erros mais comuns presentes nas respostas apresentadas pela turma em geral.

N.º de copos de Concentrado	0,6	1	2	3	$4\frac{2}{3}$	6	7
N.º de copos de água	1	1,5	3	$4\frac{1}{2}$		9	10,5

somar mais 1,5

N.º de copos de Concentrado	0,75	1	2	3	$4\frac{2}{3}$	6	7
N.º de copos de água	1	1,5	3	$4\frac{1}{2}$		9	10,5

$\frac{2}{3} = 0,66$

N.º de copos de Concentrado	0,5	1	2	4,5	$4\frac{2}{3}$	6	7
N.º de copos de água	1	2	3	$4\frac{1}{2}$		9	

Figura 5.6.37. - Respostas evidenciando os erros mais comuns na descoberta dos valores em falta, por Emídio, Tomé e Sara.

A relação do número de copos de concentrado usado para um copo de água foi de difícil obtenção para os alunos. A quantidade mais vezes indicada foi a de metade (0,5) e alguns alunos apresentaram também a dízima infinita, 0,6(6) resultante do valor da razão 2:3, ou o seu valor arredondado às décimas, 0,6, ou o valor de 0,75, como se pode observar nos exemplos da Figura 5.6.35. Também se observa nas respostas da Figura 5.6.35. que a célula que mais vezes surgiu em branco é respeitante ao número de copos de água para $4\frac{2}{3}$ copos de sumo concentrado, facto verificado em grande número de respostas. A descoberta deste valor em falta não seria de fácil resolução, sendo propícia ao uso da estratégia de composição/decomposição, uma estratégia pré-proporcional. Os alunos poderiam depreender que $4 + \frac{2}{3}$ copos de sumo concentrado corresponderiam a $2 + 2 + \frac{2}{3}$, relacionando proporcionalmente com a soma de 3 + 3 + 1 copos de água, ou seja, 7 copos de água. Esta estratégia que noutras vezes foi observada nas produções dos alunos, nesta situação não foi usada.

Durante a discussão coletiva os alunos foram recorrendo à apresentação de fatores dentro de cada variável, estabelecendo relações multiplicativas (nem sempre evidentes), por forma a alcançar o valor em falta, como mostra a Figura 5.6.38., a tabela construída no quadro. Este registo resultou das intervenções de vários alunos. Na discussão coletiva anterior, já haviam concluído que para cada copo de sumo de concentrado se colocava um 1,5 ou $1\frac{1}{2}$ copos de água, poderiam ter usado esse valor como fator multiplicativo (× 1,5 ou ÷ 1,5) entre as variáveis, facilitando-lhes a descoberta do valor em falta, mas nenhum aluno usou essa estratégia.

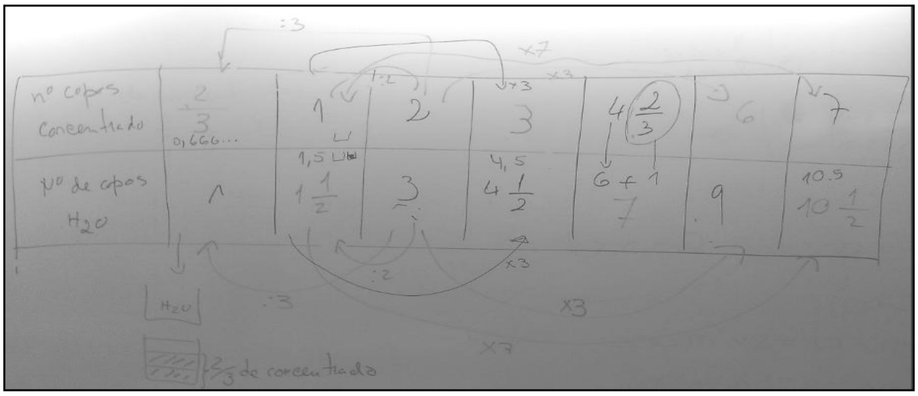


Figura 5.6.38. - Tabela construída no quadro com as estratégias apresentadas pelos alunos durante a discussão coletiva.

O item 4. apresentava um problema pseudoproporcional (Figura 5.6.39.). De um modo geral, os alunos alcançaram a resposta correta, se 1 jarro levava 1 hora a refrescar, 3 jarros, em simultâneo, levariam o mesmo tempo, como é exemplo a resposta de Alice (Figura 5.6.40.). A aluna presentou um raciocínio correto à semelhança de todos os alunos da turma que responderam a este problema. Não se verificou nenhuma reposta incorreta neste item. Mas cinco alunos não apresentaram qualquer resposta.

4. O Rui costuma preparar o sumo num jarro e coloca-o no frigorífico cerca de **uma hora** para refrescar e ficar na temperatura ideal!
Nos dias de festa costuma preparar 3 jarros com sumo. Por quanto tempo terá de deixar os 3 jarros no frigorífico para ficarem frescos e à temperatura ideal?

Figura 5.6.39. - Item 4., tarefa 6.

Uma hora, porque se vão os 3 ao mesmo tempo demoram o tempo de 1 só jarro.

Figura 5.6.40. - Resposta evidenciando o correto raciocínio no problema pseudoproporcional, de Alice.

6.9. Tarefa 7: Delícia de chocolate

A tarefa (Anexo 13) foi resolvida individualmente num tempo letivo de 50 minutos, sendo corrigida em discussão coletiva numa aula posterior. O trabalho realizado por 28 alunos destinava-se a aferir as aprendizagens adquiridas e a progressão de cada um. Simultaneamente permitiria a análise de quais as suas dificuldades e as estratégias adotadas. Os problemas de proporcionalidade direta envolveram principalmente problemas de valor omisso, determinação e compreensão do significado da constante de proporcionalidade e cálculo de percentagem.

Numa aula seguinte procedeu-se à correção da tarefa e à apresentação e discussão das estratégias de resolução e dos erros cometidos. A apresentação de uma receita para 6 pessoas e respetivas quantidades de cada ingrediente, constituía o tema da tarefa. Os itens 1.1.1. e 1.1.2. requeriam a descoberta do valor em falta, envolvendo o estabelecimento de metade de uma quantidade de dois ingredientes. Num item a quantidade era representada por um número natural, no segundo item a quantidade era representada por um número racional (Figura 5.7.1.).

Delícia de chocolate! 1. Para o lanche dos amigos, a acompanhar o sumo, a mãe do Rui preparou um bolo de chocolate de acordo com a receita apresentada! 1.1.1. Que quantidade de farinha terá a mãe do Rui que usar se pretender fazer o bolo apenas para os 3 amigos? 1.1.2.E quantas colheres de cacau?	Bolo de chocolate Para 6 pessoas • 6 Ovos • 240g de açúcar • 1 Colher de chá de fermento • 360 g de farinha • 3 dl de leite • 3 ½ Colheres de sopa de cacau em pó

Figura 5.7.1. - Item 1.1.1. e 1.1.2., tarefa 7.

Pela análise do trabalho realizado, verificou-se que os alunos estabeleceram relações de proporcionalidade direta com alguma facilidade desde que envolvessem quantidades representadas por números inteiros, como é exemplo a resposta de Ana (Figura 5.7.2.), que obteve os valores em falta com uso de operador escalar, dentro das variáveis, à semelhança de vários outros alunos.

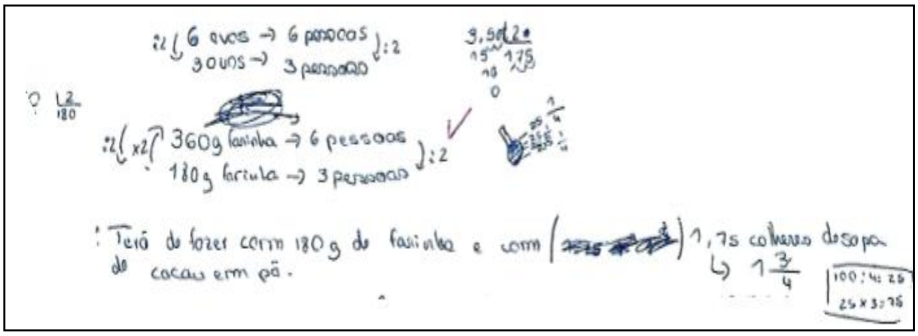


Figura 5.7.2. - Resposta evidenciando o uso de estratégia escalar na descoberta dos valores em falta, por Ana, às questões 1.1.1. e 1.1.2.

Atendendo às categorias de análise (Capítulo V, pág. 75), que contemplam as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos, os quadros seguintes, quadro 10 e 11, apresentam as estratégias usadas nos problemas de valor omisso.

No entanto, foi notória uma maior dificuldade na descoberta do valor em falta no item que apresentava relações que envolviam números decimais, o item 1.1.2., registaram-se incorreções caracterizadas por erros de cálculo e dificuldades na conversão entre diferentes representações de um número racional.

Quadro 10 – Estratégias usadas no problema de valor omisso, envolvendo números naturais (Item 1.1.1.).

Estratégias		N.º alunos	%
Não proporcional	. Aditiva	0	0%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	1	3,5%
Proporcional	. Escalar . Funcional	21	75%
Não descriminada	. Apresenta cálculos sem sentido	6	21,5%
Não Responde		0	0%

Quadro 11 – Estratégias usadas no problema de valor omisso, envolvendo números racionais (Item 1.1.2.).

Estratégias		N.º alunos	%
Não proporcional	. Aditiva	0	0%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	0	0%
Proporcional	. Escalar . Funcional	16	57%
Não descriminada	. Apresenta cálculos sem sentido	4	14,5%
Não Responde		8	28,5%

Durante a discussão coletiva, discutiram-se os erros cometidos e propostas de resolução. Vários alunos evidenciaram algumas dificuldades em trabalhar com números racionais, nomeadamente em estabelecer que metade de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$. Também tiveram dificuldade em relacionar que $\frac{1}{2}$ corresponde à dizima 0,5 e que metade de 0,5 são 0,25, também representado por $\frac{1}{4}$. Notou-se alguma confusão no reconhecimento da equivalência entre diferentes representações.

De um modo geral, os alunos efetuaram o quociente de 3,5 por 2, procedimento mais comum. Verificou-se que converteram $3\frac{1}{2}$ em dízima, 3,5, como é exemplo a resposta de Tomé (Figura 5.7.3.). No entanto os alunos não conseguiram, facilmente, representar a metade de 3,5, ou seja 1,75, na forma de numeral misto $1\frac{3}{4}$.

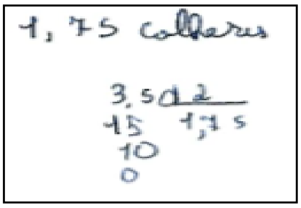


Figura 5.7.3. - Resposta evidenciando o cálculo de metade usando o número em forma de dízima, por Tomé.

A discussão da resolução deste item foi demorada, mas constituiu um importante momento para relembrar conceitos e estabelecer conexões entre números racionais, a fração e a sua representação em dízima ou em numeral misto (quando fração imprópria). Desafiei os alunos, ainda durante a discussão coletiva, que pensassem como determinar metade de 3,5 trabalhando apenas com a sua representação em número misto, $3\frac{1}{2}$. Perante as dificuldades que se foram evidenciando, solicitei a intervenção dos alunos. Alguns, como Tomás, Tomé e Filipe foram sugerindo o uso da estratégia de composição/decomposição. A sua explicação possivelmente contribuiu para que os colegas pudessem compreender as relações a estabelecer. Tomé explicou que poder-se-ia transformar de 1,75 no numeral misto $1\frac{3}{4}$. Decompondo $3\frac{1}{2}$ em $3 + \frac{1}{2}$, e considerar os valores das suas metades. Determinar-se-ia, então, a soma de, $1\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$. Interrompi, propondo que os alunos efetuassem essa adição. Notei apreensão por parte de alguns alunos que revelaram alguma dificuldade em representar 1,75 como $1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. A dificuldade maior destacou-se na adição de números racionais mistos. Os alunos mostraram pouca habilidade em adicionar $1\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$. Duas alunas pediram para apresentar outro processo. Sugeriram a conversão do numeral misto em fração imprópria, $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. As alunas, simultaneamente, promoveram a oportunidade para relembrar conceitos inerentes ao trabalho com números racionais. Relembraram, perante a turma, a divisão de números racionais com a realização do produto do dividendo pelo inverso do divisor $\frac{7}{2} \div 2 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$, convertendo os $\frac{7}{4}$ no numeral misto $1\frac{3}{4}$ ou na dízima 1,75. As dificuldades apresentadas nos conhecimentos sobre números racionais tiveram consequências na resolução do problema. A discussão coletiva foi bastante demorada, mas muito proveitosa, uma vez que ajudou os alunos a estabelecer relações entre as diferentes representações: frações, numerais mistos e dízimas, bem como recordar as operações com números racionais não inteiros (números mistos e fracionários).

No item 1.2., surgia outro problema dentro do mesmo contexto, também para descoberta do valor em falta, envolvendo o trabalho com números naturais (Figura 5.7.4.).

1.2. A mãe da Catarina também costuma fazer esta receita. No entanto costuma gastar 12 dl de leite, quando faz este bolo. O seu bolo dá para quantas pessoas?

Figura 5.7.4. - Item 1.2., tarefa 7.

O quadro 12 apresenta os resultados referentes às estratégias de resolução usadas pelos alunos. O item foi resolvido com facilidade, com uma percentagem considerável de alunos a recorrer à estratégia pré-proporcional de composição/ /decomposição. Mas, de um modo geral, os alunos usaram estratégias proporcionais e, pela análise dos procedimentos, destacou-se a estratégia escalar com relações multiplicativas dentro das variáveis. Recorreram ao fator multiplicativo $\times 4$, na formação da proporção $\frac{3}{6} = \frac{12}{x}$.

No item 2. (Figura 5.7.5.), o preenchimento da tabela envolvia a descoberta de várias quantidades dos diversos ingredientes estabelecendo relações diretamente proporcionais. Os alunos usaram, de um modo geral, estratégias proporcionais com relações multiplicativas “dentro” e “entre” as variáveis. As relações multiplicativas “dentro” de cada variável foram as mais usadas, com recurso a operadores escalares, $\times 2$, $\times 3$, $\times 6$ ou os seus inversos.

Quadro 12 – Estratégias usadas no problema de valor omisso, envolvendo números naturais, (Item 1.2.).

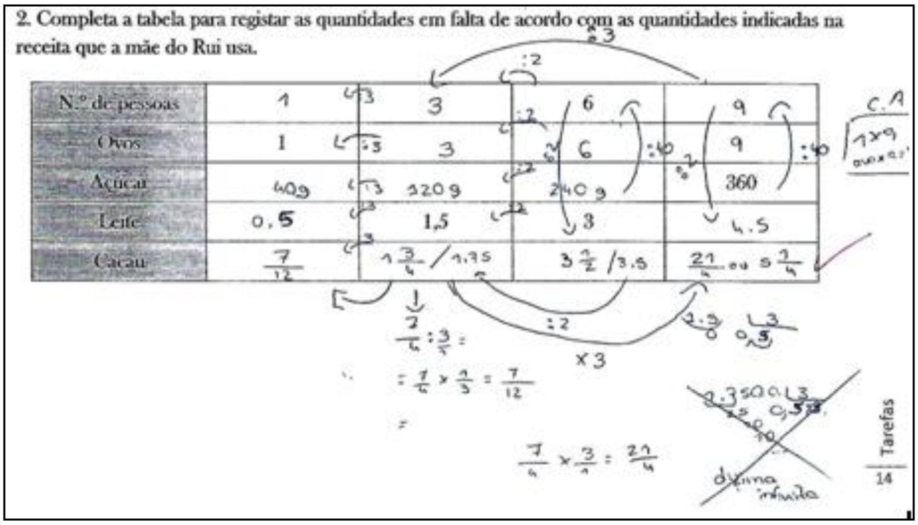
Estratégias		N.º alunos	%
Não proporcional	. Aditiva	0	0%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	6	21,5%
Proporcional	. Escalar . Funcional	17	61%
Não descriminada	. Apresenta cálculos sem sentido	5	17,5%

2. Completa a tabela para registar as quantidades em falta de acordo com as quantidades indicadas na receita que a mãe do Rui usa.

N.º de pessoas			6	
Ovos	1			
Açúcar				360
Leite		1,5	3	
Cacau				

Figura 5.7.5. - Item 2., tarefa 7.

Na coluna (última) as quantidades aumentavam proporcionalmente, 1,5 vezes, em relação às da coluna da esquerda. Mas os alunos não recorreram ao fator multiplicativo 1,5, dentro das variáveis. Embora em muitos trabalhos não se registassem evidências da estratégia usada, para o preenchimento da última coluna verificou-se o recurso à estratégia escalar ou à estratégia funcional atendendo aos dados da 2.ª coluna. Os alunos estabeleceram uma relação dentro das variáveis usando o operador escalar ×3, como é exemplo a resposta de Ana (Figura 5.7.6.). A aluna concretizou este item, usando estratégias proporcionais, quer com relações multiplicativas entre as variáveis – estratégia funcional – quer dentro das variáveis – estratégia escalar. A aluna revelou flexibilidade em trabalhar e relacionar frações impróprias, números mistos e dízimas em relações proporcionais.

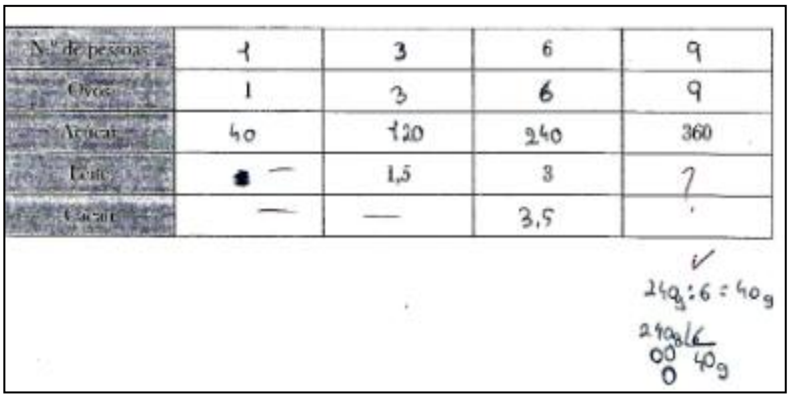


2. Completa a tabela para registar as quantidades em falta de acordo com as quantidades indicadas na receita que a mãe do Rui usa.

N.º de pessoas	1	3	6	9
Ovos	1	3	6	9
Açúcar	40g	120g	240 g	360
Leite	0,5	1,5	3	4,5
Cacau	7/12	1 3/4 / 1,75	3 1/2 / 3,5	21/4 ou 5 1/4

Figura 5.7.6. - Resposta evidenciando o uso de estratégias proporcionais com relações multiplicativas entre e dentro das variáveis, por Ana.

As maiores dificuldades surgiram nos procedimentos que envolviam quantidades apresentadas em numeral misto ou requeriam a representação da quantidade em fração uma vez que eram quantidades que correspondiam a dízimas infinitas. Cinco alunos só estabeleceram relações entre quantidades quando representadas por números inteiros. Não realizaram trabalho com números decimais, como é exemplo a resposta de Palmira, (Figura 5.7.7.). Não mostra os procedimentos que efetuou, mas percebe-se que a aluna usou a estratégia funcional apenas na determinação da quantidade de açúcar. É possível que tenha efetuado os restantes cálculos mentalmente, uma vez que não apresentavam grande complexidade. Os valores em falta que apresentavam maior exigência reportavam-se aos que envolviam números decimais e nessa situação não houve qualquer indício de tentativa na sua descoberta.



N.º de pessoas	1	3	6	9
Ovos	1	3	6	9
Açúcar	40	120	240	360
Leite	—	1,5	3	?
Cacau	—	—	3,5	

240g : 6 = 40g

Figura 5.7.7. - Resposta evidenciando a concretização da determinação do valor em falta apenas nas quantidades representadas por números naturais, por Palmira.

Dos vinte e quatro alunos que completaram a tabela na sua totalidade, a maioria das respostas, nomeadamente de treze alunos, apresentaram algumas incorreções na determinação das quantidades representadas por números racionais não inteiros, como é o caso do trabalho de Angelina (Figura 5.7.8.). A aluna usou estratégias proporcionais eficazes. No entanto não concretizou com sucesso a descoberta dos valores em falta que envolviam números decimais. Os erros cometidos decorreram de incorreção no cálculo quociente de 3,5 ou $3\frac{1}{2}$ (colheres de cacau) por 6, em que a aluna determinou o quociente de 6 por 3,5. A troca dos termos da divisão provocou erros nas restantes situações que compunham a última linha da tabela (quantidade de cacau). A aluna revelou dificuldades no procedimento, para descoberta do valor unitário, efetuando o inverso do que seria correto ($3\frac{1}{2} \div 6$).

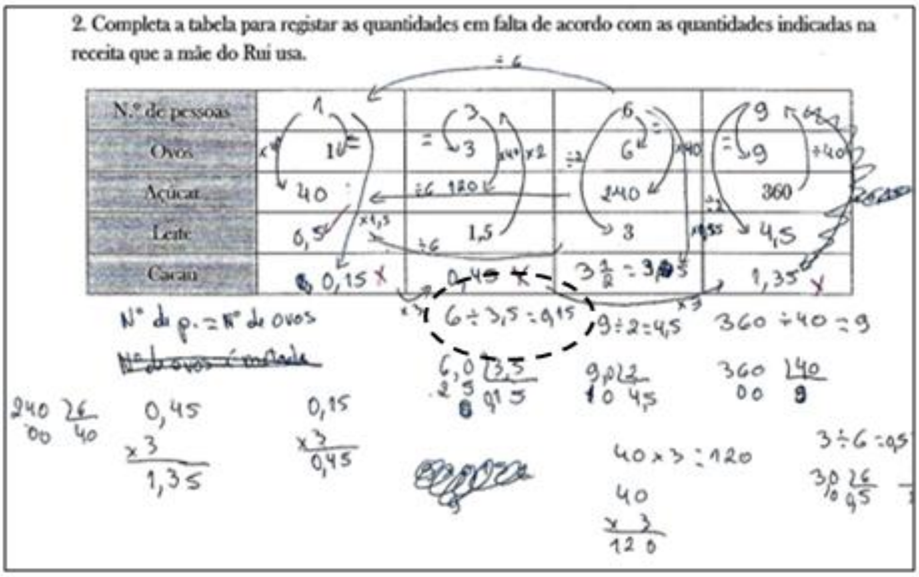


Figura 5.7.8. - Resposta evidenciando, dificuldades no trabalho com números decimais, por Angelina.

Mariana também cometeu falhas nas suas respostas, que envolviam quantidades representadas por números racionais não inteiros. Numa das situações usou uma relação aditiva, não proporcional. À quantidade de leite adicionou 0,5 para obter a quantidade de cacau. Outro erro reportou-se ao facto de não ter determinado o quociente de 1,75 por 3, possivelmente porque o dividendo era um número decimal (Figura 5.7.9.).

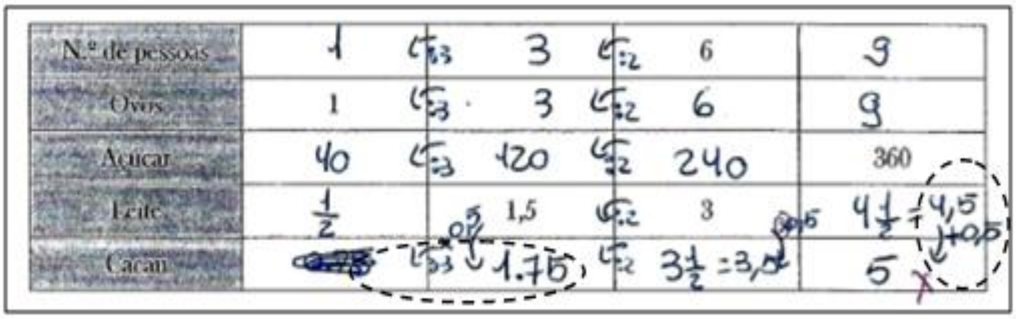


Figura 5.7.9. - Resposta evidenciando, dificuldades no trabalho com números decimais e uso da estratégia aditiva (não proporcional), por Mariana.

O quadro 13 apresenta o panorama geral das estratégias usadas na descoberta dos valores em falta para completar a tabela, envolvendo relações proporcionais entre as diferentes quantidades dos ingredientes.

Quadro 13 – Estratégias usadas no preenchimento da tabela, envolvendo relações diretamente proporcionais (Item 2.).

	Estratégias	**N.º alunos**	**%**
Não proporcional	. Aditiva	0	0%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	1	3,5%
Proporcional	. Escalar . Funcional	20	71%
	. Escalar e Funcional*	3	11%
Não descriminada	. Apresenta cálculos sem sentido	4	14,5%
*Uso das duas estratégias em simultâneo			

O item 3., requeria a interpretação do significado da constante de proporcionalidade existente entre a quantidade de um dos ingredientes (açúcar) para um determinado número de pessoas. Pretendia que os alunos alcançassem uma generalização que poderia ser explicada em linguagem natural ou em expressão algébrica do tipo $y = kx$(Figura 5.7.10.).

3. Explica como descobres rapidamente a quantidade de açúcar em gramas, a usar na confeção do bolo, para qualquer número de pessoas. Explica por palavras tuas ou por uma expressão numérica.

Figura 5.7.10. - Item 3., tarefa 7.

Cerca de metade da turma determinou a constante de proporcionalidade e compreendeu o seu significado. Os alunos aparentemente perceberam a função do seu valor na descoberta da quantidade de açúcar para um qualquer número de pessoas (40 gramas por cada pessoa). Alguns alunos apresentaram em linguagem natural que a constante de proporcionalidade indicava quantidade de açúcar por pessoa e que bastaria efetuar o produto desse valor pelo número de pessoas. Outros alunos apresentaram a expressão algébrica $n \times 40$, em que n seria o número de pessoas. Implicitamente a constante de proporcionalidade, 40, representava k, o valor constante na determinação do produto $y = kn$. No entanto quase metade da turma, ou não respondeu ou apresentou uma resposta sem sentido. O quadro 14 apresenta o desempenho da turma na resolução do item 3.

Quadro 14 - Resultados da turma na identificação e compreensão do significado da constante de proporcionalidade, (Item 3.).

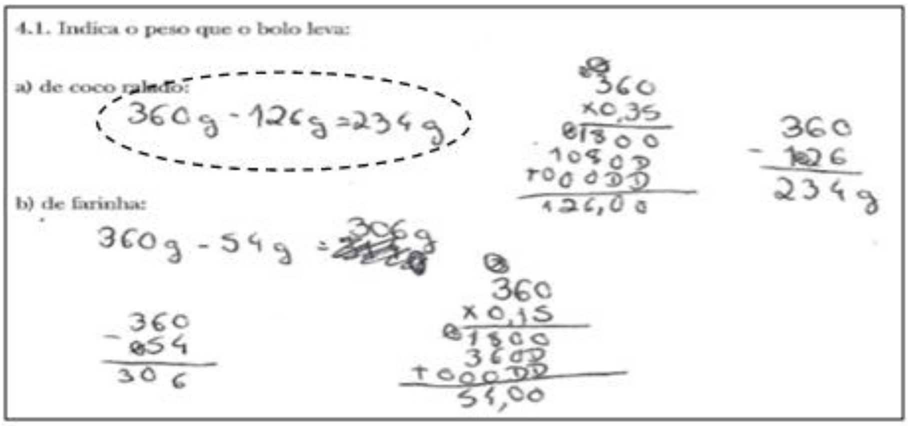
	Estratégias	**N.º alunos**	**%**
Pré-proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade mas não explica o seu significado.	4	14,5%
Proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade e interpreta o seu significado.	13	46%
Não responde		11	39,5%

O item 4., envolvia o cálculo da percentagem de uma determinada quantidade. Os alunos teriam de determinar o peso, decorrente da percentagem de uma quantidade, em gramas, e adaptar a receita em relação a dois ingredientes (Figura 5.7.11.).

