

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



TABELAS DE MORTALIDADE DINÂMICAS NA MITIGAÇÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE

Daniela Saraiva Amaro

Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Trabalho de Projeto orientado por:
Prof. Doutor Carlos Albuquerque

2019

Agradecimentos

Um trabalho de mestrado passa por diversas etapas. Primeiro começamos pelo desespero de termos que escolher um tema, nesta fase senti que queria desafiar-me, fazer algo fora da minha zona de conforto. Depois, começamos a corrida na procura de um orientador. Nesta fase tive a sorte de contar com o apoio do Professor Carlos Albuquerque que se mostrou desde o início entusiasmado por ser o escolhido para abraçar este projeto. Lembro-me da primeira reunião que tive com o professor como se fosse hoje. Fui apresentada com um dossier verde cheio de artigos para me auxiliarem no arranque da minha dissertação. Esta primeira reunião fez-me sentir segura e confiante da minha escolha.

Numa fase seguinte começam as leituras sobre o tema. O que acontecia na maior parte das vezes deve ser comum a muitos estudantes: adormecia. A verdade é que com o passar do tempo e com os desafios a serem superados, eu sentia-me mais confiante com o assunto e interessava-me cada vez mais por cada leitura que fazia. Se antes adormecia no primeiro parágrafo, no final tinha que ir controlando as horas para não me deitar muito tarde que no dia seguinte era dia de trabalho. No meio das leituras e da escrita haviam as ditas fases de procrastinação. Quem está a fazer uma dissertação sabe que temos “imenso” tempo para o fazer. No final acabamos por perceber que já perdemos imenso tempo e começamos a ficar stressados e...desmotivados! E por essa razão, procrastinamos mais um pouco.

Entretanto, toda a gente vai perguntando como vai a tese e a nossa resposta por entre os apertos do estômago e a consciência pesada: “Vai bem, obrigada!”.

Numa fase seguinte, depois de algumas reuniões, envias o que tens escrito até agora ao teu professor. E eis que ele devolve a dissertação carregada de comentários. Começam a correr as lágrimas nos olhos quando percebes que quase tudo o que fizeste está mal. Nesta fase parece impossível acabares a dissertação. Voltam as reuniões, reformulas tudo o que fizeste de errado e voltas a enviar tudo ao professor.

Com o decorrer do tempo, começas a ver a luz ao fundo do túnel: a dissertação começa a fazer-te cada vez mais sentido e começas a sentir que foste capaz de fazer algo que inicialmente achaste que seria impossível.

Estarei eternamente grata ao Professor Carlos Albuquerque. O responsável para que esta dissertação de mestrado se tornasse uma realidade. Agradeço a sua disponibilidade, incentivo, orientação prestada e apoio constante. Obrigado pelas respostas aos meus e-mails nos próprios dias em que os mesmos foram enviados, mesmo se os mesmos fossem enviados às onze da noite. Obrigada por ter feito esforço de rever o meu trabalho no decorrer das suas férias. Obrigada pela incansável ajuda e pelas reuniões tardias. E obrigada por nunca ter desistido de mim.

Tendo consciência que todo este processo se refletiu em momentos iniciais de stress e desânimo, não poderia deixar de agradecer ao meu namorado Frederico Farreca, ouvinte atento de algumas dúvidas, inquietações, desânimos e sucessos, por ter estado sempre ao meu lado durante esta fase e que me apoiou nos momentos mais difíceis. E agradeço também por todas as vezes que cozinhou para mim para eu poder trabalhar na minha dissertação sem desculpas de falta de tempo. Um agradecimento especial também à Kassandra Fonseca, pela amizade demonstrada e que neste momento se encontra em igual situação, um beijinho e boa sorte!

Por último, não poderia deixar de agradecer aos meus pais e irmão pela força e pelo carinho que sempre me demonstraram ao longo de toda a minha vida académica. Um obrigado à minha mãe por garantir que

levava sempre um saco carregado de comida para Lisboa todas as semanas, ao meu pai que sempre apoiou financeiramente os meus estudos e ao meu irmão por me proteger sempre que era preciso. Obrigado à minha gata Violeta e ao meu gato Uber por se sentarem em cima dos meus apontamentos sempre que eu precisava de estudar. Eles eram a melhor companhia de estudo que alguém poderia ter.

Resumo

O risco de longevidade é um fator de risco chave em muitos seguros de vida e produtos de pensões. As melhorias na longevidade têm impacto direto nas anuidades. Sendo a mortalidade um fenômeno dinâmico, este trabalho teve como objetivo obter um modelo capaz de gerar múltiplas trajetórias, onde as propriedades das mesmas fossem uma previsão para o futuro do valor de um fundo com o intuito de se conseguir atingir um bom provisionamento e uma boa gestão de responsabilidades financeiras futuras. Para o efeito, foi inicialmente construída uma tábua de mortalidade dinâmica com dados conhecidos através de um modelo simples para descrever as mudanças, ao longo de vários anos, da mortalidade em função de um único índice de tempo: o modelo Lee-Carter. Uma vez construída a tábua dinâmica com dados conhecidos, foi possível obter uma tábua dinâmica prolongada para o futuro para cada cenário/trajetória gerada por Monte Carlo e, desse modo, executar uma abordagem do cálculo do risco de longevidade alternativa ao recálculo da melhor estimativa das provisões técnicas onde é aplicado um choque nas probabilidades de morte que as reduz em 20%. Através desta simulação foram obtidos 1000 cenários possíveis de valores atuais de uma carteira com 30 pensionistas. No final, a distribuição dos valores produzida pelos cenários foi analisada através do Value at Risk, onde foram obtidos valores de reserva de forma a garantir o pagamento de anuidades até à morte dos beneficiários tendo em conta a tendência de longo prazo das taxas de mortalidade onde o risco de longevidade está refletido. No final foram comparados os valores obtidos com os valores originais da carteira e com o valor obtido aplicando-se o choque de 20% à probabilidade de morte.

Palavras-chave: Mortalidade; Longevidade; Tábua Dinâmica; Carteira; Value at Risk.

Abstract

Longevity risk is a key risk factor in many life insurance and pension products. Improvements in longevity have a direct impact on annuities. As mortality is a dynamic phenomenon, this work aimed to identify mortality trajectory and project its future value for a given population, in order to achieve a good provision and a good management of future financial responsibilities. With this in mind, a dynamic mortality table with known data was built using a simple model to describe the changes over several years of mortality according to one specific time index: the Lee & Carter model. Once the dynamic mortality table with known data was created, it was possible to obtain a prolonged future dynamic table for each scenario / trajectory generated by Monte Carlo and thus to measure the risk of longevity alternative to the recalculation of the best estimate of technical provisions where it is applied a shock in the death probability that reduces it by 20%. Through this simulation 1000 possible scenarios were obtained and used to determine present values of a portfolio of 30 pensioners. In the end, the distribution of values produced by those scenarios was analysed through Value at Risk, where reserve values were obtained to ensure the payment of annuities until the beneficiaries' death, considering the long-term trend of mortality rates where the longevity risk is reflected. In the end, the values obtained were compared with the original values of the portfolio and the value obtained by applying the shock of 20% to the probability of death.

Keywords: Mortality; Longevity; Dynamic Mortality Table; Scenario; Portfolio; Value at Risk.

Índice

Introdução	1
1 - Risco de longevidade e risco de mortalidade	3
1.1 - Contextualização e definição	3
2 - Instrumentos de Mitigação do Risco de Longevidade	4
2.1 - Definição.....	4
2.2 - <i>Natural hedging</i>	4
2.3 - <i>Q-Forwards</i>	5
2.4 - <i>S-Forwards</i>	6
2.5 - <i>Longevity swap</i>	6
2.6 - <i>Longevity bonds</i>	6
3- Tábuas estáticas de mortalidade	8
3.1 - Tábuas de mortalidade	8
3.2 - Modelos Probabilísticos para a Descrição da Duração da Vida Humana	9
3.2.1 - Análise da Sobrevivência.....	9
3.2.2 - Probabilidade de Morte e Sobrevivência	9
3.3 - Funções da tábua de mortalidade	10
3.4 - A força da mortalidade μ_x	10
3.5 - Leis da Mortalidade	11
4 - Tábuas Dinâmicas de Mortalidade	12
4.1 - Introdução	12
4.2 - Abordagem dinâmica	12
4.2.1 - Construção da Tábua de Mortalidade	12
4.2.2 - Diagrama de Lexis e cálculo das estimativas brutas dos quocientes de mortalidade.....	13
4.2.3 - Graduação	17
4.3 - Métodos de projeção de mortalidade	17
4.3.1 - <i>Expectation</i>	17
4.3.2 - <i>Explanation</i>	17
4.3.3 - <i>Extrapolation</i>	18
4.4 - Método Lee-Carter.....	18
4.4.1 - Modelo	18
4.4.2 - Projeção da Mortalidade	20
5 - Avaliação do Risco de Longevidade	22
5.1 – Simulação de Monte-Carlo.....	22

5.2 – Valor em Risco (VaR).....	25
Conclusão.....	26
Bibliografia	27
Anexos	29

Índice das Tabelas

Tabela 1 Estatísticas descritivas dos valores atuais gerados da carteira de anuidades.....	23
Tabela 2 Value at Risk da carteira.....	25

Índice das figuras

Figura 1 Um q-forward troca uma taxa fixa de mortalidade por uma taxa de mortalidade realizada no vencimento do contrato.	5
Figura 2 Diagrama de Lexis - Óbitos registados à idade x no ano t	13
Figura 3 Diagrama de Lexis - Exemplo de linha de sobrevivência de um indivíduo que termina dentro da área do quadrado ABCD.....	14
Figura 4 Diagrama de Lexis - Óbitos registados à idade x para a geração $t-x$	15
Figura 5 Diagrama de Lexis - Óbitos registados no ano t para a geração $t-x$	16
Figura 6 Histograma das simulações geradas.....	23
Figura 7 Diagrama Q-Q (quantil-quantil).....	24

Siglas

EIB - European Investment Bank

EIOPA - European Insurance and Occupational Pensions Authority

QIS - Quantitative Impact Study of Solvency II

SCR – Solvency Capital Requirement

VaR – Value at Risk

Introdução

O aumento da esperança de vida que se tem verificado nas últimas décadas é uma conquista significativa para a sociedade. Costa (2017) indica que este aumento que tem vindo a ocorrer nos últimos anos é consequência de mudanças sociais ocorridas nas últimas décadas, como avanços na medicina, maior acesso à informação e adoção de hábitos mais saudáveis das pessoas no seu dia-a-dia. De acordo com o Instituto Nacional de Estatística, entre 1970 e 2015 a esperança de vida aos 65 anos (idade normal de reforma) aumentou 5,8 anos, para 19,3 anos.

Para os fundos de pensões, esta evolução traz consigo um crescimento da possibilidade de se ter que pagar benefícios por períodos mais longos do que os originalmente previstos. Este facto define-se como risco de longevidade. Trata-se de um risco de difícil determinação.

De acordo com Bravo (2007), o risco de longevidade designa “o risco de desvios sistemáticos da mortalidade, face aos valores esperados (ou projetados), no sentido em que um indivíduo ou uma população sobrevivem sistematicamente para além do esperado.” E por esse motivo, nas sociedades gestoras de fundos de pensões, a identificação oportuna de possíveis desvios na hipótese da tábua mortalidade adotada na avaliação atuarial, assim como a criação de mecanismos de proteção contra este risco, visam garantir a solvência e a manutenção de benefícios de longo prazo.

