Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Técnica de Lisboa

Utilização da Programação Linear para a Selecção de Projectos de Investimento
Aplicação a uma Sociedade de Capital de Risco

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

João José Quelhas Mesquita Mota

Lisboa
1993

Instituto Superior de Economia e Gestão
Universidade Técnica de Lisboa

Utilização da Programação Linear para a Selecção de Projectos de Investimento

Aplicação a uma Sociedade de Capital de Risco

João José Quelhas Mesquita Mota

Lisboa
1993

AGRADECIMENTOS

- Ao **Prof. Dr. Manuel Ramalhete** pelo valioso apoio e orientação.

- Ao **Prof. Doutor Rómulo Rodrigues**, responsável pela disciplina que venho leccionando no Instituto Superior de Economia e Gestão, o seu encorajamento para o prosseguimento da minha carreira académica.

- Ao **Prof. Doutor Mota de Castro** pela disponibilidade e aconselhamento na fase inicial deste trabalho.

- Ao **Dr. Jaime Maciel**, director da Capital de Risco, pela disponibilização da informação e aconselhamento para a elaboração do trabalho.

- A todos os **colegas e amigos** que ajudaram de alguma forma na concretização deste trabalho.

ÍNDICE

2. APLICAÇÃO A UM CASO

3. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO

INTRODUÇÃO

A temática da Selecção de Projectos de Investimento, principalmente no que se refere à utilização de critérios/métodos habitualmente designados como 'tradicionais', tem sido tratada exaustivamente em diversos textos.

No entanto, e no âmbito do mesmo tema, o recurso à Programação Matemática (PM) em geral e mesmo à Programação Linear (PL), em particular, tem tido uma divulgação mais restrita.

A aplicação de modelos de PL já é habitual ao nível do sistema produtivo de algumas empresas, nomeadamente em indústrias de processo, em particular nas indústrias químicas e de refinação de petróleos.

Dado tratar-se de uma técnica de optimização bastante aperfeiçoada e flexível, proporcionando, quer através da análise das variáveis primais quer através da análise das variáveis duais, informação útil para a tomada de decisão, a PL tem sido aplicada a outros sectores das empresas.

Assim, têm sido propostos e utilizados, com bons resultados práticos, modelos de selecção/programação de investimentos e modelos de planificação financeira[1]. Estes últimos são mais abrangentes que os primeiros na medida em que pretendem reproduzir a actividade financeira da empresa considerando o problema da programação de investimentos como uma parte da problemática financeira geral da mesma.

Embora seja difícil estabelecer um fronteira entre os dois tipos de abordagens, estas surgem habitualmente associadas às expressões anglo-saxónicas 'Capital Budgeting' e 'Corporate Financial Planning', respectivamente.

A utilização de funções lineares, para exprimir o objectivo a optimizar e os diversos tipos

[1]Entre os primeiros trabalhos nesta área de investigação refira-se o modelo desenvolvido por A.Charnes, W. Cooper e M.Miller, "Application Linear Programming to Financial Budgeting and the Costing of Funds", The Journal of Business, vol. 32, janeiro 1959, pp. 20-46.

de restrições, poderá constituir a principal dificuldade na modelização dos problemas, para além de que a formulação matemática dos mesmos constituir frequentemente uma abordagem delicada, por forma a não desfigurar a sua natureza.

Apesar dos diversos tipos de aplicações práticas, realizadas no âmbito da Investigação Operacional, existe ainda um certo desconhecimento, ao nível empresarial, relativamente às potencialidades dos modelos e metodologias desenvolvidas nesse âmbito.
Na origem desta situação[1] poderá estar, para além do desconhecimento destas técnicas, uma insuficiente informação relativamente à aplicabilidade desses modelos e metodologias e/ou um desajustamento entre os produtos desenvolvidos e as necessidades do mercado alvo.

Nesta perspectiva, o presente trabalho inclui a aplicação de um modelo de PL a uma carteira de projectos de investimento, constituida por projectos apresentados a uma Sociedade de Capital de Risco (SCR), com a finalidade de se obter uma indicação das propostas de investimento nas quais a SCR deveria participar[2]. Procuramos também, desta forma, divulgar, junto da SCR, uma técnica poderosa e de utilidade indiscutível na preparação das suas decisões empresariais, interrelacionando todos os projectos.

Assim, na secção 1.1 referem-se inicialmente algumas classificações de investimento , que serão usadas ao longo da exposição, e a existência de racionamento de capital com origem quer interna quer externa.

Em seguida, na secção 1.2, será feita uma breve referência aos critérios/métodos tradicionais de selecção, com o objectivo de enquadrar o recurso à PL.

Na secção 1.3, serão expostos e analisados alguns modelos de PL, considerando-se

---

[1]Explicação sugerida por Arthur, J. L., "Rhetoric or Results?", OR/MS TODAY, abril 1992, pag.10.

[2]Com este objectivo, e tendo por base o mesmo caso, será igualmente aplicado um modelo de PM integrando o factor risco, no âmbito do Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, na tese em fase de elaboração pelo Dr. José Porfírio.

sucessivamente novas variáveis e restrições por forma a possibilitar uma maior aderência dos mesmos à realidade.

Finalmente, no capítulo 2 será feita a apresentação do caso, formalização do problema e análise dos resultados obtidos.

1 SELECÇÃO DE PROJECTOS DE INVESTIMENTO

1.1 DECISÃO DE INVESTIMENTO

A decisão de investir poderá ser encarada como o termo de um processo que consiste em submeter a(s) proposta(s) de investimento a uma série de análises nas quais aquela(s) são constantemente postas em causa. Essa decisão poderá ocorrer em diferentes níveis da estrutura organizacional dependendo, nomeadamente, dos montantes a investir e dos tipos de investimento.

Estas decisões podem revelar-se de vital importância na medida em que, para além de dificilmente reversíveis, poderão ter um impacto significativo na forma como a empresa alcança ou não os seus objectivos, condicionando o seu desenvolvimento futuro, e porque poderão resultar na afectação, por períodos relativamente longos, de montantes significativos[12].

Assim, dada a grande heterogeneidade das propostas de investimento, apresentando diferentes características, e a sua influência na escolha dos critérios a utilizar com vista à sua selecção, como se irá ver posteriormente, deverá efectuar-se uma classificação dos diversos projectos de investimento.

Nessa medida, iremos expor algumas dessas classificações. Em seguida, referir-se-á um aspecto relevante para a valorização dos projectos e que motivou o recurso à Progamação Linear (PL), com a finalidade de apoiar a tomada de decisão, que consiste na consideração da existência de recursos escassos, capital e outros, em diversos períodos.

1.1.1 NOÇÃO E TIPOS DE INVESTIMENTOS

Para Andrés S. Suárez [27] a empresa poderá ser definida, do ponto de vista económico, como uma sucessão no tempo de projectos de investimento e financiamento, na medida em que para satisfazer a procura é necessário efectuar diversos tipos de investimentos, tais como, bens de equipamento, naves industriais, activos circulantes, etc.

"A definição mais geral que se pode dar ao acto de investir é que, mediante o mesmo, tem lugar a troca de uma satisfação imediata e certa a que se renuncia, contra uma esperança que se adquire e da qual o bem investido é o suporte"[1].

Assim, o investimento constitui uma escolha entre presente e futuro, implicando sempre uma afectação de recursos, esperando obter determinados benefícios num período de tempo mais ou menos longo.

Referiremos aqui três classificações de projectos de investimento, dada a sua diversidade, a que recorreremos durante a exposição, e que têm em consideração, relativamente aos projectos, o seu objectivo, a cronologia das receitas e despesas , a natureza das relações recíprocas existentes entre os diversos projectos e, finalmente a sua (in)divisiblidade.

Tendo em consideração o seu objectivo, Joel Dean[2] considera quatro tipos de investimento:

- **Investimentos de Substituição**, que consistem básicamente em substituir equipamentos obsoletos por outros cujas características técnicas, capacidade de produção e nível dos custos de produção, se mantém inalterados;

---

[1] MASSÉ, Pierre, La Elección De Las Inversiones, obra citada, cap. I,p. 1.

[2] citado por GALESNE, Alain, obra citada, p. 61.

- **Investimentos de Modernização**, destinados essencialmente a reduzir os custos de produção;

- **Investimentos de Expansão**, permitindo que a empresa faça face a um aumento futuro da procura;

- **Investimentos Estratégicos**, que têm por objectivo, não o aumento directo da rendibilidade da empresa, mas promover as condições favoráveis à sua prosperidade.

Segundo a cronologia das receitas e despesas dos projectos de investimento, estes poderão ser considerados como:

- **Convencionais**, quando o projecto apresenta um ou mais períodos de despesas que antecedem sempre um ou mais períodos de receitas;

- **Não Convencionais**, no caso contrário, isto é, receitas e despesas surgem invertidas ou intercaladas no tempo.

A classificação baseada nas inter-relações entre projectos, referida por Lorie e Savage [20] e Weingartner [29], tem em vista classificar os projectos em **Independentes** ou **Dependentes**.

Um projecto diz-se **Independente** quando a sua rentabilidade não é sensivelmente afectada pela realização ou não de outro(s) projecto(s).

Em caso contrário, os projectos dizem-se **Dependentes**, podendo ser:

- **Mutuamente Exclusivos** - se a aceitação de um ou mais projectos determina a exclusão de outro(s);

- **Contingentes**, quando a realização de um projecto exige a realização prévia de outro(s);

- **Complementares**, quando a aceitação/rejeição de um projecto implica idêntica decisão para outro projecto.

Este tipo de classificação vai revelar-se importante quer na utilização dos métodos tradicionais, quer na definição de algumas restrições nos modelos de PL.

Finalmente, a determinados tipos de projectos associa-se normalmente um carácter indivisível, o que acontece com frequência nos projectos industriais. A divisibilidade é uma característica normalmente associada a investimentos financeiros; a aquisição de uma participação noutras empresas está frequentemente nestas condições.

1.1.2 O RACIONAMENTO DE CAPITAL

A realização de investimentos implica a utilização de recursos escassos, nomeadamente, capital, pessoal com certa qualificação técnica, matérias primas, etc. Por uma questão de simplicidade, e apesar do montante máximo a investir poder ser determinado pela escassez de outros recursos, esta problemática é geralmente referida como 'racionamento de capital'. Os critérios tradicionais de selecção de projectos pressupõem, entre outros, como iremos ver, a existência de montantes ilimitados de fundos disponíveis para investimento (mercados perfeitos).

No entanto, e frequentemente, as empresas avaliam um conjunto de projectos de investimento no âmbito de um programa de investimentos a realizar num determinado horizonte temporal, tendo em vista tomar uma decisão relativamente aos projectos que se deveriam implementar. Esta valorização conjunta dos projectos deve-se à existência de racionamento num ou mais períodos, quer de capital quer de outros recursos, constituindo, nessa medida, uma das principais motivações, como posteriormente se irá ver, para a utilização das técnicas de programação matemática, por forma a afectar, de forma óptima, esses recursos entre projectos que competem para a sua utilização.

Na realidade, o racionamento constitui uma regra e não a excepção, destinguindo-se frequentemente dois tipos de racionamento: o **racionamento externo**, com origem no exterior da empresa, e o racionamento auto-imposto ou **racionamento interno**.

O primeiro, resultante das imperfeições de mercado, poderá ser mais ou menos significativo dependendo, nomeadamente, da reputação da empresa no mercado, da existência de uma política de informação junto do público, do nível de desenvolvimento do mercado de capitais, etc.

Assim, as empresas não se deparam todas com idênticas oportunidades de financiamento no mercado para os seus projectos de investimento, como não são iguais as taxas a que podem colocar os fundos [4;14]. Por outro lado, as operações no mercado de capitais resultam

numa série de custos relativamente mais altos quanto menor for o volume das transacções, pelo que as pequenas empresas suportam, em termos relativos, custos mais altos de financimento do que as grandes empresas [4].
Em Portugal, e muito recentemente, o acesso ao crédito bancário, no âmbito da politica monetária adoptada, foi bastante limitado, dada a imposição de limites de crédito, levando à não satisfação de alguns pedidos devido à impossibilidade de ultrapassar os plafonds fixados para as diversas entidades fornecedoras de fundos.

No segundo tipo de racionamento - racionamento interno - algumas empresas limitam, apesar da possibilidade de recorrer a fundos no exterior, os montantes a investir em novos projectos.
Esta situação pode ocorrer em empresas nas quais a perservação do controlo tem um papel importante, nomeadamente em pequenas empresas.
Noutros casos, o racionamento é imposto porque a realização de demasiados investimentos num determinado período pode originar uma diminuição da perfomance da organização dadas as suas limitações, quer organizacionais quer relativamente às disponibilidades de resursos técnicos e outros. Nessa medida o racionamento constitui um método de controlar a taxa à qual a empresa se expande.

Nas grandes empresas, com uma estrutura organizacional divisionalizada, por produtos e/ou mercados, o racionamento interno constitui uma forma de afectar os fundos entre divisões concorrentes para a obtenção dos mesmos.
Desta forma, procura-se manter igualmente um controlo, tendo em consideração a estratégia definida para a organização, relativamente aos sectores em que a empresa deve investir, assegurando-se que os projectos de investimento implementados são mais do que uma carteira de activos seleccionados aleatóriamente.

1.2 MÉTODOS TRADICIONAIS

Os critérios tradicionais de valorização e selecção de investimentos podem classificar-se em dois grupos fundamentais:

- os critérios contabilísticos. Na utilização destes critérios não se considera o escalonamento temporal dos "Cash Flows" (CF), pelo que os resultados obtidos são de pouca utilidade prática, o que tem levado a um progressivo abandono da sua utilização. Finalmente, o CF de investimento raramente se identifica com a noção de lucro contabilístico. Pela razões expostas estes critérios não serão aqui abordados.

- os critérios que consideram, através de um factor de actualização, o escalonamento temporal das receitas e despesas associadas a um investimento[1], por forma a tornar homogéneos esses montantes.

De entre estes, os critérios mais frequentemente referidos na literatura, com o objectivo de avaliar e seleccionar projectos de investimento, são o Período de Recuperação (PR), o Valor Actualizado Liquido (VAL) e a Taxa Interna de Rendibilidade (TIR).

A referência, ainda que breve, a estes critérios tradicionais tem como objectivo o enquadramento das metodologias alternativas, na medida em que estas abandonam algumas hipóteses subjacentes à utilização dos mesmos. Nessa medida, não se expõem exaustivamente as situações particulares que resultam da utilização dos mesmos, nomeadamente em que condições se tornam contraditórios nos resultados que dão ou de que forma essas contradições poderão ser resolvidas, tentando apenas explicitar o contexto de utilização dos referidos critérios[2].

---

[1]Sendo as conclusões fácilmente generalizáveis, não se refere o caso contínuo no que se refere ao escalonamento temporal dos fluxos.

[2]Considera-se, por simplicidade, que o investimento é feito no período zero, ou seja no momento de referência.

1.2.1 PERIODO DE RECUPERAÇÃO

O Período de Recuperação (PR), actualizado[1], é definido como o prazo de tempo necessário para que o valor actualizado dos CF gerados até esse momento seja igual ao desembolso inicial, ou seja, garantindo um rendibilidade média de k sobre o capital investido.
O PR pode ser obtido resolvendo, em ordem a p, a equação

$$I_0 = \sum_{t=1}^{p} CF_t\,(1+k)^{-t}$$

sendo :

p	- Período de Recuperação
k	- Taxa de desconto ou de actualização[2]
I_0	- Investimento inicial[3]
CF_t	- CF do projecto no período t

Trata-se de uma medida de liquidez esperada para um projecto particular, podendo encarar-se o PR como uma restrição que permite efectuar uma pré-selecção dos projectos. Isto pode ser feito fixando-se um período de recuperação consistente com aspectos específicos do

---

[1] Define-se igualmente um PR não actualizado, residindo a diferença apenas no facto dos fluxos monetários serem não actualizados.

[2] Aqui suposta idêntica em todos os períodos, podendo, no entanto, considerar-se diferentes taxas.

[3] Se a despesa de investimento envolver vários períodos considera-se

$$I_0 = \sum_{t=1}^{m} I_t\,(1+k)^{-t}.$$

projecto, nomeadamente com o ciclo de vida do produto a ser produzido, com o potencial de obsoloscência do equipamento devido, por exemplo, a alterações técnologicas ou outras. Deve-se salientar que este critério apresenta alguns inconvenientes, nomeadamente não diferenciar entre projectos que requerem diferentes montantes de investimento nem considerar os CF após o período de recuperação, p, o que o relega para um plano subalterno. Pode, e é normalmente usado como um critério complementar quando se pretende proceder a uma ordenação dos mesmos.

1.2.2 VALOR ACTUALIZADO LIQUIDO

O Valor Actualizado Liquido (VAL) é definido como a diferença, em termos de valores actualizados para o momento inicial, entre a totalidade dos recebimentos e dos pagamentos previstos, incluindo o investimento.

O VAL de um projecto é dado por:

$$VAL = \sum_{t=1}^{n} CF_t \,(1+k)^{-t} - I_0$$

sendo :

n	- Período de vida económica do projecto
k	- Taxa de desconto ou de actualização[1]
I_0	- Investimento inicial[2]
CF_t	- CF do projecto no período t

[1] Ver nota 2 da página 11.

[2] Ver nota 3 da página 11.

Para o decisor será desejável, com base neste critério, a realização de todos os projectos com VAL $\geq$ 0 obtendo,por esta via, o conjunto óptimo de investimentos que contribuem para a maximização do valor global da empresa [18].
Isto verifica-se, pois os recursos gerados pelo projecto permitem não só recuperar o investimento original como também remunerar, sob a forma de dividendos e/ou juros, os capitais próprios e/ou alheios empregues no financiamento daquele, ou ainda a constituição de reservas originadas pelos montantes não distribuidos.

1.2.3 TAXA INTERNA DE RENDIBILIDADE

A Taxa Interna de Rendibilidade (TIR) de um projecto é definida como a taxa r para a qual o valor actual dos CF's associados ao projecto iguala o investimento inicial, ou seja , a taxa para a qual se tem VAL= 0 (Figura 1).
A TIR é obtida resolvendo, em ordem a r, a seguinte equação

$$\sum_{t=1}^{n} CF_t\,(1+r)^{-t} = I_0$$

sendo :

n	- Período de vida económica do projecto
r	- Taxa interna de rendibilidade
I_0	- Investimento inicial[1]
CF_t	- CF do projecto no período t

Com base neste critério devem aceitar-se aqueles projectos de investimento cuja TIR , r,

1 Ver nota 2 da página 11.

seja superior ao custo do capital da empresa, k, e recusar aqueles cuja taxa interna seja inferior a esse custo.

A TIR é uma medida de rendibilidade média anual bruta do projecto de investimento sobre o capital que permanece investido no inicio de cada período. Trata-se de uma rendibilidade bruta porque inclui a retribuição dos recursos que financiam o projecto e refere-se ao capital que em cada ano permanece imobilizado no projecto e não ao capital imobilizado inicialmente.

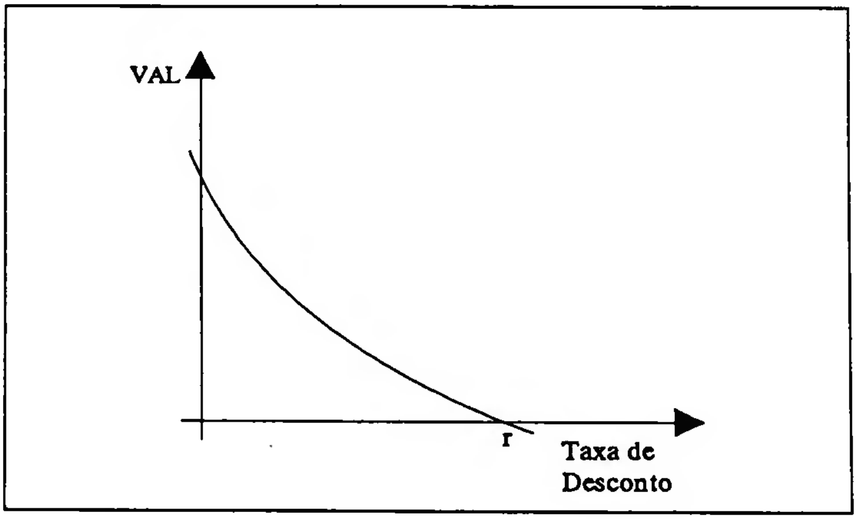


Figura 1

A principal hipótese, subjacente à utilização dos critérios referidos, é a da existência de um mercado de capitais perfeito, não havendo por isso qualquer restrição, para uma determinada taxa de equilibrio, a emprestar ou pedir emprestado o montante de fundos desejado.

Pressupõem, igualmente, que os CF dos projectos são reinvestidos, até ao final da vida dos mesmos, a uma taxa igual ao seu custo do capital, no caso do critério do VAL, ou à própria taxa interna de rendibilidade, no caso do critério TIR [10].

Finalmente, estes critérios apresentam como principais simplificações:

- os CF ocorrem no final de cada um dos períodos,
- estes montantes realizam-se com certeza no momento previsto,
- as oportunidades de investimento são independentes, ou seja a aceitação ou rejeição de um projecto não tem influência na aceitação ou rejeição de qualquer outro projecto.

Dado que o PR é um critério complementar, interessa-nos analisar alguns aspectos associados aos outros dois critérios, a TIR e o VAL, quando se pretende efectuar a ordenação de projectos.