4. Por vezes a mãe da Catarina altera a receita. Retira o cacau e coloca coco ralado.
A mãe da Catarina coloca 35% do peso da farinha em coco ralado e coloca menos 15% do peso da farinha.
4.1. Indica o peso que o bolo leva:
a) de coco ralado:
b) de farinha:

Figura 5.7.11. - Item 4., tarefa 7.

Durante a realização da tarefa, percebi que os alunos não tiveram tempo de resolver este item ou não se empenharam na sua resolução. Apenas dez alunos o resolveram. O procedimento adotado assentou na determinação do produto do valor da percentagem convertida em dízima pela quantidade do respetivo ingrediente, como são exemplos as respostas de Leonor e Filipe (Figura 5.7.12.). Leonor cometeu um erro e efetuou uma etapa que não era necessária, retirando a quantidade referente aos 35% de coco, 126 gramas, ao total de farinha. Revelou alguma incompreensão do problema.



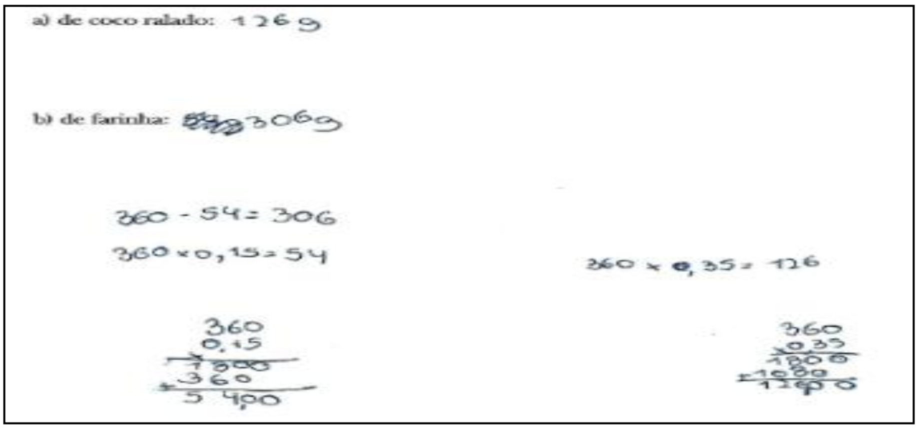


Figura 5.7.12. - Respostas evidenciando o cálculo das percentagens de uma quantidade, usando como estratégia o produto da percentagem em dízima pela quantidade, por Leonor e Filipe.

6.10. Tarefa 8: Viagem

A tarefa (Anexo 14) foi concebida para iniciar o trabalho com escalas e a aprendizagem deste conceito, de uma forma informal. Partiu-se de conhecimentos prévios que os alunos já deveriam deter, uma vez que este conceito já havia sido abordado no 5.º ano na Disciplina de História e Geografia de Portugal.

A tarefa foi planificada para uma aula de 50 minutos, no entanto esse tempo não foi suficiente, sendo necessário duas aulas para a sua realização e discussão. O seu objetivo principal era trabalhar problemas que envolvessem trabalho com escalas interligado com os conceitos de razão e proporção. Pretendia promover a compreensão da relação entre os termos de uma razão representativa de uma escala, destacando a noção de escala na representação em razão de antecedente um.

Iniciei a aula com um breve diálogo sobre escalas para perceber que conhecimentos os alunos detinham sobre o conceito. Pela apresentação da tarefa, com a leitura do enunciando, surgiu a referência a "itinerário". Questionei os alunos se compreendiam a que se referia. Tomás referiu:

Tomás: É o percurso.
Professora: Sim. E o itinerário, o desenho do percurso, apresenta uma escala como podem observar.
O problema fala-nos em escala. Já ouviram falar de escalas?
Tomás: Já! Agora em que disciplina, não me lembro. Foi em Matemática.
Não, não, em História, foi em História, estava nos mapas!
Professora: E o que sabes acerca de escalas?
Tomás: Que por exemplo, 1cm lá no mapa, eram 3 km na realidade.
Professora: Aqui na escala, a sede está representada em que ponto?
A turma: No zero.
Professora: E para chegar ao local do torneio, o motorista tem que andar quanto na realidade?
A turma: 15 km.
Professora: Mas reparem no mapa, o que aparece?
A turma: 18 centímetros.
(…)

Com algumas perguntas de focalização induzi os alunos a estabelecerem a relação que 18 cm do desenho correspondiam a 15 km na realidade.

Professora: Que relações podem fazer, nesta situação?
Filipe: Que a cada 18 cm no mapa andamos 15 km na realidade.
Professora: Então temos uma comparação que nos é apresentada na escala! Concluindo. Que se está aqui a comparar?

Mariana: A distância no mapa com a distância na realidade.
Professora: Isso mesmo, muito bem!

Partindo da intervenção dos alunos, registou-se no quadro a síntese a que se chegou com o diálogo, como mostra a Figura 5.8.1.

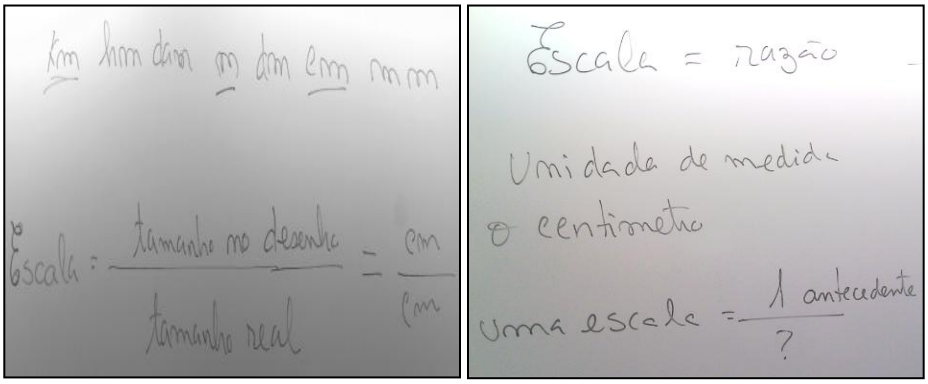
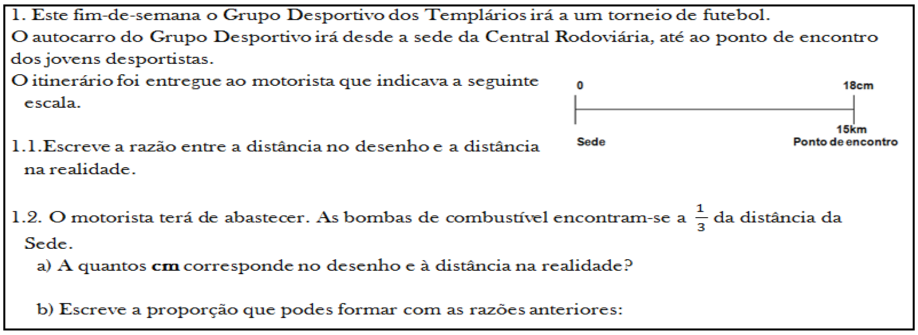


Figura 5.8.1. - Registo no quadro da síntese que se alcançou com o diálogo decorrente da apresentação da tarefa 8.

Destaquei que seria sempre conveniente trabalhar em centímetros e que os alunos deveriam fazer as conversões para essa unidade de medida. Alertei para que não trabalhassem, em simultâneo, com unidades de medidas diferentes. Após apresentação da tarefa, como de hábito, circulei pelas mesas e apoiei o trabalho dos alunos.

O primeiro item não suscitou grandes dúvidas, uma vez que já tinha sido alvo de interpretação. No entanto, ainda surgiram situações em que os alunos apresentavam a distância real no antecedente e o tamanho no desenho no consequente. Perante tal cenário, fui intervindo e relembrando a forma de explicar e apresentar a razão representativa de uma escala. Chamei, também, a atenção aos alunos para que atendessem ao conceito de escala que já havia sido apresentado na discussão inicial e aos registos que se encontravam no quadro (Figura 5.8.1.).

Seguiu-se o item 1.2. (Figura 5.8.2.) com a descoberta de um terço do caminho, requerendo o cálculo de $\frac{1}{3}$ do comprimento no desenho e da distância real, para formar e registar uma razão equivalente à inicial $\frac{18}{15}$ ou $\frac{18}{1500000}$. De um modo geral os alunos relacionaram $\frac{1}{3}$ da distância, com o cálculo da terça parte das duas distâncias, no mapa e na realidade.



1. Este fim-de-semana o Grupo Desportivo dos Templários irá a um torneio de futebol.
O autocarro do Grupo Desportivo irá desde a sede da Central Rodoviária, até ao ponto de encontro dos jovens desportistas.
O itinerário foi entregue ao motorista que indicava a seguinte escala.

1.1.Escreve a razão entre a distância no desenho e a distância na realidade.

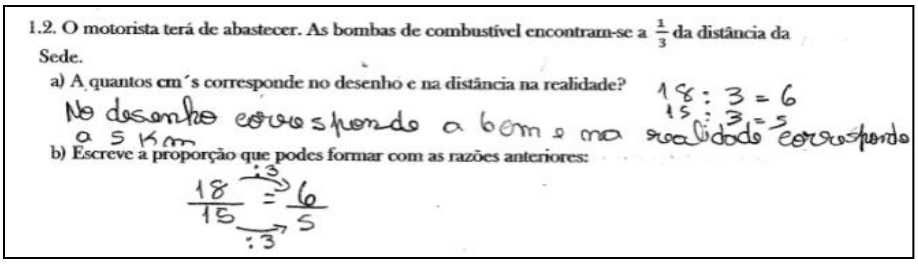
1.2. O motorista terá de abastecer. As bombas de combustível encontram-se a $\frac{1}{3}$ da distância da Sede.

a) A quantos **cm** corresponde no desenho e à distância na realidade?

b) Escreve a proporção que podes formar com as razões anteriores:

Figura 5.8.2. - Item 1. e 1.2., tarefa 8.

Era ainda necessário a formação de uma proporção entre a razão inicial e a razão que representaria um terço da anterior ($\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$). Neste item os alunos revelaram alguma resistência em representar uma proporção, revelando que não estavam a perceber quais as razões anteriores. Denotou-se assim alguma relutância, não na determinação da relação que comparava um terço das distâncias, mas no uso da representação formal de uma proporção, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Senti necessidade que interagir com os alunos e solicitar-lhes a representação escrita da proporção. Com apoio e acompanhamento no trabalho autónomo, os alunos acabaram por realizar o item 1.2. Ainda assim, apresentaram algumas deficiências, principalmente por não converterem quilómetros em centímetros, como é exemplo a resposta de Catarina (Figura 5.8.3.). As deficiências apresentadas talvez tenham surgido por incorreta elaboração da questão que não estava formulada de forma explícita, não sendo indicado a necessidade da representação de ambas as medidas de grandeza em centímetros. Catarina apresentou o cálculo da terça parte de cada grandeza de medida, sem formalismo indicou a razão de 6:5, como resposta a alínea a). A aluna não converteu a medida real em quilómetros para centímetros. Os quocientes encontrados foram usados corretamente para a formação da proporção solicitada na alínea b), $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$.



1.2. O motorista terá de abastecer. As bombas de combustível encontram-se a $\frac{1}{3}$ da distância da Sede.

a) A quantos cm´s corresponde no desenho e na distância na realidade?

No desenho corresponde a 6cm e na realidade corresponde a 5 Km

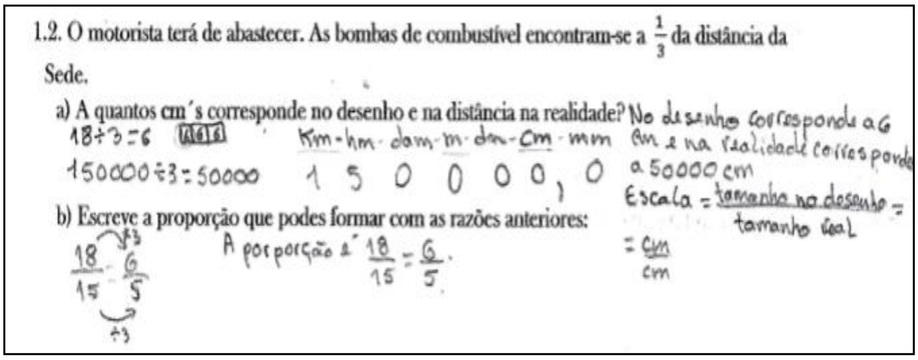
$18 : 3 = 6$
$15 : 3 = 5$

b) Escreve a proporção que podes formar com as razões anteriores:

$$\frac{18}{15} \overset{:3}{=} \frac{6}{5}$$

Figura 5.8.3. - Resposta evidenciando a determinação de $\frac{1}{3}$ do itinerário, e a formação correta da proporção, por Catarina.

Angelina, em resposta à alínea a), foi uma das três alunas que, efetuou a conversão de quilómetros em centímetros, trabalhando com a mesma unidade de medida. Mostrou que atendeu à síntese registada no quadro (Figura 5.8.4.).



1.2. O motorista terá de abastecer. As bombas de combustível encontram-se a $\frac{1}{3}$ da distância da Sede.

a) A quantos cm´s corresponde no desenho e na distância na realidade? No desenho corresponde a 6 cm e na realidade corresponde a 50000 cm

18÷3=6

150000÷3=50000

km-hm-dam-m-dm-cm-mm

1 5 0 0 0 0, 0

Escala = $\frac{\text{tamanho no desenho}}{\text{tamanho real}} = \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$

b) Escreve a proporção que podes formar com as razões anteriores:

$\frac{18}{15} \xrightarrow{\div 3} \frac{6}{5}$

A porporção é $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$.

Figura 5.8.4. - Resposta evidenciando a determinação de $\frac{1}{3}$ do itinerário, e a formação correta da proporção, por Angelina.

Na resolução da alínea b), a aluna elaborou a proporção com o tamanho real em quilómetros, não os convertendo a centímetros, ao contrário do que efetuou na alínea anterior. No entanto a proporção foi elaborada corretamente, à semelhança das proporções formadas pelos restantes alunos. Não houve evidência dos alunos terem trabalhado com todas as grandezas de medidas convertidas em centímetros. Nas relações estabelecidas, relacionaram a medida do desenho, em centímetros, para a medida real, em quilómetros.

O item seguinte, 1.3., (Figura 5.8.5.), pretendia que os alunos descobrissem a escala usada de forma intuitiva. Requeria a formação de uma proporção ($\frac{18}{1500000} = \frac{1}{?}$). A razão a formar teria antecedente 1 e por descoberta do valor em falta os alunos determinariam a escala, sendo meu objetivo que o conceito fosse enfatizado na discussão coletiva.

1.3. Escreve uma outra proporção em que o tamanho no desenho seja de **1 cm**.

Figura 5.8.5. - Item 1.3., tarefa 8.

Este item foi de difícil consecução, mais uma vez era necessário a apresentação formal de uma proporção. Os alunos teriam de usar como ponto de partida uma das razões anteriores, mas com unidade de medida em centímetros. Os alunos revelaram grandes dificuldades, muitos não desenvolviam qualquer relação, nem escreviam a proporção na forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Tive de apoiar o trabalho autónomo, pois a minha ajuda foi solicitada frequentemente.

Outra dificuldade emergiu de os alunos não efetuarem a conversão das unidades de medida para os centímetros. Como já havia sido referido na discussão inicial e apesar de ser alertado para essa necessidade, os alunos continuaram a revelar alguma resistência em fazê-lo. Apenas dez alunos formaram a proporção corretamente, como Tomás e Ana (Figura 5.8.6.). A estratégia escalar, com relação multiplicativa dentro de cada variável, foi a mais usada pelos alunos.

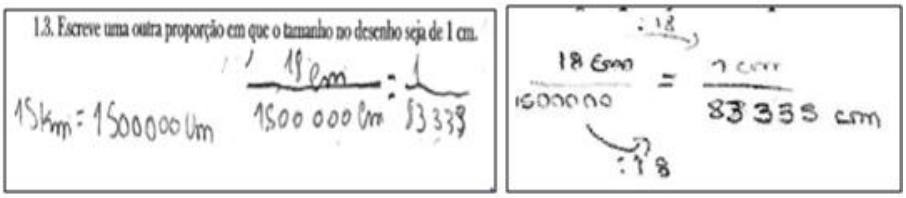


Figura 5.8.6. - Repostas evidenciando a formação de uma proporção para descoberta da escala com uso de estratégia escalar, por Tomás e Ana.

Os erros cometidos pela turma, de um modo geral, reportaram-se à determinação incorreta do quociente de 1500000 por 18 (tratava-se de uma dízima infinita) ou à não conclusão do cálculo, como são exemplos a resposta de Alice, Leonor e Guida (Figura 5.8.7.). Alguns alunos não demonstraram habilidade na apresentação do resultado com o necessário arredondamento às unidades, revelando falta de autonomia na tomada de decisão, em efetuar um arredondamento, quando não solicitado. Pelo desenrolar do trabalho, fiz uma interrupção para discussão das questões que compunham o item 1., no sentido de ajudar os alunos a efetuarem inferências entre as relações a estabelecer e a facilitar-lhes a resolução e o trabalho autónomo no item seguinte.

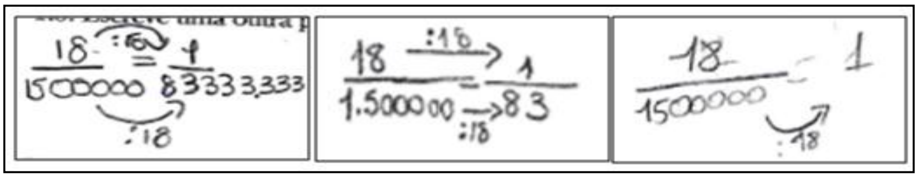


Figura 5.8.7. - Respostas incorretas, evidenciando falhas na consecução do quociente, por Alice, Leonor e Guida.

O item 2. (Figura 5.8.8.), proporcionava o trabalho com mapas, consolidando a aprendizagem sobre a relação proporcional estabelecida por uma escala. Novamente exigia a elaboração de uma razão para comparar a distância entre dois pontos no mapa e a sua distância na realidade. Constituía uma base para a formação de uma proporção que permitiria a descoberta da escala usada no mapa.

2. Atende ao mapa da Madeira que se encontra na figura. No mapa a distância da Ribeira Brava ao Funchal é de **3 cm** que na realidade corresponde a **15 km**.

2.1. Escreve a razão entre a distância no mapa e a distância real:

2.2. Escreve uma razão equivalente à anterior mas que represente a escala do mapa $\left(\frac{1}{x}\right)$:

Figura 5.8.8. - Item 2., tarefa 8.

Mais uma vez se registou alguma relutância dos alunos em trabalharem com a unidade de medida em centímetros, obrigando à frequente chamada de atenção da minha parte, no momento do trabalho autónomo. Os alunos, de um modo geral foram bem-sucedidos, mas verificou-se que alguns não converteram o tamanho real em centímetros, apesar de terem sido alertados para essa necessidade, trabalharam em quilómetros, como é exemplo o trabalho de Vitória (Figura 5.8.9.).

2.1. Escreve a razão entre a distância no mapa e a distância real:

$\frac{3}{15}$

2.2. Escreve a razão que representa a escala do mapa $\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\frac{3}{15} \overset{:3}{\underset{:3}{\longrightarrow}} \frac{1}{5}$

Figura 5.8.9. - Resposta evidenciando a incorreta apresentação da escala, por não conversão de quilómetros a centímetros, de Vitória.

Um grupo considerável de alunos – 16 no total – correspondendo a mais de metade da turma, concretizou corretamente as duas etapas do item 2. Os alunos, mesmo sem referência à formação de uma proporção, optaram por indicá-la, isto no item 2.2. evidenciando o uso de estratégia escalar, estabelecendo relação multiplicativa no sentido de covariância.

Surgiram várias respostas semelhantes às de Rute e Tomé. Destacou-se o trabalho de Rute, uma vez que nos itens anteriores, a aluna revelou bastantes dificuldades não realizando alguns deles. Provavelmente a discussão coletiva, sobre o primeiro item (1., 1.2. e 1.3.) tenha contribuído para sua aprendizagem, uma vez que realizou corretamente o item 2. (Figura 5.8.10.).

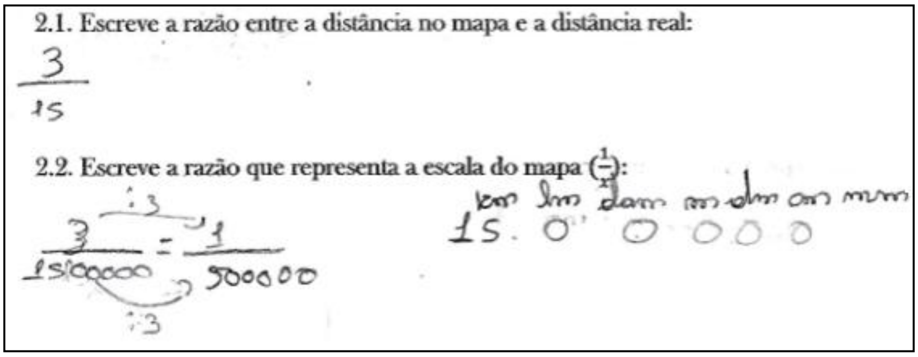


Figura 5.8.10. - Resposta evidenciando uso da estratégia escalar na formação da proporção, determinando a escala, por Rute.

Possivelmente os alunos concluíram o modo de como era possível estabelecer uma relação multiplicativa entre duas razões quando numa delas o antecedente é um, como apresenta o trabalho de Tomé, que alcançou a escala correta, usando a estratégia escalar (Figura 5.8.11.).

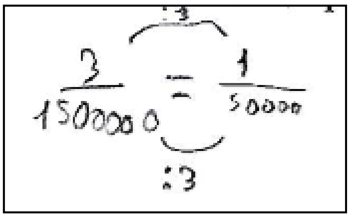


Figura 5.8.11. - Resposta evidenciando uso da estratégia escalar na formação da proporção, alcançando a escala, por Tomé.

6.11. Tarefa 9: Imagens à escala

A tarefa final (Anexo 15) desta unidade de ensino teve como finalidade trabalhar problemas que envolveram escalas. Inicialmente havia sido planeada para duas aulas, mas foram necessárias três aulas de 50 minutos. Organizei o trabalho em sala de aula de forma a serem efetuadas várias paragens no trabalho autónomo para discussões coletivas. As discussões, tal como as que ocorreram em tarefas anteriores, tiveram o intuito de contribuir para a compreensão dos conceitos e proporcionar mais segurança na realização da atividade dos alunos. A resolução dos problemas envolvia a formação de razões e proporções, estabelecendo relações multiplicativas que permitiam a descoberta do valor em falta. O valor omisso poderia corresponder ao valor da distância ou do comprimento representado no desenho (mapa ou planta) ou ao valor da distância ou do comprimento real. Outros problemas induziam à descoberta da escala.

O trabalho iniciou-se com uma breve revisão do conceito de escala e do trabalho desenvolvido nas duas aulas anteriores. No diálogo inicial, fui colocando questões e dando a palavra aos alunos para explicarem o que haviam compreendido. Enfatizou-se a relação entre os conceitos de escala e de razão, conjeturando que a descoberta da escala assentava na formação de uma razão $\frac{1}{x}$. Destacou-se a relação entre o tamanho do desenho e o tamanho da realidade nas representações a usar em problemas de escalas.

No primeiro item, 1.1., os alunos tinham de perceber se o desenho da planta havia sido efetuado à escala. A questão interligava o conceito de escala com relação proporcional. Os alunos deveriam relacionar se as razões estabelecidas entre as medidas do desenho e as medidas reais, $\frac{10}{400}$ e $\frac{7{,}5}{300}$, formavam uma proporção (Figura 5.9.1.). O item1.2. levaria à descoberta da escala usada no traçado da planta.

Imagens à escala.

1. A mãe da Inês quer colocar moveis novos na sala que tem 4 metros de comprimento por 3 metros de largura. Para perceber quais os móveis que poderão caber na sala, fez um desenho com a planta da sala para levar à loja. Observa e analisa a figura.

1.1. As medidas das dimensões usadas no desenho da planta da sala são diretamente proporcionais às medidas das dimensões reais da sala? Explica a tua resposta.

1.2. Em que escala está desenhada a planta da sala?

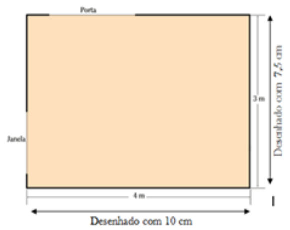


Figura 5.9.1. - Item 1.1. e 1.2., tarefa 9.

Durante a apresentação dos dois primeiros itens, surgiu uma dúvida na interpretação do enunciado, nomeadamente acerca do que era pretendido com "dimensão". No primeiro item, quando questionei os alunos se haviam percebido, estes não reagiram, mostrando uma postura apática e não se prenunciando sobre o seu entendimento do que era pretendido. Pareceu que o enunciado não foi compreendido e os alunos não efetuaram de forma espontânea a ligação entre as medidas, do comprimento e da largura, com que a sala foi desenhada (planta) e as respetivas medidas reais. Questionei que informações poderiam retirar ao analisarem a planta da sala. "*Que dimensões são apresentadas na Figura?*" Lentamente os alunos relacionaram que as medidas inscritas no desenho, em centímetros, seriam o comprimento e a largura da sala. As medidas em metros representariam a medida real e em centímetros a medida do desenho. Partindo desta intervenção, os alunos depreenderam, ser necessário comparar as medidas reais e do desenho. Deste modo perceberam que haviam de formar as duas razões que comparavam as medidas do tamanho no desenho e as do tamanho real, verificando se formavam uma proporção.

De um modo geral, os alunos apresentaram as duas razões e por várias estratégias verificaram a existência de proporcionalidade, como são exemplos as respostas de Angelina, Henrique e Mariana. Angelina, como alguns alunos, apresentou as duas razões embora com pouco rigor na sua formação. Registou no antecedente a dimensão real e no consequente a dimensão do desenho $\frac{400}{10} = \frac{300}{7,5}$. A aluna não atendeu ao conceito da formação de uma razão representativa de uma escala. Como estratégia, formou uma proporção com evidência do uso da estratégia funcional. Indicou o operador funcional, 40, que relacionava as duas variáveis (Figura 5.9.2.).