As entidades gestoras dos fundos de pensões devem escolher a tábua de mortalidade (também designada por tabela de mortalidade) que melhor se adequa ao perfil da sua população. Apesar de muitos anos já terem passado desde os primeiros estudos das tábuas de mortalidade dinâmicas, é observável que as empresas portuguesas continuam a usar maioritariamente a tábua de mortalidade estática francesa TV 73/77. Face à grande limitação da não inclusão do aumento da longevidade da população mundial no uso das tábuas estáticas, a European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) propôs que em matéria de requisitos quantitativos se desenvolvesse uma ferramenta de supervisão baseada nos riscos: Holistic Balance Sheet. Esta abordagem supõe o cálculo de provisões técnicas com base em princípios económicos e a determinação de um requisito de capital de solvência (SCR - Solvency Capital Requirement) que permita a absorção de um elevado volume de perdas inesperadas para um dado horizonte temporal. Foi desenvolvido em 2012 pela Comissão Europeia um estudo de impacto quantitativo da implementação desta abordagem. Neste estudo é apresentada uma fórmula padrão que inclui um submódulo para avaliação de risco de longevidade, na determinação do SCR (SCR.7.28 das especificações técnicas). A melhor estimativa das provisões técnicas é ainda muito simplista na avaliação do risco de longevidade uma vez que na fórmula padrão na determinação do SCR apenas é aplicado um choque, que se traduz numa redução de 20% das probabilidades de morte para todas as idades. Este recálculo da melhor estimativa das provisões técnicas procura garantir a constituição de níveis de solvência adequados face a possíveis cenários suscetíveis de pôr em causa o cumprimento das responsabilidades.

Com este trabalho pretende-se construir uma tábua de mortalidade dinâmica e apresentar uma abordagem alternativa à proposta da fórmula padrão para avaliação do risco de longevidade. Tem-se como objetivo fundamental capturar de forma mais adequada a incerteza inerente às projeções de mortalidade.

O estudo está dividido em 6 capítulos. No Capítulo 1 define-se e contextualiza-se o risco de longevidade e mortalidade. No capítulo seguinte são apresentados instrumentos de mitigação do risco de longevidade em alternativa à solução tradicional de resseguro. O capítulo 3 é dedicado à revisão da literatura mais relevante no estudo da mortalidade e na construção de tábuas de mortalidade estáticas. No capítulo 4 apresenta-se o processo de construção de tábuas de mortalidade dinâmicas através do método Lee-

Carter. No capítulo 5 é estudado um caso concreto com um método específico de avaliação do risco de longevidade num portfolio de anuidades de um fundo de pensões. No capítulo final são discutidas as principais conclusões.

1 - Risco de longevidade e risco de mortalidade

1.1 - Contextualização e definição

Como Benjamim Franklin afirmava, nada é mais certo neste mundo que a morte e os impostos. É certo que a morte é inevitável, mas podemos observar nas últimas décadas que é, em média, cada vez mais tardia. Analisando os dados do Instituto Nacional de Estatística, de 1970 a 2015 a esperança de vida aos 65 anos teve um aumento notório de 5,8 anos, passando a 19,3 anos. Diferenciando este valor médio em sexos, no sexo masculino o aumento foi de 5,2 e no sexo feminino foi de 6,1 anos, passando a valores de 17,4 e 20,7 respetivamente.

Este aumento de esperança média de vida foi uma conquista significativa e positiva da civilização moderna, trazendo consigo novos desafios em diversas áreas do conhecimento humano e profundas alterações tanto na esfera pública como privada. Este aumento de esperança média de vida traduz-se então num desafio para o mercado das seguradoras.

O risco de longevidade é um fator de risco chave em muitos seguros de vida e produtos de pensões. As melhorias na longevidade têm impacto direto nos preços de qualquer tipo de produto ligado a prestações de longo prazo, nomeadamente as anuidades. O Conselho Económico e Social (2018) refere que os sistemas tradicionais de Segurança Social do tipo *pay-as-you-go* estão-se a tornar insustentáveis e requerem determinados planos de ação, como por exemplo, acréscimos nas taxas de contribuição, redução das pensões e um incremento da idade da reforma.

Face ao contexto, tem-se assistido a novos padrões de comportamento como o aumento da poupança de privados para o período da reforma e o incentivo por parte dos Estados à alocação das poupanças para esse período da vida. Todo este cenário leva a urgência de capturar de forma mais adequada a incerteza inerente às projeções de mortalidade e de encontrar soluções de mitigação deste risco nos mercados financeiros.

Muitas vezes, as expressões “risco de longevidade” e “risco de mortalidade” são usadas de forma indistinta; no entanto representam, na prática, realidades distintas.

Citando Bravo (2007, p.5), enquanto a expressão “risco de longevidade denota coletivamente o risco de desvios sistemáticos da mortalidade face aos valores esperados (projetados), em particular que um indivíduo ou uma população sobrevivam sistematicamente para além do esperado, o termo risco de mortalidade é usado, regra geral, para descrever o risco de que uma população viva, em termos agregados, menos do que o esperado, i.e., que a mortalidade seja superior ao previsto”.

De facto, quando um plano de pensões garante o pagamento de anuidades até à morte dos beneficiários, o facto de as durações dos benefícios virem a ser sistematicamente superiores às que estão implícitas na tábua de mortalidade utilizada nas avaliações atuariais, pode muitas vezes provocar um problema de financiamento no longo prazo, existindo por consequência, a necessidade de um esforço adicional de contribuições por parte do(s) associado(s). (Pateiro, 2013)

2 - Instrumentos de Mitigação do Risco de Longevidade

2.1 - Definição

Existem vários acordos financeiros que permitem que os fundos de pensões e as companhias de seguros paguem ou protejam o risco de longevidade. Para aqueles que procuram reduzir a sua exposição ao risco de longevidade, a solução tradicional é transferir o risco para entidades de seguros ou resseguros. Existem vários tipos diferentes de estruturas para estas soluções.

Os métodos mais comuns para a transferência do risco de longevidade dos fundos de pensões no setor privado até ao momento eram as chamadas *pensions buy-outs e buy-ins*. O exemplo de uma empresa privada que atua nessa área é a conhecida Willis Towers Watson. Ambas as soluções eliminam o risco de longevidade, bem como o risco de investimento do fundo ou plano de pensão, transferindo esses riscos para uma seguradora ou resseguradora. Essas coberturas geralmente cobrem apenas os pensionistas atuais e são especialmente atraentes para planos de pensão de benefício definido.

Numa *pension buy-out*, o fundo de pensões passa todas as suas responsabilidades e ativos para um fornecedor externo. Depois de concluído o contrato, a responsabilidade de fazer pagamentos aos membros passa para o fornecedor removendo as responsabilidades com pensões do balanço do anterior responsável.

Numa *pension buy-in*, o fundo de pensões mantém os seus passivos e ativos e continua a ser responsável pelo pagamento dos benefícios de pensões, contudo mantém-se também responsável por esses mesmos pagamentos com um fornecedor externo. Em troca de um prémio, o fornecedor garante completamente ou parcialmente o passivo do plano de pensões. A Pension Insurance Corporation plc, uma seguradora especializada no Reino Unido nesta área, expõem que desta forma, o fundo de pensões adquire um contrato de anuidade com uma companhia de seguros e, desse modo, garante que os pagamentos de anuidade coincidam com alguns ou todos os pagamentos de benefícios do plano de pensão.¹

De uma forma sucinta, numa *pension buy-out* ocorre transferência dos participantes para que recebam seus benefícios por seguradoras, isolando o fundo de pensão de qualquer risco enquanto que, numa *pension buy-in*, o fundo de pensão mantém o relacionamento com o participante, mas compra um seguro contra riscos de demográficos e/ou financeiros.

2.2 - Natural hedging

O *natural hedging* refere-se a empresas que estão expostas a aumentos e diminuições na mortalidade. Uma vez que as hipóteses de melhoria a longo prazo são geralmente consideradas aplicáveis a toda a população, uma diminuição da mortalidade prejudicará os produtos de rendas vitalícias e melhorará a rentabilidade dos produtos de seguros de vida tradicionais. Por outras palavras, se houver uma melhoria na esperança de vida, a seguradora pagará durante mais tempo as rendas vitalícias, mas em contrapartida será recompensada nos seguros em caso de morte. Devido a esse facto, as empresas com linhas de

¹ Fonte: <https://www.pensioncorporation.com>

negócios de vida e anuidade bem diversificadas apresentam menor exposição global a mudanças diretas na mortalidade. (Samuel H. Cox and Yijia Lin, 2004)

A capacidade de quantificar o risco de longevidade ainda é muito limitada para os mercados de seguros. Esta limitação tem sido estudada nos últimos anos e surgiram diversas tentativas de transferir o risco de longevidade para os mercados de capitais através de Q-Forwards, S-Forwards, Longevity Swaps e Longevity Bonds.

2.3 - Q-Forwards

Em março de 2007, a JPMorgan tentou impulsionar o desenvolvimento do mercado de derivativos de longevidade ao lançar a LifeMetrics, "um conjunto de ferramentas para medir e gerir o risco de longevidade e mortalidade" (Coughlan et al, 2007a).

O tipo mais simples de derivado de longevidade e mortalidade é um contrato de taxa de mortalidade a prazo, chamado "*q-forward*". É assim chamado porque a letra "*q*" é o símbolo usado pelos atuários para indicar as taxas de mortalidade.

Um *q-forward* é descrito como sendo um acordo entre duas partes para trocar numa data futura (na maturidade do contrato) um montante proporcional à taxa de mortalidade realizada de uma determinada população (ou subpopulação), em troca de uma quantidade proporcional a uma mortalidade fixa, taxa que foi mutuamente acordada no início. (Coughlan et al, 2007b). Por outras palavras, um *q-forward* é um *swap* de cupão zero que troca a mortalidade fixa pela mortalidade realizada na maturidade. Esta explicação encontra-se ilustrada na figura 1.

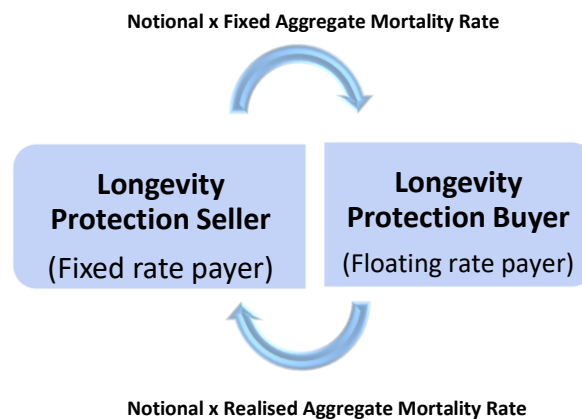


Figura 1 Um *q-forward* troca uma taxa fixa de mortalidade por uma taxa de mortalidade realizada no vencimento do contrato.

A liquidação que ocorre no vencimento é baseada no capital notional a pagar e é proporcional à diferença entre a taxa de mortalidade fixa (a taxa de transação negociada) e a taxa de referência realizada.

Este instrumento permitiria então que um fundo de pensões cobrisse o risco de longevidade dos seus passivos, através da entrada de planos de pensões em carteiras de contratos de *q-forward*, onde paga uma quantidade proporcional à taxa de mortalidade realizada e recebe uma quantidade proporcional à taxa de mortalidade fixa. Em súmula, a contraparte que efetua o *hedging* do risco de longevidade, isto

é, o fundo de pensões, paga a cobertura flutuante e recebe a cobertura fixa. Esta carteira envolveria *q-forwards* referenciando homens e mulheres com diferentes idades e vencimentos.

2.4 - *S-Forwards*

Os *S-Forwards* definem-se como contratos vinculados às taxas de sobrevivência de uma determinada população. De acordo com Levantesi e Menziatti (2017), um *S-forward* é um acordo entre duas partes para trocar numa data futura (na maturidade do contrato) um montante resultante da taxa de sobrevivência real de uma determinada população e da taxa de sobrevivência acordada e fixa no início do contrato. A contraparte que efetua *hedging* do risco de longevidade recebe a cobertura flutuante e paga a taxa de sobrevivência acordada e fixa.

