UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

Liliana dos Prazeres dos Santos Silva

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pela

Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

2018

Resumo

Este trabalho de projeto tem como objetivo compreender como uma metodologia de ensino focada em tarefas que promovem a transição entre diferentes representações matemáticas contribui para a aprendizagem das funções. De forma a analisar como é desenvolvida esta aprendizagem foram definidas as seguintes questões de investigação: 1) *Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à definição de função e à determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa*?, 2) *De que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas a partir de diferentes representações de uma função*? e 3) *Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre os diferentes modos de representar uma função*?.

O trabalho foi desenvolvido com uma turma de 7.º ano, no âmbito da unidade temática Funções, lecionada nos 2.º e 3.º períodos do ano letivo 2017/2018 numa escola secundária do concelho de Oeiras. O estudo seguiu uma metodologia de natureza qualitativa assente num paradigma interpretativo e a recolha de dados foi realizada através de observação participante e por recolha documental. Os documentos recolhidos foram: registos áudio e vídeo das aulas, resoluções de alunos e registos escritos da professora.

Da implementação da unidade de ensino verificou-se que a maioria dos alunos evidenciou compreender a definição de função e que, no geral, estes não revelaram dificuldades significativas na transição entre diferentes representações. Em situações contextualizadas, partindo de diferentes representações de uma função, os alunos mostraram ser capazes de interpretar e relacionar corretamente as variáveis envolvidas. Ainda assim, verificou-se que é na transição da representação algébrica para a gráfica que são cometidos mais erros e que é a partir da representação gráfica que surgem mais dificuldades relativamente à forma como os alunos relacionam as variáveis. Ao longo do estudo foram diagnosticadas dificuldades ao nível da utilização e da compreensão do significado da simbologia própria das funções e observadas incorreções na construção de gráficos.

Palavras chave: representações matemáticas, funções, variáveis, dificuldades, 7.º ano.

Abstract

This study aims to understand how a teaching methodology focused on tasks that promote the transition between different mathematical representations contributes to the learning of the functions. In order to analyze how this learning is developed, the following research questions were defined: 1) *What do students learn about the definition of function, and determination of images from objects and vice-versa*?, 2) *How do students interpret and relate the variables involved from different representations of a function*? and 3) *What difficulties students manifest in the transition between the different ways of representing a function*?.

The work was developed with a group of 7th grade students, within the scope of the thematic unit Functions, taught in the 2nd and 3rd terms of the 2017/2018 school year in a secondary school in the county of Oeiras. The study followed a methodology of qualitative nature based on an interpretative paradigm and the data collection was accomplished by participant observation and by documentary collection. The documents collected were: audio and video records of the classes, student resolutions and written records of the teacher.

From the implementation of the teaching unit it was observed that the majority of the students evidenced to understand the definition of function and that, in general, the students did not reveal significant difficulties in the transition between different representations. In contextualized situations, starting from different representations of a function, the students showed they were able to interpret and relate correctly the variables involved. It was observed, however, that it is in the transition from the algebraic representation to the graphical representation that more errors are committed and that it is from the graphical representation that more difficulties arise regarding the way the students relate the variables. Throughout the study difficulties in the use and understanding of the meaning of the symbology proper to the functions were diagnosed as well as some inaccuracies in the construction of graphs were observed.

Keywords: mathematical representations, functions, variables, difficulties, 7th grade.

Agradecimentos

De um modo geral, agradeço a todos aqueles que, de uma forma mais ou menos explícita, contribuíram para a concretização deste trabalho. Em particular, agradeço:

- À professora Hélia Oliveira, pela disponibilidade, inteligência, empenho, confiança, profissionalismo, simpatia e carinho;

- À direção da escola e aos encarregados de educação que autorizaram a realização do estudo;

- Aos meus alunos, pela sua dedicação, simpatia, interesse e criatividade;

- Ao meu colega e amigo Renato por ter aceitado o meu convite para tirar o Mestrado, pela companhia, pela disponibilidade e sobretudo na forma como me ajudou a dar conteúdo e forma a este trabalho;

- À Ana Vieira, por ter sido desde sempre uma fonte de inspiração a nível profissional, pela amizade, pelo incentivo e apoio na realização deste trabalho;

- À Lena, essencialmente pela sua amizade, mas também por ser uma parte essencial daquilo que tem sido o meu crescimento profissional e por ter ultrapassado comigo tantas e tão difíceis etapas nos nossos projetos profissionais;

- À Ana Madaleno, também pela amizade e pela revisão exemplar de parte deste trabalho;

- Ao João, o meu marido, pelo amor, pela compreensão e pelo incondicional apoio em todos os momentos e a todos os níveis;

- À Carolina, a minha filha, pela sua alegria, inteligência e pela autonomia que lhe permitiu gerir as ausências da mãe;

- Aos meus pais por me apoiarem, desde sempre, em todas as decisões.

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Quadros

1. Introdução

Nesta introdução começo por indicar as razões que motivaram a realização deste trabalho e a sua pertinência à luz do contexto atual do estudo das funções e das representações matemáticas. De seguida, faço uma breve descrição do estudo, referindo o seu objetivo geral e as respetivas questões de investigação. Por último, descrevo sucintamente o modo como organizei este trabalho de projeto e a estrutura com que o mesmo se apresenta.

1.1. Motivação e pertinência

Licenciei-me em Ensino da Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em junho de 2000 e desde então que sou professora de matemática do ensino básico e secundário. Foi o meu interesse e gosto pela matemática, o meu gosto por ensinar esta disciplina, e as minhas constantes necessidades de procurar novas e melhores formas de ensinar, as razões que me motivaram a fazer mestrado na área da didática da matemática. Este foi um objetivo que já tinha definido há algum tempo, embora a sua concretização tenha sido adiada, até agora, por prioridade de outros projetos de âmbito profissional ou familiar.

Esta intervenção pedagógica envolve dois temas que ocupam lugares de destaque no ensino – aprendizagem da matemática: representações matemáticas e funções. As representações assumem na aprendizagem das funções um papel essencial, não só porque os modos de representar uma função são conteúdo programático, mas também porque o recurso a representações de funções são um processo que apoia o desenvolvimento da noção de função. Segundo o NCTM (2008), as representações não devem ser vistas como uma finalidade em si mesmas mas sim como uma ferramenta indispensável à compreensão e à comunicação de ideias matemáticas. Para Ponte et al. (2011), uma grande atenção deve ser dada à forma como os alunos lidam com diferentes representações matemáticas, não só as que são dadas nos enunciados como também as representações criadas pelos próprios alunos.

Ao longo do 2.º e 3.º ciclos, os alunos devem desenvolver a compreensão das relações entre tabelas, gráficos e símbolos e, à medida que trabalham com múltiplas representações de uma função, como numéricas, gráficas e simbólicas, devem desenvolver um conhecimento mais aprofundado da noção de função. Autores como Consciência (2013) e Ronda (2015) consideram fundamental o trabalho com diversas representações de uma função e a comparação entre as suas características, pois é ao reconhecê-las que se torna possível alcançar um maior grau de apropriação do conceito de função. No entanto, é na articulação entre as várias representações das funções que os alunos demonstram mais dificuldades (Ainsworht, 1999), o que torna o trabalho com diferentes representações e a transição entre si uma atividade cognitiva exigente e que deve ser promovida nas aulas de matemática (Nitsch et al., 2014).

O estudo de funções é iniciado, de modo explícito, no sétimo ano de escolaridade, surgindo ao longo de todo o currículo para a maioria dos percursos escolares até ao final da escolaridade obrigatória. As aprendizagens iniciais que os alunos desenvolvem de funções são particularmente importantes uma vez que estabelecem as bases para o trabalho algébrico a desenvolver em toda a escolaridade obrigatória (Ellis, 2011).

Atendendo ao seu papel unificador, o conceito de função é reconhecido por vários autores como um dos mais importantes na matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999) e essenciais em todos os campos da matemática aplicada (NCTM, 2014). Atualmente, o domínio de aplicação das funções tem ganho terreno, uma vez que se tem tornado um instrumento fundamental para descrever diversos fenómenos e fazer previsões em diferentes áreas do conhecimento como as ciências sociais e humanas, o ambiente, a engenharia e a tecnologia (Guerreiro, 2009; NCTM, 2014).

Apesar das relações funcionais acompanharem os alunos durante vários anos do seu percurso escolar, sei, por experiência, que uma compreensão efetiva das funções não é alcançada por muitos alunos. As diferentes abordagens do conceito de função, a linguagem simbólica muito própria, os diferentes modos de representação e as transições entre si fazem das funções um tema no qual os alunos apresentam muitas dificuldades. As alterações que o atual programa de matemática preconiza relativamente ao programa de 2007, no que diz respeito ao tema *Funções,* parece-me ser mais um obstáculo à aprendizagem, uma vez que, por exemplo, o programa em vigor prevê que as funções sejam lecionadas sem que a noção de variável tenha sido trabalhada antecipadamente e inclui o estudo de conteúdos que exigem um formalismo acrescido, nomeadamente, as operações com funções. Assim, o cumprimento do programa, em articulação com o desenvolvimento de um estudo de relações funcionais que, tal como sugerido em literatura de referência, valorize o raciocínio covariacional e uma apropriação gradual do conceito de função e da respetiva simbologia, em situações contextualizadas, é uma tarefa difícil, que exige muita reflexão e sobre a qual é necessário investigar e intervir. Assim sendo, parece-me que ensinar bem funções, é um desafio cada vez maior para os professores, e aprendê-las bem, um desafio cada vez maior para os alunos.

A importância e a pertinência do estudo de funções e das suas diferentes representações levaram-me à implementação deste trabalho na expectativa que esta minha experiência de ensino-aprendizagem possa servir de apoio a futuros estudos no âmbito destas temáticas e contribuir para a reflexão e o desenvolvimento de melhores práticas letivas.

1.2. Apresentação do estudo

A concretização deste trabalho de projeto teve início com a leitura e reflexão de documentos de orientações curriculares, nacionais e internacionais, que fazem referência a experiências de ensino-aprendizagem no domínio da álgebra, em particular de funções e no domínio das representações matemáticas, e da importância que têm assumido na aprendizagem da matemática.

O presente estudo, desenvolvido no contexto de um trabalho de projeto, incide sobre a minha prática profissional, onde assumo o duplo papel de professora e investigadora. O estudo foi dinamizado numa escola do concelho de Oeiras, sede de agrupamento, no ano letivo de 2017/2018, durante o segundo e terceiro períodos, numa turma do 7.º ano de escolaridade. É um estudo de natureza qualitativa que segue o paradigma interpretativo, onde os métodos de recolha de dados foram a observação participante e a recolha documental (registos elaborados pela investigadora, registos áudio e vídeo das aulas e trabalhos produzidos pelos alunos).

O objetivo deste estudo é compreender como uma metodologia de ensino focada em tarefas que promovem o uso de diferentes representações matemáticas contribui para a aprendizagem das funções. De forma a alcançar este objetivo formulei as seguintes questões de investigação:

1) Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à:

   a) definição de função?

   b) determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa?

2) A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas?

3) Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre os diferentes modos de representar uma função?

Procurando respostas às questões supracitadas e com a intenção de apoiar os alunos na construção e no desenvolvimento do conceito de função, planeei uma unidade de ensino baseada numa sequência de seis tarefas que dão ênfase às representações e que foram adaptadas de forma a promover o uso de diferentes representações de uma função e a transição entre si. As tarefas propostas são de natureza exploratória e foram realizadas pelos alunos, em pares, servindo de ponto de partida à aprendizagem de novos conhecimentos e também à consolidação de conteúdos já aprendidos. As tarefas foram propostas de forma a potenciar aos alunos atividades como: ler, interpretar, construir, raciocinar, argumentar, descrever e justificar.

Quer no trabalho em pares, quer no trabalho em grupo-turma, que decorreu a seguir à realização das tarefas, procurei promover uma dinâmica de sala de aula centrada nos alunos e que os incentivasse a trabalhar de forma responsável, autónoma e criativa. Em todas as aulas foi valorizada a partilha de ideias, a construção de significados matemáticos e o respeito pelos colegas.

1.3. Estrutura do trabalho

Para além do presente capítulo, capítulo um, introdução, este trabalho de projeto está organizado em mais cinco capítulos: capítulo dois, enquadramento curricular e didático, capítulo três, unidade de ensino, capítulo quatro, metodologia, capítulo cinco, análise de dados e capítulo seis, considerações finais.

No capítulo dois procuro dar a conhecer as opções curriculares e didáticas nas quais me apoiei para dar corpo à minha proposta de intervenção pedagógica, fazendo referência a três temáticas: funções, representações matemáticas e representações na aprendizagem das funções. A informação descrita é um resumo baseado nas orientações curriculares e didáticas retiradas de literatura relevante no âmbito do tema deste trabalho, do seu objetivo e das questões de investigação definidas.

Relativamente ao terceiro capítulo, descrevo como planeei a unidade de ensino, faço referência às opções metodológicas e didáticas tomadas em sala de aula e apresento uma planificação da respetiva unidade. Por último, faço uma breve descrição dos objetivos de cada uma das tarefas, do teste de avaliação e apresento resumidamente as alterações que a proposta de intervenção pedagógica sofreu bem como as razões que as justificaram.

No quarto capítulo indico as opções metodológicas deste trabalho, caracterizo o contexto escolar e os seus participantes e indico de forma sucinta os procedimentos e os instrumentos de recolha e análise de dados.

No quinto capítulo é realizada, de acordo com os objetivos do estudo, a análise de dados. É feita a descrição e apresentada uma análise das resoluções dos alunos em cada uma das seis tarefas realizadas e no teste de avaliação.

Por fim, no sexto capítulo, são apresentadas as conclusões do estudo, nas quais refiro as respostas às questões de investigação, e uma reflexão final sobre o trabalho de projeto desenvolvido.

2. Enquadramento curricular e didático

Este capítulo está dividido em quatro partes. Na primeira parte, começo por apresentar, resumidamente, a forma como o conceito de função foi evoluindo ao longo dos tempos e prossigo enquadrando a aprendizagem das funções à luz de um contexto mais atual. nas duas secções seguintes dedico-me a apresentar um enquadramento curricular e didático em torno dos temas representações matemáticas e representações matemáticas na aprendizagem das funções, respetivamente. Por último, apresento sucintamente os resultados de quatro estudos empíricos realizados, entre 2001 e 2016, no âmbito das funções e das representações.

2.1. O conceito de função e a sua aprendizagem

O conceito de função, ainda que de forma implícita, remonta aos povos primitivos, os quais, já estabeleciam correspondências entre um conjunto de pedras e o conjunto dos animais dos seus rebanhos. Outras civilizações como a babilónica e a egípcia deixaram-nos provas do uso de tabelas para descrever a relação entre números que resultavam das suas observações e investigações (Domingos, 2008).

Nicole Oresme (1323- 1382), usou pela primeira vez um gráfico como forma de representar o tempo e a velocidade de um objeto móvel. Apesar de denominar as coordenadas de latitude e longitude, o seu método de coordenadas "pode ser considerado percursor da representação gráfica de funções" (Teixeira et al., 1997, p. 11).

Mais tarde, durante os séculos XVI e XVII, com o desenvolvimento da Álgebra e da Geometria analítica, surge o conceito de *variável* e a expressão da relação entre variáveis por meio de uma *equação*, o que permitiu o estudo das relações funcionais com "uma visão dinâmica e contínua em oposição à visão discreta e estática que até aqui tinha predominado" (Domingos, 2008, p. 128).

Só no século XVIII, com o trabalho desenvolvido por Leibnitz (1646-1716) e Bernoulli (1700-1782), surge a primeira definição de função: "chamamos aqui função de uma magnitude variável à quantidade que é composta de qualquer modo possível desta variável e de constantes"(Bernoulli, 1718, citado em Teixeira et al., 1997, p. 12).

Ainda no século XVIII, Euler (1707- 1783) usa a notação $f(x)$ para representar o valor da função.

Em resultado da resolução de vários problemas práticos, no século XIX, já vários matemáticos, entendiam a função como uma correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis, tal como hoje é conhecida. No decorrer do século dá-se um grande desenvolvimento da matemática e regista-se uma "intervenção cada vez maior nas outras ciências [que] levaram a generalizar o conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto qualquer de objetos" (Teixeira et al., 1997, p. 12).

Atualmente, no processo de ensino-aprendizagem das funções, a interpretação e a construção de relações funcionais a partir de dados pode ser abordada de duas formas: como uma correspondência entre valores de variáveis e como uma covariação entre duas grandezas (Confrey & Smith, 1995). A correspondência define uma regra que permite determinar o único valor de y a partir de um determinado valor de x, construindo assim uma correspondência entre x e y. A correspondência é enfatizada na notação $y = f(x)$ e também por alguns métodos de ensino, tais como modelos de "entrada e de saída", dando uma contribuição plausível para a compreensão de que a relação entre os dois conjuntos de números pode (às vezes) ser expressa por uma expressão algébrica (Ayalon, Watson & Lerman, 2016).

A covariação entre duas grandezas implica uma compreensão da forma como a variação dos valores de uma das variáveis produz variação nos valores da outra. Smith (2003) defende que o estudo das funções como covariação é utilizado pelos alunos de forma mais intuitiva permitindo a compreensão de uma função através dos padrões de mudança que se verificam em cada uma das variáveis. De acordo com esta abordagem identificam-se os correspondentes padrões de variação, ou seja, analisa-se a covariação de x e y. Ao facilitar o entendimento da relação entre as variáveis envolvidas numa relação funcional, o raciocínio covariacional pode facilitar o processo de generalização e a consequente escrita de uma expressão algébrica que traduza a relação entre as variáveis. Assim, o raciocínio covariacional tem um papel importante no entendimento de relações funcionais e no aprofundamento de um conceito tão importante como o conceito de função.

Abrantes et al. (1999) referem que o entendimento de relações funcionais só poderá ser atingido quando os alunos têm bem trabalhada e compreendida a noção de variável, o que nem sempre acontece. A compreensão da noção de variável está identificada como uma das dificuldades conceptuais dos alunos que muitas vezes não pensam em variáveis como símbolos que representam quantidades cujos valores variam, mas sim como representação de um valor desconhecido, como é o caso da "letra" que representa uma incógnita numa equação do 1.º grau A forma de ultrapassar a dificuldade na compreensão dos diversos papéis que as "letras" desempenham em diferentes expressões matemáticas é criar-lhes situações de aprendizagem variadas, "tanto do ponto de vista dos contextos como dos significados que as expressões matemáticas assumem"(Abrantes et al., 1999, p. 114). A apendizagem dos diferentes papéis das letras, nomeadamente quando representam variáveis, tem de ser feita de forma progressiva, partindo de exemplos simples e apresentados preferencialmente em contextos reais e com significado para os alunos (Ponte et al., 2009).

Os alunos devem ser envolvidos em tarefas que promovam a exploração de relações, a explicação das suas ideias, a discussão e a reflexão sobre elas. No âmbito do estudo das funções, a capacidade de interpretar e relacionar as variáveis envolvidas numa relação funcional, a partir das suas diferentes representações, é essencial ao entendimento do conceito de função.

No ensino em Portugal o estudo de Funções é iniciado no 7.º ano de escolaridade. De acordo com o documento, Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico, homologado em 2013, ao longo dos três anos de escolaridade do ensino básico, o estudo de funções faz parte de um dos cinco domínios de conteúdos a leccionar: Funções, Sequências e Sucessões (FSS). No estudo deste tema, os alunos devem reconhecer uma função em diversas representações, e interpretá-la como relação entre variáveis, como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e usá-las para representar e analisar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos (ME, 2017).

No 7.º ano de escolaridade os alunos estudam as funções de proporcionalidade direta e a função afim. No 8.º ano é aprofundado o estudo da função afim e no 9.º ano de escolaridade são lecionadas a função quadrática do tipo $y = ax^2$ e a função de proporcionalidade inversa. Por modelarem muitas situações do quotidiano, da matemática e de outras ciências, este tipo de funções devem ser exploradas em sala de aula como ferramentas de modelação em situações diversas (ME, 2007) e segundo defendem Abrantes et al. (1999) entender uma função como um modelo para situações do mundo real é um passo importante para que os alunos atribuam sentido ao conceito de função.

A aprendizagem do conceito de função tem-se revelado uma tarefa complexa e difícil para os alunos. Segundo a teoria cognitiva de Vinner (1983) duas dificuldades são reconhecidas como principais: (i) a dificuldade em compreender o conceito de função e (ii) a dificuldade dos professores em determinar quando é que o conceito já foi efetivamente apreendido pelos alunos. Este autor refere ainda a existência de um conflito cognitivo nos alunos entre o *conceito definição* – a definição verbal de função e o *conceito imagem* – a ideia que o aluno associa ao que é uma função. Segundo Saraiva et al. (2012), este conflito cognitivo pode ser evidenciado pelo facto de vários alunos mecanizarem e reproduzirem verbalmente ou por escrito a definição de função sem que a tenham compreendido efetivamente. Algumas conclusões de um estudo com alunos do décimo primeiro ano de escolaridade desenvolvido por Saraiva e Teixeira (2009) refere que muitos alunos memorizaram a definição de função mas a maioria não foi capaz de associar as palavras que utilizou na escrita da definição com a representação gráfica de uma função. Alguns alunos escolheram representações gráficas que não definiam uma função mas justificaram as suas respostas escrevendo frases dos tipo, "a cada objeto corresponde uma e uma só imagem", o que evidencia não terem compreendido devidamente o significado da definição de função que escreveram.

A complexidade da terminologia (objetos, domínio, conjunto de chegada…) e da simbologia (x , y , f e $f(x)$) das funções é também reconhecida por vários autores como uma dificuldade na aprendizagem das funções. Ponte, Branco e Matos (2009) referem que esta dificuldade é acrescida quando as notações surgem em situações exclusivamente matemáticas e não em situações contextualizadas. Outra dificuldade reconhecida no estudo das funções é a dualidade do próprio conceito de função. Para Gray e Tall (1994), citados em Sajka (2003), por exemplo, $f(x)=2x+3$ simboliza o processo de cálculo de imagens para cada um dos objetos em particular e simultaneamente define a função f , para qualquer valor do seu domínio. Ainda citado por Sajka (2003), segundo Sierpinska (1992), $f(x)$ pode representar, ao mesmo tempo, o nome e os valores da função f . A interpretação das notações depende do contexto em que aparecem, o que pode ser um obtáculo à aprendizagem dos alunos, sobretudo daqueles que apresentam maiores dificuldades.

De acordo com o NCTM (2014), uma maneira de ajudar os alunos a superar os equívocos que prevalecem relativamente ao conceito de função é criar em sala de aula, oportunidades aos alunos, para refletirem sobre a relação entre variáveis apresentadas em situações que lhes sejam familiares e do seu interesse. Os professores não se devem limitar a apresentar, em frente à turma, uma definição formal de função mas sim criar condições para que os alunos, depois de analisarem determinadas correspondências, compreendam que uma função é apenas um tipo especial de correspondência. Para Abrantes et al. (1999, p. 118) "os alunos devem perceber que uma função é uma correspondência com determinadas características e que, para definir uma função, necessitam de dois conjuntos entre os quais se define a correspondência e de um processo pelo qual a partir de cada elemento do primeiro conjunto (objeto) se obtém o correspondente no segundo (imagem)".

De acordo com Bárrios (2011), uma forma que pode facilitar a aprendizagem das funções no 3.º ciclo é proporcionar aos alunos o uso de *software* adequado e a resolução de tarefas de natureza problemática e investigativa. Também Ponte, Branco e Matos (2009) assumem as potencialidades da tecnologia no estudo das funções e consideram que *software* de geometria dinâmica, como por exemplo o *Geogebra*, podem ser um meio privilegiado para a visualização das características de uma função, em cada uma das suas representações.

Dada a natureza rica do conceito de função, o seu entendimento como relação entre duas variáveis e o facto de uma função poder modelar situações do dia-a-dia, o estudo de funções é um bom contributo ao desenvolvimento de cada uma das três grandes finalidades para o ensino da matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade (MEC, 2013). As funções são um dos temas do ensino da matemática capaz de "proporcionar uma visão da disciplina que corresponda à sua natureza enquanto ciência e integre o reconhecimento do seu valor cultural e social, nomeadamente no que se refere ao seu papel no desenvolvimento das diversas ciências, da tecnologia e de outras áreas da atividade humana" (ME, 2017, p.2).

2.2. Representações matemáticas

Em matemática, as representações podem ser símbolos, palavras, esquemas, desenhos ou objetos que representem uma ideia e podem reportar-se a entidades muito distintas como conceitos, relações ou procedimentos (Canavarro et al., 2012).

Para Goldin (2008), uma representação é uma configuração que representa algo de alguma forma. De acordo com este autor, todas as representações estão incluídas em sistemas de representação mais abrangentes, constituídos por caracteres primitivos, configurações e estruturas. Os caracteres primitivos são os elementos base de um sistema de representação. No domínio da matemática podem ser entidades concretas (números e símbolos aritméticos) ou entidades abstratas (vetores). As configurações são as regras que permitem associar os diferentes caracteres primitivos, por exemplo, com números de um só dígito podem formar-se novos números com mais do que um dígito. Os sistemas de representação têm estruturas mais complexas que permitem relacionar diferentes configurações. Em matemática, podem associar-se, diferentes caracteres primitivos como letras e números a operações aritméticas e obter equações.

Goldin (2008), distingue dois tipos de representações: internas e externas. Uma representação interna relaciona-se com os sistemas de representação psicológica de um indivíduo e não pode ser observada diretamente, é um meio para o próprio indivíduo desenvolver uma estratégia ou uma forma de pensar. Representações internas fazem parte das imagens mentais que criamos sobre os objetos e sobre os processos matemáticos (Cuoco, 2001). Uma representação externa tem existência física, podendo ser apresentada num determinado suporte, como por exemplo o papel ou o computador. As palavras, os números, os desenhos, os gráficos e as equações algébricas são exemplos de representações externas.

Todos os sistemas de representação externa são estruturados por convenções. O conteúdo das representações externas é determinado pelas regras do sistema de representação onde são produzidas, pelo que só fazem sentido em contextos bem determinados com regras e significados bem definidos.

Goldin (2008) salienta que o desenvolvimento de aprendizagens significativas exige a articulação entre representações internas e representações externas e refere que é esta interacção que permite a compreensão das representações externas formais, essenciais para a comunicação de ideias matemáticas. Como forma de potenciar o uso e o desenvolvimento das representações internas em sala de aula, este autor propõe atividades de resolução de problemas, vizualização e reconhecimento de padrões em contextos que sejam familiares aos alunos.

O facto das representações internas integrarem processos cognitivos complexos e não serem diretamente observáveis, aquilo que o professor pode conhecer sobre elas é baseado em inferências. Estas inferências são feitas a partir da análise das representações externas apresentadas pelos alunos e permitem que o docente compreenda os processos de pensamento dos alunos e identifique as suas dificuldades.

Um autor que também se tem dedicado ao estudo das representações é Duval, para quem, tal como Goldin, a noção de representação pressupõe sempre a existência de uma coisa que substitui outra. Para Duval (2006), para que um indivíduo se possa apropriar de um determinado objeto abstrato precisa de recorrer a algum tipo de representação e, como trabalhar em matemática implica trabalhar com uma imensidão de objetos abstratos impossíveis de aceder através da observação, o recurso a representações é essencial à aprendizagem na disciplina.

Duval (2004) utiliza o termo Registo de Representação Semiótica para indicar diferentes tipos de representação, como por exemplo, a linguagem natural, a linguagem algébrica, as tabelas, os gráficos cartesianos e as figuras. Na sua abordagem, Duval (2006) destaca a importância das representações semióticas no processo de aquisição de conhecimento matemático e defende que para se compreender as dificuldades de aprendizagem em matemática é necessário distinguir duas formas diferentes de transformação: tratamento e conversão. Tratamento é a transformação da representação de um objeto, dado num registo, numa transformação desse objeto no mesmo registo. Por exemplo, os cálculos que se podem efetuar dentro do sistema de numeração decimal. Conversão é a transformação da representação de um objeto, dado num registo, numa transformação desse mesmo objeto noutro registo. Por exemplo, a escrita da equação correspondente a um gráfico cartesiano. É a conversão entre representações "que constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos"(Duval, 2004, p. 49). Segundo o mesmo autor, um sujeito só apreende um determinado conceito matemático quando consegue mobilizar simultaneamente pelo menos duas representações distintas ou seja trocar espontaneamente de um tipo de representação para outro. Também Triphathy (2008) considera que limitar um conceito a uma só representação é abordá-lo de olhos vendados, uma vez que uma representação matemática salienta frequentemente apenas um aspeto de um conceito matemático, e portanto, é através do uso de diferentes representações do mesmo conceito que se evidenciam diferentes características da sua estrutura, aumentando a sua compreensão, e desenvolvendo capacidades cognitivas diferentes.

Outros autores, como Kaput (1999) e Cuoco (2001), defendem que a transição entre diferentes representações pode ajudar os alunos a compreender, de uma forma mais ampla e mais flexível, um determinado conceito, pelo que, a consideram uma ferramenta fundamental na compreensão de um conceito matemático.

As representações matemáticas assumem no ensino e na aprendizagem da matemática diferentes papéis e são reconhecidas por vários autores, como ferramentas úteis na compreensão, na construção, na organização, no registo e na comunicação de ideias matemáticas. Assim, os professores devem proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que os incentivem a utilizar diferentes representações e a trabalhar conceitos e processos matemáticos, desenvolvendo a capacidade de usar de forma flexível e fluente diferentes representações matemáticas (Stylianou, 2010). Neste âmbito, Friedlander e Tabach (2001) consideram que a natureza das tarefas que os professores selecionam para trabalhar com os alunos os deve influenciar a recorrer às várias representações e sugerem que as mesmas tenham as seguintes características:

(i) as situações problemáticas devem ser apresentadas através de diferentes representações, para que encorajem a flexibilidade na escolha da representação e para que legitimizem o seu uso;

(ii) devem ser colocadas questões de natureza investigativa, para que os alunos se familiarizem com a representação inicial, estabeleçam relações entre representações e escolham aquela que os conduzirá à solução;

(iii) as questões de natureza reflexiva são igualmente importantes, pois ajudam os alunos a distanciarem-se do trabalho efetuado e a avaliarem as escolhas efetuadas.

Para além da adequada escolha das tarefas, a promoção da discussão coletiva em torno do uso de várias representações para estudar uma mesma situação ajuda os alunos a compreender a estrutura matemática que se encontra por trás de cada uma das representações e a perceber de que forma as várias representações se interligam (Abrahamson, 2006).

Organismos internacionais como o NCTM (2008) e nacionais como a APM (1988) e o ME (2007) valorizam as representações matemáticas e destacam a importância da sua utilização desde o início da escolaridade. As crianças devem ser encorajadas a representar as suas ideias sob formas que tenham significado para si, através de linguagem verbal, oral ou escrita, desenhos, gestos, esquemas ou símbolos. Este tipo de representações, não são necessariamente as convencionais próprias da matemática mas podem revelar potenciais pontos de partida à aprendizagem de representações mais formais e constituem métodos de comunicação e poderosas ferramentas de raciocínio (NCTM, 2008).

Webb et al. (2008) defendem que os alunos não devem ser forçados a usar estratégias formais, caso não tenham experimentado uma vasta gama de modelos matemáticos pré-formais ou informais que possam dar sentido às representações formais. Defendem ainda que o tempo investido com os alunos em experiências de aprendizagem ao nível pré-formal, irá reduzir substancialmente o tempo necessário à aprendizagem de novas práticas ao nível formal. Mesmo quando os alunos atingem entendimentos mais formais deverão ser capazes de revisitar representações informais ou pré-formais quando confrontados com contextos desconhecidos. A aprendizagem das representações convencionais deve ser igualmente valorizada, uma vez que representações formais constituem uma ferramenta indispensável na compreensão e na comunicação de conceitos e ideias matemáticas. À medida que os alunos vão avançando na escolaridade, devem ser capazes de aperfeiçoar as suas representações, refletir sobre o seu uso e identificar os seus pontos fortes e os seus pontos fracos (NCTM, 2008).

Os professores de matemática estão familiarizados com as representações formais e com estratégias para as manipular, no entanto, devem ter presente que o mesmo não acontece com os seus alunos e que, devem por isso, dar-lhes tempo e oportunidades para criarem e desenvolverem, com significado, as suas próprias representações. Ao mesmo tempo, o professor pode analisar, questionar e interpretar as representações dos alunos e assim aperceber-se melhor da forma como eles apreendem os conceitos matemáticos (NCTM, 2008).

De acordo com o ME (2007) os alunos devem ser capazes de lidar com as ideias matemáticas em diversas representações, isto é, devem ser capazes de:

- ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer uma destas formas de representação;
- traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais.
- conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de os utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação.

No geral, as representações são uma ferramenta poderosa na aprendizagem da matemática, não só porque são essenciais para os alunos pensarem como são fundamentais para exteriorizarem o seu pensamento. Uma representação pode ser usada como um meio para entender ou registar uma informação, sendo tratada como um produto, ou como um meio para explorar uma situação, sendo tratada como um processo (Stylianou, 2010).

2.3. Representações matemáticas na aprendizagem de funções

Reconhecidas as representações como elementos essenciais na compreensão de conceitos e relações matemáticas torna-se necessário, no ensino das funções, criar aos alunos oportunidades de analisar uma função a partir das suas diversas representações:

(i) representação verbal, através de enunciados expressos em linguagem natural;

(ii) representação gráfica, através de diagramas sagitais e gráficos;

(iii) representação tabular, através de tabelas;

(iv) representação algébrica, através de expressão algébricas.

No âmbito do estudo das funções no 7.º ano de escolaridade, os modos de representação matemática mais trabalhados são: diagramas sagitais (ou de setas), tabelas, gráfico, gráfico cartesiano e expressão algébrica.

Os diagramas sagitais são habitualmente usados no início do estudo das funções e, apesar de só serem adequados para representar um pequeno número de valores da função, têm a vantagem de permitir representar funções não numéricas e de variável não numérica. Muitas dessas correspondências entre variáveis não quantitativas ajudam os alunos na compreensão do conceito de função, quando se relaciona, por exemplo, um país e a sua capital.

As tabelas horizontais ou verticais são usadas com alguma frequência. É um tipo de representação já conhecida pelos alunos de anos de escolaridade anteriores mas que quando estudadas para representar funções trazem a "convenção" da representação dos objetos e das imagens na primeira e na segunda linha, respetivamente, para o caso das tabelas horizontais e da representação dos objetos e das imagens na primeira e segunda coluna, respetivamente, para o caso das tabelas verticais. Vários autores consideram o uso de tabelas um caminho na direção do desenvolvimento da capacidade de generalização, sendo um tipo de representação que pode facilitar a compreensão das representações simbólicas. Por exemplo, Brown e Mehilos (2010) defendem que o preenchimento de tabelas auxilia os alunos a identificar as relações entre as variáveis e a traduzi-las de forma mais abstrata, atuando como uma ponte entre a aritmética, onde os valores das variáveis são dados quantitativos e a álgebra, onde as variáveis não são concretizadas e expressam relações gerais.

A leitura e a interpretação de gráficos constitui uma capacidade importante para os alunos enquanto futuros cidadãos, uma vez que são uma forma muito utilizada para apresentar informações referentes a diferentes áreas do conhecimento. Assim, os alunos devem trabalhar com diferentes tipos de gráficos e em diferentes contextos (real e puramente matemático). Devem saber ler e interpretar gráficos construídos a partir de variáveis discretas e de variáveis contínuas bem como construir estes dois tipos de gráfico e compreender as principais diferenças entre si. Os alunos necessitam também de trabalhar com gráficos que têm diferentes tipos de variação em certos intervalos do domínio: (i) estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou constantes e (ii) com variações constantes ou não constantes (Ponte et al., 2009). Segundo estes autores, as dificuldades com as representações gráficas revelam reduzida experiência na leitura, na interpretação e no tratamento rigoroso da informação dada por um gráfico. A interpretação e a construção de gráficos é uma tarefa na qual os alunos cometem alguns erros e conceções erróneas, nomeadamente no trabalho com escalas e na "tendência" em obter sempre uma reta (Guerreiro, 2009). Na construção de gráficos cartesianos, Ponte (1984), identificou as seguintes dificuldades: (i) indecisão sobre o tipo de gráfico, (ii) construção de escalas não uniformes e (iii) hesitação ou falha na escolha de subdivisões apropriadas das unidades de escala.

As representações gráficas de uma função podem ser realizadas de forma rigorosa fazendo a marcação de escalas horizontais e verticais ou podem ser feitas de uma forma qualitativa, sem atribuir grande importância aos aspetos métricos, mas sim a aspetos qualitativos, como por exemplo, estudar pontos relevantes como zeros e extremos (Teixeira et al., 1997).

Segundo Monk (2003), a informação quantitativa expressa nos gráficos é muitas vezes desvalorizada pelos alunos, que levados pelo apelo visual e intuitivo dos gráficos, se concentram apenas na informação qualitativa. Ainda assim, o autor considera ser a visualização que faz dos gráficos instrumentos poderosos na aprendizagem.

A expressão algébrica de uma função é uma expressão que traduz a regra que permite calcular um objeto conhecida a respetiva imagem e vice-versa. Dependendo do seu domínio, funções diferentes podem ser definidas algébricamente pela mesma expressão. A "regra" que traduz a relação entre as variáveis numa relação funcional também pode ser explicada por palavras-representação verbal. Em muitas situações, os alunos são capazes de reconhecer e descrever a relação de dependência entre duas variáveis mas têm dificuldade em representá-la na forma algébrica, sendo a representação algébrica de uma função reconhecida como a forma menos intuitiva e mais difícil para a maioria dos alunos.

