UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: ECONOMIA MONETÁRIA E FINANCEIRA

MODELOS DE TAXAS DE JURO: ABORDAGEM DE HEATH, JARROW E MORTON
Aplicação ao caso alemão

MARIA DE FÁTIMA MOTA DA SILVA

Orientação: PROF. DOUTOR NUNO CASSOLA BARATA

Júri:

Presidente: PROF. DOUTOR NUNO CASSOLA BARATA
Vogais: PROF. DOUTOR CARLOS ALBERTO SANTOS BRAUMAN
PROF. DOUTOR JOSÉ ANTÓNIO AZEVEDO PEREIRA

Maio de 1999

Resumo

A estrutura por prazos das taxas de juro tem sido objecto de vários estudos, na literatura, que não são consensuais quanto às variáveis de estado que explicam a sua evolução ao longo do tempo. A informação contida na estrutura temporal de taxas de juro é, frequentemente, utilizada como um indicador avançado da política monetária, ao mesmo tempo que permite induzir quais as expectativas dos agentes. Simultaneamente, a valorização de parte dos derivados depende explicitamente da estrutura por prazos das juro observada num determinado momento.

O objectivo deste trabalho é analisar o modelo Heath, Jarrow e Morton no qual a valorização de qualquer activo de rendimento fixo ou derivado é baseado em argumentos de ausência de arbitragem. Utilizando o Método dos Momentos Generalizado de Hansen são estimados os parâmetros do processo de difusão da *forward*, para o caso alemão, no período de Novembro de 1989 a Junho de 1998.

JEL: E430; G130; G120; C510.

Palavras chave: Estrutura por prazos das taxas de juro; Medida Martingalo; Preços das obrigações; Heath, Jarrow and Morton; Taxa de juro *forward*; Método dos momentos generalizado.

Abstract

The term structure of interest rates has been widely used as a topic of study in literature. However, there is no agreement about the state variables driving the term structure across time. The information embedded in the term structure can be used as an indicator for monetary policy and also reflects the market's expectations about economic future events. Moreover, the price of some derivative products depends only on the current term structure.

This paper provides an analysis and implementation of the Heath, Jarrow and Morton model, in which all fixed-income securities and their derivatives are priced based on the absence of arbitrage opportunities. The above referred model was applied to the Germany case, from November 1989 to June 1998, using the Hansen´s generalized method of moments parameter estimation.

JEL: E430; G130; G120; C510.

Keywords: Term structure of interest rates; Martingale measures; Bond pricing; Heath, Jarrow and Morton; Forward rate; Generalized method of moments.

ÍNDICE

Índice de gráficos

Índice de quadros

Agradeço ao meu orientador, Prof. Nuno Cassola, pelas ideias e disponibilidade que sempre apresentou e pela motivação que me transmitiu durante todo este trabalho.

À amiga Drª. Helena Nunes agradeço sinceramente todo o apoio prestado, a sua ajuda no esclarecimento das dúvidas que iam surgindo e a sua paciência por ter lido e comentado o trabalho agora apresentado. Acima de tudo agradeço a sua amizade.

Ao Drº. Sérgio Branco toda a minha gratidão pelas vezes infinitas em que me ouviu, apoiou e ajudou nas tarefas relacionadas com a minha actividade profissional, permitindo que eu dispusesse de mais tempo livre.

Ao Drº. Jorge Marçal o meu muito obrigado pelo sua amizade e companheirismo ao longo destes dois anos de mestrado.

À Drª. Lucena Vieira agradeço a sua amizade e a sua preciosa ajuda informática, indispensável na execução deste trabalho.

À Drª. Ana Filipa Correia pelo apoio e comentários tecidos sobre esta tese.

Às Drªs. Clara Soares e Maria José Valério quero demonstrar o meu agradecimento por todo o apoio nesta fase final de conclusão da tese.

A todos os meus amigos que sempre me apoiaram o meu muito obrigada.

Aos meus Pais e ao Nuno Rafael um obrigada por tudo!

Ao Nuno Rafael

0. Introdução

As obrigações de cupão zero, emitidas pelos estados, são activos que dão origem na maturidade a um único fluxo financeiro previamente fixado. Acresce que, o preço deste tipo de activos, em qualquer momento do tempo, é independente de questões de credibilidade do emissor. Designa-se por estrutura por prazos das taxas de juro a evolução ao longo do tempo da taxa de juro implícita no preço de uma obrigação cupão zero. A determinação, num dado momento, das taxas de juro de curto prazo para diferentes maturidades, para além de ser um indicador para a condução da política monetária, contém implicitamente informação relevante sobre as expectativas dos agentes, em relação à situação macro-económica futura. Neste sentido, é fundamental determinar-se quais as variáveis de estado que explicam a evolução da estrutura temporal de taxas de juro.

Existem duas abordagens diferenciadas de valorização das obrigações e seus derivados. A primeira baseada no princípio da arbitragem deduz quais as relações que os preços dos diversos activos financeiros devem verificar de forma a que se eliminem quaisquer oportunidades de arbitragem. Entende-se por oportunidade de arbitragem qualquer estratégia de investimento que proporcione um lucro certo, sem qualquer risco associado. O modelo de Black-Scholes (1973) foi um dos trabalhos pioneiros de valorização de derivados (opções), recorrendo à ideia de arbitragem (ver também Merton, R. (1973)).

Recentemente, a valorização dos activos financeiros e dos derivados foi simplificada com a introdução do conceito de medida neutral ao risco ou medida martingalo. A valorização dos derivados depende, nesta abordagem apenas do conhecimento de um dos parâmetros do processo de difusão dos preços dos activos subjacentes.

A segunda abordagem desenvolvida na literatura, consiste na determinação dos preços dos activos e derivados num modelo de equilíbrio geral. Esta abordagem parte de um problema de maximização da utilidade esperada de um agente, ao longo da sua vida, sujeito a uma restrição orçamental. Nesta perspectiva é necessário postular-se qual é a função utilidade do agente representativo desta economia, tendo-se revelado difícil de compatibilizar a evidência empírica com as especificações da função utilidade mais frequentemente utilizadas.

O objectivo deste trabalho é apresentar a valorização das obrigações de cupão zero e seus derivados com base no modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992) - *HJM*, recorrendo apenas a argumentos de ausência de arbitragem.

Neste sentido, no primeiro capítulo introduz-se os conceitos e as ferramentas que permitem valorizar qualquer activo financeiro ou derivado, admitindo que qualquer oportunidade de arbitragem é imediatamente eliminada pelo mercado.

No segundo capítulo, restringe-se a análise ao mercado obrigacionista onde são transaccionadas apenas obrigações de cupão zero e seus derivados. Analisa-se quais as condições que os preços das obrigações devem obedecer para o mercado eliminar qualquer oportunidade de arbitragem e ser completo.

No terceiro capítulo, estimam-se os parâmetros do processo de difusão das taxas de juro *forward* instantânea através do Método dos Momentos Generalizado, para a taxa de juro alemã, no período compreendido entre Novembro de 1989 e Junho de 1998. A partir das estimativas dos parâmetros e aproximando os choques aleatórios através de simulações numéricas, obtém-se vários processos de difusão possíveis para as taxas *forward* instantânea. Este exercício permite aferir da capacidade das formas funcionais propostas pelos modelos, captarem todas as propriedades (níveis e inclinação) das taxas directamente observadas.

1. Arbitragem e medida neutral ao risco

Na valorização dos activos financeiros recorre-se à determinação de um preço que exclua todas as hipóteses de arbitragem. Este preço é assimilado a um preço de equilíbrio, uma vez que não há por parte dos agentes qualquer incentivo em alterarem as unidades detidas desse activo. Neste capítulo, analisa-se quais as condições a que um mercado deve obedecer para que sejam excluídas todas as oportunidades de arbitragem. Para tal, introduz-se o conceito de medida de probabilidade neutral ao risco, sob a qual os processos dos preços dos activos financeiros e dos derivados se transformam em martingalos. Demonstra-se, em seguida, que a existência desta medida de probabilidade é condição suficiente para que as oportunidades de arbitragem sejam eliminadas. No caso desta medida de probabilidade ser única então o mercado é completo, no sentido em que qualquer derivado é reproduzido apenas por uma única estratégia dinâmica. Tem-se em consideração ao longo deste capítulo o mercado de activos financeiros em geral, deixando para o segundo capítulo a análise do mercado obrigacionista.

1.1 Activos financeiros e carteira autofinanciada

Um determinado activo financeiro proporciona, no intervalo de tempo contínuo $[0,T]$, uma dada remuneração incerta, na medida em que esta se encontra condicionada à realização de determinados acontecimentos. Esta incerteza advém do facto de poderem ocorrer vários cenários, sendo a remuneração do activo diferente em cada um deles. A introdução da incerteza na valorização de um activo financeiro, de acordo com Duffie (1996), faz-se recorrendo ao conceito de espaço de probabilidade (Ω, F, P), onde Ω representa o conjunto de estados infinitos $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$; F é um subconjunto de estados de Ω com probabilidade de ocorrência maior ou igual a zero; e P é a probabilidade de um acontecimento de F ocorrer.

Um processo *browniano* é uma aplicação de $\Omega \times [0,\infty[\rightarrow R$. Em cada momento do tempo pode ser definido como um vector *n*-dimensional do tipo $W = \left(W^1, W^2, \ldots\ldots, W^n\right)$. Este processo obedece às seguintes propriedades de acordo com Duffie (1996):

a) o valor inicial é igual a zero, isto é, $W_0=0$;

b) para qualquer período de tempo $(t-s)$, os acréscimos, $W_t - W_s$, $\forall s<t$, têm uma distribuição normal de média nula e variância igual a $(t-s)$;

c) os acréscimos são independentemente distribuídos;

d) para cada estado w, a trajectória seguida pelo processo é contínua.

O conjunto F aumentado gerado por este processo *browniano*, também designado filtragem, pode ser interpretado como toda a informação disponível no momento t, tendo em conta a realização passada do processo.

No mercado financeiro em análise são transaccionados *n* activos. Os preços destes activos são representados como um vector *n*-dimensional de processos estocásticos adaptados[1], do tipo $X = \left(X^1, X^2, \ldots\ldots, X^n\right)$. Segundo Björk (1996) os preços dos activos podem ser vistos como um sistema de equações diferenciais estocásticas geradas por um conjunto de movimentos brownianos. O preço do activo *i* no momento *t*, representado por X_t^i, deverá satisfazer a seguinte equação estocástica:

$$X_t^i = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s)\, dW_i(s) \quad \text{Equação 1}$$

ou na sua forma diferencial:

$$dX_t^i = \mu_t dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t)\, dW_i(t) \quad \text{Equação 2,}$$

onde σ e μ são processos previsíveis (isto é, conhecidos no momento *t-1*)[2]. Estes processos têm que satisfazer as seguintes condições de integrabilidade: $\int_0^t |\mu_s|\, ds < \infty$ e $\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(s)\, ds < \infty$, isto é , ambos os processos devem ser finitos[3] com probabilidade igual a um.

A partir da equação 2 deduz-se que a variação dos preços dos activos pode ser decomposta em duas partes: o acréscimo por unidade de tempo e o acréscimo gerado pelo movimento *browniano*. O termo μ_t e $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t)$ traduzem, respectivamente, o valor médio esperado[4] e a volatilidade da variação dos preços

[1]Entende-se por processo estocástico adaptado uma sequência $\{X_0, X_1, \ldots, X_T\}$ tal que, em cada momento, X_t é uma variável aleatória em relação a (Ω, F_t). Tal significa que, no momento *t*, o valor da variável aleatória X_t é conhecido. Exige-se, adicionalmente, que este processo seja contínuo à direita.
[2] Neste caso considera-se apenas μ e σ como função do tempo. No caso mais geral, poder-se-ia definir estes processos como função da própria variável, isto é, $\mu(t, X_t)$ e $\sigma(t, X_t)$.
[3]Estas duas condições impõem que ambos os processo sejam, respectivamente, convergentes e convergentes em termos de média quadrática.
[4]O valor médio esperado por unidade de tempo, é frequentemente designado na literatura de *drift* do processo.

dos activos, por unidade de tempo, isto é,

$$\frac{d}{d\tau}E_t\left(X_t\right)\Big|_{t=\tau}=\mu_t \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\tau}Var_t\left(X_t\right)\Big|_{t=\tau}=\sum_{i=0}^{n}\sigma^2{}_i(t).$$

Assume-se que todos os activos transaccionados neste mercado são perfeitamente divisíveis, que não existem nem custos de transacção nem impostos, podendo o agente em qualquer momento deter uma posição longa ou curta[5] no activo.

Por hipótese, um dos *n* processos de preços dos activos financeiros é estritamente crescente (ver Musiela e Rutkowski (1997)). Este activo é denominado de numerário, representando pelo símbolo B_t, e verifica as seguintes propriedades: assume sempre um valor positivo e, no momento inicial, é igual à unidade; matematicamente viria:

$$B>0,\ \forall t\leq T \text{ e } B_0=1.$$

Admite-se que o agente prefere deter mais unidades deste activo do que menos. Na generalidade dos casos o numerário considerado coincide com o activo sem risco, definido pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$dB_t = r_t\, B_t\, dt \quad \text{Equação 3,}$$

sujeito à condição inicial de $B_0=1$.

A solução desta equação diferencial ordinária é igual a:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right).$$

A equação anterior traduz um investimento de uma unidade monetária por uma

5Entende-se por posição longa no activo se o agente detém uma quantidade positiva do activo; por posição curta entende-se a situação em que o agente detém uma quantidade negativa do activo, isto é, o agente vende a prazo uma determinada quantidade do activo.

unidade de tempo infinitesimal, com capitalização contínua, sendo em cada instante reinvestido[6]. A taxa de juro instantânea é definida como r_t, considerando-se que esta é um processo adaptado, isto é, a taxa de juro é conhecida no momento inicial do contrato[7].

Os preços dos activos financeiros podem ser denominados relativamente a este numerário[8]. Desta forma define-se o processo dos preços descontados como o vector n-dimensional $Z_t = \left[Z_t^1,....Z_t^n\right]$, onde:

$$Z_t = \frac{X_t}{B_t} \qquad \text{Equação 4.}$$

Neste mercado, o agente pode deter várias unidades de um determinado activo, ou em alternativa, combinar os diferentes activos de forma a constituir uma carteira. A percentagem de cada activo i detida na carteira, no momento t, é representada por ϕ_t^i[9]. Uma estratégia dinâmica é definida, segundo Musiela e Rutkowski (1997), como um processo F-adaptado representado por um vector n-dimensional, isto é, $\phi = \left(\phi^1,.....,\phi^n\right)$. O processo ao ser F-adaptado implica que a composição da carteira é determinada no início de cada momento. O termo dinâmico significa que em cada momento o agente vai ajustar as quantidades de cada um dos n activos detidos na sua carteira.

[6]Um depósito bancário com uma maturidade diária ou "*overnight*" são os exemplos mais próximos, deste conceito teórico.

[7]Saliente-se que em cada momento a taxa de juro pode ser variável. Contudo, o que se exige é que aquela dependa de toda a informação passada até ao momento *t-1* e não da informação do momento *t*. Ao ser determinada no início de cada período tal permite ao agente determinar com certeza qual a remuneração que obterá durante um lapso de tempo infinitesimal. Esta é a razão pela qual o activo é denominado na literatura de activo sem risco.

[8]Poder-se-ia definir outro numerário. As conclusões não seriam alteradas pela escolha do numerário. Para analisar a alteração do numerário ver Björk (1996).

O valor da carteira num determinado momento é igual a:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_t^{\,i} X_t^{\,i} \qquad \text{Equação 5.}$$

Esta equação traduz o valor de mercado de uma carteira no momento *t*, onde cada activo é detido na proporção ϕ_t^i. Uma carteira diz-se autofinanciada se, durante o período em que é detida, o agente não fizer nem investimentos nem desinvestimentos adicionais. Tal significa que, em cada instante, as alterações no valor da carteira dependem apenas das alterações dos preços dos activos que a constituem. O valor da carteira constituída no momento *t-1* será, então, suficiente para adquirir uma nova carteira no momento *t.* Esta condição é traduzida matematicamente pela seguinte expressão:

$$dV(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_t^{\,i}\, dX_t^{\,i} \qquad \text{Equação 6.}$$

De acordo com Baxter e Renie (1996) a carteira autofinanciada, que reproduz o valor do derivado no momento terminal *T,* deve satisfazer a seguinte condição adicional de integrabilidade $\int_0^T \sum_{j=1}^{n} \left(\sigma_{i,j}(t)\phi_j(t)\right)^2 dt < \infty$[10]. Por hipótese, admite-se que qualquer carteira satisfaz este requisito técnico.

O valor da carteira descontado é definido como:

$$V^z(t) = \frac{V(t)}{B_t} \qquad \text{Equação 7.}$$

Se uma carteira for autofinanciada, então a carteira descontada também é

[9]A percentagem do activo detida na carteira poderá ser positiva ou negativa.

autofinanciada, ou seja, $dV^{z}(t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_t^{\,i}\,dZ_t^{\,i}$ (este resultado deriva da aplicação do lema de Itô[11] em que $dV^{z}(t)=\frac{dV(t)}{dB_t}$. Para um maior detalhe ver Duffie (1996)).

1.2 Arbitragem

O agente ao deter um conjunto de activos, pretende ter uma dada distribuição da sua riqueza no futuro. Para tal, de acordo com Varian (1987), ele pode formar uma carteira de activos, onde cada activo é detido numa dada proporção, que lhe proporciona a distribuição da riqueza desejada. No modelo que se analisa em seguida, admite-se que o agente tem ao seu dispor o mercado $M=(X,V)$, isto é, o mercado constituído por todos os activos financeiros e pelas carteiras autofinanciadas que podem ser obtidas a partir desses activos.

A noção de arbitragem está associada à ideia do agente obter algo por nada (Varian (1987)), isto é, o investimento inicial suportado pelo agente é nulo e o resultado da sua estratégia é positivo.

Desta forma, as condições para uma carteira autofinanciada possibilitar oportunidades de arbitragem podem ser traduzidas de acordo com Björk (1996) por:

1) V(0)=0[12], e

---

[10]Esta condição traduz o facto do valor da carteira ser finito e convergente em termos de média quadrática.