1.2.4 A ORDENAÇÃO DOS PROJECTOS

Na presença de projectos independentes e convencionais, os resultados obtidos, pela utilização dos critérios VAL e TIR, são equivalentes relativamente à aceitação ou rejeição de um projecto.
No entanto, quando o decisor está perante projectos mutuamente exclusivos, abandonando-se a hipótese de independência entre projectos, e tendo, por isso, que optar pela melhor proposta de duas ou mais alternativas, a ordenação dos projectos com base nos dois critérios poderá não ser a mesma.
As razões para esta divergência podem estar na não coincidência da dimensão (montante investido) dos projectos, a existência de diferentes períodos de vida económica e perfis distintos de CF's.

Considere-se o seguinte exemplo:

Projectos	I_0	CF_1	TIR	$VAL_{(k=10\%)}$
A	10.0	12.0	20%	0.9
B	15.0	17.7	18%	1.1

Se se considerar que os projectos A e B são mutuamente exclusivos torna-se necessário proceder à sua ordenação.

Com base no critério da TIR o projecto A é preferível a B,obtendo-se, pelo critério do VAL, uma ordenação diferente, pois o projecto B tem um VAL superior ao do projecto A.

Na realidade, o critério da TIR não considera a dimensão do projecto. O projecto B exige um investimento adicional de 5.0 u.m. que resulta num CF adicional de 5.7 u.m., ou seja, possibilitando uma taxa de rendimento de 14%.

Dado que a empresa pode obter fundos a 10% o projecto B é preferível a A. No entanto, a ordenação será idêntica para k>14% (Figura 2), ou seja para um custo do capital superior a 14%.

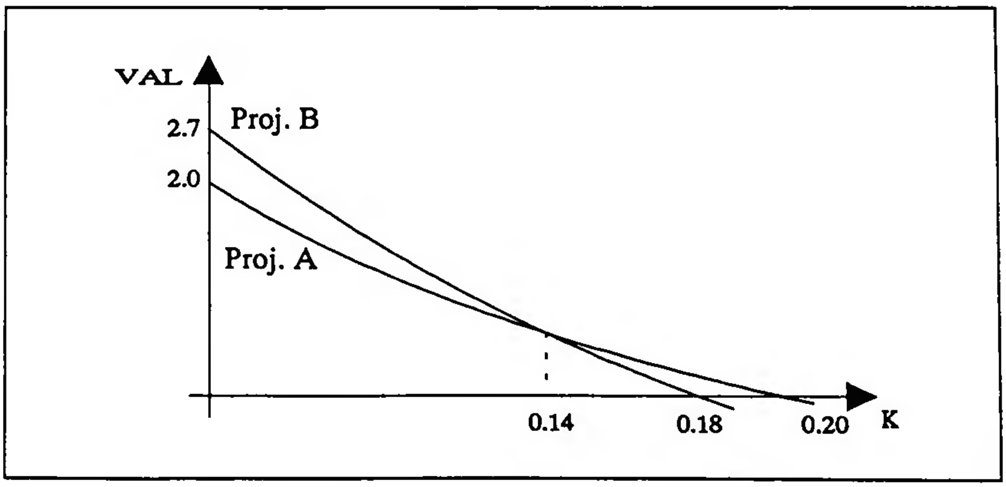


Figura 2

Uma decisão com base apenas no critério da TIR levaria a escolher o projecto que não contribuiria para maximizar o valor da global da empresa.

Algumas insuficiências são tradicionalmente imputadas à TIR, nomeadamente a possibilidade de obtenção de taxas múltiplas, a hipótese implicita do reinvestimento dos CF's à taxa interna do projecto e a não consideração da dimensão do investimentos.
Assim, o critério do VAL é aceite pela generalidade dos autores como o mais adequado para proceder à escolha, entre projectos alternativos, dos que maximizam o valor da empresa [16].

Finalmente, num mercado de capitais perfeito as empresas podem obter, à taxa de juro corrente, todos os fundos necessários à realização de todos os projectos com um VAL>0, ou seja, o programa de investimentos seria constituido por todos os projectos rentáveis.

No entanto, e com frequência, as empresas não têm uma disponibilidade ilimitada de fundos enfrentando, pelo contrário, uma situação de racionamento de capital e de outros recursos.
Estas restrições, como referido na secção 1.1.2, podem ter origem no interior da empresa (racionamento interno) ou no exterior da mesma (racionamento externo), traduzindo algumas imperfeições do mercado.
Nesta medida, nem todos os projectos podem ser realizados e apenas devem ser retidos o conjunto de projectos que contribuem para a maximização do VAL total, isto é, do valor da empresa.

O problema da escolha, de entre várias alternativas de projectos de investimento com VAL positivo, do conjunto particular de projectos que maximizam o valor actual global da empresa não ultrapassando orçamentos de capital fixados para um ou mais períodos, foi colocado por Lorie e Savage [20].
A simples ordenação dos projectos de acordo com o seu VAL, quando se está perante uma situação de racionamento de capitais, seleccionando os projectos por ordem decrescente do respectivo VAL até se esgotar o orçamento, não garante que o conjunto dos projectos

seleccionados maximize o valor actual global da empresa. Isto deve-se à disparidade existente entre os custos das diferentes propostas , de onde poderá resultar que vários projectos com um baixo custo tenham um VAL combinado superior ao de um projecto de maior dimensão.

Tendo constatado isto, Lorie e Savage propõem, considerando que se está perante projectos independentes e a existencia de limitação de fundos para investimento apenas num período, um procedimento que consiste em ordenar, por ordem decrescente, os projectos com base no Indice de Rendibilidade[1] (IR), que se obtém fazendo VAL/I_0 , e ir afectando os fundos até esgotar o orçamento.

Na ausência de indivisibilidades, o procedimento indicado permite escolher aqueles projectos que maximizam o valor actual global.

Quando se está perante projectos indivisíveis o procedimento referido não permite obter uma solução óptima porque assenta na análise de projectos individuais e não em combinações de projectos. Neste caso, pode dar-se a situação em que um projecto com um elevado IR exclua outros projectos, devido à dimensão do investimento associado, cujo VAL agregado seria maior e permitiria uma maior utilização do orçamento [30].

Para ilustrar esta situação considere-se que uma empresa tem um orçamento de 200 u.m. para afectar aos quatro projectos independentes que constam do seguinte quadro:

---

1 Por vezes designado por "Rácio Custo-Benefício Liquido".

Projectos	I_0	VAL (k=8%)	IR
A	200	9.0	0.045
B	120	7.0	0.050
C	50	5.0	0.100
D	80	5.0	0.063

Considerando as combinações possíveis, por forma a escolher aquele conjunto de projectos que apresentam o maior VAL global, obtém-se o seguinte quadro:

Projectos	I_0	VAL (k=8%)	IR
A	200	9.0	0.045
B	120	7.0	0.053
C	50	5.0	0.100
D	80	5.0	0.063
BC	170	12.0	0.070
BD	200	12.0	0.060
CD	130	10.0	0.076

No caso de se estar perante projectos indivisíveis e utilizando o critério do IR, a escolha recairia sobre o projecto composto CD, com VAL=10 u.m.. Por outro lado, utilizando-se o critério do VAL os projectos seleccionados seriam BC ou BD, obtendo-se um VAL=12 u.m..

Admitindo a perfeita divisiblidade dos projectos obtem-se um VAL=14.1 , ou seja, com as restantes 70 u.m, depois de escolhido CD, realizava-se 7/12 do projecto B.
Note-se que se se lidar com uma carteira substancialmente maior de projectos, o procedimento torna-se pouco eficiente.

Tendo considerado uma situação de racionamento de capital em mais do que um período, e tendo constatado que a ordenação com base no IR deixa de ser possível, os autores referidos propõem um outro procedimento que consiste em pesquisar por 'tentativa e erro' os valores $p_1,...,p_t$ tais que:

$$(1) \quad Y_j - \sum_{t=1}^{T} p_t c_{tj} \geq 0 \text{ para os projectos aceites,}$$

verificando-se :

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} c_{tj} \leq C_t \quad , t = 1,...,T$$

com:

Y_j - VAL do projecto j
c_{tj} - valor actualizado das saídas de fundos no período t associadas ao projecto j
T - nº de períodos em que existe restrição orçamental
n - nº de projectos em carteira

Quando, para um conjunto particular de valores $p_1...p_t$ a restrição orçamental (2) é violada, é necessário avaliar de novo todos os projectos, usando a desigualdade (1), para novos valores.
Num exemplo, dado por Lorie Savage, em que se considera a existência de restrições orçamentais em dois períodos sugere-se a representação gráfica do problema de forma a obter-se os valores correctos para p_1 e p_2.
Este procedimento revela-se pouco eficiente apresentando grandes dificuldades de utilização quando se incrementa o nº de projectos em carteira e se considera a existência de outro tipo de restrições e relações entre projectos.

A resolução do problema posto por Lorie e Savage poderá ser conseguida com o recurso à Progamação Linear (PL), como proposto por Weingartner [30]. Este autor demonstrou que os métodos propostos por Lorie e Savage não permitem escolher o conjunto de projectos que maximiza o valor actual global da empresa, nomeadamente quando se está na presença de racionamento de capitais em mais do que um período e de indivisibilidades ou de outras restrições.
O recurso à PL torna desnecessária a avaliação, de forma explícita, de cada combinação possível de projectos e possibilita, dada a flexibilidade desta técnica, que se considere a existência de diversos tipos de restrições por forma a considerar os aspectos, passíveis de quantificação, relevantes para a tomada de decisão.

1.3 UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nesta secção serão apresentados diversos modelos de PL que permitem ajudar à tomada de decisão relativamente à selecção de uma carteira de projectos numa situação de racionamento.

Os modelos a apresentar têm por base o trabalho desenvolvido por Weingartner [29;30;31], que constitui a principal referência nesta área para diversos autores, quer considerando o modelo formulado a partir do problema de Lorie-Savage [8;10;12;14;17], quer considerando os modelos de 'horizonte' [5;6;18;26].

Assim, vai expor-se, inicialmente, o modelo que tem por base o problema posto por Lorie-Savage(L&S), onde se considera a existência de racionamento de capitais em mais do que um período. Refere-se igualmente uma formulação alternativa à de Weingartner, realizada por Baumol e Quandt [4], que tem por base criticas à formulação proposta por aquele autor e que foram discutidas por diversos autores.

Finalmente, será apresentado um segundo grupo de modelos, denominados de 'horizonte', na medida em que se pretende maximizar o valor da empresa num período posterior, tendo em conta também os rendimentos gerados em períodos posteriores pela carteira de projectos em análise.

Considera-se, inicialmente, o modelo base em mercados perfeitos, para posteriormente se introduzirem novas restrições, tendo em conta as imperfeições do mercado, de modo a possibilitar uma maior aderência do modelo à realidade. A exposição de cada um dos modelos é finalizada com um exemplo que permitirá uma melhor compreensão dos mesmos.

1.3.1 O PROBLEMA DE LORIE - SAVAGE : REFORMULAÇÃO DE WEINGARTNER

Como referido no ponto anterior, foi com base no problema posto por L&S [20] que Weingartner propôs a utilização da PL com vista à sua resolução , tornando desnecessária não só uma avaliação explícita das combinações possíveis de todos os projectos em análise como possibilitando a obtenção de informação adicional necessária para a tomada de decisões.

O problema referido pressupõe:

- a existência de vários projectos de investimento independentes;
- a existência de orçamentos (limitações) de capital para um ou mais períodos;
- o conhecimento dos "cash-flows" (CF) de cada um dos projectos;
- o custo do capital é conhecido e independente das decisões de investimento.
- a divisibilidade dos projectos

Pretende-se seleccionar o conjunto particular de projectos que maximiza o Valor Actual da Empresa[1].

O problema acima descrito pode ser formalizado utilizando o seguinte modelo de PL :

$$\text{MAX} \quad \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

s.a. (1.1)

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j \leq C_t \quad , \quad t=1,\ldots,T$$

[1]No caso de existirem outras actividades na Empresa, admite-se que os projectos da carteira em análise são independentes daquelas.

(b) $0 \leq x_j \leq 1$, $j=1,\ldots,n$

sendo :

b_j - Valor Actualizado Liquido do projecto j, obtido pela actualização dos CF's de investimentos à taxa r

c_{tj} - Investimento no ano t associado ao projecto j

C_t - limite orçamental no ano t

x_j - fracção a realizar do projecto j,j=1,...,n

n - nº de projectos em análise

T - último período em que existe restrição orçamental

A Função Objectivo representa o Valor Actualizado Liquido de todos os projectos. O coeficiente respeitante ao projecto j é dado por

$$b_j = \sum_{t=1}^{T} CF_{tj} (1+r)^{-t}$$

onde

CF_{tj} - 'Cash Flow' do projecto j no ano t

O modelo apresenta dois tipos de restrições:

- as restrições orçamentais (1.1.a), em número igual ao número de anos em que existem limites orçamentais, onde se estabelece a impossibilidade das despesas de investimento violarem esses limites.

- as restrições que fixam o intervalo de variação da variáveis de decisão (1.1.b) que impedem a realização múltipla de um mesmo projecto. Um projecto j pode ser rejeitado ($x^*_j = 0$), totalmente aceite ($x^*_j = 1$) ou parcialmente aceite/rejeitado ($0 < x^*_j < 1$).

A análise do problema dual associado a (1.1) possibilita a obtenção de informações adicionais relevantes para uma melhor compreensão da solução do problema primal.

O problema Dual respectivo é dado por :

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t + \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

s.a. (1.2)

(a) $\sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t + \mu_j \geq b_j$, $j=1,\ldots,n$

(b) $\rho_t, \mu_j \geq 0$

com:

ρ_t - variáveis duais associadas às restrições orçamentais do problema primal (1.1.a)

μ_j - variáveis duais associadas à imposição de um limite superior para as variáveis x_j (1.1.b)

As variáveis ρ_t podem ser encaradas como avaliadores das restrições orçamentais. Quando existe uma utilização óptima dos recursos, ρ^*_t, o valor óptimo de ρ_t (na solução óptima) representa o valor actualizado liquido de uma unidade monetária adicional no orçamento do ano t. Nessa medida, constitui um custo de oportunidade ou preço sombra para os diferentes períodos e fornece uma regra de decisão para afectação de recursos suplementares, permitindo a sua repartição pelos períodos com rentabilidade maior.

Assim, se o orçamento para um período k não é totalmente utilizado obtem-se $\rho^*_k = 0$, visto que uma u.m. adicional não iria incrementar o valor da FO, em (1.1), na medida em que existem recursos não utilizados nesse período, tendo por isso, um valor interno nulo[1] .

[1]Note-se que não são previstas, no modelo, aplicações alternativas.

As variáveis μ_j, associadas às *n* restrições do tipo $x_j \leq 1$ (1.1.b), permitem avaliar os projectos, tendo por base o custo de oportunidade interno, possibilitando a sua ordenação. Assim, e para projectos totalmente aceites, $x^*_j = 1$, o seu preço sombra é dado por

$$\mu_j = b_j - \sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t,$$

ou seja, resulta da diferença entre o VAL do projecto e os recursos necessários à sua implementação, avaliados ao custo de oportunidade associado à escassez dos referidos recursos. Desta forma, são incorporadas as inter-relações entre projectos que concorrem para a utilização dos recursos nos diversos períodos.
Para projectos rejeitados, $x^*_j = 0$, a ordenação pode ser feita recorrendo às variáveis desvio do problema dual, fazendo-se

$$\gamma_j = \sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t - b_j,$$

determinando-se, igualmente, um preço sombra para estes projectos.
Esta ordenação poderá não coincidir com a obtida com base nos critérios do VAL e da TIR, na medida em que se considera a inter-relação entre projectos, através das restrições orçamentais nos diversos períodos. Assim, para os projectos rejeitados, os recursos necessários à sua realização, avaliados aos custos de oportunidade, ρ_t, excedem o VAL, b_j, do referidos projectos.

Para projectos parcialmente aceites, $0 < x^*_j < 1$, este preço sombra é nulo, ou seja

$$b_j = \sum_{t=1}^{T} \rho_t C_t,$$

pelo que, mesmo para um projecto parcialmente aceite, o seu VAL deve igualar os montantes a investir valorizados ao custo de oportunidade.

Como foi referido anteriormente, nem sempre se verificam relações de independência entre projectos. Assim, dois ou mais projectos, ou mais do que um conjunto de projectos, podem ser *mutuamente exclusivos*, *contingentes* ou *complementares*.

Para a inclusão destas relações poderão ser introduzidas na formulação de base (1.1) as seguintes restrições :

a) *Projectos mutuamente exclusivos*

$$\sum_{j \in J} x_j \leq 1 \text{ , } x_j \in \{0,1\}$$

onde J é um conjunto de projectos mutuamente exclusivos.
Com esta restrição podem-se eliminar as restrições (1.1.b) para todo $j \in J$.

b) *Projectos contingentes*

Se entre dois projectos ,x_k e x_g, existe uma relação de contingência, tal que a realização de x_k determina a realização prévia de x_p, aquela poderá ser expressa pela restrição

$$x_k \leq x_p \text{ , } x_k \in \{0,1\} \text{e } x_p \in \{0,1\}$$

Uma forma alternativa de tratar esta situação consiste na agregação dos valores dos projectos para os quais existem relações de contingência de forma a se obter um projecto composto que entrará no modelo sob a forma de um projecto único.

c) *Projectos complementares*

Neste caso, a aceitação/rejeição de x_k determina a aceitação/rejeição de x_p, pelo que se deve incluir a restrição

$$x_k - x_p = 0,\ x_k \in \{0,1\} \text{e } x_p \in \{0,1\}$$

A resolução do problema, após a introdução destas restrições, é feita recorrendo à Programação Linear Inteira Mista, se alguns projectos são fraccionáveis, ou à Progamação Linear Inteira Pura no caso de nenhum dos projectos ser fraccionável.
A não imposição de restrições de integralidade poderá originar que na solução óptima se obtenham projectos fraccionados. Desta forma, e caso os projectos sejam mutuamente exclusivos, poderia obter-se uma solução em que a aceitação parcial de dois ou mais desses projectos fosse sugerida.Esta solução pode ser entendida como uma indicação para se conceber, designadamente em termos financeiros e nos casos em que isso seja possível, uma solução de compromisso.
Por outro lado, a obtenção de uma solução fraccionária pode ser encarada como uma sugestão no sentido de se envolver outra entidade na realização desse projecto, com um montante de investimento equivalente à percentagem por realizar do projecto.
Quanto ao número de projectos fraccionários que se podem obter na solução do problema de PL , Weingartner [30] demonstrou que :

- no caso dos projectos serem independentes, esse número não é superior a T, ou seja, ao número de restrições orçamentais consideradas;

- se existirem relações de interdependência, o seu número será no máximo igual a T mais o número de restrições que definem essas relações.

Considere-se que uma empresa tem uma carteira de projectos, cujas características constam do quadro 1. A empresa tem disponíveis para investimento nos anos 1,2 e 3, respectivamente, 30, 35 e 40 u.m..

Quadro 1

PROJ	INVESTIMENTO (no ano t)			CASH-FLOW DE EXPLORAÇÃO (no ano t)					
j	1	2	3	1	2	3	4	5	6
1	10	15	7			5	13	14	16
2	5	10	5		5	6	8	10	9
3		20	15			9	12	13	15
4	30	15	10		4	10	16	20	24
5		30	12				8	22	30
6	10	12	2			4	15	13	
7	12				13				

Tendo por base o modelo (1.1), torna-se necessário calcular o VAL de cada um dos projectos, b (quadro 2). A taxa considerada para descontar os CF foi de 10%.

Quadro 2

PROJ. (j)	V.A.L.(b_j)
1	3.61
2	8.83
3	3.69
4	0.53
5	2.25
6	0.81
7	-0.16

A formalização do problema acima descrito é dada por:

$$MAX\ 3.61\,x_1 + 8.83\,x_2 + 3.69\,x_3 + 0.53\,x_4 + 2.25\,x_5 + 0.81\,x_6 - 0.16\,x_7$$

s.a.

(a) $10\,x_1 + 5\,x_2 + 30\,x_4 + 10\,x_6 + 12\,x_7 \leq 30$

(b) $15\,x_1 + 10\,x_2 + 20\,x_3 + 15\,x_4 + 30\,x_5 + 12\,x_6 \leq 35$

(c) $7\,x_1 + 5\,x_2 + 15\,x_3 + 10\,x_4 + 12\,x_5 + 2\,x_6 \leq 40$

(d) $0 \leq x_j \leq 1$ (j=1,...,7)

Como referido, se os projectos não forem divisíveis, a restrição (d) é substituida por $x_j = 0$ ou 1 , obtendo-se um modelo de PLI, neste caso pura.
Para além da divisibilidade dos projectos, assume-se que tanto o VAL como os investimentos para cada projecto são proporcionais à fracção do projecto a implementar.

Da resolução do problema obteve-se[1]:

- Solução do Problema Primal

- variáveis principais :
$x^*_1 = x^*_2 = 1,\ x^*_3 = 0.5,\ x^*_4 = x^*_5 = x^*_6 = x^*_7 = 0$;
- variáveis desvio associadas às restrições (a,b,c) :
$S^*_1 = 15,\ S^*_2 = 0,\ S^*_3 = 20.5$;
- variáveis desvio associadas às restrições (d) :
$s^*_1 = s^*_2 = 0,\ s^*_3 = 0.5,\ s^*_4 = s^*_5 = s^*_6 = s^*_7 = 1$;

[1]O programa informático utilizado foi o LINDO. Foi desenvolvido por Linus E. Schrage e é distribuido por *The Scientific Press*.