Os resultados de um estudo realizado por Guerreiro (2009) sugerem que, embora os alunos sintam dificuldade na escrita de expressões algébricas em problemas contextualizados e em problemas puramente matemáticos, o seu desempenho é melhor em problemas com contextos reais. A autora refere que as dificuldades dos alunos na interpretação e na utilização das representações algébricas podem estar relacionadas com o modo como se tem trabalhado com este tipo de representação, sugerindo que a diversificação da natureza das tarefas e o estabelecimento de conexões com as outras representações, pode ser uma forma de minimizar essas dificuldades. Neste âmbito, uma das sugestões desta autora é que se deve atribuir à representação verbal, um papel mais importante do que aquele que usualmente se dá e reconhecê-la como uma forma válida de representação, ainda que com limitações, tal como qualquer outra representação.

Cada um dos tipos de representação apresenta vantagens e desvantagens, conforme descritas no quadro que se apresenta em seguida (Quadro 1), e cujo resumo foi elaborado de acordo com literatura existente nesta área, nomeadamente em Friedlander e Tabach (2001).

Quadro 1 - Tipos de representação: vantagens e desvantagens

Tipo de Representação	Vantagens	Desvantagens
Verbal	Enfatiza a conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano; Facilita a passagem da linguagem informal à linguagem matemática.	Pode tornar-se um obstáculo à comunicação uma vez que não é uma linguagem universal.
Gráfica	Proporciona uma imagem clara, intuitiva e geralmente apelativa; Favorece a observação rápida de determinados comportamentos da função.	É influenciada por fatores externos, como as escalas; Apresenta, frequentemente, apenas uma parte do domínio da função; Pode não fornecer a precisão necessária ao que se quer estudar.
Tabular	Evidencia diretamente as relações entre as variáveis, pelo que o seu uso é adequado quando se pretende identificar e generalizar relações funcionais.	Não é viável quando se pretende representar muitos valores do domínio da função.
Algébrica	É concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos; Permite determinar de forma rápida e eficaz valores do domínio e do contradomínio da função.	Oferece dificuldades de interpretação de resultados, uma vez que pode ocultar o significado matemático.

Para que as desvantagens de um tipo de representação possam ser facilmente colmatadas pela combinação com o uso de outro tipo de representação, uma estratégia que o professor deve adotar é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações (Kaput, 1999). O professor tem um importante papel em ajudar os alunos a usar com destreza e de forma eficaz as diversas representações de uma função (Canavarro & Gafanhoto, 2014). Um dos recursos que o professor tem à sua disposição é a seleção de tarefas adequadas aos seus objetivos (Ponte, 2005); neste caso, a adoção de tarefas que apelem ao uso de diferentes representações matemáticas relativas às funções, e de forma explícita, à transição entre si (Canavarro & Gafanhoto, 2014). Quando os alunos têm presentes diferentes representações na compreensão da "situação – problema" em que se baseia uma tarefa, a transição de uma representação para outra é encarada como uma necessidade natural e não como uma exigência arbitrária (Friedlander & Tabach, 2001).

Trabalhar com diferentes formas de definir uma função e fazer conexões entre si leva a uma compreensão mais profunda e as dificuldades de apreensão e aplicação do conceito de função podem ser minimizadas (Candeias, 2010).

No entanto, por ser uma atividade cognitiva mais exigente, a integração e a coordenação de diferentes formas de representação é um factor adicional de dificuldades no processo ensino-aprendizagem (Ainsworht, 1999 & Seufert, 2003, citados em Nitsch et al., 2014). Para Nitsch et al. (2014) a capacidade de traduzir uma forma de representação de uma função para outra é uma competência central no que diz respeito ao estudo de relações funcionais. As dificuldades dos alunos nos processos de transição entre diferentes representações dependem da ação que essa mesma transição exige (Adu-Gyamfi et al., 2011). Leinhardt et al. (1990) identificaram dois tipos de ações envolvidas na transição entre representações: interpretação e construção. Interpretação refere-se às ações através das quais um aluno dá sentido ou adquire significado de uma forma específica de representação. Construção refere-se à ação de gerar novas peças que não são dadas e exige dos alunos a criação de uma nova representação-representação alvo a partir de uma representação dada-representação fonte.

Com base nesta categorização geral das ações de transição entre representações, Nitsch et al. (2014) descrevem quatro novos elementos de ação cognitiva: identificação, construção, descrição e justificação. Em comparação com a categorização de Leinhardt et al. (1990) supracitada, a ação "interpretação" é alterada para identificação, referindo-se aqui como uma ação mais elementar e podendo incluir a validação de resultados de uma tarefa de transição. Na ação cognitiva, construção, é pedido ao aluno que traduza uma determinada forma de representação de uma função para outra, que ele terá de criar, sem novos dados. Na ação descrição o aluno é solicitado a descrever verbalmente a sua abordagem ou o seu processo de resolução. O quarto elemento de ação cognitiva, a explicação, refere-se a tarefas onde o aluno é convidado a justificar verbalmente a sua solução ou a demonstrar a razão pela qual uma resolução está correta ou incorreta.

Por serem ações matemáticas elementares, a identificação e a construção são ações vistas como particularmente significativas para o processo de aprendizagem no domínio das relações funcionais. Ainda assim, para uma compreensão mais profunda deste tipo de relações, as ações cognitivas de descrição e explicação, "cujo terreno comum é o aspeto verbal, são altamente relevantes e constituem um requisito adicional à identificação e à construção" (Nitsch et al., 2014, p. 675).

Os vários modos de representar uma função e a capacidade de transitar de um modo de representação para outro são aspetos essenciais na aprendizagem das funções, pelo que o seu estudo está especialmente adequado na concretização das orientações nacionais e internacionais de proporcionar aos alunos o contacto com a diversidade de representações matemáticas (Gafanhoto & Canavarro, 2014).

2.4. Estudos empíricos realizados no âmbito das funções e das representações

Friedlander e Tabach (2001) consideram que a utilização de várias representações por parte dos alunos depende da adequação das tarefas propostas no que diz respeito ao tipo de questões que as constituem. Neste sentido apresentam uma experiência de ensino-aprendizagem realizada com alunos em início da aprendizagem da Álgebra e que se desenvolveu em torno de uma tarefa denominada *Poupança*, com o objetivo principal de promover o pensamento e as ações dos alunos numa variedade de representações. É apresentada uma situação-problema em torno das poupanças semanais de quatro filhos, durante um ano, sendo que, as economias de cada um são traduzidas por um modo de representação diferente. A tarefa contempla questões que incentivam o trabalho com diferentes representações, por exemplo, é pedido aos alunos que comparem as economias de dois dos quatro filhos fazendo uso de tabelas, gráficos, expressões e explicações ou que, partindo dos gráficos das economias dos quatro filhos, identifiquem cada um dos gráficos e encontrem o significado e o valor de cada ponto de interseção. No geral, pretende-se que os alunos se familiarizem com as representações iniciais, transitem entre diferentes representações, respondam às questões de âmbito exploratório ou reflexivo colocadas, descrevam o seu trabalho e comentem o trabalho dos colegas. Nas conclusões deste estudo os autores referem que a promoção de múltiplas representações melhora a capacidade dos alunos em utilizá-las no dia a dia e permite-lhes ganhar consciência das vantagens e desvantagens de cada uma. É destacado o uso predominante de representações numéricas, obtidas em 60% das respostas dadas pelos alunos. Este resultado era esperado pelos autores que o justificam referindo que o uso deste tipo de representação é incentivado naturalmente pelo tipo de questões colocadas e pelo facto dos alunos estarem mais familiarizados com ele, uma vez que estão numa fase inicial do estudo da álgebra. Ainda assim, existiram alunos que recorreram a três ou quatro tipos diferentes de representação ao longo da tarefa o que permitiu aos autores concluir que, em ambientes propícios de aprendizagem, os alunos revelam-se aptos e dispostos a usar várias representações. Relativamente à escolha de uma determinada forma de representação, os autores consideram que esta pode ser influenciada por uma combinação de vários fatores, entre eles, a natureza da tarefa, preferência pessoal, estilo de pensamento ou tentativas de superar as dificuldades encontradas durante o uso de outra representação.

Matos (2007) desenvolveu um estudo, centrado no caso de dois alunos do 8.º ano de escolaridade, no qual pretendia compreender o modo como a resolução de tarefas de carácter exploratório e investigativo, envolvendo relações funcionais, poderia contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Na análise dos dados recolhidos, com base em produções escritas pelos alunos e em duas entrevistas semi-estruturadas, a autora verificou que, em algumas tarefas, sobretudo nas tarefas iniciais, os alunos reagiram de forma negativa à presença de símbolos, encarando-os como um obstáculo adicional à matemática e que no trabalho com expressões algébricas interpretaram a letra preferencialmente como incógnita, ignoraram a possibilidade do seu uso como número generalizado e revelaram dificuldades na compreensão de situações que envolviam a letra como variável. Ainda assim, a autora refere que a resolução de tarefas de carácter exploratório parece ter contribuído para uma ampla visão sobre o papel da simbologia e das suas diferentes utilizações bem como para uma melhoria no uso adequado de expressões algébricas e da compreensão do seu significado. A natureza das tarefas propostas também parece ter tido um efeito positivo no alargamento das estratégias desenvolvidas pelos alunos na exploração de situações que envolvem variáveis e numa melhoria significativa no que respeita a processos de generalização. Segundo a autora, as dificuldades ocasionais manifestadas pelos alunos reforçam a ideia de que a compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento, que deve ser continuamente trabalhado ao longo do tempo.

Bárrios (2011) estudou de que modo o recurso ao *software Graph* pode contribuir para a aprendizagem das funções afim e das funções de proporcionalidade inversa. Os participantes no estudo foram alunos do segundo ano de um curso de Educação e Formação, com equivalência ao 9.º ano de escolaridade, mas os resultados obtidos baseiam-se no estudo de caso de dois alunos da turma que revelaram dificuldades relacionadas com a representação simbólica das funções e na transição da representação tabular para a representação simbólica. No entanto, esta dificuldade parece ter sido minimizada com o recurso ao *software,* uma vez que os alunos obtêm com facilidade a representação gráfica, e a partir desta, chegam sem dificuldade à representação simbólica, usando um método experimental. Assim sendo, os resultados apontam que o facto do *software* escolhido permitir o confronto constante com diferentes representações de uma função (o programa permite visualizar em simultâneo, tabela, gráfico e expressão algébrica), possibilitando colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras, contribuiu para a compreensão das funções em estudo e das suas propriedades. No geral, a utilização do *software Graph*, auxiliou os alunos na identificação de regularidades e na formulação e teste de conjeturas e o facto de permitir recorrer a estratégias gráficas ajudou–os no trabalho com expressões algébricas, sobretudo aqueles que apresentavam maiores dificuldades. A autora do estudo considera que os resultados obtidos sugerem a necessidade de uma abordagem das funções, no 3.º ciclo, que envolva os diferentes modos de representação de uma função e enfatize a transição entre eles.

Jesus (2016) estudou o modo como alunos do 8.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a função afim em dois contextos particulares: com e sem recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*. A autora concluiu que foi a representação tabular a que maiores dificuldades ofereceu aos alunos que, por sua vez, privilegiaram as representações gráfica e algébrica de uma função afim. É salientada a naturalidade com que os alunos encararam a transição entre a representação algébrica e a gráfica o que não aconteceu entre a representação tabular e qualquer outra. A generalidade dos alunos foi capaz de fazer a associação entre o valor do declive da reta a uma maior ou menor inclinação da reta relativamente ao eixo das abcissas e estabeleceu a relação entre uma função afim e o seu gráfico evidenciando saber que o gráfico de uma função afim, não linear, não contém a origem do referencial. A autora refere que recorrer a uma representação foi a estratégia adotada por um expressivo número de alunos como forma de compreender alguns dos problemas trabalhados nas aulas e que, no geral, os dados analisados evidenciaram que uma das estratégias heurísticas às quais os alunos recorrem na resolução de problemas com a função afim é a utilização de esquemas e representações.

3. A unidade de ensino

Neste capítulo descrevo a proposta pedagógica que serviu de base a este estudo, com vista a promover uma aprendizagem significativa das funções com foco nas representações matemáticas. Com efeito, apresento o capítulo 3, referente à unidade de ensino, que se encontra dividido em quarto subcapítulos. No primeiro faço uma breve descrição do contexto escolar, referindo a caracterização da escola e da turma que participou no estudo. No segundo apresento a forma como foi planificada a unidade de ensino, fazendo referência às opções metodológicas e à avaliação dos alunos. No terceiro faço uma descrição pormenorizada dos objetivos de cada uma das tarefas propostas aos alunos e das caraterísticas do teste de avaliação. Por fim, apresento sucintamente as alterações que o planeamento da unidade de ensino sofreu bem como as razões que as justificaram.

3.1. O contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

A escola onde decorreu este estudo é secundária, sede de agrupamento, abrangendo alunos do ensino regular desde o 7.º até ao 12.º anos de escolaridade. Tem cerca de 1100 alunos no regime diurno: 22 turmas do 3.º ciclo e 21 turmas do ensino secundário em cursos científico-humanísticos. Localiza-se no concelho de Oeiras e tem uma população considerada heterogénea no que diz respeito à origem socioeconómica mas onde prevalece o grau de licenciatura nas habilitações dos encarregados de educação cujas profissões são, em maioria, quadros superiores da Administração Pública, dirigentes ou quadros superiores de empresa.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma é constituída por 27 alunos (19 rapazes e 8 raparigas). No início do ano letivo a média de idades dos alunos era de doze anos. Três alunos da turma têm necessidades educativas especiais e são avaliados ao abrigo do decreto-lei nº3/2008 de 7 de janeiro. Um destes alunos usufrui da medida e) currículo específico individual e não frequenta as aulas de matemática. Durante o ano letivo, em conselho de turma, o comportamento da turma foi considerado satisfatório e o aproveitamento, tendo em conta todas as disciplinas, foi avaliado como insuficiente no 1.º período e suficiente nos 2.º e 3.º períodos.

A evolução das classificações atribuídas na disciplina de matemática, no final de cada um dos três períodos letivos, está indicada no gráfico que se segue (Figura 1):

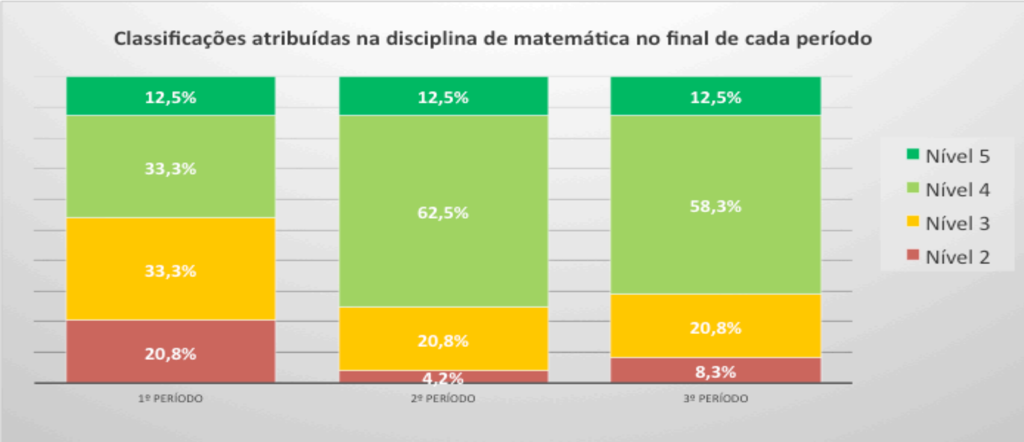


Figura 1 – Classificações atribuídas no final de cada período

No final do ano letivo todos os alunos transitaram para o 8.º ano de escolaridade, com uma média final, considerando todas as disciplinas, de 3,6.

3.2. Planeamento da unidade de ensino

A planificação desta unidade de ensino teve por base os seguintes documentos em vigor para a matemática do ensino básico: *Programa e Metas Curriculares*, homologadas em 2013 e *Curriculo do Ensino Básico e Secundário* (decreto lei- n.º 55/2018), publicado em 2017.

Uma vez que no documento *Programa e Metas Curriculares* se refere que este foi construído com base nos conteúdos temáticos expressos no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (PMEB), este último foi também tomado em consideração.

O documento *Curriculo do Ensino Básico e Secundário* supracitado concretizou-se no estabelecimento do *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (PA) e na definição de *Aprendizagens Essenciais* (AE), pelo que estes dois últimos documentos também foram considerados na planificação desta intervenção pedagógica.

De acordo com o programa em vigor, uma função f é definida como sendo uma correspondência entre dois conjuntos A e B que, a cada elemento $x \in A$, associa um elemento único de B, representado por $f(x)$. Uma função $f: A \to B$ é designada por "f" quando esta notação simplificada não for ambígua e são definidos os termos "objeto", "imagem", "domínio", "conjunto de chegada", "contradomínio" e "variável". Em contextos diversos que envolvam funções com domínios e conjuntos de chegada finitos, os alunos devem ser capazes de identificar e representar funções, bem como efetuar operações com funções em diagramas de setas, tabelas e gráficos cartesianos. É também objetivo no estudo de funções definir em $\mathbb{Q}$, funções constantes e funções lineares e identificar função afim como a soma de uma função linear com uma função constante. Os alunos devem identificar uma função afim como uma função com uma expressão algébrica do tipo $y = kx + b$, reconhecer que o seu gráfico é uma reta que contém o ponto (0, b) e compreender a forma como os valores do declive, k, produzem alterações na reta.

Ainda nesta unidade curricular, de acordo com o atual programa, são definidas funções de proporcionalidade direta havendo a indicação curricular para a resolução de problemas envolvendo este tipo de funções em diversos contextos. De acordo com o programa de 2007, que é mais específico relativamente ao estudo deste tipo de função, os alunos devem interpretar e descrever o significado da constante de proporcionalidade, analisar o seu papel na expressão algébrica e analisar a influência da constante no gráfico da função.

Por serem documentos de orientação curricular base na planificação, realização e avaliação do ensino e da aprendizagem, as aprendizagens essenciais para o 7.º ano na disciplina de matemática foram consideradas nesta unidade de ensino. As aprendizagens essenciais elencam os conhecimentos, as capacidades e as atitudes a desenvolver por todos os alunos e conduzem ao desenvolvimento das competências inscritas no perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Os objetivos essenciais de aprendizagens para o tema das funções para o 7.º ano são: (i) reconhecer uma função em diversas representações, e interpretá-la como relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e usá-las para representar e analisar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos; (ii) representar e interpretar graficamente uma função linear e relacionar a representação gráfica com a algébrica e vice versa e (iii) resolver problemas utilizando funções, em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias para a sua resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados.

Elencados às metas curriculares, os objetivos gerais para o subdomínio "Funções" no 7.º ano de escolaridade são: (i) definir funções, (ii) operar com funções, (iii) definir funções de proporcionalidade direta e (iv) resolver problemas (MEC, 2013). Para além dos objetivos gerais, o atual programa contempla os temas transversais que devem ser trabalhados em todos os domínios de conteúdo: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação e destaca três finalidades para o ensino da matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Estes temas referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objetivos definidos e as finalidades referidas só podem ser atingidas se os alunos forem apreendendo adequadamente os métodos próprios da matemática (MEC, 2013). Assim, quer os objetivos quer as finalidades definidas no atual programa de matemática foram considerados na planificação desta unidade de ensino.

Tendo em conta a indicação do número de aulas previstas para o domínio FSS: Funções, Sequências e Sucessões definido no programa em vigor, e articulando com a indicação do número de aulas previstas na planificação do tema das funções, realizada no grupo disciplinar de matemática, esta unidade de ensino foi implementada em 23 aulas de 50 minutos sendo três delas destinadas a revisões, realização e correção de um teste de avaliação.

A concretização desta unidade de ensino decorreu entre os dias 23 de Fevereiro e 13 de Abril e anteriormente tinham sido lecionadas, por esta ordem, as unidades didáticas: números racionais, quadriláteros e equações do 1º grau.

No quadro que se segue (Quadro 2) é apresentada uma planificação simplificada da unidade de ensino. Uma planificação mais completa encontra-se em anexo (Anexo 3).

Quadro 2 - Planificação simplificada da unidade de ensino

Nº de aulas	Conteúdos	Tarefas
1	Função como relação entre duas variáveis; variável dependente e variável independente.	Tarefa 1.
2	Função como correspondência entre dois conjuntos A e B e função como relação entre duas variáveis.	Tarefa 2.
1	Notação e linguagem das funções; Igualdade de funções; Função numérica e função numérica de variável numérica.	Continuação da tarefa 2; Resolução de exercícios.
1	Modos de definir uma função, linguagem das funções, notação (y=f(x))e igualdade de pares ordenados.	Exercícios do manual .
2	Modos de definir uma função.	Correção do trabalho de casa; Resolução de exercícios do manual Tarefa 3.
1	Operações com funções.	Resolução do exercício do manual e do caderno de atividades.
3	Leitura e interpretação de gráficos; Variável dependente e independente.	Resolução de exercícios; Tarefa 4.
2	Transição entre diferentes representações de uma função.	Tarefa 5; Resolução de exercícios do caderno de atividades.
1	Teste de avaliação.	
2	Função linear.	Tarefa 6.
2	Correção do teste de avaliação.	
3	Função constante, função linear e função afim; Operações com funções afim. Propriedades.	Construção e interpretação de tabelas e gráficos.
2	Função de proporcionalidade direta.	Resolução de problemas do caderno de atividades.

3.3. Abordagem metodológica

No planeamento desta unidade criei uma sequência de seis tarefas cujas ideias foram retiradas de outras tarefas desenvolvidas para o ensino das funções e que encontrei durante a fase de pesquisa que antecedeu à planificação desta proposta pedagógica. As tarefas são diversificadas de forma a permitir aos alunos o contacto com diferentes modos de encarar e de representar funções, um aspeto essencial na aprendizagem das funções (Abrantes et al., 1999).

As tarefas foram desenvolvidas no sentido de iniciar o estudo das funções valorizando os seus conhecimentos prévios e com vista a promover uma apropriação gradual da noção de função e da sua simbologia própria. A sequência das tarefas foi definida de forma a possibilitar a utilização de estratégias e modos de representação progressivamente mais complexos e que permitissem conexões com outras representações utilizadas anteriormente. No geral, o uso de diferentes representações de uma função e a transição entre elas foi um aspeto muito reforçado ao longo desta unidade de ensino, tendo sido promovido em todas as tarefas. A capacidade dos alunos para identificar o modo em que uma função está representada e construir uma nova representação é essencial para a compreensão de relações funcionais (Nitsch et al., 2014).

O quadro seguinte (Quadro 3) resume a forma como a transição entre os diferentes modos de representação de uma função foram contemplados nas tarefas propostas.

Quadro 3 - Transições entre representações nas tarefas propostas

Transições	Tarefa
GS: Transição entre gráfico e descrição da situação;	2, 4
GA: Transição entre um gráfico e uma equação algébrica;	3, 5, 6
GN: Transição entre um gráfico e uma tabela numérica;	2, 5
NA: Transição entre tabela numérica e equação algébrica;	1, 3, 5
SN: Transição entre a descrição da situação e uma tabela	1, 2
SA: Transição entre descrição da situação e equação algébrica	1

Legenda - **A**: Representação algébrica; **G**: Representação gráfica; **N**: Representação numérica (tabelas) e **S**: Representação verbal.

As tarefas propostas estão articuladas entre si e inserem-se num quadro de ensino-aprendizagem exploratório, cuja principal característica é o facto de promover nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento, que conduz naturalmente à valorização do modelo de aula em três fases: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva com sistematização das principais ideias discutidas (Ponte, 2005).

No início de cada aula, foram apresentados os objetivos principais das tarefas e clarificadas algumas partes onde os alunos deveriam centrar a sua atenção, uma vez que uma das dificuldades diagnosticadas nos alunos na compreensão das tarefas, advém da dificuldade de leitura e compreensão dos enunciados. De acordo com as indicações do atual programa “deve-se trabalhar com os alunos a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que se levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente” (MEC, 2013, p. 5).

Ao longo do estudo da unidade de ensino os alunos foram incentivados a desenhar esquemas e figuras, traçar gráficos e a construir tabelas. Este tipo de representações visuais serve como forma de ajudar os alunos na interpretação e na compreensão das situações propostas e como forma de evidenciar a existência de determinadas relações. Estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas ajuda os alunos a desenvolver diversos tipos de conexões e a compreender o conceito de função (Abrantes et al., 1999).

Foram valorizados os aspetos mais intuitivos e menos formais das funções, em situações contextualizadas, e só posteriomente definidos o conceito, os termos e as notações próprias. O uso de definições rigorosas é um hábito de pensamento que não deve ser imposto pelo professor mas sim emergir de situações problemáticas como uma necessidade de coerência e argumentação lógica (Abrantes et al., 1999).

As estratégias de ensino adotadas assentam numa metodologia centrada no aluno, onde este assume um papel ativo na sua aprendizagem e o professor tenta criar as condições necessárias para que essa aprendizagem ocorra.

Na resolução das tarefas em aula, os alunos trabalharam em pares sendo que o critério considerado na elaboração dos grupos foi manter os dois elementos que estavam juntos de acordo com a planta. Durante o primeiro período a turma revelou alguns comportamentos menos corretos e a planta da sala de aula sofreu várias alterações. O conselho de turma, considerou que a última planta definida tinha sido eficaz e a diretora de turma sugeriu que fosse mantida até final do 2.º período.

Acompanhei o trabalho realizado por cada um dos pares, estimulando a interação social e a troca de ideias entre os alunos. Estive atenta às dificuldades reveladas, esclareci dúvidas e dei sugestões que ajudassem os alunos nas situações de impasse. Intervi junto dos alunos de forma a estimular o surgimento de ideias, o uso de representações e a necessidade de apresentar e justificar procedimentos e respostas. Este acompanhamento permitiu-me apoiar os alunos nas suas resoluções, conhecer o trabalho que estava a ser desenvolvido e consequentemente antecipar/planear os momentos de discussão coletiva.

As discussões coletivas foram realizadas após a conclusão de quatro das seis tarefas propostas. Na preparação deste trabalho, sempre sujeito a situações de improviso, tive em conta um modelo baseado em cinco práticas fundamentais: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre respostas de (Stein et al., 2008).

As discussões coletivas oferecem aos alunos a oportunidade de partilhar com os colegas e com o professor as suas resoluções, explicar as suas estratégias e também lhes permite conhecer e questionar as resoluções de outros colegas. Assim, este tipo de trabalho que proporciona momentos de apresentação e discussão de resultados e estratégias, promove e valoriza a partilha de significados matemáticos e desenvolve capacidades essenciais como o raciocínio e a comunicação. Para Mestre e Oliveira (2012) a exploração e a gestão de tarefas abertas que se desenvolvem nas aulas, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares ou coletivamente, tem um papel fundamental na construção do conhecimento. A realização de discussões coletivas foi uma opção metodológica que privilegiei uma vez que reconheço neste tipo de trabalho grandes vantagens em processos de ensino - aprendizagem exploratório, como o que desenvolvi nesta unidade de ensino.

Na planificação foram também considerados momentos para a consolidação de conhecimentos, através da resolução de exercícios selecionados no manual adotado e no caderno de atividades dos alunos. Exercícios rotineiros e automatismos de aplicação de conhecimentos são essenciais ao trabalho matemático, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, por forma a que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores (MEC, 2013). Também Ponte (2005) reconhece que os exercícios têm um lugar próprio no ensino da matemática servindo para que o aluno ponha em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos. Ainda para este autor, citando José Sebastião e Silva (1964), mais importante do que fazer muitos exercícios é fazer exercícios criteriosamente escolhidos e que permitam avaliar a compreensão dos conceitos fundamentais dos alunos.

Em articulação, as tarefas propostas e as opções metodológicas contribuem para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático e para uma comunicação (oral e escrita) adequadas à Matemática.

Os recursos envolvidos nesta unidade de ensino foram: material de escrita, quadro da sala, papel (manual adotado, caderno de atividades, tarefas e caderno diário) e computador com utilização do programa de geometria dinâmica *Geogebra* e plataforma da *Escola Virtual*). O recurso a *software* acessível às escolas e a computadores, que permitam obter diferentes representações das funções, é vista como uma oportunidade de melhoria das aprendizagens dos alunos que podem tirar proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente, nomeadamente a construção de gráficos (NCTM, 2008).

Num contexto de trabalho em que a aprendizagem foi um processo de construção de significados baseado nas experiências vividas pelos alunos, a avaliação foi associada ao propósito de compreender o processo de aprendizagem, identificar problemas e gerar hipóteses explicativas (Ponte, 1997). Ao longo das aulas a avaliação dos alunos abrangeu vários domínios: o envolvimento nas tarefas propostas, o empenho, o interesse, a participação oral, a capacidade de expor e argumentar ideias e o relacionamento inter-pessoal. Consciente de que a avaliação dos alunos é muito mais do que a atribuição de uma nota, promovi momentos de avaliação de diagnóstico, avaliação formativa e avaliação sumativa.

Relativamente à avaliação de diagnóstico, um dos objetivos das duas primeiras tarefas é avaliar se os alunos revelam alguns dos pré-requisitos necessários à aprendizagem das funções, nomeadamente a marcação de pontos num referencial cartesiano do plano. No que concerne à avaliação formativa, recolhi e corrigi em casa trabalhos realizados pelos alunos (trabalhos de casa e resoluções de partes de algumas tarefas propostas na aula). Posteriormente devolvi aos alunos as respetivas correções, com sugestões de emendas e/ou comentários que incentivassem a análise e a reflexão de eventuais erros cometidos. Esta foi uma forma de verificar se os objetivos previamente definidos estavam a ser alcançados. No que diz respeito à avaliação sumativa, os alunos realizaram um teste de avaliação depois de lecionadas 14 aulas da unidade de ensino.

A dinâmica da sala de aula e o papel desempenhado pela professora e pelos alunos, foram muito semelhantes ao que já tinha sido desenvolvido desde o início do ano letivo, pelo que a implementação desta unidade de ensino, decorreu de forma natural, num contexto de sala de aula familiar aos alunos, e num ambiente descontraído onde a partilha de ideias foi uma constante.

3.4. As tarefas

3.4.1. Descrição e objetivos

Uma característica que pode distinguir os vários tipos de tarefas é a sua referência à matemática, à semi-realidade ou à vida real (Skovsmose, 2000). No primeiro caso, as questões e atividades são propostas em contexto puramente matemático. No segundo caso, as tarefas abordam situações de uma realidade "artificial" construída apenas com o propósito de serem trabalhadas num contexto de ensino-aprendizagem e são bastantes utilizadas nos manuais escolares. Em tarefas com referência à realidade são apresentados ou solicitados dados referentes a "cenários" reais, que podem ser dados estatísticos oficiais ou dados recolhidos de fenómenos da vida real.

Segundo Ponte (2005), duas dimensões fundamentais podem ser consideradas nas tarefas propostas aos alunos: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio pode variar entre "reduzido" e "elevado", dependendo naturalmente da perceção da dificuldade das questões colocadas. O grau de estrutura varia entre "aberto" e "fechado". Numa tarefa fechada está indicado de forma clara o que é dado e o que é pedido e numa tarefa aberta há um grau de indeterminação relativamente ao que é dado e/ou ao que é solicitado. Considerando as duas dimensões supracitadas obtém-se quatro diferentes tipos de tarefas: exercícios, problemas, investigação e exploração, como ilustrado no esquema seguinte:

Figura 2 - Tipologia das tarefas (Ponte, 2005)

As seis tarefas propostas nesta unidade de ensino são, no geral, tarefas de exploração, que de acordo com o esquema apresentado, são caraterizadas como tarefas de desafio reduzido e grau de estrutura aberta. Durante a lecionação da unidade de ensino foram também trabalhados exercícios e problemas selecionados do manual e do caderno de atividades, uma vez que cada tipo de tarefa desempenha o seu papel no processo ensino-aprendizagem (Ponte, 2005). As tarefas propostas foram elaboradas criteriosamente tendo em conta, tanto quanto possível, a turma, os objetivos definidos para a aprendizagem das funções, os temas transversais e as finalidades do ensino básico da matemática.

Tarefa 1

A ideia para a elaboração da tarefa 1 (Anexo 5) surgiu de um artigo de Stylianou (2010). É uma tarefa de natureza exploratória com referência à semi–realidade e foi elaborada com dois propósitos principais: como tarefa de avaliação de diagnóstico e como tarefa base para a aprendizagem de novos conteúdos, pensada de forma a promover o uso de diferentes representações.

As questões colocadas exigem que, a partir de uma representação em linguagem verbal, os alunos interpretem e relacionem as variáveis envolvidas na relação funcional apresentada no enunciado e desenvolvam uma estratégia de resolução adequada mostrando a forma como chegaram às suas respostas. Tendo em conta a forma como a situação é descrita, é esperado que os alunos recorram a uma representação icónica e que este tipo de representação pré-formal os apoie nas questões seguintes nas quais já são solicitadas representações mais formais.

Na questão 1.1 é pedido o número máximo de pessoas que se podem sentar quando se juntam 3 mesas, que por ser um valor pequeno, é uma questão relativamente simples. Com o objetivo de conduzir os alunos a generalizar a relação entre as variáveis, na questão 1.2 os alunos têm de completar uma tabela determinando valores mais elevados de cada uma das variáveis. Pretende-se analisar se o procedimento usado nesta questão é o mesmo que o usado na questão anterior ou se os alunos recorrem a outras estratégias e/ou novos tipos de representação.

Na questão 1.3 pretende-se compreender se os alunos são capazes de descrever a lei de formação de uma sequência e/ou escrever o respetivo termo geral. A descrição de uma regra ou a escrita de uma fórmula que relacione o número de mesas encostadas com o número máximo de pessoas que se podem sentar, proporciona aos alunos uma oportunidade de reconhecer, descrever e generalizar a relação que existe entre as duas variáveis em estudo.

Esta tarefa está planificada para uma aula de 50 minutos, dos quais cinco minutos são para a apresentação da tarefa, 30 minutos para a resolução e 15 para uma discussão coletiva em torno da questão 1.3.

A partir da discussão das resoluções dos alunos, é apresentada a noção de função como relação entre duas variáveis e são definidas variável independente e variável dependente. Pretende-se que o trabalho desenvolvido pelos alunos nesta tarefa os ajude a tornar mais compreensível e significativa a representação de uma função por uma expressão algébrica. Vários autores como Boavida (2008) defendem que, para que seja interiorizado e compreendido o rigor da linguagem matemática, este deve ser trabalhado com os alunos, de forma gradual, a partir da sua linguagem verbal, aspeto que foi considerado na criação desta tarefa.

Tarefa 2

Esta tarefa 2 (Anexo 6) foi adaptada da tarefa 4 da página 75 da Sebenta “Sequências e funções” – materiais de apoio ao professor da autoria de Ponte, Matos e Branco (2009) e é dedicada à interpretação e compreensão da definição de função. Tem como objetivo principal o desenvolvimento do conceito de função a partir do uso de diferentes tipos de representações matemáticas e do trabalho com correspondências, quantidades, variáveis e relações entre variáveis.

A tarefa é apresentada aos alunos, no contexto de um novo programa de computador, intitulado "máquina das perguntas", que de acordo com um determinado tema, dá respostas às questões colocadas.

As situações apresentadas pretendem ser um ponto de partida ao desenvolvimento da noção de função como correspondência entre dois conjuntos e como relação entre duas variáveis. A partir do trabalho desenvolvido pelos alunos e privilegiando as suas próprias representações (construção e exploração) são introduzidos a definição de função, a notação adequada e os termos próprios das funções.

Esta tarefa é de natureza exploratória e será realizada numa aula de 100 minutos (50 minutos + 50 minutos). Cinco dos primeiros 50 minutos são dedicados à apresentação da tarefa e a uma breve revisão dos conceitos: raiz quadrada, número natural e número inteiro e, nos restantes 45 minutos, os alunos resolvem a tarefa até à questão 1.2 inclusivé. Nos segundos 50 minutos, há lugar a um momento intermédio de discussão das resoluções dos alunos, no qual estes serão solicitados a explicar as suas correspondências e a refletir, de acordo com a definição, se estas definem ou não uma função. No restante tempo da aula os alunos resolvem a questão 1.3, com a qual se pretende analisar os conhecimentos que os alunos revelam na construção de gráficos cartesianos e observar se são capazes de reconhecer que uma função pode ser definida a partir de diferentes representações.

Na questão 1.2 são apresentadas três "máquinas de perguntas" com os temas "raiz quadrada", "números menores" e "dobro de um número". Relativamente ao primeiro tema, a correspondência pedida não cumpre as condições necessárias para definir uma função uma vez que, entre 1 e 6 não existem três quadrados perfeitos, pelo que, no conjunto de partida pelo menos um dos elementos não terá correspondência no conjunto de chegada. No tema "números menores", a correspondência pedida também não pode representar uma função porque qualquer que seja o número, n, entre 2 e 3, existe mais do que um número natural que é inferior a n. Este facto faz com que não seja possível encontrar três elementos do conjunto de partida que tenham apenas uma correspondência no conjunto de chegada, o que contraria a condição referente à unicidade de uma imagem no conceito de função. No que concerne ao tema "dobro de um número", a correspondência pedida define uma função, uma vez que a cada número corresponde um e um só número que é o seu dobro. Independentemente dos três elementos do conjunto de partida que os alunos escolham, o computador devolve uma e uma só resposta.