[11] Ver anexo I para definição de lema de Itô

[12]De acordo com Duffie (1996), esta condição deveria ser V(0)≤0, admitindo-se então a constituição de carteiras sem fundos próprios. Contudo, para se garantir que o preço de qualquer derivado seja único, independentemente da medida de *martingalo* que se escolhe, é necessário impor a condição adicional do valor da carteira descontado, em qualquer momento do tempo, ter um limite inferior, ou seja, pressupõe-se a existência de restrição ao crédito.

2) $P(V(T)>0)>0$ ou $P(V(T)\geq 0)=1$;

isto é, o valor da carteira no momento inicial é nulo e a probabilidade do seu valor no momento terminal ser maior ou igual a zero é positiva.

Se no momento *T* não existir nenhuma carteira que satisfaça as condições anteriores diz-se que não há oportunidades de arbitragem. Nos restantes pontos deste capítulo, analisa-se quais as condições a que um mercado deve obedecer para que as oportunidades de arbitragem sejam excluídas.

1.3 Preço de arbitragem

No ponto anterior afirmou-se que uma carteira permitia obter uma determinada distribuição da riqueza num momento terminal *T*. Para tal, o agente teria que determinar, em cada instante, qual a estratégia dinâmica que lhe permita concretizar aquele objectivo. Ao invés, suponha-se que o problema do agente não era determinar quais as proporções que deveria deter dos diferentes activos na sua carteira em cada momento *t*, mas sim determinar qual o preço de um derivado[13] no momento *T*, definido por Π_T. A forma mais simples de valorizar um derivado consiste em determinar qual a carteira autofinanciada que, no momento *T*, proporciona ao agente um resultado semelhante, isto é, $V(T)=\Pi_T$. Em cada momento, o agente deve adoptar uma dada estratégia dinâmica que lhe permita reproduzir o valor do derivado em *T*.

Com o intuito de eliminar estratégias de arbitragem, em qualquer momento $0\leq t\leq T$, o

[13] Segundo Baxter e Rennie (1996), um derivado é uma variável aleatória no momento terminal (*T*), proporcionando ao seu detentor uma determinada importância monetária. Um exemplo de um derivado é uma opção de compra.

preço do derivado deverá então, ser sempre igual ao da carteira[14]. Mais concretamente, no momento inicial o preço do derivado será igual ao investimento suportado pelo agente para constituir a carteira autofinanciada. É esta a ideia de preço de arbitragem de acordo com Musiela e Rutkowski (1997): se no mercado não existirem oportunidades de arbitragem, então o preço de qualquer derivado Π, cujo o valor possa ser reproduzido por uma dada carteira autofinanciada de activos, é unicamente determinado pelo valor dessa carteira. Matematicamente representa-se este preço por $\Pi_t(X)$, $\forall t \leq T$.

Em suma, num mercado sem oportunidades de arbitragem o valor do derivado encontra-se relacionado com o valor da carteira autofinanciada que o reproduz no momento terminal. No resto do capítulo, verifica-se que os preços dos activos valorizados em relação a uma dada medida de probabilidade permitem a constituição de carteiras autofinanciadas, cujo valor em cada momento iguala o valor do derivado. Neste sentido, não há oportunidades de arbitragem neste mercado.

No próximo ponto introduz-se o conceito de martingalo. Se os preços dos activos ou da carteira forem martingalos, então o seu valor esperado coincide com o seu valor actual. Assim, o valor esperado de um derivado iguala, neste caso, o valor presente da carteira autofinanciada. Nos dois pontos seguintes apresentam-se os conceitos que permitem transformar qualquer processo num martingalo. Nos últimos pontos do capítulo, verifica-se que a existência da medida de probabilidade em relação à

[14]Como foi referido na nota 13, um derivado é uma variável aleatória. Para se determinar o preço do derivado em qualquer momento $t<T$, ter-se-á que converter a variável aleatória num processo. Para tal define-se $N_t=E_P(\Pi_T|F_t)$. Facilmente se demonstra que o processo do preço do derivado é um processo de martingalo, como definido no ponto 1.4., deste capítulo. Por questão de simplificação da notação adopta-se $\Pi_t=N_t$.

qual os processos são martingalos, é condição suficiente para que as oportunidades de arbitragem do mercado estejam eliminadas. Desta forma, nesta medida de probabilidade não só o valor da carteira coincide com o valor do derivado como, simultaneamente, o valor esperado do derivado para um momento futuro é igual ao valor actual da carteira.

1.4 Processo de martingalo

Define-se em seguida o conceito de martingalo, conceito chave na determinação do preço de arbitragem de qualquer activo financeiro.

Seguindo Baxter e Renie (1996) um processo estocástico M_t é um martingalo, em relação a uma dada medida Q e a um dado conjunto de informação representado pela filtragem F, se:

1) $\mathrm{E}_Q(|M_t|) < \infty$, qualquer que seja o *t;*

2) $\mathrm{E}_Q(M_t | F_s) = M_s$, para qualquer $s \leq t$.

Um martingalo deverá satisfazer três condições: a primeira, implícita na definição, afirma que o valor de M_t deverá ser conhecido dado o conjunto de informação disponível; em segundo lugar, tal como é afirmado explicitamente na primeira condição, o valor esperado não condicionado é finito; por fim, e, de acordo com a segunda condição, o valor esperado em *s* para o processo *M* no momento *t*, em relação à medida de probabilidade *Q,* é igual ao seu valor presente.

Se o processo dos preços dos activos for um martingalo, então verificará a seguinte propriedade:

$$\mathrm{E}_Q\left(X_t \mid F_s\right) = \mathrm{E}_Q\left(X_s \mid F_s\right) + \mathrm{E}_Q\left(X_t - X_s \mid F_s\right) = X_s.$$

Este resultado implica que a variação esperada dos preços dos activos - $\mathrm{E}_Q\left(X_t - X_s \mid F_s\right)$ - é em média nula, isto é, não é de esperar, em média, acréscimos positivos ou negativos nos preços dos activos. Desta forma, o processo é totalmente imprevisível, sendo o valor corrente dos preços o melhor previsor do seu valor futuro.

Um processo estocástico é martingalo em relação a uma dada medida de probabilidade *(Q)*. É apenas em relação a essa medida que o valor esperado do processo, condicionado por toda a informação disponível, é igual ao seu valor presente.

Se o processo de um activo é um martingalo, então o agente pode assumir o valor corrente do activo como a melhor previsão do seu valor futuro. Contudo, quando se analisa os diversos processos dos preços dos activos constata-se que, em relação à medida de probabilidade a que se encontram associados, *P*, os processos, em geral, não são martingalos[15].

De facto, o processo dos preços dos activos apresenta, frequentemente, um valor esperado médio, por unidade de tempo, positivo. Tal é incompatível com a definição de martingalo, o qual não deve apresentar qualquer tendência determinística. Desta forma, é necessário introduzir um procedimento que permita transformar a medida de probabilidade associada a um processo, *P*, na medida *Q*, na qual o processo é um martingalo. Acresce que, a existência desta medida de probabilidade *Q*, como se desenvolverá nos pontos seguintes, é condição suficiente para que sejam eliminadas as oportunidades de arbitragem. Pelo que o preço de qualquer activo, nesta medida, é um preço de arbitragem.

O valor médio esperado de um derivado, para o momento *t*, deve igualar o valor de uma carteira autofinanciada. Desta forma, se o valor da carteira for um martingalo então, em cada instante, o valor do derivado é igual ao valor actual da carteira que o reproduz no momento terminal, isto é, $E_Q(V_T | F_s) = V_s$. Para tal, bastará de novo converter o processo do valor da carteira num martingalo.

1.5 Equivalência entre medidas de probabilidade

Os dois próximos pontos apresentam os conceitos que permitem converter o processo dos preços de um activo num martingalo. Para tal recorre-se, num primeiro instante, ao conceito de derivada de *Radon-Nikodym*, que permite transformar a medida de probabilidade inicial *P*, numa outra medida de probabilidade equivalente *Q*[16]. No ponto seguinte, introduz-se o teorema de *Girsanov,* que utilizando o conceito de derivada de *Radon-Nikodym*, permite transformar um processo num martingalo.

[15]No caso dos activos financeiros serem acções é frequente verificar-se a seguinte relação: $E_P[x_t | F_s] > x_s, \ \forall s \le t$ ou $E_P[x_t | F_s] < x_s, \ \forall s \le t$. Estes processos são designados de submartingalos e supermartingalos, respectivamente.

[16]Repare-se que a derivada de *Radon-Nikodym* transforma a medida de probabilidade associada a um processo numa outra qualquer medida de probabilidade. Não significa, no entanto, que aplicando apenas aquela derivada se converta o processo num martingalo. Para tal, como se verá no próximo ponto ter-se-á que recorrer ao teorema de *Girsanov*.

O primeiro conceito a ser introduzido é o da equivalência entre duas medidas de probabilidade (ver Baxter e Renie (1996)): duas medidas P e Q são equivalentes se $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$, isto é, se um dado acontecimento é possível sob a medida P, também o é na medida de probabilidade Q e *vice-versa*.

Por simplificação, admite-se que o processo estocástico se encontra sujeito apenas a uma única fonte de incerteza, isto é, satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t \, dW_t \quad \text{Equação 8.}$$

Fixando o momento *t*, o processo estocástico transforma-se numa variável aleatória. A partir da equação anterior verifica-se que a variação dos preços dos activos têm uma distribuição normal[17], com média μdt e variância $\sigma^2 dt$. O conceito de derivada de *Radon-Nikodym* $\left(\frac{dQ}{dP}\right)$ permite transformar a medida associada a esta variável aleatória P numa outra medida de probabilidade Q, desde que ambas as medidas sejam equivalentes e que se encontrem excluídas as trajectórias impossíveis na medida P (sobre este assunto ver Baxter e Renie (1996)). Esta transformação permite alterar apenas o *drift* da distribuição da variável, mantendo inalterada a volatilidade do processo. Desta forma, em termos estatísticos modifica-se a função densidade de probabilidade alterando o seu valor esperado.

Considerando o processo estocástico, o conceito de derivada de *Radon-Nikodym*[18] deve ser alargado ao conceito de um processo, ς_t, que mais não é do que o conceito de derivada *Radon-Nikodym* no momento *t*, condicionado pela trajectória

[17] Uma vez que é a soma de uma constante e de uma variável com distribuição normal de média zero e variância *t*.

[18] Neste caso, o conceito de derivada pode ser visto como o quociente das funções densidade de probabilidade conjuntas dos processos nas medidas P e Q.

seguida pelo processo do activo até aquele momento. Este processo verifica as seguintes propriedades:

1) $E_Q(X_T) = E_P\left(\frac{dQ}{dP}X_T\right)$;

2) $E_Q(X_t | F_s) = \varsigma_s^{-1} E_P(\varsigma_t X_t | F_s)$ onde $s \leq t \leq T$ e ς_t é um processo igual a $E_P\left(\frac{dQ}{dP} | F_t\right)$.

De acordo com esta definição, verifica-se que é possível transformar a medida de probabilidade associada a um processo, considerando a sua evolução até aquele momento. Garante-se, desta forma, que nenhuma informação relevante contida numa medida é perdida na transformação. A primeira condição traduz o facto do valor esperado de um processo no momento terminal e na medida Q ser equivalente ao valor esperado, na medida P, do produto da derivada de *Radon-Nikodym* pelo valor do processo nesse mesmo momento T. A segunda condição permite efectuar a transformação de medida de probabilidade em qualquer momento $s \leq t \leq T$.

1.6 Teorema de Cameron-Martin-Girsanov

O teorema de *Cameron-Martin-Girsanov,* frequentemente designado na literatura de teorema de *Girsanov*, permite transformar a função densidade probabilidade conjunta associada a um determinado processo, convertendo-o num martingalo.

Da definição de martingalo concluiu-se que este é um processo que não tem *drift*, isto é, em média, a variação dos preços dos activos, por unidade de tempo, é nula. Intuitivamente, a aplicação do teorema de *Girsanov* ao processo X_t permite transformar a sua medida de probabilidade de forma a que, na nova medida de probabilidade, as variações nos preços tenham uma distribuição em que a média e a variância sejam iguais a, respectivamente, 0 e $\sigma^2 dt$. Saliente-se que, a volatilidade não é alterada por esta transformação.

<u>Teorema</u>: se W_t é um processo *P-browniano* e γ um processo previsível em relação à filtragem *F*, satisfazendo as condições de ser um processo limitado, $E_P \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right) < \infty$[19], então existe uma medida *Q* tal que

1) *Q* é equivalente a *P*;

2) $\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)$;

3) $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ é um processo *Q-browniano*.

Este teorema evidencia quais as condições técnicas para a existência de uma medida martingalo Q. Qualquer processo estocástico pode ser convertido num martingalo desde que exista um processo previsível[20] que estabeleça a relação entre ambos. Este processo coincide com a derivada de *Radon-Nikodym*.

1.7 Preços dos activos financeiros na medida neutral ao risco

[19]Esta condição, que traduz o facto do processo não poder aumentar ou diminuir de uma forma muito rápida, é também conhecida como condição de *Novikov*. Se esta condição for satisfeita então o processo é convergente em termos da média da raiz quadrada.

[20] Este processo é único e invertível de forma a permitir regressar de novo à função de densidade de probabilidade inicial, isto é, passar da medida de probabilidade Q para a medida de probabilidade *P*. Prova-se que este processo é martingalo na medida Q (sobre este assunto ver Duffie (1996)).

Os dois pontos anteriores introduziram os conceitos que permitem converter qualquer processo num martingalo. Neste ponto, deriva-se as expressões que determinam o valor esperado de um activo financeiro ou de um derivado na medida Q. Os preços assim determinados permitem, no ponto seguinte, demonstrar que a existência de uma medida neutral ao risco é condição suficiente para que nesse mercado sejam eliminadas as oportunidades de arbitragem.

Admita-se que o preço do activo financeiro pode ser modelado, na medida *P*, pela seguinte expressão:

$$X_t = X_0 \exp\left(\mu t + \sigma \mathrm{W_t}\right).$$

Utilizando o lema de Itô obtém-se o seguinte resultado para a variação dos preços dos activos:

$$dX_t = X_t \left(\mu dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW_t\right).$$

Por simplificação, considera-se que a taxa de juro do activo sem risco é constante, igual a *r*, pelo que o numerário será igual a $B_t = \exp(rt)$[21].

Como se constata, o processo dos preços dos activos na medida *P*, não é um martingalo, uma vez que $\mathrm{E}_P\left(dX_t | F_s\right) \neq 0,\ \forall s < t$. Na generalidade dos casos, verifica-se que $\mathrm{E}_P\left(X_t | F_s\right) = X_s + X_s\left(\mu dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt\right)$, isto é, os preços dos activos na medida *P* são um submartingalo.

[21] Dado a taxa de juro de curto prazo ser constante, então pelas regras de integração obtém-se este resultado.

O primeiro passo consiste em encontrar um processo que seja um martingalo. O processo dos preços dos activos descontado, isto é, Z_t é um martingalo sob a medida Q.

Como anteriormente foi definido, $Z_t = \frac{X_t}{B_t}$, ou seja, $Z_t = Z_0 \exp(\mu t + \sigma W_t - rt)$.

Aplicando o lema de Itô, obtém-se:

$$dZ_t = Z_t\left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)dt + \sigma dW_t\right) \quad \text{Equação 9.}$$

Na equação 9, o processo Z_t encontra-se ainda referido à medida de probabilidade P. Recorrendo ao teorema de *Girsanov,* pode-se definir um processo previsível[22] $\gamma = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)/\sigma$ [23,24] que converte Z_t num martingalo, em relação a outra medida de probabilidade equivalente a P.

Segundo Musiela e Rutkowski (1997), a esta medida Q que converte, no espaço de probabilidade (Ω, F), o processo Z num martingalo denomina-se de medida de martingalo.

A partir da terceira condição do teorema de *Girsanov* deduz-se que $d\widetilde{W}_t = dW_t + \gamma_t dt$. No exemplo, esta expressão seria igual a:

[22] Verifica-se que a condição $E_p \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2 dt\right) < \infty$ é válida para o processo definido desta forma.

[23] Neste exemplo o valor do processo γ é constante.

[24] Na literatura a este rácio denomina-se de preço de risco do mercado, isto é, o excesso da remuneração média do activo face à taxa do activo sem risco, normalizado pelo risco associado ao processo.

$$d\widetilde{W}_t = dW_t + \left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma} \right) dt$$ Equação 10.

Substituindo este resultado na equação 8, obtém-se

$$dZ_t = \sigma Z_t \left[\left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma} \right) dt + dW_t \right] \Leftrightarrow$$

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$$

Equação 11.

Verifica-se facilmente que, na medida Q, o processo Z_t é um martingalo uma vez que verifica a seguinte propriedade $E_Q\left(Z_t | F_s\right) = Z_s$.

Da definição de preço descontado sabe-se que $X_t = Z_t \times B_t$. O valor esperado dos preços dos activos para um momento futuro é calculado a partir deste resultado:

$$E_Q\left(X_t \times \exp(-rt) | F_s\right) = X_s \times \exp(-rs) \Leftrightarrow E_Q\left(X_t | F_s\right) = X_s \times \exp\left(r(t-s)\right)$$

Equação 12.

Em suma, a medida Q garante que o preço esperado do activo para o momento *t*, com *s<t*, é exactamente igual ao seu valor corrente (X_s) capitalizado à taxa de juro sem risco.

Utilizando o lema de Itô e substituindo os resultados anteriores, verifica-se que:

$$dX_t = Z_t \times dB_t + dZ_t \times B_t$$
$$dX_t = Z_t B_t r\, dt + Z_t B_t \sigma d\widetilde{W}$$
$$dX_t = X_t \left(r\, dt + \sigma d\widetilde{W}\right)$$

O resultado anterior demonstra que nesta medida de probabilidade os preços de todos os activos têm um crescimento, em média, igual ao do activo sem risco ($r\, dt$ em *Q*, em vez de $\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$, em *P*). Esta é uma das razões pela qual a medida *Q* é, também, designada de medida neutral ao risco.