- Solução do Problema Dual

- variáveis principais :
$\rho^*_1 = \rho^*_3 = 0$, $\rho^*_2 = 0.1845$;
$\mu^*_1 = 0.8425$, $\mu^*_2 = 6.985$, $\mu^*_3 = \mu^*_4 = \mu^*_5 = \mu^*_6 = \mu^*_7 = 0$

- variáveis desvio :
$\gamma^*_1 = \gamma^*_2 = \gamma^*_3 = 0$, $\gamma^*_4 = 2.237$, $\gamma^*_5 = 3.285$, $\gamma^*_6 = 1.404$,
$\gamma^*_7 = 0.16$

Valor da Função Objectivo = 14.285 .

A solução obtida sugere a realização integral dos projectos 1 e 2 e a realização de 50% do projecto 3, obtendo-se um VAL global de 14.285 u.m.. A solução obtida para o projecto 3 sugere o envolvimento, com uma participação de 50%, de outro sócio na sua realização.

Os recursos disponíveis para investimento são esgotados apenas no 2º ano ($S^*_2=0$), havendo excesso de recursos no primeiro e terceiro anos de, respectivamente, 15 e 20.5 u.m.. Se considerarmos as restrições como indicativas, seria desejável relaxar a restrição orçamental do 2º ano , pela obtenção de fundos no exterior, se o preço desses fundos não exceder uma taxa anual de 18.45% ($\rho^*_2 = 0.1845$) ou, em alternativa, reafectar os fundos não utilizados nos anos 1 e 2, cuja valorização interna, nesta solução, é nula ($\rho^*_1 = \rho^*_3 = 0$).
Os montantes pelos quais o VAL dos projectos aceites excede os recursos necessários à sua implementação, avaliados ao custo de oportunidade para cada um dos anos, são, respectivamente , 6.985, 0.8425 e 0. ($\mu^*_2 = 6.985$, $\mu^*_1 = 0.8425$, $\mu^*_3 = 0$).

A ordenação, para os projectos rejeitados, pode igualmente ser realizada com base nas variáveis desvio do Dual, γ^*_j. A implementação forçada, por algum motivo, de um dos projectos rejeitados levaria a uma utilização não óptima (à luz das condições iniciais) dos recursos, pelo que se teria um decréscimo do valor global da carteira proporcional ao respectivo preço-sombra.

Note-se, finalmente, que apesar de ter um VAL negativo, o projecto 7, considerando o conjunto de projectos rejeitados, é aquele cuja inclusão forçada provoca um menor decréscimo no VAL global. Isto deve-se ao facto desse projecto não consumir fundos num ano em que estes são escassos, ou seja, no 2º ano.

1.3.1.1 FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DE BAUMOL E QUANDT

Baumol e Quandt [4] propuseram uma formulação alternativa à de Weingartner (1.1) com base nas seguintes criticas :

- A separação das entradas e saídas de fundos não é considerada como razoável, na medida em que aquelas podem contribuir para relaxar as restrições orçamentais em cada um dos períodos. Assim, deve considerar-se, no modelo, a possibilidade de autofinanciamento do programa de investimento (Figura 3).

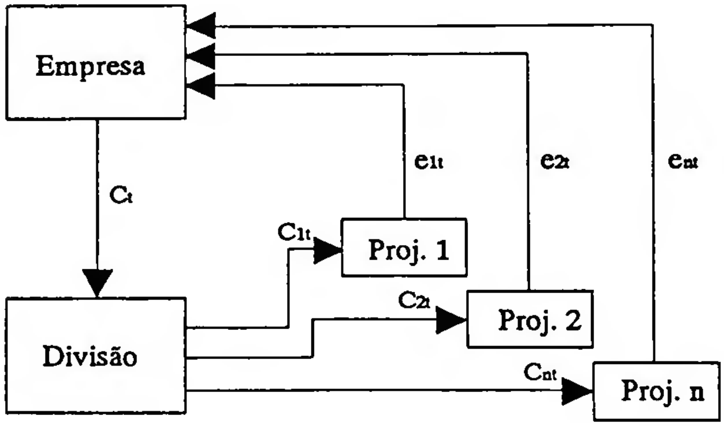
- Dado que a empresa se encontra isolada do mercado de capitais, não havendo, por isso, aplicações alternativas para além dos projectos em análise, a taxa a utilizar para descontar os CF não deverá ser exterior à empresa, mas sim determinada com base no custo de oportunidade interno. Por outro lado, os custos de oportunidade internos, ρ^*_t, só são determinados depois de resolvido o problema primal, que por sua vez exige a utilização de uma taxa de desconto.

A necessidade de determinar simultâneamente a taxa de desconto,k , e os custos de oportunidade internos é evitada pelo recurso a uma formulação alternativa.

Assim, a abordagem alternativa tem por base a utilização de uma taxa de desconto, determinada subjectivamente pelo decisor, consistente com a sua função de utilidade. Desta forma, devem ser actualizados os fluxos de dividendos pagos pela empresa e não os fundos gerados pelo conjunto de projectos.

O modelo proposto vem:

Formulação Loris-Savage e reformulação de Weingartner



Formulação de Baumol e Quandt e Modelo de Weingartner maximizando o valor terminal

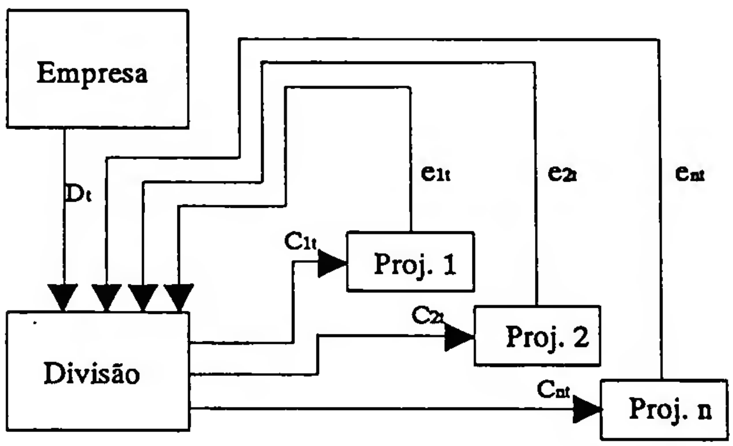


Figura 3

e_{jt} - entrada de fundos gerados pelo projecto j no ano t
c_{jt} - montante investido no projecto j no ano t
$a_{jt} = e_{jt} - c_{jt}$

(adaptado de BERTONÈCHE, Marc; LANGHOR, Herwig, "Le Choix des Investissements en Situation de Rationnement du Capital", obra citada, pp. 738-739)

$$\text{MAX} \sum_{t=1}^{T} U_t W_t$$

s.a. (1.3)

(a) $-\sum_{j=1}^{n} a_{jt} x_j + W_t \leq M_t$, $t=1,...,T$

(b) $x_j \geq 0$, $j=1,...,n$

(c) $W_t \geq 0$, $t=1,...,T$

sendo :

U_t - Utilidade de uma u.m. no período t

W_t - Dividendos pagos no período t

a_{jt} - CF gerado pelo projecto j no período t

M_t - Limite orçamental no período t

x_j - fracção a realizar do projecto j,j=1,...,n

Relativamente à primeira crítica, qualificada como uma 'crítica menor' pelos autores do modelo acima exposto, Weingartner considera que a sua formulação tem por base os dados do problema de Lorie-Savage.

Por outro lado, se se encarar o racionamento como um meio experimental de planificação e controle, os fundos libertados não se encontram imediatamente disponíveis para reinvestimento, se se tratar de uma divisão/departamento cujas despesas de investimento, em cada ano, não devem ultrapassar os orçamentos de investimento fixados e sem autonomia para aplicar os fundos gerados pelos projectos implementados. Estes serão afectados pelo orgão responsável pela fixação dos orçamentos tendo em consideração as necessidades globais da empresa (Figura 3).

Quanto à segunda crítica, relativa à utilização de uma taxa de desconto externa numa situação de racionamento de capitais, foi objecto de análise por parte de diversos autores. Para Bertonèche e Langohr [5], a utilização de uma taxa de desconto externa é perfeitamente admissível se se considerar que se trata de um racionamento interno. As restrições, impostas internamente, para além de terem um valor indicativo com vista à planificação e controle, podem ter como finalidade preservar o controle de gestão da empresa apresentando um valor, para os seus actuais proprietários, superior aos benefícios resultantes da obtenção de capital sob condições que implicariam uma perca potencial desse controle [31].
Essa fixação dos limites orçamentais incorpora as preferências dos decisores que, restringindo o emprego de fundos, limitam as oportunidades da empresa e é esse custo de oportunidade que se pretende minimizar,o que pode ser visto pela função objectivo do problema Dual em (1.2).
Desta forma, não existe um total isolamento do mercado de capitais, pelo que é possivel utilizar uma taxa de desconto externa para actualizar os CF dos diversos projectos.

Algumas críticas foram igualmente feitas à formulação de Baumol e Quandt, nomeadamente ao facto da função objectivo em (1.3) pressupor não só uma identificação entre a empresa e os accionistas, como também o de estes terem as mesmas preferências entre consumo presente e futuro [29]. Para além disso, a necessidade de se fixar um índice de utilidade antes de se dispor de informação sobre todas as possibilidades de dividendos nos diferentes períodos, resulta numa falta de operatividade do modelo [28].

No entanto, para diversos autores [1;5;11;22;27], a utilidade marginal, W_t, relaciona-se com a taxa de desconto externa, k, considerando-se que

$$w_t = \frac{1}{(1+k)^t}$$

sendo k a taxa de rendibilidade exigida pelos accionistas. Assim, mesmo numa situação de racionamento externo rígido, a taxa de substituição intertemporal do investidor iguala a taxa de juro do mercado.

Finalmente, e com base na formulação de Weingartner (1.1), alguns autores consideraram uma situação, denominada de racionamento 'puro' de capital [15;26], em que quer a empresa quer os accionistas se encontram em total isolamento do mercado de capitais, impossibilitando a utilização de uma taxa de desconto externa.

Para a determinação dos factores de desconto correctos a utilizar na função objectivo em (1.1) são propostos diversos métodos iteractivos que, no entanto, não garantem a obtenção de soluções óptimas [26].

Não se enquadrando no âmbito deste trabalho, dada hipótese de total isolamento da empresa e dos accionistas relativamente ao mercado de capitais, o leitor interessado poderá consultar [3;7;18;25;26].

1.3.2 Modelos de Horizonte

Os modelos de horizonte foram inicialmente apresentados por Weingartner [30,Cap.8]. Tal como anteriormente, a exposição é feita pressupondo um universo determinístico.
Neste tipo de modelos pretende-se maximizar o valor da empresa num momento T, designado por horizonte, considerando-se, como valores correntes, os CF dos diversos projectos. Nesta medida, torna-se desnecessário a utilização explícita de uma taxa de desconto, para os CF's que ocorrem até ao momento de horizonte. No entanto, se houver projectos cujos CF ocorram após o horizonte, deverão ser actualizados para esse momento. Pressupondo que é possível aplicar os fundos disponíveis após T a uma taxa r, a actualização do CF deverá ser feita a uma taxa k com $k \geq r$, ou seja, a uma taxa no mínimo igual à alternativa disponível. Nestes modelos inclui-se a possibilidade de emprestar os fundos gerados internamente ou recorrer ao mercado com a finalidade de obter fundos para a realização de projectos rentáveis. Assim, é razoável considerar que os fundos disponibilizados para lá do horizonte possam ser emprestados à taxa para estas operações [26].
Esta situação pode ser evitada se o horizonte for fixado para um momento posterior à data em que ocorre o último CF gerado por algum dos projectos em carteira.

1.3.2.1 Modelo Básico de Horizonte - Mercados Perfeitos

A apresentação deste modelo justifica-se na medida em que possibilita uma melhor compreensão dos modelos posteriores, nos quais se introduzem novas restrições por forma a que se obtenha uma maior aderência à realidade.

Como acima referido, pretende-se maximizar o valor da empresa num determinado momento, o horizonte, expresso pelas disponibilidades nesse momento e pelo valor actualizado dos CF posteriores ao horizonte.

O modelo é dado por:

$$\text{MAX} \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - w_T$$

s.a. (1.4)

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + v_1 - w_1 \leq D_1$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j-(1+r)v_{t-1}+v_t+(1+r)w_{t-1}-w_t \leq D_t \text{ , } t=2,...,T$$

$$\text{(c)} \quad 0 \leq x_j \leq 1 \qquad , j=1,...,n$$

$$\text{(d)} \quad v_t,w_t \geq 0 \qquad , t=1,...,n$$

sendo:

$\hat{a}_j$ - o valor, actualizado para o horizonte (T), dos cash-flows gerados pelo projecto j nos períodos posteriores a T, ou seja,

$$\hat{a}_j = \sum_{t=T+1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{T-t}$$

a_{tj} - Cash-flow esperado para o projecto j no ano t. Por convenção, associamos os a_{tj} positivos a uma saída de fundos e os a_{tj} negativos a uma entrada de fundos. Ao contráro dos c_{tj} do modelo (1.1), os a_{tj} representam todos os fluxos associados ao projecto j.

D_t - montante disponivel para investimento no ano t, fixado independentemente dos fundos esperados a serem gerados pelos projectos a implementar.

w_t - montante a pedir emprestado no ano t (operação passiva).

v_t - montante a emprestar no ano t (operação activa).

r - taxa de juro de mercado para operações passivas e activas. É aqui assumida como constante, podendo no entanto considerar- se taxas diferentes para os vários anos (r_t), mas iguais para os dois tipos de operações, uma vez que não são consideradas margens de intermediação).

x_j - fracção a adoptar do projecto j.

As operações activas e passivas são supostas renováveis com amortização (reembolso) e juros pagos no período seguinte.

O problema dual associado a (1.4) vem :

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^{T} \rho_t D_t + \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

s.a. (1.5)

$$\text{(a)} \quad \sum_{t=1}^{T} \rho_t a_{tj} + \mu_j \geq \hat{a}_j \text{ , } j=1,\ldots,n$$

$$\text{(b)} \quad \rho_T \geq 1$$

(c) $- \rho_T \geq - 1$

(d) $\rho_{t-1} - (1+r)\rho_t \geq 0$, $t=2,...,T$

(e) $- \rho_{t-1} + (1+r)\rho_t \geq 0$, $t=2,...,T$

(f) $\rho_t, \mu_j \geq 0$

Com base nas restrições do problema dual, tem-se para as variáveis ρ_t :

- de (1.5 b) e (1.5 c) obtem-se

$$\rho^*_T = 1 \tag{1.6}$$

ou seja, sendo o momento de referência o período T, um u.m. tem valor unitário nesse período.

- de (1.5 d) e (1.5 e) tem-se no óptimo

$$\frac{\rho^*_{t-1}}{\rho^*_t} = 1+r \quad , t=1,...,T \tag{1.7}$$

que representa a relação entre o valor marginal dos fundos em dois anos consecutivos.

- combinando (1.6) e (1.7) vem

$$\rho^*_t = (1+r)^{T-t} \quad , t=1,...,T \tag{1.8}$$

ou seja, ρ^*_t é o factor composto, para qualquer período t, representando o rendimento, capital e juros, no momento T de uma u.m. adicional nesse período.

A avaliação interna dos projectos é feita com base no valor actualizado dos fluxos posteriores ao horizonte, $\hat{a}_t$, e no factor obtido em (1.8) aplicado aos fluxos que ocorrem até ao horizonte,T.

Assim, para os projectos aceites, $x^*_j=1$, tem-se

$$\mu^*_j = \hat{a}_j - \sum_{t=1}^{T} \rho^*_t a_{tj} \quad e \quad \mu^*_j \geq 0$$

ou seja, projectos com um VAL ≥0, visto que

$$\mu^*_j = \hat{a}_j + \sum_{t=1}^{T} (- a_{tj})(1+r)^{T-t}$$

Como

$$\hat{a}_j = \sum_{t=T+1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{T-t}$$

tem-se

$$\mu^*_j = \sum_{t=1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{T-t}$$

pelo que

$$VAL_j = \mu^*_j/K \text{ , com } K=(1+r)^T$$

ou seja, obtem-se o coeficiente de x_j na função objectivo do problema (1.1).

Para projectos rejeitados, $x^*_j=0$, e parcialmente aceites, $x^*_j<1$, tem-se $\mu^*_j=0$ e

$$\mu^*_j \geq \hat{a}_j - \sum_{t=1}^{T} \rho^*_t a_{tj}$$

pelo que $VAL_j \leq 0$, pois

$$K \sum_{t=1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{-t} \leq 0.$$

Como é óbvio, dado que não existem limites para obtenção de fundos à taxa r, serão aceites todos os projectos cujo VAL, à taxa r, seja não negativo. A imposição de limites para operações passivas é considerada na secção seguinte, sendo igualmente analisadas as suas consequências.

Note-se, no entanto, que quando existem relações de dependência entre projectos, poderão ser aceites projectos com VAL<0 e rejeitados projectos com VAL>0.
Considere-se que J é um conjunto de projectos mutuamente exclusivos. Assim inclui-se no modelo (1.4) a restrição

$$\sum_{j \in J} x_j \leq 1$$

sendo μ_J a variável dual associada à nova restrição, representando o custo de oportunidade associado à redução do nº de projectos que podem ser aceites. Para um projecto aceite, $j \in J$, ou parcialmente aceite virá

$$\mu^*_J = K \sum_{t=1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{-t} \text{ e } \mu^*_J \geq 0$$

vindo para os restantes

$$\mu^*_J \geq K \sum_{t=1}^{\infty} (- a_{tj})(1+r)^{-t} \text{ e } \mu^*_J=0$$

pelo que alguns dos projectos rejeitados poderão ter um VAL positivo, mas óbviamente inferior ao VAL do projecto aceite.

No caso em que existam relações de contingência entre projectos, desde que o VAL do projecto dependente seja positivo e suficientemente grande, por forma a que o VAL combinado dos projectos seja positivo, poder-se-á aceitar projectos com VAL negativo [30]. Da mesma forma, no caso em que dois projectos sejam complementares, ou seja, a aceitação/rejeição de um projecto implica a aceitação/rejeição de outro, poderá igualmente ser aceite um projecto com VAL negativo desde que, tal como anteriormente, o VAL combinado dos dois projectos seja positivo.

Tendo por base os dados do quadro 1, obtem-se o quadro 3, onde constam os fluxos associados a cada um dos projectos, a_{tj}. Como foi referido, nos modelos de horizonte não se separam as saídas das entradas de fundos, dado que se admite a possibilidade de os fundos libertados por alguns projectos poderem ser utilizados para a implementação de outros .

Os fundos não utilizados podem ser colocados no mercado a uma taxa de 10%. Por outro lado, não existe qualquer limitação à obtenção de fundos à taxa referida.

O horizonte considerado é de 5 anos, pelo que os fluxos que ocorrem em períodos posteriores devem ser actualizados para o ano de horizonte. Esta actualização é feita utilizando a taxa acima referida (Quadro 4).

Quadro 3

Perfil dos CF's

PROJ	CASH-FLOW (no ano t)					
j	1	2	3	4	5	6
1	10	15	2	-13	-14	-16
2	5	5	-1	-8	-10	-9
3		20	6	-12	-13	-15
4	30	11		-16	-20	-24
5		30	12	-8	-22	-30
6	10	12	-2	-15	-13	
7	12	-13				

Quadro 4

Valor Actualizado (para t=5) dos CF's ocorridos em t>5

j	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{a}_j$	14.55	8.18	13.64	21.82	27.27		

O problema vem:

$$\text{MAX} \quad 14.550\, x_1 + 8.18\, x_2 + 13.64\, x_3 + 21.82\, x_4 + 27.27\, x_5 + v_5 - w_5$$

s.a.

(a) $10\, x_1 + 5\, x_2 + 30\, x_4 + 10\, x_6 + 12\, x_7 + v_1 - w_1 \leq 30$

(b) $15\, x_1 + 5\, x_2 + 20\, x_3 + 11\, x_4 + 30\, x_5 + 12\, x_6 - 13 x_7 - 1.1\, v_1 + v_2 + 1.1\, w_1 - w_2 \leq 35$

(c) $2x_1 - 1x_2 + 6x_3 + 12x_5 - 2x_6 - 1.1v_2 + v_3 + 1.1w_2 - w_3 \leq 40$

(d) $-13x_1 - 8x_2 - 12x_3 - 16x_4 - 8x_5 - 15x_6 - 1.1v_3 + v_4 + 1.1w_3 - w_4 \leq 0$

(e) $-14x_1 - 10x_2 - 13x_3 - 20x_4 - 22x_5 - 13x_6 - 1.1v_4 + v_5 - 1.1w_4 - w_5 \leq 0$

(f) $0 \leq x_j \leq 1$ $(j=1,...,7)$

(g) $v_t, w_t \geq 0$ $(t=1,...,5)$

A resolução do problema conduz à seguinte solução:

- Solução do Problema Primal:
$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = x^*_4 = x^*_5 = x^*_6 = 1, x^*_7 = 0$;
$v^*_1 = v^*_2 = v^*_3 = v^*_4 = 0, v^*_5 = 85.23$;
$w^*_1 = 25, w^*_2 = 85.5, w^*_3 = 71.05, w^*_4 = 6.155, w^*_5 = 0$;

- Solução do Problema Dual:
$\rho^*_1 = 1.4641, \rho^*_2 = 1.331, \rho^*_3 = 1.21, \rho^*_4 = 1.1, \rho^*_5 = 1$;
$\mu^*_1 = 5.824, \mu^*_2 = 14.215, \mu^*_3 = 5.96, \mu^*_4 = 0.856, \mu^*_5 = 3.62,$
$\mu^*_6 = 1.307, \mu^*_7 = 0;$
$\gamma^*_1 = \gamma^*_2 = \gamma^*_3 = \gamma^*_4 = \gamma^*_5 = \gamma^*_6 = 0, \gamma^*_7 = 0.2662.$

Valor da Função Objectivo = 170.6895.