Ao longo da discussão serão definidos os termos *conjunto de partida* e *conjunto de chegada* e salientada a importância do papel das definições em matemática, uma vez que, neste contexto, é a “definição”, o critério que permite concluir se uma correspondência é ou não função. Para a representação em diagrama sagital do tema “dobro de um número”, que define uma função, será introduzida a notação $f(x)$ e os termos *objeto*, *imagem*, *domínio* e *contradomínio*.

Como ainda não foram definidos os diferentes modos de representação de uma função, e os alunos não sabem a definição de tabela nem de gráfico cartesiano de uma função são esperadas algumas incorreções nos itens 1.3.1 e 1.3.2 da questão 1.3. No entanto, nesta fase, o essencial é que os alunos compreendam que se o diagrama sagital que representa a correspondência “dobro de um número”, estudado anteriormente, define uma função, então a correspondente tabela e o respetivo gráfico cartesiano são formas diferentes de representar essa mesma função. Eventuais erros dos alunos nas representações pedidas serão aproveitados para chamar a atenção, mais uma vez, do importante papel que as definições ocupam na aprendizagem da matemática.

Como já referi, esta tarefa também serve de avaliação de diagnóstico de conhecimentos dos alunos nomeadamente da noção e representação de conjuntos, da construção de tabelas e da identificação e marcação de pares ordenados no 1º quadrante do plano cartesiano. A representação de pontos num referencial cartesiano foi um tema já revisto com os alunos no sétimo ano durante o estudo de uma unidade anterior - os quadriláteros, no qual aproveitei para colocar um trapézio num referencial e pedir a identificação dos pares ordenados que representavam os seus vértices. Criei esta situação porque os alunos estavam a precisar deste conteúdo nas aulas da disciplina de ciências físico-químicas e considerei oportuno introduzi-lo antes da data prevista.

Tarefa 3

A tarefa 3 (Anexo 7) pretende dar continuidade ao trabalho iniciado na tarefa 1, uma vez que a situação colocada é a mesma, embora neste caso, a relação que existe entre o número de mesas e o número máximo de pessoas que se podem sentar é apresentada como uma função definida algebricamente. É uma tarefa de natureza exploratória com referência à semi-realidade. Quando esta tarefa é proposta, os alunos já conhecem a definição de função, alguma da sua simbologia e os diferentes modos de representação de uma função.

Pretende-se compreender de que forma uma situação já trabalhada anteriormente pelos alunos e que promoveu e valorizou as suas representações informais (visuais e icónicas) os pode ajudar na interpretação e compreensão de representações mais formais (gráficos e expressões algébricas).

Os objetivos principais desta tarefa são: (i) dar significado e trabalhar com a expressão algébrica de uma função, (ii) trabalhar a linguagem algébrica numa situação contextualizada quer como instrumento de generalização quer como argumento de uma função, (iii) determinar, interpretar o significado e utilizar a notação adequada de objetos e imagens e (iv) promover a transição entre diferentes modos de representar uma função.

Na questão 1.1 desta tarefa são apresentados dois gráficos e duas tabelas em que apenas uma destas quatro representações pode definir a função f , definida algebricamente no enunciado. Pretende-se que os alunos identifiquem a opção que está correta e que justifiquem a razão pela qual excluíram cada uma das restantes opções.

A questão 1.1 está estruturada de forma a familiarizar os alunos com a representação algébrica de uma função bem como a transição da representação algébrica para uma representação gráfica e para uma representação tabular.

As questões 1.2 e 1.3 têm o propósito de conduzir os alunos a trabalhar com as notações próprias das funções, numa situação contextualizada, e para a qual já tiveram oportunidade (na tarefa 1) de determinar, ainda que de forma implícita, objetos e imagens. Sendo a simbologia x , y e $f(x)$ largamente usada no estudo das funções e identificada como uma dificuldade dos alunos, torna-se importante promover na sala de aula a sua utilização levando os alunos a fazer dela uma apropriação progressiva e um uso adequado (Ponte et al., 2009). Na determinação do valor de x pedido na questão 1.3, pretendo observar qual a estratégia desenvolvida pelos alunos e de que forma a representam. Uma vez que já aprenderam, no presente ano letivo, a resolução de equações do 1º grau, poderão recorrer a este procedimento algébrico para dar resposta à questão colocada. Nestas duas questões os alunos têm de, no contexto da situação, interpretar e descrever o significado dos valores obtidos.

Esta tarefa está planificada para uma aula de 50 minutos e os alunos trabalham em pares.

Tarefa 4

Esta tarefa 4 (Anexo 8) foi adaptada de um artigo de Ayalon et al. (2015). É uma tarefa de natureza exploratória com referência à semi-realidade e tem como objetivo promover experiências de aprendizagem em que funções e gráficos surgem como modelos de situações "reais", apresentando aos alunos a oportunidade de trabalhar com variáveis e relações entre si. Para cada uma das situações, I e II, descritas em linguagem natural, os alunos têm de escolher, de entre os gráficos apresentados, um que a possa representar. Para justificarem as respostas têm de identificar as variáveis consideradas e relacionar graficamente os seus comportamentos, que segundo Ayalon et al. (2015), é um tipo de trabalho que deve ser um foco na aprendizagem matemática.

O facto de não existir apenas um gráfico que possa traduzir cada uma das situações e que, para cada gráfico, a escolha das variáveis possa ser variada, torna esta tarefa muito adequada a uma discussão coletiva uma vez que são esperadas muitas respostas diferentes. Assim, pretende-se promover uma discussão no grupo-turma na qual os alunos tenham a oportunidade de exprimir e explicar os seus raciocínios envolvendo o trabalho com variáveis e desenvolver uma compreensão mais significativa de relações funcionais.

A situação II tem um grau de dificuldade propositadamente superior ao da situação I, uma vez que aqui a identificação das variáveis não é tão intuitiva e não é apresentado nenhum gráfico que possa traduzir integralmente a situação. Uma das variáveis que se espera que os alunos escolham, tendencialmente, é o número de golos, uma variável relevante na situação II descrita, mas inadequada para ser considerada em qualquer um dos gráficos representados. Neste contexto, espera-se que os alunos compreendam a diferença entre o aspeto gráfico de uma função cuja variável independente é discreta e o aspeto gráfico de uma função cuja variável independente é continua. Pretende-se também que os alunos estudem, caso existam, os zeros, os extremos e a variação do gráfico escolhido, que interpretem o seu significado e os relacionem de acordo com o descrito na situação dada.

No geral, o objetivo desta tarefa é que, partindo de uma representação gráfica, os alunos analisem a forma como duas variáveis se relacionam e que, na elaboração das suas explicações, possam refletir na relação que tem de existir entre a situação descrita, as variáveis envolvidas e o gráfico escolhido.

As caraterísticas desta tarefa e a forma como é explorada em sala de aula, permitem o desenvolvimento da comunicação matemática, um dos temas considerado de grande importância para a aprendizagem da matemática.

Esta tarefa está planificada para uma aula de 100 minutos e os alunos trabalham em pares.

Tarefa 5

A ideia para a construção da tarefa 5 (Anexo 9) surgiu da leitura de um artigo de Friedlander e Tabach (2001). Esta tarefa promove, de forma explícita, o uso flexível de diferentes representações de uma função e a transição de um modo de representação para outro. É uma tarefa de natureza exploratória, caracterizada com referência à semi-realidade e tem como propósito principal que os alunos consolidem os seus conhecimentos na análise de uma função a partir das suas diversas representações.

São apresentadas duas funções f e g definidas, repetivamente, por uma tabela e por um gráfico, e colocadas questões que incentivam os alunos a analisar cada uma das funções dadas envolvendo diferentes formas de as representar. Na elaboração das questões, foi considerada uma estruturação da tarefa em três partes distintas: (i) familiarização – é apresentada uma dada representação, que exige ao aluno a sua interpretação; (ii) transição – constituída por questões que proporcionam a criação de um determinado modo de representação e (iii) exploração - constituída por questões mais abertas e nas quais os alunos podem optar por uma representação que considerem adequada (Friedlander & Tabach, 2001).

Na questão 1.1, os alunos têm de determinar o valor da soma de duas imagens, em que uma está explícita no gráfico que representa a função f e a outra implícita na tabela que representa a função g. Pretende-se analisar, em cada caso, se os alunos compreendem como podem determinar o valor da variável dependente: poupança de cada uma das irmãs em cada uma das semanas, conhecido o valor da variável independente: número de semanas. Pretende-se também verificar se os alunos utilizam e interpretam corretamente a notação $f(x)$, para um valor de x conhecido. Na questão 1.2, os alunos são convidados a fazer a transição entre a representação tabular e a representação algébrica de uma função bem como a explicar a razão pela qual consideram correta a expressão algébrica que escreveram. Pretende-se analisar as dificuldades que os alunos evidenciam nesta competência de transição e identificar eventuais dificuldades na utilização de linguagem simbólica.

Para dar resposta à questão 1.3, os alunos têm de representar de um modo diferente, cada uma das funções apresentadas no enunciado. Pretende-se analisar os tipos de representação escolhidos pelos alunos, observar que incorreções são cometidas e que dificuldades evidenciam na transição entre as diferentes representações.

Esta tarefa, a ser realizada em pares, está prevista para uma aula de 50 minutos. As resoluções serão recolhidas, uma por cada par de alunos, corrigidas e posteriormente devolvidas com as devidas chamadas de atenção e correções.

Tarefa 6

A tarefa 6 (Anexo 10) foi adaptada do exemplo 7 da página 33 da brochura de funções de *Investigações Matemáticas na sala de aula* (PMT, 1999).

É uma tarefa de natureza exploratória, caraterizada com referência à matemática e o seu objetivo fundamental é servir de base à aprendizagem da função linear, relacionando as suas representações algébrica e gráfica. Os alunos têm de atribuir diferentes valores de k, negativos e positivos, na expressão $y = kx$ e visualizar o respetivo gráfico, obtido recorrendo ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, cuja escolha se deve ao facto de ser um programa gratuito e de fácil acesso e utilização.

Posteriormente, no enunciado da tarefa, têm de registar as expressões algébricas escolhidas, esboçar o gráfico obtido e registar as principais conclusões. Pretende-se, portanto, que os alunos relacionem o valor de k escrito na expressão com o declive da reta obtida.

A facilidade e a rapidez com que o programa apresenta o gráfico da função, depois de introduzida a expressão algébrica, são uma mais valia que permite aos alunos a observação das diferenças entre os gráficos obtidos e a formulação de conjeturas. Para além disso, este tipo de trabalho promove o surgimento e o reforço de conexões entre duas representações de uma forma distinta da já realizada em aulas anteriores com recurso ao papel.

A tarefa está prevista para uma aula de 50 minutos onde os alunos trabalham em pares numa sala de computadores. Durante a sua realização, os alunos serão apoiados na descoberta da relação entre a inclinação da reta e o valor de k e incentivados a registar, de forma clara e completa, as respetivas conclusões. Na discussão coletiva, realizada na aula seguinte, pretende-se explorar o caso em que o valor atribuído a k na expressão $y = kx$ é igual a zero.

Teste de avaliação

O teste de avaliação é constituído por dez questões, sendo duas de escolha múltipla e as restantes oito de resposta aberta. Das questões de resposta aberta, as questões 1, 4, 7, 9 e 10 estão subdivididas em itens.

O conteúdo das questões colocadas no teste de avaliação enquadra–se maioritariamente no capítulo das funções sendo que apenas três estão relacionadas com conteúdos das unidades didáticas lecionadas anteriormente, quadriláteros e equações do 1º grau. Relativamente aos conteúdos abordados, a razão pela qual o teste é constituído desta forma, deve-se essencialmente a dois fatores: por um lado, o facto de ser prática do grupo disciplinar de matemática da escola a implementação de testes de avaliação que integrem questões sobre pelo menos dois dos temas já lecionados e, por outro lado, o facto de eu considerar pertinente avaliar o desempenho dos alunos nos vários "tópicos" da aprendizagem das funções nos quais as aulas se focaram: definição de função, domínio e contradomínio de uma função, determinação de objetos e imagens e diferentes modos de representação de uma função (interpretação, construção, análise e transição).

Apesar de ser prática da escola, que a duração dos testes de avaliação no ensino básico seja de 50 minutos, dada a sua extensão, este teste está previsto realizar-se em 60 minutos e os alunos não estão autorizados a utilizar calculadora.

3.4.2. Concretização

Na generalidade, a concretização das aulas decorreu como estava planificado, havendo no entanto, imprevistos que levaram a pequenas alterações.

Por falta de tempo na aula prevista para a sua realização, a questão 1.3 da tarefa 2, planificada para ser realizada em pares na sala de aula, foi resolvida individualmente como trabalho de casa. Na aula seguinte recolhi as resoluções de todos os alunos, corrigi-as e devolvi-as com as devidas correções. Os alunos que cometeram incorreções na construção do gráfico, tiveram de a repetir e entregar-me a nova resolução.

Devido ao elevado número de dúvidas apresentadas pelos alunos nas aulas anteriores ao teste de avaliação, decidi fazer mais uma aula para consolidação de conhecimentos e o teste foi adiado para o dia 19 de março.

Com um ligeiro atraso no cumprimento da planificação, a aula de realização da tarefa 6, decorreu na tarde de dia 22 de março, penúltimo dia de aulas do 2.º período e os alunos estiveram agitados e pouco empenhados na sua realização. Para além disso, o atraso na chegada de alguns alunos à sala e o facto de dois dos computadores não estarem com ligação à internet levaram-me a ter de fazer alterações nos grupos de trabalho e formar dois grupos de três alunos que tiveram de trabalhar no mesmo computador. As situações referidas condicionaram a forma como se concretizou a tarefa 6, cuja realização se iniciou já passavam dez minutos do início da aula e a discussão dos resultados só foi realizada no 1.º dia de aulas do 3.º período.

4. Metodologia

Este capítulo tem como objetivo descrever a metodologia que adotei na realização deste estudo e está dividido em quatro subcapítulos. No primeiro apresento as opções metodológicas, no segundo faço referência à razão da minha escolha pelos participantes e descrevo algumas das suas características, no terceiro indico os métodos e procedimentos de recolha de dados e no último apresento a forma como procedi à análise de dados.

4.1. Opções metodológicas

De forma a haver coerência entre o objetivo definido e as questões de investigação formuladas, este trabalho seguiu uma abordagem de investigação qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1994), este tipo de abordagem metodológica pressupõe características que considerei adequadas à minha investigação: (i) a principal fonte de dados é o ambiente natural dos participantes, sendo o investigador o instrumento principal de recolha; (ii) os dados recolhidos são descritivos; (iii) os processos são mais valorizados do que os resultados; (iv) a forma como os dados são analisados tende a ser indutiva e (v) o "significado" é um conceito chave neste tipo de abordagem. De facto, neste estudo, assumi simultaneamente o papel de professora e investigadora, os dados são descritivos (transcrições de partes das aulas, notas de campo, e resoluções escritas dos alunos) e foram recolhidos em sala de aula, no ambiente natural da turma. A análise dos dados seguiu o método indutivo, uma vez que parti do conjunto de dados empíricos que recolhi e só à posteriori procurei uma teoria que se lhe adaptasse (Santos, 2000). O meu objetivo não é testar hipóteses ou generalizar resultados mas sim "desenvolver e aprofundar o conhecimento de uma dada situação num dado contexto" (Santos, 2000, p. 187), pelo que valorizei a compreensão, a explicação e o significado das ações mais do que as ações em si mesmas.

Este estudo assenta num paradigma de investigação interpretativo e pretende compreender como uma metodologia de ensino focada em tarefas que promovem o uso de diferentes representações matemáticas contribui para a aprendizagem das funções. Este trabalho é uma investigação sobre a minha própria prática letiva que surge sobretudo da minha necessidade e do meu interesse em compreender a natureza de alguns dos problemas que afetam a minha prática profissional e definir, posteriormente, novas estratégias de ação (Ponte, 2002).

4.2. Participantes no estudo

Participaram neste estudo 24 dos 27 alunos da turma. Um dos alunos que não participou tem necessidades educativas especiais (Currículo Específico Individual (CEI)) e não frequenta as aulas de matemática. Os restantes dois alunos não foram autorizados pelos encarregados de educação a participar neste estudo, pelo que não foram considerados na recolha de dados, embora tenham estado envolvidos de forma natural, em todas as atividades de ensino-aprendizagem nesta unidade de ensino.

Quando decidi que a minha intervenção seria no âmbito do estudo das funções, escolhi fazê-lo no 7.º ano de escolaridade, uma vez que é o ano onde se inicia este tema. A razão da escolha da turma foi o facto dos alunos serem, no geral, interessados, trabalhadores e muito participativos o que facilitava o tipo de trabalho que eu pretendia desenvolver. Apesar de a turma ser constituída por cinco alunos que revelam dificuldades na disciplina de matemática e que têm vindo a obter, desde o 5.º ano de escolaridade resultados de nível 2, quatro desses alunos esforçam-se por superar as suas lacunas e são trabalhadores. Por outro lado, três alunos da turma são alunos que têm a matemática como disciplina preferida, apresentam um excelente raciocínio e revelam um bom nível de conhecimentos. Dos restantes alunos, muitos também gostam de matemática e, independentemente dos resultados que obtêm, revelam-se interessados e capazes de, cada um à sua maneira, fazer matemática. Esta diversidade permitia-me, à partida, obter respostas com níveis de desempenho diversificados.

Como já foi referido no capítulo anterior, na resolução da maioria das tarefas matemáticas nas aulas, os alunos trabalharam em pares. O critério adotado para a constituição de cada um dos pares foi ter em consideração as indicações, dadas pela diretora de turma, para o cumprimento da planta de sala de aula.

As informações apresentadas sobre os participantes foram recolhidas em documentos oficiais da escola: registos biográficos dos alunos, processos individuais dos alunos (PIA´s) e caracterização da turma, realizada no início do ano letivo, pela diretora de turma.

Na análise de dados, os alunos são referidos individualmente por A_1, A_2, ..., A_{24} e cada um dos 12 grupos de dois elementos são designados por G_1, G_2,.... ,G_{12}. O grupo G_1 é constituído pelos alunos A_1 e A_2, o grupo G_2 é constituído pelos alunos A_3 e A_4 e assim sucessivamente até ao grupo G_{12} que é constituído pelos alunos A_{23} e A_{24}.

4.3. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Antes de proceder à recolha de dados deste estudo pedi e obtive autorização da direção da escola (Anexo 1). A fim de obter o consentimento escrito dos representantes legalmente autorizados dos participantes, também pedi aos encarregados de educação dos alunos da turma a autorização para a participação dos seus educandos neste estudo (Anexo 2). Tive em consideração os princípios e orientações que constam na Carta Ética (CE) para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação (IE, 2016), nomeadamente o respeito pelos participantes, a garantia pelo seu anonimato e pela confidencialidade dos dados recolhidos.

A recolha de dados foi realizada em onze aulas, correspondentes à totalidade da unidade de ensino: dez aulas na sala de aula habitual dos alunos e uma aula numa das salas de computadores da escola. Os métodos de recolha de dados utilizados foram a observação participante e a recolha documental, como passo a descrever:

4.3.1. Observação participante

Neste estudo assumi o duplo papel de professora e investigadora tentando estabelecer um equilíbrio entre a participação e a observação e não perder de vista o objetivo da minha investigação. Embora tenha participado e estado envolvida nas atividades da turma, centrando-me no trabalho com os alunos, também tentei focar-me no meu papel de investigadora, ficando por vezes, apenas a observar o comportamento dos alunos, o seu empenho e o modo como estavam a decorrer as aulas, sobretudo nos momentos em que os alunos trabalharam autonomamente na resolução das tarefas.

O registo das observações foi feito com recurso a um dispositivo áudio e vídeo, essencial na descrição e na análise das situações decorridas em sala de aula permitindo guardar integralmente e de forma segura toda a informação recolhida. Os registos em vídeo foram efetuados nas aulas em que ocorreram discussões coletivas e foi colocado um dispositivo na mesa da professora, perto do quadro e outro numa mesa na parte oposta da sala de aula. Nas aulas em que os alunos resolveram as tarefas e não houve discussão no grupo turma, foram usados dois dispositivos áudio. Um deles esteve a maior parte do tempo comigo e que aproveitei para registar os diálogos que estabeleci com os alunos e o outro foi colocado na mesa de diferentes grupos de alunos, de forma a registar os seus raciocínios e a troca de ideias entre si.

Adicionalmente, no decorrer das aulas, redigi algumas notas de campo enquanto os alunos resolviam as tarefas. Assim, registei em papel, alguns dos seus comentários, raciocínios e as dúvidas que me colocaram e no final de cada aula, depois dos alunos saírem da sala, descrevi suncintamente a forma como as aulas decorreram. Tentei que os acontecimentos principais da aula ficassem registados e que as notas recolhidas fossem descritivas, não baseadas em inferências ou ilações, mas apenas em factos observáveis (Bodgan & Biklen, 1994).

4.3.2. Recolha documental

Uma vez que o objetivo deste estudo é compreender como uma metodologia de ensino focada em tarefas que promovem o uso de diferentes representações matemáticas contribui para a aprendizagem das funções, a recolha documental foi de extrema importância para a análise dos dados e incidiu sobre as produções escritas pelos alunos: resoluções das tarefas, resoluções de trabalhos de casa e resoluções do teste de avaliação. Todos os documentos recolhidos, foram digitalizados com a maior brevidade possível e devolvidos aos alunos.

Relativamente às tarefas, resolvidas em pares e na sala de aula, recolheu-se apenas uma resolução de cada grupo. As resoluções dos trabalhos de casa e do teste de avaliação foram recolhidas de todos os alunos. Relativamente às tarefas que envolveram discussões coletivas, as resoluções escritas de cada um dos pares de alunos, foram recolhidas antes do início da discussão, de forma que as suas resoluções originais, não fossem alteradas de acordo com as ideias discutidas e eventuais correções da professora decorridas posteriormente.

4.4. O processo de análise de dados

Tendo em conta a quantidade de informação recolhida, as referências teóricas no âmbito do tema e as questões de investigação que defini, procedi à análise de dados, selecionando algumas questões das tarefas realizadas pelos alunos e do teste de avaliação* realizado no período em que decorreu a implementação da unidade de ensino. Adoptei uma estratégia de análise indutiva e foquei-me em procurar evidências que me permitissem atingir o objetivo deste estudo. Assim, para cada uma das tarefas, selecionei as questões cujas resoluções dos alunos me pareceram

*Em função da avaliação formativa e sumativa realizada ao longo da unidade de ensino, algumas das resoluções dos alunos, selecionadas para a secção de análise de dados, contêm comentários e correções realizadas pela professora mas que se distinguem facilmente pelo tipo de letra e pela cor usada.

adequadas para dar resposta às questões de investigação definidas. A seleção das questões nas tarefas propostas aos alunos e a relação de cada uma com as questões de investigação foram elaboradas de acordo com a síntese apresentada no seguinte quadro (Quadro 4).

Quadro 4 - Questões analisadas nas tarefas em relação com as questões de investigação

Tarefas	Questões das tarefas	Questões de investigação
1	1.2 e 1.3	**2)** A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas? **3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?
2	1.2 e 1.3	**1)** Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à: a) definição de função? **3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?
3	1.1, 1.2 e 1.3	**1)** Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à: b) determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa? **3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?
4	Situação I e Situação II	**2)** A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas?
5	1.2 e 1.3	**2)** A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas? **3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?
6	1.3	**3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?
Teste de avaliação	1, 7, 8, 9 e 10	**1)** Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à: a) definição de função? b) determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa? **2)** A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas? **3)** Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre diferentes representações de uma função?

A fim de minimizar a subjetividade inerente à interpretação dos dados recolhidos, documentei a minha análise apresentando evidências provenientes dos diferentes dados empíricos. Neste sentido, a análise das resoluções dos alunos nas tarefas realizadas é, em várias situações, acompanhada de transcrições de momentos das discussões coletivas que ocorreram nas aulas e que foram gravadas em vídeo.

5. Análise de dados

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos em cada uma das tarefas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e no teste de avaliação. Em cada uma das questões identifico o tópico sobre o qual incide a análise dos dados e que está articulado com as questões de investigação às quais pretendo dar resposta.

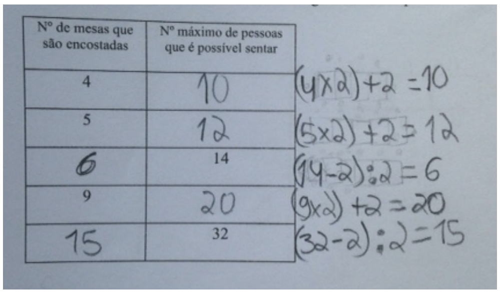
5.1. Tarefa 1

5.1.1. Questão 1.2 – Transição entre representações (SN) e interpretação e relação entre variáveis

Recorde-se que na tarefa 1, introduzida no início do estudo das funções, é descrita uma relação funcional entre o número de mesas que se podem encostar e o número máximo de pessoas que se podem sentar de forma a que, em cada um dos lados, se sente apenas uma pessoa. Nesta questão 1.2, os alunos tiveram de preencher uma tabela onde estavam apresentados valores de uma das variáveis e eram pedidos os respetivos valores da outra variável.

No geral, os alunos não revelaram dificuldades em traduzir numa tabela a informação apresentada verbalmente sobre a relação entre as variáveis em estudo e mostraram como chegaram às suas respostas recorrendo a representações numéricas e/ou icónicas.

Na resolução que apresento em seguida (Figura 3) os alunos evidenciam compreender que o número máximo de pessoas que é possível sentar pode ser obtido adicionando duas unidades ao dobro do número que mesas que são encostadas. Nas situações em que têm de determinar o número de mesas encostadas, quando conhecido o nº máximo de pessoas que é possível sentar, a estratégia utilizada por estes alunos é recorrer à operação inversa: subtraem duas unidades ao número de pessoas e dividem o resultado obtido por 2. Esta estratégia para calcular o número de mesas foi utilizada por vários grupos.



Nº de mesas que são encostadas	Nº máximo de pessoas que é possível sentar	
4	10	(4x2)+2 =10
5	12	(5x2)+2=12
6	14	(14-2):2=6
9	20	(9x2)+2=20
15	32	(32-2):2=15

Figura 3 - Resolução de G_6 - Tarefa 1 - Questão 1.2

Na resolução da figura em baixo (Figura 4) os alunos mostram como chegaram à sua resposta apresentando os cálculos efetuados, fazendo uma representação icónica para ilustrar os valores que colocaram nas duas primeiras linhas da tabela e descrevendo a forma como se podem obter os valores da variável dependente conhecidos os valores da variável independente.

De forma natural, os alunos parecem entender que a representação icónica das mesas e das pessoas não é um processo viável quando se tem de trabalhar com valores das variáveis mais elevados, e portanto, abandonam as figuras como método para calcular e ilustrar os valores obtidos nas três últimas linhas da tabela., recorrendo nestes casos a representações numéricas.

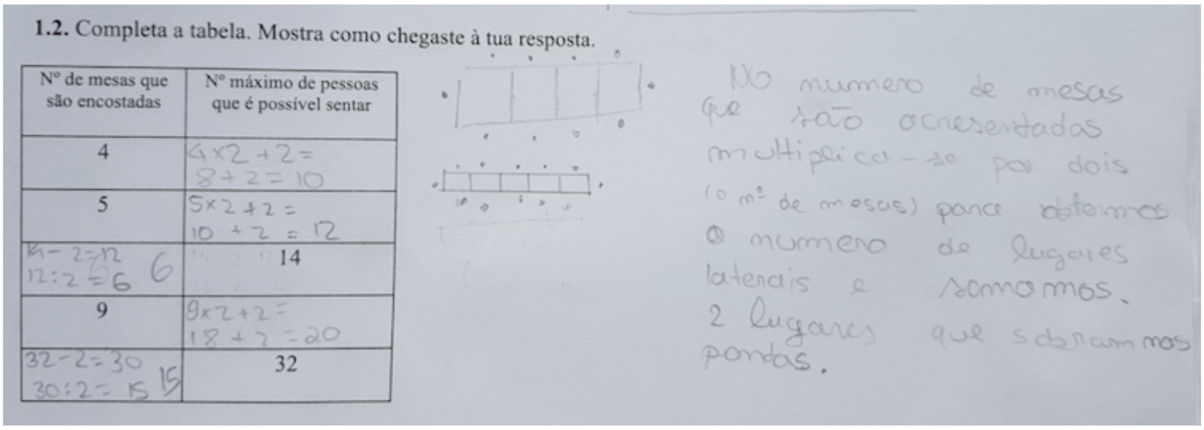


Figura 4 - Resolução de G_{10} - Tarefa 1- Questão 1.2

No exemplo seguinte (Figura 5) os alunos mostram como obtiveram os valores solicitados na tabela recorrendo a uma representação icónica. Para cada uma das linhas da tabela, os alunos fazem um desenho que representa o número de mesas encostadas e de pessoas sentadas e procedem à contagem necessária. Ao contrário do que aconteceu no exemplo anterior, neste caso, os alunos consideram a sua estratégia adequada para completar todas as linhas da tabela e não revelam sentir necessidade de recorrer a outra forma de representação como modo de chegar às suas respostas.

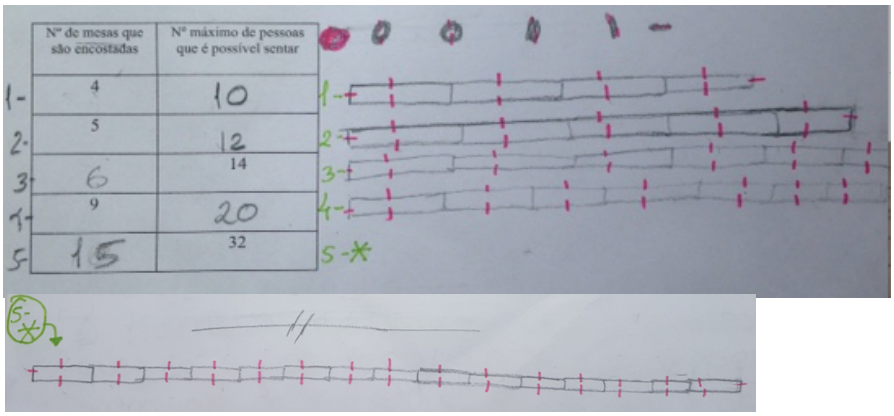


Figura 5 - Resolução de G_{12} - Tarefa 1 - Questão 1.2

No contexto de preenchimento da tabela, alguns alunos observaram que “imagens consecutivas” da relação funcional em estudo, função de variável natural, diferem duas unidades e tentaram justificar as suas respostas usando este conhecimento. Outros alunos mostraram compreender que há formas mais eficazes de obter valores da variável dependente conhecidos os valores da variável independente, sobretudo quando estes são elevados, como se evidencia no seguinte diálogo com a professora:

> *Prof.:* A_{10} , *consegues explicar, por exemplo, porque é que quando se encostam 4 mesas, o número de pessoas é 10?*
>
> *A_{10}: Porque é sempre o anterior mais 2.*
>
> *Prof.: Então e se encostássemos 20 mesas?*
>
> *A_{10}: 20 mesas? Ah... não está aqui...*
>
> *A_{18}: Professora, posso dizer uma coisa?*
>
> *Prof.: Sim.*
>
> *A_{18}: Essa maneira de fazer não é tão boa porque se tivéssemos número de mesas 1000, nós tínhamos de ir de 1 até 1000.*
>
> *A_5: Por isso é que usamos uma expressão.*

A_{10} encontrou uma regularidade entre “valores consecutivos” da variável dependente. No entanto, não conseguiu determinar o número máximo de pessoas que é possível sentar quando são encostadas 20 mesas, o que sugere que o aluno ainda não consegue generalizar a relação entre as duas variáveis. Por outro lado, A_{18} reconheceu que determinar exaustivamente todas as imagens até um número elevado de objetos seria um processo desadequado e a aluna A_5 evidencia compreender a necessidade e a importância de determinar uma expressão algébrica como forma de determinar valores da variável dependente conhecidos os valores da variável independente.

5.1.2. Questão 1.3 – Transição entre representações (SA/NA) e interpretação e relação entre variáveis

Partindo da informação dada verbalmente ou obtida da análise da tabela, a maioria dos grupos foi capaz de descrever e/ou escrever uma expressão que permitisse determinar o número máximo de pessoas que é possível sentar para um qualquer número de mesas encostadas. Pelas justificações dadas pelos alunos, percebe-se que, no geral, estes procuraram e reconheceram uma relação entre as duas variáveis que permitiu a determinação de uma regra geral. As respostas obtidas na questão 1.3 por cada um dos grupos estão transcritas no seguinte quadro (Quadro 5):

Quadro 5 - Síntese das respostas dos alunos - Tarefa 1 - Questão 1.3

Grupo de alunos	Resposta apresentada
1	N = número de mesas Fórmula: $2n+2$
2	$n\times 2+2$ n = número de mesas $\times 2$ = representa os dois lados das mesas $+2$ = representa as duas pontas das mesas.
3	$x\times 2+2$
4	$1\times 2+2$ porque 1 mesa corresponde a 2 pessoas e cada mesa da ponta tem 3 pessoas então se tirarmos uma de cada ponta era como se puséssemos mais uma mesa ou seja mais 2.
5	$x\times 2+2$
6	$(x\times 2)+2$ Se existirem x mesas temos de multiplicar por 2 pois são as pessoas que estão no lado da mesa e adicionar 2 pois são as pessoas que estão nas pontas.
7	"O número de mesas vezes 2 pessoas que dá ao todo o número de pessoas sem as da lateral mais dois e assim dá o número total de pessoas"
8	$n\times 2+2$
9	$x\times 2+2$ Independentemente do número multiplicamo-lo por dois para obtermos os números de lugares nas laterais e somamos 2 porque são o nº de lugares nas pontas.
10	Se uma mesa pode com 4 pessoas, se juntarmos outra temos de tirar 1 pessoa e juntar 3 pessoas ou $x-1+3$
11	$x-1=y$ $y\times 2=z$ $4\times x=n$ $n-z=A$ A = número máximo de pessoas que é possível sentar
12	$x\times 2+2$ $2x+2$, sendo x o número de mesas

Como se pode verificar, dois grupos apresentaram respostas que não estão corretas (G_4 e G_{10}). Os alunos de G_4 descrevem um raciocínio que parece que entendem a relação existente entre o número de mesas e o número de pessoas, no entanto, evidenciam que essa relação pode ser traduzida pela expressão numérica: $1\times 2+2$ o que leva a crer que concentraram a sua forma de pensar considerando apenas uma mesa em vez de um qualquer número de mesas. O grupo G_{10}, evidencia considerar x o número de mesas e ter em conta que, sempre que se junta mais uma mesa, é possível sentar mais duas pessoas, no entanto, os alunos não foram capazes de traduzir essa relação para uma expressão algébrica correta.

O grupo G_{11} apresenta uma expressão menos sintética comparativamente às dos restantes colegas da turma. Os alunos escrevem a fórmula $A=n-z$ indicando que A representa o número máximo de pessoas que é possível sentar, sendo $n=4x$, $x=2y$ e $y=x-1$, tendo-se portanto que $A=4x-2(x-1)=2x+2$. Os alunos deste grupo consideram x o número de mesas e determinam a diferença entre quádruplo do número de mesas (número de pessoas que se podem sentar, no máximo, em x mesas não encostadas) e o número de pessoas que ficariam "sobrepostas" quando as mesas se encostam. Estes alunos observaram, através de representações icónicas (Figura 6) e de representações numéricas (Figura 7), que tinham de retirar a $4x$ o dobro da diferença entre o número de mesas encostadas e 1, o que revela uma boa compreensão da relação existente entre as duas variáveis em estudo.

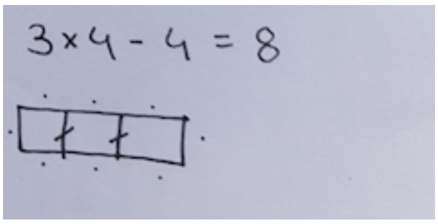


Figura 6 – Resolução 1 de G_{11} - Tarefa 1 Questão 1.3

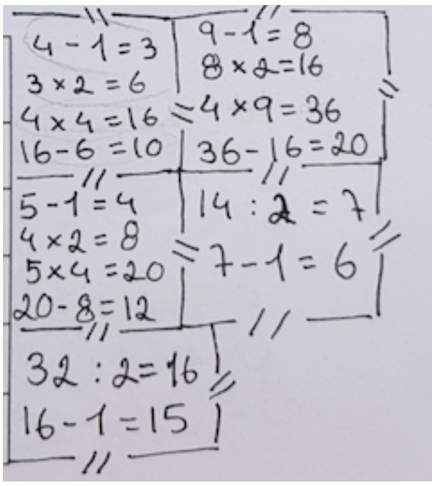


Figura 7- Resolução 2 de G_{11} - Tarefa 1 Questão 1.3

Para além destes alunos, verificou-se que outros se apoiaram nas suas representações numéricas e/ou icónicas para compreender e traduzir algebricamente a relação entre as duas variáveis em estudo.

A maioria dos alunos foi capaz de escrever uma expressão que traduz a relação entre o número máximo de pessoas que se podem sentar e o número de mesas que se encostam, identificando esta última variável com uma "letra" (n ou x).