É importante sublinhar a conclusão a que se chegou e os seus resultados práticos na valorização dos diversos activos. É suficiente encontrar-se a medida de martingalo associada ao processo dos preços dos activos descontados para se poder determinar o valor esperado de qualquer activo. Não é, assim, necessário conhecer-se a verdadeira distribuição probabilística dos processos dos activos.

Na realidade, na medida *Q*, a variação dos preços dos activos tem um valor médio esperado, por unidade de tempo, igual à do activo sem risco. Como foi referido, a taxa de juro do activo sem risco é um processo adaptado, pelo que conhecido no momento inicial. Desta forma, no início de cada momento a variação média esperada dos preços dos activos é conhecida. Note-se que o processo dos preços dos activos, mesmo sob a medida *Q*, não é um martingalo.

Determinada a expressão que permite valorizar um activo na medida *Q*, deduz-se em seguida a expressão equivalente para o derivado Π_T. Se o mercado exclui qualquer oportunidade de arbitragem, então o preço do derivado no instante *t* é igual ao valor da carteira que o reproduz no momento *T*.

Admitindo que o processo Z_t é um martingalo na medida Q, facilmente se verifica que o valor da carteira descontado é também um martingalo, em relação à mesma medida de probabilidade. Como foi referido, é condição suficiente para um processo ser um martingalo que a variação do valor da carteira descontada, sob a medida Q, tenha um valor esperado nulo. Na realidade, a partir da definição de carteira autofinanciada (introduzida no ponto 1.1. deste capítulo) verifica-se que:

$$E_Q\left(dV^z(t)|F_s\right) = \phi_s\, E_Q\left(dZ_t|F_s\right) = 0^{25}.$$

Para o valor descontado da carteira ser um martingalo na medida Q, então o processo dos preços descontados também tem de ser um martingalo na mesma medida.

De acordo com Musiela e Rutkowski (1997), a medida Q é uma medida de martingalo em relação a um dado mercado M, se para cada estratégia dinâmica, ϕ, o valor da carteira descontado, $V^z(t) = \frac{V(t)}{B_t}$, é um martingalo.

A noção de mercado $M = (X, V)$, previamente introduzida, implicitamente considerava apenas o conjunto de carteiras à disposição do agente constituídas por todas as estratégias autofinanciadas e cujo o valor descontado fosse um martingalo. É em relação a este mercado que nos pontos seguintes se infere quais as condições que se devem verificar para que as oportunidades de arbitragem sejam eliminadas.

A expressão que permite valorizar um derivado no momento t, dado $t<T$, é a seguinte:

[25] Saliente-se que, por hipótese, a estratégia dinâmica levada a cabo pelo agente, em cada instante t, é um processo F-adaptado, logo conhecido no momento s. Esta é a justificação para $E_Q(\phi_t|F_S) = \phi_S$.

$$(T)=\Pi_T \text{ e } V(t) = B(t) \times V^Z(t) = B(t) \times E_Q\left(V^Z(T)|F_t\right)$$
$$= B(t) \times E_Q\left(B^{-1}(T)V(T)|F_t\right) \text{ ou}$$
$$= B(t) \times E_Q\left(B^{-1}(T)\Pi_T|F_t\right)$$

Equação 13

Alguns comentários devem ser tecidos ao resultado a que se chegou. Se num determinado mercado existir uma medida Q, em relação à qual os preços dos activos financeiros descontados são convertidos em martingalos, então o valor de qualquer derivado em t, reproduzido por uma carteira autofinanciada, é igual ao seu valor terminal descontado pelo processo do activo sem risco; ou de uma forma equivalente ao que se afirmou para o preço do activo, o valor esperado do derivado, para uma data futura, é igual ao valor actual[26] capitalizado à taxa de juro sem risco.

É suficiente encontrar-se a medida de martingalo do processo dos preços descontados para determinar-se a medida de martingalo associada ao mercado.

1.8 Equivalência entre medida neutral ao risco e ausência de arbitragem

Neste ponto, analisa-se se os preços do activo e do derivado, em relação à medida neutral ao risco, determinados no ponto anterior, são preços de arbitragem.

Segundo Musiela e Rutkowski (1997), a existência de uma medida de martingalo num mercado é condição suficiente para garantir que, nesse mercado, não existam oportunidades de arbitragem. Como consequência, encontram-se eliminadas as hipóteses do agente levar a cabo uma estratégia que lhe garanta um lucro certo. Para tal ter-se-á que verificar: em primeiro lugar que a carteira de activos é autofinanciada; e, em segundo lugar, que o seu valor em cada instante é igual ao valor do derivado.

Uma das conclusões do ponto anterior é que a variação dos preços dos activos descontados, na medida *Q*, é dada pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dZ_t = \sigma d\widetilde{W}_t$$

O processo do preço do derivado, na medida *Q* é também um martingalo: $N_t = E_Q\left(B^{-1}(T)\ \Pi(T)\right)$.

Para relacionar os dois processos (o do activo financeiro e do derivado) recorre-se ao teorema da representação do martingalo (sobre este assunto ver Baxter e Renie (1996)):

<u>*Teorema*</u>: "Sendo M_t um determinado processo *Q* - martingalo, cuja a volatilidade é sempre positiva com probabilidade igual a um, então existe um processo N_t , também *Q* - martingalo e um processo previsível e único, ϕ, tal que $\int_0^T \phi_t^2 \sigma^2{}_t dt < \infty$, podendo o processo N_t ser escrito como

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s\, dM_s\ ."$$

[26] O valor actual do derivado, como já foi referido, coincide com o valor da carteira autofinanciada

O que este teorema afirma é que existe uma relação entre dois processos que se encontram na mesma medida de martingalo. Desta forma pode-se determinar um processo previsível e único que relacione o Z_t *e* N_t (saliente-se que a volatilidade do processo do activo é sempre positiva, podendo desta forma aplicar-se o teorema).

Então $N_t = E_Q(\Pi) + \int_0^t \phi_s \, dZ_s$, ou na sua forma diferencial, $dN_t = \phi_t dZ_t$.

Por hipótese, o agente opta pela seguinte estratégia dinâmica: deter ϕ_t unidades de X_t e $\psi_t = N_t - \phi_t Z_t$ unidades do numerário.

Verifica-se, em primeiro lugar, que a carteira reproduz o valor terminal do derivado:

$$\begin{gathered} V(T) = \phi_T X_T + \varphi_T B_T \Leftrightarrow \\ V(T) = \phi_T X_T + \left(N_T - \phi_T Z_T\right) B_T \Leftrightarrow . \\ V(T) = N_T B_T \Leftrightarrow V(T) = \Pi_T \end{gathered}$$

Aquela estratégia dinâmica possibilita ao agente reproduzir no momento *T* o valor do derivado.

Para a carteira ser autofinanciada é necessário que a variação do valor da carteira seja igual à variação dos preços dos activos que a constituem. Isto implica que não se verifique qualquer entrada ou saída de fundos. A carteira no momento *t* é igual a $(t) = \phi_t X_t + \varphi_t B_t = V(t) = N_t B_t$, pelo que a variação do valor desta carteira corresponde a:

nesse mesmo momento.

$$
\begin{aligned}
dV_t &= B_t\, dN_t + N_t\, dB_t \Leftrightarrow \\
dV_t &= \phi_t\, B_t\, dZ_t + N_t\, dB_t \Leftrightarrow \\
dV_t &= \phi_t\, B_t\, dZ_t + \left(\phi_t\, Z_t + \varphi_t\right) dB_t \Leftrightarrow \\
dV_t &= \phi_t\, dX_t + \varphi_t\, dB_t
\end{aligned}
$$

Em suma, a carteira é então autofinanciada e replica o valor do derivado no momento terminal e em cada momento. Na realidade, o resultado que se obtém é exactamente o mesmo que no final do ponto anterior.

Nesta medida de probabilidade Q, o valor da carteira iguala em cada instante o preço do derivado. Neste sentido, é um preço de arbitragem, uma vez que qualquer divergência entre o valor do derivado e o valor da carteira gerará oportunidades de lucro, sendo incompatível com a noção de mercado sem oportunidades de arbitragem. Assim, a existência de uma medida de probabilidade Q é uma condição suficiente para que as possibilidades de arbitragem se encontrarem excluídas deste mercado.

Segundo Björk (1996), apenas se encontra demonstrado para modelos com um número finito de estados que um mercado sem oportunidades de arbitragem implique a existência de uma medida de probabilidade neutral ao risco. No caso de modelos com um número infinitos de estados esta relação não se encontra demonstrada. Mesmo assim, admite-se, frequentemente, que um mercado sem oportunidades de arbitragem implica a existência desta medida. A relação entre o mercado sem oportunidades de arbitragem e a medida neutral é considerada como equivalente em ambos os sentidos.

Em suma, o preço de qualquer derivado num mercado que elimine as oportunidades de arbitragem deve verificar a seguinte igualdade:

$$\Pi(t) = V(t) = B(t)\mathrm{E}_Q\left(B^{-1}{}_T\Pi(T)|F_t\right).$$

A questão que se coloca é se a escolha de diferentes carteiras de activos poderá ou não dar origem a preços diferentes para o derivado. Por hipótese, o agente poderia ter optado por outra carteira $V_T(\psi)$. Contudo, verifica-se que diferentes carteiras garantem, num mercado sem oportunidades de arbitragem, o mesmo valor para o derivado.

Admita-se a existência de duas carteiras que verifiquem as seguintes condições:

$$\Pi(T)=V_T(\phi) \text{e } \Pi(T)=V_T(\psi)$$

$$V_t(\phi)>V_t(\psi),\ \forall 0<t<T.$$

No momento inicial, o agente pode adoptar pela estratégia de comprar a carteira com o menor valor ($V_0(\psi)$) financiada com a venda da carteira de maior valor ($V_0(\phi)$). A diferença entre o valor de ambas as carteiras, $d_0=V_0(\phi)-V_0(\psi)>0$, é reinvestida continuamente à taxa de juro do activo sem risco. Desta forma, no momento inicial, o valor desta estratégia é nulo, isto é, $V_0(\zeta)=V_0(\phi)-V_0(\psi)+d_0B_0=0$. No momento final, o valor desta estratégia é igual a $V_T(\zeta)=d_0B_T>0$. Este resultado, como foi referido no ponto 1.2., é incompatível com um mercado sem oportunidades de arbitragem. Pelo que,

$$\Pi(T)=V_T(\phi) \text{e } \Pi(T)=V_T(\psi) \text{ então}$$

$$V_t(\phi)=V_t(\psi),\ \forall 0<t<T.$$

Conclui-se, desta forma, que o agente pode optar por qualquer estratégia dinâmica. Contudo, na actualidade o comportamento de qualquer agente leva a que se existir qualquer oportunidade de arbitragem no mercado esta é rapidamente eliminada. Desta forma, não é abusivo afirmar-se que os agentes, em cada instante, detêm na sua carteira ϕ_t unidades do activo com risco e ψ_t unidades do numerário.

A quantidade de activos com risco, detidas na carteira, é igual ao valor assumido pelo processo que relaciona, na medida Q, o valor do derivado descontado e o processo dos preços descontados. Se ambos os processo são martingalos na mesma medida de probabilidade Q, então, em média, têm o mesmo acréscimo por unidade de tempo. O que os diferencia é a volatilidade. Facilmente se conclui que aquele processo, ϕ_t, não é mais do que um rácio entre as volatilides subjacentes a cada um dos processos. No caso concreto do derivado ser uma opção, o valor deste processo, ϕ_t, coincide com a variação do preço da opção em virtude de uma variação unitária do valor do activo financeiro que lhe está subjacente, isto é, coincide com o conceito de derivada parcial.

A quantidade do numerário a ser detida na carteira é igual a N_t- ϕ_t Z_t, isto é, a diferença entre o valor esperado do valor do derivado no momento terminal, na medida Q, descontado pelo activo sem risco e o valor dos activos com risco descontados detidos na carteira. No caso de uma opção o seu valor terminal (T) depende do valor do activo com risco, na medida Q, nesse momento. Como se referiu no ponto 1.7., o valor esperado do activo com risco é igual ao seu valor presente capitalizado à taxa de juro sem risco, logo conhecido no momento actual.

Desta forma as quantidades a deter na carteira, em cada instante, são conhecidas pelos agentes.

Em suma, se para uma dada carteira o processo dos preços dos activos seguir um martingalo então aquela é, por um lado, autofinanciada e, por outro lado, iguala em cada instante o valor do derivado. Assim, o valor de um derivado é unicamente reproduzido por uma dada carteira[27], não existindo qualquer oportunidade de arbitragem entre o derivado e a carteira.

1.9 Mercado completo

Segundo Musiela e Rutkowski (1997), um mercado $M=(X,V)$ diz-se completo se para todos os derivados existir uma carteira autofinanciada de activos que os reproduza no momento terminal. Na realidade, de acordo com Björk (1996), não existe um verdadeiro mercado completo. Contudo, dado que o elevado número de derivados que podem ser reproduzidos por diferentes carteiras, em termos práticos, assume-se que este número é suficiente para o mercado ser completo.

Se a medida Q for única nesse mercado, então afirma-se que o mercado é completo. Para se demonstrar que a medida Q é única, recorre-se ao teorema da representação do martingalo introduzido no ponto anterior. Este teorema encontra um processo ϕ previsível e único, que permite representar qualquer martingalo como função de movimentos *brownianos*. Assim, se o número de derivados for menor ou igual ao número de processos *brownianos* que geram a informação incluída na

[27]Note-se que a relação inversa não é verdadeira, isto é, se existir apenas uma única carteira que reproduza o valor do direito no momento T, não significa que o mercado elimine as oportunidades de arbitragem.

filtragem, pelo teorema da representação pode-se encontrar para cada um deles um só processo previsível ϕ. Saliente-se que este processo ϕ é a quantidade de unidades dos activos financeiros com risco que constituem, em cada momento, a carteira autofinanciada (ver Duffie (1996) para demonstração).

Se o mercado é completo, então a medida de probabilidade Q é única. Deste modo, a determinação da medida que torna o processo dos preços dos activos descontados em martingalo, garante a existência de preços de arbitragem e que estes preços sejam únicos.

No caso do mercado ser incompleto, então a medida de probabilidade Q, não é única. Desta forma, pode-se obter diferentes preços de derivados excluindo todos hipóteses de arbitragem. A escolha da medida de probabilidade Q é determinada pelo mercado, nomeadamente pelo grau de aversão ao risco do agente. Este ponto será importante no mercado obrigacionista onde se constatará que este é um mercado incompleto, sendo necessário impor determinadas condições para a determinação a medida Q (Björk (1996)).

1.10 Conclusões

O processo dos acréscimos dos preços dos activos financeiros pode ser modelado, num contexto de incerteza, por um sistema de equações diferencias estocásticas. A cada um destes processos encontra-se associado uma dada medida de probabilidade que pode ser transformada numa outra medida equivalente, recorrendo-se ao conceito de derivada de *Radon-Nikodym*. O processo é um martingalo sempre que o valor médio esperado da variação dos preços for nulo.

Neste caso, a melhor previsão para o valor futuro é o valor do processo no momento actual. O teorema de *Girsanov* não é mais do que uma mudança da medida de probabilidade associada a um processo, convertendo-o num martingalo.

A medida na qual o processo é um martingalo é designada medida neutral ao risco. Os preços dos activos financeiros, no caso em que estes podem ser modelados segundo um processo estocástico exponencial, têm um valor médio esperado, nesta medida, por unidade de tempo, igual ao da taxa de juro do activo sem risco.

Se existir uma medida de probabilidade em relação à qual o processo dos preços descontados dos activos seja um martingalo, então esta coincidirá com a medida de martingalo associada a um mercado. Nesta medida, o processo dos preços dos activos é um martingalo e o valor da carteira constituída a partir destes coincide, em cada momento, com o valor do derivado, inviabilizando-se desta forma qualquer hipótese de arbitragem. Acresce que, o valor do derivado é independente da constituição da carteira que o reproduz. Assim, a existência no mercado de uma medida neutral ao risco é condição suficiente para que nenhuma estratégia levada a cabo pelo agente lhe possibilite obter um valor positivo em troca de um investimento nulo.

Por fim, num mercado completo apenas existe uma única medida neutral ao risco, sendo os preços dos derivados únicos.

2. Modelos de estrutura por prazos das taxas de juro

Neste capítulo, restringe-se o âmbito do mercado financeiro $M=(X,V)$, às obrigações de cupão zero, emitidas pelo estado, e às carteiras constituídas a partir destas e do numerário. O objectivo é valorizar estas obrigações de forma a que o preço teórico determinado elimine qualquer oportunidade de arbitragem neste mercado. Para tal, é necessário determinar-se quais as variáveis explicativas da evolução dos preços das obrigações ao longo do tempo. Designa-se por estrutura por prazos de taxas de juro (EPTJ) a evolução ao longo do tempo da taxa de juro implícita no preço de uma obrigação de cupão zero. O modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992) *(HJM)*, recentemente desenvolvido, considera a curva da taxa de juro *forward* como variável explicativa dos preços das obrigações. Ao longo deste capítulo, analisa-se o modelo, realçando quais as condições a serem impostas para eliminar do mercado quaisquer oportunidades de arbitragem. O capítulo estrutura-se da seguinte forma: no primeiro ponto, introduz-se os conceitos fundamentais do mercado obrigacionista, evidenciando a relação existente entre eles. Num segundo ponto, apresenta-se o modelo Heath, Jarrow e Morton (1992) - *HJM* analisando quais as restrições técnicas impostas para a existência neste mercado de uma medida neutral ao risco, permitindo que uma obrigação e o seu derivado sejam valorizados utilizando os conceitos introduzidos no capítulo 1.

2.1 Taxa de juro spot e a prazo

Uma obrigação é um título de dívida negociável, no qual o emitente se compromete a pagar a quem o detenha, para além do reembolso do capital, um determinado juro em condições definidas na data da emissão e durante um determinado período de tempo. Nos últimos anos, tem-se assistido ao aparecimento de inúmeros tipos de obrigações que se distinguem quanto à forma do pagamento dos diversos fluxos a que dão origem. Na parte teórica deste trabalho apenas se analisam as obrigações de cupão zero emitidas pelo estado, isto é, um tipo de obrigação que apenas dá origem, na maturidade, a um único fluxo financeiro entre o emitente e o detentor. Admitindo que não existe risco de falência do estado, o valor deste activo é independente de questões de credibilidade do emitente. Por simplicidade, admite-se que o total do reembolso na maturidade é igual a uma unidade monetária.