Dado que não existem limites para os montantes a pedir emprestado, devem realizar-se todos os projectos cujo VAL, obtido pelo desconto dos CF à taxa de 10%, seja não negativo.

O valor do programa, no horizonte (T=5), é de 170.6895 u.m., resultando dos CF que ocorrem nos anos posteriores a T, actualizados para esse momento, e dos fundos disponíveis para emprestar, cujo montante ascende a 85.23 u.m. (v^*_5).

Em qualquer dos anos, com excepção do 5º ano, se recorre a fundos externos para permitir a realização dos projectos referidos, cujos montantes são :

Ano 1 - 25.000 u.m.

Ano 2 - 85.500 u.m.

Ano 3 - 71.050 u.m.

Ano 4 - 6.155 u.m.

Com base em (1.7), tem-se que uma u.m. adicional no ano t representa no horizonte 1.1^{5-t}. Assim, e como foi referido na secção anterior, os projectos são avaliados por ρ^*_t, obtendo-se o seu respectivo valor interno, em T=5, fazendo

$$\mu^*_j = \hat{a}_j - \rho^*_1 a_{1j} - \rho^*_2 a_{2j} \rho^*_3 a_{3j} - \rho^*_4 a_{4j} - \rho^*_5 a_{5j}$$

Obtem-se b_j, coeficiente de x_j na função objectivo do exemplo da secção 1.3.1, fazendo $\mu^*_j/(1.1)^5$, ou seja, os projectos aceites têm VAL não negativo.

Isto pode não se verificar se, como se viu, houver relações de dependência entre projectos. Considere-se, por ex, que os projectos 2 e 3 são mutuamente exclusivos, o que corresponde a introduzir no problema a seguinte restrição: $x_2 + x_3 \leq 1$.
Na nova solução o projecto 3 é excluido ($x^*_3 = 0$), dado que tem um VAL inferior ao do projecto 4, pelo que o valor global, no ano horizonte, tem um decréscimo de 5.96 u.m. (μ^*_3). Este valor corresponde ao custo de oportunidade associado à imposição de uma relação de mutua exclusividade entre os dois projectos ($\mu^*_8 = 5.96$).
Finalmente, se se considerar que a realização do projecto 2 depende da realização prévia do projecto 7, deve introduzir-se a restrição $x_2 - x_7 \leq 0$. Neste caso, o projecto 7 deve ser implementado, apesar do seu VAL ser negativo, pois o VAL global dos dois projectos ainda é positivo. O Valor global, no ano horizonte, vem diminuido de 0.2662 (γ^*_7), sendo este o valor da nova variável dual (μ^*_8) associada à inclusão da restrição que exprime a relação de contingência entre os dois projectos.

1.3.2.2 Imposição de limites nos montantes a pedir emprestado

A fixação de um montante máximo a pedir emprestado, em um ou vários anos, poderá ter por base não só a necessidade da empresa pretender manter determinados rácios financeiros, como também ser o resultado de condições financeiras negociados com as entidades fornecedoras de fundos, nomeadamente o recurso a empréstimos de curto prazo e a possibilidade de existirem descobertos bancários, cujos montantes são préviamente fixados.

A possibilidade de serem excluídos projectos com VAL positivo e incluídos outros com VAL negativo é uma das consequências da introdução destes limites, pois a avaliação interna dos projectos será afectada pela sua introdução.

Esta situação pode ser prevista no modelo (1.4), introduzindo-se um conjunto de novas restrições (1.9 d), vindo:

$$\text{MAX} \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{a}x_j + v_T - w_T$$

s.a. (1.9)

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + v_1 - w_1 \leq D_1$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j-(1+r)v_{t-1}+v_t+(1+r)w_{t-1}-w_t \leq D_t \text{ ,t=2,...,T}$$

$$\text{(c)} \quad 0 \leq x_j \leq 1 \text{ , j=1,...,n}$$

(d) $w_t \leq B_t$, $t=1,\dots,T$

(e) $v_t, w_t \geq 0$, $t=1,\dots,T$

sendo B_t o montante máximo a pedir emprestado no ano t. As restantes variáveis mantêm a designação anterior.

O respectivo problema Dual vem :

$$\text{Min } \sum_{t=1}^{T} \rho_t D_t + \sum_{j=1}^{n} \mu_j + \sum_{t=1}^{T} \beta_t B_t$$

s.a. (1.10)

(a) $\sum_{t=1}^{T} \rho_t a_{tj} + \mu_j \geq \hat{a}_j$, $j=1,\dots,n$

(b) $\rho_T \geq 1$

(c) $-\rho_T + \beta_T \geq -1$

(d) $\rho_t - (1+r)\rho_{t+1} \geq 0$, $t=1,\dots,T-1$

(e) $-\rho_t + (1+r)\rho_{t+1} + \beta_t \geq 0$, $t=1,\dots,T-1$

(f) $\rho_t, \beta_t, \mu_j \geq 0$

Note-se que se não se atinge o limite, em qualquer dos períodos, fixado para as operações passivas, ou seja, se na solução óptima as restrições (1.9 d) não são actuantes, tem-se a 3ª componente da função objectivo (1.10) nula, pelo que o modelo dará resultados idênticos ao anterior (1.4).

Nos casos em que se esgote alguns dos montantes previstos para as operações passivas (as respectivas restrições são actuantes), o custo de oportunidade associado aos vários períodos virá incrementado.

Assim, para o período de horizonte,T, tem-se, $\rho^*_T \geq 1$, o que não acontecia no modelo anterior, dado que o custo de oportunidade irá reflectir, como foi referido, a existência de restrições actuantes, relativamente às operações passivas.

Para os períodos intermédios, com base em (1.10 d) e (1.10 e) tem-se

$$(1+r)\rho^*_{t+1} \leq \rho^*_t \leq (1+r)\rho^*_{t+1} + \beta^*_t$$

ou seja, se para qualquer t se tem $w_t < B_t$ o resultado é idêntico ao obtido para o modelo anterior (1.7), pois $\beta^*_t=0$.

Se para alguns períodos as restrições (1.9 d) são actuantes, vindo $\beta^*_t > 0$, o custo de oportunidade resultante é dado por

$$\rho^*_t = (1+r)^{T-t} + \sum_{k=t}^{T} (1+r)^{k-t}\beta^*_k \qquad (1.11)$$

reflectindo, desta forma, o efeito da existência de limites actuantes, não só no ano corrente como nos anos posteriores, expresso pela 2ª componente do resultado anterior.

Neste modelo, como se viu, poder-se-á obter uma taxa interna superior à taxa de juro do mercado, pelo que, na avaliação interna dos projectos, os fluxos a_{tj} poderão ser descontados a diferentes taxas. Estas dependem, por um lado, das operações activas e passivas e, por outro, das oportunidades de investimento que poderão ser excluidas devido à existência de limites para as operações passivas.

Assim, para projectos aceites, $x^*_j=1$, tem-se

$$\mu^*_j = \hat{a}_j - \sum_{t=1}^{T} \rho^* a_{tj}$$

Considerando (1.11) e sabendo que

$$\hat{a}_j = \sum_{t=T+1}^{\infty} (-a_{tj})(1+r)^{T-t}$$

o valor dos projectos aceites é dado por

$$\mu^*_j = \sum_{t=1}^{\infty} (-a_{tj})(1+r)^{T-t} + \sum_{t=1}^{T} \beta^*_t A_t \qquad (1.12)$$

com

$$A_t = \sum_{k=1}^{t} (-a_{kj})(1+r)^{t-k}$$

que representa o valor actualizado dos fluxos associados ao projecto j que ocorrem até ao período corrente.

Relativamente ao modelo anterior, tem-se ,agora, que um projecto aceite é avaliado não só em função da sua contribuição para o valor actual, medido pela taxa de mercado, mas também pela sua aptidão para gerar fundos que contribuam para reduzir a pressão das restrições associadas às operações passivas.

Assim, um projecto não é necessáriamente rejeitado ($x^*_j=0$) apenas por ter um valor actual ou de horizonte negativo visto que o critério de aceitação é também função de β^*_t.

Note-se que a condição $\mu^*_j \geq 0$ pode ser satisfeita desde que

$$\sum_{t=1}^{\infty} (-a_{tj})(1+r)^{T-t} \leq \sum_{t=1}^{T} \beta^*_t A_t$$

ou seja, o projecto pode ser desejável desde que gere receitas em períodos nos quais elas sejam necessárias.

No caso em que se tenha $\beta^*_t = 0$, para $t=1,...,T$, a aceitação de um projecto com valor actualizado, ou de horizonte, negativo nunca ocorre, como se viu no modelo da secção anterior, para projectos independentes.

Considere-se que a empresa tem definidos montantes máximos a pedir emprestado para o ano 1 e ano 2, e que são respectivamente 10 u.m. e 12 u.m.

A formulação que serve de base a este exemplo é a que consta do exemplo da secção 1.3.2.1, introduzindo-se duas novas restrições:

$$w_1 \leq 10 \text{ e } w_2 \leq 12 .$$

A resolução deste problema conduz à seguinte solução:

- Solução do Problema Primal:

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1$, $x^*_5 = 0.783$, $x^*_4 = x^*_6 = x^*_7 = 0$;

$v^*_1 = 15$, $v^*_2 = 0$, $v^*_3 = 10.4$, $v^*_4 = 50.707$, $v^*_5 = 110.01$;

$w^*_1 = w^*_3 = w^*_4 = w^*_5 = 0$, $w^*_2 = 12$.

- Solução do Problema Dual:

$\rho^*_1 = 1.5968$, $\rho^*_2 = 1.4517$, $\rho^*_3 = 1.21$, $\rho^*_4 = 1.1$, $\rho^*_5 = 1$;

$\mu^*_1 = 2.6867$, $\mu^*_2 = 12.9475$, $\mu^*_3 = 3.5467$, $\mu^*_4 = \mu^*_5 = \mu^*_6 = \mu^*_7 = 0$

$\beta^*_1 = 0$, $\beta^*_2 = 0.1207$

- Valor da função objectivo : 167.7422

A imposição de limites nos montantes a pedir emprestado resultou numa redução do nº de projectos a realizar, e óbviamente, no valor global obtido.

Assim, sugere-se a implementação dos projectos 1, 2,3. O projecto 5 é aceite parcialmente (78,3%). Como referido anteriormente, pode ser desejável o envolvimento de uma terceira entidade para a realização da parte restante do desse projecto.

O valor obtido, no 5º ano, com a aceitação destes projectos, é de 167.74 u.m..

Nos anos 1,3,4 e 5 são aplicadas no mercado, a uma taxa de 10%, disponibilidades geradas pelos projectos, nos seguintes montantes (em u.m.), respectivamente: 15, 10.4, 50.71, 110.01.

Assim, no 1º ano não se recorre a fundos externos, pelo que a restrição para estas operações, neste ano, não é actuante ($\beta^*_1 = 0$).

No 2º ano, pelo contrário, esgota-se o limite previsto para fundos a obter no exterior, ou seja, 12 u.m..

A existência deste limite, e o facto de se ter revelado actuante, resulta num custo de oportunidade positivo, dado por β^*_2, incluido na avaliação interna dos projectos, como se viu em (1.12). Para o projecto 1, por ex, tem-se

$$\mu^*_1 = \sum_{t=1}^{6} (- a_{t1})(1.1)^{5-t} + \beta^*_2 A_2, \text{ com } A_2 = \sum_{k=1}^{2} (- a_{k1})(1.1)^{2-k}$$

O valor do projecto 1 é função dos recursos consumidos ou gerados pelo mesmo, nos anos 1 e 2, apesar de no 1º ano não se recorrer a fundos exteriores. Neste caso, em ambos os anos há consumo de recursos, pelo que $\beta^*_2 A_2 < 0$, ou seja diminuindo o valor interno do projecto. Mas, quanto menor for esse consumo, maior será o valor interno do projecto, na medida em que também será menor a sua contribuição para esgotar os fundos disponibizados externamente.

Finalmente, dado que o limite para as operações passivas no 2º ano é actuante, a relaxação unitária do mesmo resultaria num incremento do valor global da carteira em 0.12 u.m. no horizonte, ou seja no 5º ano. Esta informação é relevante para a quantificação dos custos associados à imposição de um limite de 12 u.m. no 2º ano, e em que medida a empresa pode, e deseja, obter, no exterior, fundos adicionais.

1.3.2.3 Consideração de uma curva de oferta de fundos

Na maior parte dos casos a taxa de juro, ou o custo dos fundos, depende dos montantes que se pedem emprestados. Um maior envolvimento da entidade fornecedora de fundos, expresso na disponibilização de fundos crescentes, é acompanhado por um acréscimo das taxas de juro.

Esta situação poderá ser o resultado da inclusão de um prémio de risco crescente associado à maior exposição da entidade fornecedora dos fundos. Por outro lado, as condições negociadas com várias entidades fornecedoras de fundos podem ser sistematizadas, igualmente, sob a forma de uma curva de oferta de fundos do tipo apresentado na figura 4, sendo r_i a taxa de juro aplicada aos montantes superiores a B_{i-1} e menores ou iguais a B_i.

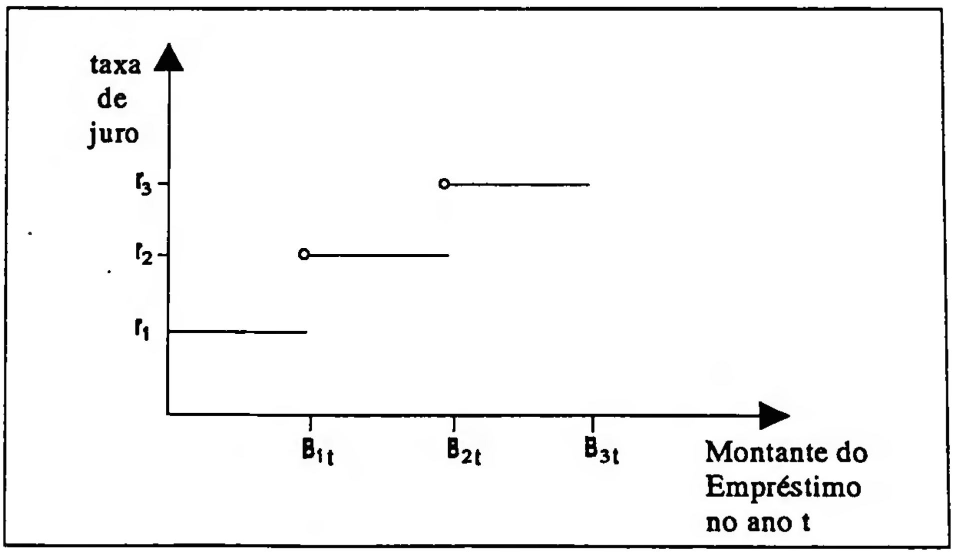


Figura 4

O modelo, considerando a existência de diferentes taxas para operações passivas, vem

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - \sum_{i=1}^{m} w_{iT}$$

s.a. (1.13)

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + v_1 - \sum_{i=1}^{m} w_{i1} \leq D_1$

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j-(1+r)v_{t-1}+v_t+\sum_{i=1}^{m}(1+r_i)w_{i,t-1}-\sum_{i=1}^{m}w_{it} \leq D_t$,t=2,...,T

(c) $w_{it} \leq B_{it}$, t=1,...,T;i=1,...,m

(d) $0 \leq x_j \leq 1$, j=1,...,n

(e) $v_t,w_{it} \geq 0$

com:

- r_i - taxa de juro aplicada ao i-ésimo troço da curva de oferta de fundos
- w_{it}- montante a pedir emprestado no i-ésimo troço da curva de oferta de fundos no ano t
- B_{it}- limite superior para montantes a pedir emprestado no i-ésimo troço da curva de oferta de fundos no ano t

As restantes variáveis mantêm as designações do modelo anterior.

No problema Dual, em substituição das restrições (1.10 e), tem-se

$$-\rho_t+(1+r_i)\,\rho_{t+1}+\beta_{it} \geq 0 \text{ , } t=1,...,T-1 \qquad (1.14)$$

sendo β_{it}, como anteriormente (1.10), a variável dual associada à existência de um limite superior a pedir emprestado no ano t , mas neste modelo, para o i-ésimo troço da curva de oferta de fundos.

Tendo em consideração os resultados obtidos nos modelos anteriores relativamente a ρ^*_t , tem interesse analisar, para este modelo, a taxa incremental anual, dada por ρ^*_t/ρ^*_{t+1}.
Considerando que w^*_{it} é o montante pedido emprestado no ano t e $r_i(t)$ a taxa de juro de um determinado troço i nesse ano tem-se [3;8]:

- $w^*_{it} = 0$, ou seja, não havendo recurso a empréstimos nesse ano, vindo com base em (1.10 d)

$$\frac{\rho^*_t}{\rho^*_{t+1}} = 1+r \qquad (1.15)$$

- $0 < w^*_{it} < B_{it}$, ou seja, apesar de haver recurso a empréstimo, o montante pedido fica aquém do limite possível à taxa $r_i(t)$, tendo-se, pela propriedade dos desvios complementares, $\beta^*_{it}=0$. Com base em (1.14),vem

$$\frac{\rho^*_t}{\rho^*_{t+1}} = 1+r_i(t) \qquad (1.16)$$

- $w^*_{it} = B_{it}$, esgotando-se, assim, o montante a pedir emprestado no i-ésimo troço, $\beta^*_{it}\geq 0$, mas nenhum montante é obtido no troço seguinte, $\beta^*_{kt}=0$ para k>i.
Neste caso obtem-se uma taxa marginal, composta para o horizonte, dado que para o troço i se tem

$$\frac{\rho^*_t - \beta^*_{it}}{\rho^*_{t+1}} = 1+r$$

e como $\beta^*{}_{it} \geq 0$ então

$$\frac{\rho^*{}_t}{\rho^*{}_{t+1}} \geq 1 + r_i(t) \qquad (1.17)$$

Como para o troço i+1 se tem ($w^*{}_{i+1,t} = 0$ e $\beta^*{}_{i+1,t} = 0$)

$$\frac{\rho^*{}_t}{\rho^*{}_{t+1}} \leq 1 + r_{i+1}(t) \qquad (1.18)$$

obtem-se ,de (1.17) e (1.18)

$$1 + r_i(t) \leq \frac{\rho^*{}_t}{\rho^*{}_{t+1}} \leq 1 + r_{i+1}(t) \qquad (1.19)$$

Pode, igualmente, considerar-se a existência de apenas uma taxa, r_i, para todo o empréstimo mas crescente com o montante envolvido. Graficamente, tem-se

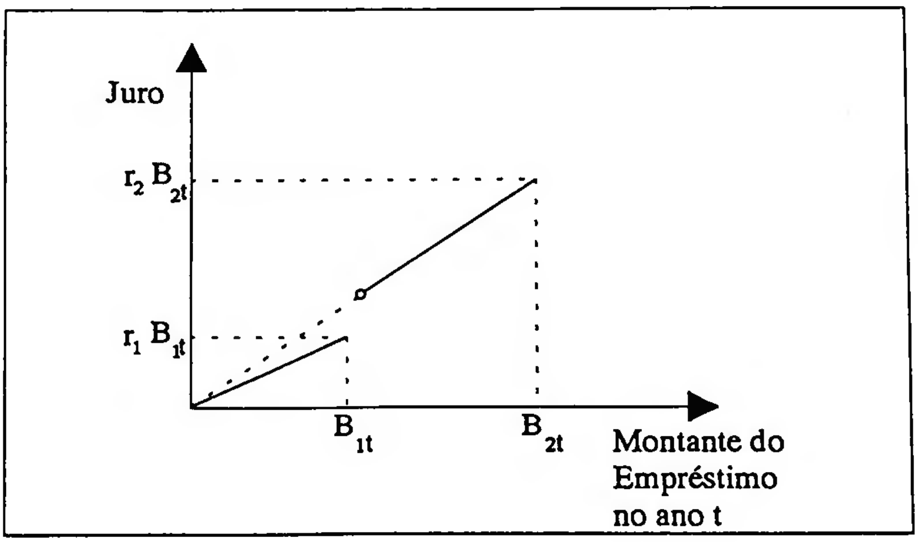


Figura 5

Esta taxa vai corresponder ao troço da curva de oferta de fundos associado ao montante global solicitado, B_i. Nesse caso, as restrições (1.13 c) passarão a ser do tipo

$$w_{it} - B_{it}\, y_i \leq 0,$$

adicionando-se, igualmente, a restrição

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \leq 1 \quad \text{e } y_i=0 \text{ ou } 1.$$

A resolução do modelo é feita recorrendo à programação linear inteira mista, dado que y_i é uma variável binária que permite excluir a possibilidade de remunerar os fundos, para um mesmo ano, a taxas diferenciadas.
Note-se que w_{it} corresponde à totalidade do empréstimo, ao contrário do que acontecia no caso anterior.
Em ambos os casos podem ser consideradas taxas de juro decrescentes, muito embora se trate duma situação pouco frequente na prática financeira.

Refira-se finalmente que a consideração de empréstimos de longo prazo pode ser prevista no modelo. Enquanto as operações de curto prazo visam, em princípio, assegurar cobertura financeira no curto prazo, a obtenção de fundos estáveis, recorrendo nomeadamente a empréstimos de longo prazo, visa, em princípio, assegurar o financiamento de activos estáveis.
Desta forma, os montantes envolvidos nas diferentes operações são substancialmente diferentes, dadas as finalidades a que se destinam.
Assim, considere-se que c_t é o montante a pedir no ano t à taxa r_c, sendo os juros e capital pagos no horizonte.