Assim, verifica-se que, no geral, os alunos interpretaram sem dificuldade a relação entre as variáveis expressa em linguagem verbal e na forma de tabela e foram capazes de a expressar analiticamente, resolvendo de forma adequada a questão colocada. O desempenho de dez dos doze pares de alunos revelou que compreenderam a forma como as variáveis em estudo se relacionam e que são capazes de associar cada um dos termos da expressão algébrica escrita com o seu significado no contexto da situação; tal como se pode verificar no diálogo entre a professora e os alunos apresentado em seguida.

Depois de cada um dos alunos de quatro grupos distintos, incluindo o aluno A_{10}, terem apresentado e explicado as suas respostas, a professora decidiu colocar algumas questões e deu início ao diálogo que a seguir se apresenta:

Prof.: Então encostando 20 mesas, quantas pessoas se podem sentar? A_{10} , achas que já consegues explicar?

A_{10}: Fazia $20 \times 2 + 2$.

Prof.: E porquê 20×2 ?

A_{10}: É.... não sei bem explicar.

A_5: 20×2 representa os lugares laterais e 2 são as da ponta. Nós fizemos a expressão $x \times 2 + 2$.

Prof.: Acham que a expressão que A_5 escreveu no quadro está certa?

Alunos: Sim, é igual à nossa. É a mesma de A_1 mas com x em vez de n .

O aluno A_{10} que inicialmente manifestou dificuldade em determinar o número máximo de pessoas que se podem sentar para um determinado número de mesas, superior aos valores referidos na tabela, parece agora reconhecer que uma forma de o fazer é substituir o valor de x na expressão $2x + 2$, no entanto, não foi capaz de explicar o significado do cálculo 20×2 como forma de determinar quantas pessoas se podem sentar quando são encostadas 20 mesas. O aluno A_5 interveio no diálogo, respondeu à questão colocada pela professora e apresentou, no quadro, a expressão $x \times 2 + 2$, como sendo a resolução do seu grupo à questão 1.3. Vários alunos evidenciaram que a expressão escrita por A_5 estava correta e alguns reconheceram que a expressão $x \times 2 + 2$ representa o mesmo que a expressão $2n + 2$, também apresentada como resposta, por um dos elementos de outro grupo, grupo 1.

Com o objetivo de clarificar o significado da variável utilizada pelos alunos na escrita da expressão pedida e o significado de cada um dos seus termos no contexto da situação, a professora dá início ao seguinte diálogo:

Prof.: O que representa o x *?*

Alunos: O número de mesas.

Prof.: O número de mesas? Não é o número de pessoas?

Alunos: Não.

Prof.: Quem me diz rapidamente se eu tivesse 500 mesas quantas pessoas, no máximo, se podiam sentar? A_7*, o vosso grupo está muito caladinho, querem responder?*

A_7*: Stora, usando a expressão, fazemos* $500 \times 2 + 2$ *.*

Prof.: No contexto da situação, o que significa 500×2 *?*

A_3: *São 500 pessoas em cada um dos lados das mesas! Por isso fazemos sempre* $\times 2$ *.*

Prof.: Então o que representa este 2? (Ver Figura 8, em baixo)

A_7: *São as duas pessoas da ponta.*

Prof.: São? mas aqui também está um dois. (Refere-se ao 2, coeficiente de x . Ver Figura 8)

A_4: *Mas aí está a multiplicar. Aí é o número de pessoas para cada lado. O outro 2 é que é fixo, são as da ponta.*

Prof.: Ok! Toda a gente percebeu o que representa cada um destes "2"?

Alunos: Sim.

Prof.: A sério? Então para concluir.... $2x$ *representa o quê?*

A_8: *O dobro*

Prof.: Neste contexto! o dobro de quê?

A_{19}*: Das laterais, das pessoas que se sentam nas laterais.*

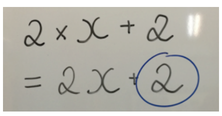


Figura 8 - Resolução de G_3 - Tarefa 1 - Questão 1.3

Os alunos pareceram não ter dúvidas que nas expressões escritas pelos colegas, "x" representa o número de mesas e não o número de pessoas. Apesar da forma como se expressaram nem sempre ter sido clara, no geral, conseguiram identificar e relacionar cada um dos "termos" da expressão algébrica, $2x$ e 2, com o seu significado no contexto da situação.

Partindo de uma relação funcional apresentada em linguagem verbal os alunos foram capazes de a traduzir numa expressão algébrica, o que evidencia não existirem, neste contexto, grandes dificuldades na transição entre estas duas formas de representação de uma função (verbal e algébrica). Antes de ser pedida uma representação algébrica os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar com representações icónicas, numéricas e tabulares, mais ou menos formais, o que parece ter auxiliado os alunos no processo de generalização entre as duas variáveis e facilitado a escrita da expressão algébrica pedida.

Note-se que, na data em que decorreu a recolha de dados desta tarefa, já tinha sido lecionada a unidade "equações do 1.º grau", pelo que os alunos já tinham tido, recentemente, a oportunidade de escrever e simplificar expressões algébricas apresentando alguma familiaridade com a linguagem algébrica.

5.2. Tarefa 2

5.2.1. Questão 1.1 – Definição de função

Na questão 1.1 da tarefa 2 (Anexo 5) os alunos tinham de estabelecer uma correspondência entre dois conjuntos A e B e representá-la num diagrama sagital. O conjunto A é constituído por polígonos, e o conjunto B pelos respetivos números de lados de um polígono.

Na figura 9 está representada a correspondência apresentada pelos alunos do grupo G_2 que escolheram dois polígonos com igual número de lados, quadrado e retângulo, e um pentágono; aos quais fizeram corresponder, respetivamente, o seu número de lados, 4 e 5. Na figura 10 está representada outra correspondência, referente à resolução de outro par de alunos, G_5. Estes alunos seguem o exemplo dado no enunciado da tarefa e colocam setas nas linhas que traçam para estabelecer a ligação entre o conjunto de partida e o conjunto de chegada.

Estas duas correspondências foram apresentadas no quadro pelos alunos e serviram de ponto de partida à discussão conjunta em torno de diagramas sagitais que representam ou não uma função.

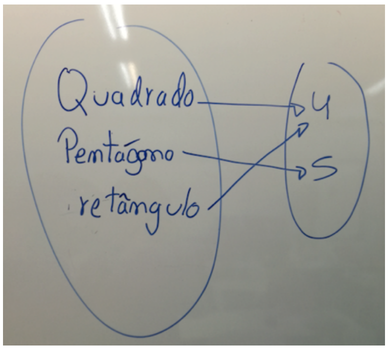


Figura 9 - Resolução de G_2 - Tarefa 2 - Questão 1.1

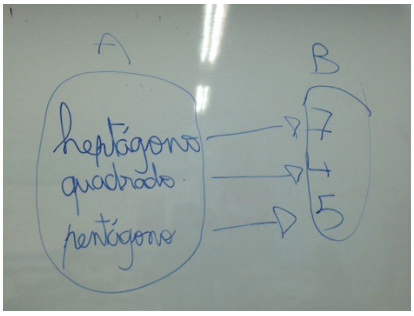


Figura 10 - Resolução de G_5 - Tarefa 2 - Questão 1.1

Depois de escrita, no quadro, pela professora, a definição de uma função sem que tenha sido dada qualquer explicação, foi pedido aos alunos que fizessem a sua leitura e decidissem se a correspondência que tinham estabelecido representaria ou não uma função.

Os elementos de cada um dos grupos G_2 e G_5 explicaram as suas resoluções afirmando que as suas correspondências definiam uma função. Relativamente à correspondência representada na figura 9, surgiram algumas dúvidas e a professora colocou à turma algumas questões:

Prof.: Então acham que o 1º diagrama é ou não função? (Ver Figura 9)

A_8 : Acho que não.

Prof.: E porquê?

A_8: Porque aí diz que tem que corresponder só uma e aí há duas.

(O aluno refere-se à definição de função escrita no quadro)

A_5: Eu acho que é, cada um só está a fazer correspondência a um do B. Acho que sim, que é.

A_8: Ahhh!!! Então é, do 1º conjunto só sai uma seta!

Prof.: Mais pessoas.... o que acham?

A_{21}: Acho que é porque só não era se o quadrado fosse 4 e 5. O A é que só pode ser um, o B é que pode ter duas, duas setas.

Prof.: Isso A_{21} *muito bem. Já vamos explorar o que estás a dizer. Vamos só concluir ... alguém acha que não é uma função?*

Alunos: Não!

Prof.: Então e aquela correspondência do lado direito? (Ver Figura 10)

A_{12}: Essa é! Então essa é! A um corresponde só um.

Prof.: O que acham? Vocês aí atrás.

A_{16}: É função. Ao quadrado corresponde um e só um e ao retângulo e ao pentágono também só tem uma correspondência.

A_2: Se houvesse algum sem correspondência é que não era uma função...

Prof.: Exatamente.

A_{18}: Ou se tivesse mais do que uma.

Prof.: Isso!

A análise da primeira correspondência apresentada, como representando ou não uma função, suscitou algumas dúvidas nos alunos que evidenciaram fazer confusão entre a existência de objetos diferentes com imagens iguais e a existência de elementos no conjunto de partida com mais do que uma correspondência. Os alunos revelaram alguma tendência em considerar que uma correspondência não define uma função quando representa uma função que não é injetiva.

Relativamente à análise da segunda correspondência não foram evidenciadas dúvidas. À medida que os alunos discutiram e justificaram ideias nota-se que, no geral, vão clarificando a definição de função e identificando, nas representações em diagrama sagital, as caraterísticas que permitem concluir se definem ou não uma função.

Para que todos os alunos pudessem observar que, neste tema da "máquina das perguntas", caso as suas correspondências estivessem corretas, todos teriam de obter um diagrama sagital que definisse uma função, a professora iniciou o seguinte diálogo:

Prof.: Olhem agora para os vossos exemplos, nas vossas tarefas e vejam se alguém definiu uma correspondência que não seja uma função.

A_{12}: É impossível, um polígono tem sempre um número de lados.

Prof.: E é só um número de lados? É único?

A_{12}: Não! Como assim?

Prof.: Se eu fizer corresponder a um polígono o seu número de lados obtenho sempre uma função?

A_{12}: Ah, sim!

A_4: Não sei se é... porque há polígonos diferentes que têm o mesmo número de lados, como ali.

Prof.: Pois há. O quadrado e o retângulo.... Então... se eu tiver polígonos e o seu número de lados a correspondência entre si é sempre uma função?

Alunos: (....) (Silêncio)

Prof.: Pensem.

A_{21}: Ali é uma função porque os polígonos estão no grupo A, se não, não era.

Quando questionados sobre o facto da relação entre as variáveis “polígono” e “ número de lados” definir ou não uma função, o aluno A_{12} parece não estar a entender devidamente o que a professora está a perguntar, depois evidencia ter esclarecido a sua dúvida e considera que a correspondência entre um polígono e o seu número de lados define uma função. Simultaneamente um aluno, que parece não concordar inteiramente com o colega, observa que há polígonos diferentes que têm o mesmo número de lados. Posteriormente outro aluno, A_{21}, observa que, o diagrama representado no quadro pelo grupo G_2 (Figura 9), que relaciona polígonos e o números de lados representa uma função apenas porque os polígonos estão representados no conjunto A. Esta intervenção revela que o aluno já compreendeu a importância de definir o conjunto de partida e o conjunto de chegada e que não é suficiente conhecer as variáveis que se relacionam para decidir se definem ou não uma função, mas também o “sentido” da correspondência entre elas.

Para clarificar os alunos acerca do raciocínio do colega A_{21}, a professora desenha um diagrama sagital para representar a situação.

Prof.: Ok! Então se eu trocar, neste caso, temos uma função? (Ver figura 11)

Alunos: Não.... assim já não.

Prof.: Porquê?

A_8: Porque 4 lados está para dois.

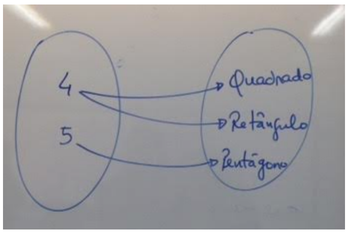


Figura 11 - Exemplo da professora - Tarefa 2 - Questão 1.1

Apesar da linguagem de A_8 ser ainda muito informal, pela sua afirmação percebe-se já ter compreendido que a existência de um elemento do conjunto de partida com mais do que uma correspondência determina que a mesma não pode definir uma função. Depois de apresentada a figura 11, os alunos parecem ter reconhecido que, trocando o conjunto de chegada com o conjunto de partida, a correspondência obtida já não define uma função, embora as variáveis em estudo sejam as mesmas.

5.2.2. Questão 1.2 – Definição de função

Recorde-se que na questão 1.2 são apresentadas três “máquinas de perguntas” com os temas “raiz quadrada”, “números menores” e “dobro de um número” e é solicitado que os alunos representem em diagrama sagital determinadas correspondências no âmbito destes temas.

Pode observar-se pelas figuras 12 e 13 que alguns alunos revelaram dificuldades na interpretação e na representação das correspondências definidas em linguagem verbal, construindo diagramas sagitais que apresentam erros e/ou não traduzem as condições do enunciado.

Na figura 12, os elementos do conjunto B tinham de ser números naturais e os alunos representam “frases” tendo repetido três vezes os elementos que pretendiam representar. Na figura 13, os elementos do conjunto de chegada teriam de ser a raiz quadrada dos elementos de A, caso estes últimos fossem quadrados perfeitos, o que não acontece.

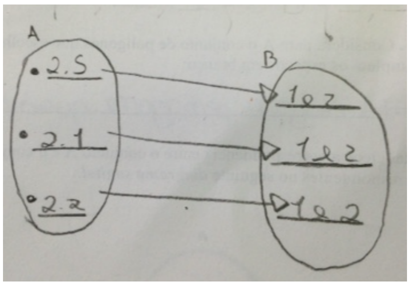


Figura 12 - Resolução de G_8 Tarefa 2 Questão 1.2

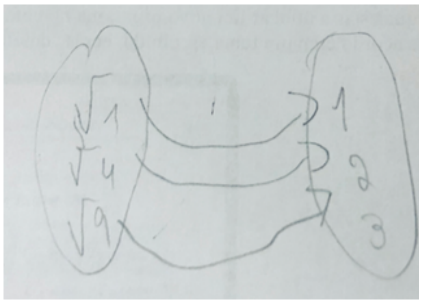


Figura 13 - Resolução de G_{12} Tarefa 2 Questão 1.2

No entanto, de um modo geral, depois de corrigidos os erros de representação em diagrama sagital, os alunos não mostraram dificuldade em identificar as correspondências que definiam e as correspondências que não definiam uma função e foram capazes de justificar, ainda que fazendo uso de uma linguagem muito “própria” e pouco formal, as suas respostas. Na figura 14 e no excerto da discussão coletiva que apresento em seguida, os alunos reconhecem que um diagrama sagital não representa uma função caso existam no conjunto de partida elementos sem correspondência.

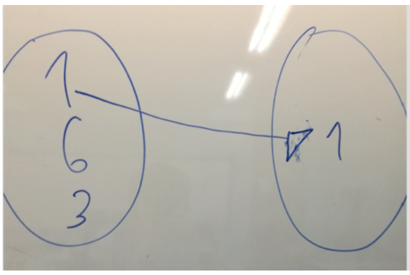


Figura 14 - Resolução de G_6 - Tarefa 2 - Questão 1.2

A_{11}: Acho que a nossa correspondência não é uma função, não corresponde a nada...

Prof.: Não corresponde a nada? Não percebo....

A_{11}: Porque ali diz: a cada elemento de A tem de fazer corresponder a outro, um número.

(O aluno A_{11}, que pertence ao grupo G_6, refere-se à definição de função escrita no quadro)

Prof.: Ali não diz um número.

A_{11}: A um elemento... portanto isso não corresponde a um elemento.

Prof.: Isso o quê?

A_{12}: O 6. O 6 e o 3 não correspondem. (Resposta de outro elemento de G_6)

Os alunos A_{11} e A_{12}, elementos do mesmo grupo, evidenciam reconhecer que sendo 3 e 6 elementos do conjunto de partida sem correspondência, o diagrama sagital representado na figura 14 não define uma função.

Depois da explicação destes alunos, ainda no âmbito da "máquina das perguntas", "raiz quadrada" a professora pretende discutir com a turma se as correspondências que elaboraram, poderiam definir uma função. Neste contexto, surge o seguinte diálogo:

Prof.: Alguém que tenha feito uma representação que seja função, venha ao quadro fazê-la.

(Neste caso a correspondência pedida é, entre um número inteiro entre 1 e 6 e a sua raiz quadrada, caso a raiz quadrada seja um número inteiro)

A_{12}: Não é possível.

Prof.: Não é...? Porquê?

A_2: É impossível, não há raiz quadrada de todos os números.

A_{18}: Haver há, não são é quadrados perfeitos.

A_3: Todos têm, mas como tinha de ser um número inteiro, não dá.

A_8: Se fosse um número de 1 a 9 dava.

O aluno A_2 começa por reconhecer que é impossível que alguns colegas tenham estabelecido uma correspondência que definisse uma função e justifica que "não há raiz quadrada de todos os números". A_{18} corrige o colega A_2 referindo que existe raiz quadrada de todos os números, embora nem todos os números sejam quadrados perfeitos, o que evidencia ter compreendido o que disse A_2 e que está atento às condições exigidas para os elementos do conjunto de partida. Os alunos A_3 e A_8 reforçam e completam a ideia dos colegas. A_8 e A_{18} evidenciam reconhecer os quadrados perfeitos, pelo menos entre 1 e 9 e entre 1 e 6, respetivamente.

Neste diálogo que envolve a participação de cinco alunos diferentes, nota-se que estes alunos compreendem que a correspondência pedida não cumpre as condições necessárias para definir uma função, uma vez que entre 1 e 6 não existem três quadrados perfeitos, pelo que, no conjunto de partida, pelo menos um dos elementos não terá correspondência no conjunto de chegada.

Relativamente à segunda "máquina das perguntas", "números menores", apresento a resolução de G_3 (Figura 15) e o excerto da discussão coletiva que se desenrolou em torno desta correspondência.

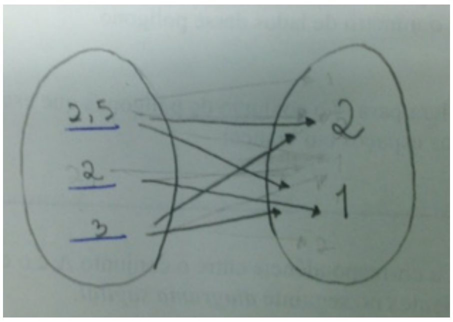


Figura 15 - Resolução de G_3 - Tarefa 2- Questão 1.2

A_{20}: Não é uma função porque(...) porque.

A_5: O nosso diagrama não é uma função porque estes que estão neste conjunto, conjunto de partida, têm mais do que uma correspondência.

A_{12}: Porque tem várias ligações.

Prof.: Não podemos dizer tem várias ligações...

A_6: Várias correspondências.

A_3: Cada elemento tem mais do que uma correspondência logo deixa de ser função.

A_{11}: Cada não, só o 2,5 é que tem mais do que uma.

A_{18}: O 3 também.

A_9: Há elementos do 1.º conjunto que têm mais do que uma seta.

Prof.: Logo...

Alunos: não é função.

Este diálogo teve início com a intervenção voluntária de um aluno, que perante, o diagrama sagital apresentado pelo colega, parece ter reconhecido que o mesmo não define uma função mas não justifica porquê. Posteriormente um dos elementos de G_3 apresenta uma justificação para o facto da correspondência que escreveu não representar uma função e outros cinco alunos participam contribuindo com ideias, que utilizando uma linguagem mais ou menos formal, evidenciam concordar com o colega. No geral, nota-se que vários alunos evidenciam ter acompanhado o diálogo e compreendido que o facto de existir, no conjunto de partida, um elemento, 2,5, com mais do que uma correspondência permite concluir que o diagrama sagital apresentado não define uma função.

Em seguida, apresento o exemplo da resolução de um par de alunos relativamente à terceira "máquinas de perguntas", "dobro de um número" (Figura 16).

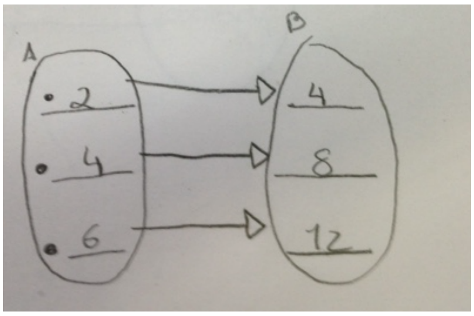


Figura 16 - Resolução de G_7 - Tarefa 2- Questão 1.2

A explicação do facto desta correspondência definir uma função é apresentada no diálogo seguinte, onde interveio a professora, um dos elementos do grupo 7, A_{13}, e alguns alunos que responderam em simultâneo.

Prof.: O que acham desta representação? A_8? A_{18}? A_{20}?

Alunos: É função.

Prof.: A_{13}, concordas? a tua correspondência é uma função?

A_{13}: Sim, porque todos os pontos têm um correspondência.

Prof.: Todos os pontos? Não podemos dizer isso assim.

A_{13} : Todos os elementos têm uma só correspondência.

Prof.: Todos os elementos de quem?

Alunos: Do conjunto A... do conjunto de partida.

O aluno A_{13} considera que a sua correspondência é função porque todos os elementos do conjunto A têm uma e uma só correspondência. Depois de incentivado pela professora, o aluno completa a sua justificação, utilizando uma linguagem mais adequada ao contexto, substitui a palavra pontos pela palavra “elementos” e identifica que os elementos a que se refere fazem parte do conjunto de partida.

Da análise de cada uma das situações estudadas na questão 1.2, relativas às três “máquinas de perguntas”, nota-se que os vários alunos evidenciaram ter feito uma boa interpretação da definição de função como correspondência entre dois conjuntos e o mesmo aconteceu nas resoluções escritas dos diferentes grupos de trabalho, das quais apresento um exemplo representativo do tipo de respostas obtidas (Figura 17).

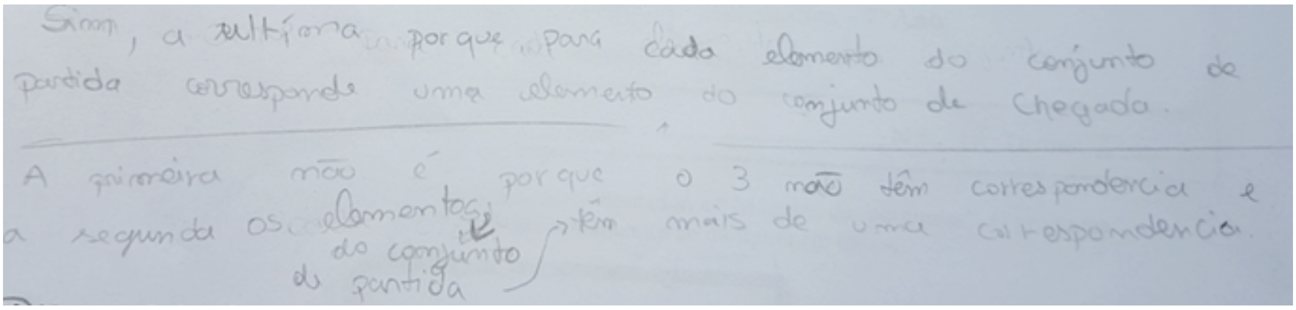

Sim, a última porque para cada elemento do conjunto de partida corresponde uma elemento do conjunto de Chegada.
A primeira não é porque o 3 não têm correspondencia e a segunda os elementos do conjunto de partida têm mais de uma correspondencia.

Figura 17 - Resolução de G_8 - Tarefa 2 - Questão 1.2

5.2.3. Questão 1.3. – Transição entre representações (SN/SG/GN)

Nos itens 1.3.1 e 1.3.2, partindo de uma função definida em diagrama sagital, os alunos tiveram de construir uma tabela e um gráfico cartesiano, respetivamente, e justificar, para cada um dos modos de representação, se definiam ou não uma função. Note-se que nesta fase do estudo de funções, os alunos ainda não aprenderam formalmente os diferentes modos de representação de uma função. A única forma de representação já trabalhada, no âmbito do tema, foram os diagramas sagitais, apresentados pela primeira vez aos alunos, nas questões 1.1 e 1.2 desta tarefa.

Nas resoluções dos alunos, aos dois itens, verificou-se que a maioria se limitou a repetir a definição de função como correspondência entre dois conjuntos para justificar as suas respostas. Contudo, cinco alunos evidenciaram uma melhor compreensão das diferentes formas de representação de uma função e apresentaram justificações que mostram a sua capacidade de transitar entre a representação de uma função em diagrama sagital, estudada nas questões anteriores, e a representação de uma função em tabela, gráfico ou expressão algébrica.

No exemplo seguinte (Figura 18), o aluno observa que a cada elemento do primeiro conjunto, que designa por A, e cujos elementos representa na primeira coluna, faz corresponder um e um só elemento do segundo conjunto, que designa por B, e cujos elementos estão representados na segunda coluna. O aluno evidencia a capacidade de transição de um diagrama sagital para uma tabela e utiliza uma linguagem adequada à nova representação.

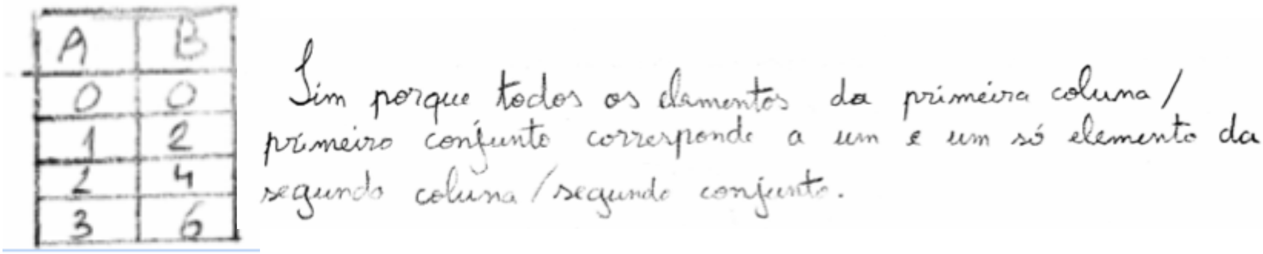


Figura 18 - Resolução de A_9 - Tarefa 2 - Questão 1.3.1

Uma outra resolução (Figura 19) é apresentada pelo aluno A_{15} que relaciona os elementos do conjunto de partida com a letra x e os elementos do conjunto de chegada com a letra y evidenciado relacionar os elementos em cada um dos conjuntos que representou em diagrama sagital com os elementos que representou em cada um dos eixos coordenados do gráfico que construiu.

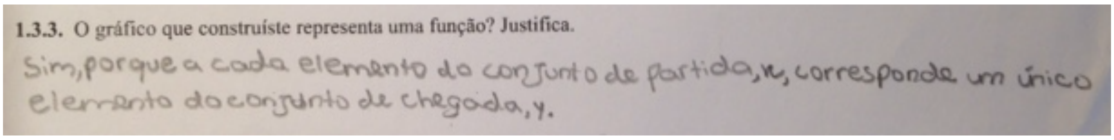


Figura 19 - Resolução de A_{15} - Tarefa 2 - Questão 1.3.3

No exemplo abaixo (Figura 20), o aluno evidencia compreender que a relação entre os elementos dos dois conjuntos A e B (recorde-se que os elementos de B são o dobro de cada um dos elementos de A), representada no gráfico, pode ser traduzida por uma expressão com variável, traduzindo- -a algebricamente, embora recorrendo apenas a uma das variáveis envolvidas, a variável x.

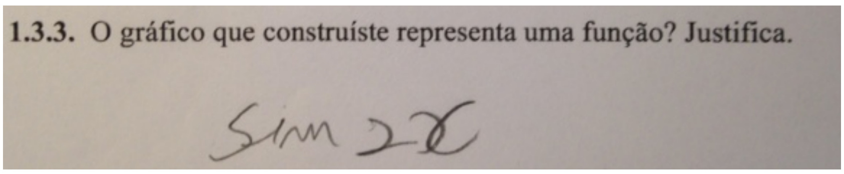
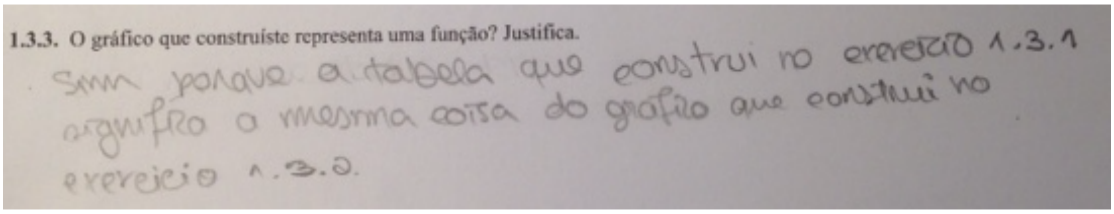


Figura 20 - Resolução de A_{22} - Tarefa 2 - Questão 1.3.3

No último exemplo que apresento (Figura 21), o aluno reconhece que tabela e gráfico são apenas modos distintos de representar uma mesma função.


1.3.3. O gráfico que construíste representa uma função? Justifica.

Sim porque a tabela que construi no exercicio 1.3.1 significa a mesma coisa do grafico que construi no exercicio 1.3.2.

Figura 21 - Resolução de A16- Tarefa 2- Questão 1.3.3

Relativamente ao gráfico pedido no item 1.3.2, 19 alunos construíram-no sem incorreções e não foram evidenciadas dificuldades na transição de uma tabela para um gráfico. Os principais erros cometidos foram:

(i) inexistência de uma escala uniforme (Figura 22);

(ii) representação a traço contínuo das linhas auxiliares para marcação dos pontos (Figura 22);

(iii) eixos não identificados (Figura 22, Figura 23 e Figura 24);

(iv) inexistência de sentido dos eixos coordenados (Figura 23);

(v) escolha inadequada do tipo de representação gráfica (Figura 24).

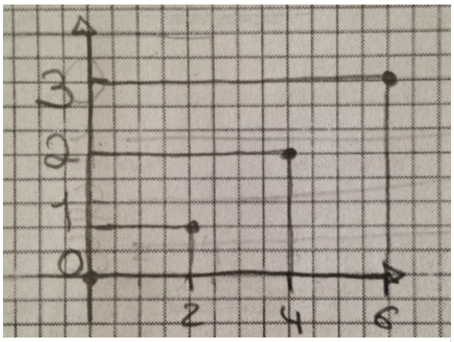


Figura 22 - Resolução de A13 - Tarefa 2 - Questão 1.3.2

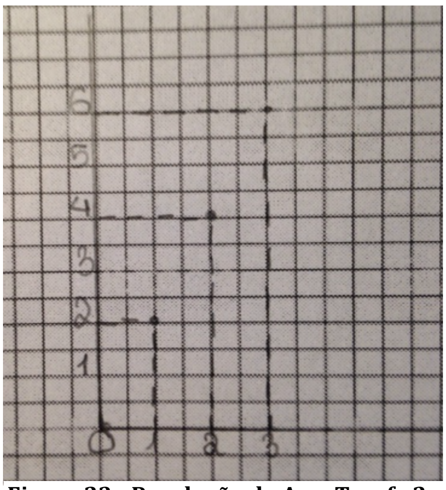


Figura 23 - Resolução de A17 - Tarefa 2 - Questão 1.3.2

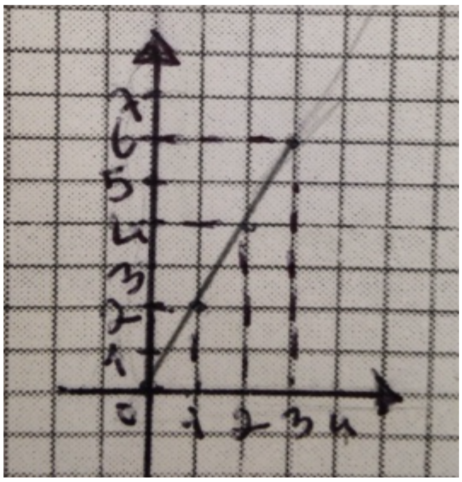


Figura 24 - Resolução de A21 - Tarefa 2 - Questão 1.3.2

5.3. Tarefa 3

5.3.1. Questão 1.1 – Transição entre representações (GA/NA)

Na questão 1.1 da tarefa 3 (Anexo 6) são apresentados, em quatro opções A, B, C e D dois gráficos e duas tabelas e pretende-se que os alunos indiquem, justificando, a que pode representar a função f, definida algebricamente no enunciado, e expliquem a razão pela qual excluíram cada uma das restantes três opções.

Todos os alunos indicaram, corretamente, a opção C como sendo a que podia representar a função f, e a maioria justificou a sua resposta, apresentando os cálculos de $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ e de $f(4)$ recorrendo à expressão algébrica da função f e confirmando que os valores obtidos eram iguais aos representados na segunda coluna da tabela (Figura 25).

Recorrendo a uma estratégia semelhante, alguns alunos justificaram que a tabela apresentada na opção D não podia representar a função f, pois neste caso as imagens de 2 e de 3 obtidas pela expressão algébrica não eram iguais às correspondentes imagens dadas na tabela (Figura 25 e Figura 26).

Na figura 25, os alunos justificam a razão pela qual excluíram a opção D, com base nos cálculos efetuados, e interpretando o significado dos valores obtidos no contexto da situação. Como se pode verificar, referem que, por exemplo, a imagem do objeto 2 "não coincide com o número de pessoas que se podem sentar".

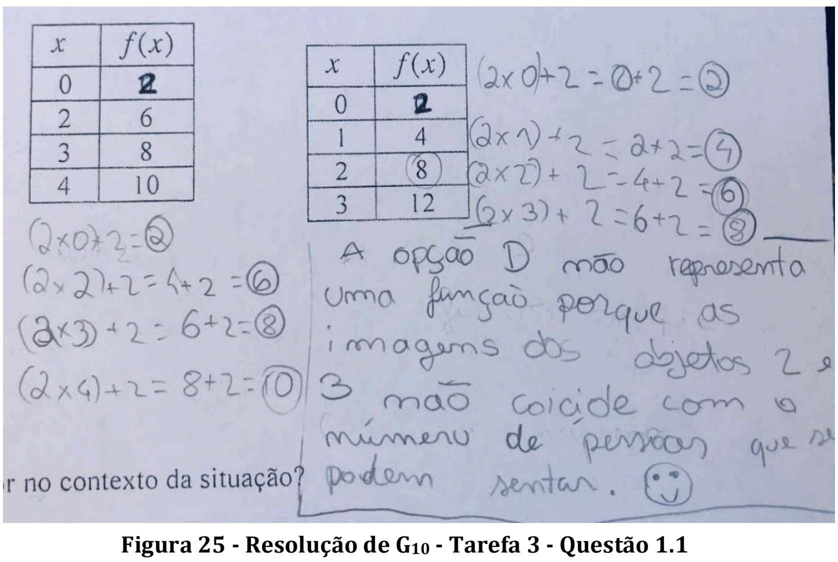


Figura 25 - Resolução de G_{10} - Tarefa 3 - Questão 1.1

Na figura 26, os alunos excluem a tabela representada na opção D, referindo que a imagem de 2, determinada algebricamente por meio da função f é igual a 6 e na tabela a imagem de 2 é 8.

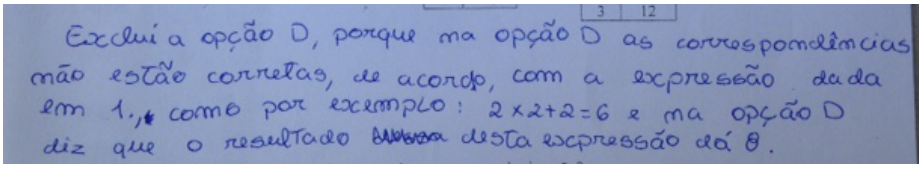


Figura 26 - Resolução de G1 - Tarefa 3 - Questão 1.1.

Relativamente à justificação de que os gráficos apresentados nas opções A e B não podiam representar a função f, a maioria dos alunos não deu nenhuma explicação. Nas respostas obtidas, os alunos limitaram-se a referir que o gráfico e a expressão não definiam a mesma função. Apenas dois grupos apresentaram uma explicação que evidencia terem reconhecido nos gráficos, características que contradizem a relação entre as variáveis representada na forma algébrica (Figura 27 e Figura 28).

Na figura 27, apesar dos alunos chamarem função ao ponto de coordenadas (0,0), reconhecem que este ponto pertence ao gráfico e não pertence à expressão da função f dada no enunciado. Na justificação apresentada para o segundo gráfico, parece que confundem "nº de mesas" com "nº de pessoas" mas nota-se que compreendem que o gráfico não pode traduzir a função f uma vez que f é uma função crescente e esse não é comportamento da função que está representada graficamente.