2.5 - *Longevity swap*

Num *Longevity Swap* “as partes envolvidas acordam trocar os *cash-flows* baseados na diferença entre a taxa de sobrevivência expectável (fixada inicialmente) e a taxa de sobrevivência real de uma determinada população ao longo do contrato.” (Westland, 2009, p.17)

Existem dois tipos de *Longevity Swaps*: *Index-based swaps* e *Indemnity-based swaps*. Para ambos, o administrador do fundo de pensões faz periodicamente pagamentos pré-determinados antecipados à contraparte com base nos pagamentos de benefícios esperados aos beneficiários. Em contrapartida, a contraparte faz pagamentos de volta ao administrador. Para contratos baseados em indemnizações, a contraparte fornece ao administrador pagamentos regulares flutuantes com base na experiência real de mortalidade do plano de pensão. Alternativamente, para contratos ligados à performance de um índice de mortalidade (e.g. JPMorgan / LLMA Lifematrix, Deutsche Börse Xpect Indices), os pagamentos são baseados num índice de mortalidade acordado. (Morneau Shepell)

2.6 - *Longevity bonds*

As obrigações de longevidade são títulos de investimento que pagam apenas cupões ligados a um índice de sobrevivência de uma determinada coorte². Sempre que morrem indivíduos da coorte selecionada o índice desce e, conseqüentemente, o montante dos cupões desce.

Por exemplo, se uma obrigação de longevidade é baseada na sobrevivência de uma coorte de homens com 65 anos no momento da emissão da obrigação, o cupão pagável em 10 anos dependerá da proporção de homens de 65 anos que sobreviverão até aos 75 anos. Os compradores da obrigação receberão um cupão maior se as melhorias na mortalidade tiverem sido superiores ao esperado.

A primeira emissão de uma *longevity bond* foi realizada pelo European Investment Bank (EIB) em cooperação com o Banco BNP Paribas e a empresa de resseguro PartnerRe, em novembro de 2004. A

² Coorte é um conjunto de pessoas que tem em comum um evento que se deu no mesmo período; exemplo: coorte de pessoas que nasceram entre 1960 e 1970; coorte de mulheres casadas entre 1990 e 2000; coorte de vítimas do terremoto do Haiti. (Wikipédia)

proposta da emissão foi de 540 milhões e com uma maturidade de 25 anos. No entanto, a emissão foi um grande insucesso por diversas razões, tais como: o elevado montante de capital requerido comparativamente à redução de risco gerado, potenciais hedgers acharam o risco que ainda restava muito alto relativamente ao preço e uma obrigação com duração de 25 anos, foi considerada insuficiente para o hedge pretendido (Blake et al, 2006).

3- Tábuas estáticas de mortalidade

3.1 - Tábuas de mortalidade

No contexto atuarial, a modelação do risco de morte de uma população num determinado momento é dada a partir de tábuas de mortalidade ou de sobrevivência. Uma tábua de mortalidade é um instrumento que permite determinar as probabilidades de vida e de morte de indivíduos de uma determinada população no tempo, de acordo com a idade dos indivíduos. Este instrumento permite também avaliar o fenómeno da longevidade de uma população e efetuar inferências sobre a sua evolução ao longo do tempo. A obra “Natural and Political Observations Made upon the Bill of Mortality”, publicada por John Graunt em 1662, foi responsável pelo primeiro tratamento estatístico sobre dados demográficos e onde foi construída a primeira tábua de mortalidade. (Bravo, 2007) Apesar de apresentar algumas fragilidades metodológicas, o seu trabalho pioneiro despoletou múltiplas investigações em vários domínios da demografia e conduziu à criação de organismos estatísticos governamentais.

Em 1693, Edmund Halley, um astrónomo real britânico, publica oficialmente, a partir de números de óbitos classificados por causa de morte, uma das primeiras tábuas de mortalidade conhecidas. Os dados foram observados na cidade polaca de Breslau, entre 1687 e 1691. A metodologia que o astrónomo utilizou na construção da tábua de mortalidade tinha como premissa que a população tinha uma taxa de crescimento populacional nula. (Bravo, 2007)

Bravo (2007, p.27) afirma também que a “primeira tábua de vida que utilizou conceitos estritamente atuariais foi construída em 1815 por Milne”. E foi esta que foi considerada “cientificamente correta, apoiada em população e óbitos classificados por idade de duas paróquias da cidade britânica de Carlisle, para o período 1779-1787.”

As tábuas de mortalidade oferecem a descrição da mortalidade dos sobreviventes a cada idade em cada geração. Estas tábuas devem ser diferenciadas de acordo com as características da população em estudo: sexo, idade, profissão, tipo de seguro ou cobertura. Se a tábua for indexada a um determinado ano cronológico, poderá ser levada em consideração a amplitude de idades possibilitando-se assim a distinção das seguintes tábuas:

Tábuas contemporâneas (transversais ou de momento): baseada na análise de uma geração fictícia que é sujeita a condições de mortalidade observadas num determinado momento.

Tábuas geracionais: baseia-se no cálculo das taxas de mortalidade averbadas por uma mesma geração, ou seja, por indivíduos nascidos no mesmo ano.

Este capítulo está dividido em cinco secções, sendo a primeira esta introdução. Na secção 2 irá definir-se o modelo probabilístico para a descrição da duração da vida humana. Na secção 3 tem-se como principal objetivo definir, de forma sucinta, as funções inerentes à construção de uma tábua de mortalidade. A secção 4 trata de uma descrição da força de mortalidade e, por fim, na secção 5 apresenta-se um breve resumo das leis de mortalidade.

3.2 - Modelos Probabilísticos para a Descrição da Duração da Vida Humana

3.2.1 - Análise da Sobrevivência

O tempo que decorre entre a idade de um indivíduo num dado momento e o momento da sua morte é modelado através de um conjunto de funções: função de densidade, função de distribuição, função de sobrevivência, entre outras.

É a partir da função de sobrevivência que é construída uma tábua de mortalidade.

Designamos por T a variável aleatória positiva que representa a duração de vida de um indivíduo pertencente a uma dada população de referência. Definimos de seguida uma sequência de variáveis aleatórias $\{T_x: x = 1, 2, \dots, w\}$ onde w tem o significado de “idade extrema” – “por idade extrema entende-se a idade em que não é admitida a hipótese de sobrevivência do indivíduo” e T_x simboliza a vida residual de um indivíduo que atinge a idade x , isto é, um sobrevivente à idade x falecerá à idade $x + T_x$. E a sua probabilidade de viver t anos aumenta com a idade por este alcançada:

$$P(T_x > t) = P[T > x + t | T > x] \quad (1)$$

Então, por definição, $P(T_x > t) = P[T - x > t | T > x]$, a função de probabilidade acumulada T_x é designada por $F_x(t)$, e é dada por:

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = P\{T \leq x + t | T > x\} = 1 - \frac{S(x + t)}{S(x)}, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

onde $S(x)$ representa a probabilidade de um indivíduo, à nascença, sobreviver pelo menos x anos. A função $S(x)$ dada através de $F_0(x)$ - que se define como sendo a probabilidade de um indivíduo recém-nascido perecer antes de atingir os x anos:

$$S(x) = 1 - F_0(x) = P(T_0 \geq x), \quad x \geq 0 \quad (3)$$

A função $S(x)$ é complementar à $F(x)$, é decrescente (isto é, $S(x_1) \geq S(x_2), x_1 \leq x_2$) e satisfaz a condição $S(0) = 1$.

3.2.2 - Probabilidade de Morte e Sobrevivência

É através das funções F_0 ou S que são calculadas as probabilidades de morte ou de sobrevivência de um indivíduo. Designa-se por ${}_t p_x$ a probabilidade de uma pessoa de idade x atingir (viva) a idade $x + t$ e por ${}_t q_x$ a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer antes de atingir a idade $x + t$.

Pode-se então expressar as probabilidades condicionais baseadas na função de sobrevivência, tal como representado a seguir:

$${}_t p_x = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0} = \frac{S(x + t)}{S(x)} \quad (4)$$

$${}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad (5)$$

É importante referir que, caso $t=1$, por convenção o prefixo na simbologia é excluído, denotando-se apenas como p_x e q_x . Tem-se, também, que ${}_0p_x = 1$ e ${}_0q_x = 0$.

3.3 - Funções da tábua de mortalidade

Uma Tábua de Mortalidade é a forma conveniente, prática e de fácil interpretação de representar o modelo supra descrito.

Imaginemos uma coorte de l_x de indivíduos recém-nascidos no mesmo ano. O valor de l_x é chamado de radix (ou raiz) da tábua e toma geralmente valores como 100 000 ou 1 000 000, de forma a simplificar a informação presente na tábua. Como se trata de uma coorte fechada (isto é, não são admitidos novos nascimentos e não são observados fenómenos de emigração ou imigração) só com o falecimento é possível deixar de fazer parte desta geração. É através da diminuição gradual da dimensão da coorte (devido à morte dos membros) que é exequível então a construção da tábua de mortalidade geracional. Por outras palavras, uma tábua de mortalidade é uma tabulação da função l_x , para $x = 0, 1, 2, 3, \dots, w$. Interpretando o conceito de l_x temos que, para $x = 0, 1, \dots, w - 1$:

$$l_{x+1} = l_x p_x \quad (6)$$

Ou, de outra maneira, $l_x = l_0 {}_0p_x$. Dando uso à regra da multiplicação para as probabilidades de sobrevivência chega-se à seguinte expressão: ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$. Desta forma, podemos determinar os valores de ${}_t p_x$ e, naturalmente, de ${}_t q_x$, que são funções bidimensionais, tendo conhecimento apenas dos valores da função unidimensional l_x .

Para uma análise mais detalhada de outras funções da tábua de mortalidade, recomenda-se a leitura de Pereira (2013).

3.4 - A força da mortalidade μ_x

A força da mortalidade μ_x , muitas vezes designada por taxa instantânea de mortalidade ou por intensidade instantânea de transição do estado *vivo* para o estado *morto*, corresponde à probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e z , dado o espaço de tempo entre z e x tender a zero, definindo-se pelo limite:

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}_h q_x}{h}, \text{ com } h > 0 \quad (7)$$

Pela definição, prova-se que:

$$\mu_{x+t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P[t < T_x \leq t + \Delta t | T_x > t]}{\Delta t} \quad (8)$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h q_x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(x+h)}{h S(x)} \\ &= -\frac{1}{S(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{d}{dx} \log S x = -\frac{S'(x)}{S(x)} \end{aligned} \quad (9)$$

μ_x difere de q_x uma vez que a primeira é uma medida relativa da mortalidade no exato momento em que a idade x é atingida, e a segunda mede a mortalidade ao longo de um ano (i.e., variando a idade entre x e $x + 1$).

3.5 - Leis da Mortalidade

Atuários e demógrafos sempre pensaram em descrever a mortalidade através de uma fórmula, pois a partir desta, pode ser possível descrever cada variável do modelo probabilístico da mortalidade através da força de mortalidade.

Bowers et al (1997, p.77) afirma que existem três principais motivos para se usar uma forma analítica da função de sobrevivência ou mortalidade: o primeiro é filosófico, pois alguns autores, utilizando argumentos biológicos, sugerem que a sobrevivência humana é governada por uma “lei” universal simples, isto é, por fórmulas simples. O segundo, de ordem prática, é sustentado por alguns autores que afirmam que com a utilização das leis de mortalidade é mais simples de comunicar uma função com poucos parâmetros do que uma tábua de mortalidade com talvez 100 parâmetros ou probabilidades de mortalidade e o terceiro motivo trata-se da facilidade na estimação de poucos parâmetros da função para dados de mortalidade.

É na primeira metade o século XVIII que se inicia a investigação sobre as leis de mortalidade. Até ao presente foram desenvolvidos vários modelos que podem ser distinguidos segundo diversos critérios. O primeiro critério divide os modelos em *explicativos*, isto é, modelos que sugerem um mecanismo teórico para explicar a mortalidade, e modelos *descritivos*, ou seja, modelos que ajustam os dados num determinado momento do tempo e para um dado intervalo de idades. Um segundo critério distingue os modelos de acordo com o número de parâmetros que incorporam. E finalmente, um terceiro que permite diferenciar entre leis que cobrem a totalidade do espectro da vida humana e leis que se reportam apenas a idades selecionadas.

Para uma análise mais detalhada de alguns destes tipos de modelos recomenda-se a leitura de Bravo (2007).