A análise do mercado obrigacionista obriga a concretizar algumas das definições gerais introduzidas para o mercado financeiro. O processo dos preços das obrigações é definido, como um processo estocástico contínuo $\{P(t,T);\ 0 \leq t \leq T\}$, com $P(T,T) = 1$, com $t \in [0,T]$ e $T \in [0,\tau]$. A primeira especificidade deste processo é que depende de dois índices de tempo: o momento actual t e a maturidade T. Para uma dada maturidade T, por hipótese o preço da obrigação é sempre positivo, isto é, $P(t,T)>0,\ \forall t<T$, de forma a evitar qualquer oportunidade de arbitragem entre a obrigação e o numerário.

Na modelação do processo do preço da obrigação adopta-se, geralmente, uma evolução exponencial do tipo:

$$P(t,T) = \exp\left(-(T-t)R(t,T)\right) \quad \text{Equação 14,}$$

onde R é a taxa de juro *yield*. No caso de R ser a taxa de juro determinística[28], aquela expressão viria $P(t,T) = \exp\left(-(T-t)R\right)$.

A taxa *yield to maturity* é definida como:

$$R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}, \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall T \in [0,\tau].$$

Num determinado momento t, a taxa *yield* indica qual a taxa de rendibilidade implícita nos preços das obrigações para cada maturidade. A relação entre os preços e as *yields* é unívoca, no sentido em que a partir de uma dada curva *yield* pode-se obter o preço das obrigações e *vice-versa*.

Se o intervalo de tempo se tornar infinitesimal, então obtém-se a *taxa de juro* à vista ou taxa de juro *spot* instantânea, ou seja,

$$r_t = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}, \quad \forall t \in [0,\tau].$$

Esta taxa de juro traduz o custo de pedir emprestado uma unidade monetária por uma unidade de tempo infinitesimal. Contrariamente à *yield*, a *taxa de juro spot* instantânea não permite deduzir o preço dos títulos implícitos. Para tal, assume-se, geralmente, hipóteses adicionais sobre a evolução dos preços.

A taxa de juro a prazo ou taxa de juro *forward,* isto é, a taxa de juro para um período $[S,T]$, contratada no momento actual t, sendo $t \le S \le T$, pode ser deduzida admitindo que o agente leva a cabo a seguinte estratégia: vende em t uma obrigação com maturidade igual a S, obtendo assim $P(t,S)$ unidades monetárias

28Por questões de simplificação, na apresentação dos conceitos introdutórios, admite-se que a taxa de juro é determinística. Como se verá nos pontos seguintes, esta taxa de juro será um processo *(u.m.)*. Com estas unidades monetárias adquire *P(t,S)/P(t,T)* unidades da obrigação com maturidade *T*. O investimento inicial, em *t*, é desta forma nulo. No momento *S*, o agente deve pagar *1u.m.* e em *T* receber *P(t,S)/P(t,T)*1u.m.*. Pelo que, a remuneração do investimento inicial entre *[S,T]* é igual a :

$$1 = \frac{P(t,S)}{P(t,T)} \exp\left(-f(T-S)\right).$$

Desta forma, a taxa *forward* é igual a:

$$f(t;S,T) = -\frac{\log P(t,T) - \log P(t,S)}{T-S} \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall T \in [0,\tau].$$

Considerando que o intervalo de tempo entre *[S,T]* se torna infinitesimal, define-se a taxa *forward* instantânea como:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \log P(t,T)}{\partial T}, \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall T \in [0,\tau] \quad \text{Equação 15.}$$

Fixando uma dada maturidade *T*, a taxa de juro *forward* instantânea é transformada num processo. Para que esta curva se encontre definida, em qualquer momento *t* e qualquer maturidade *T*, é necessário que os preços das obrigações sejam diferenciáveis, isto é, que a derivada da equação 15 exista. Se o momento *t* se aproxima da maturidade a taxa *forward* é igual à taxa *spot*, isto é,

$$f(t,t) = r_t \quad \text{Equação 16.}$$

Os preços das obrigações podem ser obtidos a partir das taxas *forward*, isto é,

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right), \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall T \in [0,\tau] \quad \text{Equação 17.}$$

A principal conclusão a reter deste ponto é que a taxa *forward* instantânea, a *yield* e os preços das obrigações, para uma dada maturidade *T*, se encontram

estocástico.

relacionados, bastando especificar um dos processos para se poder inferir a evolução dos outros dois. O objectivo deste capítulo é o de analisar o mercado obrigacionista. Considerando que neste mercado o agente apenas dispõe de obrigações de cupão zero e do numerário, pretende-se determinar qual é a dinâmica dos preços das obrigações que elimina as oportunidades de arbitragem entre todas as obrigações e os derivados que sobre estas possam existir. O primeiro passo consiste em identificar quais são os factores, denominados frequentemente de variáveis de estado, que explicam a evolução EPTJ. Num segundo momento, obtida a equação diferencial estocástica para os preços das obrigações, determina-se a forma de valorização dos derivados.

2.2 Modelo de Heath-Jarrow-Morton

O modelo de Heath-Jarrow-Morton (1992) *(HJM)* especifica a dinâmica do processo da taxa de juro *forward* instantânea de forma exógena. Como foi referido no ponto anterior, ao especificar-se a evolução da *forward*, o processo dos preços das obrigações de cupão zero fica definido implicitamente.

Seguindo de perto os conceitos introduzidos no capítulo 1, o primeiro passo é encontrar a medida de probabilidade Q, em relação à qual o processo dos preços das obrigações descontado é um martingalo. Como foi exposto, o valor da carteira, em relação à medida *Q*, constituída a partir destes activos coincide em cada momento com o valor do derivado, no caso em que não se verifiquem oportunidades de arbitragem. Num segundo momento, analisa-se quais as condições que têm de ser verificadas para o mercado obrigacionista ser completo.

2.2.1 Especificação dos movimentos da EPTJ

A abordagem adoptada no modelo *HJM* consiste na especificação do processo da taxa *forward* instantânea de forma exógena ao modelo. Admite-se, então, que a única variável de estado explicativa dos preços das obrigações é toda a curva *forward,* cuja a dinâmica é dada pela seguinte equação:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)\, dW_s,\ 0 \le t \le T \quad \text{Equação 18,}$$

ou na sua forma diferencial:

$$d_t f(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t \quad \text{Equação 19.}$$

Este modelo é designado na literatura de modelo unidimensional, uma vez que admite apenas a existência de um única fonte de incerteza, traduzida pelo movimento *browniano* independente *(W)*, implicando desta forma que as taxas *forward* de diferentes maturidades estejam perfeitamente correlacionadas, para um dado momento *t*.

O processo da *forward* inicia-se com a curva *f(0,T)* determinada no momento inicial a partir dos preços das obrigações de cupão zero existentes no mercado. Exige-se que esta curva seja conhecida e satisfaça a condição de ser limitada, isto é,

$\int_0 |f(0,u)|du < \infty$.

Admite-se adicionalmente que os processos do *drift* e volatilidade sejam processos adaptados e finitos, isto é, $\int_0^T |\alpha(t,T)| dt < \infty$ e $\int_0^T \sigma^2(t,T) dt < \infty$[29].Diferentes processos de volatilidade dão origem a diferentes evoluções das curvas *forward.*

A partir das equações 16 e 17, como foi anteriormente referido, deriva-se o processo de evolução da *spot* instantânea e dos preços das obrigações, respectivamente:

$$f(t,t) = r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)\, dW_t, \quad t \in [0,T] \quad \text{Equação 20.}$$

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\, du\right) = \exp\left(-\left(\int_t^T f(0,u)du + \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u)du\, ds + \int_0^t \int_t^T \sigma(s,u) du\, dW_s\right)\right)$$

Equação 21.

2.2.2 Existência de uma única medida neutral ao risco

De acordo com o procedimento descrito no capítulo 1, bastaria encontrar-se a medida de martingalo, associada a este mercado, para as hipóteses de arbitragem se encontrarem excluídas. O primeiro passo é definir o processo dos preços descontados. Admite-se que existe o numerário, já introduzido no capítulo 1, que tem a seguinte dinâmica:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \; t \in [0,\tau]^{30} \quad \text{Equação 22.}$$

29 Neste caso, como se pode inferir da equação 18, o *drift* e a volatilidade apenas são funções do momento actual e da maturidade. No caso da volatilidade ser estocástica existem condições adicionais que o processo de volatilidade deve obedecer (neste sentido ver Heath, Jarrow e Morton (1992)).

Substituindo o processo da taxa *spot* instantânea obtido na equação 20 viria:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)du\,ds + \int_0^t\int_s^t \sigma(s,u)du\,dW_s\right) \quad \text{Equação 23.}$$

Na dedução da equação 23 utilizou-se duas condições técnicas adicionais:

a) o *drift* tem um integral finito, isto é, $\int_0^T\int_0^u |\alpha(t,u)| dt du < \infty$;

b)a volatilidade σ tem um valor esperado finito $E\left(\int_0^T \left|\int_0^u \sigma(t,u)dW_t\right| du\right) < \infty$.

Estas duas condições técnicas permitem alterar a ordem do integral $\int_0^t\int_0^u \alpha(s,u)ds\,du$ e $\int_0^t\int_0^u \sigma(s,u)dW_s\,du$ para $\int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)du\,ds$ e $\int_0^t\int_s^t \sigma(s,u)du\,dw_s$ (sobre este assunto ver Heath, Jarrow e Morton (1992)).

Fixando uma dada maturidade *T*, o valor dos preços descontados é igual a $Z(t,T) = B_t^{-1}P(t,T)$. Combinando a equação 21 e 23 obtém-se:

$$Z(t,T) = \exp\left(-\left(\int_0^T f(0,u)du + \int_0^t\int_s^T \alpha(s,u)du\,ds + \int_0^t\int_s^T \sigma(s,u)du\,dW_s\right)\right) \quad \text{Equação 24.}$$

A partir do lema de Itô, deriva-se o processo de variação dos preços das obrigações descontados. Substituindo,

[30]Heath, Jarrow e Morton (1992) impõe as seguintes condições técnicas adicionais para o numerário seja bem comportado:

$$\int_0^T |f(0,u)| du < +\infty \text{ e } \int_0^T \left\{\int_0^t |\alpha(s,u)ds|\right\} du < +\infty.$$

$$d_t Z(t,T) = Z(t,T)\left(\left(-\int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,u)du\right)^2\right)dt - \int_t^T \sigma(t,u)du\, dW_t\right)$$

Equação 25.

A existência da medida de martingalo, neste mercado, depende do processo dos preços descontados verificar as condições técnicas do teorema de *Girsanov.* Definindo o processo γ que satisfaz as condições do teorema de *Girsanov* então:

$$\gamma_t = -\frac{1}{2}\int_t^T \sigma(t,u)du + \frac{1}{\int_t^T \sigma(t,u)du}\int_t^T \alpha(t,u)du \quad \text{Equação 26.}$$

É necessário que a matriz $\int_t \sigma(t,u)du$ seja não singular, admitindo portanto inversa.

Seguindo Heath, Jarrow e Morton (1992) demonstra-se que aquele processo previsível γ existe, garantindo desta forma a existência da medida Q. Este processo deve satisfazer as seguintes condições:

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\left(\gamma_t + \int_t^T \sigma(t,u)du\right),\ \forall t \le T \text{ e } E\left(\exp\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t{}^2 dt\right) < \infty$$

Equação 27.

Para a medida de probabilidade ser única e, logo, o mercado ser completo, é ainda necessário impor-se as seguintes condições adicionais:

a) a matriz $A_t = -\int_0^T \sigma(t,u)du$ é uma matriz não singular para todos os momentos e estados *(t,w)*, e para todas as maturidades $T_1 < T_2 < \ldots\ldots < T_n$;

b) $E\left(\exp\frac{1}{2}\int_0^T\left(\gamma_t+\int_t^T\sigma(t,u)du\right)^2\right)<\infty.$

Então, na medida Q, obtém-se os seguintes resultados para:

- a variação dos preços descontados:

$$d_tZ(t,T)=-Z(t,T)\int_t^T\sigma(t,u)du\,d\widetilde{W}_t \quad \text{Equação 28;}$$

- a variação dos preços:

$$P(t,T)=B_t\,Z(t,T),\ \text{então}$$

$$\begin{aligned} d_tP(t,T) &= B_t\,d_tZ(t,T)\ +\ dB_t\,Z(t,T) \\ &= -B_t\,Z(t,T)\int_t^T\sigma(t,u)du\,d\widetilde{W}_t\ +\ B_t\,Z(t,T)\,r_tdt \\ &= P(t,T)\left(r_tdt-\int_t^T\sigma(t,u)du\,d\widetilde{W}_t\right)\end{aligned}$$

Equação 29

- a *forward* resulta da substituição na equação 19 da restrição imposta sobre o *drift* (equação 27) e da transformação de medida do teorema de *Girsanov:*

$$
\begin{aligned}
d_t f(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t \\
&= \left(\sigma(t,T)\left(\gamma_t + \int_t^T \sigma(t,u)du\right)\right)dt + \sigma(t,T)dW_t \\
&= \left(\sigma(t,T)\left(\gamma_t + \int_t^T \sigma(t,u)du\right)\right)dt + \sigma(t,T)\left(d\widetilde{W}_t - \gamma_t\, dt\right) \\
&= \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,u)du\, dt + \sigma(t,T)d\widetilde{W}_t
\end{aligned}
$$

Equação 30

No ponto seguinte, analisa-se as implicações das restrições impostos sobre o *drift* do processo e demonstra-se que os preços das obrigações na medida Q eliminam as oportunidades de arbitragem, não só entre uma obrigação e a carteira que reproduz o seu valor, mas também entre todos as obrigações com diferentes maturidades.

2.2.3 Especificidade do mercado obrigacionista

O mercado obrigacionista, em análise, é apenas constituído por obrigações de cupão zero e pelo activo sem risco ou numerário. A especificidade deste mercado reside no facto de uma obrigação de cupão zero poder ser, simultaneamente, encarada como um activo ou como um derivado que paga uma unidade monetária na maturidade. Assim sendo, apenas se dispõe de um único activo exógeno, o numerário, uma vez que as obrigações ao serem um derivado podem, teoricamente, ser reproduzidas a partir de uma carteira autofinanciada.

De acordo com o mencionado no capítulo 1, é suficiente encontrar-se a medida de probabilidade em relação à qual o processo dos preços dos activos se transforma num martingalo, para se inferir que, neste mercado, qualquer hipótese de arbitragem é eliminada. Sendo o numerário o único activo exógeno, facilmente se verifica que o seu processo descontado é um martingalo. A dinâmica do numerário é dada pela equação 22. O processo dos preços descontados viria:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds \right) \quad \text{e} \quad Z_t = \frac{B_t}{B_t} = 1.$$

O processo dos preços descontados é constante, logo a sua variação média esperada é sempre igual a zero. Mais, não é necessário efectuar-se qualquer transformação de medida de probabilidade para que aquele processo seja um martingalo. Como o numerário pode ser definido em relação a *n* medidas de probabilidade, então em relação a qualquer uma destas medidas de probabilidade o processo dos preços descontado é um martingalo. Desta forma, existe uma infinidade de medidas martingalo em relação às quais as oportunidades de arbitragem são eliminadas.

Acresce que, apenas é especificada a dinâmica da taxa de juro *forward* que não é um activo transaccionável. Pelo que, a determinação dos preços das obrigações não poderá ser feita recorrendo apenas a argumentos de ausência de arbitragem. É necessário impor-se condições adicionais para que os preços das obrigações sejam únicos e eliminem as oportunidades de arbitragem entre eles. No caso concreto do modelo *HJM*, estas condições são impostas sobre o próprio processo de evolução das *forward*. Analisa-se, em seguida, a forma como neste modelo se garante que o mercado obrigacionista exclua qualquer oportunidade de arbitragem e, simultaneamente, seja um mercado completo.

Analogamente ao exposto no capítulo anterior, caso exista uma medida martingalo, sob a qual o processo dos preços descontados das obrigações é um martingalo, esta coincide com a medida martingalo do mercado. O processo γ garante a existência desta medida martingalo que elimina as oportunidades de arbitragem entre o numerário e as obrigações. A esta medida de probabilidade Musiela e Rutkowski (1997) denominam medida neutral ao risco *spot*.

Contudo, neste mercado a obrigação pode, também, ser considerada como um derivado que paga uma unidade monetária num determinado momento *T*. Desta forma, se o agente pretender obter uma unidade monetária no momento *T* terá à sua disposição, no momento *t*, duas estratégias: a primeira, consiste em adquirir hoje a obrigação com maturidade *P(t,T)*; alternativamente, pode constituir uma carteira autofinanciada, com uma obrigação *P(t,S)*, com $t<T<S$, e com o numerário que lhe proporcione uma unidade monetária no momento *T*.

No primeiro caso, a variação dos preços da obrigação, na medida *Q*, é dada pela seguinte equação:

$$d_t P(t,T) = P(t,T)\left(r_t dt - \int_t^T \sigma(t,u)du \, d\tilde{W}_t\right).$$

Na segunda alternativa, o agente opta por deter uma carteira autofinanciada constituída por uma obrigação de maturidade *S* e o numerário. O teorema da representação do martingalo determina um processo, ϕ, previsível que indica qual a proporção a deter de cada um dos activos. A única restrição para a aplicação do teorema atrás referido é, segundo Baxter e Renie (1996), que a volatilidade do processo seja positiva, isto é, $\int_t^S \sigma(t,u)du > 0,\ \forall t < S$. Para não existirem oportunidades de arbitragem, o valor da carteira assim constituída, em cada momento *t*, terá que ser igual ao preço da obrigação *P(t,T)* (encarado, neste caso, como um derivado). Então, da equação 13 deduz-se:

$$\begin{aligned} V(t) &= B(t) \times E_Q\left(B^{-1}(T) \times 1 \mid F_t\right) \\ &= E_Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right) \end{aligned}$$

Equação 31.

À luz do que foi referido anteriormente, a anterior equação só é válida se o valor da carteira autofinanciada descontado em cada momento, for um martingalo.