O modelo vem:

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - \sum_{i=1}^{m} w_{iT} - \sum_{t=1}^{T} (1+r_c)^{T-t} c_t$$

s.a. (1.20)

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + v_1 - \sum_{i=1}^{m} w_{i1} - c_1 \leq D_1$

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - (1+r) v_{t-1} + v_t + \sum_{i=1}^{m} (1+r_i) w_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{m} w_{it} - c_t \leq D_t$, $t=2,\ldots,T$

(c) $w_{it} \leq B_{it}$, $t=1,\ldots,T; \ i=1,\ldots,m$

(d) $0 \leq x_j \leq 1$, $j=1,\ldots,n$

(e) $v_t, c_t, w_{it} \geq 0$

Dado que as operações de longo prazo vigoram por um período superior a um ano , pode-se considerar que para $t=T-1,T$ se tem $c_t = 0$.

É possivel contemplar outras situações referentes à estrutura do serviço da dívida de médio e longo prazo. Uma das configurações mais frequentes para este tipo de operações consiste em efectuar amortizações constantes em cada um dos anos, pagando igualmente os juros correspondentes ao montante ainda em divida .

Assim, considere-se que c_t é o montante a pedir emprestado num ano t, à taxa r_c, com amortização anual constante ocorrendo a última prestação no horizonte.

O modelo, neste caso, virá

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - \sum_{i=1}^{m} w_{iT} - c_T$$

s.a. (1.21)

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + v_1 - \sum_{i=1}^{m} w_{i1} - c_1 \leq D_1$

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - (1+r) v_{t-1} + v_t + \sum_{i=1}^{m} (1+r_i) w_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{m} w_{it} + \; + \sum_{k=1}^{t-1} c_k \left((1+r_c(T-t+1))/(T-k)\right) -$

$- c_t \leq D_t$, $t=2,\ldots,T$

(c) $w_{it} \leq B_{it}$, $t=1,\ldots,T$; $i=1,\ldots,m$

(d) $0 \leq x_j \leq 1$, $j=1,\ldots,n$

(e) $v_t, c_t, w_{it} \geq 0$

Note-se que para um empréstimo contraido num ano k, se tem nos anos posteriores, $t=k+1,\ldots,T$, uma amortização anual constante dada por $c_k(1/(T-k))$ e os juros anuais, relativos ao montante ainda em dívida, dados por $r_c c_k (T-t+1)/(T-k)$.
Tal como no modelo anterior pode-se considerar $c_T = c_{T-1} = 0$.

A possibilidade de se proceder ao pagamento anual de prestações constantes, incluindo amortização e juros (R_k), relativamente a um empréstimo de longo prazo contraído no ano k e com a última prestação no horizonte, poderá igualmente ser considerada.

Tendo por base o modelo (1.13), as principais alterações consistem, relativamente ao 2º membro das restrições orçamentais, adicionar a variável c_t (montante a pedir emprestado no ano t) e subtrair

$$\sum_{k=1}^{t-1} R_k \ , t=2,\ldots,T\ .$$

Finalmente, devem ser introduzidas um conjunto de novas restrições do tipo

$$c_t - a_t R_t = 0 \ , t=1,\ldots,T,$$

sendo a_t uma constante, associada a cada um dos empréstimos, que é obtida fazendo

$$a_t = (1-(1+r_c)^{-T+t})/ r_c.$$

Tendo por base os dados expostos no exemplo da secção 1.3.2.1, quadros 3 e 4, considere--se que, para qualquer dos anos, se podem obter fundos, até um montante de 7 u.m., a uma taxa de 12%, e para montantes adicionais, até 15 u.m., a uma taxa de 14%.

O problema vem:

MAX $14.55\, x_1 + 8.18\, x_2 + 13.64\, x_3 + 21.82\, x_4 + 27.27\, x_5 + v_5 - w_{15} - w_{25}$

s.a.

(a) $10\, x_1 + 5\, x_2 + 30\, x_4 + 10\, x_6 + 12\, x_7 + v_1 - w_{11} - w_{21} \leq 30$

(b) $15\, x_1 + 5\, x_2 + 20\, x_3 + 11\, x_4 + 30\, x_5 + 12\, x_6 - 13\, x_7 - 1.1\, v_1 + v_2 + 1.12\, w_{11} + 1.14\, w_{21} -$
$- w_{12} - w_{22} \leq 35$

(c) $2\, x_1 - x_2 + 6\, x_3 + 12\, x_5 - 2\, x_6 - 1.1\, v_2 + v_3 + 1.12\, w_{12} + 1.14\, w_{22} - w_{13} - w_{23} \leq 40$

(d) $-13\, x_1 - 8\, x_2 - 12\, x_3 - 16\, x_4 - 8\, x_5 - 15\, x_6 - 1.1\, v_3 + v_4 + 1.12\, w_{13} + 1.14\, w_{23} - w_{14} -$
$- w_{24} \leq 0$

(e) $-14\, x_1 - 10\, x_2 - 13\, x_3 - 20\, x_4 - 22\, x_5 - 13\, x_6 - 1.1\, v_4 + v_5 + 1.12\, w_{14} + 1.14\, w_{24} - w_{15} -$
$- w_{25} \leq 0$

(f) $w_{1t} \leq 7$ $(t=1,...,5)$

(g) $w_{2t} \leq 15$ $(t=1,...,5)$

(h) $0 \leq x_j \leq 1$ $(j=1,...,7)$

(i) $w_{1t}, w_{2t}, v_t \geq 0$ $(t=1,...,5)$

À solução do problema é a seguinte:

- Solução do Problema Primal

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = x^*_5 = 1$, $x^*_4 = x^*_6 = x^*_7 = 0$;
$v^*_1 = 14.98$, $v^*_2 = v^*_3 = 0$, $v^*_4 = 41.03$, $v^*_5 = 104.16$;
$w^*_{12} = 7$, $w^*_{22} = 11.547$, $w^*_{1t} = w^*_{2t} = 0$ $(t=1,3,4,5)$;

- Solução do Problema Dual

$\rho^*_1 = 1.5274$, $\rho^*_2 = 1.3885$, $\rho^*_3 = 1.218$, $\rho^*_4 = 1.1$, $\rho^*_5 = 1$;
$\mu^*_1 = 4.31$, $\mu^*_2 = 13.62$, $\mu^*_3 = 4.76$, $\mu^*_5 = 1.8$, $\mu^*_4 = \mu^*_6 = \mu^*_7 = 0$;
$\beta^*_{12} = 0.024$, $\beta^*_{22} = 0$, $\beta^*_{1t} = \beta^*_{2t} = 0$ $(t=1,3,4,5)$;

- Valor da Função Objectivo : 167.8

A maior flexibilidade, relativamente ao problema da secção anterior, resultante da consideração de uma curva de oferta de fundos, conduz à realização integral do projecto 5. Assim, sugere-se a realização dos projectos 1,2,3 e 5, a que corresponde um valor global, no horizonte, de 167.8 u.m..

Nos anos 1,4, 5 as disponibilidades são respectivamente de 14.98 u.m, 41.03 u.m. e 104.16 u.m., obtendo-se fundos, no exterior, no 2º ano (7 u.m. a uma taxa de 12%, 11.55 u.m. a uma taxa de 14%).

Tal como no modelo anterior, a avaliação interna dos projectos inclui a sua contribuição em termos de uma maior ou menor utilização dos fundos externos. Nesta medida, na sua avaliação interna, os CF dos anos 1 e 2 são ponderados por β^*_{12} (variável dual associada ao montante máximo de fundos a utilizar no ano 2 à taxa de 12%) .

Finalmente, a relação entre o valor dos fundos em dois anos consecutivos , ρ^*_t / ρ^*_{t+1}, irá depender da existência, para um ano particular t, de operações activas ou passivas, cujo valor pertence ao intervalo [1.1,1.14], tal como se viu em (1.15,1.16 e 1.19).

1.3.2.4 Consideração de uma política de Dividendos

Existe alguma controvérsia acerca da existência de uma política de dividendos óptima e sobre os efeitos das políticas de dividendos sobre o valor das empresas .
No entanto, as decisões relativamente aos dividendos estão frequentemente relacionadas com as decisões de financiamento e investimento, podendo aqueles ser encarados como um subproduto das decisões de investimento, quando se opta por pagar baixos dividendos com vista a reter lucros necessários à expansão da empresa,ou como um subproduto das decisões de endividamento, quando a empresa pretende financiar grande parte das despesas de investimento através do recurso ao endividamento, libertando, desta forma, disponibilidades para dividendos [9].

Os aspectos relativos à formulação de uma política óptima de dividendos e os seus efeitos no valor das acções da empresa não serão aqui tratados, dada a dimensão do tema e o objectivo deste trabalho. Pretende-se apenas, com base nos modelos anteriores, integrar uma política de dividendos, reforçando a ideia de flexibilidade associada à utilização destes modelos, assumindo-se que os dividendos constituem para os accionistas um indicador da solidez económica e financeira da empresa.
Os Resultados Liquidos, e dado que a sua determinação implica um processo de valorização com algum grau de flexibilidade, não constituem um bom indicador, nomeadamente para aqueles accionistas que se encontram, de alguma forma, afastados dos processos contabílisticos e administrativos.
Desta forma, é geralmente aceite [3,9,23] que os accionistas são sensíveis a uma certa estabilidade histórica dos dividendos, na medida em que interpretam essa estabilidade como um bom indicador da solidez económica e financeira da empresa. Um historial de dividendos regulares, que ao contribuir para uma certa estabilidade do valor das acções da empresa, constitui também factor de atracção para os investidores institucionais, nomeadamente sociedades gestoras de fundos de pensões e outras.
Considerando que é desejável uma certa estabilidade dos dividendos e integrando a

possibilidade do seu incremento anual, pode-se formular o seguinte modelo :

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - w_T$$

s.a. (1.22)

$$\text{(a)} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + v_1 - w_1 + d_1 \leq D_1$$

$$\text{(b)} \sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j-(1+r)v_{t-1}+v_t+(1+r')w_{t-1}- w_t + d_t \leq D_t , \quad t=2,..,T$$

(c) $-d_1 \leq -d_{min}$

(d) $(1+g)\, d_{t-1} - d_t \leq 0$, $t=2,...,T$

(e) $0 \leq x_j \leq 1$, $j=1,...,n$

(f) $v_t, w_t, d_t \geq 0$, $t=1,...,T$

sendo :

d_t - montante de dividendos a distribuir no ano t

g - taxa mínima de crescimento anual, préviamente fixada, para os dividendos

d_{min} - montante mínimo de dividendos a pagar no 1º ano

r - taxa de juro para as operações activas

r' - taxa de juro para as operações passivas

mantendo-se as restantes variáveis como definidas na secção anterior.[1]

---

[1]Verifica-se fácilmente que no óptimo as restrições *c* e *d* são satisfeitas como igualdades.

Assim, relativamente ao modelo em (1.13), introduz-se em cada um dos anos, restrições (1.22 a) e (1.22 b), o montante a distribuir de dividendos nesse ano, respeitando-se os limites mínimos impostos (1.22 c,1.22 d) para cada um dos anos.

O problema Dual respectivo virá :

$$\text{Min} \sum_{t=1}^{T} \rho_t D_t - \beta_1 d_{min} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

s.a. (1.23)

(a) $\sum_{t=1}^{T} a_{tj} \rho_t + \mu_j \geq \hat{a}_j$, $j=1,...,n$

(b) $\rho_{t-1} - (1+r) \rho_t \geq 0$, $t=1,...,T-1$

(c) $\rho_T \geq 1$

(d) $- \rho_{t-1} + (1+r') \rho_t \geq 0$, $t=1,...,T-1$

(e) $- \rho_T \geq -1$

(f) $\rho_t - \beta_t + (1+g) \beta_{t+1} \geq 0$, $t=1,...,T-1$

(g) $\rho_T - \beta_T \geq 0$

(h) $\rho_t, \beta_t, \mu_j \geq 0$

A imposição de um limite mínimo de dividendos a distribuir em cada um dos anos do programa de investimentos resulta num custo de oportunidade dado pela variável dual β_t. Esta poderá ser entendida como o custo de oportunidade de se distribuir sob a forma de dividendos, ou seja, retirando para consumo, uma u.m. adicional no ano t.

No ano horizonte, T, a distribuição de uma u.m. adicional de dividendos corresponderá a igual decréscimo de valor na função objectivo, pois de (1.23 c) e (1.23 e) vem $\rho_T=1$ e de (1.23 g), pela propriedade dos desvios complementares, dado $d_T>0$, resulta $\beta^*_T=1$.
Nos anos intermédios, t=1,...,T-1, com $d^*_t>0$, no óptimo, a partir de (1.23 f) vem

$$\beta^*_t = \rho^*_t + (1+g)\beta^*_{t+1} \tag{1.24}$$

ou seja, o custo de oportunidade de retirar do sistema, sob a forma de dividendos, uma u.m. no ano t é função de ρ^*_t (valor no horizonte de uma u.m. adicional em t) e dos custos de oportunidade nos anos posteriores, resultantes da imposição de um crescimento mínimo anual dos dividendos a distribuir.

Se não se impusesse este crescimento nem qualquer relação entre os dividendos a distribuir nos diferentes anos, viria $\beta^*_t = \rho^*_t$, ou seja, o custo de oportunidade de distribuir, para dividendos, uma u.m. no ano t seria dado pela valorização que essa u.m. poderia ter se não fosse retirada do programa.
Dado não ser este o caso, com base em (1.24) tem-se para uma ano k

$$\beta^*_k = \rho^*_k + \sum_{t=1}^{T-k} (1+g)^t \rho^*_{t+k} \tag{1.25}$$

pelo que o custo de oportunidade vem incrementado dada a relação inter-temporal considerada em (1.22 d).

Refira-se, finalmente, o modelo proposto por Weingartner [29] onde se integra igualmente uma política de dividendos. Neste modelo considera-se que o objectivo do programa de investimentos é a maximização do crescimento dos dividendos o que é equivalente à maximização dos dividendos a distribuir no horizonte.

O modelo proposto é dado por :

$$\text{MAX } d_T$$

s.a. (1.26)

$$\text{(a) } \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + v_1 - w_1 + d_1 \leq D_1$$

$$\text{(b) } \sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j - (1+r)v_{t-1} + v_t + (1+r')w_{t-1} - w_t + d_t \leq D_t\,,\ t=2,..,T$$

$$\text{(c) } -d_1 \leq -d_{min}$$

$$\text{(d) } d_{t-1} - d_t \leq 0,\ t=2,\dots,T$$

$$\text{(e) } r\,(\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j\, x_j + D + v_T - w_T) \geq d_T$$

$$\text{(f) } 0 \leq x_j \leq 1\ \ ,\ j=1,\dots,n$$

$$\text{(g) } v_t,\ w_t,\ d_t \geq 0\ ,\ t=1,\dots,T$$

onde D representa o valor da empresa, sem o programa de investimentos, estimado para o horizonte, ou seja, considerando os fundos gerados pelos activos actuais. As restantes variáveis mantém as designações do modelo anterior.

A restrição (1.26 e) corresponde à distribuição de uma renda perpétua, considerando a taxa para operações activas e com base no valor da empresa no horizonte, que deverá ser no mínimo maior que os dividendos pagos no horizonte.

Por forma a evitar a possibilidade de se obter um perfil de dividendos caracterizado por baixos montantes a distribuir nos períodos iniciais e com um aumento significativo dos dividendos no ano horizonte, poderá substituir-se (1.26 d) por

$$d_t \geq \alpha \, d_{t-1},$$

impondo-se desta forma uma taxa mínima de crescimento para os dividendos (α>1) nos períodos intermédios.

Se se pretender integrar a possibilidade do decisor examinar várias soluções alternativas, em termos da taxa mínima de crescimento, antes de exprimir as suas preferências, pode introduzir-se a restrição :

$$d_t/d_{min} \leq \alpha^t ,$$

fazendo-se $d_1 = d_{min}$ e parametrizando α^t. Obtem-se, assim, para uma dada taxa mínima de crescimento anual dos dividendos, a mais elevada taxa média de crescimento no período considerado.

Tal como nos exemplos anteriores, os dados relativos aos projectos são os que constam da secção 1.3.2.1, quadro 3. Considere-se que, para qualquer dos anos, os fundos gerados podem ser aplicados a uma taxa anual de 10% ou obtidos, no mercado, a uma taxa anual de 14%. Finalmente, pretende-se que os dividendos a distribuir tenham um incremento anual de pelo menos 1%, e o montante a distribuir no 1º ano seja não inferior a 4 u.m.

Tendo por base (1.22), o problema vem:

$$\text{MAX}\quad 14.55\,x_1 + 8.18\,x_2 + 13.64\,x_3 + 21.82\,x_4 + 27.27\,x_5 + v_5 - w_5$$

s.a.

(a) $10\,x_1 + 5\,x_2 + 30\,x_4 + 10\,x_6 + 12\,x_7 + v_1 - w_1 + d_1 \le 30$

(b) $15\,x_1 + 5\,x_2 + 20\,x_3 + 11\,x_4 + 30\,x_5 + 12\,x_6 - 13\,x_7 - 1.1\,v_1 + v_2 + 1.14\,w_1 - w_2 + d_2 \le 35$

(c) $2\,x_1 - x_2 + 6\,x_3 + 12\,x_5 - 2\,x_6 - 1.1\,v_2 + v_3 + 1.14\,w_2 - w_3 + d_3 \le 40$

(d) $-13\,x_1 - 8\,x_2 - 12\,x_3 - 16\,x_4 - 8\,x_5 - 15\,x_6 - 1.1\,v_3 + v_4 + 1.14\,w_3 - w_4 + d_4 \le 0$

(e) $-14\,x_1 - 10\,x_2 - 13\,x_3 - 20\,x_4 - 22\,x_5 - 13\,x_6 - 1.1\,v_4 + v_5 + 1.14\,w_4 - w_5 + d_5 \le 0$

(f) $-d_1 \le -4$

(g) $1.01\,d_{t-1} - d_t \le 0$ $(t=1,\dots,5)$

(h) $0 \le x_j \le 1$ $(j=1,\dots,7)$

(i) $w_t, v_t \ge 0$ $(t=1,\dots,5)$

À solução do problema é a seguinte:

- Solução do Problema Primal

$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = x^*_5 = 1,\ x^*_4 = x^*_6 = x^*_7 = 0$;
$v^*_1 = 11,\ v^*_2 = v^*_3 = 0,\ v^*_4 = 21.16,\ v^*_5 = 78.11$;
$w^*_1 = w^*_4 = w^*_5 = 0,\ w^*_2 = 26.94,\ w^*_3 = 13.79$;
$d^*_1 = 4.00,\ d^*_2 = 4.04,\ d^*_3 = 4.08,\ d^*_4 = 4.12,\ d^*_5 = 4.16$;

- Solução do Problema Dual

$\rho^*_1 = 1.5725,\ \rho^*_2 = 1.4296,\ \rho^*_3 = 1.254,\ \rho^*_4 = 1.1,\ \rho^*_5 = 1$;
$\mu^*_1 = 3.17,\ \mu^*_2 = 13.22,\ \mu^*_3 = 3.72,\ \mu^*_5 = 0.14\ \mu^*_4 = \mu^*_6 = \mu^*_7 = 0$;
$\beta^*_1 = 6.47,\ \beta^*_2 = 4.85,\ \beta^*_3 = 3.38,\ \beta^*_4 = 2.11,\ \beta^*_5 = 1$;

- Valor da função objectivo : 141.75

Os projectos a implementar coincidem com os indicados na solução do exemplo da secção anterior. O valor esperado de horizonte é de 141.75 u.m..

Nos 2º e 3º anos, os fundos a obter no exterior ascendem a 26,94 u.m. e 13.79 u.m., respectivamente. Relativamente à aplicação de excedentes,a uma taxa de 10%, esta tem lugar no ano 1 (11 u.m.), ano 4 (21.16 u.m) e ano 5 (78.11 u.m.).

Como se pode constatar, os dividendos a distribuir (d_t, t=1,...,5) são incrementados, anualmente, à taxa mínima de 1%, visto que um incremento dos dividendos a distribuir afecta negativamente o valor global obtido, dado que são retirados do sistema recursos para os quais existem aplicações alternativas. Esta política gera custos de oportunidade, expressos pelas variáveis duais β^*_t, que medem o impacto , no valor de horizonte da carteira, de alterações nos montantes a distribuir para consumo, num determinado ano t.
Assim, se se abandonar a exigência de um nível mínimo de dividendos, definido para o 1º ano em 4 u.m., obtem-se um acréscimo, do valor global do programa, de 25.878 u.m. ($4\beta^*_1$). De igual forma, o incremento do limite mínimo de d_1 resultará num decréscimo proporcional a β^*_1.

Como atràs foi referido (1.25), o custo de oportunidade associado à distribuição de dividendos num determinado ano t é função não só da valorização interna dos recursos, ou seja das disponibilidades para investimento préviamente fixadas (D_t) e dos fundos gerados pelos projectos, como da relação inter-temporal dos montantes a distribuir, imposta por uma taxa mínima de crescimento anual de dividendos.
Assim, tem-se

$$\beta^*_t = \rho^*_t + 1.01\, \beta^*_{t+1}.$$

Na medida em que alterações nos montantes a distribuir no ano t determinam os montantes a distribuir nos anos posteriores, o custo de oportunidade num ano é, também, função dos custos de oportunidade para t=t+1,...,T.

1.3.3 A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Nos modelos expostos nas secções anteriores um dos pressupostos básicos, como foi referido, é o de que os diversos parâmetros (Cash-Flow's, taxas de juro, orçamentos de investimento, restrições para operações financeiras, etc), são constantes conhecidas. Os valores considerados no modelo têm por base previsões sobre condições futuras, relativamente à empresa e ao seu meio envolvente, caracterizadas, quase sempre, pela incerteza, onde inúmeros factores incontroláveis condicionam e influenciam os resultados dos projectos.