4 - Tábua Dinâmicas de Mortalidade

4.1 - Introdução

A mortalidade assume-se hoje como um fenómeno dinâmico, e por essa razão, começa a existir a necessidade de identificar a sua trajetória e de projetar com exatidão o seu valor futuro, para que se consiga atingir um bom aprovisionamento e uma boa gestão de responsabilidades financeiras futuras com os sistemas de segurança e proteção social. Foi devido a essa necessidade que começaram a ser desenvolvidos modelos de projeção adequados que conduzem à construção de tábuas de mortalidade geracionais.

Estas tábuas são identificadas como uma importante ferramenta para uso, por exemplo, no campo atuarial na quantificação e controlo do risco de longevidade. A exatidão na construção destas tábuas é um dos maiores desafios da demografia da ciência atuarial.

Esta construção pode ser dividida na construção de duas tábuas:

1. Tábua referente ao passado – interpretada como um simples problema de graduação, cuja metodologia passa por ajustar um modelo aos dados disponíveis.
2. Tábua referente ao futuro – trata-se de uma construção para anos civis futuros, muitas vezes referida como tábua projetada, uma vez que a sua construção consiste num problema de previsão.

Na secção 4.2 iremos focar-nos na primeira construção (tábua referente ao passado), uma vez que, para se estudar o problema da previsão de mortalidade, é sempre necessária a tábua de mortalidade para os dados do passado. Na secção 4.3 iremos proceder à explicação da segunda parte da construção de uma tábua dinâmica (tábua projetada). E por fim, na secção 4.4 irá abordar-se o método que irá ser utilizado na projeção de mortalidade: o método Lee-Carter.

4.2 - Abordagem dinâmica

4.2.1 - Construção da Tábua de Mortalidade

Para a construção de uma tábua de mortalidade sobre anos civis procede-se do seguinte modo (Pereira, 2013):

- 1º. Recolha dos dados estatísticos de base, avaliação da sua qualidade e análise das principais tendências;
- 2º. Estimção dos quocientes brutos de mortalidade;
- 3º. Graduação dos quocientes brutos de mortalidade e aplicação de métodos de fecho da tábua – esta fase é opcional;
- 4º. Cálculo das restantes funções da tábua de mortalidade.

A primeira fase é comum a qualquer estudo estatístico e a última fase está, de forma breve, explicada na secção anterior. A segunda fase irá ser abordada na próxima secção 4.2.2., onde vão ser descritas as três abordagens distintas que permitem efetuar a medição da mortalidade, que, nesta situação, é feita por

idade, por tempo e por geração e os resultados obtidos permitem construir tábuas de mortalidade dinâmicas.

4.2.2 - Diagrama de Lexis e cálculo das estimativas brutas dos quocientes de mortalidade

Existem três formas diferentes de o tempo intervir num estudo sobre a mortalidade: o ano em que o indivíduo nasce, o seu ano de óbito e a idade com que falece. Podem assim serem definidas três coordenadas que permitem caracterizar um evento demográfico:

1. A data em que este se produz;
2. Idade do indivíduo quando se produz o evento;
3. A sua idade de nascimento.

Embora estas três coordenadas sejam redundantes, é necessário que duas delas se registem, para se determinar a terceira. Para representar graficamente esta ideia, em meados de 1875, Wilhelm Lexis introduz o chamado diagrama de Lexis.

Este diagrama procura representar a intervenção do tempo em qualquer acontecimento demográfico. Bravo (2007) define este diagrama como “um sistema de eixos retangulares que permite precisar a forma como se combinam as três coordenadas temporais na representação gráfica dos acontecimentos demográficos”. Representa-se por um conjunto de paralelas a dois eixos perpendiculares:

- Eixo das abcissas – regista-se o tempo ou as datas de observação das variáveis, habitualmente um ano coincidente com o ano civil,

- Eixos das ordenadas – inscrevem-se a idade dos indivíduos ou a duração do acontecimento, em anos.

Cada acontecimento demográfico, isto é, óbitos neste contexto, é representado por um ponto de coordenadas data e idade do respetivo indivíduo, como no exemplo seguinte:

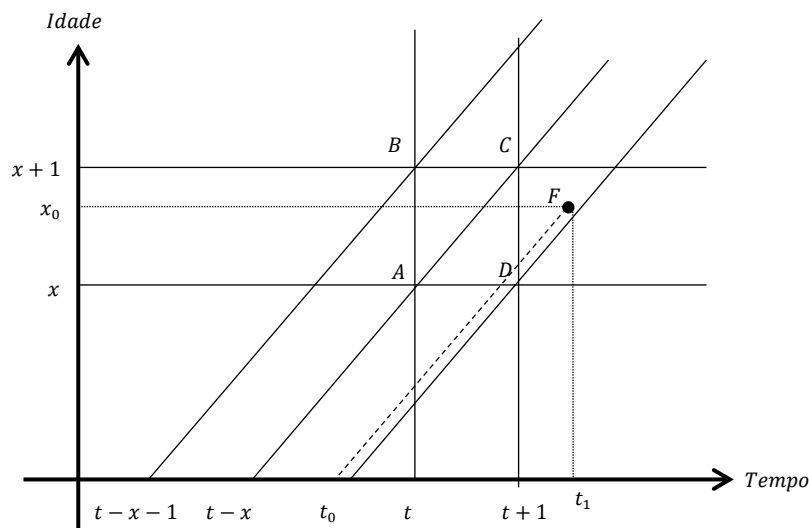


Figura 2 Diagrama de Lexis - Óbitos registados à idade x no ano t

As diagonais no gráfico representado limitam as linhas de vida dos indivíduos nascidos no mesmo ano, ou seja, que fazem parte da mesma geração³.

Na figura 2, está representada a linha de um indivíduo que nasce no tempo t_0 e morre quando atinge a idade x_0 , no tempo t_1 . Note-se que a linha termina quando se dá o acontecimento da sua morte.

Na mesma figura estão representadas retas que nos ajudam no estudo dos acontecimentos de morte dos indivíduos. Note-se por exemplo que, no caso de considerarmos os indivíduos cujo óbito se situa no quadrado ABCD, as linhas de sobrevivência, provenientes de diferentes gerações que acabem no segmento de reta AB, significam que esses mesmos indivíduos faleceram entre a idade x e $x + 1$, no instante t . O segmento AD é intersetado por linhas de vida dos indivíduos que no ano t faleceram no $x^{\text{ésimo}}$ aniversário, ou seja, é intersetado por indivíduos originários da geração $t - x$, cuja sua linha de sobrevivência terminou na linha AD. Por outras palavras, se a linha de sobrevivência não continuar depois de atravessar o referido segmento, a sua vida terá terminado quando completaram a idade x . (Neste caso, o ponto que marca esse acontecimento é o ponto A).

Ainda na figura 2 é possível identificar o número de óbitos localizados nas células delimitadas por um sistema. No caso acima representado o sistema poderá ser o quadrado circunscrito pelas coordenadas ABCD, ou pelos triângulos ABC e ACD demarcados pelas diagonais.

No sistema representado através do quadrado delimitado pelas coordenadas ABCD encontram-se, ao longo de um ano, registados $d_{x,t}$ óbitos entre os indivíduos com x anos inteiros vividos provenientes de duas gerações distintas, $t - x$ e $t - x - 1$, e correspondem às linhas de vida que terminaram, nos triângulos inferior e superior (ACD e ABC).

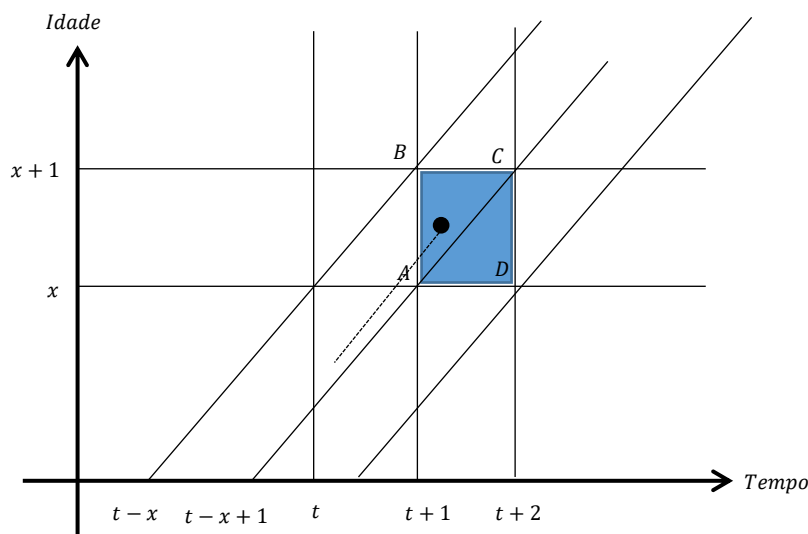


Figura 3 Diagrama de Lexis - Exemplo de linha de sobrevivência de um indivíduo que termina dentro da área do quadrado ABCD

A razão para esta decomposição centra-se na existência de óbitos em diferentes gerações. Define-se $P_{x,t}$, como sendo o número de sobreviventes de idade x no instante t , e $d_{x,t}$, como o número de óbitos, no decurso do ano t , de indivíduos com idade x . Temos que destes óbitos, uma parte pertence à geração

³ Uma geração é formada por membros de um determinado grupo etário. Cada indivíduo fará parte de vários grupos etários (e, portanto, de várias gerações) ao longo da sua vida.

$g - 1 = t - x - 1$, representados por $d_{x,t,g-1}^U$, e a outra parte pertence à geração $g = t - x$, representada por $d_{x,t,g}^U$. Assim sendo, assumindo a hipótese da força de mortalidade constante, tem-se:

$$\hat{m}_{x,t} = \frac{D_{xt}}{ETR_{xt}} = \frac{d_{x,t,g-1}^L + d_{x,t,g}^U}{\frac{1}{2}[P_{x,t} + P_{x,t+1}] + \frac{1}{6}[d_{x,t,g-1}^L + d_{x,t,g}^U]} \quad (10)$$

As estimativas dos quocientes de mortalidade $q_{x,t}$ correspondentes são calculadas convertendo a expressão acima em probabilidades de óbito, sob a hipótese de repartição uniforme de óbitos durante o ano, isto é:

$$\hat{q}_{x,t,\bullet} = \frac{\hat{m}_{x,t}}{1 + (1 - \alpha_{x,t})\hat{m}_{x,t}} \text{ com } \alpha_{x,t} = \frac{1}{2} \quad (11)$$

onde $\alpha_{x,t}$ denota o número médio de anos vividos no intervalo $[x, x + 1)$ pelos indivíduos que falecem à idade x no momento t . No caso do paralelogramo ABCD representado na figura 4, a probabilidade de óbito no intervalo $[x, x + 1)$, $\hat{q}_{x,\bullet,g}$, é estimada de forma direta:

$$\hat{q}_{x,\bullet,g} = \frac{d_{x,t,g}^U + d_{x,t+1,g}^U}{P_{x,t+1} + d_{x,t,g}^L} \quad (12)$$

Neste caso, Pereira (2013) mostra que a estimativa de $\hat{m}_{x,t}$ é dada por:

$$\hat{m}_{x,t} = \frac{D_{xt}}{ETR_{xt}} = \frac{d_{x,t,g}^L + d_{x,t+1,g}^U}{P_{x,t+1} + \frac{1}{3}[d_{x,t,g}^L + d_{x,t+1,g}^U]} \quad (13)$$