O primeiro passo consiste em transformar o activo financeiro, neste caso *P(t,S)*, num martingalo. Seja $Y(t,S) = \dfrac{P(t,S)}{B_t}$ verifica-se que

$$d_t Y(t,S) = Y(t,S)\left(\left(-\int_t^S \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\left(\int_t^S \sigma(t,u)du\right)^2\right)dt - \int_t^S \sigma(t,u)du\ dW_t\right).$$

Pelo teorema de *Girsanov* define-se o processo previsível:

$$\gamma^*_t = -\frac{1}{2}\int_t^S \sigma(t,u)du + \frac{1}{\int_t^S \sigma(t,u)du}\int_t^S \alpha(t,u)du.$$

Substituindo viria:

$$d_t Y(t,S) = -Y(t,S)\int_t^S \sigma(t,u)du\ dW_t^* \quad \text{Equação 32.}$$

Este processo é um martingalo em relação a uma medida equivalente a *P*, Q^{*}. Contudo, pretende-se que *Y(t,S)* seja um martingalo em relação à medida *Q*, isto é, em relação à medida na qual o processo dos preços das obrigações é um martingalo. Como foi verificado, é em relação a esta medida que a carteira coincide, em cada momento do tempo, com o valor do derivado, excluindo qualquer oportunidade de arbitragem. Para transformar aquele processo na medida *Q*, ter-se-á que aplicar o processo γ_t calculado anteriormente. Então $dW_t = d\widetilde{W}_t - \gamma_t$, substituindo na equação 32 virá:

$$d_tY(t,S) = -Y(t,S)\int_t^S \sigma(t,u)du\left(d\widetilde{W}_t + \gamma^{*}{}_t - \gamma_t\right) \quad \text{Equação 33.}$$

Para o processo *Y(t,S)* ser um processo de *martingala*, então $E_Q\left(d_tY(t,S)|F_s\right) = 0$, donde se infere que $\gamma^{*}{}_t = \gamma_t$. Para não existirem oportunidades de arbitragem, o processo que permite a conversão na medida neutral ao risco deve ser único, transformando simultaneamente todos os processos dos preços das obrigações descontados, de diferentes maturidades, em martingalos. Tal é equivalente a afirmar-se que o processo deve ser independente da maturidade do título que o agente escolhe para deter na sua carteira, isto é, o processo γ, num determinado momento do tempo, é o mesmo para todas as obrigações existentes no mercado. Desta forma, exclui-se todas as oportunidades de arbitragem entre os diferentes títulos com diferentes maturidades. A medida de probabilidade que elimina as oportunidades de arbitragem entre as obrigações de diferentes maturidades, denomina-se de medida neutral ao risco *forward* segundo Musiela e Rutkowski (1997).

Matematicamente, a derivada de γ_t em ordem a *T* tem que ser igual a zero, ou seja,

$$\gamma_t = -\frac{1}{2}\int_t^T \sigma(t,u)du + \frac{1}{\int_t^T \sigma(t,u)du}\int_t^T \alpha(t,u)du \Leftrightarrow$$

$$\int_t^T \alpha(t,u)du = \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,u)du\right)^2 + \int_t^T \sigma(t,u)du\,\gamma_t$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow \alpha(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \sigma(\mathrm{t},\mathrm{T})\int_{\mathrm{t}}^T \sigma(t,u)du + \sigma(\mathrm{t},\mathrm{T})\gamma_t = \sigma(\mathrm{t},\mathrm{T})\left(\gamma_{\mathrm{t}} + \int_{\mathrm{t}}^T \sigma(t,u)du\right)$$

Equação 34.

O resultado da equação anterior é comparável à primeira condição da equação 27. Esta é uma condição necessária e suficiente para as oportunidades de arbitragem serem eliminadas do mercado. O *drift* do processo é função da volatilidade e de um processo previsível. A segunda condição da equação 27 é a condição exigida pelo teorema de *Girsanov* para o processo γ existir.

Do que foi exposto importa salientar que, no primeiro momento, deduziu-se o processo que permitia transformar os preços descontados num martingalo. Neste sentido, o processo γ_t é condição suficiente para as oportunidades de arbitragem entre os títulos e o numerário serem excluídas. Num segundo momento, obteve-se um outro processo γ_s que permite eliminar as estratégias de arbitragem entre as diversas obrigações de diferentes maturidades. Esta nova condição é específica do mercado obrigacionista, dado a particularidade da obrigação de cupão zero poder ser considerada um activo e, simultaneamente, um derivado. Conclui-se que ambos os processos teriam que ser iguais entre si e independentes da maturidade do título considerado. Esta condição implica que é equivalente obter-se um processo que elimine as oportunidades de arbitragem entre as diversas obrigações ou, em alternativa, o processo que transforma os preços descontados das obrigações em martingalos (sobre este ponto ver Musiela e Rutkowski (1997)). Neste sentido a equação 27 é uma condição necessária.

Esta conclusão tem implicações práticas na especificação da dinâmica *forward*. Podem ser adoptadas duas abordagens alternativas: na primeira, opta-se por especificar a *forward* em relação a uma dada medida de probabilidade P. O processo da *forward* terá que satisfazer, contudo, as condições técnicas expressas na condição 27 que garantem a existência de uma medida Q.

Ao especificar a dinâmica da *forward* na medida P, o modelo permite que se especifique arbitrariamente a estrutura de volatilidade do processo. Para um conjunto de obrigações com n maturidades diferentes, define-se de forma exógena o *drift* (saliente-se que, o número de obrigações a satisfazerem aquela restrição deve ser exactamente igual ao número de fontes de incerteza no modelo). Considerando que a matriz de volatilidade é invertível, então existe um processo γ, que transforma o processo num processo martingalo.

Em alternativa, pode-se especificar a dinâmica da *forward* na medida neutral ao risco, Q, admitindo a restrição adicional sobre o *drift*: $\alpha(t,T)=\sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)du$.

Depreende-se que, nesta hipótese, não é necessário especificar-se o prémio de risco de mercado. Em relação a n obrigações determina-se apenas arbitrariamente a sua volatilidade, sendo o *drift* de cada uma delas obtido a partir da relação anterior.

Em ambas as metodologias, o processo dos preços das n obrigações descontadas é martingalo em relação a uma medida de probabilidade Q. As restantes obrigações com maturidade diferenciada das consideradas *benchmark* são encaradas como derivados. Pelo que, a sua valorização poderá ser feita recorrendo a uma carteira autofinanciada constituída pelas *n* obrigações e pelo numerário. Desta forma, apenas se determina o preço de *n* obrigações. Em relação às restantes, o seu preço será função do preço das obrigações consideradas *benchmark*. Como foi referido no capítulo precedente, o preço destas últimas deverá ser, em cada momento, igual ao valor esperado, na medida Q, do valor do título na maturidade (igual a 1 unidade monetária) actualizado pela taxa de *spot* instantânea entre o momento actual e a maturidade do título. Matematicamente, tal é dado pela seguinte expressão:

$$P(t,T) = E_Q\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) | F_s\right) \quad \text{Equação 35.}$$

Em suma, o modelo apenas especifica exogenamente o processo de evolução da *forward* e, implicitamente, o processo de evolução dos preços das obrigações. Para estes preços serem únicos e excluírem oportunidades de arbitragem, é necessário impor-se condições sobre a evolução do *drift* do processo da *forward*.

2.3 Conclusões

Ao longo deste capítulo realçou-se os pressupostos e as condições que os preços das obrigações no modelo *HJM* devem verificar, para que não hajam oportunidades de arbitragem e o mercado seja completo.

O mercado obrigacionista onde apenas são transaccionados obrigações de cupão zero e o numerário é um mercado incompleto, no sentido em que, para cada derivado não existe uma carteira autofinanciada que o reproduza no momento terminal. Tal resulta de uma obrigação poder ser encarada, simultaneamente, como um activo e como um derivado. Desta forma, o único activo exógeno é o numerário. Este tem a particularidade de ser um martingalo em relação a *n* medidas de probabilidade. A escolha da medida martingalo do mercado é feita pelos agentes no mercado. Desta forma, os preços das obrigações têm que satisfazer condições adicionais entre eles. Esta é uma característica específica deste mercado que não se encontrou no mercado financeiro, introduzido no capítulo anterior. No caso do modelo *HJM* a escolha da medida de *martingala* é feita recorrendo aos preços das obrigações de cupão zero observados no momento inicial.

A partir do modelo anterior deduz-se que o prémio de risco de mercado é dado, respectivamente, pela equação 27. O prémio de risco instantâneo, para evitar oportunidades de arbitragem, é o mesmo para todas as obrigações independentemente da sua maturidade. Caso tal não se verifique, existe uma oportunidade de arbitragem no mercado. Pelo que, encontrada a medida martingalo em relação a um dado processo de preços descontados, sabe-se que esta transforma, simultaneamente, todos os preços das obrigações em martingalos.

Os preços das obrigações, na medida neutral ao risco, não dependem do *drift* implícito no processo na medida *P*, sendo a variação dos preços esperada, por unidade de tempo, igual à taxa de juro *spot* instantânea. O agente pode optar por constituir uma carteira com numerário e obrigações independentemente da maturidade destas, uma vez que o valor da sua estratégia é sempre o mesmo. Estas duas conclusões são iguais às verificadas no final do capítulo anterior.

A especificação do prémio de risco de mercado, a dinâmica dos preços das obrigações descontadas e da *forward,* na medida neutral ao risco, devem ser determinados de forma conjunta (Heath, Jarrow e Morton (1992)). Na realidade, especificando a dinâmica da *forward* de forma arbitrária, existe apenas um único prémio de risco de mercado que garante que o processo dos preços das obrigações descontado seja um martingalo e, simultaneamente, exclua hipóteses de arbitragem entre todos os títulos, incluindo o numerário. A especificação dos três processos de forma independente não garante que o mercado elimine as oportunidades de arbitragem. Em suma, para o mercado excluir qualquer hipótese de arbitragem apenas se pode especificar de forma arbitrária o processo da *forward,* sendo os restantes dois processos determinados de forma endógena.

Em alternativa, a dinâmica da *forward* pode ser especificado directamente na medida neutral ao risco, obviando a necessidade da especificação do prémio de risco. Neste caso, apenas a volatilidade do processo da *forward* é determinada de forma arbitrária, sendo o *drift* do processo função da própria volatilidade.

O modelo *HJM* ao impor condições sobre o *drift* do processo da *forward* garante que a medida neutral ao risco é única e sob esta não existem oportunidades de arbitragem entre as diferentes obrigações e entre estas e o numerário. Nesta circunstância um derivado pode ser valorizado recorrendo a uma carteira constituída por obrigações e pelo numerário.

3. Estimação empírica

O mercado obrigacionista, como foi analisado, é um mercado incompleto. Neste sentido, contrariamente ao verificado para o mercado financeiro em geral, não existe um processo γ único que transforme a medida de probabilidade associada aos preços das obrigações na medida neutral ao risco. Existem n medidas martingalos, sendo o mercado a determinar qual é a medida que exclui as oportunidades de arbitragem (medida Q). Tal implica que o prémio de risco não pode ser definido de forma independente do processo da *forward*: existe uma dada relação que deve ser verificada entre o *drift*, a volatilidade e o prémio de risco associados a um dado processo.

Os dados empíricos disponíveis têm subjacentes uma dada medida de probabilidade. Contrariamente, os preços teóricos subjacentes a cada modelo, encontram-se referidos à medida neutral ao risco. Desta forma, existe a necessidade de transformar a medida de probabilidade associada a cada processo na medida neutral ao risco.

A abordagem proposta no modelo *HJM* tem vantagens face a abordagens tradicionais. Na dinâmica da *forward* é retida toda a informação contida no momento inicial na EPTJ, garantindo-se um ajustamento inicial entre os preços das obrigações teóricos e os observados no mercado. Impondo, adicionalmente, a restrição de que o *drift* do processo não é mais do que uma função da volatilidade do mesmo, permite-se a especificação da dinâmica da *forward* directamente na medida neutral ao risco, obviando à necessidade de determinar o prémio de risco.

Os trabalhos empíricos desenvolvidos sobre o paradigma *HJM* são relativamente escassos. A abordagem empírica consiste geralmente em confrontar os preços dos derivados teóricos com os observados no mercado, admitindo diferentes formas funcionais para a volatilidade. Para cada observação da amostra é determinada a volatilidade que permite minimizar o quadrado daquela diferença. Será do confronto entre as séries temporais de volatilidade implícitas nos preços do mercado dos derivados e as séries de volatilidade obtidas através da estimação *cross-section* do modelo *HJM* que se validará ou refutará o modelo. Nesta linha de abordagem encontram-se trabalhos como o de Flesaker (1993) e de Amin e Morton (1994). Em trabalhos como o de Abken (1993) e de Raj, Sim e Thurston (1997), estimam-se os parâmetros do processo de difusão da *forward* pelo Método Momentos Generalizado, determinando a EPTJ implícita.

Ao longo deste capítulo, estimam-se os parâmetros do processo de difusão da taxa de juro *forward* instantânea proposto pelo modelo *HJM*, para a economia alemã, no período compreendido entre Novembro de 1989 e Junho de 1998, utilizando o Método dos Momentos Generalizado.

Como se referiu na introdução do capítulo 2, existe uma relação biunívoca entre as taxas de juro *forward* instantânea, os preços das obrigações e as *yields*. Deste modo, ao caracterizar-se a estrutura das *forward* instantânea, caracteriza-se implicitamente a EPTJ.

Os primeiros pontos deste capítulo introduzem as dinâmicas da *forward* instantânea que são estimadas. Na realidade, no modelo *HJM*, a estrutura de volatilidade da *forward*, única variável a ser determinada na medida neutral ao risco, pode assumir diferentes formas funcionais. O modelo *HJM* considera um processo de difusão em tempo contínuo. Todavia, os dados disponíveis referem-se ao tempo discreto, sendo necessário dispor de aproximações empíricas as quais são descritas no ponto dois.

No ponto três, é apresentada a metodologia econométrica utilizada. No ponto seguinte, são descritos e brevemente analisados os dados utilizados na estimação empírica. No último ponto analisam-se os resultados obtidos.

O trabalho, desenvolvido ao longo deste capítulo, segue a metodologia utilizada por Abken (1993).

3.1 Especificação empírica do modelo HJM

Os dados empíricos têm implícitos uma dada medida de probabilidade *P*. Contudo, os preços teóricos de qualquer modelo encontram-se referidos à medida de probabilidade *Q*. Como se referiu, o teorema de *Girsanov* permite transformar a medida de probabilidade associada aos dados empíricos na medida martingalo. No mercado obrigacionista esta transformação não é imediata, uma vez que o mercado é incompleto, havendo *n* medidas martingalo. É o mercado que determina qual o prémio de risco associado a um dado processo. Neste sentido, especifica-se o processo da *forward* na medida de probabilidade P, impondo a restrição sobre o *drift* que elimina qualquer oportunidade de arbitragem, quer entre as diversas obrigações, quer entre estas e o numerário (condição expressa na equação 27). Assim, o *drift* da *forward* é função da volatilidade do processo e do prémio de risco. Resumindo, em termos empíricos o *drift* e a volatilidade do processo são especificados arbitrariamente, determinando-se o processo γ que permite transformar o processo da *forward* na medida neutral ao risco.

Dada a estrutura de *forward* inicial, isto é,

$$f(0,T),\ \forall T$$

a dinâmica da *forward*, na medida P, evolui de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} d_t f(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t \\ &= \sigma(t,T)\left(\gamma_t dt + \int_t^T \sigma(t,u)du\, dt\right) + \sigma(t,T)dW_t \end{aligned}$$

Equação 36.

Como facilmente se verifica a partir da equação anterior, a dinâmica da *forward* depende da forma funcional admitida para a estrutura de volatilidade. Consideram-se neste trabalho três formas funcionais determinísticas para a volatilidade, que admitem uma distribuição normal para o processo das *forward*.

O primeiro caso a ser analisado é o da volatilidade constante, isto é, $\sigma(t,T) = \sigma$. A equação 36 viria:

$$d_t f(t,T) = \left(\sigma\gamma(t) + \sigma^2(T-t)\right)dt + \sigma dW(t) \quad \text{Equação 37.}$$

As variações no processo da *forward* são explicadas por choques aleatórios que não dependem nem da maturidade do processo nem do nível da própria forward. Neste sentido, a EPTJ sofre apenas deslocações paralelas derivadas de cada um dos choques aleatórios.

No segundo exemplo, admite-se que a volatilidade é uma função exponencialmente decrescente com a maturidade, ou seja, $\sigma(t,T) = \sigma e^{-\lambda(T-t)}$, onde λ é a taxa de decréscimo. Neste caso, a dinâmica da *forward* viria:

$$d_t f(t,T) = \left(\sigma e^{-\lambda(T-t)}\,\gamma(t) + \sigma^2 e^{-2\lambda(T-t)}(T-t)\right) dt + \sigma e^{-\lambda(T-t)} dW(t)$$

Equação 38.

As duas estruturas de volatilidade apresentadas prevêem apenas uma única fonte de incerteza. Contudo, no modelo de *HJM* é proposta uma dinâmica para a *forward* onde se admite dois choques diferenciados: o primeiro que afecta as taxas *forward* no longo prazo, implicando deslocamentos paralelos da EPTJ; e o segundo que afecta a EPTJ no curto prazo. Acresce que, contrariamente aos dois casos anteriores, os movimentos das *forward* deixam de se encontrar perfeitamente correlacionados. A estrutura de volatilidade é dada por $\sigma_1(t,T) = \sigma_1$ e $\sigma_2(t,T) = \sigma_2\, e^{-\lambda(T-t)}$, donde a dinâmica da *forward* é igual a:

$$d_t f(t,T) = \left(\sigma_1\, \gamma_1(t) + \sigma_2\, e^{-\lambda(T-t)}\, \gamma_2(t) + \sigma_1^2 (T-t) + \left(\sigma_2^2/\lambda\right) e^{-\lambda(T-t)}\left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right)\right) dt$$
$$+ \sigma_1\, dW_1(t) + \sigma_2\, e^{-\lambda(T-t)} dW_2(t)$$

Equação 39.