A análise de sensibilidade permite, ainda que indirectamente e de forma elementar, considerar o risco no processo de análise e selecção dos projectos de investimento.
Nessa medida, quer porque os valores estimados podem reflectir erros de previsão, quer porque poderá ser desejável rever algumas decisões de gestão, tais como a fixação de orçamentos e de outras restrições, após a análise das suas consequências potenciais , a solução óptima obtida poderá ser encarada como um ponto de partida para análises posteriores, estudando o impacto, na solução referida, da alteração dos parâmetros do modelo.

A determinação dos intervalos de variação para esses parâmetros, tomados isoladamente, sem que a base óptima obtida (a carteira de projectos) se altere ou a determinação de diversos intervalos, a que correspondem diferentes soluções em termos da composição da carteira de projectos, poderá ser feita através da análise de sensibilidade e da programação paramétrica [18,24].

Desta forma, a identificação dos parâmetros para os quais o intervalo de variação é menor, não só em termos absolutos como relativos, permite decidir sobre a necessidade de se efectuar estudos mais aprofundados, relativamente ao mercado potencial, tecnologias, etc, com o objectivo de melhorar a sua estimativa.

Tendo por base o exemplo e respectivos resultados apresentados na secção 1.3.2.2, expõe-se a seguir os resultados obtidos com a análise de sensibilidade da respectiva solução à variação de alguns dos parâmetros do modelo, tomados isoladamente.

- Os intervalos de variação, em u.m., para os Cash Flows intermédios do projecto 1 (a_{t1} , t=1,...,5), são os seguintes:

	Valor Mínimo	Valor Original	Valor Máximo
a_{11}	4.10	10.00	11.68
a_{21}	8.51	15.00	16.85
a_{31}	$-\infty$	2.00	4.22
a_{41}	$-\infty$	- 13.00	- 10.56
a_{51}	$-\infty$	- 14.00	- 11.32

No 2º ano, por exemplo, o investimento no projecto 1 pode ascender a 16.85 u.m., ou seja, um incremento relativo de 12.3%, sem que aquele seja excluido do programa de investimentos. O montante a investir poderá decrescer até 8.51 u.m., não havendo alteração da carteira de projectos sugerida inicialmente.

No 4º ano os fundos gerados pelo projecto não poderão ser inferiores a 10.56 u.m., não havendo óbviamente limite superior para esses montantes.
O valor da carteira no ano de horizonte, valor da F.O., vem dado por

$$Z' - \rho^*_t \, \Delta \, a_{t1},$$

sendo Z' o valor obtido na solução óptima anterior, ou seja, com os valores originais.

- a análise dos CF posteriores ao ano 5 e actualizados para esse ano, $\hat{a}_j$, conduz à obtenção dos seguintes intervalos de variação:

	Valor Mínimo	Valor Original	Valor Máximo
$\hat{a}_1$	11.87	14.55	$+\infty$
$\hat{a}_2$	-4.77	8.18	$+\infty$
$\hat{a}_3$	10.09	13.64	$+\infty$
$\hat{a}_4$	$-\infty$	21.82	26.27
$\hat{a}_5$	25.36	27.27	30.37
$\hat{a}_6$	$-\infty$	0	1.47
$\hat{a}_7$	$-\infty$	0	0.29

Os resultados obtidos indicam, por exemplo, que os CF posteriores ao 5º ano, actualizados para esse ano , que se espera sejam gerados pelo projecto 1, poderão aumentar indefinidamente ou, ao contrário, poderão decrescer de 2.68 u.m., sem que o projecto deixe de ser contemplado na carteira inicialmente obtida. O valor global desta reflectirá essas variações dos coeficientes da função objectivo e vem dado por

$$Z' + \Delta\, \hat{a}_k$$

sendo Z´ o valor global obtido na solução inicial e $\Delta\, \hat{a}_k$ o acréscimo (positivo ou negativo), limitado ao intervalo obtido, dos CFs, posteriores ao horizonte e actualizados para essa data, do projecto k.

Para $\Delta\, \hat{a}_1 < -2.68$, o projecto 1 será parcialmente aceite ou até totalmente rejeitado, dependendo da amplitude de variação considerada.

Da mesma forma, os projectos rejeitados continuarão a não ser contemplados no plano de investimento, para variações dos respectivos coeficientes nos intervalos obtidos, mantendo-se, igualmente, o nível de aceitação dos projectos parcialmente aceites/rejeitados.
Assim, o nível de aceitação do projecto 5, 78.3%, será idêntico para $-1.91 \leq \Delta\, \hat{a}_5 \leq 3.1$.

- para os termos independentes das restrições orçamentais e das restrições para operações passivas obtem-se os seguintes intervalos de variação :

	Valor Mínimo	Valor Original	Valor Máximo
D_1	15.00	30.00	35.90
D_2	11.50	35.00	41.50
D_3	29.60	40.00	$+\infty$
D_4	-50.71	0	$+\infty$
D_5	-110.01	0	$+\infty$
B_1	0	10.00	$+\infty$
B_2	0	12.00	18.49

Como foi referido, a variação marginal dos termos independentes das restrições, D_t e B_t, tem como resultado uma variação do valor global da carteira de ρ^*_t e β^*_t, respectivamente. O mesmo se passa para os intervalos obtidos, pois estes indicam, igualmente, um intervalo de estabilidade dos preços sombra. Assim, a variação do valor da carteira (valor da função objectivo), explicada pela variação dos fundos próprios ou alheios, cujo valor unitário vem dado pela respectiva variável dual, é dada, respectivamente, por:

$$\Delta Z' = \rho^*_t \,\Delta D_t \quad \text{ou} \quad Z' = \beta^*_t \,\Delta B_t.$$

Com base nos resultados obtidos, é possível disponibilizar para investimento, no 1º ano, apenas 15 u.m, ou retirar no 4º ano para outras finalidades até 50.7 u.m., preservando a base óptima.

Relativamente ao projecto 5, associado ao limite inferior e superior para D_1 tem-se, respectivamente, $x^*_5 = 0.23$ e $x^*_5 = 0.99$, pois a menor ou maior disponibilização de recursos irá determinar o grau de realização do mesmo.

Finalmente, seria desejável a obtenção de fundos alheios adicionais no 2º ano, até um máximo de 6.49 u.m., dado o custo de oportunidade associado à respectiva restrição.

2. APLICAÇÃO A UM CASO

No presente capítulo é utilizada a programação linear, em complemento dos critérios do VAL e TIR, com a finalidade de seleccionar, com base numa carteira de projectos de investimento duma Sociedade de Capital de Risco (SCR), os projectos nos quais seria desejável uma participação da mesma.

Os resultados obtidos deverão ser encarados como indicativos, visando sobretudo apoiar a tomada da decisão, na medida em que é indispensável efectuar uma abordagem que tenha em conta outros factores, nomeadamente qualitativos, na análise das diversas oportunidades de negócio, considerando-se, entre outros, o grau de objectividade com que é definida a missão da empresa, o conhecimento que os promotores têm do mercado assim como a sua experiência empresarial, capacidade de gestão e liderança e tipo de riscos envolvidos.

Finalmente, são estabelecidos alguns pressupostos relativamente ao funcionamento da SCR e a alguns parâmetros do modelo, que foram óbviamente discutidos e considerados como razoáveis pelos seus Administradores. Para uma melhor compreensão dos mesmos e antes da exposição do problema vai referir-se, ainda que de forma sucinta, a actividade e enquadramento das sociedades de capital de risco.

2.1 O CAPITAL DE RISCO

O capital de risco constitui um meio de financiamento sob a forma de participação no capital social de empresas já existentes ou a criar, numa perspectiva temporária e geralmente em posição minoritária.
Desta forma, a empresa vê reforçados os seus fundos próprios, evitando um aumento do seu

endividamento, dispondo igualmente de recursos estáveis e de longa duração que permitem o seu desenvolvimento, dado que a sua natureza de capital social não acarreta o pagamento de juros.

Por outro lado, a SCR constitui um parceiro activo qua apoia o promotor quer ao nível da gestão financeira, técnica, administrativa e comercial, quer pelos contactos que possibilita com diversas instituições com as quais aquela se relaciona.

O envolvimento da SCR poderá ser solicitado em qualquer fase de desenvolvimento da empresa, considerando-se geralmente os seguintes tipos de operações :

- *Criação de Empresas*

É nesta fase, em que o risco é geralmente maior, que, teóricamente, o capital de risco tem o seu campo privilegiado de actuação, na medida em que os empréstimos tradicionais são muito difíceis de obter e, frequentemente, os promotores dos projectos não têm experiência empresarial e fundos que possibilitem o arranque da empresa;

- *Expansão de Empresas*

A intervenção visa, geralmente, o aumento da capacidade de produção, a conquista de novos mercados e o desenvolvimento de novos produtos;

- *Recuperação de Empresas*

Trata-se fundamentalmente de apoiar empresas, viáveis económicamente, mas com dificuldades financeiras e cujo respectivo saneamento pode permitir a sua recuperação. Com este objectivo, e tal como nas operações anteriores, o apoio da SCR pode estender-se não só ao reforço da equipa de gestão como à negociação com outras organizações que possam viabilizar esse saneamento.

- Aquisição de Empresas

Neste caso, pretende-se apoiar a transmissão da propriedade do capital social das empresas, nomeadamente através de operações de 'management buy-out' (MBO) e 'management buy-in' (MBI).

Como se referiu, a participação da SCR é , normalmente, temporária, com um tempo de vida oscilando entre os 3 e os 8 anos, e minoritária, não excedendo, em regra, 45% do capital social, na medida em que não se pretende liderar a iniciativa ou substituir os seus promotores.

No entanto, uma participação mais ou menos significativa (em termos absolutos ou relativos) e a existência ou não de deficiências em áreas críticas da gestão, poderão determinar um maior ou menor envolvimento na gestão da empresa, a que corresponde um acompanhamento do tipo 'hands-on' ou 'hands-off'.

Este aspecto, tal como a distribuição de lucros e as condições em que se fará a saída da SCR, é estabelecido, paralelamente ao contrato de sociedade, através de acordos parassociais.

A remuneração da SCR consiste normalmente nas mais-valias conseguidas através da venda das suas participações, em geral na bolsa, após a admissão à cotação da empresa, ou aos seus sócios/accionistas. Neste caso, podem igualmente ser definidos, nos acordos referidos, valores-limite das acções ou quotas a adquirir por parte dos sócios empresários e, como forma parcial de remuneração da SCR, a distribuição de parte dos resultados.

Finalmente, existem alguns limites legais[1] relativamente às participações das SCR :

- em cada caso, não podem exceder 20% do seu capital social e reservas;

---

[1] O enquadramento jurídico do capital de risco em Portugal é feito pelo DL 433/91 de 7 de Novembro.

- o total das participações não pode exceder três vezes o valor do capital social e reservas;
- em cada momento, pelos menos 75% das participações não poderão ter estado na sua titularidade, seguida ou interpoladamente, por um período superior a 12 anos;

- As participações que excedam 50% do capital social das empresas participadas não poderão ultrapassar nunca os 50% do capital social da SCR.

2.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Como foi referido, a SCR deverá, a partir de um conjunto de projectos que lhe são apresentados e após ter efectuado a análise qualitativa dos mesmos, determinar a sua participação no capital social das empresas promotoras.
Na perspectiva da SCR estes projectos são perfeitamente divisíveis, podendo ser fixado pelos seus promotores ou pela SCR um montante máximo de participação.
No entanto, a percentagem máxima de participação no capital social, por razões de política interna da SCR, não deverá exceder os 48%.
Os projectos que serviram de base à aplicação do modelo foram apresentados em 1991 e referem-se a operações de Criação de Empresas, também designadas por 'Projectos de Arranque'.
Os outros tipos de operações - Expansão, Recuperação e Aquisição - poderão igualmente ser consideradas. Neste caso, para além das restrições legais e de outras associadas aos projectos, poderá ser indicado o envolvimento máximo por tipo de operação, evitando-se, desta forma, uma exposição elevada da SCR resultante da aceitação de projectos de elevada rendibilidade, mas igualmente de elevado risco. Visto que o impacto em termos do problema em análise se resume, principalmente, a um aumento substancial do nº de projectos e dos dados a tratar, foram apenas considerados os 'Projectos de Arranque'. No final do capítulo é proposto um modelo que considere os diversos tipos de operações.

Assim, e sem perda de generalidade, pode-se considerar a existência de quatro tipos de carteiras diferentes, tantas quanto o tipo de operações referidas, considerando-se que, para cada carteira, se devem respeitar as restrições legais referidas e outras restrições internas nas quais se incluem os orçamentos de investimento, que têm em consideração a exposição desejada para cada tipo de operação, o envolvimento máximo num determinado sector de actividade e eventuais relações de dependência entre projectos.

Considera-se também que o gestor da carteira pode recorrer ao mercado por forma a obter fundos, respeitando limites, definidos internamente, para estas operações, quer de curto prazo quer de longo prazo. Os montantes e condições em que estes fundos são disponibilizados são negociados pela SCR, considerando as suas necessidades globais e fixando, igualmente, os montantes máximos para cada tipo de carteira.

Relativamente aos fundos gerados por projectos da carteira, aqueles poderão ser utilizados para satisfazer necessidades de fundos de outros projectos, da mesma carteira, ou aplicados no mercado á taxa para estas operações.
Esta última alternativa - a aplicação dos fundos disponíveis no mercado - não deverá ser entendida de forma rígida, na medida em que se poderá considerar a sua afectação, designadamente a novas carteiras, apresentadas nesses anos, e reforço dos orçamentos de investimento, quer globais quer para cada tipo de operações. Estas decisões deverão ser tomadas após a análise do seu impacto na carteira. Assim, estes montantes deverão ser encarados como disponibilidades que poderão ser remuneradas à taxa de mercado para este tipo de operações.

Finalmente, os CF's de cada projecto, na perspectiva da SCR, traduzem dois tipos de remuneração, préviamente negociada com os promotores, que resultam da :

- venda da participação à data fixada para desinvestimento por parte da SCR;
- distribuição anual de dividendos em função da participação no capital social e da venda desta.

O envolvimento máximo previsto em cada um dos projectos, em termos de montante e de participação máxima no capital social da empresa promotora, constam do quadro 5 .

QUADRO 5

ENVOLVIMENTO MÁXIMO PREVISTO

Projectos	10^3 contos	%
1	2085.0	30.7
2	46.2	28.8
3	120.0	48.0
4	7.1	33.3
5	20.0	47.6
6	36.0	20.0
7	1.8	10.0
8	45.0	30.0
9	2.0	20.0
10	9.3	30.0
11	64.8	40.0
12	57.0	20.0
13	24.7	22.7
14	135.0	45.0
15	57.0	25.0

O perfil dos CF's, associados aos cenários mais prováveis, resultante da participação máxima prevista nos diversos projectos (Pr), consta do quadro 6.

QUADRO 6

PERFIL DOS CF'S

(10^3contos)

Anos Pr	1	2	3	4	5	6	7
1	2085.0						-13636.2
2	46.2	-19.4	-22.1	-25.2	-137.6		
3	102.6	17.4				-1068.4	
4	5.1	0.6	1.4	-12.2	-17.4	-31.7	
5	20.0	-5.7	-4.0	-4.7	-38.5		
6	36.0					-689.1	
7	1.8	-2.7	-3.0	-3.1	-17.0		
8	31.6	13.4			-104.9		
9	2.0	-0.1	-0.4	-0.6	-0.8	-9.7	
10	7.8	-1.0	1.4	-1.9	-3.2	-26.2	
11	12.2	52.6	-13.9	-13.7	-13.7	-115.5	
12	17.3	21.0	18.7	-39.1	-159.7		
13	18.2	-3.5	6.5	-4.8	-5.2	-43.4	
14	135.0		-27.8	-47.3	-53.7	-321.7	
15	51.3	5.7	-13.5	-21.2	-22.4	-137.3	

Nota: Por convenção, CF>0 corresponde a saída de fundos e CF<0 corresponde a entrada de fundos.

Relativamente aos projectos apresentados há ainda as seguintes indicações:

- os projectos 11,12 e 13 são concorrentes, pelo que a SCR considera que só deve participar num dos projectos referidos. O mesmo se verifica para os projectos 2 e 6.

- o projecto 4 consiste na implementação de equipamento específico que tem por base a linha de fabrico a realizar no âmbito do projecto 8, que poderá ser implementado sem esse equipamento específico.

- os projectos 3,5,14 e 15 situam-se num sector de actividade no qual a SCR, dadas as expectativas relativamente ao mesmo, não pretende um envolvimento superior a 20000 contos.

O orçamento global de investimento da SCR é de 1000000 contos(cts). Para 'Projectos de Arranque' estão destinados 200000 contos, os quais se distribuem, para os próximos 3 anos da seguinte forma:

Ano	Montante (10^3 cts)
1	140
2	40
3	20

Para operações activas prevê-se que os fundos disponíveis, em cada ano, possam ser aplicados a uma taxa anual de 14%.

Relativamente às operações passivas de curto prazo, os montantes a obter em cada ano não podem exceder 12% do orçamento global para este tipo de operações - 'Projectos de Arranque'. As condições negociadas pela SCR são as seguintes :

Montante	Taxa
≤ 10000 cts	22%
> 10000 cts	23% [1]

É igualmente possível o recurso a um empréstimo de longo prazo nas seguintes condições:

Montante:	80000 cts
Taxa:	24.5%
Utilização:	1º ano
Diferimento:	1 ano
Reembolso:	5 anos

[1] Taxa aplicada apenas sobre os montantes que excedem 10000 cts.

2.3 FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

O problema descrito na secção anterior vai ser formalizado recorrendo a um modelo de horizonte.

Como foi referido, neste tipo de modelos não é necessário explicitar a taxa de desconto para actualizar os CF que ocorrem até ao horizonte, sendo no entanto necessário recorrer a um factor de desconto para os CF posteriores a essa data.

Neste caso, optou-se por considerar um horizonte de 7 anos visto que a última participação será vendida no final do 7º ano, não sendo, portanto, necessário explicitar um factor de desconto.

As variáveis utilizadas no modelo são definidas da seguinte forma:

x_j - fracção a aceitar do projecto j, pelo que $x_j=1$ corresponde à participação máxima no
capital social da empresa promotora do projecto j (j=1,...,15).

v_t - montante a emprestar no ano t à taxa definida para este tipo de operações - 14%.

w_{t1} - montante a pedir emprestado, no curto prazo, a uma taxa de 22%, cujo limite máximo é de 10000 cts.

w_{t2} - montante a pedir emprestado, no curto prazo, a uma taxa de 23% para os montantes que excedam 10000 cts e até 24000 contos.

W - empréstimo de longo prazo a obter no 1º ano, cujos reembolsos e juros nos anos seguintes vêm

	Amortização	Juros	Total
Ano 2 -	-	0.245 W	0.245 W
Ano 3 -	0.20 W	0.245 W	0.445 W
Ano 4 -	0.20 W	0.196 W	0.396 W
Ano 5 -	0.20 W	0.147 W	0.347 W
Ano 6 -	0.20 W	0.098 W	0.298 W
Ano 7 -	0.20 W	0.049 W	0.249 W

Assim, para cada um dos anos do programa têm-se as seguintes restrições orçamentais (10^3 cts):

- Ano 1 -

$$2085.0\, x_1 + 46.2\, x_2 + 102.6\, x_3 + 5.1\, x_4 + 20.0\, x_5 + 36.0\, x_6 + 1.8\, x_7 + 31.6\, x_8 + 2.0\, x_9 + 7.8\, x_{10} + 12.2\, x_{11} + 17.3\, x_{12} + 18.2\, x_{13} + 135\, x_{14} + 51.3\, x_{15} + v_1 - w_{11} - w_{12} - W \leq 140$$

- Ano 2 -

$$- 19.4\, x_2 + 17.4\, x_3 + 0.6\, x_4 - 5.7\, x_5 - 2.7\, x_7 + 13.4\, x_8 - 0.1\, x_9 - x_{10} + 52.6\, x_{11} + 21\, x_{12} - 3.5\, x_{13} + 5.7\, x_{15} - 1.14\, v_1 + v_2 + 1.22\, w_{11} + 1.23\, w_{12} - w_{21} - w_{22} + 0.245\, W \leq 40$$

- Ano 3 -

$$- 22.1\, x_2 + 1.4\, x_4 - 4\, x_5 - 3\, x_7 - 0.4\, x_9 + 1.4\, x_{10} - 13.9\, x_{11} + 18.7\, x_{12} + 6.5\, x_{13} - 27.8 x_{14} - 13.5\, x_{15} - 1.14\, v_2 + v_3 + 1.22\, w_{21} + 1.23\, w_{22} - w_{31} - w_{32} + 0.445\, W \leq 20$$

- Ano 4 -

$$- 25.2\, x_2 - 12.2\, x_4 - 4.7\, x_5 - 3.1\, x_7 - 0.6\, x_9 - 1.9\, x_{10} - 13.7\, x_{11} - 39.1\, x_{12} - 4.8\, x_{13} - 47.3\, x_{14} - 21.2\, x_{15} - 1.14\, v_3 + v_4 + 1.22\, w_{31} + 1.23\, w_{32} - w_{41} - w_{42} + 0.396\, W \leq 0$$

- Ano 5 -

$- 137.6\, x_2 - 17.4\, x_4 - 38.5\, x_5 - 17.0\, x_7 - 104.9\, x_8 - 0.8\, x_9 - 3.2\, x_{10} - 13.7\, x_{11} - 159.7\, x_{12} -$
$- 5.2\, x_{13} - 53.7\, x_{14} - 22.4\, x_{15} - 1.14\, v_4 + v_5 + 1.22\, w_{41} + 1.23\, w_{42} - w_{51} - w_{52} +$
$+ 0.347\, W \le 0$

- Ano 6 -

$- 1068.4\, x_3 - 31.7\, x_4 - 689.1\, x_6 - 9.7\, x_9 - 26.2\, x_{10} - 115.5\, x_{11} - 43.4\, x_{13} - 321.7\, x_{14} -$
$- 137.3\, x_{15} - 1.14\, v_5 + v_6 + 1.22\, w_{51} + 1.23\, w_{52} - w_{61} - w_{62} + 0.298\, W \le 0$

- Ano 7 -

$- 13636.2\, x_1 - 1.14\, v_6 + v_7 + 1.22\, w_{61} + 1.23\, w_{62} - w_{71} - w_{72} + 0.249\, W \le 0$

Relativamente aos limites legais, referidos na secção 2.1, deve notar-se que nenhuma das participações se mantém por um período superior a 12 anos ou é superior a 50% do capital social das empresas participadas, tal como acima referido.