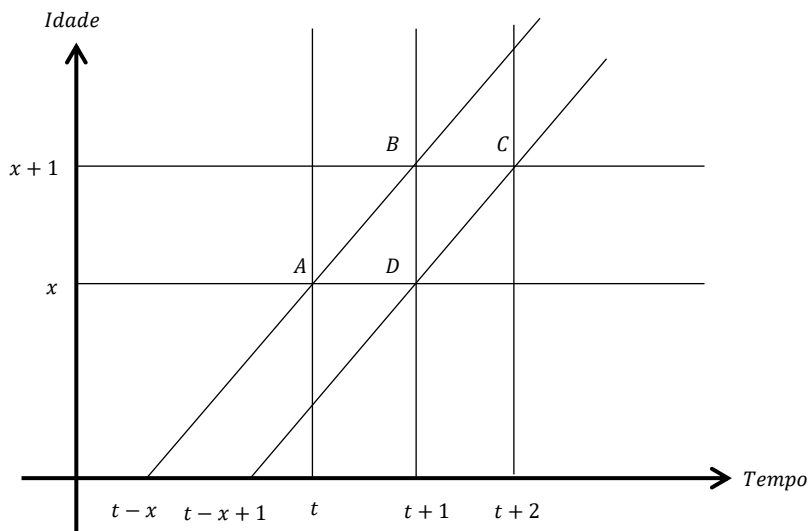


Figura 4 Diagrama de Lexis - Óbitos registrados à idade x para a geração $t-x$

Como alternativa ao método indicado acima, existe o método dos quocientes parciais de Vallin (1973), que consiste na estimação dos quocientes de mortalidade parciais para os triângulos inferior e superior

da figura 3. Neste método, a estimativa dos óbitos ocorridos dentro do paralelogramo ABCD representado na figura 4 é dado por:

$$\hat{q}_{x,\bullet,g} = 1 - (1 - \hat{q}_{x,t,g})(1 - \hat{q}_{x,t+1,g}) \quad (14)$$

Caso a nossa intenção fosse isolar o número de óbitos registados num único ano de indivíduos oriundos de uma única geração, como se observa no paralelogramo ABCD da figura 5, este método poderia ser igualmente utilizado. Neste caso seria dado por:

$$\hat{q}_{\bullet,t,g} = 1 - (1 - \hat{q}_{x,t,g})(1 - \hat{q}_{x-1,t,g}) \quad (15)$$

Este método é também utilizado para calcular os quocientes de mortalidade $\hat{q}_{x,t,\bullet}$ relativos ao quadrado ABCD representado no diagrama representado na figura 2 é dada por:

$$\hat{q}_{x,t,\bullet} = 1 - (1 - \hat{q}_{x,t,g})(1 - \hat{q}_{x,t,g-1}) \quad (16)$$

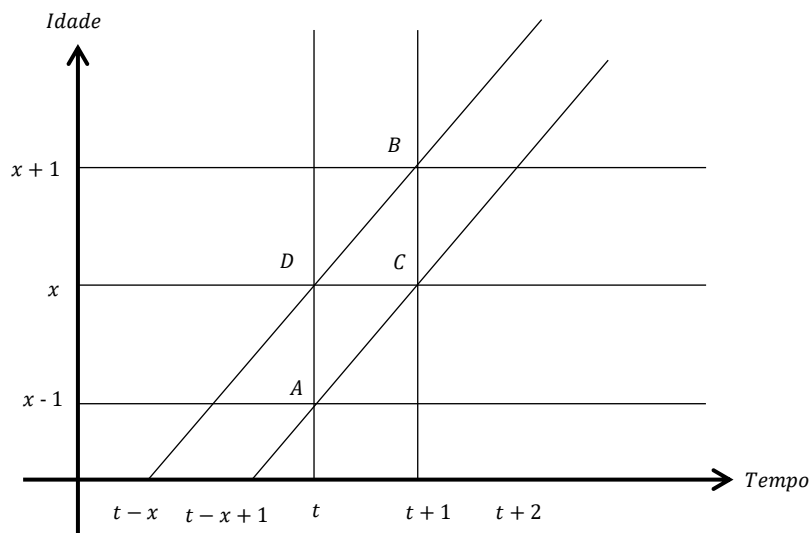


Figura 5 Diagrama de Lexis - Óbitos registados no ano t para a geração t-x

A seleção do método a adotar para se obter os quocientes ou taxas de mortalidade depende dos dados disponíveis e, como referido anteriormente, do objetivo a perseguir com o estudo. Para um estudo periódico, em que o objetivo é isolar as condições registadas num único ano civil, as configurações mais adequadas serão, à partida, a figura 3 e a figura 5. Contudo, possíveis oscilações entre anos consecutivos podem provocar efeitos significativos sobre a mortalidade, o que torna esta configuração não decisiva. Porém, para o caso de o objetivo ser um estudo que incida sobre a análise da evolução temporal da mortalidade, a configuração mais adequada será a figura 4, uma vez que considera essas possíveis oscilações em dois anos consecutivos.

4.2.3 - Graduação

A graduação consiste no alisamento de estimativas brutas. Este processo permite eliminar ou reduzir variações no perfil etário das funções da tábua de mortalidade. Inclui um conjunto de princípios e métodos que, com base num conjunto de probabilidades brutas, permite efetuar um ajuste de modo a fornecer uma base adequada para a realização de inferência estatística e realização de cálculos aplicados. Assim sendo, quando se aplica o método paramétrico de graduação a uma tábua, deve-se ter em conta se pretendemos dar um maior peso ao ajustamento ou à interpretação dos dados. O método efetua-se em três fases (Carvalho, 2013):

1º fase – Estimação dos quocientes de mortalidade q_x , num intervalo de idades considerado.

2º fase – Estimativas brutas dos parâmetros

3º fase – Suavização

Antecedente ao uso do método de graduação importa perceber se o nosso objetivo durante um determinado estudo é dar um peso maior ao ajustamento ou à interpretabilidade dos dados, uma vez que uma tábua graduada implica perda de informação (Pereira, 2013).

4.3 - Métodos de projeção de mortalidade

Existe uma vasta e diferenciada literatura sobre métodos de projeção da mortalidade. Nesta secção irão ser abordados de forma sintética as três abordagens essenciais na previsão de mortalidade: abordagem da expectativa, explicativa e extrapolativa (Booth & Tickle, 2008).

4.3.1 - *Expectation*

Este método é realizado por peritos que estudam o comportamento da população, através da utilização de informações epidemiológicas, demográficas ou outros conhecimentos relevantes de uma forma qualitativa. Como se trata de um método baseado em perspetivas, tem a desvantagem de ser subjetivo.

4.3.2 - *Explanation*

Este método consiste em tentar explicar a mortalidade subdividindo-a por causa de morte a fim de investigar a estrutura da mortalidade, bem como a identificação de fatores de risco. É realizada através de conhecimentos biomédicos e informações sobre alterações ambientais e as suas influências na mortalidade. Trata-se ainda de um método em desenvolvimento e por isso, muitas relações entre fatores de risco e mortalidade ainda estão por descobrir.

4.3.3 - Extrapolation

Segundo Booth (2006) os métodos extrapolativos são os mais frequentemente usados nas previsões demográficas. É um método que segue como premissa que o futuro será a continuação do passado. Apresenta uma certa fragilidade uma vez que não tem em conta alterações na tendência e mudanças estruturais que podem ocorrer, tais como: a evolução de estilos de vida, da medicina e alterações macroeconómicas. A metodologia ARIMA de Box-Jenkins, que irá ser abordada na secção seguinte, é um exemplo deste tipo de método.

4.4 - Método Lee-Carter

4.4.1 - Modelo

Lee & Carter (1992) propôs um modelo simples para descrever as mudanças no longo prazo da mortalidade em função de um único índice de tempo. Muitos autores referem-no como um método extrapolativo, ou seja, tem em conta os valores dos níveis de mortalidade do passado para conseguir prever o futuro.

Este modelo considera uma representação log-bilinear das taxas de mortalidade central m_x :

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t} \text{ ou } m_{x,t} = e^{\alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}} \quad (17)$$

com $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $t = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$

Para a estimação dos parâmetros do modelo, α_x , β_x e k_t é fundamental ter ao dispor um conjunto de tábuas de mortalidade, de modo a conseguir-se obter as taxas centrais de mortalidade $m_{x,t}$. Para tal, necessita-se da informação do número de mortes ao ano e a quantidade central de expostos ao risco avaliados no meio do ano. A taxa central de mortalidade é calculada da seguinte forma:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \quad (18)$$

em que:

d_x = número esperado de mortes de indivíduos com idade x ;

L_x = quantidade de pessoas expostas ao risco de morte no meio do ano.

Assim, com base na matriz de taxas centrais de mortalidade segregada por ano (t) e por idade (x), pode-se ajustar o modelo demográfico à matriz dos dados.

Este modelo é ajustado pelo método dos mínimos quadrados (OLS) e contém parâmetros de fácil interpretação:

α_x – É o padrão etário das taxas de mortalidade logarítmicas ao longo dos anos, isto é, descreve o nível médio das taxas de mortalidade no tempo, por idade.

k_t – É o índice de nível geral da mortalidade no ano t , ou seja, descreve as tendências temporais do nível de mortalidade.

β_x – Representa a variação que ocorre nas taxas de mortalidade logarítmicas em cada idade x , quando a tendência temporal da mortalidade varia, isto é, quando k_t varia:

$$\frac{dLn(m_{x,t})}{dt} = \beta_x \frac{dk}{dt} \quad (19)$$

Este parâmetro pode tomar valores negativos em certas idades x , indicando assim, que as mortalidades em algumas dessas idades tendem a subir quando cai noutras.

$\varepsilon_{x,t}$ – Termo aleatório que representa os erros homocedásticos centrados ($\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$), isto é, com média zero e variância σ_ε^2 que reflecte a influência particular histórica por idade específica não capturada pelo modelo.

Para evitar que o modelo tenha infinitas soluções, Lee e Carter (1992) sugeriram duas restrições:

$$\sum_{x=x \min}^{x \max} \beta_x = 1 \quad \sum_{t=t \min}^{t \max} k_t = 0 \quad (20)$$

Desta forma, o modelo passa a ter uma solução única. Estas condições implicam que o parâmetro α_x pode ser estimado através da média empírica da taxa de mortalidade ao longo do tempo do perfil etário de cada grupo x a $x + n$:

$$\alpha_x = \frac{1}{h} \sum_{t=t_1}^{t_1+n} \ln(m_{x,t}) \text{ com } t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_1 + h - 1 = t_n, \text{ onde } h = t_n - t_1 + 1 \quad (4)$$

Então, estimado o α_x , o modelo pode ser reescrito em termos da taxa de mortalidade média logarítmica: $\tilde{m}_{x,t} = Ln(m_{x,t}) - \alpha_x$ (Giroi & King, 2007).

Uma vez que no modelo Lee-Carter é assumido que a distribuição de $\varepsilon_{x,t}$ é normalmente distribuída, pode ser obtida a equação 21:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{x,t} &\sim \mathcal{N}(\mu_{x,t}, \sigma^2) \\ E(\tilde{m}_{x,t}) &= \mu_{x,t} = \beta_x \hat{k}_t \end{aligned} \quad (21)$$

O modelo Lee-Carter pode ser descrito então pela matriz, no qual são organizadas as taxas centrais de mortalidade, por idade e ano:

$$\tilde{m}_{x,t} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1990 & 1991 & 1992 & & 1994 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{m}_{0,0} & \tilde{m}_{0,1} & \tilde{m}_{0,2} & \dots & \tilde{m}_{0,T} \\ \tilde{m}_{1,0} & \tilde{m}_{1,1} & \tilde{m}_{1,2} & \dots & \tilde{m}_{1,T} \\ \tilde{m}_{5,0} & \tilde{m}_{5,1} & \tilde{m}_{5,2} & \dots & \tilde{m}_{5,T} \\ \tilde{m}_{10,0} & \tilde{m}_{10,1} & \tilde{m}_{10,2} & \dots & \tilde{m}_{10,T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{m}_{80,0} & \tilde{m}_{80,1} & \tilde{m}_{80,2} & \dots & \tilde{m}_{80,T} \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} k_{1990} & k_{1991} & k_{1992} & & k_{1994} \end{matrix} \end{matrix}$$

onde x representa a idade inicial dos grupos etários e t , os anos até T .