3.2 Aproximação discreta

Na estimação da dinâmica das *forward,* de acordo com Abken (1993), existem dois tipos de simplificações que devem ser admitidas. A primeira consiste em admitir que o prémio de risco de mercado é constante, isto é, $\gamma(t)= \gamma$. Em segundo lugar, as equações 36 a 38 devem ser aproximadas por equações discretas[31], uma vez que apenas se dispõe de observações diárias.

A aproximação discreta e os primeiro e segundo momentos condicionais dos diferentes processos admitidos para a taxa *forward,* são dados por:

$$f_{t,T} - f_{t-1,T} = \left(\sigma\gamma + \sigma^2(T-t)\right)\Delta t + \varepsilon_{t,T}$$
$$E\left(\varepsilon_{t,T}\right) = 0 \quad \text{e} \quad E\left(\varepsilon^2{}_{t,T}\right) = \sigma^2\Delta t$$

Equação 40,

$$f_{t,T} - f_{t-1,T} = \alpha(\text{t},T)\Delta t + \varepsilon_{t,T}$$
$$\alpha = \sigma e^{-\lambda(T-t)}\gamma + \sigma^2 e^{-2\lambda(T-t)}$$
$$E\left(\varepsilon_{t,T}\right) = 0 \quad \text{e} \quad E\left(\varepsilon^2{}_{t,T}\right) = \sigma^2 e^{-2\lambda(T-t)}\Delta t$$

Equação 41,

31 O erro da agregação temporal é de segunda ordem de importância, logo desprezável, quando as variações nas taxas referem-se a prazos pequenos. Para um maior discussão, ver Abken (1993), Chan *et al.* (1992).

$$f_{t,T} - f_{t-1,T} = \alpha(t,\tau)\Delta t + \varepsilon_{t,T}$$

$$\alpha = \left(\sigma_1 \gamma_1 + \sigma_2 e^{\lambda(T-t)} \gamma_2 + \sigma_1^2 (T-t) + \left(\sigma_2^2/\lambda\right) e^{-\lambda(T-t)} \left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right) \right)$$

$$E\left(\varepsilon_{t,T}\right) = 0 \quad \text{e} \quad E\left(\varepsilon^2{}_{t,T}\right) = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2{}^2 e^{-\lambda(T-t)}\right)\Delta t$$

Equação 42,

onde Δt é igual à frequência das observações e T é o prazo do vencimento da *forward* considerada.

3.3 Método econométrico

De forma análoga aos trabalhos de referência, utilizou-se na estimação econométrica o Método Generalizado dos Momentos (GMM), proposto por Hansen (1982). Este método consiste na definição de momentos teóricos que sejam funções dos parâmetros a serem estimados e, simultaneamente, tenham um valor esperado nulo. Os estimadores GMM são obtidos a partir da minimização de uma função quadrática para os momentos da amostra.

O vector de condições ortogonais no caso das equações 40 a 42 viria:

$$h_t\left(f_{t,\tau}, z_t, \Theta\right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t,T_i} \\ \varepsilon^2{}_{t,T_i} - \sigma^2\left(t, f_{t,T_i}\right)\Delta t \\ \vdots \\ \varepsilon_{t,T_m} \\ \varepsilon^2{}_{,T_m} - \sigma^2\left(t, f_{t,T_m}\right)\Delta t \end{bmatrix} \times z_t \qquad \text{Equação 43,}$$

onde Θ é o vector de parâmetros a serem estimados: ϕ, σ e λ; e z_t é o vector de instrumentos.

Na hipótese nula das condições ortogonais serem verdadeiras, tem-se: $E\left[h_t\left(f_{t,\tau}, z_t, \Theta\right)\right] = 0$

O estimador GMM consiste em substituir os momentos teóricos pelos momentos empíricos, isto é,

$$g_N(\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} h_t(\Theta) \qquad \text{Equação 44.}$$

O vector de parâmetros, Θ, será escolhido a partir da minimização de uma função quadrática:

$$J_N(\Theta) = g'_N(\Theta)\ W_N(\Theta)\ g_N(\Theta) \qquad \text{Equação 45,}$$

onde $_N(\Theta)$ é uma matriz de ponderação simétrica, definida positiva.

Em qualquer uma das especificações consideradas, o número de parâmetros a serem estimados é inferior ao número de condições ortogonais impostas. Neste caso, os modelos estão sobre identificados, utilizando-se o teste de Hansen (1982) para aferir da qualidade do ajustamento do modelo aos dados. Na hipótese do modelo se encontrar bem especificado, o valor mínimo da função quadrática, dado pela expressão 45, multiplicado pelo número de observações do modelo tem um distribuição de um Qui-quadrado, com o número de graus de liberdade igual à diferença entre o número de condições ortogonais e o número de parâmetros a serem estimados.

A principal vantagem do GMM é não exigir qualquer distribuição para as variáveis a estimar. Contudo, como adverte Abken (1993), para a aplicação deste método de estimação, as séries têm de ser estacionárias.

3.4 *Estrutura por Prazos das Taxas de Juro (EPTJ) - Alemanha*

Os dados utilizados na parte empírica deste trabalho resultam da estimação da EPTJ para a Alemanha, respeitante ao período entre Novembro de 1989 e Junho de 1998[32]. O método de estimação da EPTJ é o de Nelson-Siegel[33]. A especificação da taxa de juro *spot* e *forward* instantânea foi obtida a partir de:

$$
\begin{aligned}
{}_{m}f_{0} &= \beta_0 + \beta_1 \times \exp\left(-m/\tau\right) + \beta_2\left[\left(-m/\tau\right) \times \exp\left(-m/\tau\right)\right] \quad \text{e} \\
s_m &= \beta_0 + \left(\beta_1 + \beta_2\right) \times \left[1 - \exp\left(-m/\tau\right)\right] / \left(-m/\tau\right) - \beta_2\left[\exp\left(-m/\tau\right)\right]
\end{aligned}
$$

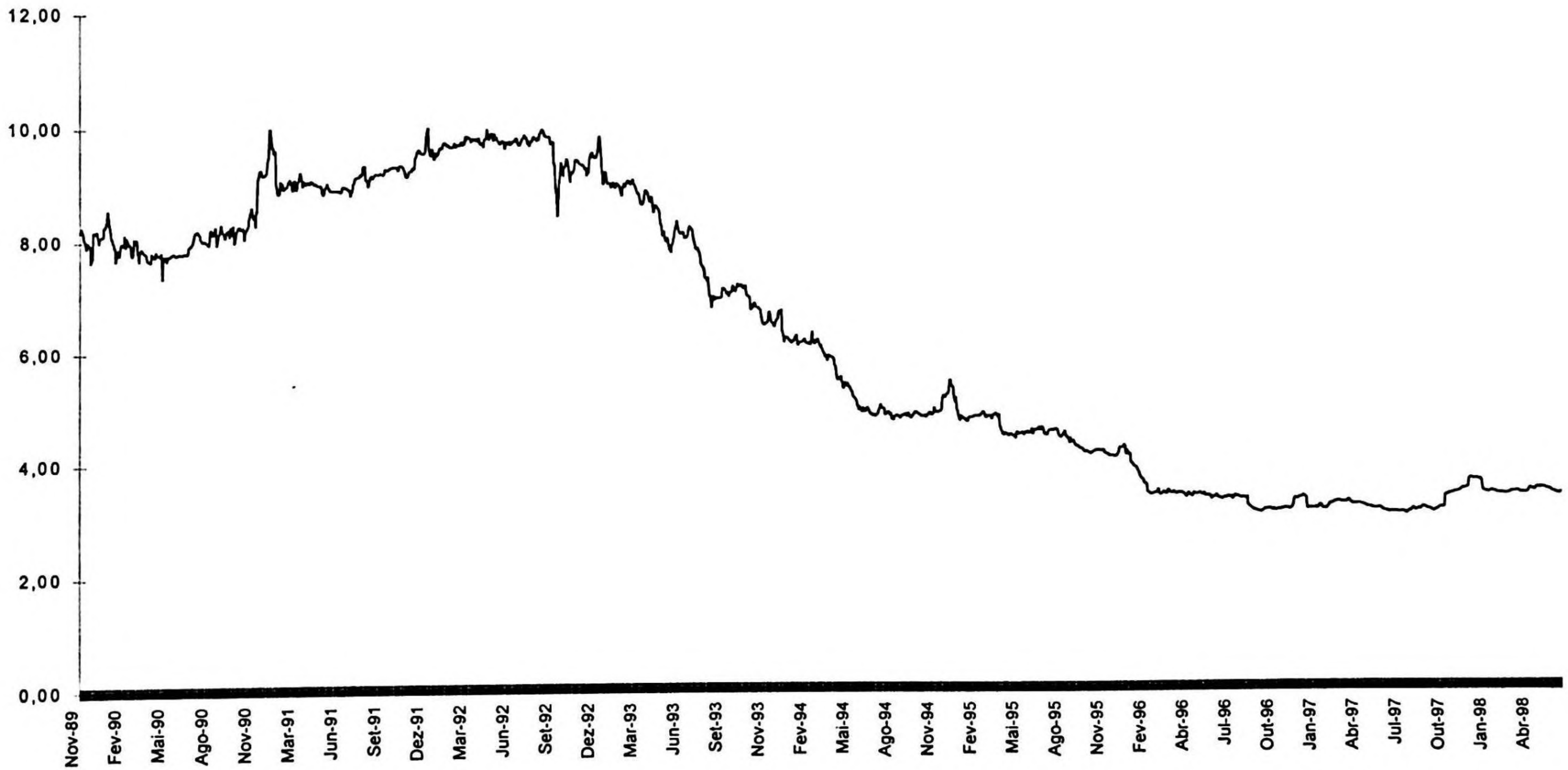
onde *m* é a maturidade e β_0, β_1, β_2 e τ são parâmetros a serem estimados. Utilizando esta metodologia, construíram-se séries diárias da taxa de juro *spot* e *forward* instantânea, para diferentes prazos.

A análise da série da taxa juro *spot* assim obtida, evidenciou a existência de algumas observações com valores anómalos. A partir do cálculo da série em primeira diferença retiram-se todas as observações que excedessem em módulo dois desvios padrão da média. As observações anómalas referem-se ao período compreendido entre Janeiro de 1990 e Outubro de 1992, com maior incidência para o mês de Janeiro de 1991. No total foram retiradas 36 observações de cada uma

32 As séries de taxas de juro de curto prazo de base foram disponibilizadas pelo DEE-AMF- Banco de Portugal.
33 Neste trabalho segui-se de perto a metodologia desenvolvida em Cassola, N. e J. B. Luís (1996).

das séries das taxas de juro *spot* e *forward.* A série apresentada da taxa de juro *spot* instantânea apresenta-se no gráfico I.

Gráfico I: Taxa de juro *spot* com correcção de observações anómalas



A partir da EPTJ obtém-se as séries necessárias à estimação do modelo de *HJM*. Uma forma de aferição da qualidade dos modelos teóricos é confrontar os seus resultados com a EPTJ estimada directamente. Apresenta-se, em seguida, sumariamente as principais características observadas nesta estrutura.

De acordo com o gráfico II e III conclui-se que a curva de rendimentos alemã apresenta dois períodos distintos: o primeiro compreendido entre Novembro de 1989 e Novembro de 1993 em que a inclinação da curva é negativa; para o restante período (Novembro de 1993 a Junho de 1998), a curva de rendimentos apresenta uma inclinação positiva.

Gráfico II: EPTJ - Alemanha - 1989-1993

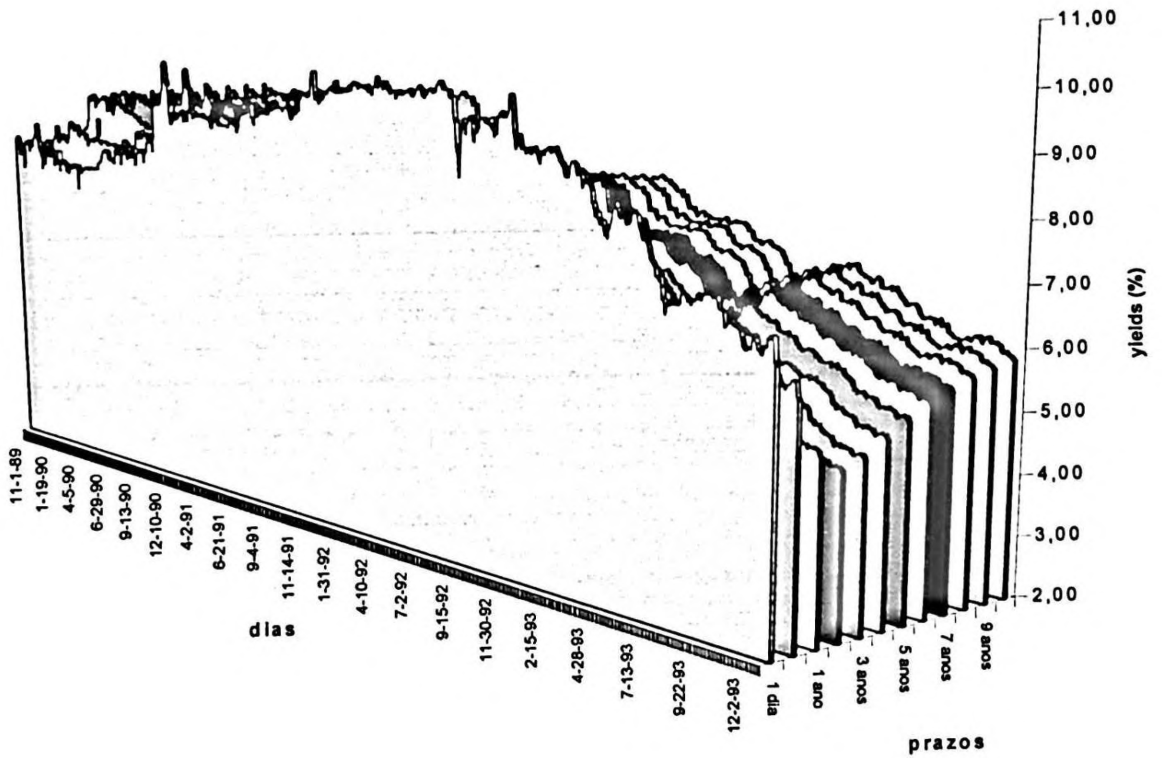
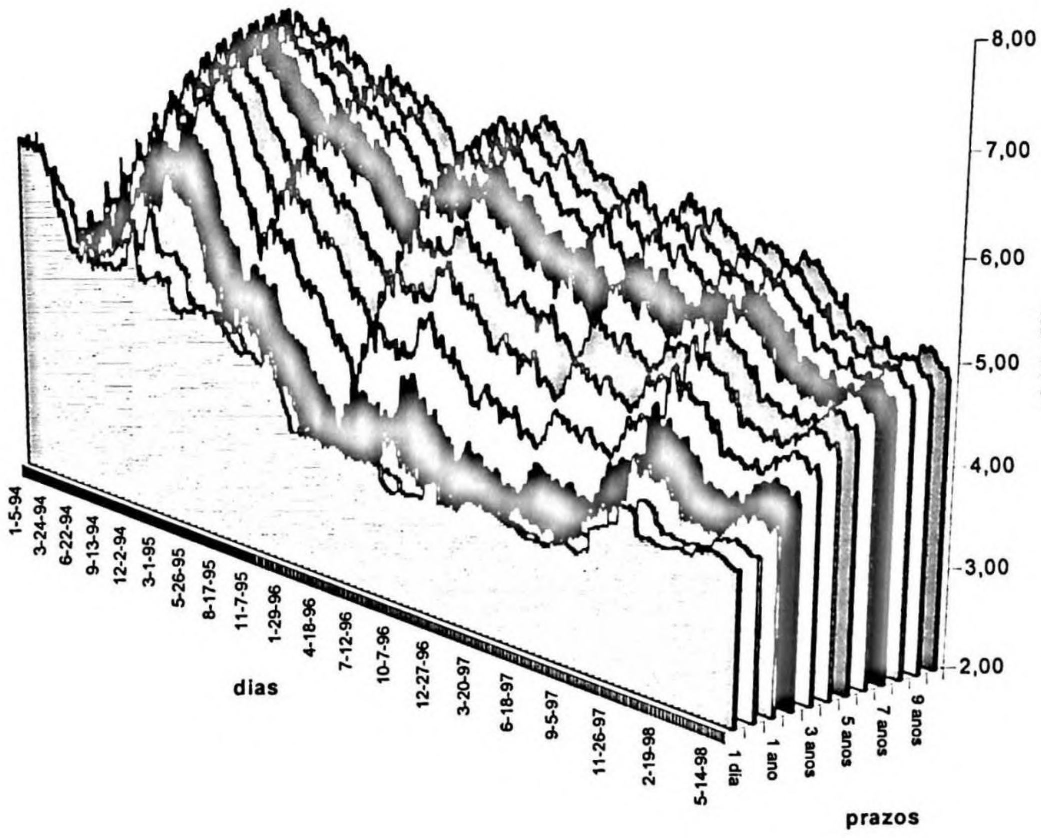


Gráfico III: EPTJ - Alemanha - 1993-1998



Os quadros 1 e 2 apresentam o comportamento das taxas de juro *spot* alemãs.

Quadro 1: Análise estatística das taxas de juro *spot*

maturidade	média	desvio-padrão	máximo	mínimo
1 dia	6,27	2,46	10,05	3,12
3 meses	6,13	2,42	9,87	3,02
1 ano	5,97	2,32	9,56	2,88
2 anos	6,08	2,09	9,35	3,24
3 anos	6,29	1,84	9,22	3,73
4 anos	6,50	1,63	9,22	4,20
5 anos	6,67	1,46	9,24	4,45
6 anos	6,80	1,34	9,25	4,56
7 anos	6,91	1,24	9,26	4,66
8 anos	7,00	1,16	9,27	4,74
9 anos	7,06	1,10	9,27	4,80
10 anos	7,12	1,06	9,27	4,86

Quadro 2: Diferenciais de taxas de juro *spot*

	média	desvio-padrão	máximo	mínimo
3 meses - 1 dia	-0,14	0,33	1,38	-1,18
1 ano - 1dia	-0,30	0,84	1,82	-2,81
5 anos - 1 dia	0,40	1,49	2,62	-2,77
7 anos - 1 dia	0,64	1,68	3,02	-2,59
10 anos - 1 dia	0,85	1,87	3,54	-2,48
5 anos - 1 ano	0,70	1,03	2,53	-1,08
10 anos - 1 ano	1,15	1,53	3,75	-1,57

A análise do quadro 1 sugere que, em média, a volatilidade diminui à medida que o prazo das taxas de juro aumenta (o desvio padrão da taxa de juro *spot* a 10 anos é cerca de 43% do desvio padrão da taxa de juro *spot* a 1 dia). A partir do quadro 2, verifica-se que a curva das taxas de juro *spot* apresenta uma alteração do sinal do declive para os prazos considerados. Assim, em média, a curva tem uma inclinação negativa nos prazos inferiores a um ano, com um diferencial de -0,3 pontos percentuais, e uma inclinação positiva para prazos superiores, de cerca de 1,15 pontos percentuais entre a taxa de juro *spot* a 10 anos face a 1 ano. Este aspecto pode ser confirmado a partir da análise dos gráficos II e III, onde se observa que a taxa de juro *spot* instantânea apresenta, em média, níveis superiores à taxa de juro *spot* a 1 ano.