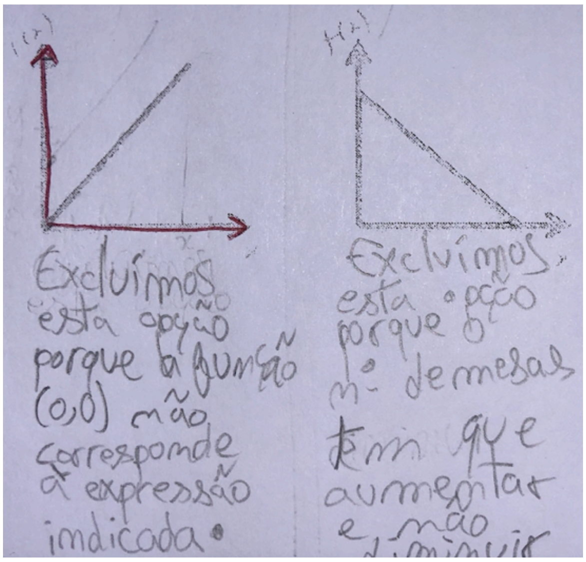
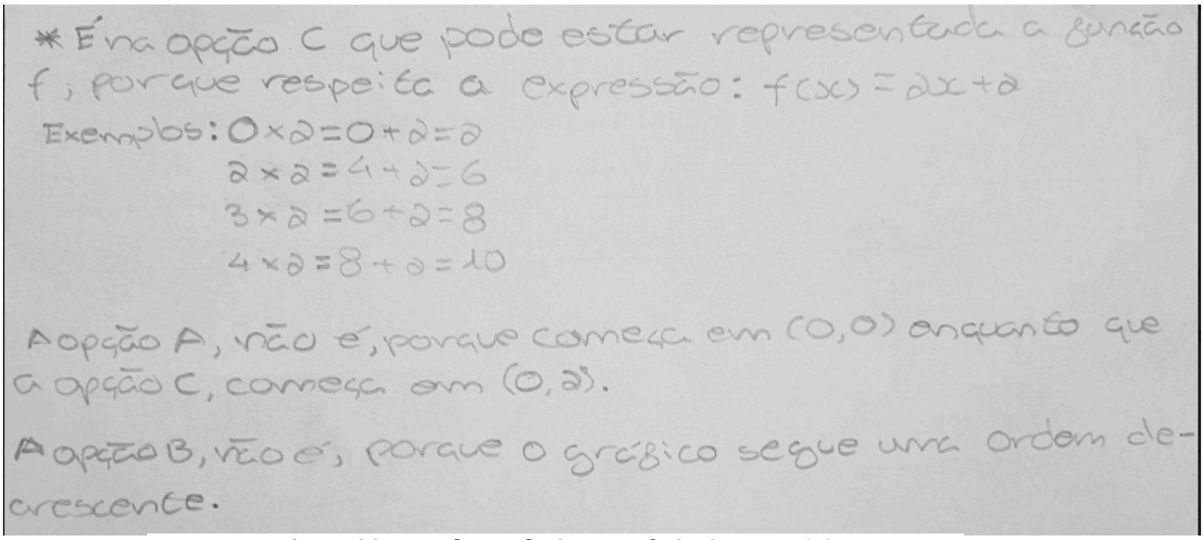


Figura 27 - Resolução de G6 - Tarefa 3 - Questão 1.1

Na figura 28, os alunos identificam que o ponto de coordenadas (0,0) pertence ao gráfico apresentado na opção A e que esse ponto não pertence à função f, uma vez que a função f está representada na opção C e, como já verificaram nos cálculos anteriores, a imagem de zero é igual a dois. Relativamente à razão pela qual o gráfico dado na opção B não pode representar a função f, os alunos referem apenas que "o gráfico é decrescente", o que evidencia que reconhecem que a função f é uma função crescente.



* É na opção C que pode estar representada a função f; porque respeita a expressão: f(x) = 2x+2

Exemplos: 0×2=0+2=2

2×2=4+2=6

3×2=6+2=8

4×2=8+2=10

A opção A, não é, porque começa em (0,0) enquanto que a opção C, começa em (0,2).

A opção B, não é, porque o gráfico segue uma ordem de-crescente.

Figura 28 - Resolução de G_2 - Tarefa 3 - Questão 1.1

Os alunos são capazes de reconhecer se uma tabela representa ou não uma função definida algebricamente e explicam as suas respostas apresentando cálculos de imagens com recurso à expressão algébrica dada.

Relativamente à identificação se um determinado gráfico pode representar uma função definida algebricamente, a maioria dos alunos não apresentou uma justificação que evidenciasse terem lido ou interpretado pontos dos gráficos que permitissem a sua exclusão.

No contexto estudado, os alunos parecem ter mais facilidade na transição da representação algébrica para a representação tabular do que da representação algébrica para a representação gráfica.

5.3.2. Questão 1.2 – Determinação de imagens a partir de objetos

Nesta questão é pedido que os alunos determinem o valor de $f(7)$ e expliquem o seu significado no contexto da situação. Todos os alunos parecem ter compreendido o que estava a ser pedido e não manifestaram dificuldades na resolução desta questão.

Dois grupos de alunos, dos quais apresento um exemplo (Figura 29), calcularam corretamente o valor de $f(7)$ mas não utilizam nenhuma notação para identificar os seus cálculos. Os alunos reconhecem que 16 representa o número que pessoas que se podem sentar em 7 mesas.

Figura 29- Resolução de G_5 - Tarefa 3- Questão 1.2

Alguns alunos apresentaram as suas respostas com notações desadequadas manifestando dificuldades relativamente ao significado e ao uso das notações x e $f(x)$ (Figura 30 e Figura 31).

Na figura 30, os alunos calculam o valor de $f(7)$ mas identificam-no com x e apresentam a imagem obtida, 16, como sendo a solução de uma equação. Há evidência de confusão entre o papel da letra “ x ” numa equação e o papel da letra “ x ” na expressão algébrica de uma função.

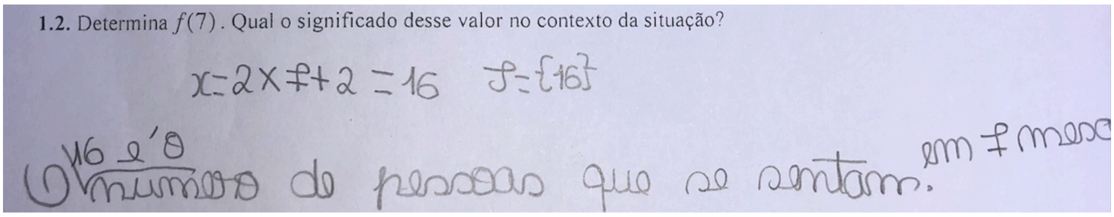


Figura 30 - Resolução de G_9 - Tarefa 3 - Questão 1.2

Na resolução apresentada em seguida (Figura 31), os alunos usam inadequadamente a simbologia própria das funções, representando o cálculo “ $2\times 7+2$ ” por $f(x)$ em vez de $f(7)$.

Nesta resolução também são manifestadas dificuldades na utilização e no significado da simbologia própria das funções.

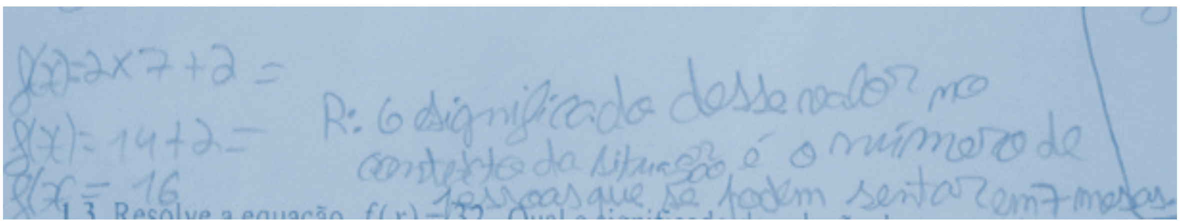


Figura 31- Resolução de G_4 - Tarefa 3 - Questão 1.2

Como no exemplo que se segue (Figura 32), a maioria dos alunos apresentou resoluções completas e sem erros. Neste caso, observa-se que, à semelhança do que aconteceu na tarefa 1, os alunos se apoiam numa representação icónica como forma de compreender e/ou evidenciar que, no máximo, podem sentar-se 16 pessoas quando se encostam 7 mesas. Os alunos também recorrem a uma representação numérica, apresentam cálculos e explicam corretamente o significado do valor obtido.

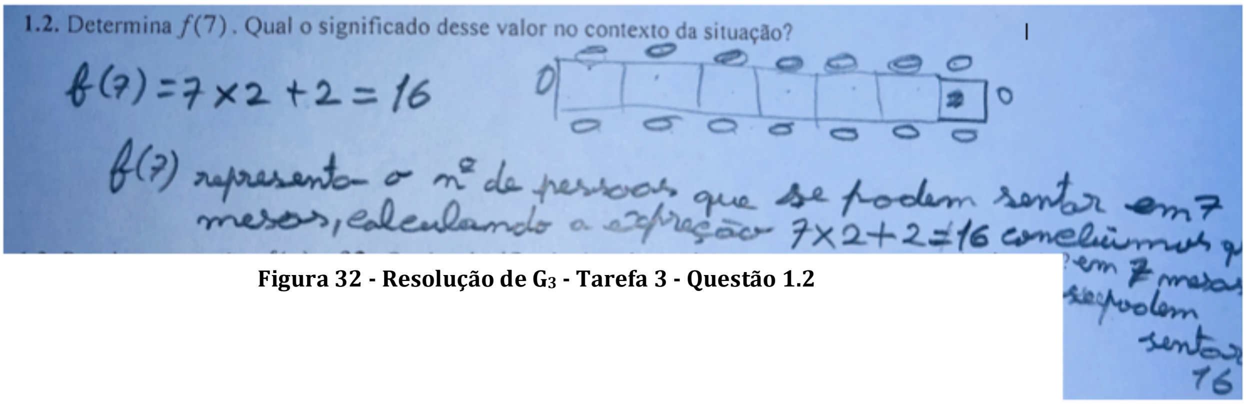


Figura 32 - Resolução de G3 - Tarefa 3 - Questão 1.2

Não foram observadas dificuldades na resolução desta questão, tendo os alunos compreendido o que estava a ser pedido, evidenciando uma interpretação correta da notação $f(7)$. Em algumas resoluções, foram apresentadas incorreções ao nível da simbologia e evidenciaram-se dificuldades sobre o papel e o significado das notações x e $f(x)$.

5.3.3. Questão 1.3 – Determinação de objetos a partir de imagens

Nesta questão pretende-se que os alunos resolvam a equação $f(x) = 32$ e indiquem, no contexto da situação, o significado da sua solução.

Três grupos de trabalho desenvolveram uma estratégia de resolução adequada mas cometeram erros de linguagem simbólica e revelaram pouca clareza na resposta dada e no significado da solução da equação. Um exemplo deste tipo de resolução, pode observar-se na figura seguinte (Figura 33).

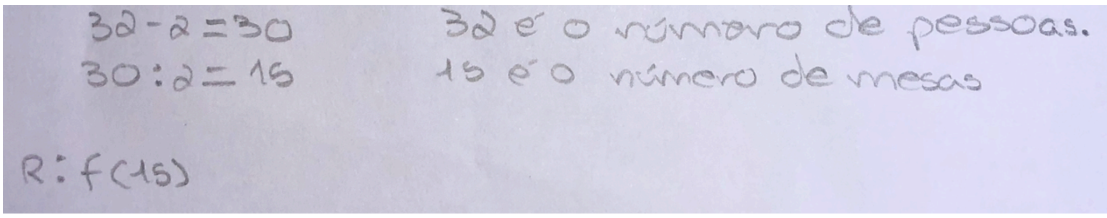


Figura 33 - Resolução de G2 - Tarefa 3 - Questão 1.3

Os alunos do grupo 2, apresentam como resposta $f(15)$, evidenciando pouca clareza sobre o que é pedido e/ou dúvidas na forma como devem apresentar a resposta. Não está claro que os alunos tenham entendido qual a solução da equação uma vez que não explicam inequivocamente o seu significado, limitando-se a escrever o significado de 32 e de 15. Podem, ainda assim, não ter lido ou não ter interpretado corretamente o que é pedido no enunciado.

Dois grupos de trabalho desenvolveram uma estratégia de resolução adequada mas apresentam erros de linguagem simbólica, como se podem verificar nos dois exemplos seguintes (Figura 34 e Figura 35).

Na figura 34, os alunos apresentam explicita e corretamente o conjunto solução da equação apesar de escreverem uma igualdade incorreta, fazendo referência à letra x, como se o seu valor fosse 32 e não 15, como parecem querer representar. Nota-se que os alunos têm dificuldade em usar corretamente a linguagem simbólica para traduzir a forma como raciocinam e apresentam as suas respostas. O significado da solução da equação é apresentado corretamente.

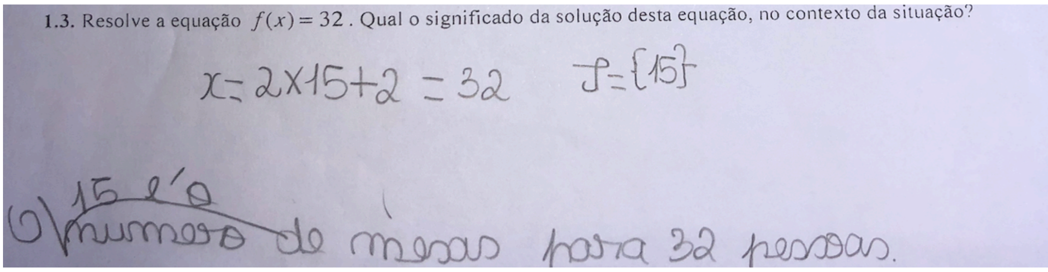


Figura 34 - Resolução de G_9 - Tarefa 3 - Questão 1.3

Na figura 35, os alunos parecem compreender que 15 é o valor pedido, embora a solução da equação não seja identificada de forma explícita. A forma como é apresentado o cálculo desenvolvido na resolução apresenta erros de linguagem simbólica, evidenciando-se alguma confusão na utilização da notação "$f(x)=$" e no significado de $f(x)=32$. Os alunos parecem ter compreendido o significado da solução da equação no contexto da situação.

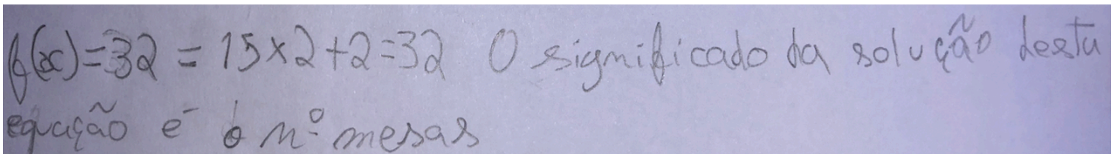


Figura 35 - Resolução de G_6- Tarefa 3 - Questão 1.3

Dois grupos de trabalho desenvolveram uma estratégia de resolução adequada sem fazer uso de notações próprias das equações. No exemplo que apresento em seguida (Figura 36), os alunos identificam o valor da solução da equação assinalando-o com um círculo mas não utilizam a letra x, ou seja, resolvem a equação pedida mas não utilizam a notação apropriada. Referem, no contexto da situação, o significado do valor 15 e o significado do valor 32, evidenciando não ter lido ou interpretado corretamente o que é pedido no enunciado.

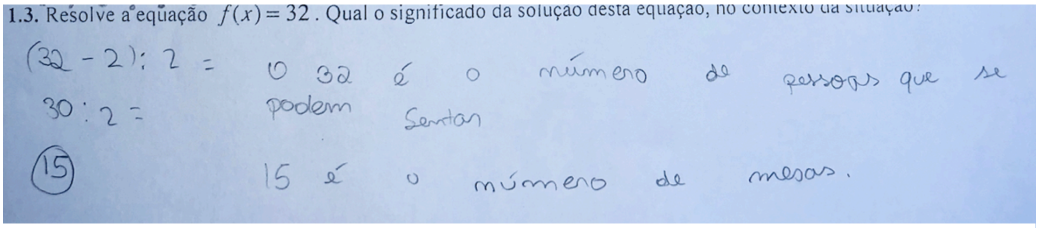


Figura 36 - Resolução de G_{10}- Tarefa 3 - Questão 1.3

Cinco grupos de trabalho desenvolveram uma estratégia de resolução adequada, completa e que não apresenta erros de linguagem simbólica. Apresento a resolução de dois desses grupos (Figura 37 e Figura 38).

Na resolução da figura 37, os alunos resolvem corretamente a equação $f(x)=32$, recorrendo aos princípios de equivalência já aprendidos, utilizando a simbologia adequada, escrevendo o conjunto solução da equação e indicando o significado do valor de x encontrado.

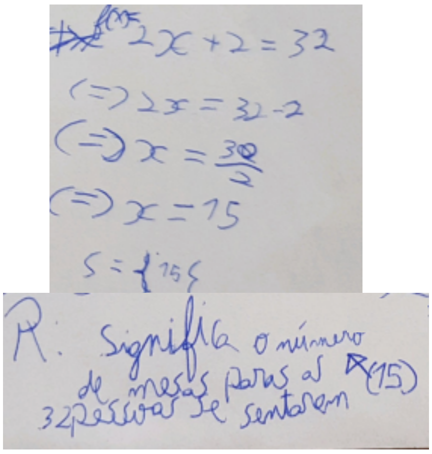


Figura 37- Resolução de G_{11} - Tarefa 3 - Questão 1.3

Na figura 38, a estratégia dos alunos para determinar o valor de x é recorrer à operação inversa. O cálculo é apresentado de forma correta e não há erros na utilização das notações. O significado do valor 15 também é apresentado de forma clara e completa.

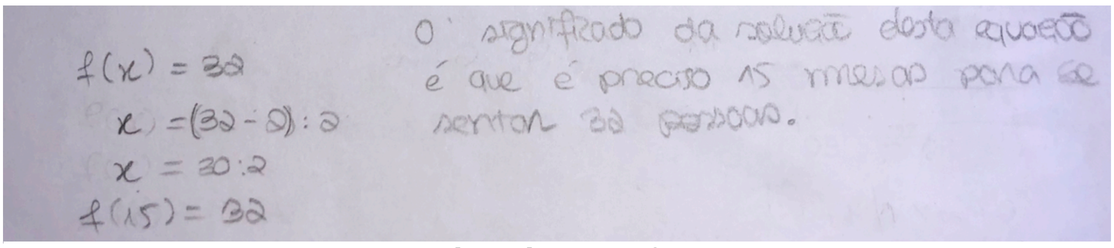


Figura 38 - Resolução de G_8 - Tarefa 3 - Questão 1.3

No geral, os alunos interpretaram de forma correta o que era pretendido nesta questão e foram capazes de desenvolver uma estratégia adequada para determinar o valor pedido. A maioria fê-lo recorrendo à operação inversa, subtraindo 2 a 32 e dividindo o resultado obtido por 2, respetivamente. Vários alunos não identificam explicitamente a solução da equação ou apresentaram-na utilizando notações erradas, evidenciando fazer confusão entre a forma de representar objetos e a forma de representar imagens bem como dificuldades na utilização das notações “ x ” e “ $f(x)=$ ”. O significado da solução da equação parece ter sido compreendido pela maioria dos alunos.

Em suma, os alunos são capazes de determinar objetos e imagens de uma função definida algebricamente, no entanto, evidenciam algumas dificuldades em representá-los usando a linguagem simbólica adequada.

5.4. Tarefa 4

5.4.1. Situação I – Transição entre representações (SG) e interpretação e relação entre variáveis

Na tarefa 4 (Anexo 7) são apresentados em linguagem verbal duas situações I e II e oito gráficos. É solicitado aos alunos que escolham o gráfico que melhor pode descrever cada umas das situações e que definam a variável que pretendem representar em cada um dos eixos coordenados. A situação I refere-se a uma viagem realizada pelo João a casa do seu amigo Miguel. O João realiza o percurso de ida de bicicleta, lancha com o amigo e regressa a sua casa a pé.

O gráfico A foi escolhido como o que melhor descreve a situação por apenas um grupo de alunos, o gráfico D foi selecionado por dois grupos de alunos e o gráfico B pelos restantes nove grupos. Apresento em seguida quatro exemplos de resoluções de alunos que optaram pelo gráfico B (Figura 39, Figura 40, Figura 41 e Figura 42).

Na figura 39, os alunos definem o tempo como variável independente e a distância a casa do João como variável dependente. Na sua explicação fazem referência à situação descrita e às variáveis escolhidas, sobretudo à variação do tempo. Embora não seja explícita nenhuma referência ao comportamento do gráfico, nota-se que os alunos relacionam cada uma das partes descritas “do percurso João” com cada um dos três segmentos de reta distintos do gráfico.

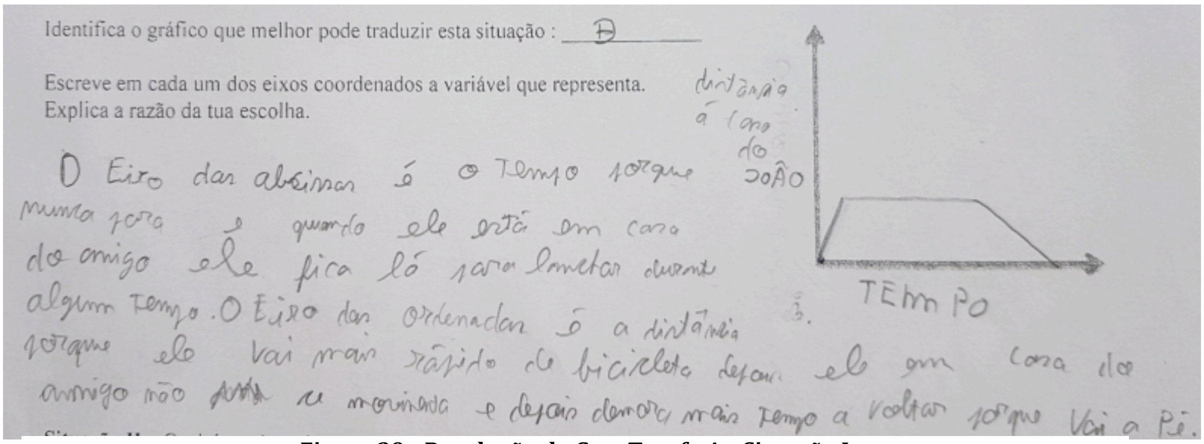


Figura 39 - Resolução de G_{10} - Tarefa 4 – Situação I

Na resolução do grupo 2 (Figura 40), os alunos apenas escrevem distância no eixo das ordenadas, no entanto, subentende-se pela sua explicação que estão a considerar a distância a casa do João. Os alunos reconhecem que o segmento de reta horizontal representa a paragem do João para lanchar em casa do Miguel e ao referir que “a subida no gráfico é maior que a descida” parecem relacionar a inclinação dos segmentos de reta com a velocidade do João em cada um dos percursos da viagem: percurso de ida a casa do amigo e percurso do seu regresso a casa.

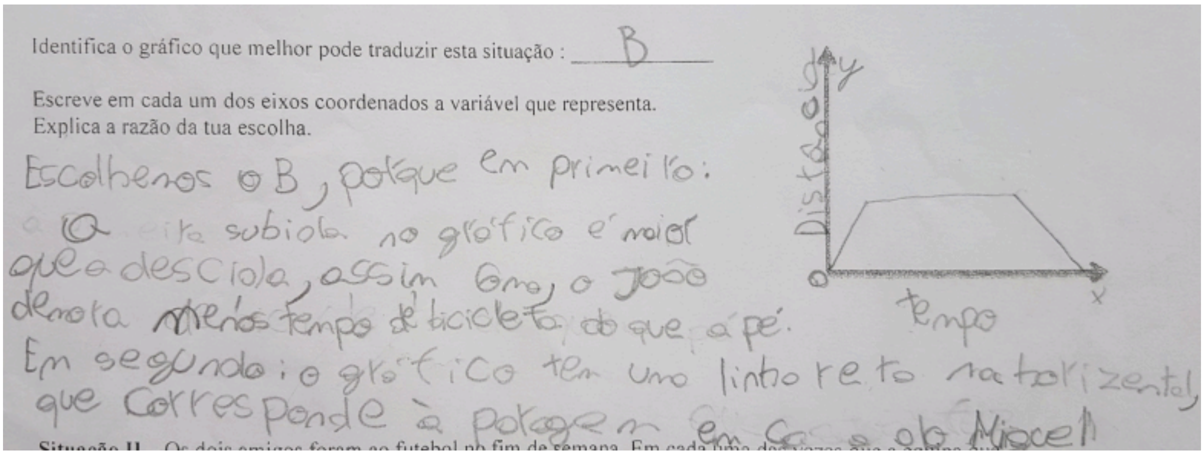


Figura 40- Resolução do Grupo G_2 - Tarefa 4 – Situação I

Na figura 41, os alunos consideraram como variável dependente a “distância a casa do Miguel”, no entanto, a justificação apresentada faz referência à distância percorrida pelo João considerando, implicitamente, o ponto (0,0) como a “casa do João”. Verifica-se portanto alguma incoerência entre a descrição da situação, a variável identificada no eixo das ordenadas e o comportamento do gráfico escolhido.

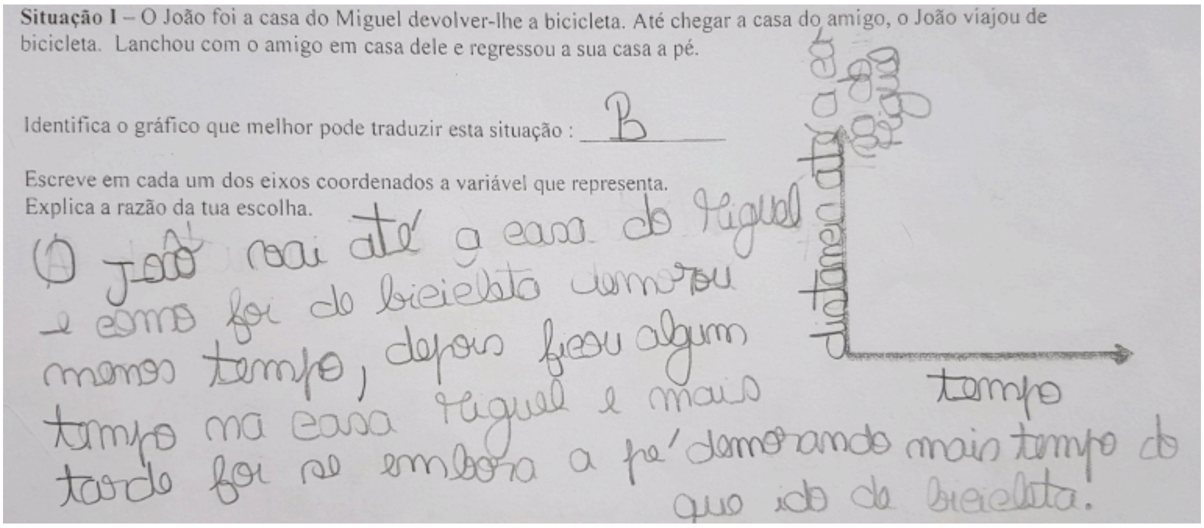


Figura 41 - Resolução de G_9 - Tarefa 4 – Situação I

Um grupo considerou a distância como variável independente, tendo também optado pelo gráfico B e dado uma justificação inadequada de acordo com a escolha que fez das variáveis em cada um dos eixos coordenados (Figura 42). Na sua justificação, os alunos escrevem que a distância que o João percorre até à casa do amigo não é igual à que percorre no seu regresso a casa, o que, tendo em conta as variáveis escolhidas, evidencia que confundem "distância" e "velocidade".

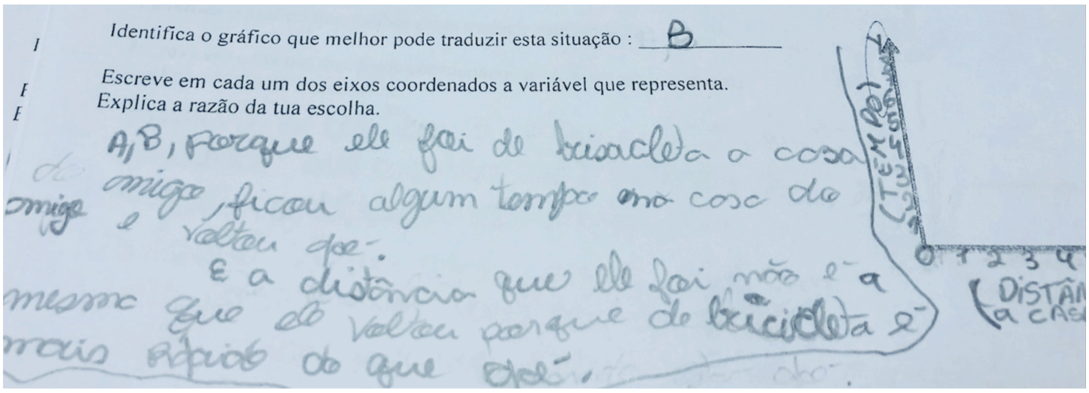


Figura 42 - Resolução de G_{12} - Tarefa 4 – Situação I

Na figura 43, apresento a resolução dos alunos do único grupo que escolheu o gráfico A. Os alunos explicaram o seu raciocínio, definiram variáveis adequadas à situação descrita verbalmente bem como ao gráfico escolhido e escreveram nos eixos coordenados possíveis valores das variáveis representadas. Este par de alunos revelou uma interpretação da situação ligeiramente diferente da dos restantes colegas, uma vez que foram os únicos a considerar como variável dependente a "distância percorrida", escolhendo assim o gráfico A.

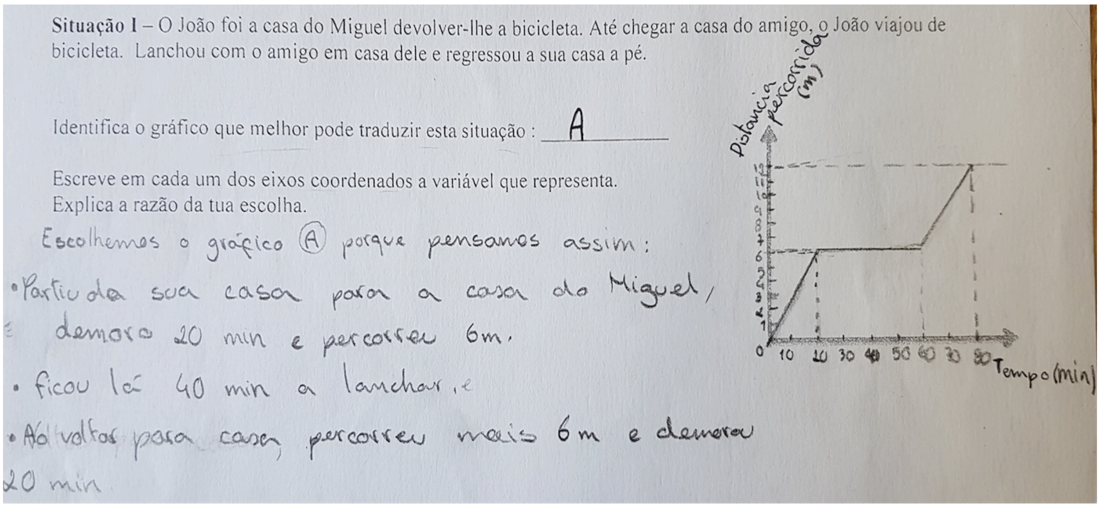


Figura 43 - Resolução de G_{11} - Tarefa 4 - Situação I

Embora, de acordo com o enunciado, no gráfico escolhido, a inclinação do segmento de reta definido em [0,20] ser diferente da inclinação do segmento de reta definido em [60,80], os alunos consideram que o tempo de viagem do João até à casa do Miguel é igual ao tempo de viagem do João no regresso a casa, 20 minutos.

Este foi um facto que levou alguns alunos da turma a considerar errado o gráfico apresentado pelo grupo 11 (Figura 43), como se pode ver pelo seguinte diálogo, que tem início quando um aluno deste grupo, A_{21}, apresenta a sua resolução:

> *A_{21}: Ele sai de casa, passados 20 minutos chegou à casa do Miguel e percorreu 6 metros, depois ficou lá a lanchar durante 40 minutos e não percorreu nenhuma distância e depois voltou a casa e demorou mais 20 minutos.* (Ver Figura 43)
>
> *A_2: Mas ela está a dizer que a viagem de casa dele até casa do Miguel demorou igual tempo de que de casa do Miguel, mas isso não é verdade.*
>
> *A_{14}: Pois é stora, não pode levar 20 minutos a ir e 20 minutos a regressar.*
>
> *Prof.: Então, o que dizem do gráfico de A_{21}? Outros alunos....*
>
> *A_2: Para o gráfico ficar bem tínhamos de mudar os valores no eixo do x. Pôr 90, onde eles têm 80.*

Os alunos que participaram no diálogo observam que, para que o gráfico A fique correto, os valores no eixo das abcissas tinham de ser alterados de forma a que o tempo que o João demora a regressar a casa seja superior ao tempo que demora a chegar a casa do Miguel. Como o aluno A_2 refere, se em vez do valor 80 os colegas tivessem colocado 90 no eixo das abcissas, o tempo do regresso do João a sua casa seria de 30 minutos e assim o gráfico estaria mais concordante com a situação descrita.

Ainda a propósito do gráfico apresentado pelo grupo G_{11} (Figura 43), a escolha de distância percorrida como variável dependente parece ter causado dúvidas a alguns alunos, como se pode ver no seguinte diálogo:

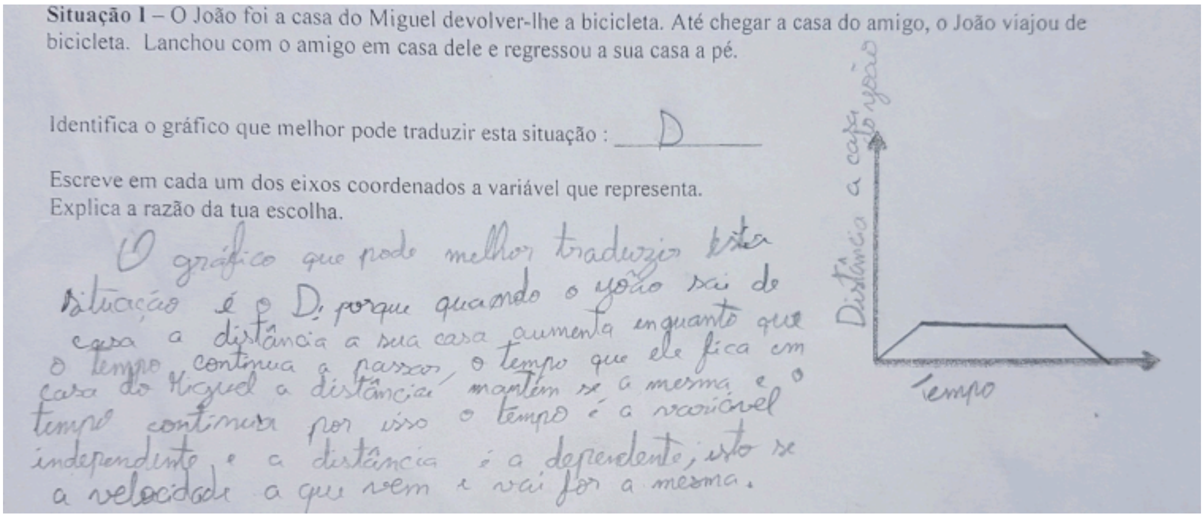
> *A_{21}: Nós dissemos que esta variável era o tempo em minutos e a outra era a distância percorrida.*
>
> *A_{12}: Distância percorrida? Como assim?*
>
> *A_{2}: Distância percorrida é tudo aquilo que eles percorreram o dia inteiro?*
>
> *A_{21}: Sim.*
>
> *A_{2}: Então está certo.*
>
> *A_{12}: Ok! Ok!*
>
> *A_{18}: Eu acho que está errado porque ele começa lá no zero, que é casa dele, vai para casa do amigo, e depois ela diz que volta para casa, mas para ir para casa o gráfico tinha de ir para baixo.*
>
> *A_{2}: Não! Porque é a distância percorrida que ele faz naquele dia, não é a distância a casa dele.*
>
> *A_{18}: Ah! Já percebi.*

Inicialmente os alunos A_2 e A_{12} parecem não entender o que o aluno A_{21} quer dizer com distância percorrida, no entanto, depois de A_2 questionar a colego sobre se "a distância percorrida era tudo aquilo que eles percorreram o dia inteiro" e o colega ter respondido afirmativamente, os dois alunos evidenciaram ter ficado esclarecidos.

Posteriormente, o aluno A_{18} afirma que o gráfico está errado, parecendo estar a considerar como variável dependente a distância a casa do João. No entanto, com a chamada de atenção do aluno A_2, ao facto dos colegas do grupo G_{11} estarem a considerar como variável dependente a distância total percorrida, o aluno parece ter esclarecido o seu desacordo com o gráfico apresentado.

Em seguida (Figura 44) apresento a resolução de um dos dois grupos que optaram pelo gráfico D e que escolheram o tempo para variável independente e a distância a casa do João para variável dependente. Os alunos justificam a sua resposta indicando que a razão da sua escolha se deve ao facto de terem considerado velocidades iguais nos percursos de ida e de volta do João.

Esta resolução evidencia que os alunos foram capazes de interpretar e relacionar as variáveis que escolheram com o comportamento do gráfico representado na opção D.


Situação I – O João foi a casa do Miguel devolver-lhe a bicicleta. Até chegar a casa do amigo, o João viajou de bicicleta. Lanchou com o amigo em casa dele e regressou a sua casa a pé.

Identifica o gráfico que melhor pode traduzir esta situação : D

Escreve em cada um dos eixos coordenados a variável que representa.
Explica a razão da tua escolha.