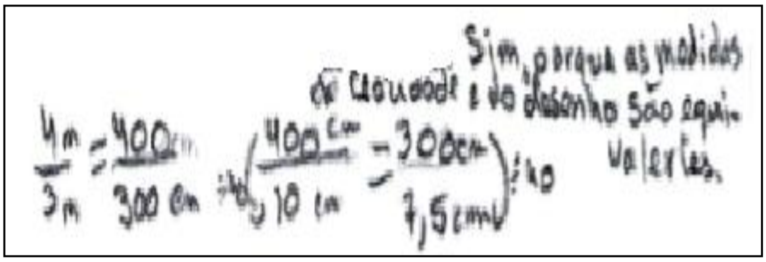


Figura 5.9.2. - Resposta evidenciando o mesmo operador funcional entre as grandezas, determinando a existência de proporcionalidade direta, por Angelina.

A aluna mostrou que as razões formavam uma proporção, justificando que "*As medidas da realidade e do desenho são equivalentes*". Implicitamente, o fator multiplicativo significava que o tamanho do desenho seria 40 vezes menor que na realidade, em ambas as dimensões (comprimento e largura), permitindo-lhe avaliar as grandezas como diretamente proporcionais. Henrique e Mariana, como a maioria dos alunos da turma, apresentaram as duas razões e determinaram o valor da constante de proporcionalidade, 40. Usaram como procedimento de cálculo a determinação do quociente entre o tamanho real e o tamanho do desenho (Figura 5.9.3.). Desse modo mostraram que as grandezas são diretamente proporcionais. No entanto, não representaram uma proporção, na forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, nem o significado da constante de proporcionalidade.

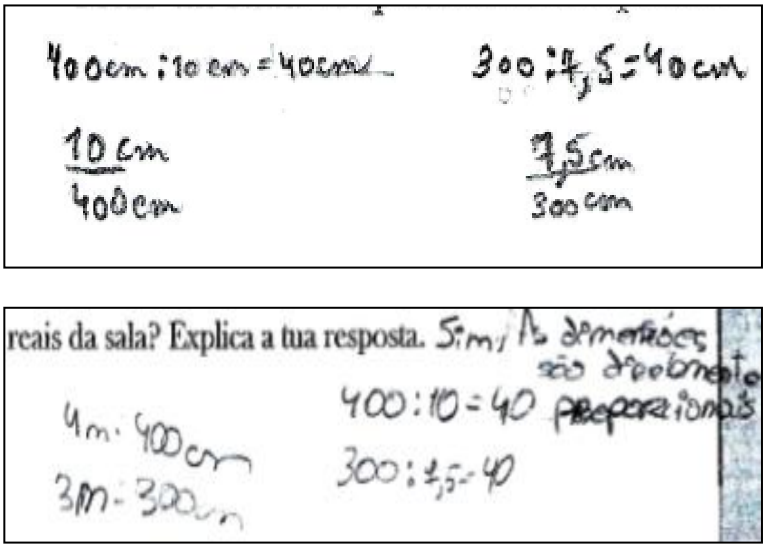


Figura 5.9.3. - Respostas evidenciando a determinação da constante de proporcionalidade sem apresentação do seu significado, por Henrique e Mariana.

Novamente surgiram algumas dificuldades na representação correta da razão ou da proporção. Surgiram, respostas que mostraram alguma confusão ou falta de rigor na representação da razão entre as medidas de grandeza, de que é exemplo a resposta de Alice (Figura 5.9.4.). A aluna apresentou no antecedente o tamanho do real e no consequente o tamanho do desenho. O quociente encontrado seria de difícil interpretação, uma vez que assim o significado da constante de proporcionalidade respeitava a que 1 cm na realidade iria corresponder a 0,025 cm no desenho. Provavelmente, a aluna não relacionou o resultado com o seu significado e apenas tentou perceber a existência de proporcionalidade.

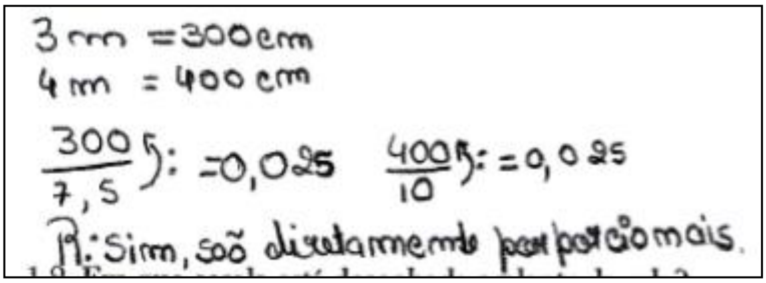


Figura 5.9.4. - Resposta evidenciando confusão na representação de uma escala determinando o valor da constante de proporcionalidade de difícil interpretação, por Alice.

Catarina foi outra aluna que, não formou uma proporção, mas apresentou as duas razões de forma correta, estabelecendo a relação do tamanho do desenho para o tamanho real. Como procedimento matemático determinou o valor de cada uma, notando que o quociente era o mesmo, constatando deste modo a existência de proporcionalidade (Figura 5.9.5.). Determinou o quociente do antecedente pelo consequente, notando que era o mesmo nas duas razões 0,025, que determinava o valor da constante de proporcionalidade. Também, nesta situação, o significado induzia que 1 cm na realidade seria desenhado por 0,025 cm na elaboração da planta da sala.

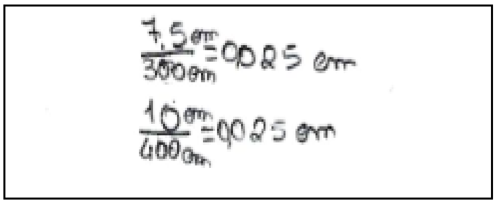


Figura 5.9.5. - Resposta baseada no quociente de cada razão como estratégia para verificar a existência de proporcionalidade direta, por Catarina.

Alguns alunos efetuaram duas razões, comparando dois valores, um de uma razão representativa das dimensões do desenho $\frac{7,5}{10}$ e um de outra razão com os valores reais $\frac{3}{4}$. Não era a relação comparativa pretendida na formação de uma proporção, pois não respeitava o conceito de razão de uma escala, com a relação entre o tamanho no desenho e o tamanho real. Mas foi uma forma válida de perceber se as razões formavam uma proporção, uma vez que o fator multiplicativo, 2,5 transformava $\frac{3}{4}$ em $\frac{7,5}{10}$ e $\frac{4}{3}$ em $\frac{10}{7,5}$. No entanto esta estratégia não permitiu uma alcançar uma relação válida entre as medidas de grandeza, como são exemplo as respostas de Sérgio e Duarte.

Sérgio aplicou, como estratégia, a propriedade fundamental das proporções, mostrando que o produto dos meios era igual ao produto dos extremos. Mas o aluno não registou uma justificação interpretativa da relação entre as duas medidas de grandeza. Apenas provou a igualdade dos produtos e assim que as razões formavam uma proporção (Figura 5.9.6.). Por esta estratégia, o aluno, possivelmente, não compreendeu a relação entre o tamanho do desenho e da realidade, nem alcançou o valor e o significado da constante de proporcionalidade.

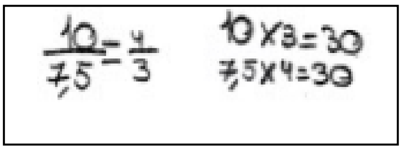


Figura 5.9.6. - Resposta evidenciando a igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos, constatando a existência de uma proporção, por Sérgio.

Duarte, talvez por raciocínio mental, percebeu a existência do fator multiplicativo que transformava cada dimensão real, em metros, no seu tamanho no desenho, em centímetros (Figura 5.9.7.). No entanto matematicamente, a relação não é correta, uma vez que 3 metros (dimensão real), duas vezes e meio dariam 7,5 metros e não 7,5 centímetros (tamanho no desenho). O aluno evidenciou um raciocínio correto na interpretação do significado do fator multiplicativo que usou, 2,5. Implicitamente estabeleceu que 2,5 centímetros no desenho iriam corresponder a 1 metro na realidade (que representou com 2,5 cm =1 m), ou que 1 metro seria desenhado com 2,5 centímetros. De certa forma, era uma relação válida, uma vez que 1 m = 100 cm e o quociente de 100 cm por 2,5 cm seria 40, o valor da constante de proporcionalidade, que foi obtido pelo aluno. Questionei-o sobre o que queria mostrar com a igualdade apresentada. Ao explicar como havia pensado, percebeu os seus erros.

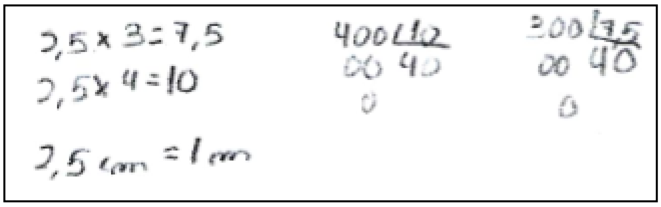


Figura 5.9.7. - Resposta evidenciando uma relação proporcional entre o comprimento no desenho e na realidade, com erros derivados do uso incorreto das unidades de medida, por Duarte.

Uma outra relação foi determinada por Tomás e seu par. O aluno atendeu ao tamanho do desenho e estabeleceu uma relação entre a dimensão da largura e do comprimento. A cada 1,5 cm de largura correspondiam a 2 cm de comprimento. Por raciocínio aditivo o aluno mostrou que poderiam ser alcançadas as medidas respeitantes ao tamanho do real e às do desenho de forma proporcional (Figura 5.9.8.). Por estratégia de composição/decomposição foi efetuando a adição de 1,5 cm à largura e 2 cm ao comprimento sucessivamente. Implicitamente, o aluno formou uma sequência de razões equivalentes $\frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{6}{8} = \frac{7,5}{10}$. Cometeu deficiência em termos de rigor na linguagem simbólica uma vez que usou o sinal de igual não para estabelecer uma relação de igualdade mas uma comparação, tendo apresentado razões. Apesar do trabalho do aluno evidenciar que verificou a existência de proporcionalidade direta, as relações estabelecidas não eram válidas. Possivelmente, não teve em atenção, como outros alunos, aos dados do problema, de forma correta. Atendeu aos valores de 3 e 4 interpretando-os como centímetros (3 cm e 4 cm), mas na realidade eram metros (3 metros e 4 metros). A estratégia seria correta se tivesse adicionado sucessivamente a 7,5 cm e a 10 cm as parcelas 1,5 cm e 2 cm, respetivamente, até alcançar 300 cm e 400 cm.

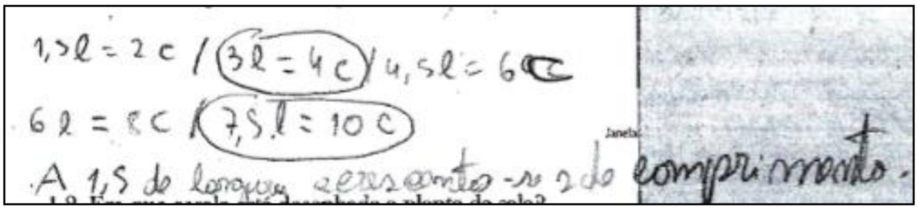


Figura 5.9.8. - Resposta evidenciando uma relação proporcional entre as medidas da largura e do comprimento por relações aditivas, de Tomás.

As estratégias e formas de pensar dos alunos possibilitaram-lhes verificar a existência de relações proporcionais. No entanto algumas delas não conduziam a uma perceção do valor correto da constante de proporcionalidade, decorrendo numa incorreta relação entre o tamanho do desenho para o tamanho real. Não tinha antecipado algumas estratégias, pois pretendia que os alunos atendessem e partissem da razão entre o tamanho no desenho para o tamanho na realidade, relacionando o antecedente e o consequente, trabalhando sempre com o centímetro como unidade de medida.

A descoberta da escala usada no desenho, requerida no item 1.2., não foi de rápida resolução. Inicialmente, os alunos mostraram pouca predisposição para formarem uma proporção e estabelecer que uma razão que representa uma escala apresenta 1 como antecedente (1 centímetro no desenho para x na realidade). Interrompi o trabalho autónomo, promovendo o diálogo, para que os alunos relembrassem o conceito alcançado na última tarefa, sobre como representar uma escala em forma de razão. Tal intervenção pareceu ajudar, uma vez que, 19 alunos acabaram por determinar a escala $\frac{1}{40}$. É o caso de Angelina e Catarina (Figura 5.9.9.) que usaram a estratégia proporcional, com operador escalar adequado, alcançando razões equivalentes de antecedente 1.

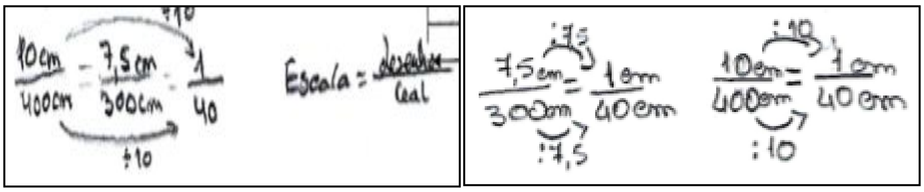


Figura 5.9.9. - Respostas evidenciando a determinação da escala, por equivalência de razões, por Angelina e Catarina.

Após a resolução das primeiras questões, 1.1. e 1.2., iniciei a discussão coletiva com o objetivo de facilitar o trabalho autónomo na resolução dos itens seguintes.

Na questão 2., (Figura 5.9.10.) era apresentada uma escala, razão inicial (1:200). Os alunos precisariam de realizar medições para encontrarem o tamanho do desenho e posteriormente descobrirem o valor em falta que correspondia às dimensões reais.

2. A planta da casa da Inês foi desenhada na escala 1:200.
Usando a régua faz as medições necessárias e determina:

2.1. As dimensões reais da casa.

2.2. A área total da casa.

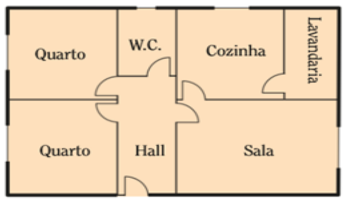


Figura 5.9.10. - Item 2., tarefa 9.

Na apresentação do item tive necessidade, novamente, de salientar o significado da expressão "dimensões reais", uma vez que alguns alunos demonstraram não estar a perceber. Deste modo questionei o que seria pretendido com o determinar uma dimensão real. Alunos voluntários intervieram e referiram que seria necessário calcular o tamanho real do comprimento e da largura, partindo da escala.

Fui observando o momento de trabalho autónomo. Detetei que alguns alunos, apesar de terem determinado as dimensões reais, depois, no cálculo da área da casa, usaram as dimensões do desenho. Assim coloquei a questão: "*Será que, quando se fala em área de uma casa, estamos a pretender a área real ou a área do desenho inscrito no papel*? Esta questão constituiu uma forma de induzir os alunos para o uso das dimensões reais, no procedimento de cálculo da área.

Todos os alunos, à exceção de três, determinaram corretamente as dimensões reais da casa e a sua área. De um modo geral usaram a estratégia escalar evidenciando os fatores multiplicativos, $\times 4$ e $\times 6$. Estes fatores estabeleciam a relação dentro de cada medida de grandeza $\frac{1}{200} = \frac{4}{800} = \frac{6}{1200}$, como mostram as respostas de Ana e Daniel (Figura 5.9.11.), com o cálculo das medidas reais e usadas posteriormente no cálculo da área da casa. Ana apresentou uma incorreção, bastante comum nas outras respostas. No cálculo da área efetuou o produto das medidas, indicando 12 m × 8 m (metros por metros). Relembrei o conceito e salientei que no cálculo de áreas, a correta representação consta na fórmula $c \times l\, \boldsymbol{m^2}$, ou $c \times l \times 1\boldsymbol{m^2}$ sendo incorreto matematicamente determinar o produto de metros por metros.

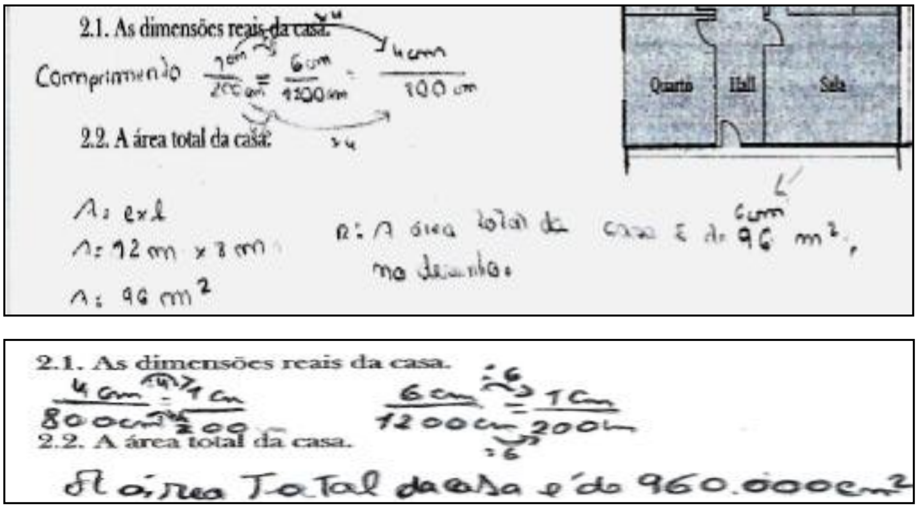


Figura 5.9.11. - Respostas com evidência do uso da estratégia escalar no sentido de covariância, por Ana e Daniel.

Dos alunos que resolveram corretamente os dois itens, um grupo procedeu à determinação das medidas reais, adotando como estratégia, o produto da medida do desenho por 200 (fator apresentado no consequente da escala), como Guida e Carlos procederam (Figura 5.9.12.). Guida chegou a representar na imagem da planta, que cada centímetro no desenho corresponderia a 200 cm (200 cm na realidade), revelando compreensão da relação representada pela escala $\frac{1}{200}$, 1 cm no desenho para 200 cm no real. Carlos determinou, pelo mesmo processo, as dimensões reais que usou no cálculo da área e no final converteu corretamente a área calculada em cm^2 para m^2. Mas foi mais um aluno que apresentou falta de rigor no cálculo da área, sem apresentação da fórmula e efetuando o produto de centímetros por centímetros.

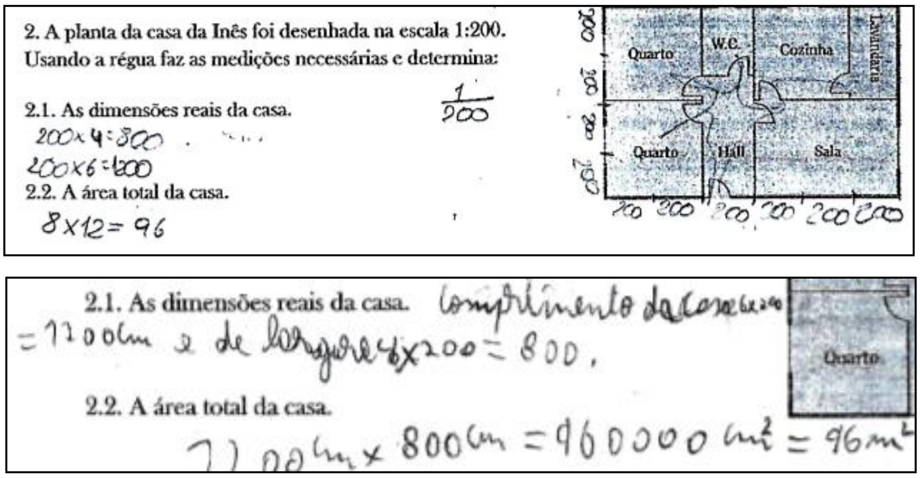


Figura 5.9.12. - Respostas evidenciando a determinação das medidas reais por cálculo do produto da medida no desenho pelo valor da escala, por Guida e Carlos.

Os itens 3., 3.1. e 3.2. (Figura 5.9.13.) foram elaborados e adaptados com base num item da Prova de Aferição de Matemática de 2011, apresentando alguma complexidade para os alunos.

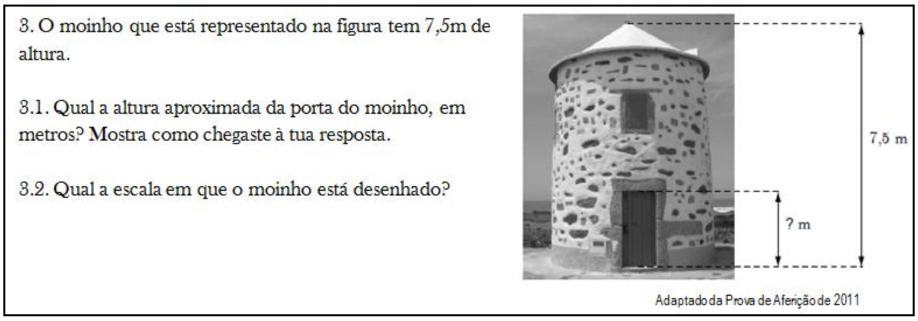


Figura 5.9.13. - Item 3., 3.1. e 3.2., tarefa 9.

A questão requeria que fossem efetuadas medições do desenho, com régua, talvez por não serem dadas indicações no enunciado nesse sentido, inicialmente alguns alunos não efetuaram qualquer trabalho. Para a resolução do item seria necessário partir da razão entre a medida do desenho e a da realidade ($\frac{5}{750}$), formada após a medição do segmento de reta, (5 cm), inscrito na imagem.

Para o item 3.1., seria necessário elaborar, com a razão inicial, uma igualdade com outra razão cujo antecedente seria a medida da porta do moinho (1,5 cm). Poderiam, assim, formar uma proporção $\frac{5}{750} = \frac{1{,}5}{x}$, descobrindo o valor em falta, obtendo o tamanho real, da porta do moinho. Muitos alunos solicitaram a minha ajuda e de outros colegas para identificarem qual a relação que seria o ponto de partida. Sentiram-se um pouco inseguros porque só era apresentado o valor real 7,5 m. Não depreenderam que teriam, eles próprios de medir a figura do moinho. Entretanto com dicas dadas por mim e por outros colegas, foram realizando as medições necessárias.

Apoiei o trabalho lançando questões de focalização:" *Qual a razão que podem estabelecer de imediato, pela leitura do enunciado e depois de efetuarem as medições no desenho? Que razão poderão formar inicialmente?"* Pretendia, com isso, destacar a razão inicial $\frac{5}{750}$ como ponto de partida para a elaboração da proporção $\frac{5}{750} = \frac{1{,}5}{x}$. Relembrei a unidade de medida a usar, centímetros. Os alunos tinham de converter 7,5 metros para 750 centímetros. A chamada de atenção foi feita, uma vez que alguns alunos não efetuaram esse procedimento em trabalhos anteriores. Outra situação com que me deparei reportou-se ao facto dos alunos não representarem os termos da razão de forma correta. Por vezes, colocaram no antecedente o tamanho real, em vez do tamanho no desenho ($\frac{750}{5}$). Ou, ao formarem a proporção, colocaram num dos antecedentes o tamanho do desenho e no outro antecedente o tamanho real ($\frac{5}{750} = \frac{x}{1,5}$). Denotou-se alguma confusão nos alunos ao estabelecerem e representarem as relações entre as variáveis. Aparentemente, alguns não atenderam ao conceito e ao rigor da formação de uma razão representativa de uma escala. Atendendo ao desenrolar do trabalho autónomo, uma vez que foram feitas intervenções pontuais e à posterior análise das produções escritas, constatei que, apenas metade dos alunos realizou o item 3.1. com sucesso.

As resoluções corretas evidenciaram o uso de várias estratégias. Alguns alunos, como Carla e Catarina formaram a proporção por estratégia funcional (Figura 5.9.14). Determinaram o fator multiplicativo a usar na descoberta do valor em falta, notando o operador 150, uma vez que 5 × 150 = 750, então 1,5 × 150 = 225 cm ou 2,25 m. Formaram a proporção correta $\frac{5}{750} = \frac{1,5}{225}$ e obtiveram o valor em falta, o tamanho real da porta, 2,25 metros.

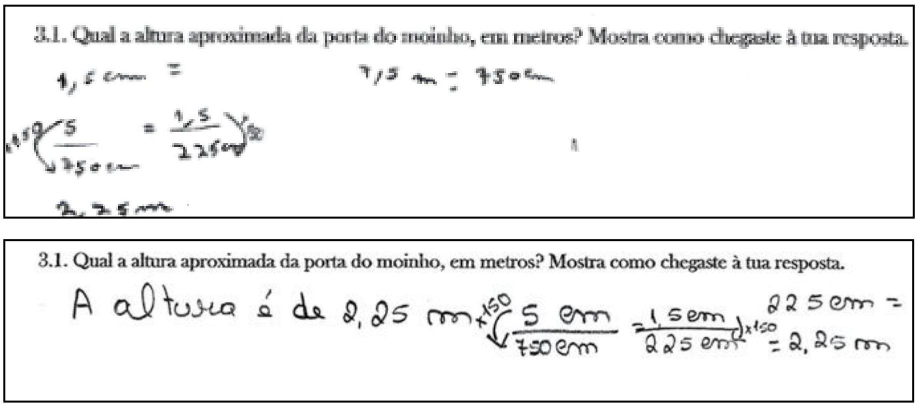


Figura 5.9.14. - Respostas evidenciando a estratégia funcional na constituição da proporção e na descoberta do valor em falta, por Carla e Catarina.

Outro grupo de alunos recorreu ao uso da estratégia funcional e estratégia por composição/decomposição, em simultâneo. Por exemplo, Tomás determinou a razão unitária, $\frac{1}{150}$ e a razão representante à metade de 1cm, $\frac{0,5}{75}$, (Figura 5.9.15.). Estabeleceu que, se 1 cm no desenho correspondia a 150 cm na realidade, então meio centímetro corresponderia a metade de 150 cm ou seja 75 cm. Deste modo, embora não apesentasse essa razão formalmente o aluno formou uma série de razões equivalentes, $\frac{5}{750} = \frac{1}{150} =$

$\frac{0,5}{75}$, implicitamente todas equivalentes a $\frac{1,5}{225}$. Chegou ao valor final, usando a soma das medidas do desenho e das respetivas medidas na realidade. O aluno decompôs 1,5 cm em 1 cm + 0,5 cm procedendo à adição dos respetivos valores reais, 750 cm com 75 cm de soma 225 cm, corretamente convertidos em 2,25 m.

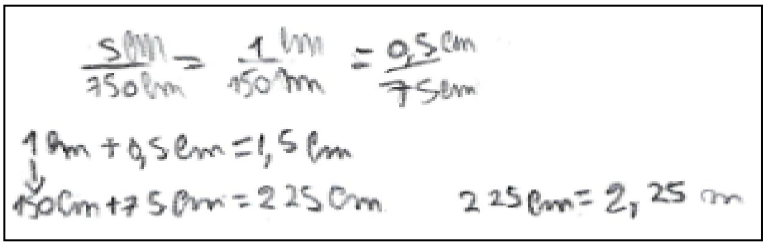


Figura 5.9.15. - Resposta evidenciando o uso da estratégia escalar, valor unitário e composição/decomposição para alcançar o valor em falta, por Tomás.