Os parâmetros do modelo são estimados pelo método de mínimos quadrados, obtidos através da aplicação do método de decomposição em valores singulares (SVD), onde é aplicado à matriz dos logaritmos das taxas depois de lhe ser deduzida a média temporal do logaritmo das taxas de mortalidade específicas por idade, isto é, a matriz $Ln(m_{x,t}) - \alpha_x$. Produz-se assim uma decomposição $ULV' = L_1 U_{x1} V_{t1} + \dots + L_X U_{xX} V_{tX}$, onde U representa a componente da idade; V representa a componente do tempo, isto é, o ano; e o L representa os respetivos valores singulares. A partir deste método determina-se então, os parâmetros β_x e k_t : a estimativa de β_x define-se como a primeira coluna normalizada de U e a estimativa do índice k_t define-se pela multiplicação do primeiro valor próprio com a primeira coluna da matriz V' , também normalizada.

Nesse sentido, o modelo demográfico é realizado em duas etapas: numa primeira etapa efetua-se a estimação dos parâmetros α_x e numa segunda etapa procede-se à estimação dos parâmetros β_x e k_t . Porém, Lee e Carter (1992) estudaram que, caso os valores encontrados para o nível k_t não correspondessem aos números reais observados de óbitos pela população histórica nas distribuições de idades, teria que existir uma nova estimativa do k_t . Por outras palavras, uma vez que a primeira estimação do índice de nível geral da mortalidade é baseada nos logaritmos das taxas de mortalidade ao invés das próprias taxas de mortalidade, podem ocorrer disparidades notáveis entre o número real e o número previsto de mortes. Existirá então, nesses casos, a necessidade de reestimar k_t , considerando os parâmetros α_x e β_x estimados inicialmente. Contudo, este passo pode não ser utilizado e passar-se diretamente à modelação do índice k_x como uma série temporal.

Depois do ajuste do modelo demográfico com a obtenção do parâmetro k_t , a próxima fase é modelar a série k_t , como um processo estocástico.

4.4.2 - Projeção da Mortalidade

Esta secção segue de perto Girosi & King (2007). Este artigo refere que para a projeção da mortalidade, Lee e Carter (1992) assumiram que β_x se manteria constante ao longo do tempo e usaram projeções de k_t retirados do modelo standard de série temporal de uma só variável. Efetuaram alguns testes com a metodologia que consiste em ajustar o modelo ARIMA à série temporal dos valores encontrados para os parâmetros k (metodologia Box-Jenkins). Assim, para a modelagem da série k_t , pelo processo Box-Jenkins identificam-se os parâmetros ARIMA (p,d,q) que melhor descrevem o comportamento da série, onde p representa o componente Autorregressivo, d representa o Filtro de Integração e q as médias móveis.

Lee e Carter clarificam que o modelo ARIMA mais adequado por diferentes conjuntos de dados, é o caminho aleatório com a inclusão de uma constante (*drift*). Este modelo é dado por:

$$\hat{k}_t = \theta + k_{t-1} + \varepsilon_t \text{ com } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2) \quad (22)$$

onde \hat{k}_t é a estimativa de k_t , a constante θ , o *drift* e o seu estimador de maior probabilidade é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{k}_t - \hat{k}_1}{T - 1} \quad (23)$$

O termo ε_t integra os desvios da constante θ , e a sua variância permite que a incerteza na projeção de k_t para o intervalo infinitesimal seja calculada.

O estimador de máxima verossimilhança para a variância de ε_t é:

$$\sigma_{rw}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t - \hat{\theta})^2 \text{ com } Var[\hat{\theta}] = \frac{\sigma_{rw}^2}{T-1} \quad (24)$$

Com estimador encontrado, o cálculo de k_t para o intervalo infinitesimal faz-se da seguinte forma:

$$\hat{k}_{t+\Delta t} = \hat{k}_t + (\Delta t) \hat{\theta} + \sqrt{(\Delta t)} \varepsilon_t \quad (25)$$

Num passo seguinte a estimativa para a projeção de mortalidade é dada pela seguinte fórmula:

$$\mu_{T+\Delta t} = \alpha + \beta \hat{k}_{T+\Delta t} \quad (26)$$

A partir dos parâmetros obtidos é então possível determinar uma Tábua de Mortalidade para um determinado ano. Desse modo, torna-se possível a construção de uma tábua de mortalidade transversal.

Conhecendo-se a expressão algébrica de μ_x , Garcia (2007) mostra-nos como é possível determinar a probabilidade de vida ou de morte por integração:

$$\int_0^n \mu_{x+t} dt = \int_0^n \frac{d}{dt} \log S(x+t) dt = -\log {}_n p_x \quad (27)$$

Pelo que,

$${}_n p_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} \quad (28)$$

E portanto

$${}_n q_x = 1 - e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt} \quad (29)$$

Neste trabalho para se proceder à avaliação do risco de longevidade em ambiente dinâmico, foi elaborada uma tábua dinâmica através do método Lee-Carter em que teve como base estatísticas de Portugal para ambos os géneros fornecidas pela The Human Mortality Database. Foram usadas as taxas centrais de mortalidade registadas entre 1940 e 2015 para se conseguir projetar $m_{x,t}$ de 50 anos futuros, gerando-se assim uma tábua de mortalidade dinâmica de dimensão 111x126. Desta forma foi possível obter as probabilidades de sobrevivência, através das conhecidas fórmulas atuariais, para serem usadas no cálculo do valor atual da carteira no caso prático.

5 - Avaliação do Risco de Longevidade

Como descrito em capítulos anteriores, o risco de longevidade representa o risco de um indivíduo sobreviver para além do inicialmente previsto. O uso de tábuas dinâmicas no cálculo do valor atual das responsabilidades associadas a planos de pensões de benefício definido permite capturar parte desse risco através da incorporação de incrementos futuros de longevidade. Porém, Pitacco (2002) afirma que a tendência da mortalidade é aleatória, o que implica que poderá existir desvios sistemáticos em relação às previsões obtidas independentemente do modelo utilizado.

Existe uma abordagem simplificada que permite a avaliação dos riscos de longevidade e que consiste no recálculo da melhor estimativa das provisões técnicas, aplicando um choque nas probabilidades de morte que as reduz em 20% (SCR.7.28 das especificações técnicas). Posteriormente, as probabilidades de morte neste cenário são usadas no recálculo do valor atual das responsabilidades.

Neste capítulo irá ser apresentada uma abordagem alternativa à fórmula padrão proposta nas especificações técnicas do QIS: a simulação de Monte-Carlo.

5.1 – Simulação de Monte-Carlo

A simulação de Monte-Carlo irá usar os parâmetros α_x , β_x e k_t gerados pelo modelo Lee-Carter no capítulo anterior. Isto é, para o cálculo do valor atual das anuidades, irão ser utilizadas as probabilidades de sobrevivência que foram projetadas através destes parâmetros. Irá ser considerada uma taxa de juro fixa i , uma vez que, o foco é unicamente o risco de longevidade.

Sabendo que a fórmula geral do cálculo do valor atual esperado de uma anuidade vitalícia sobre um indivíduo de idade x no ano t é dada por:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{Dx} = \sum_{t=0}^{w-1} v^t {}_t p_x \quad (30)$$

onde,

$$Dx = v^t l_x, \quad (31)$$

$$N_x = \sum_{y=x}^{\infty} Dy \quad (32)$$

$$v = \frac{1}{1+i} \quad (33)$$

Então, para os trinta membros⁴ com uma determinada pensão C_x calcula-se o valor atual dos pagamentos futuros para uma única vida para cada um dos pensionistas. A fórmula geral do cálculo do valor atual da carteira é dada por:

⁴ Os dados relativos aos membros da carteira em estudo são fictícios, incluindo o valor da pensão de cada pensionista.

$$VA = a_x C_x (1 + r)^t \quad (34)$$

onde t é o período de desconto (o número de anos desde a idade atuarial⁵ até a idade em que não é admitida a hipótese de sobrevivência do indivíduo, que neste caso é 110 anos) e r é a taxa de crescimento das pensões.

Os pressupostos a assumir na data de avaliação são os seguintes(31/12/2018):

- Taxa de juro: 1,7% ao ano
- Idade limite: 110 anos
- Taxa de crescimento das pensões: 1,25% por ano

O fundo a considerar é constituído por homens e mulheres, porém no nosso caso prático não se irá usar projeções de probabilidade de sobrevivência diferentes para cada sexo, uma vez que foram usados dados estatísticos que incluem as mortes de ambos.

Com 1000 simulações de cenários gerados, considerando as hipóteses descritas acima, foram geradas estatísticas descritivas dos valores atuais gerados da carteira de anuidades. Foi também gerado um gráfico para visualização da distribuição.

Tabela 1 Estatísticas descritivas dos valores atuais gerados da carteira de anuidades

Mínimo	1ºQuantil	Média	Mediana	Desvio Padrão	3º Quantil	Máximo
259 917	267 744	269 872	269 871	3 339	272 120	280 667

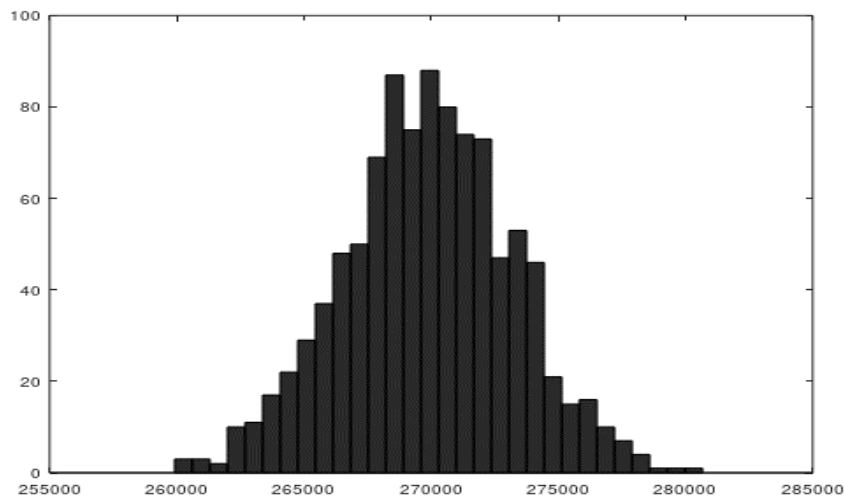


Figura 6 Histograma das simulações geradas

Um teste que é largamente utilizado como referência, tanto nas aplicações científicas como nos trabalhos de comparação de outros testes propostos é o teste Shapiro Wilk, Os resultados de Razali and Wah em 2011 mostram que este é o teste de normalidade mais poderoso em comparação com o teste de Anderson-Darling, teste de Lilliefors e teste de Kolmogorov-Smirnov. Por essa razão, executou-se o teste Shapiro Wilk cuja hipótese nula foi a população ser normalmente distribuída e obteve-se um w de

⁵ Idade atuarial é a idade do indivíduo à data da avaliação da carteira.

0.99901 e um p-value de 0.87898 que nos permite não rejeitar a hipótese de normalidade para um nível de significância de 5%.

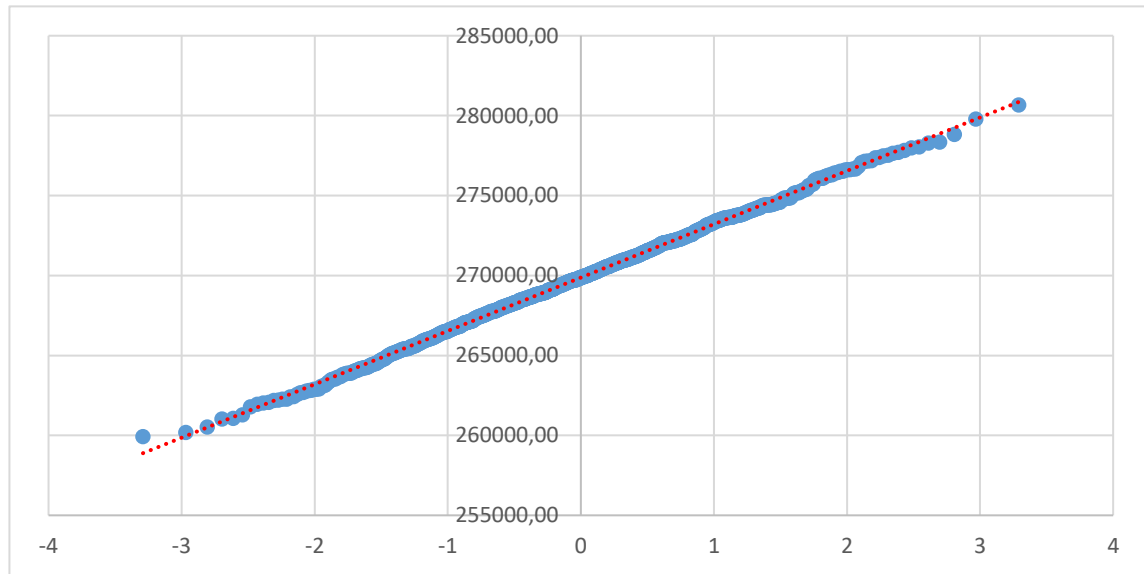


Figura 7 Diagrama Q-Q (quantil-quantil)

Através do Diagrama Q-Q é possível perceber que os valores da carteira dispõem-se em linha, confirmando terem vindo de uma população Gaussiana.