O gráfico que pode melhor traduzir esta situação é o D, porque quando o João sai de casa a distância a sua casa aumenta enquanto que o tempo continua a passar, o tempo que ele fica em casa do Miguel a distância mantém se a mesma e o tempo continua por isso o tempo é a variável independente e a distância é a dependente, isto se a velocidade a que vem e vai for a mesma.

Figura 44 - Resolução de G_5 - Tarefa 4 – Situação I

Em seguida é apresentado um diálogo, no qual um dos elementos do grupo 5, A_9 , explica à turma a razão pela qual consideraram que a velocidade do João na ida a casa do Miguel pode ser igual à velocidade de regresso a sua casa. Como se pode verificar, apesar de a maioria dos alunos não ter escolhido o gráfico D, parecem concordar com a explicação dada pelos colegas.

> *A_9: Nós escolhemos o D porque se a variável dependente fosse a distância a casa do João e o tempo a variável independente o gráfico seria assim porque no enunciado não especifica se ele demorou o mesmo tempo de bicicleta e a pé. Se ele demorasse o mesmo tempo seria esse, se não, seria o B.*
>
> *Prof.: O que acham?*
>
> *Alunos: Faz sentido.... Está bem.*
>
> *A_8: Ele pode voltar para casa a correr e demorar tanto tempo como de bicicleta.*
>
> *A_5: Pois...ele pode ir a correr.*

Depois de ouvirem a justificação apresentada pelo aluno A_9 sobre a escolha do seu grupo pelo gráfico D, os restantes alunos parecem ter compreendido que, apesar de não ser muito intuitivo que a velocidade do João deslocando-se de bicicleta seja igual à velocidade deslocando-se a pé, no enunciado não é dito nada que impeça considerar as duas velocidades iguais. Os alunos A_5 e A_8 participaram no diálogo dando exemplos de situações que podiam explicar esse facto.

Ainda assim, depois de analisadas todas as resoluções dos alunos, e as respetivas justificações na escolha dos gráficos A, B ou D, subentende-se que é mais intuitivo para os alunos que, nos gráficos A e B o segmento de reta que tem maior inclinação traduza o percurso do João de bicicleta e o segmento de reta de menor inclinação traduza o percurso a pé.

Apesar de o relacionamento entre as variáveis definidas e o comportamento do gráfico escolhido nem sempre ser apresentado de forma clara nas respostas escritas, como pode verificar-se no diálogo apresentado em seguida, existem alunos que mostraram estar atentos à relação entre a inclinação dos segmentos de reta apresentados nos gráficos e a velocidade do João no seu percurso de ida a casa do Miguel e no seu percurso de volta a casa. Também identificam o segmento horizontal como a paragem para o lanche que o João efetuou em casa do Miguel.

> *A_3: Quando ele foi para lá foi de bicicleta e para cá vem a pé por isso demora mais.*
>
> (Intervenção do aluno A_3 quando explica porque é que o seu grupo optou pelo gráfico B para descrever a situação I)
>
> *A_2: E no gráfico está certo porque está uma inclinação diferente.*
>
> *A_5: O primeiro segmento está mais inclinado porque ele vai mais depressa.*
>
> *A_4: E a linha horizontal corresponde à paragem em casa do Miguel.*

Em todas as resoluções apresentadas, tempo e distância (distância a casa do Miguel, distância a casa do João, distância percorrida) foram as variáveis escolhidas pelos alunos, ainda que alguns tenham sido pouco claros na identificação da variável dependente. Os principais erros apresentados na escolha das variáveis foram: (i) considerar a variável tempo como variável dependente e (ii) considerar como variável dependente a distância a casa do Miguel tendo escolhido o gráfico B como resposta.

A fim de corrigir o segundo erro supracitado, cometido por dois grupos, este foi um assunto colocado pela professora à discussão coletiva e, tal como se pode verificar no seguinte diálogo, alguns alunos mostraram compreender que na escolha do gráfico B, a variável dependente não poderia ser a distância a casa do Miguel:

Prof.: Imaginem agora que vamos escolher um gráfico onde consideramos para variável dependente a distância a casa do Miguel.

A_6: Não há nenhum.

Prof.: Não? porquê?

A_6: Tinha de começar de cima e vinha para baixo e depois sobe.

Prof.: A_6 , queres fazer no quadro?

A_6: Sim.

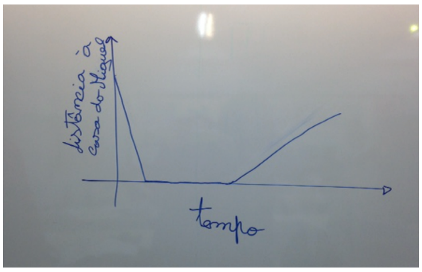


Figura 45- Resolução de A_6 - Tarefa 4 - Situação I

Prof.: O que acham do gráfico de A_6 ?

Alunos: Está bem... faz sentido...

A_{17}: Já percebi o que pensei mal.

Prof.: Estão a ver... se a variável dependente fosse outra podíamos ter ainda outro gráfico.

Observa-se que alguns alunos, nomeadamente a aluna A_6, compreendem que se a variável dependente fosse a distância a casa do Miguel nenhum dos gráficos apresentados traduziria adequadamente a situação. Vários alunos demostraram concordar com o gráfico elaborado pela colega, a aluna A_6. O aluno A_{17} , um dos alunos que na sua resposta escrita tinha escolhido o gráfico B e definido a distância a casa do Miguel como variável dependente (Figura 41), afirma ter compreendido a razão do seu erro.

Ainda resultante da discussão em torno do gráfico apresentado na figura 45 e como se pode verificar no diálogo apresentado em seguida, os alunos mostraram compreender que o segmento de reta horizontal traduz a "paragem" do João em casa do Miguel mas parecem não compreender que o valor da distância a casa do Miguel naquele intervalo de tempo é igual a zero.

Prof.: E porque é que esta parte aqui é constante? (A professora aponta para o segmento de reta horizontal no gráfico representado na figura 45)

A_4: Porque ele está em casa do Miguel.

Prof.: E qual é o valor da distância aqui?

Alunos: É sempre igual!... não é nenhum !... é a mesma! É constante.

Prof.: Todos a falarem ao mesmo tempo não percebo! Qual é o valor da distância? A distância pode ser quantificada, qual o valor?

Alunos: .... (Silêncio).

A_5: Aí o tempo não pára.

Prof.: Pois não! E a distância é quanto?

Alunos: ...

Prof.: Então.... aqui a distância é igual a zero, porque ele está em casa do Miguel.

Os alunos revelaram dificuldade em identificar que o valor da distância a casa do Miguel é igual a zero quando o segmento de reta horizontal está contido no eixo das abcissas. De facto, a dificuldade na leitura e/ou estimativa e interpretação de pontos em gráficos de variáveis contínuas quando não são colocados valores nos eixos foi bastante manifestada durante a realização de toda a tarefa 4.

Como se pode verificar pelas resoluções escritas e pelos diálogos apresentados, a maioria dos alunos foi capaz de escolher variáveis adequadas e apresentar uma justificação satisfatória, sendo que apenas um dos grupos não explicou a razão da sua escolha. Há alunos que na sua explicação descrevem apenas uma parte do gráfico ou referem apenas uma das variáveis escolhidas, ou só tempo ou só distância e algumas das explicações dadas não traduzem de forma clara a relação que existe entre as variáveis escolhidas e as variações do gráfico. Ainda assim, pode concluir-se que houve um entendimento geral de que o gráfico B podia traduzir o percurso do João e a maioria dos alunos terá feito uma boa compreensão do comportamento geral dos gráficos escolhidos. Apesar de não optarem pelo gráfico que melhor parecia descrever a situação, os grupos que optaram pelos gráficos A e D justificaram adequadamente a razão das suas escolhas e evidenciaram ser capazes de interpretar a situação descrita e relacionar as variáveis envolvidas a partir da representação verbal e da representação gráfica. A apresentação das resoluções destes alunos serviu de base à discussão coletiva na qual se levantaram questões pertinentes e se criaram condições para analisar e explorar a importância das variáveis definidas em cada um dos eixos coordenados, a relação entre si e o comportamento do gráfico.

5.4.2. Situação II – Transição entre representações (SG) e interpretação e relação entre variáveis

A situação II refere-se a uma ida dos dois amigos, Miguel e João, a um jogo de futebol em que os dois se levantam das cadeira e gritam cada vez que a equipa que apoiam marca um golo.

O gráfico E foi escolhido por 11 dos grupos de alunos e o gráfico F apenas por um grupo. No entanto, três dos grupos de alunos fizeram alterações no gráfico E ou a construção de um novo gráfico por considerarem que nenhum dos gráficos dados poderia traduzir na totalidade a situação descrita. Cinco grupos de alunos escolheram variáveis irrelevantes ou inadequadas tendo em conta o gráfico escolhido, ainda que em dois desses grupos a escolha de uma das variáveis fosse adequada à situação II . Dois dos grupos que escolhem o gráfico E não definiram variáveis nem explicaram a razão da sua escolha. Cinco grupos fazem uma escolha de variáveis adequada e apresentam uma explicação mais ou menos completa da razão pela qual o gráfico escolhido pode traduzir a situação. O grupo de trabalho que opta pelo gráfico F, apresenta uma explicação pouco clara e incoerente tendo em conta as variáveis escolhidas.

As figuras 46 e 47 exemplificam as respostas dadas por dois grupos de alunos que fazem uma escolha de variáveis relevante e apresentam uma explicação adequada tendo em conta as variáveis escolhidas. Na figura 46, os alunos optaram pelo gráfico E e as variáveis escolhidas foram o tempo e a intensidade de som. Os alunos colocam alguns valores no gráfico que descreve uma parte do jogo de futebol com a marcação de dois golos, um ao fim de 5 e outro ao fim de 15 segundos.

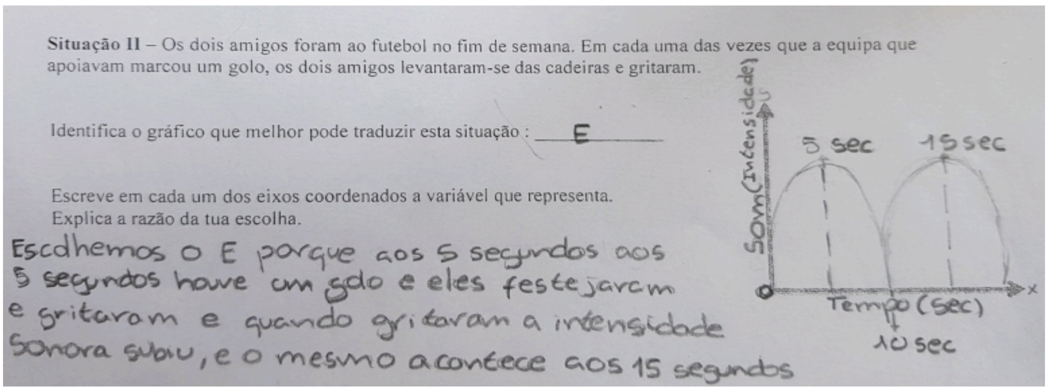
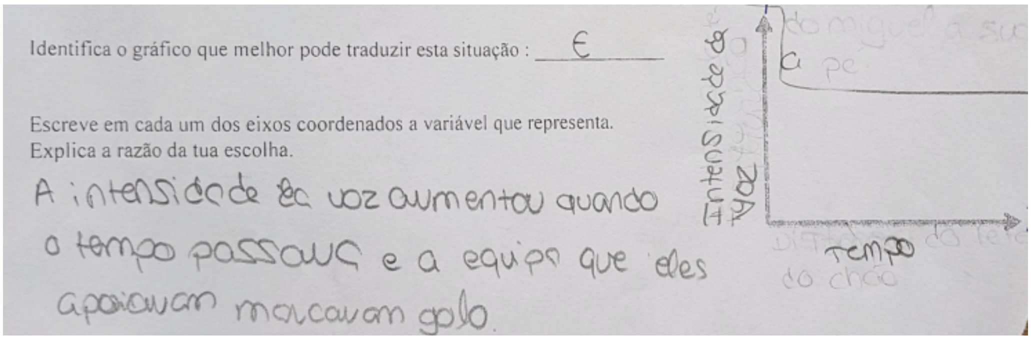


Figura 46 - Resolução de G_6 - Tarefa 4 - Situação II

Na figura 47, os alunos consideram ser o gráfico E o que melhor pode descrever a situação e explicam a sua resposta referindo que a intensidade da voz, variável dependente, aumenta quando a equipa que os amigos apoiam marca um golo, à medida que o tempo, variável independente, passa. Os alunos relacionam o comportamento do gráfico com as variáveis escolhidas e fazem referência às duas variáveis na sua justificação.

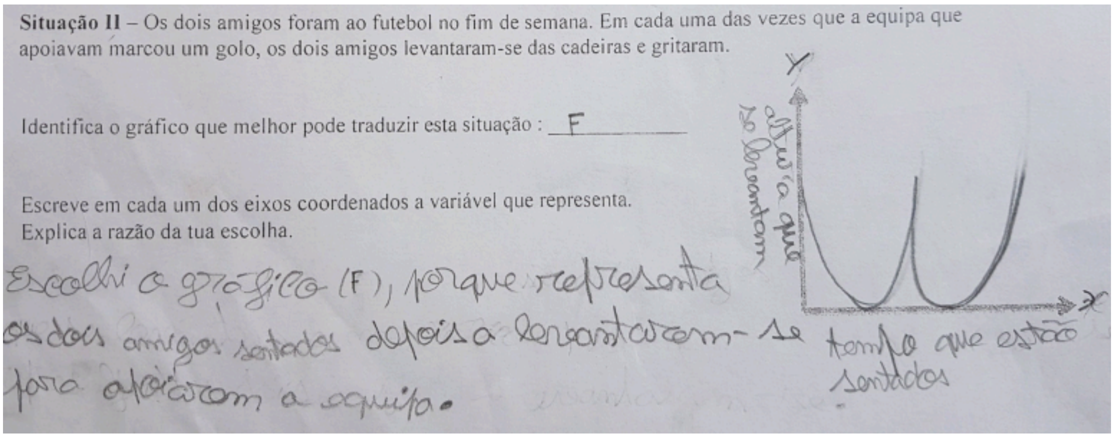

Identifica o gráfico que melhor pode traduzir esta situação : E

Escreve em cada um dos eixos coordenados a variável que representa.
Explica a razão da tua escolha.

A intensidade da voz aumentou quando o tempo passava e a equipa que eles apoiavam marcavam golo.

Figura 47 - Resolução de G_7 - Tarefa 4 - Situação II

No exemplo seguinte (Figura 48) é apresentada uma resposta na qual os alunos representam no eixo das abcissas, “tempo que estão sentados” e no eixo das ordenadas, “altura a que se levantam”, evidenciando terem pensado nas variáveis tempo e altura, que poderiam ser relevantes no contexto da situação. No entanto é apresentada uma justificação que faz pouco sentido e que não faz referência a nenhuma das variáveis escolhidas, sendo assim evidenciadas dificuldades na interpretação e relação entre variáveis a partir de uma representação grafica.


Situação II – Os dois amigos foram ao futebol no fim de semana. Em cada uma das vezes que a equipa que apoiavam marcou um golo, os dois amigos levantaram-se das cadeiras e gritaram.

Identifica o gráfico que melhor pode traduzir esta situação : F

Escreve em cada um dos eixos coordenados a variável que representa.
Explica a razão da tua escolha.

Escolhi o gráfico (F), porque representa os dois amigos sentados depois a levantarem-se para apoiarem a equipa.

Figura 48 - Resolução de G_4 - Tarefa 4 - Situação II

A figura 49 é uma resolução na qual os alunos escolhem um gráfico e definem as variáveis mas não apresentam a razão da sua escolha. Os alunos escolhem como variável dependente o “tempo do barulho dos festejos” e como variável independente o número de golos, uma variável revelante no contexto da situação mas inadequada para descrever qualquer um gráficos dados, uma vez que não é apresentado nenhum gráfico constituído por um conjunto finito de pontos. Há evidências de que os alunos não relacionam a natureza (discreta ou contínua) das variáveis com o aspeto do gráfico.

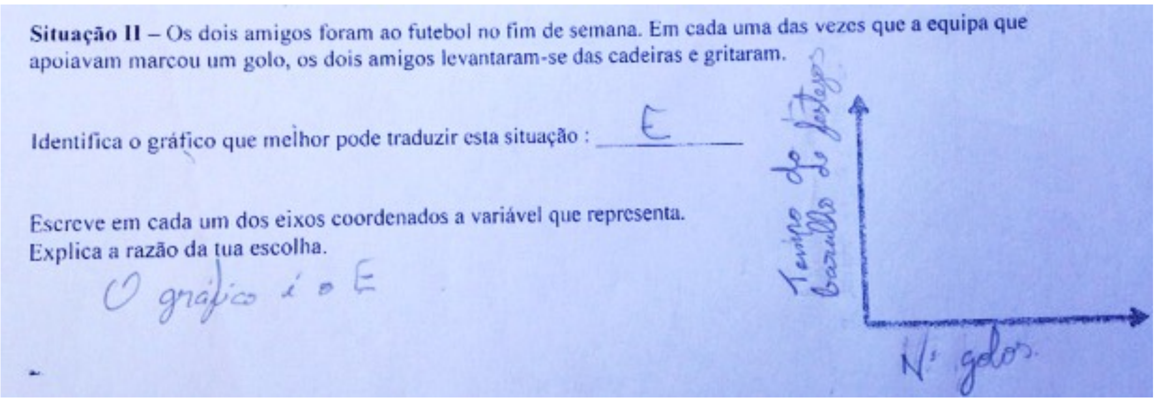


Figura 49 - Resolução de G_5 - Tarefa 4 - Situação II

Os exemplos que se seguem (Figura 50, Figura 51 e Figura 52) mostram a resolução de três grupos que, depois de afirmarem que nenhum dos gráficos apresentados descrevia de forma adequada a situação II, foram incentivados pela professora a construir novos gráficos.

Na figura 50, os alunos consideram o tempo do jogo como variável independente e a altura em relação ao chão como variável dependente. No gráfico são assinalados cinco pontos, dos quais se subentende que três representam os amigos sentados a uma determinada altura do chão e os outros dois pontos representam os amigos em pé, a festejar dois golos.

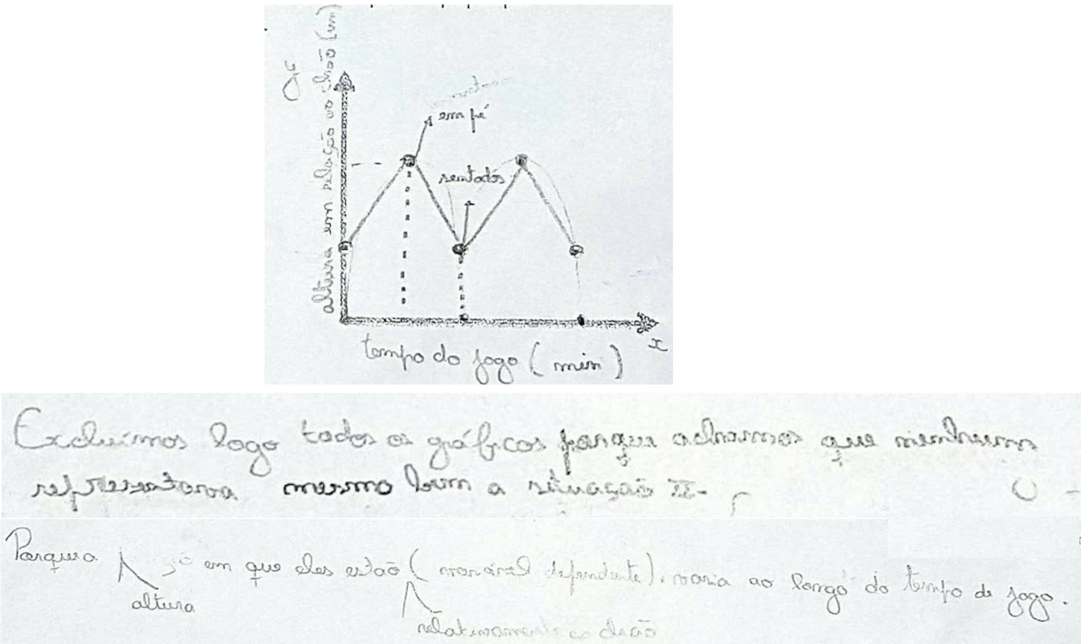


Figura 50 - Resolução de G_3 - Tarefa 4 - Situação II

Na resolução apresentada em baixo (Figura 51), os alunos escolhem o gráfico e definem para variáveis o tempo e distância da ponta do nariz ao chão, que são adequadas e relevantes tendo em conta a situação. O facto dos alunos terem inserido uma quebra no gráfico, no eixo das ordenadas, revela que compreenderam que a variável dependente não fazia sentido para valores nulos nem valores muito próximos de zero. Os alunos definem 110 cm como um valor plausível para a distância, da ponta do nariz de uma pessoa sentada numa cadeira, ao chão. O facto de terem considerado apenas nove minutos de jogo evidencia que os alunos reconheceram que o gráfico E não seria adequado para traduzir 90 minutos de um jogo de futebol.

Nota-se que neste grupo, os alunos interpretaram e relacionaram corretamente as variáveis escolhidas com a situação descrita e com a representação gráfica que construíram.

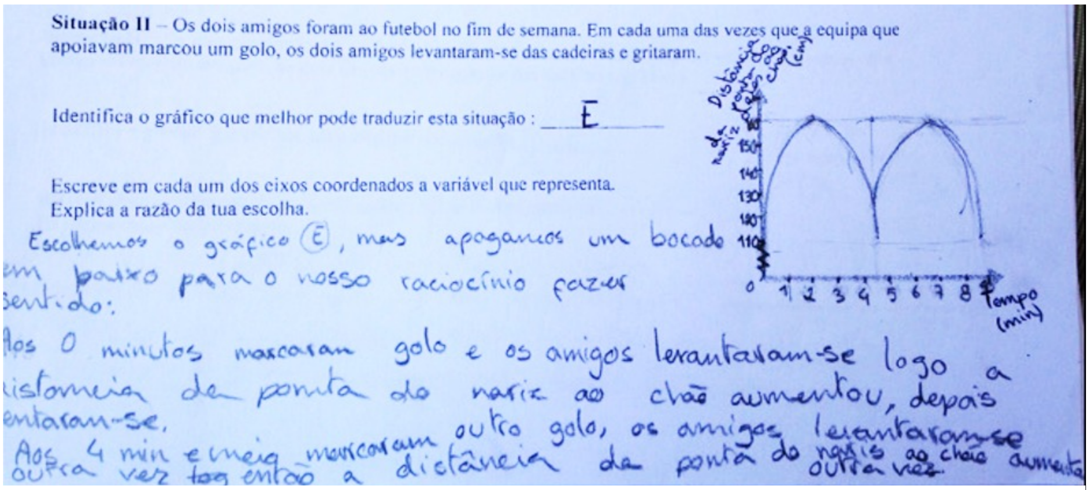


Figura 51- Resolução de G_{11} - Tarefa 4 - Situação II

As razões que levaram os alunos a proceder a algumas alterações no gráfico E são explicadas por um dos elementos do grupo, o aluno A_{21}, no diálogo apresentado a seguir, que também tem a participação do aluno A_2.

A_{21}: Nós no início tínhamos feito como se fossem os 90 minutos mas levar 45 minutos a levantar-se e a baixar-se não era credível então fizemos só durante 9 minutos de jogo e ali na variável dependente pusemos a distância da ponta do nariz ao chão.

A_2: Então e o nariz está no chão aqui? (Aponta no gráfico para o ponto (0,0))

A_{21}: O nariz nunca está no chão. Quando eles estão sentados, estão aqui, o nariz está a um metro e dez do chão.

A_2: Ah! só se começa aqui.... boa!

A_{21}: Sim, nós fizemos uma quebra no gráfico.

A figura 52, representa o gráfico construído pelo grupo 1, no qual os alunos fazem uma adaptação do gráfico E, inserindo um intervalo de tempo onde a variável dependente é igual a zero, o que evidencia que os alunos entenderam ser mais viável que, entre dois golos, o João e o Miguel estivessem sentados durante algum tempo (situação não traduzida no gráfico E dado no enunciado).

As variáveis que os alunos definiram foram adequadas e a representação gráfica coerente com a escolha das variáveis.

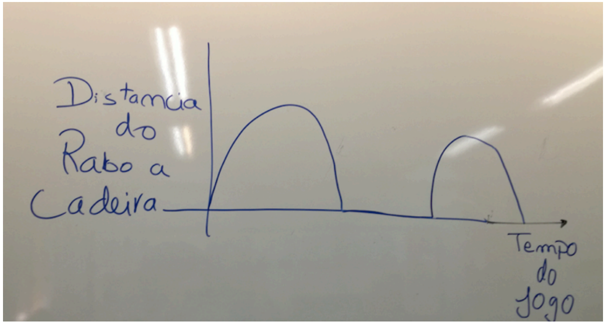


Figura 52 - Resolução de G_1 - Tarefa 4 - Situação II

Apresento em seguida, parte da discussão coletiva que ocorreu em torno da explicação do aluno A_2, um dos elementos do grupo 1, sobre o gráfico que construíram (Figura 52).

> *A_2: Aqui é a distância do rabo à cadeira, quando eles se levantam para festejar sobe. Eles param de festejar e continua o jogo e eles sentam-se. Depois marcam outro golo e levantam-se.*
>
> *A_4: E acaba o jogo?*
>
> *A_2: Sim, pode ser.*
>
> *Prof.: (...) vocês percebem o que são estes três pontos?* (Aponta para três dos pontos que tem ordenada igual a zero)
>
> *A_5: É quando eles estão sentados.*
>
> *Prof.: E porque é que sabemos isso?*
>
> *A_4: Porque a distância é de 0 centímetros.*
>
> *Prof.: Como A_2 disse, aqui o tempo está a passar e a distância do "rabo à cadeira" aumenta. E este pico significa o quê?*
>
> *A_{12}: Estão a festejar. Já não vai mais para cima!*
>
> *Prof.: Quer dizer que a distância aqui é o quê?*
>
> *A_{12}: O limite.*

Prof.: Dizemos que é o valor máximo. (...) quantos golos há aqui?

Alunos: 2.

A partir do gráfico apresentado (Figura 52), da explicação feita por um dos elementos do grupo, e das questões colocadas pela professora, os alunos que participaram no diálogo revelaram facilidade na leitura global do gráfico e na interpretação de pontos específicos, nomeadamente pontos de ordenada nula e máximos.

Depois da análise do gráfico representado na figura 52 e de serem discutidas as diferenças entre este e o gráfico dado no enunciado e considerando as mesmas variáveis, alguns alunos reconheceram que o gráfico E não podia traduzir corretamente a situação II. Este facto pode observar-se no diálogo em baixo:

A_8:. Olhando para o gráfico E parece que está sempre a haver golos.

A_{10}: Realmente olhando para esse gráfico parece que eles estão sempre levantados.

(O aluno A_{10} refere-se ao gráfico E)

A_{11}: Pois! Estão aqui 45 minutos para cada golo. Não pode ser.

Estas intervenções dos alunos A_8, A_{10} e A_{11}, evidencia que os alunos desenvolveram uma melhor compreensão na leitura e na interpretação dos gráficos depois de apresentadas e discutidas, no grupo-turma, as resoluções de outros colegas.

A resolução em torno da situação II foi significativamente mais difícil para a maioria dos alunos. Na suas resoluções escritas, poucos alunos fizeram referência às variáveis escolhidas e evidenciaram não ser capazes de interpretar graficamente a forma como uma variável pode variar em função da outra. Vários grupos de alunos escolheram variáveis relevantes mas também revelaram dificuldades na interpretação e na relação entre as variáveis a partir da representação gráfica. Ainda assim, alguns alunos revelaram uma boa compreensão da relação situação–gráfico e da relação entre as variáveis, construindo novos gráficos ou incluindo alterações nos gráficos existentes, argumentando de forma adequada e clara as respostas. As explicações apresentadas nos diálogos e ao longo da discussão coletiva foram mais completas do que as apresentadas nas resoluções escritas.

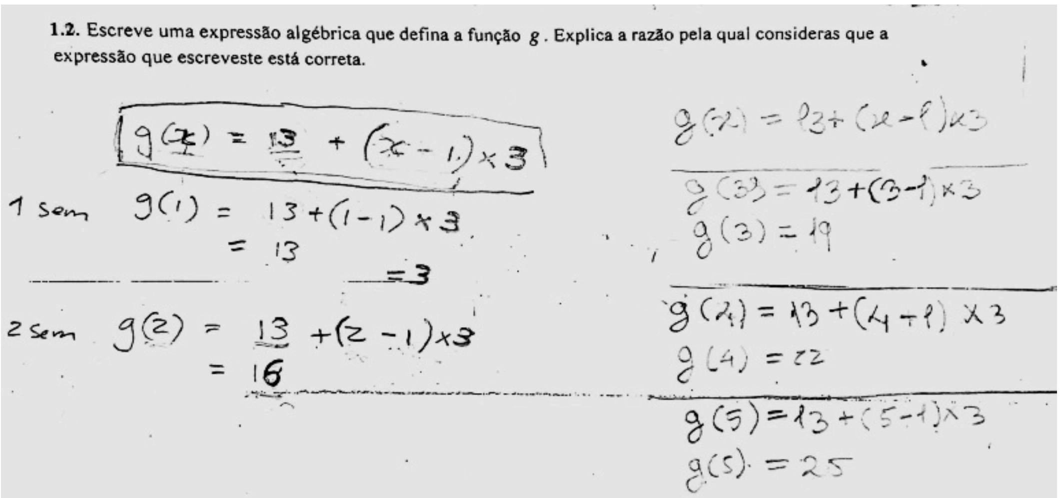
Enquanto que na situação I a maioria dos alunos revelou uma boa compreensão da relação entre a situação e o gráfico, tendo feito uma escolha adequada das variáveis, na situação II, a escolha de variáveis adequadas foi uma tarefa pouco acessível a muitos dos alunos.

5.5. Tarefa 5

5.5.1. Questão 1.2 – Transição entre representações (NA) e interpretação e relação entre variáveis

Na questão 1.2 da Tarefa 5 (Anexo 8) é pedido que os alunos escrevam uma expressão algébrica que defina a função g, representada no enunciado por uma tabela, e que expliquem a razão pela qual consideram que a expressão que escreveram está correta.

Na resolução seguinte (Figura 53), os alunos evidenciam ter observado na tabela apresentada que o valor da poupança da Gabriela em cada uma das semanas pode ser obtido adicionando três unidades ao valor da poupança na semana anterior. Apoiando-se nesta observação, os alunos parecem compreender a forma como as variáveis se relacionam e são capazes de a exprimir algebricamente. De acordo com o que é pedido, escrevem uma expressão algébrica correta embora numa forma que não está simplificada. Os alunos testam a veracidade da expressão que escreveram substituindo os valores de x por cada um dos cinco objetos apresentados na tabela.


1.2. Escreve uma expressão algébrica que defina a função g. Explica a razão pela qual consideras que a expressão que escreveste está correta.

$\boxed{g(x) = 13 + (x-1)\times 3}$

1 sem $g(1) = 13+(1-1)\times 3 = 13$ $=3$

2 sem $g(2) = 13 + (2-1)\times 3 = 16$

$g(x) = 13+(x-1)\times 3$

$g(3) = 13+(3-1)\times 3$

$g(3) = 19$

$g(4) = 13+(4-1)\times 3$

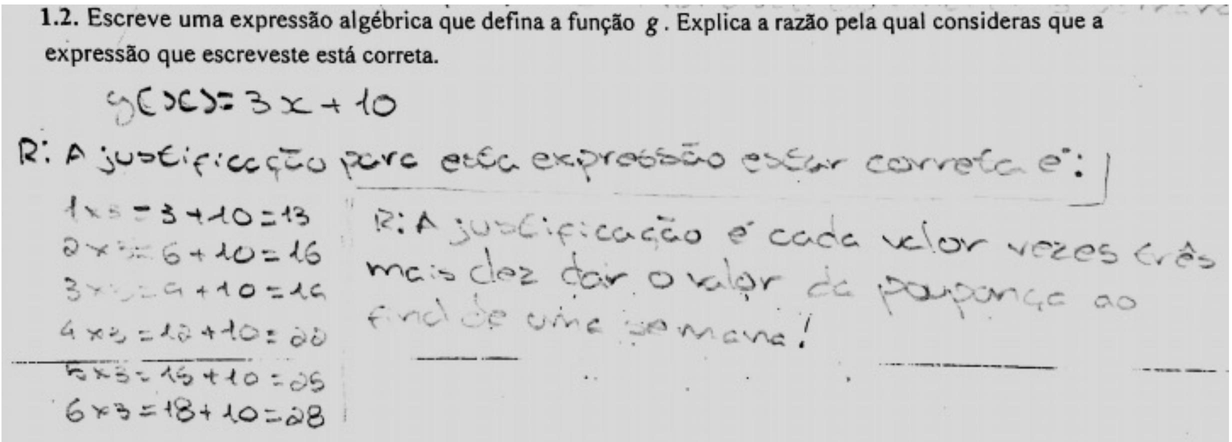
$g(4) = 22$

$g(5) = 13+(5-1)\times 3$

$g(5) = 25$

Figura 53 – Resolução de G_{12} – Tarefa 5 – Questão 1.2

Na resolução seguinte (Figura 54), os alunos escrevem corretamente uma expressão algébrica da função g e apresentam a razão pela qual a consideram correta, recorrendo ao cálculo das imagens correspondentes a seis objetos e descrevendo uma forma generalizada de determinar o valor da poupança da Gabriela para qualquer uma das semanas. Estes alunos não evidenciam dificuldades na transição da representação tabular para a representação algébrica.



1.2. Escreve uma expressão algébrica que defina a função g. Explica a razão pela qual consideras que a expressão que escreveste está correta.

g(x)= 3x + 10

R: A justificação para esta expressão estar correta é:

1x3 = 3+10=13
2x3= 6+10=16
3x3= 9+10=19
4x3 =12+10= 22
5x3= 15+10 =25
6x3 =18+10=28

R: A justificação é cada valor vezes três mais dez dar o valor da poupança ao fim de uma semana!

Figura 54 - Resolução de G2 - Tarefa 5 - Questão 1.2

A forma como os alunos chegam à escrita da expressão, partindo dos valores da tabela, estão evidenciadas no seguinte diálogo:

Prof.: porquê $3x$ *?*

A3:. Então porque os valores andam de 3 em 3. Na tarefa das mesas era de 2 em 2 e vimos que tínhamos de escrever $2x$.

Prof.: Ok, e como chegaram ao valor de 10?

A4: Vimos que a 1 correspondia 13 por isso para ficar bem tinhamos de somar 10.

Prof.: Conseguem explicar-me isso melhor?

A3: Oh stora então se fosse só $3x$ *a imagem de 1 era 3 e sabemos que é 13 então temos de adicionar 10.*

Prof.: E experimentaram para todos os valores?

A4: Não.... mas dão bem... a 2 correspondia 6 e 6+10 dá 16 que é o que está lá.

(O aluno refere-se aos valores da tabela na qual ao objeto 2 corresponde a imagem 16).

Prof.: Ok, então mostrem para os restantes valores.

Fazendo uma analogia com uma situação já estudada nas aulas anteriormente, na tarefa 1, os alunos compreendem que $3x$ tem de ser um termo da expressão algébrica pedida, uma vez que a diferença entre duas imagens consecutivas é 3. No entanto, os alunos verificam que se a imagem de 1 é 13 então é necessário adicionar 10 unidades ao termo $3x$ e escrevem a expressão $g(x) = 3x + 10$.

Quando solicitados a testar a veracidade da expressão algébrica para outras imagens, além da imagem de 1, os alunos parecem compreender os cálculos que têm de fazer, confirmam de imediato, recorrendo à expressão, que $g(2)=16$ e parecem convictos de que a expressão algébrica que escreveram está correta. Depois de solicitados a confirmar que a expressão é verificada para todos os objetos dados na tabela, os alunos apresentam os cálculos necessários (Figura 54).

Como se pode ver na figura seguinte (Figura 55), um grupo apresentou a sua resposta escrevendo “ $3x+10$ ”. Os alunos evidenciam compreender a relação entre as variáveis a partir de uma representação tabular, no entanto, não apresentam uma expressão completa para traduzir essa relação, escrevendo apenas uma das variáveis envolvidas, a variável x .

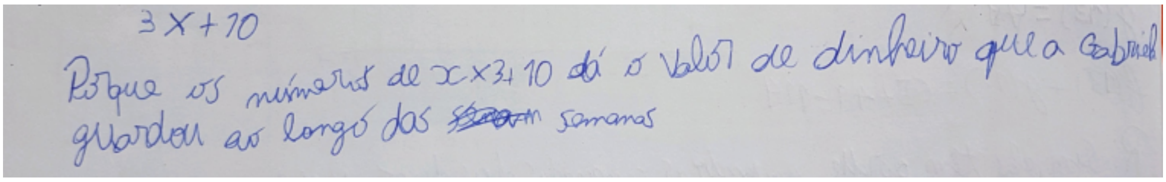


Figura 55 – Resolução de G_{11} – Tarefa 5 – Questão 1.2

Exceto um grupo de alunos, os restantes, foram capazes de escrever corretamente a expressão algébrica pedida tendo, a maioria, justificado a sua resposta descrevendo, em linguagem natural, a forma como obtiveram a expressão e/ou calculando várias imagens e confirmando que os valores obtidos, recorrendo à expressão algébrica, coincidiam com os valores apresentados na tabela dada no enunciado.