Mariana efetuou um raciocínio semelhante, recorrendo ao uso em simultâneo da estratégia escalar e da estratégia de composição/decomposição. Começou por identificar o fator multiplicativo 5 que permitia estabelecer a relação entre $\frac{5}{7,5} = \frac{1}{?}$, mostrando que 5×1 cm = 5 cm então 7,5 m ÷ 5 = 1,5 m. Notou que 1 cm corresponderia a 1,5 m na realidade. A aluna cometeu um erro, pois registou que 1 cm correspondia a 1,5 cm em vez de 1,5 m. Relacionou o tamanho do desenho em centímetros com o tamanho real em metros, não convertendo os metros em centímetros. No entanto revelou compreensão quando, recorreu ao uso da estratégia por composição/decomposição efetuando a adição das medidas reais 1,5 m e 0,75 m que correspondiam proporcionalmente a 1 cm e 0,5 cm no desenho (Figura 5.9.16.). A aluna efetuou um raciocínio pré-proporcional, no entanto também formou, implicitamente uma sequência correta de razões equivalentes $\frac{5}{7,5} = \frac{1}{1,5} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{1,5}{2,25}$.

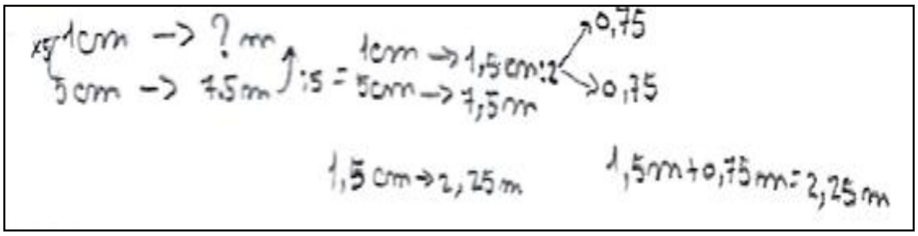


Figura 5.9.16. - Resposta evidenciando o uso da estratégia escalar, valor unitário e composição/decomposição para alcançar o valor em falta, por Mariana.

Um aluno, Sérgio, usou uma estratégia funcional, nomeadamente o produto cruzado, como forma de determinar o valor em falta, como ilustra a Figura 5.9.17. A estratégia, provavelmente foi apreendida fora da aula, uma vez que não foi ensinada nem descoberta em contexto de sala de aula.

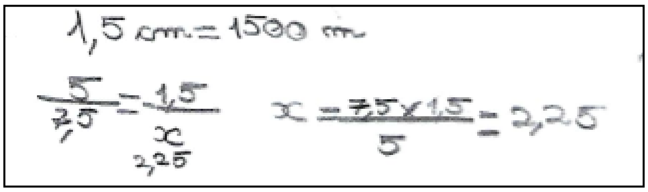


Figura 5.9.17. - Resposta evidenciando o uso da regra do produto cruzado na determinação do valor em falta, por Sérgio.

Alguns alunos não resolveram o problema, pois utilizaram apenas parte dos dados do problema ou utilizaram procedimentos de cálculo sem sentido. Revelaram não compreender o contexto ou não estabelecer uma relação correta entre uma medida no desenho e a sua respetiva medida na realidade, como são exemplo as respostas de Frederico, Filipe e Leonor (Figura 5.9.18.). Pouco se pôde depreender sobre o raciocínio efetuado. Talvez Frederico tenha interpretado a situação relacionando que a figura da porta, medindo 1,5 cm, na realidade corresponderia a 1,5 m, implicando ou uma fraca interpretação de uma escala ou o uso de uma outra escala, no caso $\frac{1}{100}$ em vez de $\frac{1}{150}$.

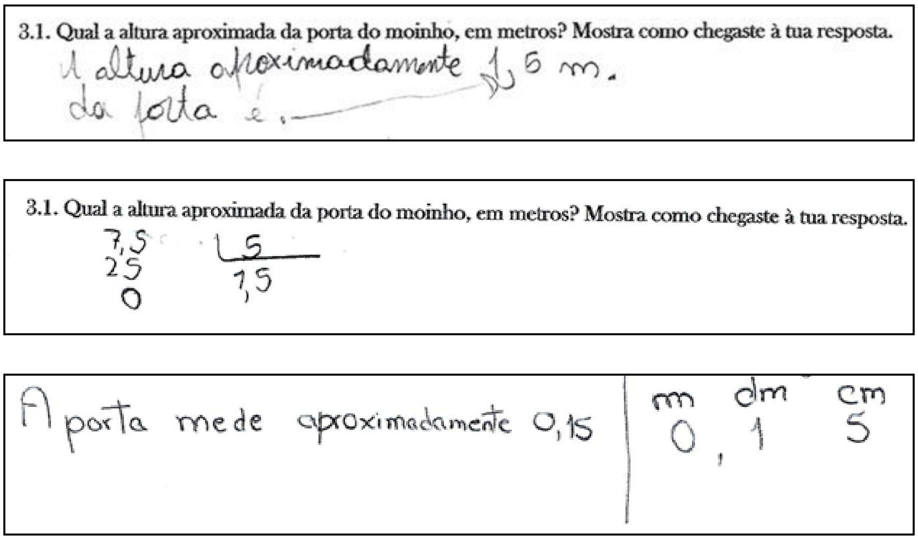


Figura 5.9.18. - Respostas sem compreensão do contexto do problema, por Frederico, Filipe e Leonor.

A produção de Filipe sugeriu que houve uma tentativa de uso de estratégia funcional, ou perceção da constante de proporcionalidade. Efetuou o algoritmo da divisão do consequente pelo antecedente (embora não tenha apresentado qualquer razão), obtendo o valor de 1,5. Talvez não tenha conseguido interpretar o significado do valor quociente, como tal não avançou no trabalho. Leonor efetuou uma simples conversão, possivelmente porque não compreendeu os dados do problema ou não conseguiu alcançar qualquer relação entre as medidas de grandeza, apesar de supostamente, ter efetuado a medição da figura da porta do moinho, 1,5 cm.

O item 3.2., que requeria a descoberta da escala usada, no desenho do moinho, foi resolvido com aparente facilidade, por cerca de metade dos alunos. Possivelmente, os alunos que compreenderam o conceito de escala como uma razão de antecedente 1 perceberam a simplicidade de formar uma razão equivalente do tipo $\frac{1}{x}$. Para a formação da proporção bastaria determinar o quociente de ambos os termos da razão inicial $\frac{5}{750}$ por 5, operador escalar, para obter a escala, $\frac{1}{150}$. A estratégia de simplificar a razão inicial estabelecendo uma relação multiplicativa, por estratégia escalar, foi usada pelos alunos que determinaram a escala, como mostra a Figura 5.9.19. com a resposta de Filipe.

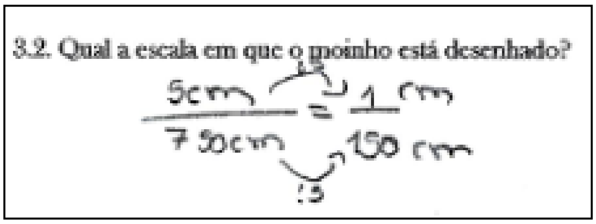


Figura 5.9.19. - Resposta evidenciando a determinação da escala por uso de estratégia escalar, de Filipe.

Oito alunos, talvez por demorarem muito tempo na compreensão e resolução do problema do item anterior, 3.1., não deram qualquer resposta. Outros, não concluíram a formação da proporção, como é exemplo a resposta de Fernando (Figura 5.9.20.). Apesar da apresentação correta da estrutura da proporção, não alcançou o valor em falta.

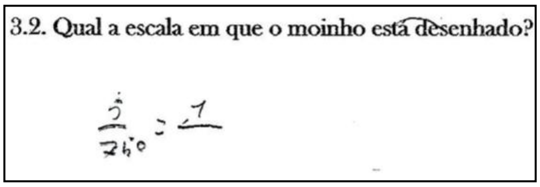


Figura 5.9.20. - Resposta sem evidenciar qualquer relação multiplicativa não permitindo a formação da proporção que determinaria a escala, por Fernando.

Um pequeno grupo de alunos, não obteve uma escala correta. Os alunos partiram de uma razão inicial, sem sentido, com uma relação incorreta dentro das variáveis, como Sílvia e Tomé (Figura 5.9.21.). O facto impossibilitou-lhes a descoberta da escala correta. No entanto, os alunos tiveram a noção que deveriam efetuar uma razão de antecedente um. De um modo geral, os alunos revelaram compreender a necessidade de conceber uma razão com antecedente 1, na formação de uma escala.

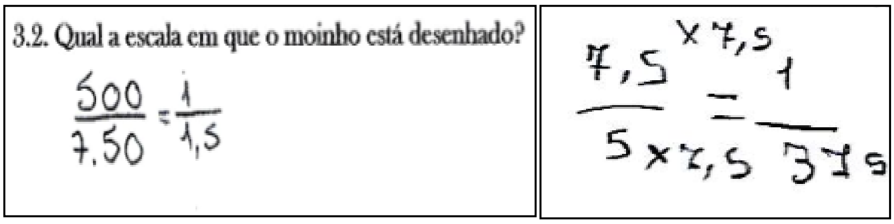


Figura 5.9.21. - Resposta evidenciando o relacionar do conceito de escala com uma razão de antecedente 1, mas partindo de uma razão inicial incorreta, por Sílvia e Tomé.

Após a execução destes dois itens, voltei a promover a discussão coletiva. Os alunos apresentaram as suas resoluções e a forma como pensaram, possibilitando a compreensão dos erros cometidos. Destacaram-se alguns alunos que pretendiam participar de forma insistente, uma vez que estabeleceram proporções com compreensão e de forma rápida, revelando entusiasmo na apresentação do seu raciocínio à turma.

Durante a resolução do item 4. (Figura 5.9.22.), os alunos mostraram-se mais seguros e efetuaram a resolução mais rapidamente, comparando com a resolução dos itens anteriores. Pude perceber que na interpretação do conceito de escala e na leitura de uma escala gráfica representada no mapa (Item 4.1.), houve um bom desempenho.

Figura 5.9.22. - Item 4., 4.1., 4.2. e 4.3., tarefa 9.

Os alunos atenderam à escala gráfica e interpretaram que 1 cm no mapa correspondia a 300 metros na realidade e não a 300 centímetros. Corretamente, alguns alunos efetuaram a conversão de metros para centímetros, como Vitória e Guida (Figura 5.9.23.). Vitória formou as razões $\frac{1}{300\text{m}}$ ou $\frac{1}{30000\text{cm}}$, supostamente quereria referir que as duas razões eram equivalentes. Uma vez que apresentou a não concordância com a afirmação apresentada, pretenderia evidenciar que a resposta correta seria $\frac{1}{30000\text{cm}}$.

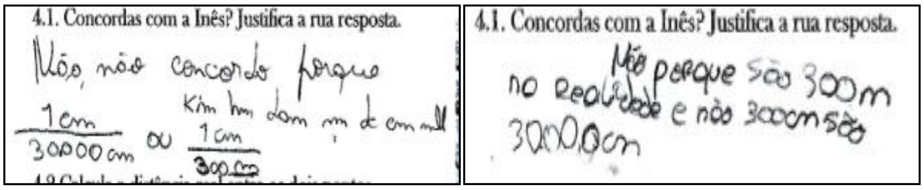


Figura 5.9.23. - Resposta evidenciando uma correta interpretação da escala, por Vitória e Guida.

Guida efetuou a correspondência correta em centímetros, apresentando em linguagem natural, uma leitura e interpretação da escala do mapa, referindo que a escala seria 1:30 000.

De um modo geral, os alunos destacaram que a escala apresentava uma relação em metros e não em centímetros, mas não estabeleceram a relação entre 1 cm no desenho e o tamanho real em centímetros 1:30 000, à semelhança do que é mencionado por Leonor (Figura 5.9.24.).

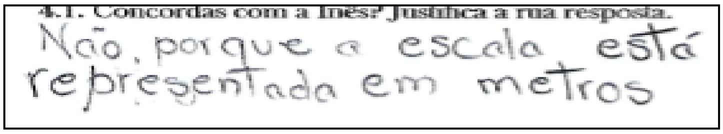


Figura 5.9.24. - Resposta evidenciando uma interpretação da escala, por Leonor.

Não houve muitas respostas que tenham apresentado a escala correta, com as grandezas expressas em centímetros. No entanto percebeu-se que os alunos começaram a ter esse facto em consideração, uma vez que, apesar de não mostrarem a representação da escala 1:30000, salientaram que a inscrição da imagem refere-se a metros e não a centímetros, como deveria.

As nove repostas incorretas que surgiram, deveram-se, possivelmente, a uma descuidada observação da escala representada no mapa, originando uma concordância com a afirmação, que era falsa, como justificaram Ana e Rute (Figura 5.9.25.).

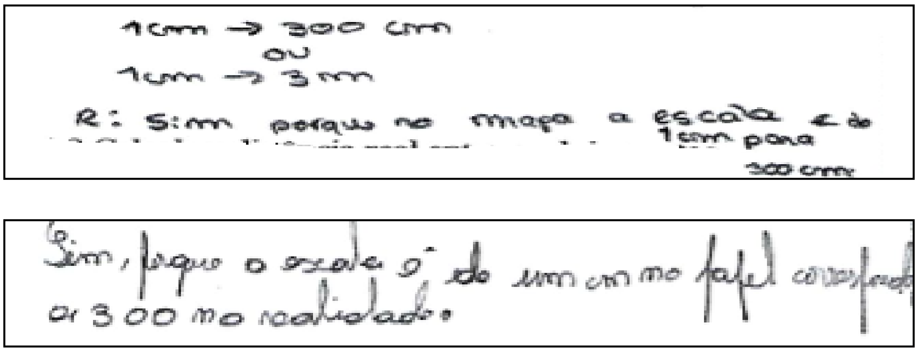


Figura 5.9.25. - Respostas evidenciando uma incorreta interpretação da leitura da escala, por Ana e Rute.

Com o item seguinte 4.2. pretendia-se a descoberta da distância real, entre dois pontos marcado no mapa, envolvendo a aplicação da razão que representava a escala $\frac{1}{30000}$. Os pontos estavam unidos por um segmento de reta, que teria de ser medido.

Verifiquei que neste item, os alunos depreenderam autonomamente a necessidade de efetuarem as medições necessárias. Notaram, por medição do segmento de reta, que a distância, no mapa, entre os dois pontos era de 2,5 cm. Deste modo puderam formar a proporção $\frac{1}{30000} = \frac{2,5}{x}$.

Os alunos revelaram empenho na resolução deste item e usaram duas estratégias diferentes. A mais eficaz e rápida reportou-se ao uso de relações multiplicativas dentro das variáveis por estratégia escalar. Partindo da escala $\frac{1}{30000}$, alguns alunos, como Sara e Catarina, usaram o fator multiplicativo 2,5, para completarem a proporção e descobrirem o valor em falta. Determinaram a distância real, $\frac{1}{30000} = \frac{2,5}{75000}$, uma vez que 1 × 2,5 = 2,5 e 30000 × 75 000 (Figura 5.9.26.). Posteriormente, e uma vez que era solicitada a distância real, teriam de converter 75 000 cm em 750 m, mas nem todos os alunos atenderam à necessidade de efetuarem esse procedimento, como Catarina, que não apresentou uma resposta completa.

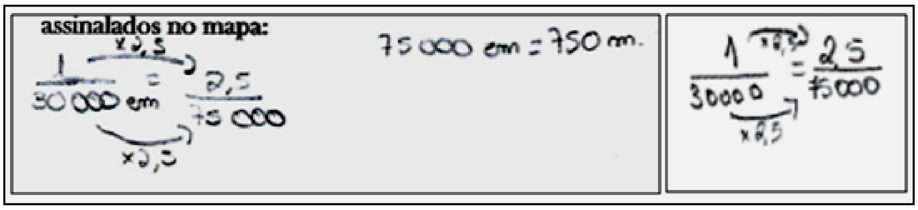
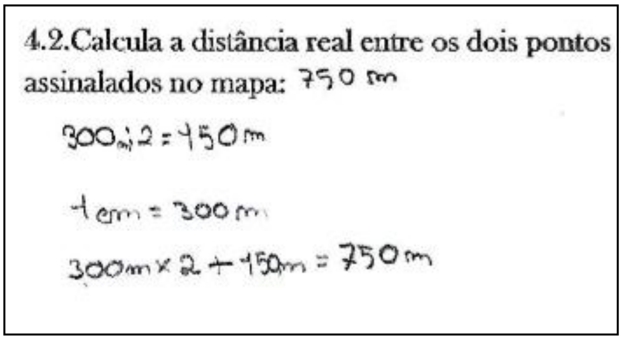


Figura 5.9.26. - Respostas evidenciando o uso de relações multiplicativas, estratégia escalar, por Sara e Catarina.

Outro grupo de alunos recorreu à estratégia de composição/decomposição. Como procedimento determinaram produtos, quocientes e somas até alcançarem o valor pretendido. Os alunos estabeleceram que a distância real que correspondia 0,5 cm no desenho, era de 150 metros, por determinação da metade dos termos da razão inicial, $\frac{1}{300} = \frac{0,5}{150}$. O raciocínio dos alunos incidiu na decomposição dos 2,5 cm, distância entre os dois pontos no desenho em, 2 + 0,5. Procederam à adição das respetivas distâncias reais, determinando a soma do produto do dobro de 300 metros com 150 metros. O trabalho de Palmira é exemplo do uso dessa estratégia. A aluna usou, ainda, uma expressão algébrica para evidenciar o seu raciocínio: $2 \times 300\,m + 150\,m = 750\,m$, como mostra a Figura 5.9.27.


4.2.Calcula a distância real entre os dois pontos assinalados no mapa: 750 m

300 : 2 = 150 m

1 cm = 300 m

300 m × 2 + 150 m = 750 m

Figura 5.9.27. - Resposta evidenciando uso da estratégia de composição/decomposição, para formação de uma expressão algébrica, por Palmira.

Houve alunos que, pela mesma estratégia, adicionaram sucessivamente as distâncias reais que correspondiam cada parcela até alcançarem a distância real solicitada, como, Filipe, Tomás e Angelina (Figura 5.9.28.). Partindo da decomposição de 2,5 cm, e atendendo que 1 cm correspondia a 30000 cm, calcularam a metade e o dobro bem como as somas adequadas até notarem que, proporcionalmente 75 000 cm ou 750 m eram a distância entre os dois pontos. A estratégia de composição/decomposição revelou a forma de como os alunos estabeleceram relações entre as medições no desenho e na realidade.

Registou-se um pequeno número de alunos – seis no total – não deu qualquer resposta ou estabeleceu relações sem sentido, dentro de cada variável, que não lhes permitiu obter uma resolução correta.

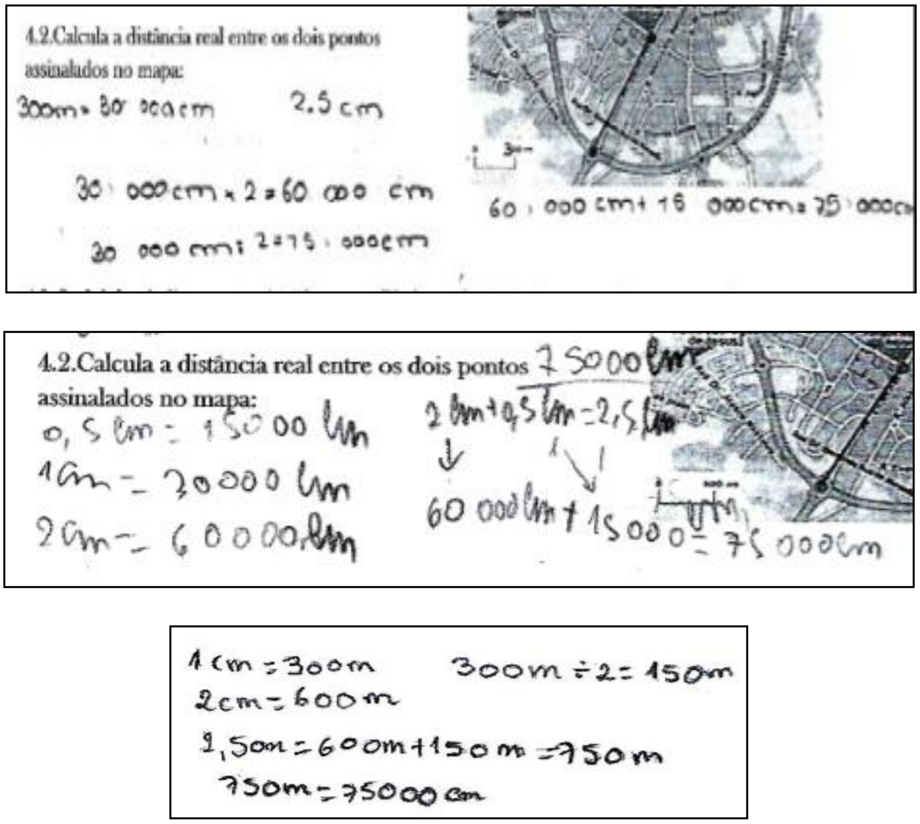


Figura 5.9.28. - Respostas evidenciando estratégia de composição/decomposição com uso de adições e quocientes, para alcançar o valor em falta, por Filipe, Tomás e Angelina.

O item 4.3. por uso da escala apresentada no mapa, $\frac{1}{30000}$, requeria a descoberta da distância no mapa entre dois pontos que, na realidade, distariam de 1,5 km. O desempenho dos alunos foi similar ao do item anterior, no entanto mais alunos recorreram ao uso da estratégia escalar. Estabeleceram uma proporção evidenciando o uso do fator multiplicativo 5, dentro das variáveis, notando que $\frac{1}{30000} = \frac{5}{1500000}$, como foi o caso de Angelina. Salienta-se que a aluna, no item anterior usou uma estratégia de composição/decomposição (como se mostrou na Figura 5.9.28.), mas neste item, recorreu ao uso de estratégia escalar, como mostra a Figura 5.9.29.

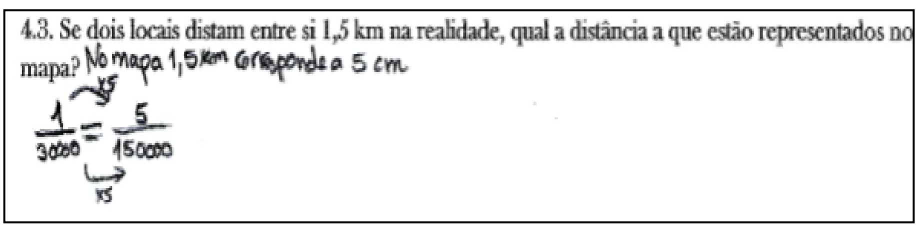


Figura 5.9.29. - Resposta evidenciando o uso de estratégia escalar, por Angelina.

Destacaram-se, alguns problemas no estabelecer de relações, de igualdade entre razões, de forma correta, nomeadamente alguma confusão na representação da proporção, como Vitória mostrou no seu trabalho. A aluna representou corretamente a escala, relacionando o tamanho no desenho para o da realidade. Na formação da proporção estabeleceu a igualdade entre a razão da escala $\frac{1}{30\,000}$ com a razão $\frac{150\,000}{x}$ mas nesta o tamanho real foi registado no antecedente em vez de constituir o consequente. A aluna formou a proporção $\frac{1}{30\,000} = \frac{150\,000}{x}$ em vez de $\frac{1}{30\,000} = \frac{x}{150\,000}$. Consequentemente, o erro, resultou na incorreta determinação do valor em falta, a distância entre as duas cidades no mapa (Figura 5.9.30.).

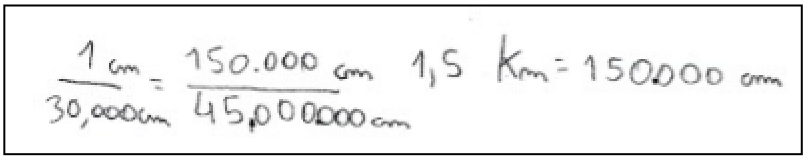


Figura 5.9.30. - Resposta evidenciando a incorreta representação das variáveis, por Vitória.

O item 5. (Figura 5.9.31.), novamente pretendia que os alunos estabelecessem uma relação proporcional entre a distância de dois pontos no mapa (3,3 cm) e a razão apresentada pela escala $\frac{1}{17000000}$. O item foi resolvido quase por todos os alunos, com sucesso.

5. Calcula o comprimento aproximado de Portugal Continental, sabendo que num mapa com a escala de 1/17 000 000, a distância entre os limites Norte e Sul é de 3,3 cm. Apresenta os cálculos.

Figura 5.9.31. - Item 5., tarefa 9.

A única estratégia usada foi a escalar, com evidência de relações multiplicativas por uso do fator decimal 3,3 dentro de cada variável. Não se registou grande dificuldade (apenas foram cometidos pequenos erros de cálculo). Os alunos representaram corretamente a escala e a distância no desenho. Indicaram 3,3 cm como antecedente da razão formada para completar a proporção, como mostra a resposta dada por Leonor (Figura 5.9.32.).

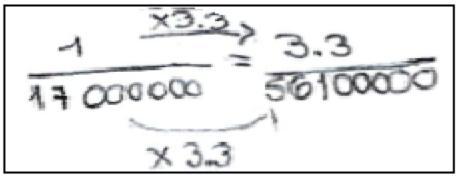


Figura 5.9.32. - Resposta evidenciando o uso da estratégia escalar na formação da proporção, por Leonor.

A falha comum nas respostas dadas pelos alunos, uma vez que pedia distância real de um país, foi relativamente ao valor real que não foi apresentado em quilómetros. Os alunos formaram apenas a proporção, não convertendo o resultado à unidade de medida inerente ao contexto, uma vez que se tratava de uma distância entre o Norte e Sul do país.

A resolução dos itens, 4. e 5., decorreu de melhor forma, em comparação com os primeiros itens. Os alunos não solicitaram tantas vezes a minha ajuda. Alguns dos alunos que estavam com mais dificuldades, progressivamente, foram revelando conseguir resolver os problemas e formar as proporções pretendidas. No entanto, persistiu alguma confusão na formação de uma proporção, nomeadamente em representar corretamente as variáveis nos termos das razões (desenho: realidade). Também, se detetou, embora em menor grau, alguma resistência dos alunos em efetuarem as necessárias conversões das unidades de medidas.

6.12. Teste final

O teste final (Anexo 16) finalizou a unidade de ensino e constituiu o elemento de avaliação sumativa. Este elemento avaliativo foi elaborado com seis conjuntos de itens para a aplicação de conhecimentos adquiridos ao longo da unidade de ensino, envolvendo as noções de razão, fração, percentagem, proporção em problemas de valor omisso e de comparação e um problema pseudoproporcional. Pretendia analisar qual a evolução dos alunos e efetuar uma comparação com o trabalho realizado em alguns itens do teste diagnóstico.

Os itens constituintes do teste foram elaborados tendo um grau de dificuldade adequado à turma. Incluiu itens de menor e maior grau de complexidade. Os itens que à partida seriam mais complexos permitiram perceber se existia compreensão do contexto do problema e uma interpretação dos resultados obtidos com a sua resolução. Alguns itens foram adaptados do manual escolar “Projeto Desafios” (Santillana, 2011) e “ À Descoberta da Geografia - 7.º ano” (Santillana, 2006).