Com a distribuição dos cenários obtidos importa agora averiguar, para um determinado nível de confiança, qual o valor a ter em reserva por forma a garantir que não seja necessário pagar uma indemnização superior a esse capital e, conseqüentemente, não nos tornarmos tecnicamente insolventes. É nesta fase que entra a nossa análise do VaR.

Importa notar que a nossa análise difere um pouco do método muito utilizado para avaliar o risco em operações financeiras. Este último resume o risco de um produto financeiro ou o risco de uma carteira de investimentos e define-se como a pior perda esperada num horizonte temporal especificado a um determinado intervalo de confiança. Segundo Richards (2003), a visão do risco de longevidade não corresponde à visão de um ano exigida muitas vezes nesta metodologia pura de valor em risco. Como o risco de longevidade está refletido na tendência de longo prazo das taxas de mortalidade, seria excessivamente sentencioso insistir que o risco de tendência de longevidade fosse medido ao longo de um horizonte de um ano.

Sandström (2010) mostra-nos como matematicamente, admitindo a hipótese de normalidade, este valor é definido:

$$VaR_{1-\alpha} = \mu_t + \sigma z_{1-\alpha}, \text{ com } z \sim N(0,1) \quad (35)$$

onde $z_{1-\alpha}$ é o quantil, μ_t é a média e σ é o desvio padrão.

5.2 – Valor em Risco (VaR)

Neste estudo, foram assumidos três diferentes graus de confiança:

Tabela 2 Value at Risk da carteira

Tábua dinâmica				Tábua estática	
Cenário base	VaR (90%)	VaR (95%)	VaR (99%)	Cenário base	Pós choque de 20%
269 872	274 151	275 365	277 640	250 007	298 357

Efetuámos o cálculo do VaR para três diferentes níveis de significância. É possível verificar que, por exemplo, usando o VaR para um nível de significância de 99%, deveremos ter 274 151 euros em reserva por forma a garantir que não seja necessário pagar um total de pensões superior a esse capital e, consequentemente, não nos tornarmos tecnicamente insolventes.

Com o intuito de se conseguir ter uma visão global da diferença do valor atual da carteira aquando o uso de tábua estática face ao uso de uma dinâmica efetuou-se o cálculo desta carteira recorrendo a uma tábua muito usada pelo mercado segurador português: TV 73/77. O resultado que se obteve foi de 250 007 euros, muito inferior aos estimados através da nossa tábua de mortalidade projetada. Foi aplicada também neste cálculo, a abordagem simplificada que permite a avaliação dos riscos de longevidade através do choque nas probabilidades de morte que as reduz em 20%. O valor obtido foi de 298 357 euros, muito superior aos valores obtidos no cálculo do Value at Risk em contexto dinâmico. Note-se que a diferença de valores entre os cenários base e os cenários pós choque de 20% é razoavelmente maior do que a diferença entre cenários obtidos nos cálculos em contexto dinâmico. Estes resultados evidenciam que existe, mais uma vez, uma fraca sensibilidade à tendência de longevidade aquando do uso de tábuas estáticas nos cálculos atuariais.

Conclusão

As tendências observadas na longevidade criam múltiplas implicações no desenvolvimento económico, social e humano das sociedades. É essencial que se projete adequadamente o cálculo do valor atual esperado dos cash-flows futuros, tanto a nível das variáveis económicas bem como a nível demográfico, tendo como objetivo a minimização de riscos de sub ou sobre estimação das responsabilidades de uma carteira.

Um dos objetivos deste trabalho foi analisar algumas formas de mitigar o risco retratado acima. A abordagem escolhida foi começar por apresentar alguns instrumentos que são usados, já nos dias de hoje, como meio de mitigação do risco de longevidade.

Foi objetivo também que o leitor fosse capaz de interpretar corretamente a informação retirada das tábuas de mortalidade estáticas e dinâmicas, e para tal tivemos de analisar os conceitos e alguns dos modelos que estão por detrás da sua construção.

No entanto, o foco principal deste estudo centrou-se no cálculo das responsabilidades financeiras de um fundo de pensões tendo em conta a tendência observada na longevidade.

Sumariamente, foram usados valores dos níveis de mortalidade do passado para se conseguir prever o futuro. As respetivas mortalidades foram extrapoladas a partir das tendências do passado e um carácter aleatório (erros homocedásticos centrados). Desta forma conseguimos estimar o efeito que o ano de nascimento pode ter sobre a mortalidade de uma geração. Lee-Carter foi o modelo escolhido para ser implementado para a projeção da mortalidade.

Adicionalmente à aplicação do modelo Lee-Carter no cálculo do valor atual de uma carteira de anuidades de um fundo de pensões, foi determinado o valor em risco para a carteira. No entanto, é importante ressaltar que apenas foi considerado a variabilidade dos níveis de mortalidade, ignorando deste modo todos os outros fatores aleatórios que afetam o valor da carteira.

Aplicada a tábua de mortalidade dinâmica no cálculo atual da carteira, a principal conclusão prende-se nas diferenças observadas relativamente ao uso de uma das tábuas mais utilizadas no mercado de fundos de pensões, a TV 73/77 no mesmo cálculo atuarial. O impacto em termos de aumento do valor atual das responsabilidades provocado pela utilização de uma tábua dinâmica que, em princípio, refletirá mais adequadamente o perfil de mortalidade da população em causa bem como a respetiva evolução, foi bastante significativo, embora menos significativo face ao choque de 20%.

No futuro, à medida que se for acumulando um maior referencial histórico, será mais viável o desenvolvimento de tábuas dinâmicas. Para isso, é estritamente indispensável que se consiga melhorias ao nível da qualidade dos dados reportados pelas entidades.

Bibliografia

- Blake, D., Cairns, A. & Dowd, K. (2006). *Living with mortality: longevity bonds and other mortality-linked securities*. British Actuarial Journal, 12(1), 153-228.
- Booth, H. & Tickle, L. (2008). *Mortality modelling and fore-casting: A review of methods*. Annals of Actuarial Science, 3(1/2), 3-43.
- Booth, H. (2006). *Demografic forecasting: 1980 to 2005 in review*. International Journal of Forecasting, 22(3), 547-581.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J. et al (1997). *Actuarial Mathematics* (2ª Edição). The Society of Actuaries.
- Bravo, J. (2007). *Tábuas de mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade*. Dissertação de Doutoramento em Economia, Universidade de Évora, Portugal.
- Carvalho, M. (2013). *Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospetivas*. Seminário. Faculdade de Ciências, Universidade do Porto.
- Comissão Europeia (2012). *Quantitative Impact Study (QIS) on Institutions for Occupational Retirement Provision (IORPs) – Technical Specifications*. Bruxelas.
- Conselho Económico e Social (2018). *Segurança Social: Modelos e Desafios*. Portugal. Disponível em: <http://www.ces.pt/storage/app/uploads/public/5a8/eca/933/5a8eca9335f96252023364.pdf>
- Costa, A. (2017). *Estratégia nacional para o envelhecimento ativo e saudável 2017-2025*. Proposta do Grupo de Trabalho Interministerial (despacho nº.12427/2016).
- Coughlan, G., Epstein, D., Sinha, A. & Honing, P. (2007a). *Q-forwards, Derivatives for transferring longevity and mortality risk*. J. P. Morgan Pension Advisory Group. London.
- Coughlan, G., Epstein, D., Ong, A. Sinha, A., Hevia-Portocarrero, J., Gingrich, E., Khalaf-Allah, M., Joseph, P. (2007b). *LifeMetrics: A toolkit for measuring and managing longevity and mortality risks*. (LifeMetrics Technical Document), J. P. Morgan Pension Advisory Group, London.
- Cox, S. & Lin, Y. (2004). *Natural Hedging of life and annuity mortality risks*. Department of Risk Management & Insurance, Georgia State University.
- Danieli, L. (2015). *Mecanismos para proteção do coletivo aos riscos de longevidade*. Disponível em: <http://gama-ca.com.br/artigos-gama/mecanismos-para-protecao-do-coletivo-aos-riscos-de-longevidade/>
- EIOPA (2014). *Technical Specifications for the Preparatory Phase (Part 1)*. Disponível em: https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf
- European Commission. Internal Market and Services DG. (2010). *QIS5 Technical Specifications*. Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5. Disponível em: https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/QIS5-technical_specifications_20100706.pdf
- Garcia, J. (2007). *Introdução à Matemática Actuarial*.

- Girosi, F. & King, G. (2007). *Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method*” Working paper. Harvard University. Cambridge, MA, USA. Disponível em: <https://gking.harvard.edu/files/abs/lc-abs.shtml>
- Lee, R. & Miller, T. (2001), *Evaluating the performance of the lee-carter method for forecasting mortality*. *Demography*, 38 (4), 537-549.
- Levantesi, S. & Menzietti M. (2017) *Maximum market price of longevity risk under solvency regimes: The case of Solvency II*. *Risks* 5 (2), 29.
- Machry, M. (2003). *O uso do value at risk (VaR) como medida de risco para os fundos de pensão*”. Fundação Getúlio Vargas – Escola de Administração de Empresas de S. Paulo
- Morneau Shepell. *Pension Plan Risk Transfer – Longevity Swaps*. Disponível em: <https://www.morneaushepell.com/ca-en/insights/pension-plan-risk-transfer-longevity-swaps>
- Pateiro, D. (2013). *Construção de Tábuas de Mortalidade Dinâmicas para o Mercado Português dos Fundos de Pensões e Avaliação do Risco de Longevidade*. Trabalho Final de Mestrado. Mestrado em Ciências Atuarias. ISEG
- Pereira, M. (2013). *Modelos Dinâmicos na Construção de Tábuas de Mortalidade*. Trabalho de Projeto. Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal.
- PORDATA. (2017). *Esperança de vida aos 65 anos total e por sexo*. Disponível em: [https://www.pordata.pt/Portugal/Esperan%C3%A7a+de+vida+aos+65+anos+total+e+por+sexo+\(base+tri%C3%A9nio+a+partir+de+2001\)-419](https://www.pordata.pt/Portugal/Esperan%C3%A7a+de+vida+aos+65+anos+total+e+por+sexo+(base+tri%C3%A9nio+a+partir+de+2001)-419)
- Razali, N. & Wah, Y. (2011). "Power comparisons of Shapiro–Wilk, Kolmogorov–Smirnov, Lilliefors and Anderson–Darling tests". *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, 2 (1), 21–33.
- Reis, L. (2018). *Projeção da Mortalidade Portuguesa por meio dos Modelos Generalizados de Idade – Período – Coorte*. Mestrado em Estatística e Gestão de Informação. Nova IMS.
- Richards, S., Currie, I. & Ritchie, G. (2003). *A value-at-Risk framework for longevity trend risk*. *British Actuarial Journal*, 1-24.
- Sandstrom, A. (2010). *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers*. New York: Chapman and Hall/CRC, <https://doi.org/10.1201/b10338>
- The Human Mortality Database. *Life tables total (both sexes)*. Disponível em: https://www.mortality.org/hmd/PRT/STATS/bltper_1x1.txt
- The Lee-Carter Model*. Spring (2009). POP 502 / ECO 572/ SOC 532. Disponível em: <https://data.princeton.edu/eco572/LeeCarter.pdf>
- Vallin, J. (1973). *La mortalité par génération en France depuis 1889*. INED. Paris, 979-984.
- Westland, H. (2009). *Hedging longevity risk with longevity swaps*. Master Thesis Quantitative Finance. Disponível em: <https://thesis.eur.nl/pub/4842-Westland>
- Wikipédia. *Coorte (estatística)*. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Coorte_\(estatística\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Coorte_(estatística)).