Apesar de não ser evidente nas resoluções dos alunos a forma como chegaram à expressão $g(x)=3x+10$, observei nas aulas e confirmei pelas gravações em áudio que, à semelhança da estratégia delineada pelo grupo 2 já refererida anteriormente, os alunos evidenciaram facilidade na transição da representação tabular para representação algébrica porque foram capazes de adaptar a uma nova situação, as aprendizagens já realizadas anteriormente numa situação semelhante. Neste caso, os alunos recordaram o trabalho realizado na tarefa 1, relativamente à escrita de uma expressão algébrica a partir dos dados de uma tabela. Inicialmente fizeram uma interpretação entre as duas variáveis, usando uma abordagem covariacional, ou seja, observam que o aumento de uma unidade nos valores de x corresponde a um aumento de três unidades no correspondente valor de y (note-se que a função g é uma função de variável natural). Os alunos parecem compreender que $3x$ tem de ser um termo da expressão algébrica, no entanto, verificam que se a expressão algébrica fosse apenas $g(x)=3x$ então $g(1)=3$, o que contraria a informação apresentada na tabela na qual se lê $g(1)=13$. Assim os alunos parecem observar que adicionando 10 unidades ao termo $3x$ e obtendo $3x+10$, a expressão algébrica da função g pode ser escrita na forma $g(x)=3x+10$.

5.5.2. Questão 1.3 – Transição entre representações (NG/NA/GA) e interpretação e relação entre variáveis

Na questão 1.3 pretende-se que os alunos averiguem se ao final das 13 semanas de poupança, as duas irmãs poderão comprar uma consola de jogos que custa 100 euros, caso juntem as suas poupanças. Os alunos têm de explicar como chegaram à sua resposta incluindo pelo menos uma representação de cada umas das funções dadas, f e g, diferente da representação que é dada no enunciado.

No quadro que se segue (Quadro 6) apresento, para cada uma das funções dadas f e g, o modo de representação (Representação Alvo) que cada um dos grupos utilizou para mostrar como chegou à sua resposta e indico, para cada caso, as figuras que exemplificam as resoluções dos alunos.

Quadro 6 - Análise de transições - Tarefa 5

Transição entre representações			Grupos	Exemplos
	Representação Fonte	Representação Alvo		
Função g	N	G	G_3, G_8, G_{10}	Figuras 56 e 59
		A	G_2, G_4, G_5, G_7, G_9	Figura 57
		GC	G_1, G_6, G_{11}, G_{12}	Figuras 58 e 60
Função f	GC	N	G_2, G_6, G_8, G_{11}, G_{12}	Figuras 58, 59 e 60
		A	G_1, G_3, G_4, G_5, G_7, G_9	Figura 57
		G	G_{10}	Figura 56

Nota : GC: gráfico cartesiano ; G: $Gf = \{(x,y) : x \in Df \wedge y = f(x)\}$ sendo f uma função

Em seguida (Figura 56, Figura 57, Figura 58, Figura 59 e Figura 60) apresentam-se resoluções dos alunos que exemplificam cada uma das situações descritas no quadro 6.

Na primeira resolução (Figura 56), os alunos optaram por representar as duas funções, f e g, escrevendo o gráfico, G, de cada uma, como um conjunto de pares ordenados (x,y) onde x representa cada uma das treze semanas em que as duas irmãs fazem a poupança e y o correspondente valor da poupança acumulada. Os alunos escrevem corretamente todos os pares ordenados e não apresentam cálculos que mostrem como chegaram aos valores de y, no par ordenado (x,y) o que leva a acreditar que os cálculos, por serem simples, foram efetuados mentalmente. Não foi apresentada a resposta à questão colocada.

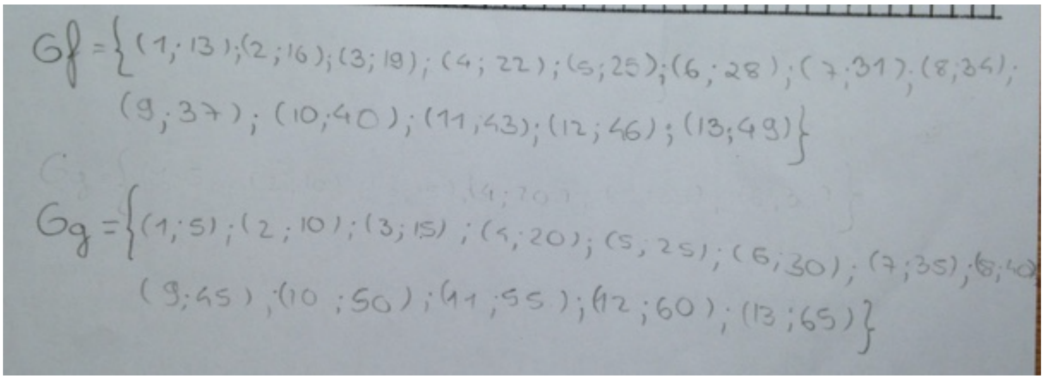


Figura 56 - Resolução de G_{10} - Tarefa 5 - Questão 1.3

Na resolução que se segue (Figura 57), os alunos reconhecem a relação entre as variáveis representadas na tabela e a relação entre as variáveis identificadas no gráfico cartesiano e apresentam a sua resposta considerando cada uma das funções f e g na forma algébrica. Esta resolução mostra que a transição da representação tabular para a representação algébrica e transição da representação gráfica para a representação algébrica é um procedimento acessível a estes alunos.

Os alunos mostram a forma como chegaram à sua resposta e apresentam-na de forma completa e sem incorreções.

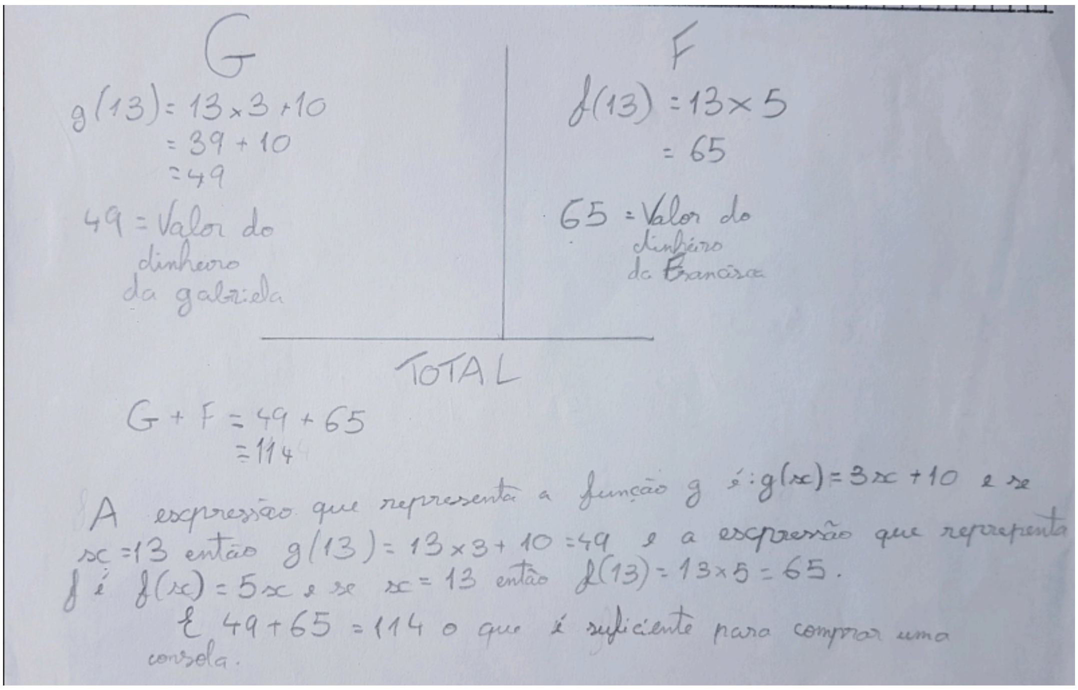


Figura 57 - Resolução de G_5 - Tarefa 5 - Questão 1.3

No exemplo seguinte (Figura 58), os alunos recorrem a um gráfico cartesiano para representar a função g e a uma tabela vertical para representar a função f .

Na construção do gráfico cartesiano que representa a função g , os alunos não são muito rigorosos na marcação da escala, mas utilizam uma escala adequada: no eixo das abcissas, os valores marcados diferem de uma unidade e no eixo das ordenadas, os valores diferem de três unidades. Em ambos os eixos os alunos inserem uma “quebra”, uma vez que valores inferiores a 28 no eixo das ordenadas e inferiores a 6 no eixo das abcissas já estão representados na tabela dada no enunciado e são irrelevantes no contexto da questão à qual pretendem responder.

Estes alunos optam por representar a função f , apresentada graficamente no enunciado, por uma tabela vertical, representando os valores da variável independente a partir de 7, uma vez que até ao final das seis semanas os valores da poupança da Francisca já são apresentados no gráfico apresentado no enunciado. Os alunos identificam corretamente as duas colunas, sendo que na primeira coluna, usam a notação adequada, x , para representar as semanas de poupança e na segunda coluna apenas escrevem “poupança”.

Finalmente, este grupo, responde corretamente à questão colocada, referindo que as duas irmãs terão dinheiro suficiente para a compra da consola de jogos, ficando ainda com 14 euros de “troco”. Os alunos apresentam a sua resposta escrevendo corretamente, em linguagem simbólica, a imagem de 13, por meio das duas funções f e g .

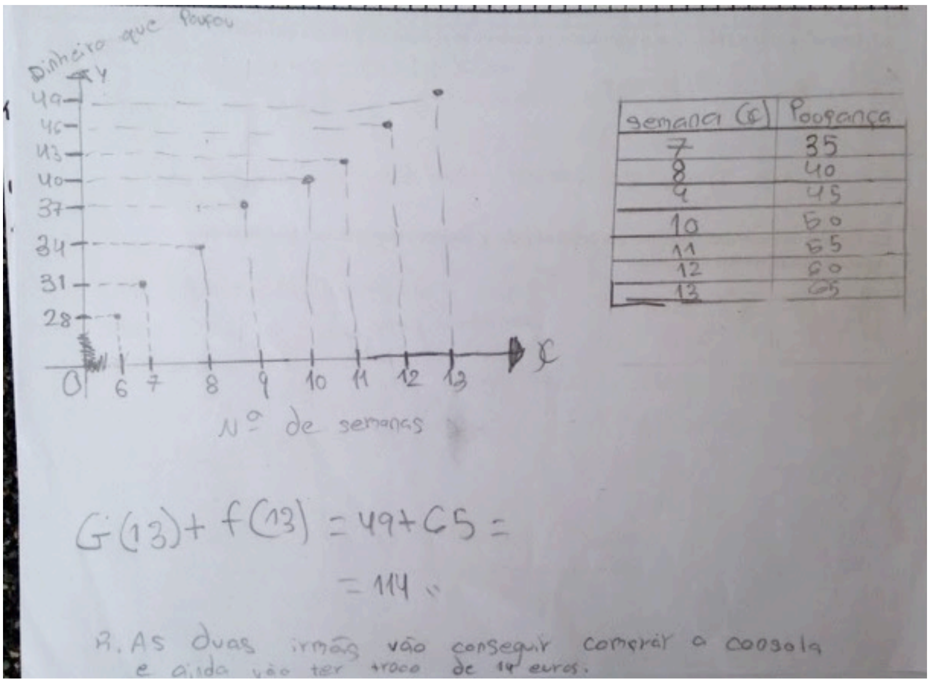


Figura 58 - Resolução de G_6 - Tarefa 5 - Questão 1.3

Houve grupos que optaram por tabelas horizontais para representar a função f (Figura 59). Na elaboração da tabela, os alunos do grupo 8, tiveram o cuidado de identificar, com a notação adequada os objetos e as imagens determinadas. Para representar a função g é escrito um gráfico, G, onde cada um dos treze pares ordenados está correto. Este grupo responde corretamente à questão colocada, mostrando os cálculos efetuados para justificar a sua resposta.

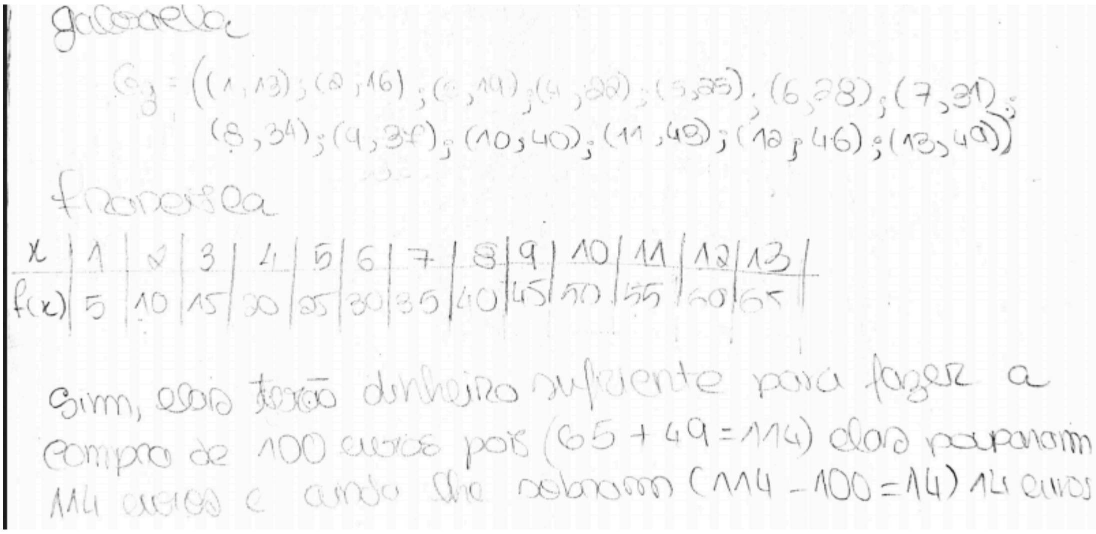


Figura 59 - Resolução de G_8 - Tarefa 5 - Questão 1.3

Dos quatro grupos de trabalho que optaram por representar a função g num referencial cartesiano apenas um, G_{11}, apresenta erros na construção (Figura 60). Estes alunos representam incorretamente os pares ordenados, evidenciando ter interpretado a relação entre as variáveis como uma proporcionalidade direta. A escala no eixo das abcissas também não está correta, uma vez que colocam o valor "13" sem a preocupação de "deixar um espaço" adequado entre esta ordenada e a ordenada zero. Para além disso, representam o gráfico por uma reta, o que mostra que não compreendem que o gráfico de uma função cuja variável independente é discreta tem de ser um conjunto isolado de pontos.

De forma a dar resposta à questão colocada, os alunos iniciam uma estratégia errada, determinando o valor de $g(13)$ como sendo igual a $g(6)+g(6)+g(1)$ o que não se adequa à situação uma vez que g não é uma função de proporcionalidade direta. Posteriormente os alunos apresentam o valor correto de $g(13)$, acabando por responder corretamente à questão colocada. O facto dos alunos terem determinado corretamente, com exceção do ponto de coordenadas (0,0), os pontos que pertencem ao gráfico da função g, terá contribuído para observarem que a imagem de 13 por meio desta função é 49 e não 69, como consideraram inicialmente.

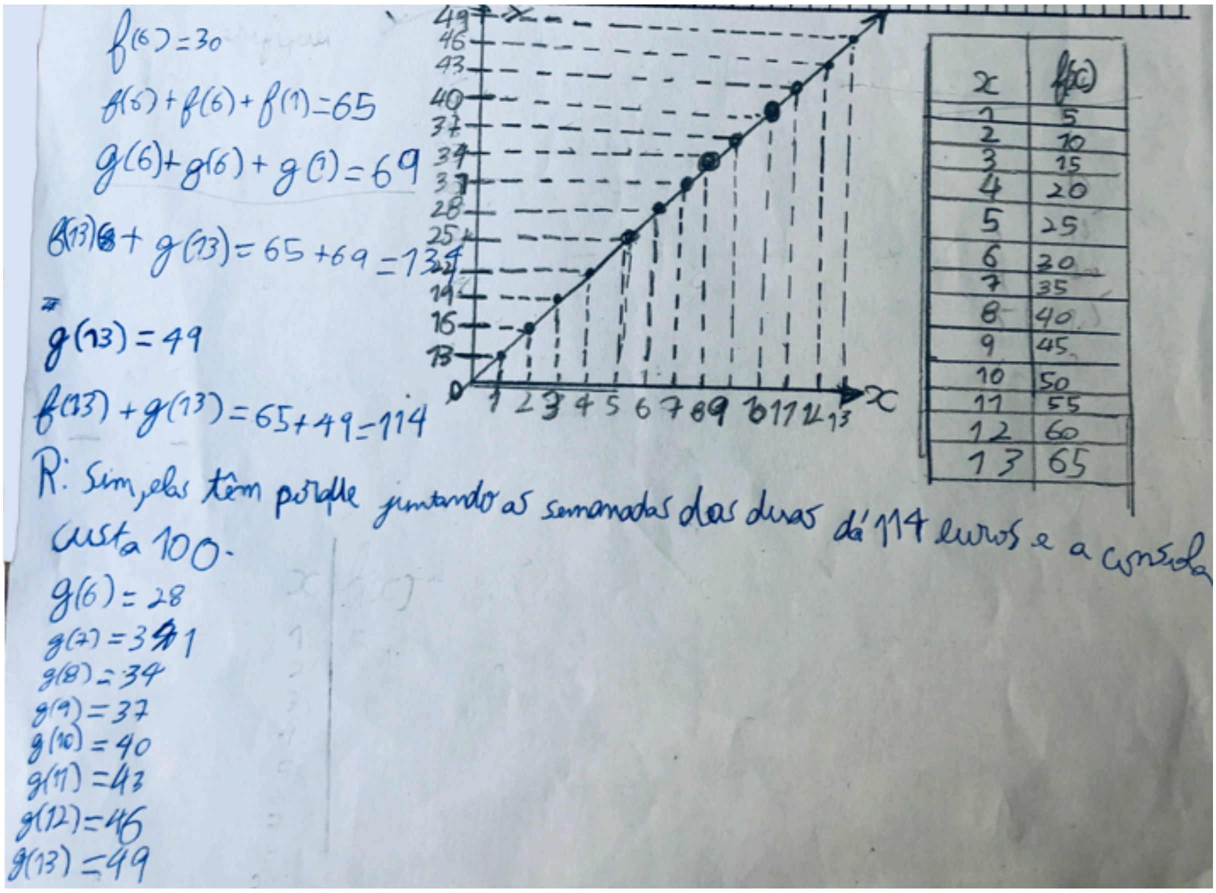


Figura 60 - Resolução de G_{11} - Tarefa 5 - Questão 1.3

Todos os alunos que optaram por transitar da representação gráfica para a representação algébrica, fizeram-no corretamente tendo escrito e usado a expressão algébrica com notações corretas. Os alunos que optaram por uma representação tabular, partindo de uma representação gráfica, elaboraram e completaram as tabelas corretamente, identificando cada uma das linhas ou colunas conforme a escolha por tabelas horizontais ou verticais, respetivamente.

Quando a representação fonte era uma tabela, os alunos parecem ter compreendido a relação entre as variáveis envolvidas e foram capazes de as representar nas representação alvo que escolheram, representação gráfica ou representação algébrica.

Em suma, os alunos foram capazes de identificar, interpretar e relacionar as variáveis a partir de uma representação tabular e de uma representação gráfica e não evidenciaram dificuldades na transição entre os diferentes modos de representação trabalhados (NA e NG). No entanto, verificou-se que os alunos do grupo 11 revelaram dificuldades na compreensão de que, sendo a variável independente discreta e g uma função que não é de proporcionalidade direta, a sua representação gráfica não pode ser uma reta que contém o ponto de coordenadas $(0,0)$.

5.6. Tarefa 6

5.6.1. Questões 1.3 e 1.4 – Transição entre representações (GA) e interpretação e relação entre variáveis

Na questão 1.3 da Tarefa 6 (Anexo 9) é pedido que os alunos escrevam três expressões algébricas do tipo $y = kx$ para valores de k positivos, comparem os gráficos obtidos, com a ajuda do *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, e a partir dessas representações indiquem características do gráfico de uma função linear. Na questão 1.4 os alunos têm de proceder da mesma forma que em 1.3 mas considera valores de k negativos.

Inicialmente alguns alunos revelaram dificuldades em compreender o que tinham de fazer para obter uma expressão algébrica do tipo $f(x) = kx$ como pedido no enunciado, manifestando dúvidas na interpretação do significado das "letras" k e x na expressão algébrica.

Dois grupos de trabalho escreveram expressões de funções constantes obtendo como representação gráfica uma reta horizontal, uma vez que substituíram k e x por números. A figura seguinte (Figura 61) representa a primeira resolução de um dos grupos de alunos que apresentou a expressão algébrica de uma função constante, h, que não é linear como pedido no enunciado, obtendo como representação gráfica a reta horizontal de equação $y = 2$.

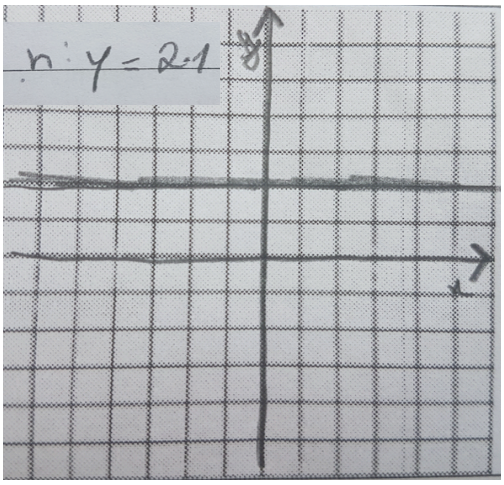


Figura 61– 1ª Resolução de A_{10} e A_{13} - Tarefa 6 - Questão 1.3

Relativamente a este gráfico os alunos não apresentaram nenhuma conclusão sobre as suas características quando o valor de k é positivo, tal como era pedido no enunciado. Apesar de serem pedidas três representações gráficas os alunos só apresentaram uma (Figura 61), uma vez que, com a ajuda de outro grupo de alunos, detetaram o erro cometido, redefiniram as suas expressões algébricas e obtiveram novas representações gráficas. A resolução final apresentada por este par de alunos (A_{10} e A_{13}) foi a seguinte (Figura 62):

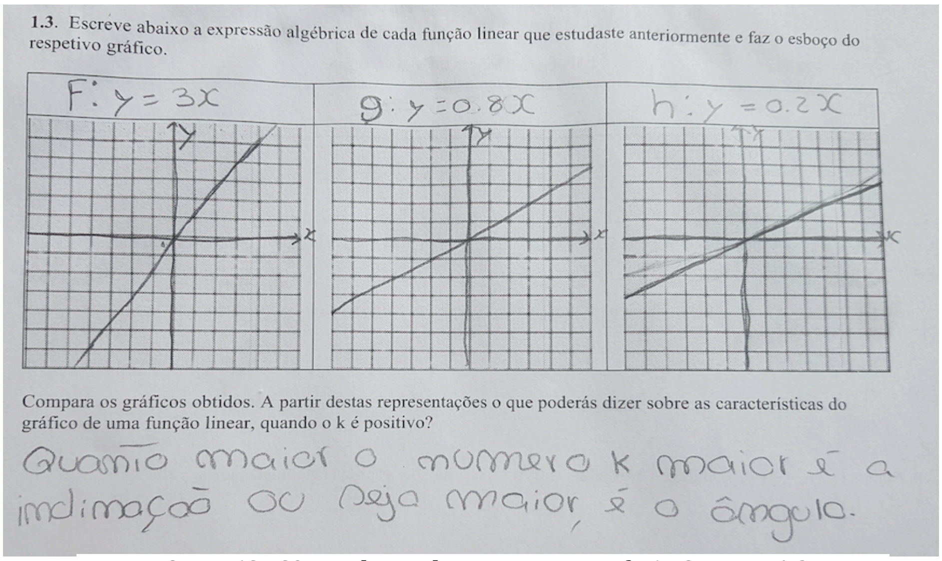


Figura 62– 2ª Resolução de A_{10} e A_{13} - Tarefa 6 - Questão 1.3

Nesta segunda resolução, os alunos escreveram corretamente as expressões pedidas e observam que, para valores de k positivo, quanto maior é o seu valor mais inclinada é a reta. Esta característica está refletida nas representações analíticas e gráficas dos alunos, observando-se que a reta de equação $y = 3x$ está mais inclinada do que a da reta de equação $y = 0,8x$ e esta, por sua vez, mais inclinada do que a reta de equação $y = 0,2x$. No entanto, os alunos não definem escalas nos gráficos apresentados evidenciando que não tiveram a preocupação em representar pontos que pertencessem à função definida analiticamente. Esta razão poderá ser justificada pelo facto de ser pedido apenas um esboço do gráfico e os alunos não sentirem a necessidade de fazer construções com maior rigor.

Alguns alunos procederam à representação de uma escala nos eixos coordenados mas não a tiveram em consideração na representação gráfica da função que definiram algebricamente. Este é um erro cometido por vários alunos evidenciando dificuldades em relacionar a representação algébrica com a representação gráfica de uma função, tal como se pode verificar no exemplo que segue (Figura 63).

Tal como era pedido, as alunas escrevem a expressão algébrica de três funções lineares mas esboçam retas que não correspondem às representações algébricas que definem. Por exemplo, a primeira reta traçada, que é suposto ser a representação gráfica da função f tal que $f(x) = 5x$, contém o ponto (1,3) sendo que este ponto não pertence ao gráfico de f e o mesmo acontece nas outras situações: a segunda e a terceira retas representadas, não contêm, para além do ponto de coordenadas (0,0), nenhum outro ponto que pareça pertencer a cada uma das funções apresentadas algebricamente: $f(x) = 8x$ e $f(x) = 3x$.

Há evidências que os alunos observaram, com a ajuda do *Geogebra*, o comportamento global de cada um dos gráficos obtidos, e relacionaram-no com a representação algébrica, uma vez que as retas que esboçaram são mais inclinadas quanto maior o valor de k ($k > 0$) que consideram na expressão. Ainda assim, o facto dos alunos não terem em consideração que as retas contêm pontos que não pertencem à função definida analiticamente, parece evidenciar dificuldades na transição de uma representação algébrica para uma representação gráfica.

No que diz respeito à apresentação de características do gráfico quando o valor de k é positivo, os alunos apresentam uma justificação irrelevante e que não faz referência explícita aos valores de k escolhidos.

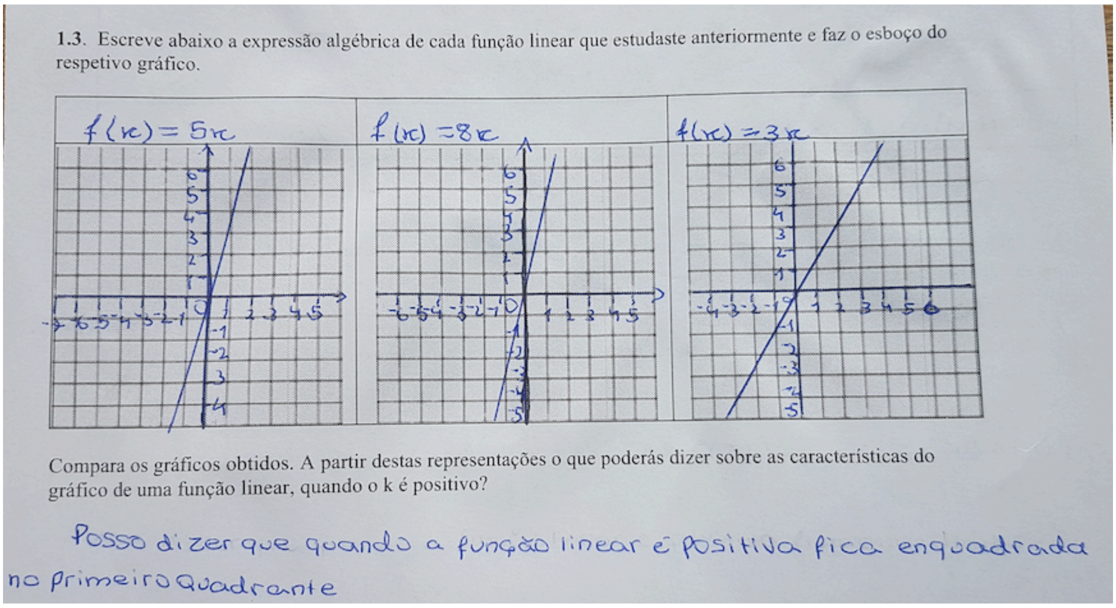


Figura 63 - Resolução de A16 e A24 - Tarefa 6 - Questão 1.3

Três grupos apresentaram as suas representações notando-se um maior rigor nas representações gráficas, uma vez que consideraram, para além do ponto de coordenadas (0,0), o ponto de coordenadas $(1,k)$ como pontos que pertencem à reta de equação $y = kx$ (Figura 64 e Figura 65).

Relativamente à figura 64, na primeira representação gráfica, os alunos apresentam a escala nos dois eixos coordenados e consideram os pontos $(0,5;1),(-0,5;-1),(1,2)$ e $(-1,-2)$ que pertencem ao gráfico da função f definida por $f(x) = 2x$. Na segunda representação não apresentam a escala mas parece que têm em consideração que os pontos $(1,4)$ e $(-1,-4)$ pertencem à reta de equação $y = 4x$. Na terceira representação, escolhem 100 para o valor de

k representando uma reta "muito próxima" do eixo Oy não sendo possível fazer uma leitura "concreta" dos pontos representados. Ainda assim, os alunos evidenciam que, neste caso, a inclinação da reta é mais acentuada o que está de acordo com a justificação que apresentam. Estes alunos fazem referência, ainda que implicitamente, à forma como a reta se posiciona relativamente ao "lado positivo" do eixo Ox e observaram que quanto maior é o valor de k substituído na expressão, mais inclinada é a reta, o que indica que observaram características relevantes nos gráficos obtidos.

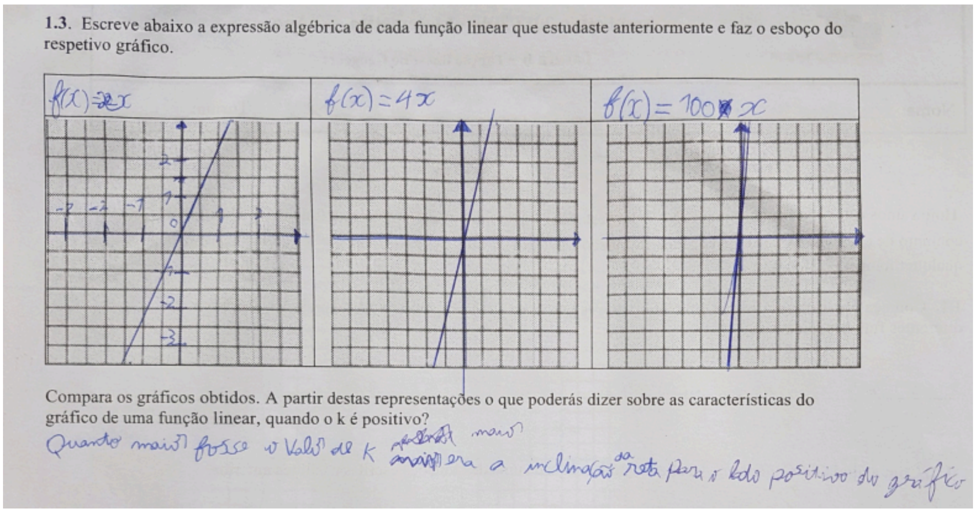


Figura 64 - Resolução de A15 , A21 e A22 - Tarefa 6 - Questão 1.3

Relativamente à resolução seguinte (Figura 65), os alunos obtêm corretamente as retas de equação $y = 3x$, $y = 6x$ e $y = 12x$ e nota-se que tiveram em consideração que cada um dos gráficos tinha de conter os pontos de coordenadas (1,3) , (1,6) e (1,12) respetivamente. Estes alunos não apresentaram nenhuma justificação que evidenciasse conclusões sobre caraterísticas do gráfico de uma função linear quando o valor de k é positivo.

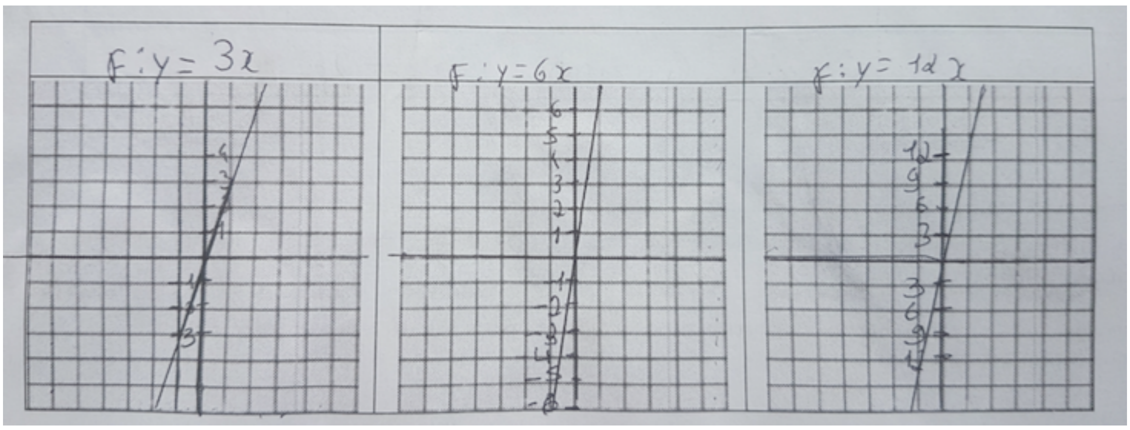
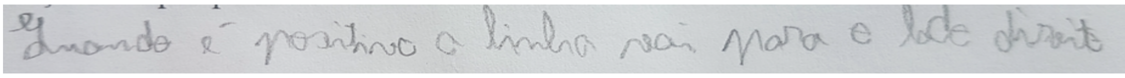


Figura 65 - Resolução de A2 e A18 - Tarefa 6 - Questão 1.3

Apesar das dificuldades inicias na interpretação da expressão $f(x) = kx$, a maioria dos grupos evidenciou ter comparado as características dos três gráficos obtidos com os valores de k substituídos na expressão $y = kx$, apresentando as conclusões retiradas, como se pode verificar, por exemplo, nas figuras 66, 67 e 68.

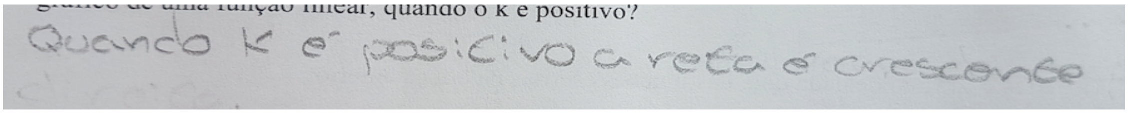
Na figura 66, nota-se que os alunos parecem ter entendido que quando o valor de k é positivo a reta tem declive positivo, usando a palavra "linha" para se referirem à reta e "vai para o lado positivo" para se referirem ao declive da reta (positivo).



Quando é positivo a linha vai para o lado direito

Figura 66 - Conclusão de A_{19} e A_{20} - Tarefa 6 - Questão 1.3

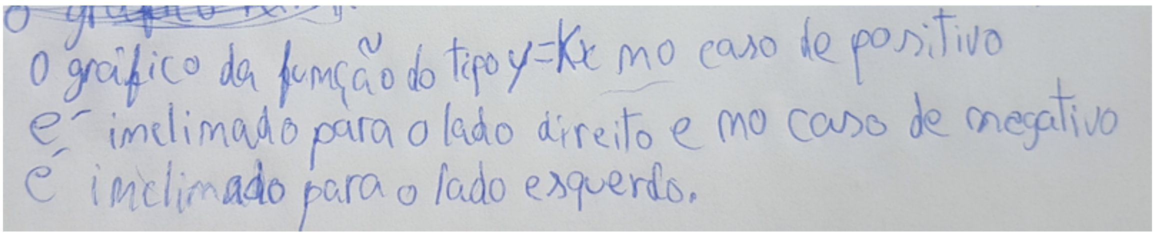
Na figura 67, os alunos registam corretamente as suas conclusões utilizando uma linguagem adequada.



Quando k é posicivo a reta é crescente

Figura 67 - Conclusão de A_3 e A_4 - Tarefa 6 - Questão 1.3

Na figura 68, está representada a resposta de um par de alunos que escreveu as conclusões obtidas quando k é positivo e quando k é negativo. A conclusão dos alunos mostra que compreenderam a relação entre a expressão algébrica e o respetivo gráfico.



O gráfico da função do tipo y=Kx no caso de positivo é inclimado para o lado direito e no caso de negativo é inclimado para o lado esquerdo.

Figura 68 - Conclusão de A_{11} e A_{12} - Tarefa 6 - Questão 1.3

Observei que a interpretação do significado das letras na expressão algébrica de uma função f do tipo $f(x) = kx$ trouxe dificuldades e que apesar de terem apresentado expressões escritas de forma correta, não as compreenderam significativamente. Estes alunos limitaram-se a atribuir a k um valor nas condições pedidas, positivo ou negativo, mantendo o x na escrita das expressões, apenas porque observaram junto de outros colegas que era esse o procedimento pedido.