Assim, relativamente ao limite segundo o qual cada participação não pode exceder 20% do capital e reservas da SCR (3049.7×10^3 cts) e considerando o montante a investir em cada um dos projectos (quadro nº 5) tem-se a seguinte restrição associada ao projecto 1

$$2085.0\, x_1 \le 609.9$$

pois, para os restantes projectos o montante máximo a investir é inferior ao limite legal referido.

Visto que as participações actuais ascendem a 1854.4×10^3 cts, o limite legal, segundo o qual o total de participações da SCR não deve exceder três vezes o valor do seu capital e reservas, situa-se, pressupondo que não haverá reforço dos capitais próprios, em 7295×10^3 cts. Assim, e dado que a carteira de projectos de arranque tem um peso de 20% no orçamento de investimento, pode considerar-se que este limite, para os projectos referidos, se situa em 1459.0×10^3 cts. A respectiva restrição vem

$$2085.0\,x_1 + 46.2\,x_2 + 120.0\,x_3 + 7.1\,x_4 + 20.0\,x_5 + 36.0\,x_6 + + 1.8\,x_7 + 45.0\,x_8 + 2.0\,x_9 + \\ + 9.3\,x_{10} + 64.8\,x_{11} + 57.0\,x_{12} + + 24.7\,x_{13} + 135.0\,x_{14} + 57.0\,x_{15} \leq 1459.0 \ .$$

As relações entre projectos podem ser expressas através das seguintes restrições :

- mútua exclusividade[1] entre os projectos 11,12 e 13

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$$

- mútua exclusividade entre os projectos 2 e 6

$$x_2 + x_6 \leq 1$$

- relação de contingência[2] entre os projectos 4 e 8

$$x_4 - x_8 \leq 0$$

- envolvimento máximo no sector de actividade dos projectos 3, 5, 14 e 15

[1]Dado que se considera projectos divisíveis, poder-se-á obter uma solução que sugira a aceitação de mais do que um projecto. Neste caso pode-se recorrer à programação mista introduzindo-se as seguintes restrições:

$$x_j \leq \delta_j \ \text{ e } \Sigma\, \delta_j \leq 1 \text{ com } \delta_j{=}0{,}1 \text{ e } j \in M$$

(sendo M um conjunto de projectos mutuamente exclusivos).

[2]Caso se obtenha uma solução fraccionada para ambos os projectos pode-se recorrer a uma forma alternativa de considerar esta situação e que consiste em agregar os dois projectos, obtendo-se um projecto alternativo, A. Desta forma, A e 8 seriam projectos mútuamente exclusivos.

$$120.0\,x_3 + 20.0\,x_5 + 135.0\,x_{14} + 57.0\,x_{15} \leq 20$$

As operações passivas de curto prazo podem ser expressas pelas seguintes restrições:

$$w_{t1} \leq 10\,,\ t=1,\ldots,7$$
$$w_{t2} \leq 14\,,\ t=1,\ldots,7\ .$$

A restrição associada ao empréstimo de longo prazo vem dada por

$$W \leq 80\,.$$

Finalmente, pretende-se maximizar o valor da carteira no 7º ano, expresso pelas disponibilidades nesse momento.

Em síntese:

$$\text{MAX } Z = v_7 - w_{71} - w_{72}$$

1) $2085.0\,x_1 + 46.2\,x_2 + 102.6\,x_3 + 5.1\,x_4 + 20.0\,x_5 + 36.0\,x_6 + 1.8\,x_7 + 31.6\,x_8 +$
$+ 2.0\,x_9 + 7.8\,x_{10} + 12.2\,x_{11} + + 17.3\,x_{12} + 18.2\,x_{13} + 135\,x_{14} + 51.3\,x_{15} + v_1 -$
$- w_{11} - w_{12} - W \leq 140$

2) $- 19.4\,x_2 + 17.4\,x_3 + 0.6\,x_4 - 5.7\,x_5 - 2.7\,x_7 + 13.4\,x_8 - 0.1\,x_9 - x_{10} + 52.6\,x_{11} +$
$+ 21\,x_{12} - 3.5\,x_{13} + 5.7\,x_{15} - 1.14\,v_1 + v_2 + 1.22\,w_{11} + 1.23\,w_{12} - w_{21} - w_{22} +$
$+ 0.245\ W \leq 40$

3) $- 22.1\,x_2 + 1.4\,x_4 - 4\,x_5 - 3\,x_7 - 0.4\,x_9 + 1.4\,x_{10} - 13.9\,x_{11} + 18.7\,x_{12} + 6.5\,x_{13} -$
$- 27.8\,x_{14} - 13.5\,x_{15} - 1.14\,v_2 + v_3 + 1.22\,w_{21} + 1.23\,w_{22} - w_{31} - w_{32} + 0.445\ W \leq 20$

4) $- 25.2\,x_2 - 12.2\,x_4 - 4.7\,x_5 - 3.1\,x_7 - 0.6\,x_9 - 1.9\,x_{10} - 13.7\,x_{11} - 39.1\,x_{12} - 4.8\,x_{13} -$
$- 47.3\,x_{14} - 21.2\,x_{15} -1.14\,v_3 + v_4 + 1.22\,w_{31} + 1.23\,w_{32} - w_{41} - w_{42} + 0.396\ W \leq 0$

5) $- 137.6\ x_2 - 17.4\ x_4 - 38.5\ x_5 - 17.0\ x_7 - 104.9\ x_8 - 0.8\ x_9 - 3.2\ x_{10} - 13.7\ x_{11} -$
$- 159.7\ x_{12} - 5.2\ x_{13} - 53.7\ x_{14} - 22.4\ x_{15} - 1.14\ v_4 + v_5 + 1.22\ w_{41} + 1.23\ w_{42} -$
$- w_{51} - w_{52} + 0.347\ W \leq 0$

6) $- 1068.4\ x_3 - 31.7\ x_4 - 689.1\ x_6 - 9.7\ x_9 - 26.2\ x_{10} - 115.5\ x_{11} - 43.4\ x_{13} - 321.7\ x_{14} -$
$- 137.3\ x_{15} - 1.14\ v_5 + v_6 + 1.22\ w_{51} + 1.23\ w_{52} - w_{61} - w_{62} + 0.298\ W \leq 0$

7) $- 13636.2\ x_1 - 1.14\ v_6 + v_7 + 1.22\ w_{61} + 1.23\ w_{62} - w_{71} - w_{72} + 0.249\ W \leq 0$

8) $2085.0\ x_1 \leq 609.9$

9) $2085.0\ x_1 + 46.2\ x_2 + 120.0\ x_3 + 7.1\ x_4 + 20.0\ x_5 + 36.0\ x_6 + 1.8\ x_7 + 45.0\ x_8 +$
$+ 2.0\ x_9 + 9.3\ x_{10} + 64.8\ x_{11} + + 57.0\ x_{12} + 24.7\ x_{13} + 135.0\ x_{14} + 57.0\ x_{15} \leq 1459.0$

10) $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$

11) $x_2 + x_6 \leq 1$

12) $x_4 - x_8 \leq 0$

13) $120.0\ x_3 + 20.0\ x_5 + 135.0\ x_{14} + 57.0\ x_{15} \leq 20$

14) a 20) $w_{t1} \leq 10$, $t=1,...,7$

21) a 27) $w_{t2} \leq 14$, $t=1,...,7$

28) $W \leq 80$

29) a 43) $x_j \leq 1$, $j=1,...,15$

44) $x_j, v_t, w_{t1}, w_{t2}, W \geq 0$, $j=1,...,15$; $t=1,...,7$

A análise dos resultados, a análise sensibilidade e a pós-optimização deste problema serão realizadas nas secções seguintes.

2.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A resolução do modelo exposto na secção anterior conduziu à obtenção dos seguintes resultados:

- solução do Problema Primal

$x^*_1 = 0.0706$, $x^*_3 = 0.1667$, $x^*_6 = x^*_7 = x^*_9 = 1$, $x^*_{12} = 0.854$,
$x^*_2 = x^*_4 = x^*_5 = x^*_8 = x^*_{10} = x^*_{11} = x^*_{13} = x^*_{14} = x^*_{15} = 0$,
$v^*_1 = 1.1$, $v^*_2 = 3.7$, $v^*_5 = 97.0$, $v^*_6 = 963.7$, $v^*_7 = 2041.2$, $v^*_3 = v^*_4 = 0$,
$w^*_{31} = 10$, $w^*_{32} = 14$, $w^*_{41} = 10$, $w^*_{42} = 14$,
$w^*_{11} = w^*_{12} = w^*_{21} = w^*_{22} = w^*_{51} = w^*_{52} = w^*_{61} = w^*_{62} = w^*_{71} = w^*_{72} = 0$,
$W = 80$;

- solução do Problema Dual

rest. do Primal	variável Dual	rest. do Primal	variável Dual	rest. do Primal	variável Dual
1	$\rho^*_1 = 6.540$	16	$\beta^*_{31} = 1.282$	31	$\mu^*_3 = 0.0$
2	$\rho^*_2 = 5.737$	17	$\beta^*_{41} = 1.488$	32	$\mu^*_4 = 0.0$
3	$\rho^*_3 = 5.032$	18	$\beta^*_{51} = 0.0$	33	$\mu^*_5 = 0.0$
4	$\rho^*_4 = 3.074$	19	$\beta^*_{61} = 0.0$	34	$\mu^*_6 = 373.488$
5	$\rho^*_5 = 1.230$	20	$\beta^*_{71} = 0.0$	35	$\mu^*_7 = 50.436$
6	$\rho^*_6 = 1.140$	21	$\beta^*_{12} = 0.0$	36	$\mu^*_8 = 0.0$
7	$\rho^*_7 = 1.000$	22	$\beta^*_{22} = 0.0$	37	$\mu^*_9 = 3.448$
8	$\alpha^*_1 = 0.0$	23	$\beta^*_{32} = 1.252$	38	$\mu^*_{10} = 0.0$
9	$\alpha^*_2 = 0.0$	24	$\beta^*_{42} = 1.475$	39	$\mu^*_{11} = 0.0$
10	$\gamma^*_1 = 0.0$	25	$\beta^*_{52} = 0.0$	40	$\mu^*_{12} = 0.0$
11	$\gamma^*_2 = 176.641$	26	$\beta^*_{62} = 0.0$	41	$\mu^*_{13} = 0.0$
12	$\gamma^*_3 = 52.408$	27	$\beta^*_{72} = 0.0$	42	$\mu^*_{14} = 0.0$
13	$\gamma^*_4 = 3.726$	28	$\beta^* = 0.638$	43	$\mu^*_{15} = 0.0$
14	$\beta^*_{11} = 0.0$	29	$\mu^*_1 = 0.0$		
15	$\beta^*_{21} = 0.0$	30	$\mu^*_2 = 0.0$		

- Valor de Z^* : 2041.2 .

A solução obtida sugere a participação no capital social (CS) das empresas promotoras dos seguintes projectos:

Projectos	Participação no CS
1	2.17 %
3	8.00 %
6	20.00 %
7	10.00 %
9	20.00 %
12	17.08 %

O valor esperado com estas participações, expresso pelas disponibilidades no 7º ano, é de 2041.2×10^3 contos.

São aplicados no mercado, em operações de curto prazo e a uma taxa de 14%, os seguintes montantes:

Anos	Montante
1	1.1
2	3.7
5	97.0
6	963.7

Relativamente às operações passivas de curto prazo tem-se:

Anos	Montante	Taxa 22%	Taxa 23%
3	24	10	14
4	24	10	14

Finalmente, recorre-se no 1º ano ao empréstimo de longo prazo, cujo montante se situa no valor máximo admitido. O serviço da dívida (amortização e juros) vem dado por:

Anos	Amortização	Juros	Total
2	-	19.60	19.60
3	16.00	19.60	35.60
4	16.00	15.68	31.68
5	16.00	11.76	27.76
6	16.00	7.84	23.84
7	16.00	3.92	19.92

Considerando os valores obtidos para as variáveis duais refira-se que:

- os limites para as operações passivas de curto prazo se revelam actuantes nos 3º e 4º anos.

Assim, à taxa de 22%, os custos de oportunidade são, respectivamente, de 1.282 ($\beta^*{}_{31}$) e 1.488 ($\beta^*{}_{41}$). À taxa de 23% são igualmente utilizados os 14 x 10^3 contos disponibilizados, sendo os custos de oportunidade, para os anos referidos, de 1.252 ($\beta^*{}_{32}$) e 1.475 ($\beta^*{}_{42}$).

Nesta medida, a relaxação unitária de um destes limites resultaria num acréscimo idêntico ao respectivo custo de oportunidade.

O mesmo se verifica relativamente ao empréstimo de longo prazo. A utilização total dos fundos disponibilizados nesta modalidade resulta, igualmente, num custo de oportunidade de 0.6 (β^*). Neste caso, a obtenção de fundos adicionais, no intervalo de sensibilidade, resultaria num incremento do valor da carteira proporcional ao custo de oportunidade referido;

- os limites legais não se revelam actuantes pelo que os respectivos custos de oportunidade associados ($\alpha^*{}_1,\alpha^*{}_2$) são nulos;

- a existência de uma relação de exclusividade entre os projectos 2 e 6 origina um custo de oportunidade de 176.6 x 10^3 contos, na medida em que o primeiro é excluido do programa. Da mesma forma, existência de uma relação de contingência entre os projectos 4 e 8 resulta igualmente num custo de oportunidade de 52.4 ($\gamma^*{}_3$);

- o projecto 6 apresenta um maior valor interno, seguindo-se os projectos 7 e 9. Como foi referido, esta valorização dos projectos, dada por $\mu^*{}_j$, é feita com base nas variáveis duais $\rho^*{}_t$. Os valores obtidos para estas variáveis medem o impacto no valor da carteira resultante de alterações nos orçamentos de cada ano, sendo este dado por $\rho^*{}_t \, \Delta \, D_t$. Assim, a haver reforço do orçamento de investimento, este deveria ocorrer no ano 1.

No entanto, e como se disse, estas conclusões são válidas apenas para determinados intervalos de variação dos parâmetros, considerados isoladamente.

2.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Como foi apontado atrás, a análise de sensibilidade visa a obtenção de um intervalo de variação para os parâmetros, tomados isoladamente, sem alteração da base óptima.

Relativamente aos CF's dos projectos seleccionados, obtiveram-se os seguintes intervalos de variação:

- Projecto 1.

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	2084.9	2085.0	2085.4
7	-13636.5	-13636.2	-11236.3

- Projecto 3

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	-2673.7	102.6	170.9
2	9.7	17.4	95.3
6	$-\infty$	-1068.4	-676.2

- Projecto 6

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	-426.7	36.0	93.1
7	- ∞	-689.1	-361.5

- Projecto 7

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	-460.9	1.8	9.5
2	-3.9	2.7	6.0
3	-4.4	3.0	7.0
4	-4.4	-3.1	2.5
5	- ∞	-17.0	21.8

- Projecto 9

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	-460.7	2.0	2.5
2	-1.3	-0.1	0.5
3	-1.8	-0.4	0.2
4	-0.6	-1.9	0.5
5	$-\infty$	-0.8	1.8
6	$-\infty$	-9.7	-6.7

- Projecto 12

Os intervalos de variação não são significativos, tendo em consideração as unidades com que temos estado a trabalhar.

Assim, a solução obtida é mais sensível relativamente aos projectos 1 e 12.
No entanto, o CF do projecto 1, no 7º ano, poderá decrescer de 17.6%, a que corresponde um valor da carteira de 1871.8, ou seja, resultando num decréscimo de 8.2% no valor global.

Relativamente aos projectos 3,6 e 9, considerados individualmente, o valor de vendas das suas participações no capital social da empresas promotoras, pode sofrer um decréscimo, respectivamente, de 36.7%, 47.5% e de 30.9% .
No que respeita ao projecto 7, este poderá manter-se em carteira mesmo que ocorra um prejuízo no 5º ano.

Estas variações máximas no valor da venda da participação dos projectos 3, 6, 7 e 9 resultariam numa alteração do valor da carteira, tal como referido para o projecto 1, passando a ter-se, respectivamente, 1966.7 (3.6%), 1667.7 (18.3%), 1990.8 (2.4%) e 2037.8 (0.2%).

Relativamente às operações passivas de curto prazo obtiveram-se os seguintes intervalos de variação:

- operações à taxa de 22%

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
3	5.5	10.0	14.7
4	4.3	10.0	11.4

- operações à taxa de 23%

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
3	9.7	14.0	18.6
4	8.3	14.0	15.3

Como foi referido na secção anterior, a relaxação dos limites acima referidos ou, ao contrário, a redução dos montantes a obter com estas operações, considerados isoladamente e respeitando os intervalos de variação referidos, provocaria um acréscimo ou decréscimo do valor da carteira proporcional à variável dual respectiva.

Relativamente ao empréstimo de longo prazo, este tem como limite inferior um montante de 78.7 e como limite superior um montante de 81.2 x 10^3 cts. Uma alteração desse montante máximo, B, resultaria numa variação do valor da carteira de $\beta^* \Delta B$.

De igual modo, ter-se-ia um incremento do valor carteira de 372.2 se o envolvimento máximo no sector de actividade dos projectos 3, 5, 14 e 15 (restrição nº13 do modelo), fosse fixado em 199.9 x 10^3 cts, ou seja, no limite máximo possível para este parâmetro, tomado isoladamente.

Finalmente, e relativamente aos orçamentos anuais obtiveram-se os seguintes intervalos de variação :

Ano	valor mínimo	valor original	valor máximo
1	-7.1	140.0	602.7
2	-127.7	40.0	41.2
3	-170.2	20.0	21.4
4	-5.6	0	1.3
5	-97.0	0	$+\infty$
6	-963.6	0	$+\infty$
7	-2041.2	0	$+\infty$

Assim, e para o 1º ano, um reforço do orçamento de 462.7×10^3 cts resultaria num valor global da carteira de 5067.4×10^3 cts, pois possibilitaria um aumento da participação no capital social da empresa promotora do projecto 1, que passaria a ser de 8.87%. Ao contrário, a não disponibilização de fundos para investimento no 1º ano, resultaria numa participação no capital social do projecto referido de 0.09%, sendo o valor da carteira de 1125.6×10^3 cts ($Z^* + \rho^*{}_1 \Delta D_1$).

Para o 2º ano, e considerando igualmente o valor máximo obtido e a não existência de orçamento, ter-se-ia, respectivamente, uma participação no CS do projecto 1 de 2.18% e de 1.6%, a que corresponderia um valor da carteira de 2048.6×10^3 cts e de 1811.7×10^3 cts.

Da mesma forma, a participação no CS do projecto acima referido situar-se-ia entre 1.93% e 2.18% para $D_3=0$ e $D_3=21.4$. A variação do valor da carteira será dada por $\rho^*{}_3 \Delta D_3$.

Uma possível saida de fundos da carteira, no 4º ano, num montante de 5.6×10^3 teria como resultado uma redução na participação no projecto 1 (2.05%) e um aumento da participação no projecto 12 (20%).

Relativamente aos 5º e 6º anos, os fundos poderão ser retirados da carteira, considerando, tal como anteriormente, a alteração apenas num dos anos, sem que o grau de participação nos projectos venha alterado.

Nessa medida, e tal como referido, estes montantes estarão disponíveis para reafectação, nomeadamente a novos orçamentos, por parte da SCR.

Assim, e sem que haja qualquer alteração na participação dos projectos, poderão ser retirados, no 4º ano, 97.0×10^3 ou, alternativamente, 963.6×10^3 no 5º ano. Neste caso, o valor da carteira no horizonte, 7º ano, será dado apenas pelos fundos gerados nesse ano.

2.6 PÓS-OPTIMIZAÇÃO

Nesta secção introduzem-se algumas alterações, de forma não cumulativa, no problema base, possibilitando a obtenção de alguma informação adicional que pode ser relevante para a tomada de decisão.
Essas alterações consistem em possibilitar uma diferente distribuição do orçamento de investimento pelos três anos, a adopção de estruturas diferentes para o empréstimo de longo prazo, um decréscimo das remunerações da SCR relativamente aos projectos aceites anteriormente e, finalmente, a alteração das taxas para as operações passivas e activas.