O teste foi planeado para ter a duração de 90 minutos. A sua realização decorreu em ambiente calmo, após a apresentação e leitura das questões. Um pequeno número de alunos concluiu o teste em cerca de 50 a 60 minutos, no entanto outros alunos necessitaram dos 90 minutos. A análise das resoluções focou as estratégias usadas, as dificuldades ainda patentes, se as estruturas numéricas e o contexto condicionaram o desempenho dos alunos e se estes identificaram a existência ou não de proporcionalidade.

Os resultados podem ser considerados de bastante satisfatórios. Registou-se uma boa percentagem de sucesso na resolução dos diferentes tipos de problemas, como se pode observar no Tabela 2.

Os itens com maior grau de exigência estavam relacionados com a distinção da existência ou não de proporcionalidade, envolvendo números não inteiros, onde se verificou uma percentagem de sucesso ligeiramente mais baixa. O cálculo de uma percentagem relativa a uma quantidade foi o item onde os alunos revelaram maiores dificuldades.

O conjunto de alíneas do item 1. envolvia uma situação familiar aos alunos, a constituição de uma turma com certo número de raparigas e outro número de rapazes.

Seria necessário comparar as duas quantidades, o número de elementos do sexo feminino, de sexo masculino e o número total de alunos. Com esses elementos os alunos teriam de formar razões, frações e determinar a percentagem de rapazes que constituía a turma. Não se registaram grandes dificuldades, apenas dois alunos não formaram corretamente as razões e a fração solicitada. A questão com menor sucesso reportou-se à determinação da percentagem do número de rapazes que compunham a turma. Dos vinte e nove alunos, onze não apresentaram resposta ou cometeram erros de cálculo. A estratégia mais usada foi, como aconteceu ao longo da unidade de ensino, recorrer à determinação do quociente entre as duas quantidades (8:20) convertendo o seu valor, 0,4, em percentagem, 40%.

O item 2., era composto por um exercício que propunha a formação de duas proporções envolvendo a descoberta de um dos seus termos (valor omisso).

Tabela 2 – Resultados da turma no teste final.

Turma A	Noção de Razão, fração e %	Valor omisso		Valor omisso	Valor k e significado da constante de proporcionalidade	Generalização	Comparação Qualitativo	Valor omisso		Existência de Proporcionalidade			Comparação Quantitativo	Valor omisso	Pseudo-proporcional
Item		Proporção	Escalas	Tabela		$y = kx$		Tempo/ distância		Gráfico	Quantidade/ dose	Custo/ dose/ quantidade		%	
	1.1	2	3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	5.4	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5
Respostas corretas **Parcialmente corretas**	28	26	26	28	23	21	25	25	28	23	21	22	20	14	22
% Total	**97%**	**90%**	**90%**	**97%**	**79%**	**72%**	**86%**	**86%**	**97%**	**79%**	**72%**	**76%**	**69%**	**48%**	**76%**

Os alunos, de um modo geral, usaram uma estratégia proporcional, recorrendo ao uso de um fator multiplicativo, dentro e entre as variáveis, estratégia escalar e funcional, respetivamente. Na primeira proporção a formar, foi usado corretamente o fator multiplicativo, ×3, dentro das variáveis, numa estratégia escalar, por quase todos os alunos. A resolução da segunda proporção passaria pelo uso de estratégia funcional, decorrendo do uso do fator multiplicativo, ×5, entre as variáveis. Nem todos os alunos alcançaram o valor em falta pois não recorreram à comparação dentro das variáveis. Tentaram usar o fator multiplicativo dentro das variáveis, mas não foram bem-sucedidos, uma vez que este fator correspondia a uma dízima infinita.

O item 3., apresentava um problema envolvendo escalas. Dada a escala, os alunos teriam de descobrir o tamanho real de uma ponte. Vinte e quatro alunos recorreram à formação de uma proporção usando, maioritariamente, uma estratégia proporcional, aplicando o operador escalar dentro de cada variável ou usando a regra de três simples, como se apresenta no quadro 15.

Quadro 15 – Estratégias usadas no problema de valor omisso, envolvendo um contexto de escalas (Item 3.).

Estratégias		N.º alunos	%
Não proporcional	. Aditiva.	0	0%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	2	7%
Proporcional	. Escalar – Fator multiplicativo dentro da variável. – Regra de 3 simples.	23 1	79% 3,5%
Não descriminada	. Deficiente relação entre os termos da proporção. . Cálculos sem sentido.	3	10,5%
Não Responde		0	0%

Os alunos que não conseguiram determinar o tamanho real da ponte, cometeram um erro na representação correta da proporção, uma vez que iniciaram corretamente com a apresentação da razão da escala, relacionando o tamanho do desenho para o tamanho real, mas na segunda razão representaram o tamanho real para o tamanho do desenho, levando à incorreta determinação do valor em falta.

O item 4., envolvia um conjunto de questões que decorria de uma situação proporcional entre o número de folhas de um jornal e respetivo número de páginas. Requeria completar de uma tabela, relacionando grandezas diretamente proporcionais. Os alunos não revelaram dificuldades, possivelmente porque a constante de proporcionalidade era um número natural. A razão unitária $\frac{1}{4}$ não era apresentada, mas dois alunos registaram-na no seu trabalho. Os restantes alunos recorreram ao fator multiplicativo 4 ou o seu inverso $\frac{1}{4}$ ($\div$ 4) para relacionarem as duas variáveis, usando como procedimento o cálculo de um produto ou de um quociente, adequadamente, para a descoberta do valor em falta.

Ainda neste problema, solicitava-se a identificação do valor constante, k, e o seu significado no contexto do problema. Como se apresenta no quadro 16, os alunos facilmente identificaram que a constante de proporcionalidade era 4, $k = 4$, que já haviam usado no preenchimento da tabela. No entanto apenas três alunos interpretaram o seu significado, apresentando-o numa linguagem com rigor: "*Cada folha de um jornal tem 4 páginas*" ou "*Existem 4 páginas por cada folha de jornal*".

Quadro 16 – Resultados da turma na identificação e compreensão do significado da constante de proporcionalidade (Item 4.).

Estratégias		N.º alunos	%
Pré-proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade mas não explica o seu significado.	20	69%
Proporcional	. Determina a constante de proporcionalidade e interpreta o seu significado.	3	10,5%
Não descriminada	. Incorretamente.	1	3,5%
Não responde		5	17 %

Em termos da interpretação do significado da constante de proporcionalidade, grande número de alunos referiu que 4 era o número a usar para calcular o número de páginas do jornal ($\times 4$), ou para calcular o respetivo número de folhas ($\times\frac{1}{4}$ ou $\div 4$). Os alunos identificaram que a constante de proporcionalidade seria o operador na determinação de um produto para descoberta do número de páginas do jornal, ou o seu inverso como operador na descoberta do número de páginas. A dificuldade registada reportou-se ao deficiente rigor na linguagem natural.

Na questão seguinte solicitava-se uma generalização "*Como determinar o número de páginas para qualquer número de folhas do jornal?*" Foi evidente que os alunos relacionaram a função do valor constante, na determinação do número de páginas, para qualquer número de folhas. Explicaram ou por linguagem natural, fazendo referência à determinação do produto do número de folhas por 4, "*Multiplica-se o número de folhas por 4*", ou apresentando a expressão geradora, com a expressão algébrica: $n \times 4$.

O item 5., apresentava uma série de questões relacionadas com a interpretação de um gráfico. Esta representação exibia a viagem de dois camiões, ambos representados por uma linha retilínea, partindo do ponto de origem, realçando as razões entre tempo e distância percorrida. A primeira questão, 5.1., pretendia uma simples leitura do gráfico solicitando qual dos camiões havia sido mais rápido. Vinte e um alunos identificaram corretamente o camião A, como o mais rápido. Justificaram que "*Em três horas, o camião A percorreu maior número de quilómetros*". Ou que "*O camião A fez mais quilómetros no mesmo tempo*". Ainda se verificaram respostas em que a justificação apresentada já incluía a constante de proporcionalidade, como "*O camião A anda a 80 km por hora e o camião B anda a 60 km por hora*". Um pequeno número de alunos apenas referiu qual o camião mais rápido, sem apresentar uma justificação. Um grupo de 4 alunos apresentou uma resposta incorreta. Uns selecionaram o camião B como o mais rápido, outros referiram que ambos os camiões eram igualmente rápidos, pois ambos fizeram 3 horas de viagem. Perante esta constatação denotou-se que os alunos não efetuaram uma comparação relativa entre as duas variáveis, tempo e distância percorrida.

Os dois itens seguintes, 5.2. e 5.3., requeriam a descoberta de um valor omisso respeitante ao tempo demorado a percorrer um determinada distância. No item 5.2. os alunos teriam de ler no gráfico e descobrir o valor que respeitava o tempo demorado a percorrer 180 km, item de fácil concretização para todos os alunos. O item 5.3., solicitava a descoberta do valor em falta, que corresponderia ao tempo demorado a percorrer 480 km. Os alunos, usaram a representação de uma proporção. Partindo de uma das razões apresentadas no gráfico, efetuaram a igualdade com uma segunda razão $\frac{480}{x}$. Ao concluírem a proporção, alcançavam o valor de 6 horas correspondentes a 480 km. Usaram como estratégia o operador escalar dentro de cada variável descobrindo o valor em falta, $\frac{80}{1} = \frac{240}{3} = \frac{480}{x}$. Um pequeno número de alunos usou uma estratégia de composição/decomposição para chegar ao valor pretendido, percebendo que 480 km corresponderia ao dobro de 240 km, efetuaram a adição de duas parcelas referentes ao tempo correspondente a 240 km. Houve ainda alunos que foram adicionando sucessivas parcelas referentes ao valor de 1 h, a constante de proporcionalidade, 80 km. Pela adição alcançaram 480 km, verificando que a soma envolvia a 6 parcelas de 80 km, ou seja 6 horas. O quadro 17 apresenta as estratégias usadas na descoberta do valor em falta.

Quadro 17 – Estratégias usadas no problema de valor omisso (Item 5.3.).

	Estratégias	**N.º alunos**	**%**
Não proporcional	. Aditiva	1	3,5%
Pré-proporcional	. Composição/decomposição	5	17%
Proporcional	. Escalar.	17	58,5%
	. Funcional.	2	7%
	. Regra de 3 simples.	3	10,5%
Não descriminada	. Cálculos sem sentido	1	3,5%
Não Responde		0	0%

Neste problema, a última questão 5.4. requeria que os alunos apresentassem uma justificação sobre a existência de proporcionalidade entre as duas grandezas, tempo/distância, no percurso dos camiões. Do total de alunos, quinze deram uma resposta completa e oito apresentaram uma justificação incompleta ou pouco explícita. A maioria das justificações apresentadas, nomeadamente onze, destacou a existência de uma constante de proporcionalidade. Os alunos identificaram que o camião A andava sempre à mesma velocidade, 80 km por hora e o camião B andava também sempre a uma velocidade constante de 60 km por hora. Um pequeno número de alunos apresentou a sequência de razões equivalentes que retiraram do gráfico. Provaram que o fator multiplicativo usado era o mesmo para ambas as grandezas de medida, tempo/distância, ou seja $\frac{1}{80} = \frac{2}{160} = \frac{3}{240}$ para o camião A, e $\frac{1}{60} = \frac{2}{120} = \frac{3}{180}$ para o camião B. Houve, também, alunos a evidenciarem o fator multiplicativo, operador funcional, entre as medidas de grandeza, sendo de $\times$ 80 na razão $\frac{3}{240}$, para o camião A e de $\times$ 60, na razão $\frac{3}{180}$, para o camião B.

Surgiram ainda 3 justificações pouco completas que referiram a existência de proporcionalidade direta uma vez que, as linhas representadas eram retilíneas, só não focaram que partiam do ponto de origem. Seis alunos não identificaram a existência de proporcionalidade direta ou que esta só existia na viagem do camião A não apresentando qualquer justificação.

O item 6. apresentava um grau de exigência elevado, assentando essencialmente em situações que requeriam o reconhecimento da existência ou não de proporcionalidade direta. A questão 6.1. apresentava uma situação real, de duas embalagens de detergente com diferentes quantidades, número de doses e preço. Os alunos teriam de perceber se o número de doses era proporcional à quantidade em gramas. Registaram-se vinte e um alunos que identificaram a existência de proporcionalidade direta entre as duas grandezas. Onze alunos notaram a existência do operador funcional, $\times$50, constatando que a relação entre a quantidade e o número de doses, alcançando que a relação entre ambas era de 50g, $\frac{20}{1000g}$ e $\frac{30}{1500g}$. Neste contexto cada dose levaria, em ambas as embalagens, 50g. Outros cinco alunos, com respostas corretas, determinaram a existência da constante de proporcionalidade, determinando o quociente entre as duas quantidades, percebendo que o valor era de 50 (em cada embalagem uma dose teria 50 gramas). Três alunos usaram a estratégia de composição/decomposição. Decompondo as quantidades totais em porções de 500g., correspondentes a 10 doses, concluíram que para o dobro da quantidade teriam 1000g e assim 20 doses e para o triplo da quantidade teriam 1500g, e as 30 doses, de acordo com os dados apresentados no problema. Um aluno mostrou a existência de equivalência entre as razões partindo da razão $\frac{10}{500} = \frac{20}{1000} = \frac{30}{1500}$, uma vez que, se o número de doses aumenta para o dobro e para o triplo, o mesmo aconteceu ao peso, logo as grandezas seriam diretamente proporcionais. Um dos alunos aplicou a propriedade fundamental das proporções, efetuando o produto cruzado e assim mostrou que o produto dos meios era igual ao produto dos extremos uma vez que $1000 \times 30 = 3000$ e $1500 \times 20 = 3000$. No entanto este procedimento não mostra se compreendeu da relação existente entre as duas variáveis. Dos vinte e nove alunos, apenas dois não identificaram a existência de proporcionalidade direta, uma vez que cometeram erros de cálculo, nomeadamente no algoritmo da divisão, não obtendo o mesmo quociente. E um grupo de seis alunos não apresentou qualquer resposta.

O item 6.2. envolvia um problema de comparação para verificar a existência de proporcionalidade entre preço e quantidade entre as duas embalagens. De um modo geral, os alunos identificaram que não existia uma relação proporcional entre as variáveis. Por comparação da relação entre as duas medidas das grandeza preço e quantidade existente em cada embalagem, vinte e dois alunos identificaram que o preço não era proporcional à quantidade, mas cinco desses alunos não apresentaram uma justificação. As estratégias usadas foram várias: (i) determinação do preço por grama, por quociente ou por formação de uma proporção, para cada embalagem, $\frac{1000}{6,80} = \frac{1}{0,0068}$ e $\frac{1500}{10,50} = \frac{1}{0,007}$; (ii) determinação da quantidade, em gramas, por cada 1 euro formando as proporções $\frac{1000}{6,80} = \frac{147,06}{1}$ e $\frac{1500}{10,50} = \frac{142,86}{1}$; (iii) determinação do preço por dose, por quociente ou formação de uma proporção uma vez que as doses eram proporcionais à quantidade. Alguns alunos trabalharam com o número de doses, 20 e 30 em vez de trabalharem com as quantidades em gramas, 1000 e 1500, talvez porque o cálculo seria mais fácil. Desta forma relacionaram as doses com o preço de cada embalagem $\frac{20}{6,80} = 0,34€$ e $\frac{30}{10,50} = 0,35€$; (iv) determinação do preço de 500g. Com base no preço da embalagem menor, 500 g, custariam 3,40 € logo proporcionalmente 1500 g. custariam $3 \times 0,40€$ ou seja 10,20€, a estratégia de composição/decomposição permitiu constatar que o preço não correspondia ao preço indicado na embalagem grande, 10,50€; (v) verificação da existência de constante de proporcionalidade, o valor das razões não era o mesmo; e (vi) produto cruzado, percebendo que o produto dos extremos e produto dos meios não era igual. Os alunos que não identificaram a inexistência de proporcionalidade, neste problema, deram uma resposta incorreta, não apresentado cálculos ou estratégia definida, relacionando os dados sem sentido. Um pequeno número de alunos não apresentou resposta.

O item 6.3. pretendia uma análise da situação apresentada no problema e os alunos teriam de indicar qual a embalagem mais económica. Se houvesse uma correta interpretação do item anterior, da análise da relação preço/quantidade, os alunos já poderiam, rapidamente, efetuar essa descoberta. Como era uma questão que requeria interpretação, os alunos revelaram mais dificuldade do que nas duas questões anteriores. Um número considerável de alunos referiu que a compra mais económica seria a embalagem menor, com 6,80€ de custo, mas apenas metade apresentou uma justificação. Alguns alunos simplesmente indicaram a embalagem mais económica sem justificar. As justificações apresentadas basearam-se no preço por dose 0,34€ vs. 0,35€, ou no preço por grama, 0,0068€ vs. 0,007€. Alguns alunos por composição do preço referente a 500 g, designadamente 3,40 €, o que proporcionalmente tornaria o preço da embalagem de 1500 g em 10,20€, $(3 \times 3{,}40€)$, concluindo que o preço marcado, 10,50€, na embalagem maior, era 0,30 € mais caro em comparação com a embalagem menor. Um aluno não deu resposta, o que resultou da não atribuição de significado à constante de proporcionalidade, uma vez que no item anterior determinou o preço por dose em cada embalagem. Oito alunos não atenderam à relação de proporcionalidade, dando uma resposta incorreta, argumentando que "*A mais económica era a embalagem de 1500g, porque tendo mais quantidade daria para mais lavagens*", ou que "*A pequena era mais económica uma vez que custava 6,80€ e a outra era mais cara porque custava 10,50€*", denotando-se nestes casos que os alunos efetuaram uma comparação aditiva e não relativa entre preço e quantidade, não usando um raciocínio proporcional.

O item 6.4. envolvia outra situação bastante comum no dia-a-dia, a embalagem de 1500g, oferecia 30% de produto. *"Qual seria o peso total da embalagem com os 30% da quantidade?"* Foi o item com menor número de respostas corretas. Doze alunos não responderam corretamente por erros na escolha do procedimento de cálculo, nomeadamente por determinação do quociente do peso total por 30 ou por 0,3. Apenas três alunos não deram resposta. Percebeu-se assim que mais de metade dos alunos não concluiu com sucesso este item. Os restantes alunos calcularam corretamente a quantidade referente a 30% de 1500g, o correspondente a 450g. A estratégia usada reportou-se à determinação do produto de 0,3 por 1500g. Os alunos, como se verificou ao longo da unidade de ensino, revelaram maior propensão em converter uma percentagem na sua forma de dízima, usando-a como fator multiplicativo. Apenas 2 alunos efetuaram uma proporção determinado a igualdade entre duas razões, $\frac{30}{100} = \frac{450}{1500}$, por uso do operador escalar, 15, (dentro da variável), representando os 30% como razão de consequente 100.

O item 7., consistia num problema pseudoproporcional, “ *O tempo de lavagem na máquina de 5 camisolas era de 40 minutos. Qual o tempo de lavagem se colocar 10 camisolas ao mesmo tempo, na máquina?”* Um grande número de alunos nomeadamente vinte, percebeu a não existência de proporcionalidade, designando que mesmo que o número de peças de roupa aumentasse o tempo de lavagem seria o mesmo. No entanto, nove alunos não consideraram a não existência de proporcionalidade, usaram uma estratégia funcional, afirmando que o tempo de lavagem seria o dobro, uma vez que o número de camisolas também era o dobro. Em comparação com o teste diagnóstico houve uma boa progressão, uma vez que a percentagem de respostas corretas passou de 46% no teste diagnóstico para 76% no teste final.

Capítulo VII

Conclusão

Neste capítulo apresento uma síntese do estudo e as principais conclusões a que cheguei por análise dos resultados obtidos na experiência de ensino, atendendo ao objetivo e às questões formuladas. Finalizo com uma reflexão sobre a experiência de ensino e o seu contributo para o meu desenvolvimento profissional e de outros docentes de Matemática que pretendam aprofundar conhecimentos, numa perspetiva de melhor compreender o processo de ensino-aprendizagem sobre a proporcionalidade direta e como promover o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

7.1. Síntese do estudo

Este estudo foi desenvolvido no âmbito do domínio da Álgebra durante a lecionação do tópico da Proporcionalidade Direta, um dos subdomínios do *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (MEC, 2013), para o 6.º ano. O estudo teve como principal objetivo compreender se o trabalho com tarefas que explorem e interliguem conceitos essenciais da proporcionalidade direta como as noções de razão, fração, razões equivalentes e diferentes representações como proporção, tabelas e gráficos, promovem a compreensão da proporcionalidade direta e do significado da constante de proporcionalidade.

A metodologia usada neste estudo possuiu uma natureza qualitativa de cunho interpretativo, seguindo uma modalidade de Investigação Baseada em *Design* com base numa experiência de ensino. Neste sentido planeei uma unidade de ensino constituída por numa sequência de tarefas elaborada atendendo à revisão de literatura que realizei sobre o raciocínio proporcional e a proporcionalidade direta. Na sua conceção atendi à conjetura de que a exploração da sequência de tarefas assente nas noções de razão, fração e equivalência de razões, em várias representações como proporções, tabelas e gráficos, constituiria um alicerce para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, em particular, da noção de constante de proporcionalidade.

O objetivo da investigação pressupôs o delinear das questões de estudo, às quais procurei dar resposta:

(i) Ao longo da unidade de ensino, que compreensão, os alunos demonstram, do significado de constante de proporcionalidade e das relações multiplicativas em problemas de proporcionalidade direta?

(ii) Que estratégias de resolução usam os alunos para a resolução de problemas de proporcionalidade direta?

(iii) Que estratégias os alunos usam para identificarem a existência ou não de proporcionalidade direta?

(iv) Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no trabalho com problemas de proporcionalidade direta e na distinção entre as situações proporcionais e não proporcionais?

O trabalho na unidade de ensino desenrolou-se nos meses de dezembro e janeiro do ano letivo de 2016/2017. Os participantes foram os meus alunos de uma turma de 6.º ano da qual era professora titular de turma, numa escola do Distrito de Santarém. Após a apresentação de cada tarefa, os alunos trabalharam autonomamente na maioria das aulas, a pares ou em pequeno grupo, embora também tenham realizado trabalho individual, na tarefa 7 e nos testes de diagnóstico e final. Durante o momento de trabalho autónomo, monitorizei e apoiei a sua atividade. Durante a monitorização, fui orientando o trabalho e percebendo como os alunos expunham as suas justificações e explicações, negociavam significados, as estratégias que usavam e as suas formas de raciocinar. Após os momentos de trabalho autónomo e em tempo oportuno, seguiram-se discussões coletivas, por vezes também realizadas esporadicamente durante o trabalho na tarefa, caso as dificuldades reveladas pelos alunos assim o determinassem. Nestas discussões os alunos partilharam com a turma, os seus raciocínios e as estratégias usadas na resolução dos problemas.

Analisei as produções escritas dos alunos que constituíram a principal fonte de dados. Atendi simultaneamente às reflexões registadas após a lecionação das aulas. Estas focaram os diferentes momentos das aulas, as interações entre alunos e entre alunos e professora, bem como algumas das dificuldades sentidas. Assumi também como dados de análise registos áudio e fotográficos.

A análise dos dados norteada para dar resposta às questões de estudo, atendeu principalmente às estratégias usadas, às dificuldades reveladas pelos alunos, e se estes, revelavam perceção e compreensão da constante de proporcionalidade e do seu significado. Pretendeu, também, perceber se os alunos discerniam situações onde estavam presentes relações proporcionais de situações onde essas relações não existiam. As principais categorias a que atendi para analisar os dados, nomeadamente o tipo de estratégias usadas e as principais dificuldades dos alunos, convergiram com o que é considerado por Silvestre (2012) como aspetos do raciocínio proporcional: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenómeno descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões).

7.2. Principais conclusões do estudo

As conclusões que apresento decorrem da análise e interpretação dos dados recolhidos, atendendo às questões do estudo e ao seu objetivo.

1. Compreensão demonstrada ao longo da unidade de ensino do significado de constante de proporcionalidade e das relações multiplicativas em problemas de proporcionalidade direta. O início do trabalho na unidade de ensino decorreu de forma intuitiva e progressivamente foi desenvolvendo e cimentando as noções de razão, fração e equivalência de frações construindo o conceito de proporção e de relação proporcional. Na realização das tarefas 1, 2 e 3 os alunos trabalharam com comparações aditivas e multiplicativas de modo a perceberem as diferenças (Dole et al., 2012; Gurl et al., 2013). Este trabalho motivou momentos de discussão entre eles, uma vez que alguns alunos revelaram dificuldades em compreender como uma quantidade sendo maior, em termos absolutos, poderia ser menor em termos relativos.

Com a realização dessas tarefas os alunos começaram progressivamente a tomar consciência das comparações relativas e a estabelecer relações multiplicativas entre e dentro das variáveis, envolvendo o sentido de covariância e invariância. Foram desenvolvendo conhecimentos relacionados com as relações multiplicativas dentro das variáveis, o que lhes favoreceu a descoberta da constante de proporcionalidade, possível de constatar nas resoluções das tarefas 3 e 4.

O relacionar do conceito pré-existente de fração com o conceito de razão habilitou os alunos a tomarem a razão como uma divisão. Por determinação do quociente, puderam notar a existência ou não de um padrão regular, um valor constante. Intuitivamente começaram a descobrir a existência da constante de proporcionalidade e a desenvolver uma estratégia que os ajudava a identificar a existência de proporcionalidade.

As conexões realizadas entre os conceitos que detinham sobre os números racionais permitiram, também, que os alunos efetuassem inferências no trabalho com razões, razões equivalentes e proporções. Aprenderam que o estabelecimento de relações multiplicativas que transformavam uma razão noutra equivalente, constituía uma estratégia para formar proporções. Essa estratégia proporcionava-lhes a descoberta de um valor em falta e a comparação de razões, desenvolvendo deste modo uma noção básica para a compreensão das relações proporcionais (Lobato et al., 2010).

Por descoberta do operador funcional que relacionava duas variáveis, muitos alunos, identificaram que esse fator correspondia à constante de proporcionalidade ou ao seu inverso. Assim puderam relacionar quantidades e compreender o seu significado no contexto do problema, verificado pela análise das resoluções das tarefas 2, 3 e, principalmente, nas tarefas 4 e 5.

O trabalho com as várias representações como proporções, tabelas e gráficos, envolveu os alunos na compreensão das relações existentes entre as variáveis (Cramer, Post & Currier, 1993; Dole, 2008; Gurl, Artzt & Sultan, 2013). A descoberta do valor omisso e os problemas de comparação, envolvendo a exploração ou formação de tabelas e gráficos, determinaram de algum modo a descoberta do valor unitário ou da constante de proporcionalidade. Em certas situações os alunos concluíram que poderiam usar o seu valor para descobrir um valor em falta ou perceber a existência de proporcionalidade. Esta atividade, de modo informal, também induziu à generalização.

Os alunos, perante uma situação real, começaram a usar a constante de proporcionalidade, por exemplo preço por unidade de tempo ou tempo por volta, para determinar uma expressão algébrica, do tipo $y = kx$.