Da análise do gráfico I observa-se que a taxa de juro *spot* instantânea apresenta uma tendência de decréscimo desde 1992. Após o período de 1992 a variação na taxa de juro, medida pela primeira diferença, é praticamente nula. Pelo que, o decréscimo do nível da taxa de juro indicia uma redução da volatilidade dos acréscimos da taxa de juro.

No quadro 3, apresenta-se a matriz de correlação entre as diferentes taxas de juro *spot*.

Quadro 3: Correlação das taxas de juro *spot*

	1 dia	3 meses	1 ano	2 anos	3 anos	4 anos	5 anos	6 anos	7 anos	8 anos	9 anos	10 anos
1 dia	1,000	0,991	0,940	0,897	0,871	0,849	0,827	0,803	0,779	0,754	0,731	0,708
3 meses		1,000	0,977	0,946	0,925	0,905	0,884	0,861	0,837	0,814	0,790	0,768
1 ano			1,000	0,993	0,981	0,967	0,950	0,930	0,909	0,888	0,867	0,846
2 anos				1,000	0,997	0,989	0,976	0,961	0,944	0,926	0,908	0,889
3 anos					1,000	0,997	0,990	0,979	0,966	0,951	0,936	0,920
4 anos						1,000	0,998	0,991	0,982	0,971	0,958	0,945
5 anos							1,000	0,998	0,993	0,985	0,976	0,965
6 anos								1,000	0,998	0,994	0,987	0,980
7 anos									1,000	0,999	0,995	0,990
8 anos										1,000	0,999	0,996
9 anos											1,000	0,999
10 anos												1,000

A correlação das taxas de juro *spot*, para prazos menores, diminui com a maturidade. Todavia, as taxas de juro *spot* de longo prazo apresentam correlações positivas, muito perto de 1.

Na estimação da dinâmica da *forward* utilizaram-se séries mensais[34] da *forward* instantânea entre 1 mês a 1 ano.

[34] As séries mensais resultaram de uma média simples das observações diárias.

No modelo de *HJM* no caso em que apenas se considera um único factor de incerteza, as diversas taxas *forward* de diferentes maturidades encontram-se perfeitamente correlacionadas. De acordo com o quadro 4, as diferentes taxas *forward* apresentam, à semelhança das taxas de juro *spot*, correlações positivas próximas da unidade, sobretudo para prazos mais elevados.

Quadro 4: Correlação das taxas de juro *forward*

	1 mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses	7 meses	8 meses	9 meses	10 meses	11 meses	12 meses
1 mês	1,0000	0,9968	0,9876	0,9777	0,9722	0,9584	0,9483	0,9388	0,9300	0,9220	0,9146	0,9079
2 meses		1,0000	0,9969	0,9913	0,9876	0,9781	0,9705	0,9632	0,9562	0,9496	0,9435	0,9378
3 meses			1,0000	0,9985	0,9951	0,9907	0,9856	0,9804	0,9751	0,9701	0,9652	0,9606
4 meses				1,0000	0,9980	0,9967	0,9934	0,9897	0,9858	0,9818	0,9779	0,9741
5 meses					1,0000	0,9976	0,9951	0,9920	0,9886	0,9851	0,9816	0,9781
6 meses						1,0000	0,9994	0,9980	0,9960	0,9938	0,9913	0,9888
7 meses							1,0000	0,9996	0,9985	0,9970	0,9952	0,9932
8 meses								1,0000	0,9997	0,9988	0,9976	0,9962
9 meses									1,0000	0,9997	0,9991	0,9981
10 meses										1,0000	0,9998	0,9992
11 meses											1,0000	0,9998
12 meses												1,0000

Desta forma, existe alguma evidência empírica para a aplicação dos modelos de um só factor de incerteza.

De acordo com o quadro seguinte, conclui-se que, à semelhança das taxas de juro *spot*, a volatilidade das taxas de juro *forward* diminui com a maturidade. Este período em média é marcado por expectativas de descida das taxas de juro de curto prazo.

Quadro 5: Análise estatística das taxas de juro *forward*

maturidade	média	desvio-padrão	máximo	mínimo
1 mês	6,22	2,45	9,81	3,08
2 meses	6,14	2,44	9,71	2,98
3 meses	6,05	2,41	9,54	2,91
4 meses	6,00	2,40	9,48	2,86
5 meses	6,02	2,45	9,60	2,84
6 meses	5,96	2,39	9,36	2,83
7 meses	5,95	2,37	9,31	2,84
8 meses	5,95	2,34	9,35	2,87
9 meses	5,96	2,31	9,37	2,92
10 meses	5,97	2,28	9,37	2,98
11 meses	5,99	2,24	9,37	3,05
12 meses	6,02	2,20	9,36	3,12

3.5 *Estimação empírica*

O método de estimação GMM pressupõe que as séries utilizadas sejam estacionárias. Neste sentido, procedeu-se à análise estatística das séries das taxas de juro *forward* instantânea, em níveis e em primeira diferenças.

As taxas de juro *forward* instantânea, para prazos compreendidos entre 1 e 6 meses, rejeitam a um nível de significância de 10% a hipótese de não estacionaridade. Se, em alternativa, se retivesse o nível de significância de 5% a hipótese de não estacionaridade não era rejeitada. As séries das taxas de juro *forward* para prazos superiores aos 6 meses não rejeitam a hipótese de não estacionaridade, para qualquer nível de significância retidos. As séries da *forward* em primeiras diferenças são estacionárias.

A análise das funções de autocorrelação parcial, para as diferentes séries da *forward*, levou à inclusão de um termo desfasado para corrigir a presença de autocorrelação nas séries.

No caso do modelo *HJM* utilizou-se como vector de instrumento a constante e a taxa de juro *spot* instantânea, isto é, $[1, r_t]$.

Apresentam-se, em seguida, os resultados obtidos para os modelos de volatilidade constante e exponencial[35].

Quadro 6: Resultados da estimação GMM - modelo volatilidade constante

Modelo	σ	γ	χ^2 (*p-value*)
volatilidade constante	0,866	-1.053	51,377
desvios padrão	(0,000)	(-0.000)	(0,128)

Quadro 7: Resultados da estimação GMM - modelo volatilidade exponencial

Modelo	σ	γ	λ	χ^2 (*p-value*)
volatilidade exponencial	0,056	-13,481	4,997	52,868
desvios padrão	(0,002)	(-0,354)	(0,004)	(0,084)

Nota: Na estimação considerou-se Δt igual a um ano.

A análise dos resultados sugere que, para os níveis de significância usuais não se rejeita a hipótese nula, isto é, não há violação das hipóteses relativas às condições ortogonais nos dois modelos considerados.

35 As estimativas dos parâmetros σ_2 , λ_2 e γ obtidos no caso do modelo de dois factores não são estatisticamente diferentes de zero. Assim o choque aleatório que afecta principalmente as taxas *forward* no curto prazo não é significativo. A única fonte de incerteza estatisticamente significativa é o factor de volatilidade que afecta a curva no longo prazo, provocando deslocamentos paralelos da curva. Desta forma, o modelo de dois factores de volatilidade é estatisticamente equivalente ao modelo de volatilidade constante, tendo-se optado por não analisar este modelo.

Em relação ao modelo de volatilidade constante, a curva das *forward* sofre choques aleatórios atenuados por uma factor aproximadamente igual a 0,866. No modelo de volatilidade exponencial decrescente, o choque aleatório diminui com a maturidade sendo o factor de decréscimo de 5 pontos percentuais. Em ambos os modelos, as estimativas apresentam desvios-padrão muito reduzidos. Desta forma as estimativas são aproximadamente constantes, sendo estimadas com uma grande precisão.

3.6 *Análise dos resultados*

As equações 37 a 38 da dinâmica da *forward* foram aproximadas a partir dos parâmetros anteriormente estimados, admitindo choques aleatórios de média nula e desvio padrão igual à unidade. Este exercício permite aferir da qualidade do ajustamento do modelo aos dados observados.

O exercício foi efectuado para três meses da amostra: Dezembro de 1989, Novembro de 1995 e Junho de 1998. Os choques aleatórios foram aproximados por 500 simulações numéricas obtidas a partir de distribuições normais, com média igual a zero e variância igual a 1, considerando o valor inicial igual ao valor observado para o mês anterior ao mês em análise. Para os três meses considerados obtiveram-se para cada maturidade da *forward* 500 estimativas diferenciadas. Retiraram-se da análise todos valores inferiores ao 5º percentil e superiores ao 95º percentil. Os valores retidos permitiram a construção de um intervalo de confiança a 90%, correspondendo o limite inferior e superior ao valor mínimo e máximo obtido da simulação. Este procedimento permite analisar se o intervalo dos valores simulados contém os valores observados, a um nível de confiança igual a 90%.

De acordo com o referido no capítulo 2, existe uma relação biunívoca entre taxas de juro *forward* e a estrutura temporal de taxas de juro. Desta forma, ao analisar-se as taxas *forward* analisa-se implicitamente a correspondente EPTJ.

Os resultados obtidos para Dezembro de 1989 apresentam-se nos quadro e gráficos seguintes.

Quadro 8: Taxas de juro *forward* observadas e estimadas para Dezembro de 1989

	1mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses	7 meses	8 meses	9 meses	10 meses	11 meses	12 meses
observada	8,15	8,13	8,11	8,09	8,07	8,05	8,03	8,01	7,99	7,97	7,95	7,93
vol constante												
valor máximo	8,41	8,44	8,47	8,48	8,48	8,48	8,47	8,46	8,44	8,42	8,39	8,37
valor mínimo	7,60	7,63	7,66	7,67	7,67	7,67	7,66	7,65	7,63	7,61	7,58	7,56
vol exponencial												
valor máximo	8,04	8,08	8,11	8,12	8,12	8,11	8,10	8,08	8,06	8,03	8,00	7,97
valor mínimo	8,01	8,06	8,09	8,11	8,11	8,11	8,10	8,08	8,06	8,03	8,00	7,97

Gráfico IV: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. constante para Dezembro 1989

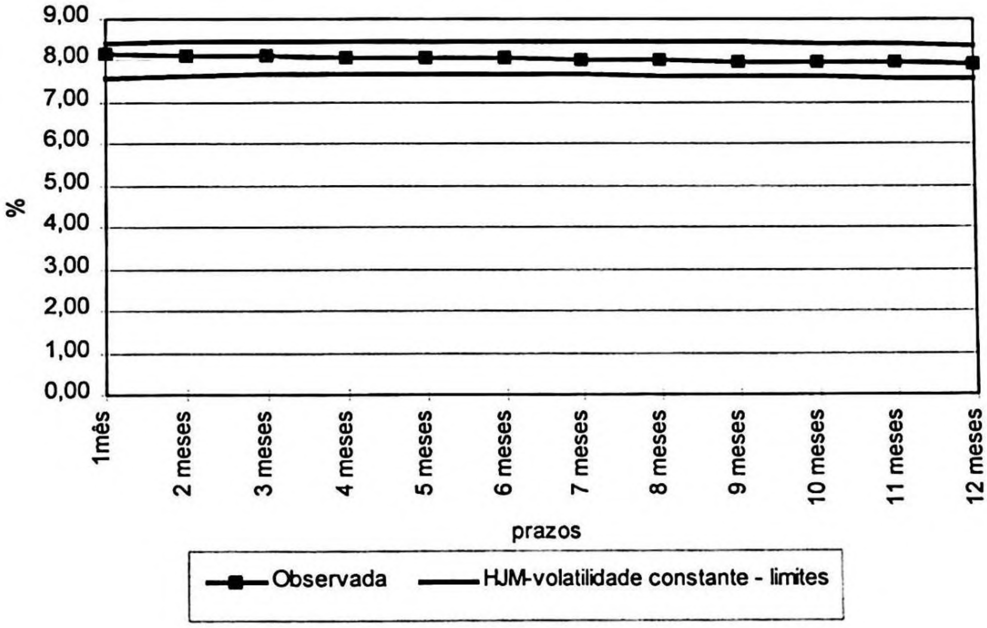
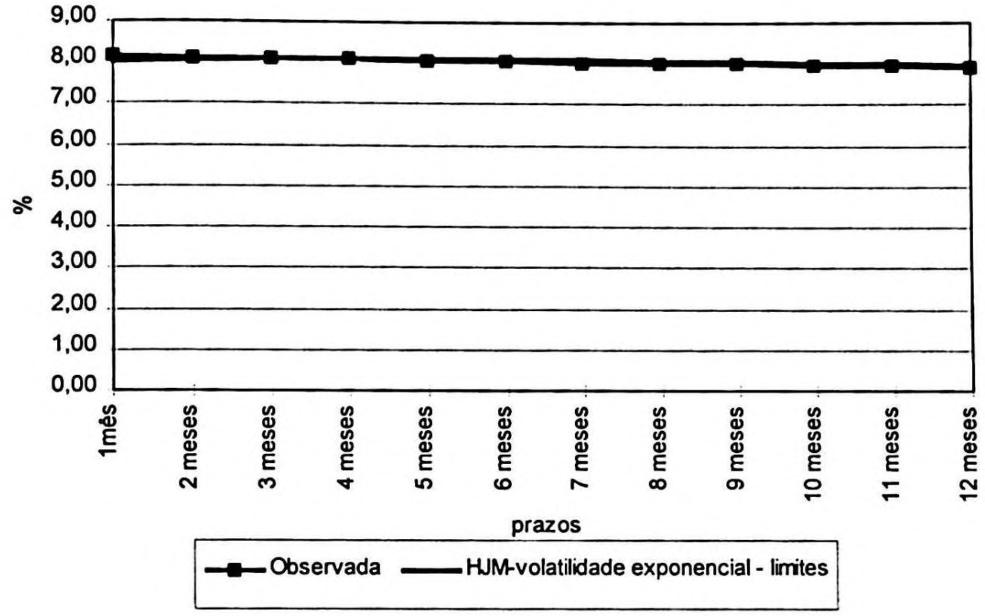


Gráfico V: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. exponencial para Dezembro 1989



No mês de Dezembro de 1989, a estrutura temporal das taxas *forward* observada apresentava um inclinação negativa para todos os prazos, traduzindo expectativas de decréscimo das taxas de juro de curto prazo.

A estrutura de *forward* obtida a partir de qualquer um modelos, tem uma inclinação positiva, para as maturidades inferiores a 6 meses. Para maturidades superiores a 6 meses, as curvas estimadas têm uma inclinação negativa, coerente com a observada.

Os intervalos construídos para o modelo de volatilidade constante contém os valores observados. No caso do modelo exponencial o intervalo obtido tem uma amplitude reduzida, subestimando ligeiramente os níveis da *forward* nas maturidades inferiores a 3 meses e sobrestimando os mesmos para maturidades superiores a esta.

O modelo de volatilidade constante comete erros, em valor absoluto, superior a 30 pontos base, para qualquer das maturidades consideradas. O erro cometido pelo modelo exponencial é de apenas 4 a 7 pontos base, para todas as maturidades. Os intervalos estimados apresentam expectativas de decréscimo nas taxas de juro o que é compatível com o observado.