A) ALTERAÇÃO NO ORÇAMENTO DE INVESTIMENTO

Considerou-se que o orçamento de investimento para os diversos anos é determinado simultaneamente com a resolução do problema, respeitando-se, óbviamnte, o orçamento global de investimento de 200000 cts.
A solução do problema sugere a disponibilização desse montante no 1º ano, o que aliás é normal se se tiver em consideração a relação entre os valores das variáveis duais (ρ^*_t) obtidos na secção 2.4 . A alteração mais significativa, em termos da solução obtida, consiste num aumento da participação no capital social (CS) da empresa promotora do projecto 1 para 2.3% e um incremento do valor da carteira de 62.3×10^3 cts.

B) ALTERAÇÃO NA ESTRUTURA DO EMPRÉSTIMO DE LONGO PRAZO A OBTER NO 1º ANO

- AMORTIZAÇÃO E JUROS PAGOS NO HORIZONTE

Tal como anteriormente, os fundos disponibilizados sob a forma de um empréstimo de longo prazo são totalmente utilizados, ou seja, $80x10^3$ cts. Os projectos para os quais se sugere uma participação são os mesmos (Projectos 1,3,6,7,9 e 12), havendo a registar, no entanto, um aumento da participação no CS das empresas promotoras dos projectos 1 (2.49%) e 12 (20%), ou seja, um incremento daquelas participações de 0.32% e de 2.92% respectivamente.

O valor da carteira, no ano 7, seria de 2091.610^3 cts, ou seja, tendo um incremento de $50.4x10^3$ cts, que resulta do facto de não ocorrerem saídas de fundos (amortização e juros) nos anos em que poderão ser utilizados para aumentar o grau de participação da SCR nos referidos projectos.

- ANUIDADES (AMORTIZAÇÃO MAIS JUROS) CONSTANTES

Também neste caso se mantêm os projectos aceites anteriormente, vindo, no entanto, as participações no CS das empresas promotoras dos projectos 1 e 12 alteradas para 2.25% (+0.08%) e 14.58% (-2.5%), respectivamente. Relativamente ao problema original, o incremento do valor da carteira seria de cerca de 5000 cts. Isto deve-se ao facto da anuidade a pagar ser inferior aos montantes obtidos na solução inicial nos anos 3,4 e 5, possibilitando uma reafectação alternativa dos fundos.

C) ALTERAÇÃO DAS REMUNERAÇÕES ESPERADAS

Para os projectos aceites considerou-se um decréscimo de 20% na remuneração da SCR, quer nos dividendos a distribuir pela empresas participadas quer no valor de venda das participações à data prevista.

As principais alterações a registar, para além do decréscimo do valor da carteira, consistem na diminuição da participação no projecto 1 (2%) e um aumento da participação no projecto 12 (20%). O valor da carteira no ano horizonte, resultante destas alterações, seria de $1580.6x10^3$ cts, traduzindo-se num decréscimo, relativamente à solução inicial, de 22.5%.

D) ALTERAÇÃO DAS TAXAS DE JURO

Finalmente, consideraram-se diferentes taxas para as operações passivas e activas.
Os resultados obtidos, em termos de valor da carteira, relativamente às operações activas foram os seguintes

Taxa	13.5%	13.0%	12.5%	12%
Z^*	2035.7	2030.2	2024.7	2019.3
ΔZ^*	-0.3%	-0.5%	-0.8%	-1.1%

Exceptuando-se as alterações nos montantes aplicar no 6º ano, para as taxas consideradas, o grau de aceitação do projectos 1,3,6,7,9 e 12 mantém-se inalterado.

Relativamente às operações passivas, de curto (cp) e longo prazo (lp), consideram-se igualmente diferentes taxas. Os resultados obtidos foram os seguintes

Taxas (lp)	25.0	25.5	26.0
(cp)	22.5/23.5	23.0/24.0	23.5/24.5
Z^*	2034.8	2028.4	2022.1
ΔZ^*	-0.3%	-0.6%	-0.9%

Tal como anteriormente, o grau de aceitação dos projectos 1 e 12 vem alterado, tendo-se, respectivamente,

Projectos	% de participação no CS		
1	2.15	2.12	2.12
12	17.30	17.52	17.74

ou seja, a um decréscimo da participação no projecto 1 corresponde um maior envolvimento no projecto 12.

2.7 MODELO COM DIVERSOS TIPOS DE OPERAÇÕES

Na secção 2.2 considerou-se a existência de quatro tipos de carteiras, tantas quanto o tipo de operações geralmente consideradas - Criação, Expansão, Recuperação e Aquisição de Empresas. Nessa perspectiva, foi utilizado um modelo com a finalidade de se obter uma indicação dos projectos de 'Arranque' - Criação de empresas - nos quais seria desejável uma participação da SCR e qual a percentagem da mesma no capital social da empresa a constituir. O orçamento de investimento em projectos de 'Arranque', tal como foi referido, tinha em consideração a exposição desejada para este tipo de operações.

Assim, e considerando os quatro tipos de operações (s=1,...,4), deverão ser incluídas, para além das restrições legais, de envolvimento máximo num sector de actividade e de eventuais relações entre projectos, restrições que limitem o montante de participações em cada tipo de operação a uma proporção (α_s) do montante global de participações.

Tal como anteriormente, os fundos gerados por projectos da carteira poderão ser utilizados para satisfazer necessidades de fundos de outros projectos, da mesma carteira, aplicados no mercado à taxa para estas operações (v_t) ou, após a análise do impacto na carteira, retirados para reforço do orçamento de investimento em novas carteiras.

Pretendendo-se maximizar o valor da carteira no horizonte, T, considere-se, igualmente, a existência de uma curva de oferta de fundos de curto prazo com m troços (w_{it}, i=1,...,m), estando associada a cada troço a taxa r_i.

Os empréstimos de longo prazo obtidos em cada ano (c_t) são remunerados a diferentes taxas e reembolsados, a partir do ano seguinte ao da tomada de fundos, com amortizações constantes e juros em função do capital ainda em dívida, ocorrendo o último reembolso no momento T.

Finalmente, a carteira da SCR inclui n projectos, com $j=1,...,h,h+1,...,p,p+1,...,q,q+1,...,n$, representando os quatro tipo de operações.

O modelo vem

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + v_T - \sum_{i=1}^{m} w_{iT}$$

s.a

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + v_1 - \sum_{i=1}^{m} w_{i1} - c_1 \leq D_1$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - (1+r)v_{t-1} + v_t + \sum_{i=1}^{m} (1+r_i)w_{i,t-1} - \sum_{i=1}^{m} w_{it} + \sum_{k=1}^{t-1} c_k ((1+(T-t+1)r_k)/(T-k)) -$$
$$- c_t \leq D_t, \quad t=2,...,T$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{j=1}^{h} a_{tj} x_j - \alpha_1 (\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j) \leq 0, \quad t=1,...,T, \; a_{tj} \geq 0$$

$$\text{(d)} \quad \sum_{j=h+1}^{p} a_{tj} x_j - \alpha_2 (\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j) \leq 0, \quad t=1,...,T, \; a_{tj} \geq 0$$

$$\text{(e)} \quad \sum_{j=p+1}^{q} a_{tj} x_j - \alpha_3 (\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j) \leq 0, \quad t=1,...,T, \; a_{tj} \geq 0$$

$$\text{(f)} \quad \sum_{j=q+1}^{n} a_{tj} x_j - \alpha_4 (\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j) \leq 0, \quad t=1,...,T, \; a_{tj} \geq 0$$

(g) $\sum_{t=1}^{T} a_{tj}\, x_j \leq 0.2\, K$, $j=1,\ldots,n$, $a_{tj} \geq 0$

(h) $\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j \leq 3\, K - P$, $a_{tj} \geq 0$

(i) $w_{it} \leq B_{it}$, $t=1,\ldots,T, i=1,\ldots,m$

(j) $c_t \leq C_t$, $t=1,\ldots,T$

(l) $0 \leq x_j \leq 1$, $j=1,\ldots,n$

(m) $v_t, c_t, w_{it} \geq 0$

sendo K o valor do CS e Reservas, r_k a taxa de juro do empréstimo de longo prazo obtido no ano k e P o total de participações existentes. As restantes variáveis mantém as designações anteriormente referidas .

Para além das restrições consideradas no modelo, poderão também ser incluídas, nomedamente, restrições que contemplam as relações de interdependência entre projectos e de envolvimento máximo em determinados sectores de actividade.

Além disso, os limites fixados para endividamento de curto e longo prazo poderiam ser uma função do montante de Capitais Próprios (CP) da SCR, em cada ano.

Finalmente, as restrições relativas aos montantes máximos de participação em cada tipo de operações, relativamente ao total das participações (restrições c,d,e,f), permitem quantificar os custos de oportunidade associados a essa política de distribuição de participações por tipos de operação.

Poderiam igualmente ser consideradas proporções mínimas (β_s) de cada tipo de carteira relativamente ao conjunto de participações. Neste caso, ter-se-ia um conjunto de novas restrições da forma:

$$\sum_{j=1}^{h} a_{tj}\, x_j - \beta_1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j\right) \geq 0, \quad t=1,\ldots,T, \; a_{tj} \geq 0 \,;$$

$$\sum_{j=h+1}^{p} a_{tj}\, x_j - \beta_2 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j\right) \geq 0, \quad t=1,\ldots,T, \; a_{tj} \geq 0 \,;$$

$$\sum_{j=p+1}^{q} a_{tj}\, x_j - \beta_3 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j\right) \geq 0, \quad t=1,\ldots,T, \; a_{tj} \geq 0 \,;$$

$$\sum_{j=q+1}^{n} a_{tj}\, x_j - \beta_4 \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j\right) \geq 0, \quad t=1,\ldots,T, \; a_{tj} \geq 0 \,.$$

3. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO

3.1 CONCLUSÕES

Relativamente à utilização da PL com vista à selecção, com base numa carteira de projectos de investimento, do conjunto particular de projectos que maximiza o valor global da empresa, em ambiente determinístico, destacam-se as seguintes conclusões:

- A utilização dos critérios tradicionais, tal como expostos, com a finalidade de proceder à selecção de projectos de investimento, conduz, em geral, e tomando as devidas precauções, à tomada de decisões correctas em mercados perfeitos;

- O critério do VAL conduz, nas condições referidas, a melhores decisões que o critério da TIR, dado que este é fiável apenas em determinadas situações, nomeadamente quando se está perante projectos convencionais e independentes;

- A existência de racionamento de capital ou de outros recursos em vários períodos e de eventuais inter-relações entre projectos inviabiliza a utilização dos critérios tradicionais em termos da utilização optimizada desses recursos escassos;

- O recurso à PL permite não só obter uma indicação dos projectos a seleccionar, por forma a maximizar o valor global da carteira e sem que seja necessário efectuar uma avaliação explícita de cada combinação possível de projectos, como a disponibilização, pela resolução do problema dual associado, de informação adicional para a tomada de decisão;

- Uma das abordagens utilizadas no âmbito da PL consiste em definir a função objectivo do modelo como o somatório do VAL dos CF dos diversos projectos. Este tipo de abordagem implica a determinação prévia de uma taxa de desconto cujo cálculo é, normalmente, complexo, para além de que alguns autores questionam a validade da sua utilização;

- A explicitação de uma taxa de desconto para os CF dos diversos projectos torna-se desnecessária nos modelos de horizonte, nos quais se pretende , considerando a existência de operações passivas e activas, maximizar o valor global da empresa num momento futuro e préviamente fixado, o horizonte;

- A utilização de um modelo de horizonte em mercados perfeitos e na ausência de inter-relações entre projectos conduz à selecção de um conjunto de projectos cujo VAL, à taxa para operações activas e passivas, seja não negativo;

- A existência de inter-relações entre projectos poderá conduzir à aceitação/rejeição de projectos com VAL negativo/positivo, cujo custo de oportunidade é dado pelas variáveis duais associadas às restrições respectivas;

- A existência de limites para as operações passivas, num ou mais períodos, poderá igualmente determinar a aceitação/rejeição de projectos cujo VAL seja negativo/positivo, na medida em que os projectos passam a ser também avaliados pela sua contribuição para a relaxação daqueles limites;

- Os valores das variáveis duais associadas às restrições orçamentais, quando se consideram taxas diferentes para operações activas e passivas, reflectem a existência, para um determinado período, de um ou outro tipo de operação. No caso em que se considere uma curva de oferta de fundos, esse valor é igualmente função dos montantes obtidos em cada troço da curva, ou seja, a uma determinada taxa de juro;

- A imposição de um nível mínimo de dividendos a distribuir em cada um dos períodos origina igualmente um custo de oportunidade, associado à retirada de fundos para consumo;

- Os impactos na solução inicial decorrentes da necessidade de rever algumas decisões de gestão, tais como a fixação dos orçamentos de investimento e de outras restições, e da eventualidade de alguns dos parâmetros estimados poderem reflectir erros de previsão, poderão ser estudados recorrendo à análise de sensibilidade. Esta permite, ainda que indirectamente e de forma elementar, considerar o risco no processo de análise e selecção dos projectos de investimento.

- A aplicação de um modelo de horizonte ao caso concreto da Sociedade de Capital de Risco, considerado neste trabalho, mostra claramente o grande interesse destes modelos na tomada de decisões neste tipo de organizações, uma vez que:

  - lidam habitualmente com carteiras constituidas por um número relativamente grande de projectos de investimento;
  - o envolvimento solicitado é normalmente de prazos relativamente longos;
  - deparam-se frequentemente com diversos tipos de restrições (legais, envolvimento por sector de actividade e tipos de operações, financeiras,etc);
  - as participações podem ser expressas por variáveis contínuas;

pelo que a optimização das suas decisões impõe o tratamento integrado de um número elevado de variáveis inter-relacionadas, o que é conseguido de forma eficiente com este modelo que recorre a um poderoso instrumento matemático - a Programação Linear;

De qualquer forma não queremos deixar de salientar de que este tipo de modelo, à semelhança de outros modelos matemáticos, exige a disponibilização de uma massa relativamente grande de informação de 'input' com a fiabilidade desejada, o que constitui, por vezes, dificuldade na sua utilização.

Assim, o decisor deve procurar obter um equilíbrio entre o montante e qualidade da informação a dispor e o benefício que se prevê retirar ao nível das decisões de gestão, procurando garantir a necessária operacionalidade do modelo.

3.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHO

Dada a incerteza que caracteriza o meio envolvente das organizações, os parâmetros associados aos diversos projectos de investimento e o comportamento de outras variáveis relevantes para a tomada de decisão não são, em geral, conhecidas antecipadamente e de forma certa.

A consideração do risco no processo de tomada de decisão poderá ser feita, no âmbito da PM e nomeadamente recorrendo à Programação não Linear (PNL), definindo, entre outras possibilidades, a função objectivo em termos de minimização da variância do valor global resultante dos projectos aceites ou maximização do valor carteira associada a um determinado nível de risco.

Uma abordagem alternativa, proposta inicialmente por Charnes e Cooper[1], designada na literatura por 'Chance-Constrained Programming', consiste em considerar somente as restrições em termos probabilísticos, na medida em que se pretende assegurar que a probabilidade de violar uma ou mais restrições não exceda um determinado nível. A aplicação destes modelos só é possível, como é óbvio, se se conhecer a distribuição das variáveis que se consideram como aleatórias, o que se revela, frequentemente, difícil.

Finalmente, como vimos, os modelos expostos possibilitam a optimização das decisões relativamente a um único objectivo, associado a um critério relevante, no caso vertente, a maximização do valor da empresa.

No entanto, a realidade, dada a sua complexidade, impõe frequentemente ao decisor a consideração de diversos objectivos, por vezes conflituais. Torna-se, pois, essencial que o decisor procure tomar uma decisão de compromisso considerando vários critérios relevantes associados aos diversos objectivos.

Aliás, a sociedade actual impõe cada vez mais novos e múltiplos aspectos que o decisor deverá ponderar no processo de tomada de decisão. Assim, para além dos aspectos

[1] Charnes,A., Cooper, W., "Chance-Constrained Programming", Management Science, Outubro 1959, pp. 73-80.

económicos, em sentido restrito, associam-se-lhes, actualmente, os relacionados com a conservação do meio ambiente, sociais, incerteza crescente do meio envolvente e outros, que ampliam significativamente o campo de preocupações dos decisores.
A pesquisa da melhor solução de compromisso poderá ser feita recorrendo à Programação Multiobjectivos e à Programação por Metas, que constituem extensões da Programação Linear. Neste caso deixa de fazer sentido falar em solução óptima na medida em que a solução de compromisso a obter depende do sitema de preferências do decisor relativamente aos diversos objectivos em presença.

Assim, pensamos que seria do maior interesse explorar estas abordagens, considerando, designadamente, para o caso da SCR, diferentes tipos de objectivos, relacionados nomeadamente com o lucro contabilístico, nível de risco, quota de mercado e exposição relativamente aos diversos sectores de actividade e tipos de operações.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGOSTINI, Jean-Marie; Le Choix des Investissements - Programmation Mathématique, Paris, Dunod, 1972.

[2] ASHTON, D.J.; "The Reasons for Leasing - A Mathematical Programming Framework", Journal of Business Finance & Accounting, vol 5 nº 2, Verão 1978, pp. 233-253.

[3] ATKINS, D.R., ASHTON, D.J.; "Discount Rates in Capital Budgeting: A Re-Examination of the Baumol and Quandt Paradox", The Engineering Economist, vol 21 nº 3 , 1976, pp. 159-171.

[4] BAUMOL, W.J.; QUANDT, R.E.; "Investment and Discount Rates under Capital Rationing - A Programming Approach ", The Economic Journal, v Junho 1965, pp. 317-329.

[5] BERTONÈCHE, M; LANGHOR, H; "Les Choix des Investissements en Situation de Rationnement du Capital", Revue Economique, vol 28 nº 5, Setembro 1977, pp. 730-764.

[6] BHASKAR, Krish; "Linear Programming and Capital Budgeting: The Financing Problem", Journal of Business Finance & Accounting, vol 5 nº 2 , Verão 1978, pp. 159-194

[7] BIERMAN, H.; SMIDT, S.; Economic Analysis of Investment Projects, New York, Macmillan Publishing,1984.

[8] BRADLEY, S.; FREY, S.; "Equivalent Mathematical Models of Pure Capital Rationing", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Junho 1978, pp. 345-361.

[9] BREALEY, R.A.; MYERS, S.C.; Príncipios de Finanças Empresariais, McGraw-Hill de Portugal,1992.

[10] CALVO, Juan Carlos, La reinversion de los Fluxos de Caja en las Presupuestaciones de Capital,Universidad del Pais Vasco, Tese de Doutoramento, 1990.

[11] CARLETON, W.T.; "Linear Programming and Capital Budgeting Models: A New Interpretation", Journal of Finance, Dezembro 1970, pp. 825-833.

[12] CLARK, John J.; HINDELANG, Thomas J.; PRITCHARD, Robert E.; Capital Budgeting - Planning and Control of Capital Expenditures, USA, Prentice-Hall, 1989.

[13] EDERINGTON, L.; HENRY, W.; "On costs of Capital in Programming Approaches to Capital Budgeting ", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Dezembro 1979, pp. 1045-1057.

[14] GALESNE, Alain; Les décisions financières de l'entreprise - L'investissement, Paris, Dunod, 1981.

[15] HAYES,James W.; "Discount Rates in Linear Programming Formulations of the Capital Budgeting Problem", The Engineering Economist , vol 29 nº 2, 1984, pp. 113-126.

[16] HIRSHLEIFER,J.; "On the Theory of Optimal Investment Decision ", Journal of Political Economy, 66, Agosto 1958., pp. 329-352.

[17] HUGHES,J; LEWELLEN,W.;"Programming Solutions to Capital Rationing Problems", Journal of Business Finance & Accounting, vol 1 nº 1, Primavera 1974, pp. 55-74.

[18] LEVARY, Reuven R.; SEITZ, Neil E.; Quantitative Methods For Capital Budgeting, USA, South-Western Publishing, 1990.

[19] LEVY, Haim; SARNAT, Marshall; Capital Investment and Financial Decisions, USA, Prentice-Hall,1986.

[20] LORIE, J; SAVAGE, L; "Three Problems in Rationing Capital", Journal of Business, 28, Outubro 1955, pp. 141-152.

[21] MASSÉ, Pierre; La Elección De Las Inversiones, Barcelona, Sagitario, 1963.

[22] MYERS, S.C.; "A Note on Linear Programming and Capital Budgeting", Journal of Finance, Março 1972, pp. 89-92.

[23] PARTINGTON, G.H.; "Variables Influencing Dividend Policy in Australia: Survey Results", Journal of Business Finance & Accounting, vol 16 nº 2, Primavera 1989, pp.

[24] RAMALHETE, Manuel; GUERREIRO, Jorge; MAGALHÃES, Alípio; Programação Linear, McGraw-Hill de Portugal, 1985.

[25] ROSENBLATT, M.J.; " A Note on "Who Needs a Discount Rate? ", The Engineering Economist, vol 26 nº2, 1981, pp.158-160.

[26] ROSENBLATT, M. J.; FREELAND, J.R.; "An Analysis of Linear Programming Formulations for the Capital Rationing Problem", The Engineering Economist, vol 24 nº1, 1978, pp.49-61.

[27] SEALEY,C.W.; "Utility Maximization and Programming Models for Capital Budgeting", Journal of Business Finance & Accounting , vol 5 nº 3, Outono 1978, pp.355-365.

[28] SUÁREZ, Andrés S.; Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa, Madrid, Pirámide, 1991.

[29] WEINGARTNER, H. M., "Criteria for Programming Investment Project Selection", Journal of Industrial Economics, Novembro 1966.

[30] WEINGARTNER, H. M., Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, Chicago, Markham Publishing Company, 1967.

[31] WEINGARTNER, H. M., "Capital Rationing: n Authors in Search of a Plot", The Journal of Finance, vol 32, Dezembro 1977, pp. 1403-1431.