A atividade desenvolvida com a tarefa 5 permitiu perceber que os alunos começavam a abandonar o uso de estratégias pré-proporcionais e recorriam mais frequentemente ao uso de estratégia proporcionais, usando relações multiplicativas entre e dentro das variáveis (funcional e escalar), bem como a equivalência de razões e frações. Foi notória a compreensão do significado da constante de proporcionalidade e da relação entre uma quantidade e respetivo preço.

A resolução das tarefas 6 e 7, foi reveladora do estabelecimento de relações multiplicativas, na determinação da razão unitária ou constante de proporcionalidade e no uso do seu valor ou do seu inverso na descoberta de determinados valores em falta ou na comparação, quer qualitativa quer quantitativa.

As tarefas 8 e 9 envolveram o trabalho com escalas, um contexto menos familiar ao alunos e talvez por esse facto, revelaram de início algumas dificuldades em formar igualdades entre razões, para alcançar a representação formal de uma proporção e a descoberta do valor em falta. No entanto, verificaram-se progressos com o desenrolar da atividade. Os alunos compreenderam que apesar do contexto não lhes ser familiar, como nas tarefas anteriores, a forma de estabelecer relações proporcionais assentava, igualmente, em relações multiplicativas. Na tarefa 9, os alunos resolveram os problemas com alguma facilidade, usando estratégias proporcionais de forma mais consistente. Reconheceram e compreenderam que, uma vez que a razão representativa de uma escala é formada por antecedente 1, a composição de uma proporção é de fácil concretização pois o referido termo é facilmente convertido ou alcançado por uma relação multiplicativa dentro da mesma variável, usando um operador escalar.

2. Estratégias de resolução usadas pelos alunos para a resolução de problemas de proporcionalidade direta. A sequência de tarefas foi fundamental à evolução dos alunos. Inicialmente verificou-se uma maior tendência para o uso de estratégias pré-proporcionais. Por adições sucessivas ou multiplicações e divisões, ligadas ao cálculo de metades ou dobros, procedimentos que se ligavam aos seus conhecimentos prévios e espontâneos (Spinillo 2004), os alunos iam alcançando os valores pretendidos. Nas primeiras tentativas de resolução de problemas de valor omisso os alunos recorreram à estratégia de composição/decomposição (*building-up*).

Aos poucos, os alunos começaram a revelar algumas resoluções envolvendo o uso das estratégias pré-proporcionais e proporcionais em simultâneo, uma vez que logo nas primeiras tarefas, nomeadamente nas tarefas 2 e 3, as relações multiplicativas foram sendo descobertas, na formação de razões equivalentes e de proporções.

A inferência estabelecida entre a noção de fração e a noção de razão, com significado de quociente possibilitou-lhes a descoberta da constante de proporcionalidade. Nas tarefas seguintes, o valor invariável ou o seu inverso começou a ser compreendido e usado como operador no cálculo de um valor em falta.

A análise dos procedimentos que alunos usaram ao longo da realização da sequência de tarefas, permitiu perceber que descobriram e começaram a usar mais frequentemente estratégias proporcionais, quer escalares, quer funcionais. Revelou também, que os alunos, de um modo geral, mostraram capacidade para usar qualquer uma das estratégias proporcionais. Por vezes, embora com menor frequência, continuaram a usar estratégias pré-proporcionais. No entanto não percebi concretamente o que mobilizava um aluno a optar por uma ou por outra estratégia, constatando que a resolução dos vários itens que compunham uma tarefa mostrava o uso várias estratégias.

Pude perceber que certos alunos revelaram preferência pelo uso de uma determinada estratégia, uma vez que a usavam mais frequentemente. Uns mostraram preferência pela estratégia de composição/decomposição, por exemplo, Filipe, Angelina e Tomás. Pareceu que por esse método, compreendiam melhor as relações entre as quantidades, para alcançarem os valores em falta ou facilitava-lhes a explicação sobre as relações estabelecidas. Embora não fosse sinónimo de não saberem usar a estratégia escalar ou funcional, uma vez que, tal como outros alunos, na mesma tarefa ou em itens com estruturas semelhantes, também usaram estratégias proporcionais. Outros alunos nas suas resoluções evidenciaram o uso de várias estratégias em simultâneo, para resolução de um só problema, como Ana, Tomás e Mariana. O uso da constante de proporcionalidade ou seu inverso como fator multiplicativo foi também usado preferencialmente por alguns alunos, como, por exemplo, Alice e Henrique.

O valor unitário ou razão unitária foi uma estratégia por vezes usada ou destacada na elaboração de justificações e na tentativa de se explicarem as comparações entre as duas medidas de grandeza e no modo como estas variavam relacionado com a questão "*Quantos para um?*". Nos problemas de cálculo de percentagem a estratégia eleita pelos alunos consistiu no uso do valor da percentagem em dízima como operador.

A formação de uma proporção, recorrendo a igualdade de razões que envolvesse uma razão de consequente 100, foi uma estratégia pouco usada.

3. Estratégias usadas pelos alunos para identificarem a existência ou não de proporcionalidade direta. A estratégia usada nos problemas de comparação que envolveram a análise das razões, de modo a identificar a existência de proporcionalidade, prendeu-se com a verificação da existência de uma constante de proporcionalidade. Uma vez que inicialmente, se aprofundou a noção de razão e se interligou com a noção de fração, foi frequente os alunos relacionarem cada uma dessas representações como quociente alcançando o seu valor em dízima. A estratégia foi tomada como eficaz na verificação de existência ou não de proporcionalidade.

Por formação de igualdades entre razões, equivalência de razões, os alunos foram percebendo se, partindo da razão inicial, existia forma de alcançar uma outra razão que coincidisse com a apresentada como dado do problema, envolvendo o sentido de covariância, por estratégia escalar. Verificar se operador funcional, entre as variáveis, coincidia em ambas as razões, constituiu também uma forma dos alunos perceberem se a relação envolvia o sentido de invariância para assim determinarem a existência de proporcionalidade entre duas razões.

Na comparação de razões, a estratégia de composição/decomposição foi usada pontualmente e em determinados contextos. Os alunos relacionaram por decomposição determinadas medidas de grandeza, nomeadamente variáveis relacionadas com tempo ou preço, como na tarefa 4 e no teste final, completando com procedimentos aditivos e cálculo de dobros e metades, numa tentativa de perceberem se o resultado obtido coincidia com o valor dado no enunciado.

Os problemas pseudoproporcionais por vezes foram considerados pelos alunos como problemas de proporcionalidade. Quando tal aconteceu, implicou que estabelecessem relações diretamente proporcionais, multiplicativas dentro e entre as variáveis, na descoberta do valor em falta. A estratégia que usaram teve um cariz proporcional, determinando, desse modo, resultados incorretos.

Ao longo do trabalho na unidade de ensino, verificou-se uma evolução na resolução e compreensão dos problemas pseudoproporcionais. Os alunos foram percebendo a inexistência de proporcionalidade nos problemas que compunham as tarefas, nomeadamente no teste diagnóstico, na tarefa 6 e no teste final, verificando-se uma melhoria no seu desempenho.

4. Principais dificuldades apresentadas pelos alunos no trabalho com problemas de proporcionalidade direta e na distinção entre as situações proporcionais e não proporcionais. Inicialmente, os alunos revelaram alguma dificuldade na compreensão da noção de razão, no entanto esta rapidamente foi superada com a resolução das tarefas 1 e 2. As relações multiplicativas entre e dentro das variáveis foram lentamente descobertas. Mas, ao longo do percurso de aprendizagem, os alunos começaram a revelar habilidade em estabelecer relações multiplicativas, envolvendo o sentido de invariância e covariância nas relações proporcionais. No entanto, manifestaram pouca perspicácia no relacionar das grandezas, quando houve uma alteração do contexto dos problemas envolvendo o trabalho com escalas. Talvez por não ser um contexto familiar aos alunos, verificou-se pouca predisposição para representarem os dados dos problemas na formação de razão. Demonstraram também pouca predisposição no estabelecer de igualdades entre duas razões e na correta representação das medidas de grandeza como termos de uma proporção.

Os primeiros momentos de discussão sobre interpretação do contexto e da resolução dos problemas e do raciocínio envolvido permitiu aos alunos desenvolverem inferências e a apropriarem-se das noções de razão e proporção e das relações multiplicativas a usar nos problemas com escalas. Foi notória a progressão dos alunos na formação de uma proporção com descoberta do valor em falta e em relacionar medidas de grandeza entre desenho e realidade, no decorrer da resolução da tarefa 9.

A resolução de problemas proporcionais que envolviam o trabalho com números racionais não inteiros revelou um maior número de erros cometidos ou a desistência da descoberta do valor em falta. O relacionar de duas medidas de grandeza em que uma das variáveis ou a constante de proporcionalidade era representada por uma dízima, tornava o problema de difícil resolução para alguns alunos, tal como apresentado por Cramer, Post e Currier (1993). No trabalho com tabelas que envolvesse o relacionar de quantidades não inteiras, não houve facilidade na manipulação dos dados, ocorrendo vários erros de cálculo ou de representação numérica, ou não foram apresentadas quaisquer respostas. A estrutura numérica condicionou o desempenho dos alunos, como se constatou pela resolução das tarefas 6 e 7.

A determinação de uma percentagem, especificamente a descoberta do valor proporcional a uma percentagem relativa a uma quantidade, foi o problema de maior propensão ao erro, principalmente em termos de procedimento do cálculo e no uso da representação adequada. Tendencialmente os alunos usavam o valor da percentagem sem procederem à necessária conversão a dízima ou à razão de consequente 100. O erro foi persistindo no procedimento de cálculo, nomeadamente, na operação a efetuar, que passou pela realização de divisões.

Na identificação de situações proporcionais e não proporcionais, globalmente os alunos não revelaram grandes dificuldades. Por várias estratégias, tentaram verificar a existência de proporcionalidade ou apresentar uma justificação com base nos dados do problema atendendo às relações numéricas estabelecidas. Nos problemas pseudoproporcionais, embora se tenha verificado uma melhoria no desempenho dos alunos ao longo da unidade, alguns continuaram a considerá-los como proporcionais, possivelmente porque apenas atenderam aos dados numéricos dos problemas que indicam a necessidade da descoberta de um valor em falta.

7.3. Balanço final do estudo

Na perspetiva de contribuir para o raciocínio proporcional, um marco no raciocínio matemático dos alunos, o objetivo deste estudo consistiu em compreender se o trabalho com tarefas que explorem e interliguem conceitos essenciais da proporcionalidade direta, como as noções de razão, fração, razões equivalentes e diferentes representações como proporção, tabelas e gráficos, promovem a compreensão da proporcionalidade direta e do significado da constante de proporcionalidade.

Pela análise do trabalho desenvolvido na sequência de tarefas, pode concluir-se que o percurso de aprendizagem realizado pelos alunos possibilitou-lhes que, de forma intuitiva, compreendessem e estabelecessem relações entre duas medidas de grandeza. Naturalmente emergiram as noções de razão e proporção e o estabelecimento de relações multiplicativas determinando que, de forma progressiva, fossem interligando e aprofundando o sentido de covariância e invariância nas relações proporcionais.

O trabalho com as várias representações, exploradas e trabalhadas nas tarefas propostas em muito contribuiu para que os alunos desenvolvessem relações comparativas e multiplicativas, decorrendo no aperfeiçoamento do uso de estratégias proporcionais e na identificação de existência de proporcionalidade.

A sequência de tarefas que compôs a unidade de ensino fomentou a descoberta e a identificação do valor invariável, constante de proporcionalidade, intrínseco à existência de proporcionalidade direta e como o elemento numérico que relaciona proporcionalmente duas medidas de grandeza, notando que o seu valor teria a função de operador na determinação de um valor em falta. A interpretação do seu significado nem sempre foi bem conseguida, ao contrário da sua identificação como operador quer na perceção da existência de proporcionalidade quer na descoberta de valores em falta.

Uma vez que algumas razões podem ser interpretadas como frações, as conexões estabelecidas entre ambas foram facilitadoras da resolução de situações proporcionais, no uso de relações multiplicativas e na identificação da constante de proporcionalidade. O tópico dos números racionais, envolvendo as suas diversas representações, consistiu num apoio à compreensão da noção de razão e proporção e na resolução de problemas de valor omisso e de comparação, uma vez que foram resolvidos por formação de frações e razões equivalentes, ou por determinação (quociente) da sua representação em dízima, de acordo com Lamon (2012) que destaca a compreensão e o trabalho com números racionais como uma base para o raciocínio proporcional.

7.4. Reflexão Final

A proporcionalidade direta, normalmente pressupõe a resolução de problemas de valor omisso facilmente resolvidos por regras mecanizadas, especificamente a regra de três simples. Esta abordagem, também era a que usava nas minhas aulas. Trabalhava os conceitos de razão e proporção mas não lhes atribuía a importância devida. Na resolução de situações proporcionais ou para a identificação de existência de proporcionalidade sugeria tarefas do manual escolar que promoviam a descoberta da constante de proporcionalidade. Enfatizava a noção desse valor constante, no entanto o seu destaque centrava-se apenas na perceção da existência de proporcionalidade, dando-lhe alguma importância na identificação da razão unitária, "*Quantos para um?*". Tomava o significado desse valor, no contexto do problema, como de difícil alcance para os alunos.

Como professora também não me sentia com um conhecimento profundo sobre o tópico da Proporcionalidade Direta. Baseava o ensino na exploração de tarefas e exercícios do manual adotado, limitando o trabalho em sala de aula à sua resolução e a alguma discussão coletiva com os alunos sobre o processo de resolução, baseado maioritariamente no uso da regra de três simples e, pontualmente, no uso do valor da constante de proporcionalidade ou valor unitário. O meu ensino decorria essencialmente do uso da estratégia funcional do produto cruzado, uma vez que nos últimos anos, esta estratégia tem tido um papel de destaque, aquando da resolução de problemas de proporcionalidade, talvez por ser bastante eficaz, sendo considerada como procedimento essencial, uma vez que é requerido no 3.º ciclo.

Quando iniciei o projeto de dissertação, num primeiro esboço, tomei consciência do quanto limitava o processo de ensino-aprendizagem ao uso da regra de três simples ou da propriedade fundamental das proporções. No meu ensino quase não dava lugar à descoberta de outras estratégias e nem atribuía a devida atenção às relações que se poderiam estabelecer entre as medidas de grandeza. No entanto, sempre que um aluno recorria a outro procedimento ou raciocínio, solicitava-o a apresentá-lo à turma.

Desde logo percebi que era necessário aprofundar os meus conhecimentos neste tópico matemático. Aos poucos, com as primeiras leituras de vários autores e de trabalhos de investigação, percebi que o meu ensino era deficiente em promover a compreensão das relações entre medidas de grandezas, sobre as relações multiplicativas que se poderiam estabelecer dentro e entre as variáveis e na exploração das estratégias proporcionais, escalar e funcional. Tomei, também, consciência da necessidade de promover junto dos meus alunos e de uma forma mais aprofundada a compreensão do sentido de covariância e invariância nas relações proporcionais.

A base teórica a que atendi ajudou-me a aprofundar conhecimentos em torno da proporcionalidade direta e do raciocínio proporcional. Proporcionou-me uma outra visão sobre o ensino-aprendizagem do tópico e coligindo com os objetivos de aprendizagem, permitiu-me estabelecer o objetivo do estudo e formular a conjetura do processo de ensino-aprendizagem que seriam a linha orientadora desta investigação. As teorias foram perspetivando uma abordagem diferente da que era usual na minha prática letiva. Com a metodologia de investigação definida, a primeira fase do estudo ia sendo concretizada. A unidade de ensino foi esboçada e elaborada, simultaneamente à realização de revisão de literatura. A revisão de literatura que constituiu a base do quadro teórico deste estudo, orientou todo o trabalho investigativo.

O papel de professora-investigadora não foi de fácil desempenho principalmente na fase de realização da unidade de ensino, em que a função de professora sobrepôs-se à de investigadora. O monitorizar do trabalho autónomo, envolveu o incentivo à atividade e à aprendizagem por descoberta, o apoio aos alunos, o atender aos argumentos e explicações e tentar perceber raciocínios e dificuldades. O envolvimento no momento da monitorização limitou o meu papel de investigadora, tornando-se difícil abarcar eficazmente toda a dinâmica da aula, captar pormenores da atividade realizada em cada grupo de trabalho, e efetuar um registo da dinâmica que emergiu em cada aula.

Sempre que possível efetuei uma reflexão, registando como havia decorrido a aula, a nível das participações e dificuldades dos alunos, dos procedimentos de cálculo e estratégias que haviam sido usadas. Considero estas reflexões como fazendo parte de microciclos de análise sobre o processo como decorria a aprendizagem. Procurei analisar se existiam deficiências na redação e estrutura das tarefas condicionantes do desempenho e progressão dos alunos e se cada tarefa permitia alcançar os objetivos definidos na planificação. O tempo planeado para cada tarefa foi outro aspeto considerado, concluindo que em quase todas, nunca foi suficiente. A gestão do tempo foi condicionada pela própria atividade dos alunos. Por vezes, perante as suas dificuldades na descoberta e na realização de inferências, senti necessidade de efetuar momentos de pausa no trabalho autónomo, para intercalar com momentos de discussão coletiva.

Destaco a importância desses momentos de discussão, que decorreram na apresentação e discussão de estratégias e procedimentos e a partilha de ideias e explicações, pois foram fundamentais para promover a compreensão e desafiar o raciocínio dos alunos e simultaneamente para motivar os menos confiantes, para que pudessem ser bem-sucedidos na sua atividade, se envolverem no trabalho e não desistirem.

A fase da realização e da recolha de dados com o trabalho na unidade de ensino tomou um considerável número de aulas, o que provocou algum cansaço nos alunos. Considero, por isso, que a unidade de ensino necessita de reformulações. As tarefas devem ser de menor dimensão, retirando itens de estruturas repetitivas, para que a unidade de ensino não seja demasiado exaustiva, embora possa manter a mesma abordagem.

Decorrente de extensão da sequência de tarefas foi produzido um número considerável de produções escritas, o que tornou a sua análise morosa. Mas foi uma atividade bastante rica, pois os dados recolhidos constituíram uma excelente e interessante base de trabalho. No entanto, alguns aspetos constantes nas produções dos alunos foram difíceis de analisar, no sentido de captar de forma inequívoca, os aspetos do raciocínio e da maneira de pensar.

Considero também que uma forma de colmatar estas falhas ou limitações do processo investigativo, passa pela realização de entrevistas aos alunos, para que, com a devida calma e em diálogo, se compreenda mais profundamente o seu raciocínio e como se desenrolou a evolução ao longo do percurso de aprendizagem. Outra dinâmica, talvez mais proficiente, seja desenvolver uma investigação com trabalho colaborativo, entre um investigador e o professor. O trabalho colaborativo entre professor e investigador certamente permite uma investigação mais completa e rigorosa. Ambos os intervenientes podem discutir e refletir em conjunto sobre aspetos importantes da unidade de ensino, nomeadamente sobre as tarefas, sua realização e possível reformulação. O papel de investigador em exclusivo permite estar mais atento à observação da atividade dos alunos, podendo registar vários aspetos importantes, que podem perder-se no caso de desempenhar dupla função, professor-investigador. Possibilita observar e analisar o papel do professor, a sua prática letiva e o desenrolar do processo de ensino aprendizagem. No fundo pode permitir captar com maior detalhe o cenário de investigação.

Como investigadora, foi a minha primeira experiência, conduzida com muitas inseguranças e dúvidas sobre o desenrolar dos procedimentos, a sua realização e concretização. Muitos aspetos podem ter ficado por abordar e certas fases podem ter sido concretizadas de forma deficiente. Mas foi uma experiência que me proporcionou tomar contacto com uma série de aspetos que desconhecia, perspetivas e abordagens da didática. Foi um meio muito rico para ampliar conhecimento em prol da melhoria do processo de ensino-aprendizagem.

Apesar das limitações e dificuldades encontradas, este estudo foi da máxima importância para o meu enriquecimento profissional. Aprendi imenso sobre o tópico da Proporcionalidade Direta, o raciocínio proporcional, o que este integra, a sua importância e como contribuir para o seu desenvolvimento. Simultaneamente, ao ampliar e aprofundar esses conhecimentos científicos, adquiri aptidões para melhorar a minha prática letiva e proporcionar aos meus alunos uma aprendizagem mais eficaz.

Referências

Artut, P. D. & Pelen, M. S. (2015). 6th Grade students' solution strategies on proportional reasoning problems. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 197*, 113-119.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in Mathematics Education* (3rd edition, pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

Conceição, A., Almeida, M., Conceição, C., Costa, R. (2012). *MSI 6, Matemática Sob Investigação*. Areal Editores.

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Costa, S., & Ponte, J. P. (2008). O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. *Revista de Educação*, *26*(2), 65-100.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159-178). NY: Macmillan Publishing Company.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in Mathematics Education* (3rd edition, pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

de la Cruz, J. A. (2013) Selecting proportional reasoning task. *Australian Mathematics Teacher*; *69* (2), 14-18.

Dole, S., Wright, T., Clarke, D. & Campus, P. (2012) *Proportional reasoning*. Acedido em 18 de novembro de 2016 em https://pt.scribd.com/document/218780073/Proportional-Reasoning.

Dole, S., Clarke, D., Wright, T., & Hilton, G. (2012). Students' proportional reasoning in mathematics and science. In Tso,T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 195-202). Taipei, Taiwan: PME.

Dole, S. (2008) Ratio Tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(2), 18-22.

Garcez, T. (2016). *O raciocínio proporcional no quadro do pensamento algébrico: Uma experiência de ensino no 6.º ano* (Trabalho de Projeto de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Gurl, T. J., Artzt, A. F. & Sultan, A. (2013). *Implementing the Common Core State Standards through Mathematical Problem Solving, Grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. (2016). Design–Research–Based Curriculum Innovation. *Quadrante* 25(2), 7-23.

Kastberg, S. E., D'Ambrosio B., Davis, K. L. (2012). Understanding Proportional reasoning for teaching. *The Australian Mathematics Teacher 68*(3), 32-40.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York, NY. Routledge.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

ME (2011). *Prova de Aferição de Matemática 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. GAVE. http://bi.gave.min-edu.pt/exames/download/PAF-mat2ciclo_p_11.pdf?id=4822

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Matos, M. J., & Castelão R. (2006) *À descoberta da Geografia – 7.º ano*. Santillana Constância, Lisboa.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007) Teaching experiments within design research. *The international Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *2*(4), 435-440.

Nasution, A. A. & Lukito, A. (2015). Developing student´s proportional reasoning through informal way. *Journal of Science & Mathematics Education in Southeast Asia*, *38*(1), 77-101.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (edição original em inglês de 2000).

Ontario Ministry of Education (2012). Support Document for paying attention to Mathematical Education: *Paying attention to proportional reasoning*. Queen's Printer for Ontario. Acedido em outubro 2016, http://www.edu.gov.on.ca/eng/teachers/studentsuccess/ProportionReason.pdf

Oliveira., L. M. C. P., & Garcia, T.M.R. (2013). Negociação de significados a respeito do subconstruto razão na resolução e discussão de um problema. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática.* Sociedade Brasileira de Educação Matemática Curitiba.

Pedro, I. (2013). *Das sequências à proporcionalidade direta: Uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade* (Relatório de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7* (2), 41-70.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa Ministério da Educação - DGIDC.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85,* 36-42.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Graça Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Disponível em: http://www.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ Programa Matematica.pdf

Ponte, J. P., Silvestre, A. S., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O Desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidade*. Projeto IMLA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. *Educação Matemática em Foco, 1*(1), 9-29. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/ 260987156 _Tarefas_de_ exploracao_e_investigacao_na_aula_de_matematica [acedido em Aug 13, 2017].

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática, 133,* 26-35.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2015). As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do Professor. *Revista da Faculdade de Educação, 23*(1). 131-150.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante 25* (2), 77-98.

Rodrigues, C., Menezes L., & Ponte, J. P (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 65–78). Braga: APM.

Sandoval, W. A., & Bell, P.(2004). Design-Based Research methods for studying learning in context: Introduction. *Educational Psychologist, 39*(4), 199-201

Santos, E., Almeida, P., & Martins, S. (2011). *Matemática 6.º ano*. Santillana Constância, Lisboa.

Silvestre, A. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade direta: Uma experiência no 2.º ciclo*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Silvestre, A. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea, 5*(10), 61-89.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2012). Proporcionalidade Direta no 6.º ano de escolaridade: Uma abordagem exploratória. *Interações, 20,* 70-97.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2013). Raciocínio proporcional: Uma perspetiva atual. *Educação e Matemática, 123*, 17-20.

Sousa, H. (2010). *O estudo da Proporcionalidade Direta/ Inversa com alunos de um Curso de Formação e Educação*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Spinillo, A. G. (1994) Raciocínio Proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas educacionais. *Pro-posições, 5*(13), 109-114.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tjoe, H., & de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *The Journal of Mathematical Behavior, 33,*1-7.

Weber, B. M.; Pierone, A. & Strom, A. (2016). The importance of quantitative reasoning in middle school Mathematics teacher's proportional reasoning. Psychology of Mathematics & Education. *Mathematical Knowledge for Teaching,* 518-521.

Anexos

Anexo 1 – Pedido de autorização à Diretora do Agrupamento de Escolas

Exma. Sr.ª Diretora do Agrupamento de Escolas de ______________

Eu, Sandra Cristina Nunes Soeiro, Professora do Quadro do Agrupamento, do grupo disciplinar 230, venho por este meio solicitar autorização para a realização de um estudo empírico com alunos de uma das turmas de 6.º ano, com objetivo de estudar, através da implementação de uma experiência de ensino, a atividade em tarefas matemáticas numa abordagem mais aprofundada dos conceitos de proporcionalidade direta com intuito de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

Este estudo decorre no âmbito da realização de um trabalho de investigação base da produção de dissertação para obtenção do grau de mestre em Educação na especialização de Didática da Matemática, do Instituto de Educação da universidade de Lisboa, com orientação do Professor Doutor João Pedro da Ponte.

A consecução da investigação implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no final do 1º período e início do 2.º período do ano letivo 2016/2017, aquando da lecionação da Unidade Programática "Proporcionalidade Direta". De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários e entrevistas com alguns alunos.

Informo que o anonimato dos alunos e da escola serão preservados. As imagens e o som resultantes do estudo em sala de aula não serão divulgados, sendo de uso exclusivo para o trabalho académico. O trabalho a desenvolver com os alunos não lhes causará qualquer prejuízo, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática, do 6.º ano de escolaridade, em vigor. Aliás considero que, a participação dos alunos no estudo, poderá revelar-se uma mais-valia para a sua aprendizagem, pois terão oportunidade para refletir acerca da sua atividade matemática.

Os Encarregados de Educação serão informados sobre este estudo, sendo-lhes solicitada a devida autorização para a participação dos seus educandos neste trabalho.

Ao dispor para quaisquer esclarecimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

____junho de 2016

Pede Deferimento

Cordialmente

A Professora

(Sandra Soeiro)

Anexo 2 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. (ª) Sr. (ª) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito da realização do Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação na área de especialização da Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, pretendo desenvolver uma investigação, relacionada com o desenvolvimento do raciocínio proporcional, numa experiência de ensino.