Quadro 9: Taxas de juro *forward* observadas e estimadas para Novembro de 1995

	1mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses	7 meses	8 meses	9 meses	10 meses	11 meses	12 meses
observada	3,98	3,80	3,67	3,57	3,51	3,47	3,47	3,48	3,51	3,56	3,63	3,71
vol constante												
valor máximo	4,41	4,26	4,16	4,10	4,06	4,06	4,08	4,11	4,17	4,25	4,33	4,42
valor mínimo	3,60	3,45	3,35	3,29	3,25	3,25	3,27	3,30	3,36	3,44	3,52	3,61
vol exponencial												
valor máximo	4,05	3,90	3,80	3,73	3,70	3,69	3,70	3,74	3,79	3,86	3,94	4,03
valor mínimo	4,01	3,88	3,79	3,72	3,69	3,68	3,70	3,74	3,79	3,86	3,94	4,03

Gráfico VI: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. constante para Outubro de 1995

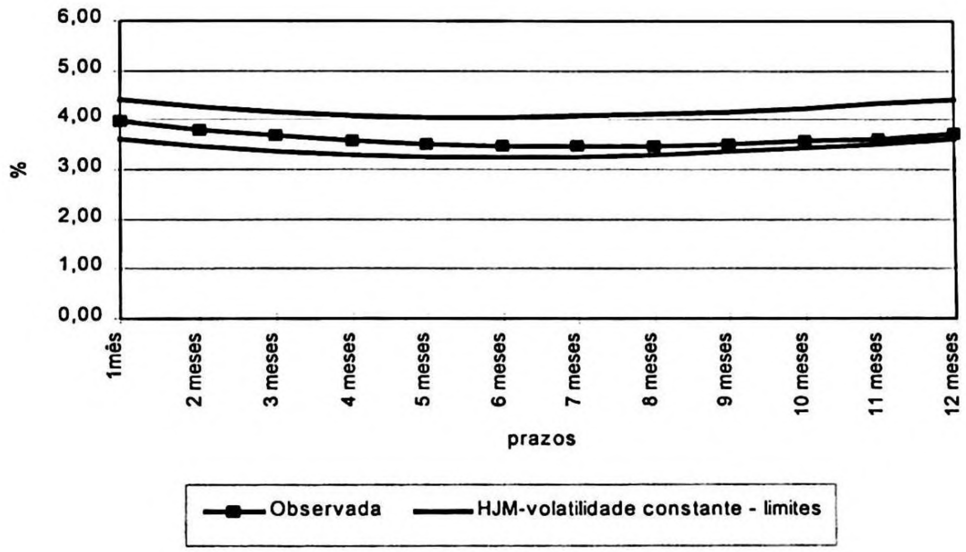
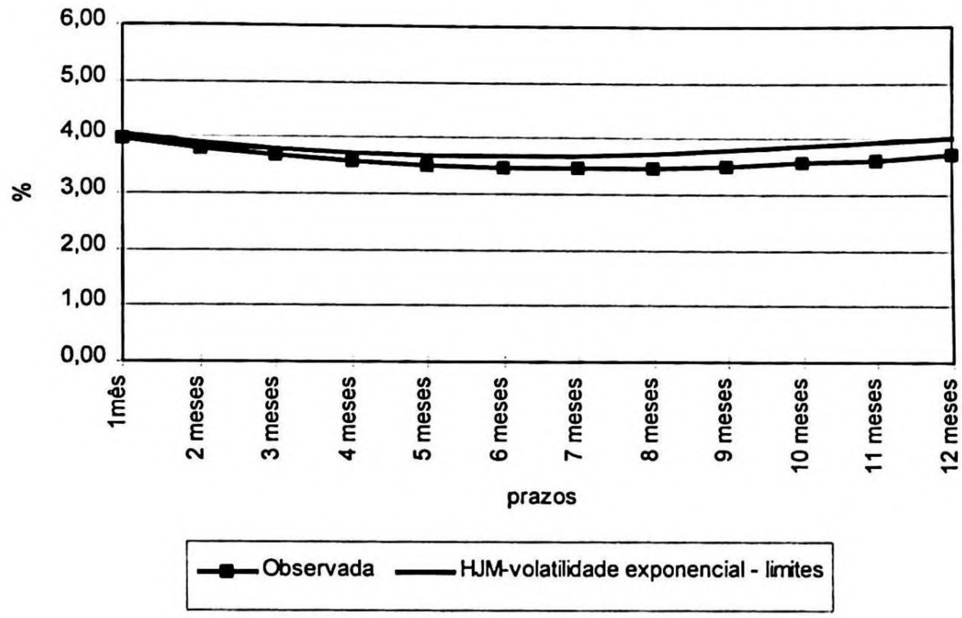


Gráfico VII: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. exponencial para Outubro 1995



No mês de Outubro de 1995, a EPTJ observada tem um ponto de inflexão que é captado pelos modelos. Assim até aos 6 meses, observa-se expectativas de decréscimo nas taxas de juro. Pelo contrário, para prazos superiores aos 6 meses a estrutura das taxas de juro *forward* apresenta expectativas de subida das taxas de juro de curto prazo.

De forma análoga ao observado para Dezembro de 1989, o modelo de volatilidade constante permite obter um intervalo de confiança que contém os valores observados. Por outro lado, o intervalo de amplitude negligenciável, obtido a partir do modelo de volatilidade exponencial não contém os dados observados. Na realidade, os níveis são neste modelo sobrestimados para todas as maturidades.

O modelo de volatilidade exponencial é o que apresenta o melhor ajustamento aos dados observados, subestimando o nível das taxas de *forward* (cerca de 32 pontos base para a maturidade 12 meses). Para o modelo de volatilidade constante, o erro em valor absoluto cometido é, em média, superior ao erro cometido pelo modelo exponencial.

Quadro 10: Taxas de juro *forward* observadas e estimadas para Junho de 1998

	1mês	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses	7 meses	8 meses	9 meses	10 meses	11 meses	12 meses
observada	3,53	3,58	3,63	3,67	3,72	3,76	3,81	3,85	3,90	3,94	3,98	4,03
vol constante												
valor máximo	3,93	3,98	4,03	4,08	4,13	4,18	4,23	4,28	4,33	4,38	4,43	4,48
valor mínimo	3,12	3,17	3,22	3,27	3,32	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67
vol exponencial												
valor máximo	3,56	3,62	3,67	3,72	3,76	3,81	3,86	3,90	3,95	3,99	4,04	4,08
valor mínimo	3,46	3,53	3,59	3,65	3,71	3,76	3,80	3,85	3,90	3,94	3,98	4,03

Gráfico VIII: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. constante para Junho 1998

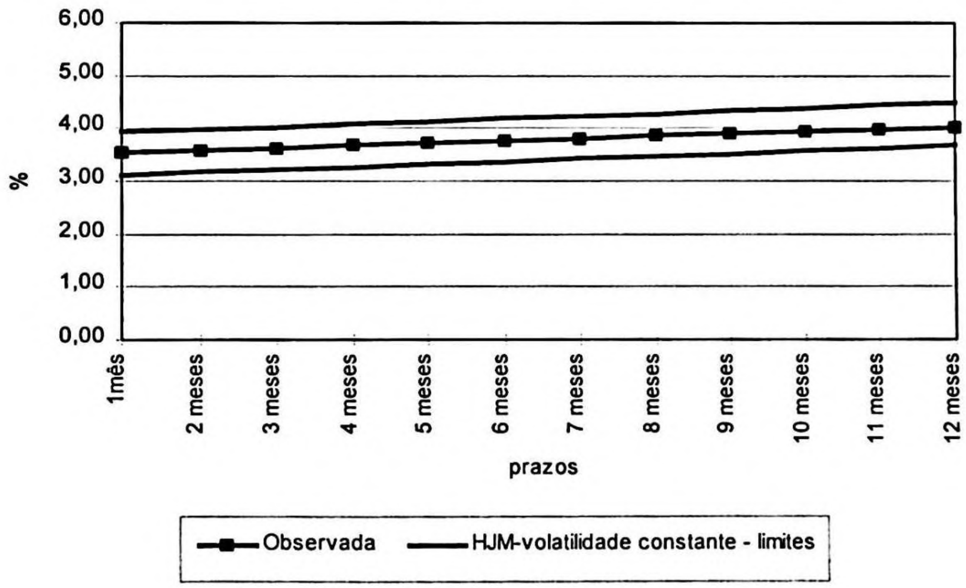
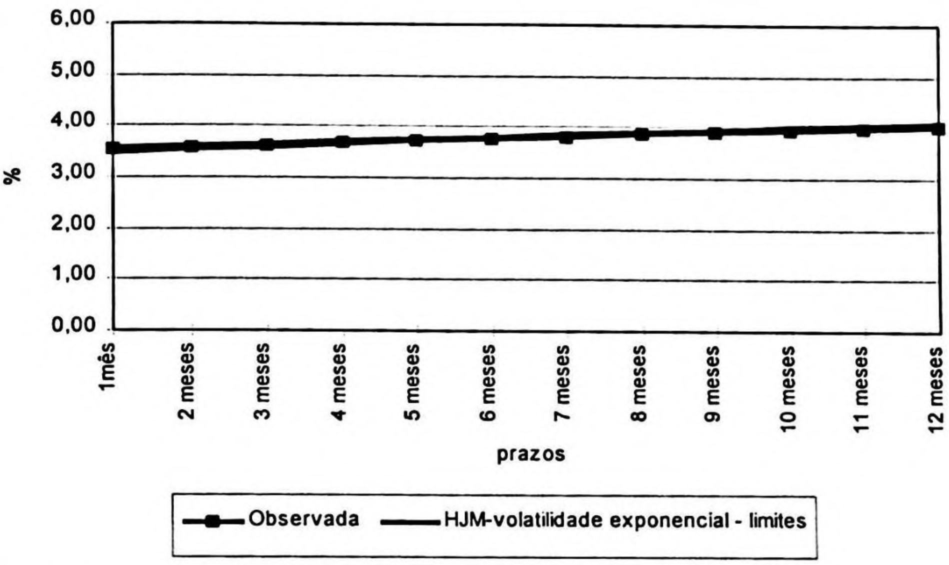


Gráfico IX: Curva da taxa de juro *forward* observada e estimada a partir do modelo HJM - vol. exponencial para Junho 1998



No mês de Junho de 1998, a EPTJ encontrava-se positivamente inclinada, traduzindo expectativas de subida da taxa de juro de curto prazo.

Para os modelos considerados, os intervalos de confiança contém os valores observados. O modelo exponencial é o que comete o menor erro, cerca de 5 pontos percentuais no máximo para o prazo a 12 meses.

Em conclusão, as simulações efectuadas demonstram que qualquer uma das duas formas funcionais de volatilidade apresenta expectativas de aumentos nas taxas de juro superiores aos observados, quando a curva tem uma inclinação positiva, traduzindo expectativas de decréscimo inferiores às observadas, quando a estrutura apresenta uma inclinação negativa. Os intervalos de confiança obtidos no caso dos modelos de volatilidade constante contêm os valores observados. No modelo de volatilidade exponencial os intervalos obtidos têm uma amplitude reduzida, contendo apenas em um dos três casos analisados, os valores observados. Deste modo, em

90% dos casos os intervalos obtidos contêm os verdadeiros valores. Acresce que, o modelo de volatilidade exponencial comete erros nos níveis da *forward* negligenciáveis.

3.7 Conclusão

Ao longo deste capítulo, utilizando o método GMM, estimaram-se os parâmetros do processo de difusão das taxas de juro de *forward* instantânea. O teste de Hansen (1982) não rejeitou, a um nível de significância de 10%, as condições ortogonais impostas. As estimativas são estatisticamente significativas e apresentam o sinal correcto.

Procedeu-se, em seguida, à análise dos modelos comparando a EPTJ observada, para a Alemanha, no período compreendido ente Novembro de 1989 e Junho de 1998, com a implícita nas diferentes dinâmicas da *forward*.

Consideraram-se três formas funcionais determinísticas para a volatilidade da *forward*: volatilidade constante, exponencialmente decrescente e de dois factores. Todavia, no modelo de dois factores o segundo factor explicativo dos movimentos da EPTJ no curto prazo não é estatisticamente significativo, não se procedendo a qualquer outro tipo de análise. A estrutura de taxas *forward*, de acordo com os resultados obtidos, apenas é explicada por um único factor de volatilidade.

Os erros médios cometidos no nível da *forward* são reduzidos (o valor máximo para o erro, nos dois modelos, é de 70 pontos base). O modelo exponencial comete, em média, os menores erros.

4. Conclusões

A valorização dos activos financeiros e dos derivados recorrendo a argumentos de arbitragem foi a perspectiva seguida ao longo deste trabalho. No primeiro capítulo, apresentou-se a forma como o processo dos preços de um activo financeiro é convertido num martingalo. Na medida de probabilidade neutral ao risco, a variação média do preço do activo, no caso do processo ser modelado por um processo estocástico exponencial, coincide com a do activo sem risco. Uma segunda conclusão desse capítulo é que na medida neutral ao risco, o valor de qualquer carteira constituída a partir destes activos coincide em cada momento com o valor do derivado, inviabilizando qualquer oportunidade de arbitragem. Adicionalmente, o mercado é completo se existir apenas uma única medida neutral ao risco.

No segundo capítulo, analisou-se o mercado obrigacionista onde são apenas transaccionados obrigações de cupão zero, emitidas pelo estado, e seus derivados. Recorrendo aos conceitos introduzidos no capítulo anterior, pretendia-se determinar preços de arbitragem para as obrigações de cupão zero de diversas maturidades. Contudo, verificou-se que este mercado era incompleto, uma vez que uma obrigação poderia ser teoricamente encarada como um activo ou um derivado. Desta forma, o único activo exógeno disponível neste mercado era o numerário, o qual era um martingalo em relação a *n* medidas de probabilidade. Neste contexto, analisou-se como as obrigações de cupão zero eram valorizadas num contexto de ausência de arbitragem.

A abordagem do modelo *HJM* diferencia-se de abordagens anteriores, como por exemplo a de equilíbrio, na medida em que:

⇒ é imposto como ponto inicial da dinâmica da *forward* toda a informação contida nesse momento na EPTJ. Desta forma, os preços teóricos coincidem, por construção, com os preços observados no mercado no momento inicial, sendo simultaneamente determinada a medida neutral ao risco;

⇒ tem implícito um processo para a taxa de juro de curto prazo instantânea que pode comportar vários factores que influenciam a EPTJ;

⇒ não é necessário especificar de forma exógena o prémio de risco. Este é determinado no próprio processo de valorização dos activos, não implicando o conhecimento das preferências dos consumidores;

⇒ são especificados de forma conjunta o processo da *forward*, dos preços das obrigações e do prémio de risco. Especificando de forma arbitrária os parâmetros do processo da *forward* existe apenas um único prémio de risco de mercado que elimina quaisquer oportunidades de arbitragem entre as obrigações de cupão zero de diferentes maturidades, e entre estas e o numerário;

⇒ qualquer derivado pode ser facilmente valorizado, sendo o seu preço obtido a partir de condições suficientes que excluem oportunidades de arbitragem. Acresce que, os derivados são directamente valorizados na medida neutral ao risco, sendo apenas necessário o conhecimento da forma funcional da volatilidade do processo da *forward*.

No terceiro capítulo, utilizando o Método dos Momentos Generalizado, estimaram-se os parâmetros do processo de difusão da taxa de juro *forward*. A um nível de significância de 10%, nenhuma das condições ortogonais impostas pelos modelos é rejeitada. As estimativas são estatisticamente diferentes de zero e apresentam o sinal correcto. Os resultados obtidos evidenciam que a estrutura das *forward* é explicada por um único factor de volatilidade. Em média o modelo *HJM*, independentemente da forma funcional considerada, comete erros relativamente reduzidos no nível da *forward*.

A abordagem preconizado pelo modelo *HJM*, para além das vantagens teóricas apresentadas, parece captar, em termos empíricos, as principais características da EPTJ observada.

Anexo 1 - Lema de Itô

Sendo X um processo estocástico, verificando a equação diferencial $dX_t = \sigma_t \, dW_t + \mu_t \, dt$ e *f* uma função continua e diferenciável, então $y = f(X_t)$ é também um processo estocástico e é dado pela seguinte expressão:

$$dY_t = \left(\sigma_t f'(X_t)\right) dW_t + \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)\right) dt.$$

Bibliografia

Abken, P. A. (1993), Generalized Method of Moments Tests of Forward Rate Processes, *Federal Reserve Bank of Atlanta*, working-paper 93-7.

Amin, K. I. e A. J. Morton (1994), Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models, *Journal of Financial Economics*, 35, pp. 141-180.

Anderson, N., F. Breedon, M. Deacon, A. Derry e G. Murphy (1997), Estimating and Interpreting the Yield Curve, John Wiley & Sons.

Baxter, Martin W. (1995), General Interest-Rate Models and the Universality of HJM, in M. A. H. Dempster e S. R. Pliska (ed), pp. 315-335, Publications of the Newton Institute.

Baxter, M. e A. Rennie (1996), Financial Calculus: an Introduction to Derivative Pricing, Cambridege University Press.

Black, F. e M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

Bliss, R. e D. Smith (1998), The Elasticity of Interest Rate Volatility: Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders Revisited, *Federal Reserve Bank of Atlanta*, working-paper 97-13a.

Björk, T. (1996), Interest Rate Theory, in: Financial Mathematics, W. J. Runggaldier (ed), Bressanone: Springer.

Brown, J. S. e P. H. Dybvig (1986), The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of Term Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, 41, pp. 617-632.

Brown, R. H. e S. M. Schaefer (1994), The Term Structure of Real Interest Rates and Cox, Ingersoll, and Ross Model, *Journal of Financial Economics*, 35, pp. 3-42.

Brown, R. H. e S. M. Schaefer (1996), Ten Years of The Real Term Structure: 1984-1994, *The Journal of Fixing Income*, Março 1996.

Cassola, N. e J. B. Luís (1996), The Term Structure of Interest Rates: a Comparison of Alternatives Estimation Methods With an Application to Portugal, *Banco de* Portugal, working-paper 17-96.

Cassola, N., J. Nicolau e J. Sousa (1997), Econometric Modelling of the Short-Term Interest Rate: An Application to Portugal, *Banco de Portugal*, working-paper 5-97.

Chan, K. C., A. Karolyi, F. A. Longstaff e A. B. Sanders (1992), An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *Journal of Finance*, 47, pp. 1209-1227.

Cox, J.C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross (1985), A theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, pp. 385-407.

Dahlquist, Magnus (1996), On Alternative Interest Rate Processes, *Journal of Banking & Finance*, 20, pp. 1093-1119.

Duffie, Darrell (1996), Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press.

Enders, Walter (1995), Applied Econometric Time Series, John Wiley & Sons.

Flesaker, Bjorn (1993), Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, pp.483-495.

Greene, Willim (1993), Econometric Analysis, Prentice Hall.

Hall, Alastair (1993), Some Aspects of Generalized Method of Moments Estimation, in: G. S. Maddala, C. R. Rao e H. D. Vinod (eds), *Handbook of Statistics*, Vol II, Elsivier Science Publishers.

Hansen, L. (1982), Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, 50, pp 1029-1054.

Heath, D., R. Jarrow, A. Morton, (1992), Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Ecometrica*, 60, pp. 77-105.

Ho, T. S., e S. Lee (1986), The Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1028.

Merton, R. (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics*, 4, pp. 141-183.

Musiela, M. e M. Rutkowaki (1997), Martingale Methods in Financial Modelling, Springer.

Neftci, Salih (1996), An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press.

Ogaki, M. (1993), Generalized Method of Moments: Econometric Applications, in: G. S. Maddala, C. R. Rao e H. D. Vinod (eds), *Handbook of Statistics*, Vol II, Elsivier Science Publishers.

Pliska, Stanley R. (1997), Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models, Blackwell Publishers.

Raj, M., A. B. Sim e D. C. Thurston (1997), A Generalized Method of Moments Comparison of The Cox-Ingersoll-Ross and Heath-Jarrow-Morton Models, *Journal of Economics and Business*, 49, pp. 169-192.

Rebonato, R. (1996), Interest-Rate Option Models: Understanding, Analysing and Using Models for Exotic Interest-Rate Options, John Wiley & Sons.

Varian, H. R. (1987), The Arbitrage Principle in Financial Economics, *Journal of Economic Perspectives*, 1, pp. 55-72.

Vasicek, O. (1977), An Equilibrium Characterisation of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.