Anexos

Código em Octave do cálculo da carteira através de uma tábua dinâmica gerada pelo modelo Lee-Carter e respetivos VaR

```
bltper_matriz=load("bltper_matriz.txt");
C=bltper_matriz(:,3);

M=reshape(C,111,length(C)/111);

m=log(M);

alpha_a=mean(m,2);

m_til=m-alpha_a*ones(1,76);

[U,S,V]=svd(m_til);

m_til_lvs=U(:,1)*S(1,1)*V(:,1)';

beta_a= U(:,1);

gamma_t=S(1,1)*V(:,1)';

soma_gamma_t=sum(gamma_t);

gamma_1=gamma_t(:,1);

gamma_76=gamma_t(:,76);

teta=(gamma_76-gamma_1)/(76-1);

gamma_b=gamma_t(2:end);
gamma_a=gamma_t(1:end-1);

sigma_rw2=sum((gamma_b-gamma_a-teta).^2)/(76-1);

sigma_rw=sqrt(sigma_rw2);

DD_Excel=load("dados03.txt");

Pensao=DD_Excel(:,2)*14;
```

```

Octave_menos_Excel=701692-7705;

DD_Octave=DD_Excel+Octave_menos_Excel*ones(30,1)*[1 0];

Data_referencia=datenum("12/31/2019");

Idades_atuariais=round((Data_referencia-DD_Octave(:,1))/365.25);

randn("state", 1)

for cenario = 1:1000

CSI=sigma_rw*randn(1,50);

for k = 1:50

gamma_t(76+k)=gamma_t(76+k-1)+teta+CSI(k);
end
m_til_projetado= beta_a*gamma_t;

mprojetado=m_til_projetado+alpha_a*ones(1,126);

Mprojetado=exp(mprojetado);

Px=exp(-Mprojetado);

Px2018_2065=Px(1:111,79:126);

valor_carteira = 0;

for n = 1:30

Pxdinamico=diag(Px2018_2065,-Idades_atuariais(n));

PreL=cumprod(Pxdinamico);

v=0.017;

idades=(Idades_atuariais(n):110)';

Dx=PreL.*(1+v).^-idades;
r=0.0140;

```

```

Dxtheta=Dx.*(1+r).^idades;

nauxiliar=flip(Dxtheta);

Nauxiliar=cumsum(nauxiliar);

Nx=flip(Nauxiliar);

Gx=Nx(2:end)./Dx(1:end-1);

Gx= [Gx;0];

Gxtheta=Gx.*(1+r).^idades ;

valor=Gxtheta(1)*Pensao(n);

valor_carteira=valor_carteira+valor ;

end
valorescenarios(cenario)=valor_carteira ;

end

max(valorescenarios);
min(valorescenarios);
mean(valorescenarios);
std(valorescenarios);
median(valorescenarios);
prctile(valorescenarios,25);
prctile(valorescenarios,75);
A=mean(valorescenarios)
B=std(valorescenarios)
VaR95=A+B*0.95;
VaR90=A+B*0.90;
VaR99=A+B*0.99;
disp(' ')
VaR90=A+B*norminv(0.90)
VaR95=A+B*norminv(0.95)
VaR99=A+B*norminv(0.99)
disp(' ')
VaR90=norminv(0.90,A,B)
VaR95=norminv(0.95,A,B)
VaR99=norminv(0.99,A,B)
[pval,W]=shapiro_wilk_test(valorescenarios)

```

Cálculo da carteira com o uso de uma tábua estática

No. employee	Name	Sex	Birth date	Monthly complement	No. Payments	Birth date	no. Payments	Actuarial age at 31/12/2019	Annual complement	Annuities	Present Value of the pensions being payed
3	Raimundo Quintan	M	03/02/1921	100	14 meses	03/02/1921	14	99	1.400	0,82	1.148,66
5	Madalena Tavares	F	07/05/1921	20	14 meses	07/05/1921	14	99	280	0,82	229,73
9	Susana Andrade	F	03/03/1922	100	14 meses	03/03/1922	14	98	1.400	1,25	1.747,01
12	Cristiano Pinto	M	02/07/1922	100	14 meses	02/07/1922	14	97	1.400	1,58	2.208,56
15	Nuno Fernandes	M	16/05/1923	90	14 meses	16/05/1923	14	97	1.260	1,58	1.987,70
18	Paula Cruz	F	18/05/1923	120	14 meses	18/05/1923	14	97	1.680	1,58	2.650,27
20	Tomás Lima	M	25/11/1923	44	14 meses	25/11/1923	14	96	616	1,85	1.139,70
27	Luís Pinto	M	06/02/1925	1.000	14 meses	06/02/1925	14	95	14.000	2,09	29.216,74
55	Gabriel Alcaide	M	24/11/1926	120	14 meses	24/11/1926	14	93	1.680	2,51	4.218,08
60	Angélico Barreira	M	25/11/1926	25	14 meses	25/11/1926	14	93	350	2,51	878,77
68	José Fontela	M	30/04/1927	1.700	14 meses	30/04/1927	14	93	23.800	2,51	59.756,06
72	Ricardo Matos	M	25/11/1928	300	14 meses	25/11/1928	14	91	4.200	2,91	12.230,51
79	Roque Capanema	M	06/03/1929	30	14 meses	06/03/1929	14	91	420	2,91	1.223,05
81	Ana Pereira	F	03/04/1929	55	14 meses	03/04/1929	14	91	770	2,91	2.242,26
84	Virgília Ferreira	F	28/04/1929	60	14 meses	28/04/1929	14	91	840	2,91	2.446,10
100	Salvador Real	M	02/01/1933	25	14 meses	02/01/1933	14	87	350	3,92	1.371,04
120	Luisa Castanheira	F	20/02/1940	33	14 meses	20/02/1940	14	80	462	6,63	3.063,39
125	Rodrigo Calado	M	20/09/1940	120	14 meses	20/09/1940	14	79	1680	7,12	11.957,34
150	Ana Dias	F	20/03/1942	75	14 meses	20/03/1942	14	78	1050	7,63	8.010,01
155	Ivo Filipe	M	20/03/1942	19	14 meses	20/03/1942	14	78	266	7,63	2.029,20
162	Anita Costa	F	21/03/1942	70	14 meses	21/03/1942	14	78	980	7,63	7.476,01
165	Carlos Matos	M	06/07/1945	55	14 meses	06/07/1945	14	74	770	9,92	7.635,19
170	Rita Jesus	F	07/05/1946	20	14 meses	07/05/1946	14	74	280	9,92	2.776,43
190	José Andrade	M	07/08/1946	80	14 meses	07/08/1946	14	73	1120	10,54	11.806,94
210	Neuza Osório	F	27/02/1947	70	14 meses	27/02/1947	14	73	980	10,54	10.331,07
211	Francisco Lopes	M	27/05/1947	50	14 meses	27/05/1947	14	73	700	10,54	7.379,34
220	André Figueira	M	01/01/1948	17	14 meses	01/01/1948	14	72	238	11,19	2.662,09
230	Andreia Matos	F	24/03/1948	150	14 meses	24/03/1948	14	72	2100	11,19	23.489,05
235	Maria Alice	F	24/06/1948	90	14 meses	24/06/1948	14	72	1260	11,19	14.093,43
237	Carlota Pinto	F	24/06/1949	76	14 meses	24/06/1949	14	71	1064	11,85	12.603,08
Total				2.307					30.558		250.007

Cálculo da carteira pós choque de 20%

No. employee	Name	Sex	Birth date	Monthly complement	No. Payments	Birth date	no. Payments	Actuarial age at 31/12/2019	Annual complement	Annuities	Present Value of the pensions being payed
3	Raimundo Quintan	M	03/02/1921	100	14 meses	03/02/1921	14	99	1.400	1,21	1.699,31
5	Madalena Tavares	F	07/05/1921	20	14 meses	07/05/1921	14	99	280	1,21	339,86
9	Susana Andrade	F	03/03/1922	100	14 meses	03/03/1922	14	98	1.400	1,65	2.316,06
12	Cristiano Pinto	M	02/07/1922	100	14 meses	02/07/1922	14	97	1.400	2,02	2.825,47
15	Nuno Fernandes	M	16/05/1923	90	14 meses	16/05/1923	14	97	1.260	2,02	2.542,92
18	Paula Cruz	F	18/05/1923	120	14 meses	18/05/1923	14	97	1.680	2,02	3.390,56
20	Tomás Lima	M	25/11/1923	44	14 meses	25/11/1923	14	96	616	2,33	1.437,52
27	Luís Pinto	M	06/02/1925	1.000	14 meses	06/02/1925	14	95	14.000	2,62	36.625,64
55	Gabriel Alcaide	M	24/11/1926	120	14 meses	24/11/1926	14	93	1.680	3,13	5.259,02
60	Angélico Barreira	M	25/11/1926	25	14 meses	25/11/1926	14	93	350	3,13	1.095,63
68	José Fontela	M	30/04/1927	1.700	14 meses	30/04/1927	14	93	23.800	3,13	74.502,83
72	Ricardo Matos	M	25/11/1928	300	14 meses	25/11/1928	14	91	4.200	3,62	15.190,68
79	Roque Capanema	M	06/03/1929	30	14 meses	06/03/1929	14	91	420	3,62	1.519,07
81	Ana Pereira	F	03/04/1929	55	14 meses	03/04/1929	14	91	770	3,62	2.784,96
84	Virgília Ferreira	F	28/04/1929	60	14 meses	28/04/1929	14	91	840	3,62	3.038,14
100	Salvador Real	M	02/01/1933	25	14 meses	02/01/1933	14	87	350	4,77	1.671,14
120	Lúisa Castanheira	F	20/02/1940	33	14 meses	20/02/1940	14	80	462	7,75	3.579,44
125	Rodrigo Calado	M	20/09/1940	120	14 meses	20/09/1940	14	79	1680	8,27	13.894,62
150	Ana Dias	F	20/03/1942	75	14 meses	20/03/1942	14	78	1050	8,82	9.258,05
155	Ivo Filipe	M	20/03/1942	19	14 meses	20/03/1942	14	78	266	8,82	2.345,37
162	Anita Costa	F	21/03/1942	70	14 meses	21/03/1942	14	78	980	8,82	8.640,85
165	Carlos Matos	M	06/07/1945	55	14 meses	06/07/1945	14	74	770	11,24	8.651,63
170	Rita Jesus	F	07/05/1946	20	14 meses	07/05/1946	14	74	280	11,24	3.146,05
190	José Andrade	M	07/08/1946	80	14 meses	07/08/1946	14	73	1120	11,89	13.318,92
210	Neuza Osório	F	27/02/1947	70	14 meses	27/02/1947	14	73	980	11,89	11.654,05
211	Francisco Lopes	M	27/05/1947	50	14 meses	27/05/1947	14	73	700	11,89	8.324,32
220	André Figueira	M	01/01/1948	17	14 meses	01/01/1948	14	72	238	12,56	2.990,25
230	Andreia Matos	F	24/03/1948	150	14 meses	24/03/1948	14	72	2100	12,56	26.384,60
235	Maria Alice	F	24/06/1948	90	14 meses	24/06/1948	14	72	1260	12,56	15.830,76
237	Carlota Pinto	F	24/06/1949	76	14 meses	24/06/1949	14	71	1064	13,25	14.099,64
Total				2.307					30.558		298.357