O principal objetivo do estudo é compreender como pode ser desenvolvido o raciocínio proporcional, ao longo de uma experiência de ensino, dando ênfase às noções de razão, razões equivalentes, proporções e constante de proporcionalidade, e o uso destes conceitos para desenvolver estratégias de resolução e de análise de problemas que envolvem ou não situações de proporcionalidade direta.

Informo que, este trabalho não prejudicará a lecionação do Programa de Matemática. A atividade envolve estudar se os alunos compreendem e usam diferentes estratégias de resolução de problemas recorrendo ao raciocínio e não só a procedimentos mecanizados, aquando da lecionação da Unidade da Proporcionalidade Direta.

A concretização deste projeto de investigação implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio, fotografias ou digitalização dos trabalhos realizados pelos alunos de uma turma de 6º ano.

Declaro que será preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e as gravações de som resultantes da atividade dos alunos, não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico.

Este projeto de investigação já foi devidamente aprovado pelo Conselho Pedagógico do Agrupamento de Escolas ___________, faltando para a sua concretização a devida autorização dos encarregados de educação.

Ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais e na esperança da sua melhor colaboração, que desde já agradeço.

Despeço-me com cordiais saudações

_________, ___ de novembro de 2016

A professora

____

Sandra Soeiro

(Devolver à Professora) --

Autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando, _____________

____, n.º ___ do 6º ano, Turma _____ da Escola _______________________, a participar na investigação no âmbito Projeto de Dissertação de Mestrado em Educação, na área de especialização da Didática da Matemática, que me foi apresentado" Contributo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional – uma experiência de ensino no 6.º ano", a ser desenvolvido pela professora de Matemática, Sandra Soeiro.

___________-, _____ de novembro de 2016

Assinatura do Enc. Educação:_____________________________________

Anexo 3 – Diário de Bordo

Aula/Tarefa______________________________ Data___/_____/_____ 6ºAno

Tarefa destina-se a trabalhar:		
☐ Trabalho a Pares	☐ Pequeno Grupo	☐ Individual
Apresentação da Tarefa: Dúvidas colocada pelos alunos:		

Desenvolvimento da tarefa
Papel da Professora:
Dúvidas/Questões dos alunos:
Dificuldades reveladas:
Estratégias predominantes:
Representações predominantes:

Discussão do grupo turma
Intervenções dos alunos:
Participação do professor na gestão da discussão:
Conclusões/síntese :
Aspetos relevantes a destacar:

Após a aula
Aspetos a melhorar:
A professora como investigadora:
Reflexão final:

Anexo 4 – Tarefa do Estudo Piloto, 1.ª fase

Tarefa 1	Disciplina	MATEMÁTICA	Ano: 6.º
Nome: ________________________________ Nº: ____ Turma: ________			

* Tarefa constante na Tese de Doutoramento de Ana Silvestre (2012)

Lê as questões* com atenção. Podes efetuar/apresentar as tuas explicações ou justificações por meio de palavras, desenhos, esquemas, gráficos ou tabelas

1. O André e os seus amigos vão pintar as paredes da garagem.

Antes de começarem ele preparou uma grande quantidade de tinta misturando **3 latas de tinta branca com 2 latas de tinta azul escura.**

O Pedro, irmão do André, também veio ajudar e quando chegou percebeu que era necessária mais quantidade de tinta. Noutro recipiente, ele juntou 2 latas de tinta branca a 1 lata de tinta azul escura.

O que podes dizer sobre as misturas feitas pelos dois irmãos?

- ☐ A mistura do Pedro é mais escura que a mistura do André.
- ☐ A mistura do Pedro é mais clara que a mistura do André.
- ☐ A mistura do Pedro tem o mesmo tom que a mistura do André.
- ☐ Não é possível dizer qualquer informação sobre a tonalidade das misturas.

2. O Gil e Tomás praticam atletismo e no treino eles correm à mesma velocidade. Hoje, quando o Gil começou a correr o Tomás já tinha dado 2 voltas à pista.

Se o Gil fizer 5 voltas à pista, quantas voltas faz o Tomás?

3. Na pizzaria Bella Italia 3 pizas familiares chegam para o almoço de 8 pessoas.

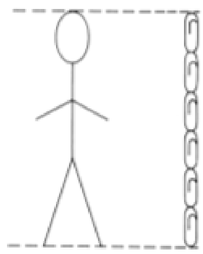
3.1.Quantas pizas serão necessárias para o almoço de 40 pessoas?

3.2. E se houver apenas 1 de piza, quantas pessoas podem almoçar?

4. A Sara e a Maria também praticam atletismo. Durante o treino a Sara deu 8 voltas à pista durante 32 minutos e a Maria deu 2 voltas à pista em 10 minutos. Qual das raparigas correu mais depressa?

5. De um grupo de trabalhadores, 12 operários constroem a vedação de uma escola em 5 dias. Quantos dias são necessários se existirem 3 operários? (Os operários trabalham diariamente o mesmo número de horas e ao mesmo ritmo.)

6. Na figura podes ver o Sr. Baixo medido com clips.



Sr. Baixo

O Sr. Baixo tem um amigo, o Sr. Alto. Quando medimos a altura dos dois amigos com fósforos, o Sr. Baixo mede quatro fósforos e o Sr. Alto mede seis fósforos.

Quantos clips são necessários para medir o Sr. Alto?

7. Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, levará 75 minutos a percorrer 125 quilómetros?

8. Na segunda-feira, o Luís adicionou 3 colheres de *Sunquick* (concentrado de sumo de laranja) a 12 copos de água. Na terça-feira, o Luís adicionou 5 colheres de *Sunquick* a 20 copos de água. Os sumos tinham o mesmo sabor a laranja?

9. A mãe da Inês colocou uma toalha no estendal e esta demorou 30 minutos a enxugar, quanto tempo demoraria se tivesse colocado 3 toalhas a enxugar?

10. O Luís e a Rosa vão fazer leite com chocolate para o lanche dos irmãos e dos primos. Nas tabelas estão representadas as quantidades usadas pelos dois amigos.

Receita do Luís

Leite (n.º de copos)	12
Chocolate em pó (n.º de colheres de sopa)	3

Receita da Rosa

Leite (n.º de copos)	20
Chocolate em pó (n.º de colheres de sopa)	5

10.1. Em que receita o leite sabe mais a chocolate?

10.2. Se o Luís usar a sua receita para fazer uma quantidade maior de leite com chocolate. Quantos copos de leite serão necessários se o Luís adicionar 60 colheres de sopa de chocolate em pó?

Leite (n.º de copos)	12	
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3	60

11. Na pizzaria Mama Mia dois grupos de amigos estão a almoçar. Os grupos partilham a conta da refeição de acordo com os dados representados na tabela.

Em qual das mesas a refeição foi mais cara?

	Número de pessoas	Preço total (euros)
Mesa A	8	48,80
Mesa B	10	65

Anexo 5 – Tarefas do Estudo Piloto, 2.ª fase

Tarefa 1

Canalizador precisa-se...
Pois, a Rita tem a torneira do jardim a pingar. A cada 8 minutos, caem 5 cl de água para um balde. Não vamos desperdiçar...

Considera os valores apresentados e ao que se referem:

1. Podemos comparar os centilitros (**cl**) de água que a torneira verte e o tempo que decorre.

1.1. Apresenta a **comparação** dessas **duas quantidades** sobre forma de **razão**:

Tal como $\frac{n.^{o} cl}{n.^{o} minutos}$

1.1.1. Atende à razão que acabaste de apresentar, parece uma fração, não é? Mas será que tem o mesmo significado? Qual a tua opinião?

1.1.2. Escreve a razão sob forma de quociente:

1.1.3. Indica quantos ***cl*** caem em **por cada minuto**:

1.1.4. Apresenta a razão entre n.º de **cl** que caem **por cada minuto** na forma de:

a) Dízima: b) Fração: c) Numeral misto :

2. Escreve a razão entre o número de minutos e o número de **cl**:

$\frac{n.^{o} minutos}{n.^{o} \mathbf{cl}}$ ou seja :

2.1. Calcula o **quociente** entre o número de **minutos** e o número **cl**:

2.1.1. Quantos minutos, leva a cair **um cl** (1cl):

2.1.2. Apresenta a relação entre o número de minutos que decorre por cada ***cl*** que cai, na forma:

a) Dízima b) Fração: c) Numeral misto :

2.1.3. Consegues descobrir **quantos cl** são vertidos em **30** minutos:

2.1.4. **Quantos minutos** decorrem para serem vertidos **30 cl**?

3. Completa a tabela com a relação entre os cl e os minutos:

n.º de cl	2,5	5		27,5	
n.º de minutos		8	16		36

3.1. Tendo em conta as relações- razões- que apresentaste calcula o seu quociente em relação:

a) Ao n.º cl e o tempo decorrido (n.º de minutos):

b) Ao n.º de minutos e o n.º de cl

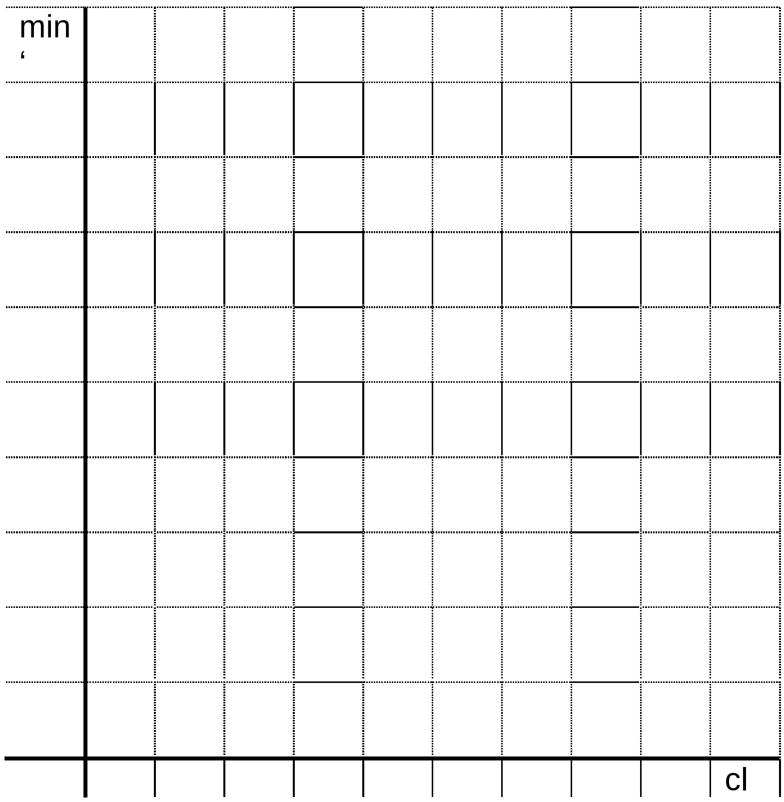
31.1. Analisa os quocientes obtidos na alínea a) e na b), tira as tuas conclusões e regista-as.

4. Apresenta para esta situação uma forma, expressão numérica, ou explica como calcular:

a) Quantos **cl** são vertidos em qualquer número de minutos (**m**):

b) O número minutos que decorre para verter qualquer número de cl (**cl**):

5. Também podes criar um gráfico cartesiano cujas coordenadas apresentem nas abcissas os cl e as ordenadas as minutos (m).



6. No dia seguinte a Rita regou o vaso de hortenses com a água do balde, mas no fundo ainda ficaram 120 cl. Voltou a colocar o balde debaixo da torneira, e passados 10 minutos o balde tinha 126,25 cl. Quantos cl, teria o balde, se a Rita voltasse 20 minutos depois da última vez?

Tarefa 2

Parte I

Lagartas....

A Rita aborrecida com o problema da torneira pingante, deu conta da presença de duas lagartas de diferentes espécies, pois as cores e tamanhos eram diferentes...

A Rita resolveu observar de perto, registou os seus comprimentos.

Quantos centímetros (cm) é a lagarta A maior do que a B?

Escreve a razão entre o comprimento:

da lagarta A e o comprimento da lagarta B:

da lagarta B e o comprimento da lagarta A:

Quanta vez é maior a lagarta A em relação à lagarta B?

4. O comprimento da lagarta B corresponde a que parte do comprimento da lagarta A?

5. Apesar de uma lagarta ser maior do que a outra, as duas deslocam-se à mesma velocidade, descobriu a Rita por observação.

A Rita registou que para as lagartas deslocam-se 10 cm em cada 4 segundos.

5.1. Escreve a razão entre o comprimento da deslocação (distância) e o tempo decorrido

5.2. Determina quantos cm andam por segundo:

5.2.1. Apresenta o resultado da relação de cm por segundo na forma de:

a) Quociente:______ b) Fração: _______ c) Numeral misto:______

5.3. Indica uma forma de determinar:

a) o tempo que as lagartas demoram a percorrer qualquer distância em centímetros cm.

b) a distância que percorrem em qualquer número de segundos (s).

6. Agora regista numa proporção a relação entre a distância do percurso e o tempo decorrido, caso as lagartas percorram 25cm.

$$\frac{10}{4} = \frac{}{}$$

6.1. Faz a leitura da proporção que acabaste de formar:

____

6.2.E se estiverem em andamento 1 minuto, escreve a proporção:

6.3.Representa por meio de cálculos recorrendo a proporções, tabela ou gráfico as relações proporcionais entre distância do percurso e tempo decorrido.

a) 5 cm
b) 20 cm
c) 16 segundos
d) 32 segundos

6.4. Calcula os quocientes verificando qual a constante de proporcionalidade das várias razões que apresentaste.
Observa e regista o que podes concluir:

Parte II

7. A Rita cheia de sede por tanta correria de lagartas, resolveu tomar um sumo feito à base de concentrado de laranja e convidou a vizinha para a acompanhar.

Para fazer o sumo a Rita usa 2 copos de 10ml de concentrado e 3 copos de 10ml de água.

7.1. Indica qual a razão entre:

a) O número de copos de concentrado e o número de copos de água:

b) O número de copos de concentrado e o número total de copos:

c) O número de copos de água e o número de copos de concentrado:

d) O número de copos de água e o número total de copos:

7.1.2.Em qual das alíneas anteriores a razão apresentada poderá ter o mesmo significado que uma fração? ________________________

Explica porquê a tua escolha:

7.2. Se a Rita pretender fazer mais quantidade de sumo e usar 3 copos de concentrado, quantos de água terá de usar para manter o mesmo sabor?

7.2.1 E se usar apenas um copo de água?

7.3. E se usar 8 copos de água, qual o número de copos de concentrado?

7.4. Escreve ou explica uma forma de calcular o número de copos de água para qualquer quantidade de copos de concentrado c:

8. A sua vizinha, Palmira, tem um agregado familiar maior, assim ao fazer o sumo, usa 4 copos de 15ml se concentrado e 6 copos de 15ml de água. Será que o sabor do sumo é igual ao sumo da Rita ou será diferente? Explica.

Tarefa 3

Delícia de chocolate!

1. **Para acompanhar o sumo vamos preparar um bolo!**
- pensou a Rita, colocando mãos à obra!

Bolo de chocolate

Para 6 pessoas

- 6 Ovos
- 240g de açúcar
- 1 colher de chá de fermento
- 360 g de farinha
- 3 dl de leite
- 3 ½ colheres de sopa de cacau em pó.

1.1. Que quantidade de farinha terá a Rita de usar se pretender fazer o bolo apenas para 3 pessoas?
Explica como chegar à resposta.

2. A vizinha Palmira costuma gastar 12 dl de leite, quando faz este bolo. Esse bolo dá para quantas pessoas?
Explica como chegar à resposta.

3. O bolo da Rita leva 40m a cozer num forno a 180º. Quanto tempo levará o bolo, da Palmira, a cozer, no forno à mesma temperatura? Explica a tua resposta.

4. A Palmira como adora chocolate, quando confeciona esta receita altera a dose de cacau adicionando à massa mais 3 colheres de sopa de cacau.

4.1. No caso de fazer o bolo para 9 pessoas:

a) Qual o número de colheres de cacau que adiciona?

b) E qual a quantidade de açúcar em gramas?

5. Completa a tabela para registar as quantidades em falta de acordo com as quantidades indicadas na receita que a Rita usa.

N.º de pessoas			6	
Ovos	1			
Açúcar				360
Leite		1,5	3	
cacau				

6. Qual a razão entre o número de ovos e a quantidade de açúcar?

7. Completa formando várias proporções que representem a relação entre a quantidade de colheres de cacau e as gramas de açúcar, da receita do bolo da Rita.

$$\frac{\quad}{240} = \frac{7}{\quad} \quad \text{ou} \quad \frac{\quad}{120} = \frac{3{,}5}{\quad} = \frac{\quad}{240} = \frac{8{,}75}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

a) Faz a leitura de uma dessas proporções:

8. Qual será a expressão numérica que te permite calcular para qualquer número de pessoas (n):

a) Número de ovos:

b) A quantidade de farinha:

c) A quantidade de leite:

Anexo 6 – Unidade de Ensino: Teste Diagnóstico

Avaliação diagnóstica	Disciplina	MATEMÁTICA	Ano: 6.º
Nome: ____ Nº: ____ Turma: ________			

1. Numa queijaria o rendimento de leite (litros) na produção de queijo (Kg) corresponde a $\frac{10}{2,5}$.

1.1. Explica o que esta relação quer dizer:

1.2. Quantos quilos de queijo se produzem com 5 litros de leite:

1.2.1. E apenas com 1litro?

1.2.2. Para produzir 7,5 kg de queijo, quantos litros serão necessários?

2. Indica se cada afirmação é **verdadeira ou falsa e explica porquê**:

2.1. Se colocar uma toalha na máquina de secar, esta leva 10 minutos a secar, se colocar 3 toalhas em simultâneo, estas levarão 30 minutos secar.

2.2. Se 10 gomas custam 1,25€ então 30 gomas custam 3,75€.

2.3. Se o Rui pintar uma parede do quarto com $12m^2$ em 3 horas, o Rui e o irmão levarão 6 horas.

3. O Rui para pintar uma parede do seu quarto de uma determinada cor azul, misturou **4** medidas de tinta **branca** e **3** medidas de tinta **azul**. No entanto o seu irmão misturou **8** medidas de tinta **branca** e **5** medidas da mesma tinta **azul.**

3.1. Será que a tonalidade de azul criada por cada irmão é igual? Ou será que uma é mais clara que outra? Explica.

3.2. Se o Rui fizer diferentes quantidades de tinta mas mantendo a sua tonalidade de azul (4:3), completa a tabela com as quantidades certas:

Medidas de branco		4	6		28
Medidas de azul	1	3		18	

4. No fim do trabalho cada um foi beber leite com chocolate. O Rui gosta de colocar no copo de leite (250ml), 3 colheres de sopa de chocolate em pó. A mãe colocou num litro de leite, 12 colheres de chocolate em pó. Será que o sabor a chocolate está ao gosto do Rui?

5. Para o jantar decidiram encomendar uma piza. Na Pizaria Roma, a piza familiar tem **8 fatias** e custa **16,80€.** Na Pizaria Itália uma piza familiar traz **10 fatias** e custa **22,80€**. Tendo as fatias de piza o mesmo tamanho, refere em que Pizaria é que a piza fica mais barata. Explica porquê?

5.1. Uma das pizas leva ovo cozido. Cada piza leva 5 ovos. Para cozinhar **1 ovo**, o tempo médio necessário é de **15 minutos**. Quanto tempo leva a cozer os **5 ovos**, se colocados na panela todos ao mesmo tempo? Explica.

Anexo 7 – Unidade de Ensino: Tarefa 1

Grupos desportivos

1- Catarina, a Inês e o Rui andam na mesma turma mas residem em diferentes freguesias. Cada um dos amigos pertence ao Grupo Desportivo da sua Freguesia. Os Grupos Desportivos são formados por jovens, rapazes e raparigas. O Grupo Desportivo Gym, ao qual a Catarina pertence, é composto por **21 raparigas**. O grupo do Rui, o Grupo Desportivo dos Templários por **40 raparigas**.

1.1. Indica qual o grupo que possui mais raparigas?

1.1.2. O Grupo Desportivo Gym é formado por **30 jovens**.
O Grupo Desportivo dos Templários por **100 jovens**.

a) Regista a **comparação entre o número de raparigas e o número total de jovens**.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários

1.1.2. Agora com estes dados compara o número de elementos de cada grupo, qual o grupo com mais raparigas? O que podes concluir.

1.2. Regista a **comparação entre o número de rapazes e o número de raparigas**:

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários

1.2.3. Indica **a fração de rapazes** de cada grupo:

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários

1.2.4. Qual a **percentagem** de rapazes do Grupo de Desportivo Templários? Mostra com chegaste à resposta.

1.2.5. Qual a **percentagem** de raparigas de ambos os Grupos? Mostra com chegaste à resposta.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Templários

2. A Inês é de uma outra freguesia e pertence ao Grupo Desportivo da Roda. O seu grupo contém **42 raparigas** num total de **60 jovens**.

2.1. Indica a **comparação** entre o **número de raparigas** e o **número total de jovens** do grupo desportivo da Inês.

2.1.1. Atende à comparação que indicaste entre o **número de raparigas** e o **número total de jovens** do Grupo Desportivo Gym e do Grupo Desportivo da Roda.

a) Calcula o **valor** de cada uma **das razões.**
O que podes concluir.

Grupo Desportivo Gym	Grupo Desportivo Roda

2.2. Qual a **percentagem de raparigas** do Grupo Desportivo da Roda. **Compara-a** com a do grupo Gym. Que podes concluir?

2.3. Os Grupos Desportivos têm jovens com idades entre os 10 e os 18 anos.

Dos 60 jovens que constituem o Grupo Desportivo da Roda, **10% têm 11** anos, **20% tem 12** anos e **25% tem 15** anos. Quantos são os jovens:

a) Com **11** anos

b) Com **12** anos

c) Com **15** anos

Anexo 8 – Unidade de Ensino: Tarefa 2

Remates à baliza...

1. O Rui e a Catarina foram treinar juntos no campo da escola.
   No treino, a Catarina fez **10 remates** à baliza e acertou **3**, fez assim **3 golos**.
   O Rui fez **20 remates** e marcou **5** golos.

1.1. Quem fez mais golos neste jogo?

1.2. Escreve a **razão entre o número de golos e o número de remates:**

a) Da Catarina b) Do Rui

c) Analisa as razões que acabaste de escrever. Quem obteve melhor desempenho neste jogo? Justifica.

R: A Catarina porque marcou mais golos em relação aos remates que fez, ex. o Rui fez o dobro dos remates mas marcou não obteve o dobro dos golos.

1.3. Existe alguma diferença entre a pergunta 1.1) e 1.2)? Por que razão o melhor desempenho é diferente de marcar mais golos? Que operações aritméticas efetuas e como poderás justificar a resposta a esta questão?

1.4. Qual a percentagem de golos concretizados pela Catarina?

1.5. E qual a percentagem de remates falhados do Rui?

2. A Inês, entrou no jogo e fez 12 remates.

2.1.Se a Inês teve um desempenho igual ao do Rui, quantos golos marcou? — = —

3. Uns dias depois voltaram a encontrar-se para jogar aos remates.

A Catarina **rematou 14** vezes e o Rui **rematou 20** vezes.

3.1. Agora escreve uma situação usando esses números, em que o desempenho da Catarina seja igual ao desempenho do Rui: — = — . Explica como pensaste.

Anexo 9 – Unidade de Ensino: Tarefa 3

O *iPad* da Inês

1. A Inês tem um *iPad* com vários itens, **30 *apps*** (aplicações), **algumas músicas** e **18 livros.** Dos 18 livros, 10 são de mistério e 8 são sobre desporto.

1.1. Qual é a **razão entre o número de *apps* e o número de livros:**

1.2. Qual é a **razão entre o número de livros para o número de *apps*:**

1.3. **Escreve outras razões** que comparem o **número de itens de um tipo** para o **número de itens de outro tipo** e faz a sua leitura:

1.4. A Inês reparou que a <u>razão entre o número de livros de mistério e o número de *apps*</u> é a **mesma** que a <u>razão entre o número de livros e o número de músicas</u>. Quantas músicas, tem o seu *iPad*?

1.5. A Inês instalou mais algumas aplicações, ficando com **35 *apps*.** Quantas músicas terá que gravar no seu *iPad*, **para manter a igualdade entre as duas razões,** à semelhança do que efetuaste na alínea 1.4. ?

2. A Inês é cliente da operadora "*Intervoz*". O tarifário aplicado na realização das chamadas corresponde a **21 cêntimos por cada 30 segundos**.

2.1. Completa a tabela que **representa a razão entre o custo das chamadas e a respetiva duração**. Mostra os cálculos que efetuares.

Duração minutos	Custo €
2	
3	
4	
	2,10
	4,20
30	

2.2. Qual **o preço de chamada por minuto**? Que operação efetuaste para o descobrir?

2.3. Qual será o custo de uma chamada com 45 minutos de duração? Mostra como chegaste à tua resposta.

3. A Catarina tem outra operadora, " *VozNet*". Esta operadora cobra uma taxa de adesão mensal de 5€ e o valor da chamada por minuto encontra-se na tabela abaixo.

Duração minutos	2	3	4	5	30
Custo €	0,70	1,05	1,2	1,40	7,90

3.1-Observa e analisa a tabela.

a) As grandezas (duração/custo) são diretamente proporcionais? Explica porquê?

4. Se ambas, as amigas, falarem **30 minutos por mês**. Qual a operadora **mais económica**?

5. A operadora, *Intervoz,* propôs à Inês as condições de tarifário apresentadas na figura 1, para a net móvel no seu *iPad*:

5.1. Qual é o melhor tarifário?

Tarifário A: **6 €** por 90 minutos de uso.

Tarifário B: **2.75 €** por cada 45 minutos de

Tarifário C: **3 €** por cada 60 minutos de uso.

(fig.1)

Anexo 10 – Unidade de Ensino: Tarefa 4

De volta aos treinos!

1. Apesar de pertencerem a Grupos Desportivos diferentes os amigos, Catarina, Rui e Inês por vezes treinam juntos. Hoje combinaram encontrarem-se no campo de treinos dos Templários.

1.1. Quando a Inês chegou, a Catarina já tinha dado **3** voltas à pista de corrida. Sabendo que a seguir correram lado a lado, quando a Catarina completou **9** voltas, quantas voltas fez a Inês? Mostra como chegaste à resposta.

1.2. A Catarina para dar as **9** voltas, correu durante **45** minutos, sempre à mesma velocidade. Se a Inês a acompanhou quanto tempo demorou a correr **6** voltas? Mostra como chegaste à resposta.

1.3. O Rui por vezes também treina com as colegas e em **32** minutos dá oito voltas à pista. O Rui será mais rápido que as amigas? Explica como pensaste.

2. No dia anterior o Rui havia treinado com a Catarina na pista de treinos do Grupo Gym. O Rui deu **9** voltas em **36** minutos e a Catarina deu **4** voltas em **16** minutos. Qual dos amigos foi mais rápido?
Explica como pensaste.

3. Nos torneios desportivos o tempo gasto na corrida de atletismo é registado. Observa as tabelas elaboradas a partir dos registos da corrida do Rui e da Inês.

Rui	
Minutos	**Metros**
3	**150**
5	**250**
7	**350**
9	**450**
10	

Inês	
Minutos	**Metros**
2	**75**
4	**150**
6	**250**
8	**275**
10	**300**

T.p.c, constrói um gráfico que represente cada uma das situações, na folha que te é dada e analisa-os.

3.1. Com base na análise das tabelas, responde às seguintes questões. Apresenta todos os cálculos ou explica como chegaste às respostas.

a) Poderás calcular **quantos metros** corre o Rui em **10** minutos? Se sim, quantos metros são?

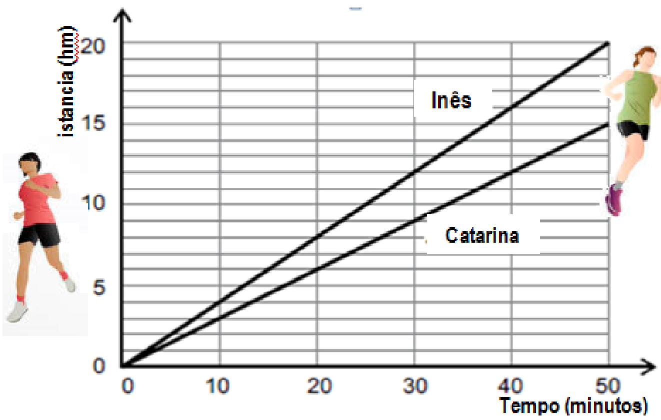
b) Poderás dizer **quantos minutos** levará o Rui a correr **550**m? Se sim, quantos minutos levará?

c) Poderás dizer **quantos minutos** levará a Inês correr **350** metros? Justifica a tua resposta.

d) O que poderás concluir em relação às grandezas tempo/distância na corrida do Rui e da Inês?

e) Qual a **constante de proporcionalidade** presente na relação de grandezas da corrida do Rui? Qual o seu significado?

4. Analisa o gráfico que apresenta a relação entre tempo/ distância percorrida em **hm** numa corrida entre a Inês e a Catarina.



4.1. Podes indicar quantos metros são percorridos numa hora, por cada uma das amigas? Explica.

4.2. É possível indicar **quantos metros** percorre, cada uma, **por minuto**? Se sim, indica-o e explica por que razão é que isso é possível?

4.2.1. Como se **designa o valor** que indica quantos metros corre por minuto, cada uma?

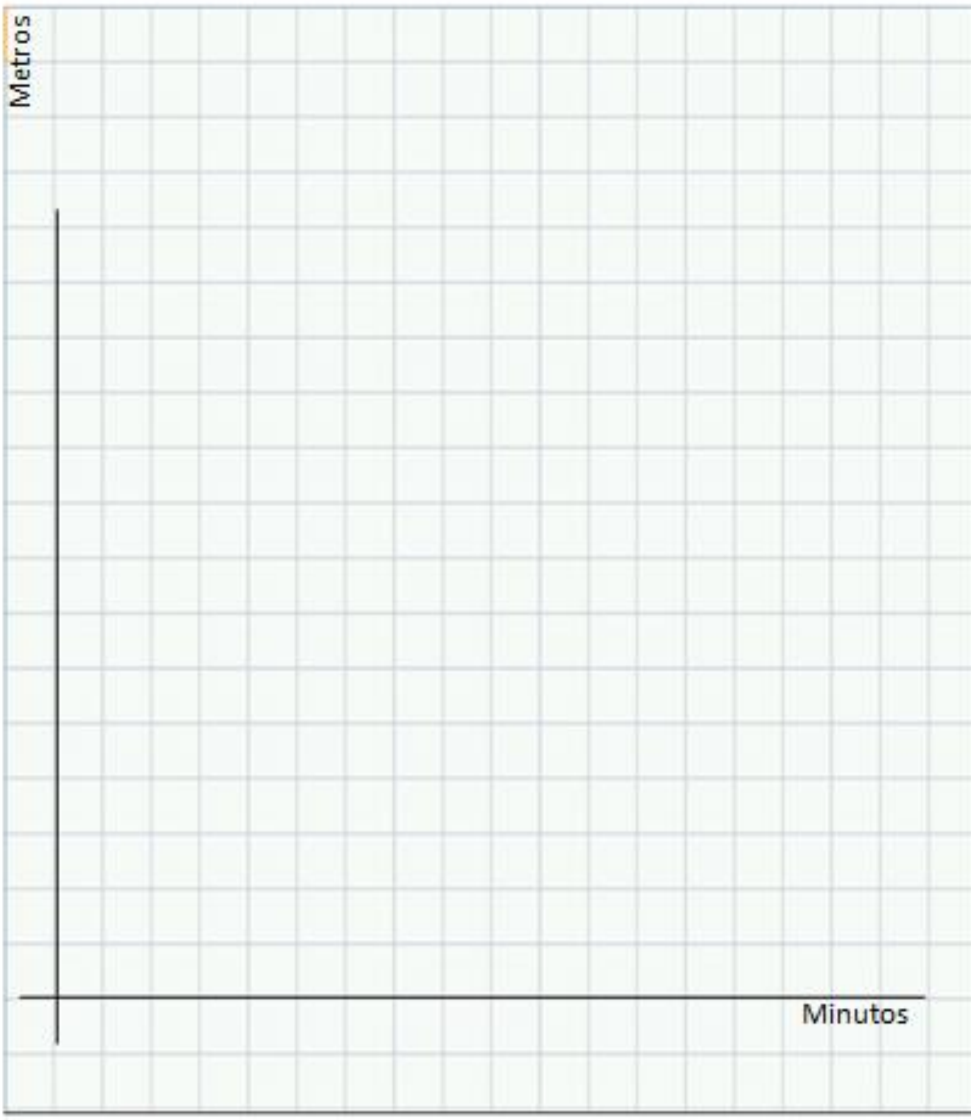
Tarefa 4-TPC	Disciplina	MATEMÁTICA	Ano: 6.º
Nome: ______________________________ Nº: ____ Turma: ________ Data___/___/_____			

1. Representa os dados das tabelas, cada uma das razões, num gráfico.

Une as coordenadas de cada gráfico, com uma linha.

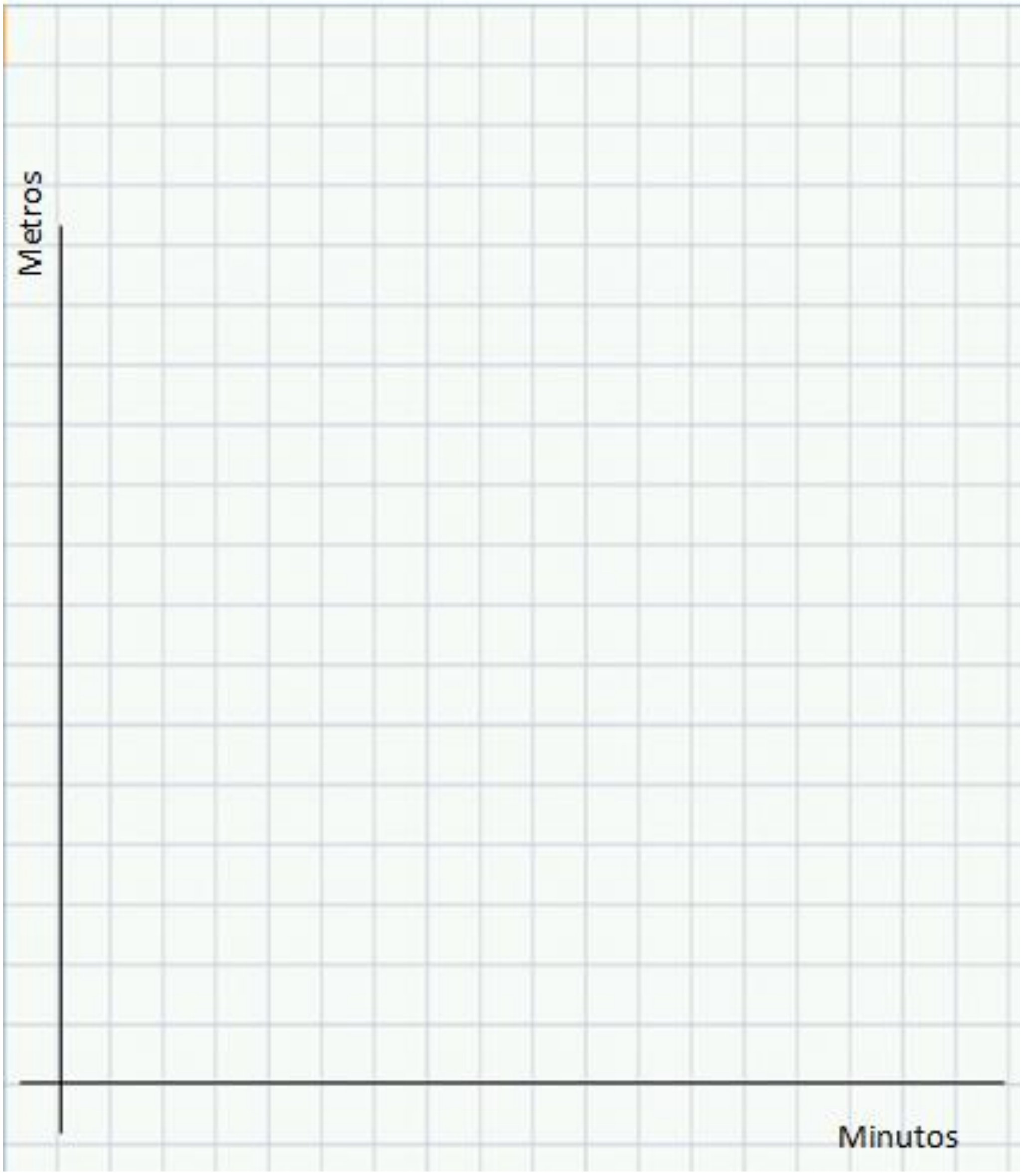
Rui	
Minutos	**Metros**
3	**150**
5	**250**
7	**350**
9	**450**
10	

____



____

Inês	
Minutos	**Metros**
2	75
4	150
6	250
8	275
10	300



2. Analisa cada um dos gráficos e a linha que traçaste em cada um deles. Que diferenças, verificas? O que podes concluir?

Anexo 11 – Unidade de Ensino: Tarefa 5

Caixa de chocolates!

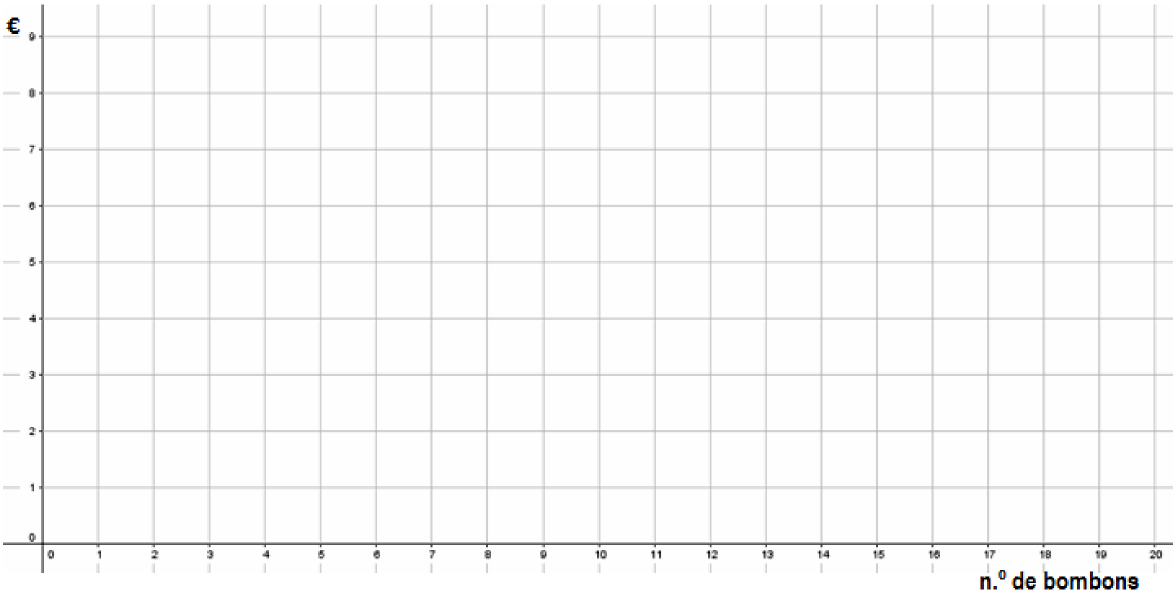
1. Os três amigos, Rui, Inês e Catarina, juntamente com mais outros 2 colegas compraram uma caixa de chocolates por 15€, que contêm 60 bombons! Mas nem todos contribuíram com a mesma quantia de dinheiro, como podes observar na tabela apresentada.

Quando distribuírem os bombons entre si, o número de bombons que cada um receberá será **proporcional** à quantia que deu.

1.1. Com base na informação apresentada, na tabela, indica quantos bombons deverá receber cada amigo:
Podes apresentar as proporções completando a tabela.

	Quantia €	**N.º bombons**
Inês	3€	
Catarina	2€	
Rui	4€	
Paulo	1€	
Laura	5€	

1.2. Constrói um gráfico com as coordenadas que correspondam às razões entre o número de bombons e o seu valor em €, de acordo com os elementos da tabela.



1.2.1. Qual o valor de cada unidade (**1** bombom)?

1.2.2. Se uma caixa dos mesmos chocolates contiver 36 bombons, qual o preço da caixa? E qual o preço de uma caixa com 90 bombons?

1.2.3. Como se pode calcular o preço de uma caixa de chocolates com qualquer número (n) de bombons? Explica por palavras tuas ou por uma expressão numérica.

2. Em relação à situação da Inês:

a) Qual a **fração** de dinheiro que pagou?

b) Que **fração** de chocolates recebeu?

2.1. A **fração** de dinheiro que a Inês pagou corresponde **a que percentagem** do preço total da caixa?

Anexo 12 – Unidade de Ensino: Tarefa 6

Refresco?

1. Depois dos treinos os amigos vão sempre a casa de um deles para lanchar. É costume prepararem sumo feito à base de concentrado de laranja ao qual adicionam água. O frasco de concentrado de laranja refere: **Adicionar sumo concentrado e água na razão de 2:3**.

1.1. Como se deve proceder para preparar o sumo?

1.2. A Catarina referiu:" Vamos fazer o dobro da quantidade indicada. Colocamos o dobro de concentrado, 4 medidas de sumo concentrado e 5 medidas de água!"

1.2.1. Concordas com a proporção que a Catarina fez? Qual a tua opinião, justifica?

1.2.2. Se preparar o sumo da forma que a Catarina refere, este tem maior, menor ou igual sabor a laranja?

2. A Inês prepara o sumo com base em 6 copos de 10 cl de concentrado para 9 copos de 10 cl de água.

2.1. Qual a razão entre o número de partes de concentrado para o número de partes de água.

2.1.1. A Inês elabora o sumo com base na razão indicada no frasco do sumo concentrado? Justifica ou mostra porquê.

2.1.2. E se usar a razão 17 : 25,5 será que corresponde a uma razão equivalente? Justifica.

2.2. Qual a fração do número de partes de água no sumo.

2.3. Qual a percentagem de concentrado no preparado de sumo.

2.4. Se a Inês prepara um jarro de $1000ml$ de sumo usando a razão indicada, 2:3, quantos ml usará de concentrado? E de água?

3. Completa a tabela com o número de copos que são necessários para o preparado de sumo ter sempre o mesmo sabor, sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais.

N.º de copos de Concentrado		1	2		$3\ \frac{2}{3}$		7
N.º de copos de água	1		3	$4\frac{1}{2}$		9	

3.1. Explica uma forma rápida de descobrir o número de copos de água para qualquer quantidade de copos de concentrado. Explica por palavras tuas ou por uma expressão numérica.

4. O Rui costuma preparar o sumo num jarro e coloca-o no frigorífico cerca de **uma hora** para refrescar e ficar na temperatura ideal!
Nos dias de festa costuma preparar 3 jarros com sumo. Por quanto tempo terá de deixar os 3 jarros no frigorífico para ficarem frescos e à temperatura ideal?

Anexo 13 – Unidade de Ensino: Tarefa 7

Tarefa 7- Trabalho Individual	Disciplina	MATEMÁTICA	Ano: 6º
Nome: ____ Nº: ____ Turma: ________			

Delícia de chocolate!

1. Para o lanche dos amigos, a acompanhar o sumo, a mãe do Rui preparou um bolo de chocolate de acordo com a receita apresentada!

Bolo de chocolate
Para 6 pessoas

- 6 Ovos
- 240g de açúcar
- 1 Colher de chá de fermento
- 360 g de farinha
- 3 dl de leite
- 3 ½ Colheres de sopa de cacau em pó

1.1.1. Que quantidade de farinha terá a mãe do Rui que usar se pretender fazer o bolo apenas para os 3 amigos?

1.1.2. E quantas colheres de cacau?

1.2. A mãe da Catarina também costuma fazer esta receita. No entanto costuma gastar 12 dl de leite, quando faz este bolo. O seu bolo dá para quantas pessoas?

2. Completa a tabela para registar as quantidades em falta de acordo com as quantidades indicadas na receita que a mãe do Rui usa.

N.º de pessoas			6	
Ovos	1			
Açúcar				360
Leite		1,5	3	
Cacau				

3. Explica como descobres rapidamente a quantidade de açúcar em gramas, a usar na confeção do bolo, para qualquer número de pessoas. Explica por palavras tuas ou por uma expressão numérica.

4. Por vezes a mãe da Catarina altera a receita. Retira o cacau e coloca coco ralado.
A mãe da Catarina coloca 35% do peso da farinha em coco ralado e coloca menos 15% do peso da farinha.

4.1. Indica o peso que o bolo leva:

a) de coco ralado:

b) de farinha:

Anexo 14 – Unidade de Ensino: Tarefa 8

Viagem!

1. Este fim-de-semana o Grupo Desportivo dos Templários irá a um torneio de futebol. O autocarro do Grupo Desportivo irá desde a sede da Central Rodoviária, até ao ponto de encontro dos jovens desportistas. O itinerário foi entregue ao motorista que indicava a seguinte escala.

1.1.Escreve a razão entre a distância no desenho e a distância na realidade.

1.2. O motorista terá de abastecer. As bombas de combustível encontram-se a $\frac{1}{3}$ da distância da Sede.

a) A quantos **cm** corresponde no desenho e à distância na realidade?

b) Escreve a proporção que podes formar com as razões anteriores:

1.3. Escreve uma outra proporção em que o tamanho no desenho seja de **1 cm**.

2. Atende ao mapa da Madeira que se encontra na figura. No mapa a distância da Ribeira Brava ao Funchal é de **3 cm** que na realidade corresponde a **15 km**.

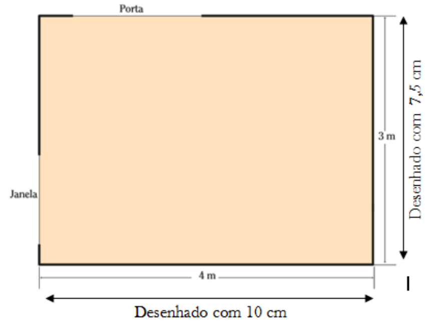
2.1. Escreve a razão entre a distância no mapa e a distância real:

2.2. Escreve uma razão equivalente à anterior mas que represente a escala do mapa ($\frac{1}{x}$):

Anexo 15 – Unidade de Ensino: Tarefa 9

Imagens à escala.

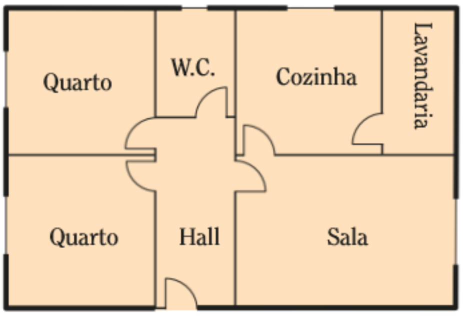
1. A mãe da Inês quer colocar moveis novos na sala que tem 4 metros de comprimento por 3 metros de largura. Para perceber quais os móveis que poderão caber na sala, fez um desenho com a planta da sala para levar à loja. Observa e analisa a figura.



1.1. As medidas das dimensões usadas no desenho da planta da sala são diretamente proporcionais às medidas das dimensões reais da sala? Explica a tua resposta.

1.2. Em que escala está desenhada a planta da sala?

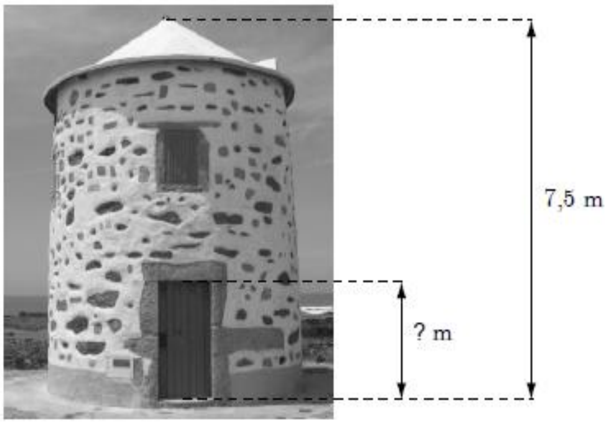
2. A planta da casa da Inês foi desenhada na escala 1:200. Usando a régua faz as medições necessárias e determina:



2.1. As dimensões reais da casa.

2.2. A área total da casa.

3. O moinho que está representado na figura tem 7,5m de altura.



3.1. Qual a altura aproximada da porta do moinho, em metros? Mostra como chegaste à tua resposta.

Adaptado da Prova de Aferição de 2011

3.2. Qual a escala em que o moinho está desenhado?

4. A Inês tem uma amiga a viver em Viseu. Ao consultar o mapa de Viseu, a Inês disse:
"_ 1 cm neste mapa corresponde a 300 cm na realidade".

4.1. Concordas com a Inês? Justifica a tua resposta.

4.2.Calcula a distância real entre os dois pontos assinalados no mapa:

4.3. Se dois locais distam entre si 1,5 km na realidade, qual a distância a que estão representados no mapa?

5. Calcula o comprimento aproximado de Portugal Continental, sabendo que num mapa com a escala de 1/17 000 000, a distância entre os limites Norte e Sul é de 3,3 cm. Apresenta os cálculos.

Anexo 16 – Unidade de Ensino: Teste Final

Disciplina: MATEMÁTICA	Ano: 6.º
Teste Escrito (versão 1) Duração do teste: 90 minutos	
Nome: ____ Nº: _____ Turma: _____	
Classificação: _____________________________, (_______%) Data: _____ / _____ / _____	
Prof.: ___________________________ Enc. de Educação: ___________________________	

(Lê com atenção as questões, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar)

1. Na turma do António, há 8 rapazes e 12 raparigas.

1.1 Atendendo à relação entre o número de rapazes e o número de raparigas da turma do António, indica:

A. A razão entre o número de raparigas e o número de rapazes:

B. A razão entre o número de rapazes e o número total de alunos da turma:

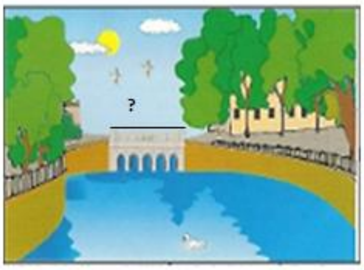
C. A fração de raparigas da turma:

D. A percentagem de rapazes da turma (mostra como pensaste):

2. Determina o número em falta para formar uma proporção, (mostra como pensaste):

a) $\frac{6}{45} = \frac{}{15}$ b) $\frac{7}{35} = \frac{3}{}$

3. O António está a ler um livro que apresenta uma ponte desenhada à escala 1/5000, a ponte está desenhada com 2 cm . Qual o comprimento real da ponte? Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.



R:____

4. O pai do António costuma comprar um jornal desportivo todas as manhãs e reparou que o número de páginas era variável. Assim durante uma semana registou o número de páginas do jornal.

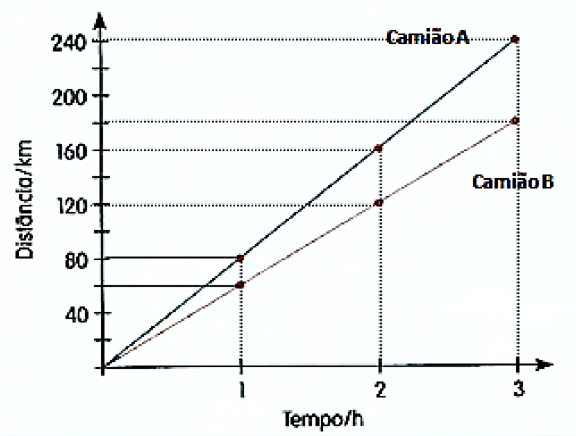
	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado	Domingo
n.º de folhas	4	10	11	13	15	17	
n.º de páginas	16	40	44			68	72

4.1. Completa a tabela sabendo que número de páginas do jornal é diretamente proporcional ao número de folhas. Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.

4.2. Qual é a constante de proporcionalidade? O que representa esta constante no contexto do problema?

4.3. Escreve a expressão numérica ou explica como descobrir o número de páginas para qualquer número de folhas (n) do jornal.

5. No gráfico seguinte estão representadas as distâncias percorridas por dois camiões, o camião A e o camião B, num determinado tempo.



5.1. Qual dos camiões foi mais rápido?
Justifica a tua resposta.

R:____

____

____

____

5.2. Quanto tempo demora o Camião **B** a percorrer 180 km? Explica ou mostra como chegar à resposta.

R:____

5.3. Se a viagem do Camião A, apresentar uma relação diretamente proporcional, quanto tempo demora o camião A a percorrer 480 km? Explica ou presenta todos os cálculos que efetuares.

R:____

5.4. A distância percorrida e o tempo de viagem são grandezas diretamente proporcionais para algum dos camiões? Justifica a tua resposta.

R:____

____

____

6. A mãe do António foi ao supermercado comprar detergente para a roupa e deparou com a situação representada na figura. A embalagem pequena dá para 20 doses e custa 6,80€, a embalagem grande dá para 30 doses e custa 10,50€.

6.1.O número de doses é proporcional à quantidade de detergente de cada embalagem? Justifica. Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.

R:____

6.2. O preço do detergente é diretamente proporcional à quantidade? Justifica. <u>Apresenta os cálculos ou explica como pensaste.</u>

R:____

6.3. Qual é a compra mais económica? Explica porquê.

R: ____

____

____

6.4. Por vezes a embalagem grande com 1 500g. faz uma oferta, inclui no peso do detergente mais 30%. Qual é o peso total do detergente, incluindo a oferta?

R:____

6.5. A mãe do António, normalmente coloca 5 camisolas na máquina de lavar e o tempo da lavagem é de 40 minutos. Se a mãe do António colocar 10 camisolas ao mesmo tempo na máquina de lavar, qual será o tempo da lavagem?

R: ____

____