Apenas os alunos com melhor desempenho na disciplina, revelaram interpretar e relacionar as variáveis envolvidas na representação algébrica de uma função linear e compreender o papel da letra " k ". Ainda assim, no geral, os alunos evidenciaram ser capazes de relacionar o sinal de " k " escrito na expressão algébrica da função com a inclinação da reta que a representa graficamente.

Apenas três grupos evidenciaram o cuidado de assinalar pontos do gráfico que esboçaram, sendo que a maioria limitou-se a fazer um esboço do gráfico da função definida algebricamente desprezando as escalas dos eixos coordenados.

Observou-se ainda que, mesmo definindo escalas apropriadas nos eixos coordenados, alguns alunos representam uma reta que contém a origem do referencial mas não corresponde à expressão algébrica escolhida uma vez que contém pontos que não pertencem à função f que pretendem representar. Este facto parece-me evidenciar que os alunos se focam no comportamento global dos gráficos obtidos, dando pouca atenção a pontos específicos.

O facto das representações gráficas não serem apresentadas com muito rigor pode evidenciar que os alunos manifestam dificuldades na transição entre a representação algébrica de uma função linear e a respetiva representação gráfica. No entanto, tendo em conta que os alunos tinham de representar numa folha quadriculada, os gráficos obtidos num "ecrã" sem quadrículas, parece-me que os levou a focarem a sua atenção no facto de cada gráfico conter o ponto $(0,0)$ e ser uma reta mais ou menos inclinada e desconsideraram pontos específicos do tipo (a,b) sendo a e b constantes não nulas.

Apesar das incorreções referidas, no geral, os alunos foram capazes de relacionar o valor de k escrito na expressão com o declive da reta obtida, que era o principal objetivo desta tarefa. A linguagem pouco adequada nas explicações apresentadas parecem-me ser naturais nesta fase do estudo da função linear, uma vez que este assunto ainda não foi abordado formalmente e a utilização de palavras, como por exemplo declive e inclinação, ainda não foi trabalhada.

A utilização do Geogebra por parte dos alunos foi fácil e não trouxe a nenhum dos grupos dificuldades acrescidas.

5.7. Teste de avaliação

5.7.1. Questão 1 – Definição de função

Esta questão do teste é constituída pelos itens 1.1 e 1.2. No item 1.1 os alunos têm de estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto A, constituído por equações, e os elementos do conjunto B, constituído pelas soluções das equações representadas em A. No item 1.2 os alunos têm de indicar, justificando, se a correspondência que elaboraram define uma função.

A maioria dos alunos estabeleceu corretamente a correspondência pedida, reconheceu que definia uma função e apresentou uma justificação completa e adequada; verificou-se, no entanto, que alguns alunos foram mais rigorosos na linguagem, utilizando a terminologia própria das funções. Na figura 69, os alunos escrevem corretamente a definição de função e utilizam a terminologia adequada: correspondência, conjunto de partida e conjunto de chegada, identificando devidamente, cada um destes conjuntos com as letras A e B, respetivamente.

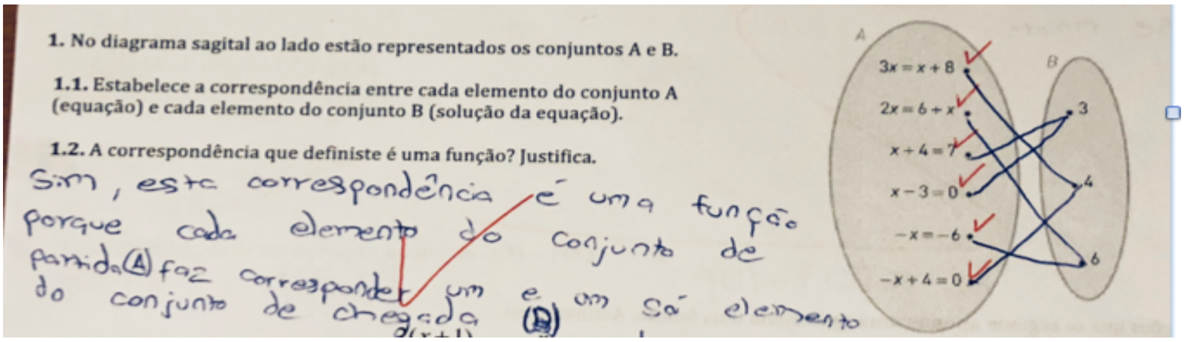


Figura 69 - Resolução de A12 -Teste de avaliação – Questão 1

Na figura 70, o aluno reconhece que a correspondência é uma função, evidencia saber a definição de função e utiliza a palavra “liga” para fazer referência à correspondência.

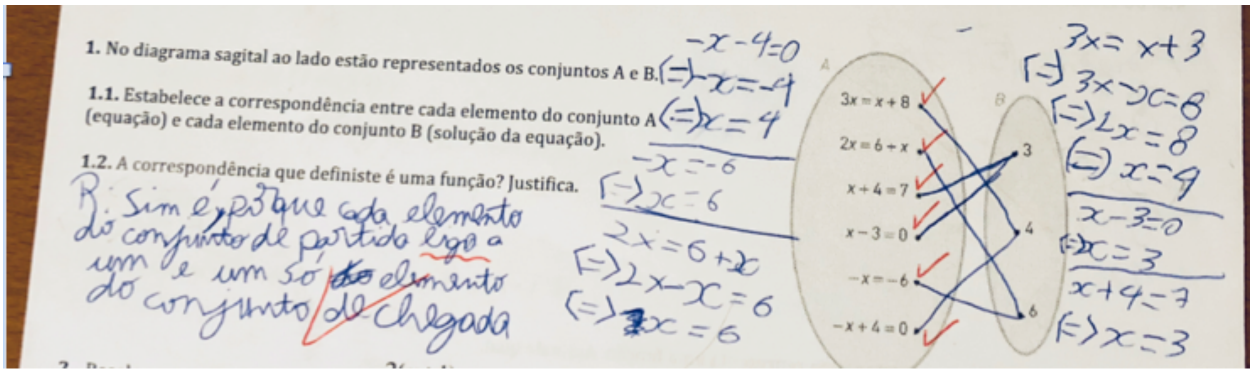


Figura 70 - Resolução de A22 - Teste de avaliação – Questão 1

Apenas dois alunos não responderam corretamente a esta questão. No entanto, um deles mostrou uma boa compreensão da definição de função (Figura 71) uma vez que reconhece que um diagrama sagital não define um função, caso existam no conjunto de partida elementos sem correspondência no conjunto de chegada.

O aluno evidência dificuldades na resolução das duas primeiras equações, não reconhecendo 4 como a solução da equação $3x = x + 8$ nem 6 como a solução da equação $2x = 6 + x$ e por isso não estabelece a correspondência correta. No entanto, no âmbito das funções, o aluno apresenta uma justificação adequada ao erro que comete, no âmbito das equações, evidenciando compreender o conceito de função, afirmando que a "1ª e a 2ª não têm correspondência", o que sugere que se refere à primeira equação $3x = x + 8$ e à segunda equação $2x = 6 + x$, respetivamente.

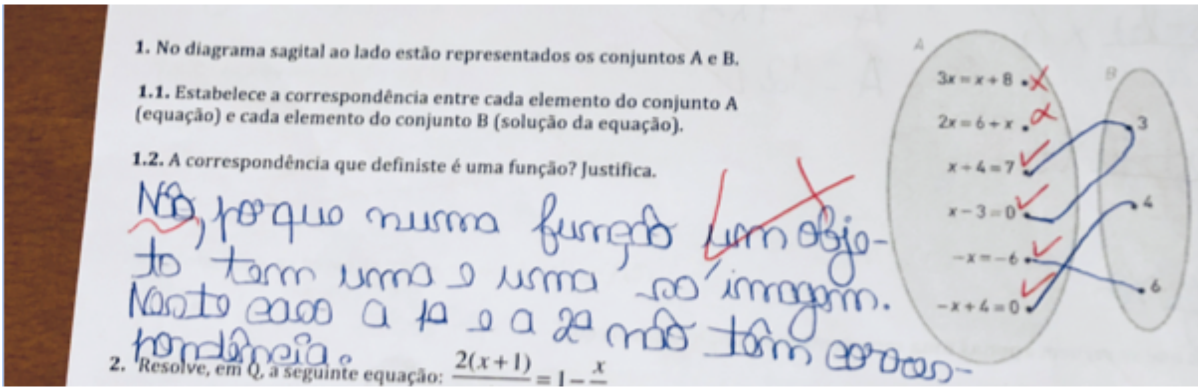


Figura 71- Resolução de A17 - Teste de avaliação – Questão 1

5.7.2. Questão 7 – Determinação de imagens a partir de objetos

A análise desta questão incide apenas sobre o item 7.3, no qual os alunos têm de calcular o valor de $g(1) - f(5)$ sendo que g e f duas funções que estão representadas por uma tabela e por um gráfico cartesiano, respetivamente.

Com a exeção de quatro alunos, todos apresentaram corretamente a resposta a esta questão. Desses quatro alunos, dois apresentam erros de cálculo mas revelam ter feito uma correta leitura e interpretação da expressão $g(1) - f(5)$ e determinado corretamente $g(1)$ e $f(5)$, o que permite concluir que no geral, os alunos são capazes de, dado um objeto, determinar a respetiva imagem a partir de uma representação tabular e de uma representação gráfica.

A figura que se segue (Figura 72), é o exemplo de uma resposta correta de acordo com um erro de cálculo cometido. O aluno faz corretamente a leitura de $g(1)$ e de $f(5)$ mas engana-se ao transformar 2 numa fração equivalente com denominador 2. Ainda assim, nota-se que o aluno interpreta corretamente o que é pedido, determina corretamente a imagem de 1 na tabela apresentada e determina corretamente a imagem de 5 no gráfico cartesiano.

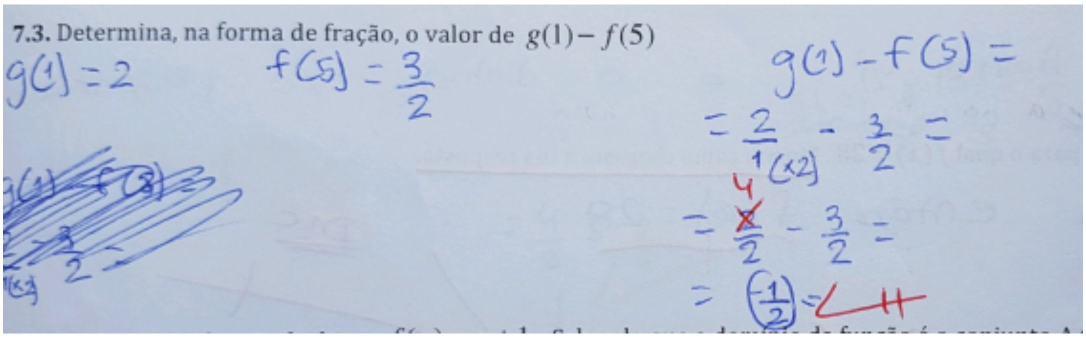


Figura 72 - Resolução de A12 - Teste de avaliação - Item 7.3

A resolução que se segue (Figura 73), é o exemplo de um aluno que apresenta uma resposta errada considerando $f(5)=0$ sendo $f(5)=\frac{3}{2}$ a resposta correta. Este erro parece ser um erro de distração e que o aluno lê a imagem de 5 na função g e não na função f como era suposto, uma vez que o ponto de coordenadas (5,0) pertence ao gráfico cartesiano que representa a função g.

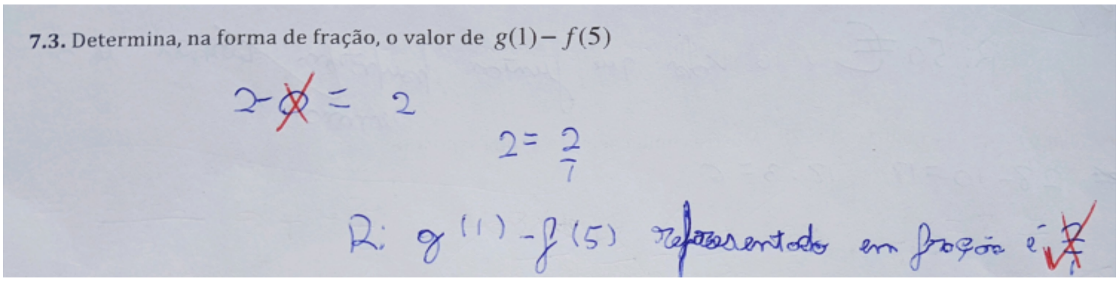


Figura 73 - Resolução de A8 - Teste de avaliação – Item 7.3

Dos 24 alunos da turma, 22 foram capazes de determinar corretamente as imagens correspondentes aos objetos pedidos quer a partir de uma representação tabular quer a partir de uma representação gráfica.

5.7.3. Questão 8 – Transição entre representações (GA)

Na questão 8 do teste de avaliação é apresentada um função f de domínio A definida analiticamente e é pedido que os alunos representem a função num referencial cartesiano. Antes de procederem à marcação dos pares ordenados, os alunos têm de determinar a imagem de cada um dos quatro objetos que constituem o domínio da função, sendo que um dos objetos é um número fracionário.

Nas figuras 74 e 75, apresentam-se as resoluções de dois alunos que representaram os eixos coordenados mas não os identificaram e que escolheram uma escala adequada à marcação dos pontos. Interpretaram corretamente o domínio da função e determinaram as várias imagens, ainda que tenham calculado incorretamente uma delas. O aluno A_6 calcula incorretamente $f(-1)$ e o aluno A_{24} calcula incorretamente $f\left(\frac{7}{2}\right)$.

Na figura 74 pode observar-se que, de acordo com o erro de cálculo cometido, o aluno faz a marcação correta dos pontos cujas coordenadas são números inteiros mas não assinala o ponto de coordenadas fracionárias. O aluno não recorrem à linguagem simbólica apropriada para identificar as imagens determinadas.

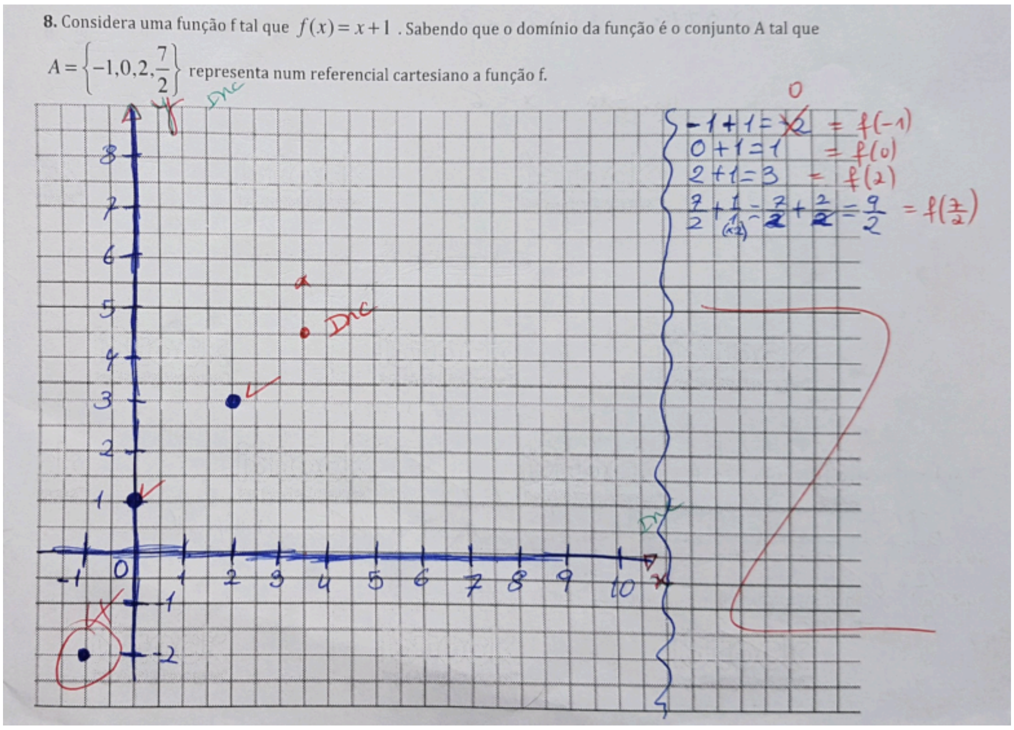


Figura 74 - Resolução de A_6 - Teste de avaliação - Questão 8

Na figura 75, o aluno comete um erro de cálculo considerando que $\frac{7}{2}+1$ é igual a $\frac{8}{2}$, o que evidência dificuldades nas operações com números racionais. No entanto, o aluno faz uma marcação correta de cada um dos pontos determinados e na transição da representação algébrica para a representação gráfica a aluna recorre, como processo auxiliar, a uma representação tabular.

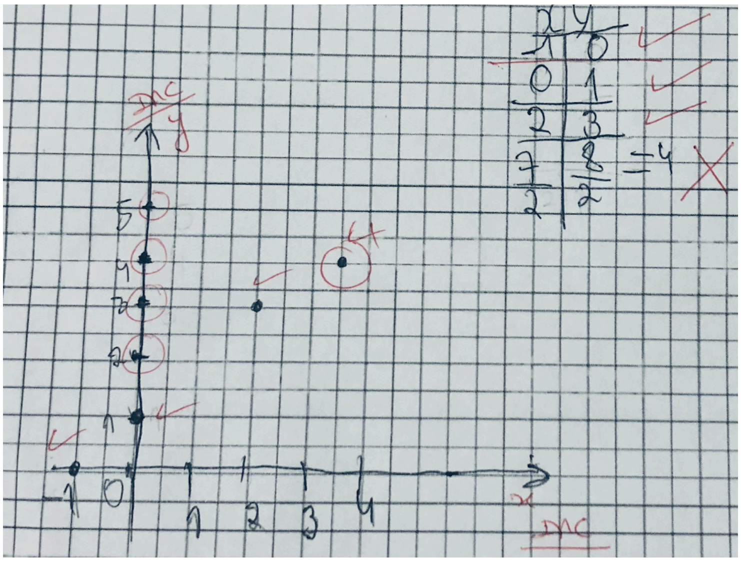


Figura 75 - Resolução de A24 - Teste de avaliação - Questão 8

Na figura 76, é apresentada a resolução de um aluno que determina, utilizando uma simbologia incorreta, as imagens de cada um dos elementos do conjunto A e faz, sem incorreções, a construção gráfica da função f .

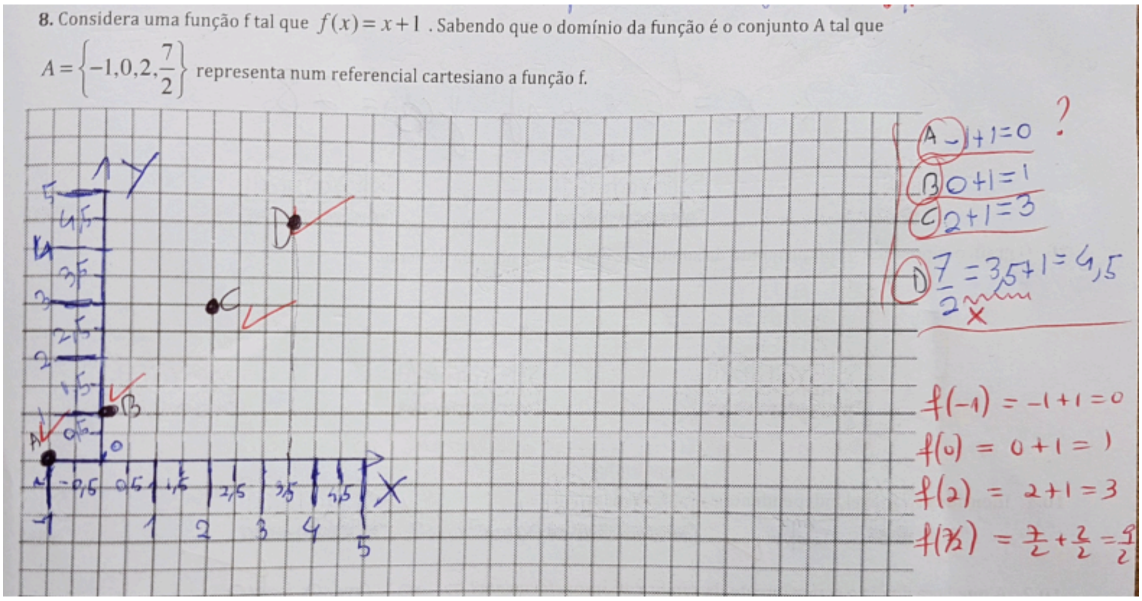


Figura 76 - Resolução de A8 - Teste de avaliação - Questão 8

Na generalidade, no que diz respeito ao cálculo das imagens verificaram-se alguns erros de cálculo e a omissão de simbologia adequada. Apenas dois alunos não apresentaram os cálculos efetuados. Relativamente à construção do gráfico, em geral, os alunos são pouco rigorosos e foram observadas as seguintes incorreções: (i) erros de escala (2 alunos), marcação incorreta de pontos (5 alunos) e (iii) não identificação dos eixos coordenados e/ou sentido dos eixos (7 alunos).

5.7.4. Questão 9 – Determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa

Esta questão é constituída por dois itens: 9.1 e 9.2. No item 9.1 é pedido que os alunos determinem e indiquem o significado do valor de $g(5)+f(5)$, sendo a função g apresentada na forma de uma tabela onde é dada explicitamente a imagem de 5 e a função f representada algebricamente. No item 9.2 pretende-se que os alunos determinem o valor de x para o qual $f(x)=28$ e mostrem como chegaram à sua resposta.

No que concerne ao item 9.1, verificou-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente a esta questão sem apresentar dificuldades, o que evidencia uma interpretação correta do significado de $g(5)+f(5)$, uma boa compreensão de que têm de determinar imagens e o uso de um procedimento adequado para o fazer.

Um aluno não respondeu a esta questão, outro aluno apresentou uma resposta muito incompleta, indicando apenas o valor de $g(5)$ e dois alunos, embora tivessem determinado corretamente o valor de $g(5)+f(5)$, não indicaram o significado do valor obtido.

A figura 77, representa um exemplo de uma resposta incompleta, uma vez que não é apresentado o significado do valor obtido. O aluno indica corretamente o valor de cada uma das parcelas da expressão $g(5)+f(5)$, apresenta os cálculos efetuados na determinação de $f(5)$ e determina o valor pedido.

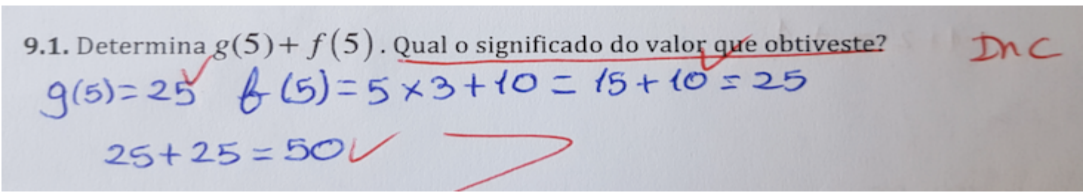


Figura 77- Resolução de A_6 - Teste de avaliação - Item 9.1

Na resolução seguinte (Figura 78), o aluno resolve corretamente a questão, determinando e indicando o significado do valor pedido e apresentando os cálculos. Embora não se verifiquem incorreções na simbologia utilizada, há ausência de simbologia para identificar alguns dos cálculos efetuados: o cálculo de $f(5)$ e o cálculo de $g(5)+f(5)$.

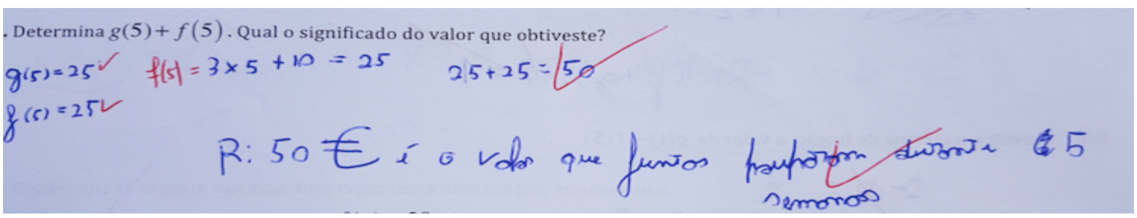


Figura 78 - Resolução de A_8 - Teste de avaliação - Item 9.1

No que concerne ao item 9.2 observou-se que cinco alunos não apresentaram nenhuma resposta a esta questão e que dos restantes dezanove, três apresentaram uma resposta incorreta.

A forma como os alunos mostram que obtiveram o valor de x pedido no enunciado assenta essencialmente em três estratégias de resolução: resolução por "observação/experimentação", resolução por operação inversa e resolução por equação. Estas situações estão exemplificadas, nas figuras que se seguem (Figura 79, Figura 80, Figura 81 e Figura 82).

Na figura 79, o aluno parece observar que 6 é a solução da equação $f(x)=28$, e faz a verificação desse valor recorrendo à expressão algébrica da função f. O valor de x não é apresentado de forma explícita.

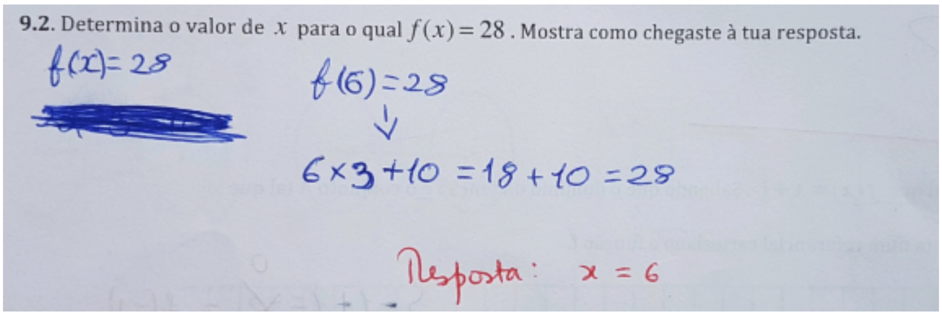


Figura 79- Resolução de A_6 - Teste de avaliação - Item 9.2

A figura 80, representa a resolução de um aluno que parece reconhecer 28 como uma imagem da função e entende que se pretende determinar qual o objeto que lhe corresponde. Assim, sendo a soma do triplo dos objetos com 10, a "regra" para determinar imagens, o aluno determina o objeto pedido recorrendo à operação inversa, ou seja, subtrai 10 à imagem dada e divide o valor obtido por 3. Na forma como mostra a sua resposta, o aluno não utiliza a letra x para identificar o valor 6.

Observa-se que o aluno compreende que 6 é o valor pedido, uma vez que calcula esse valor e, recorrendo à expressão algébrica da função, confirma que $f(6)=28$. A forma como apresenta a sua resposta não é explícita uma vez que, também aqui, não identifica o valor de x que é pedido no enunciado.

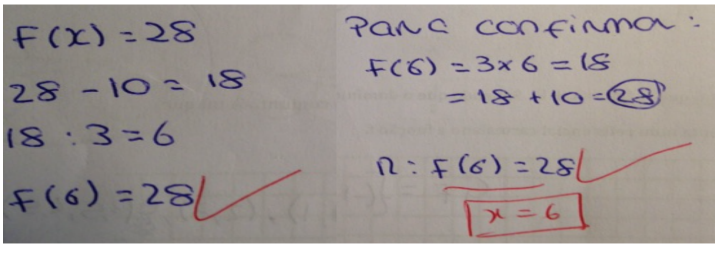


Figura 80 - Resolução de A_{14} - Teste de avaliação - Item 9.2

Na figura seguinte (Figura 81), é apresentado um exemplo de resolução de um aluno que também usa como estratégia a operação inversa para determinar a solução da equação $f(x)=28$. O aluno apresenta de forma clara a sua resposta identificando devidamente o valor de x que representa o valor do objeto pedido no enunciado e não comete nenhum erro ao nível do cálculo nem ao nível de simbologia.

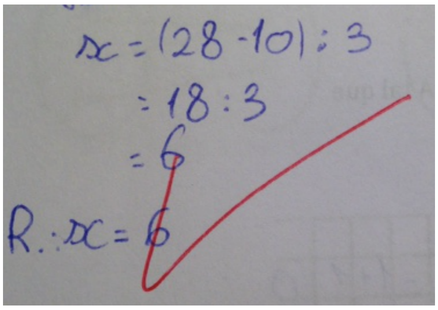


Figura 81 - Resolução de A_9 - Teste de avaliação - Item 9.2

No exemplo que se segue (Figura 82), o aluno mostra como chegou à sua resposta resolvendo a equação $f(x)=28$. O aluno interpreta corretamente o que é pedido e parece compreender que a incógnita da equação representa, no contexto da situação, o objeto que se pretende determinar.

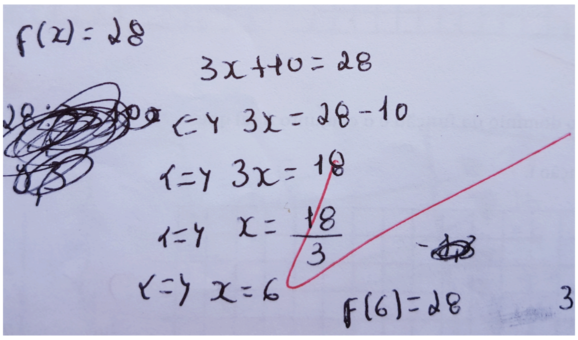


Figura 82- Resolução de A_2 - Teste de avaliação - Item 9.2

Há ainda um aluno que faz uma resolução ligeiramente diferente das resoluções dos colegas (Figura 83). O aluno parece compreender que o valor pedido é 6, uma vez que escreve $f(6)=28$ mas não mostra explicitamente como chegou a 6. No entanto, ao indicar que "se $f(5)=25$ então $f(6)=28$", parece compreender que a diferença entre duas imagens consecutivas é 3, e interpretar o significado do coeficiente de x, neste caso 3, na expressão $f(x)=3x+10$.

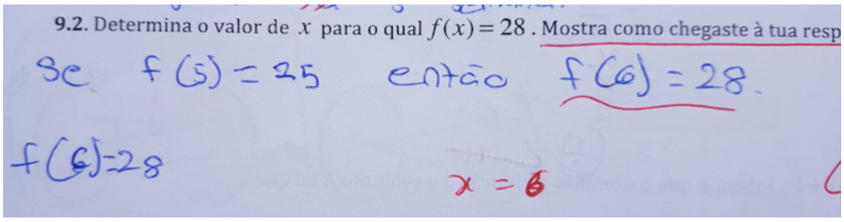


Figura 83 - Resolução de A_{12} - Teste de avaliação – Item 9.2

Os 19 alunos que responderam corretamente a esta questão revelaram uma boa interpretação do que era pedido no enunciado, ou seja, que precisavam de determinar o objeto cuja imagem é igual a 28, o que revela que compreenderam o significado da equação $f(x)=28$.

Quando necessitam de determinar um objeto, dada a respetiva imagem, a maioria dos alunos recorre à operação inversa, não tendo sido evidenciados erros neste procedimento, tendo os alunos seguido corretamente a ordem das operações envolvidas. No entanto, no geral, os alunos não identificam explicitamente o objeto encontrado e/ou os cálculos auxiliares para o determinar.

5.7.5. Questão 10 – Interpretação e relação entre variáveis

Nesta questão era apresentado um gráfico que representava o comprimento da sombra de uma árvore num dia de Verão e eram colocadas questões cujas respostas eram obtidas a partir da leitura e da interpretação de dados apresentados no graficamente.

No quadro que se segue (Quadro 7) apresento um resumo do desempenho dos alunos em cada um dos itens que constituem a questão 10 do teste de avaliação.

Quadro 7 - Resultados obtidos - Questão 10 - Teste de avaliação

Item	Nº de alunos que apresentou corretamente a sua resposta	Nº de alunos que não respondeu	Nº de alunos que apresentou uma resposta incorreta
10.1	21	1	2
10.2	23	1	1
10.3	22	0	2

Das 24 resoluções analisadas, dois alunos, A_{13} e A_{21}, responderam incorretamente ao item 10.1, indicando que a variável independente é o comprimento da sombra e a variável dependente o tempo, evidenciando fazer confusão entre estas duas designações das variáveis e a correspondente representação gráfica em cada um dos eixos coordenados.

Um aluno respondeu incorretamente ao item 10.2, A_{23} , tendo dado como resposta "11:30" , notando-se que o aluno dá pouca atenção à unidade de medida utilizada na construção da escala no eixo das abcissas.

Dois alunos, A_9 e A_{21}, responderam incorretamente ao item 10.3 que apresentaram como resposta 150 e 250 respetivamente, evidenciando terem feito uma leitura errada da informação dada no gráfico.

Apresento uma resposta de um aluno que acertou a questão 10 na totalidade e que é representativa das resoluções apresentadas pela maioria dos alunos da turma (Figura 84).

Relativamente ao item 10.1, o aluno parece conhecer a forma convencional de associar a variável independente ao eixo das abcissas e a variável dependente ao eixo das ordenadas. No que concerne aos itens 10.2 e 10.3 nota-se que, a partir de uma representação gráfica, o aluno foi capaz de interpretar e relacionar as variáveis envolvidas.

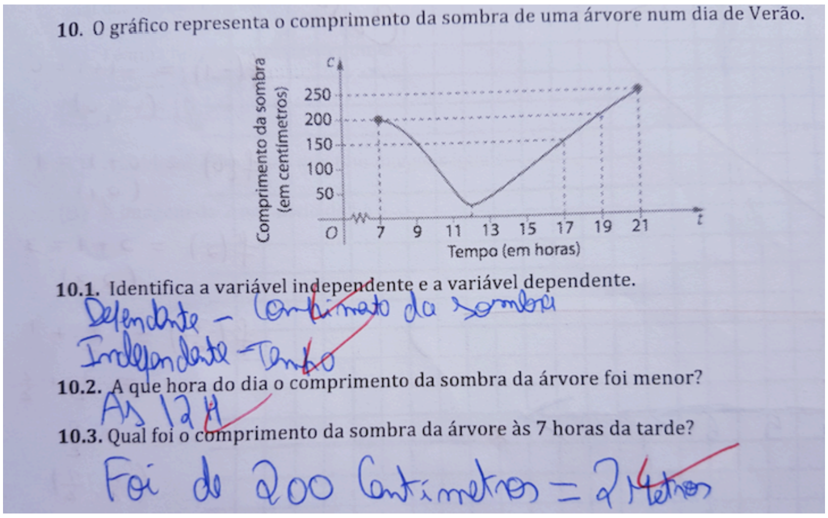


Figura 84 - Resolução de A_4 - Teste de avaliação- Questão 10

Partindo de uma representação gráfica, onde é apresentada informação quantitativa, a maioria dos alunos, não revelou dificuldades na leitura e na interpretação dos valores das variáveis envolvidas. Ainda assim, cinco alunos (dois deles erraram mais do que um dos itens) não responderam ou responderam incorretamente a alguns dos itens da questão 10, o que evidencia alguma confusão na interpretação e na relação entre variáveis representadas graficamente.

6. Considerações finais

Neste capítulo começo por apresentar as respostas às questões de investigação que defini e posteriormente faço uma reflexão final sobre a forma como se concretizou o objetivo geral delineado.

6.1. Conclusões do estudo

Este trabalho incidiu sobre uma experiência de ensino tendo em vista a promoção da aprendizagem das funções, com foco nas representações matemáticas, através de uma abordagem curricular de natureza exploratória, na qual foi valorizada a resolução, em pares, de tarefas de exploração e a posterior discussão coletiva.

Em seguida, são apresentadas as respostas que procurei obter para cada uma das questões de investigação que defini.

1a) *Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à definição de função*?

Ao longo da análise das resoluções escritas pelos alunos na questão 1.2 da tarefa 2 e das suas intervenções nas discussões em grande grupo, verificou-se que os alunos revelaram uma progressiva apropriação da noção de função, como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, bem como uma boa interpretação e entendimento da definição de função. Note-se que, no âmbito dos objetivos da tarefa 2, a definição de função foi escrita pela professora no quadro, antes de dar início à discussão coletiva e não foi dada nenhuma explicação acerca da mesma, apenas pedido aos alunos que a lessem e que, de acordo com ela, identificassem se as representações por eles elaboradas, definiam ou não uma função. No geral, os alunos foram capazes de analisar, cada uma das suas representações em diagrama sagital bem como as apresentadas por outros colegas e concluir se representavam uma função.

Inicialmente surgiram algumas dúvidas, nomeadamente nos casos de representação de uma função quando no conjunto de partida existiam objetos diferentes com a mesma imagem. Alguns alunos evidenciaram considerar que este facto contrariava a afirmação "faz corresponder um e um só elemento no conjunto de chegada", escrita na definição de uma função. A confusão que os alunos fazem entre a definição de função e a definição de função injetiva é já reconhecida como um erro comum dos alunos e identificada em vários estudos sobre a aprendizagem das funções.

À medida que se foi desenvolvendo a unidade de ensino os alunos foram dando evidências de estarem a melhorar a sua interpretação da definição de função e consequentemente resolver as dúvidas apresentadas inicialmente. Como se pode verificar nas suas intervenções, no geral, os alunos entenderam as condições necessárias para que uma correspondência defina uma função e observaram que dois conjuntos e uma correspondência entre si não são suficientes para definir uma função. Por exemplo, na discussão relativa à questão 1.1. da tarefa 2, os alunos concluíram que a correspondência entre um conjunto de polígonos, A, e um conjunto "número de lados", B, pode ou não representar uma função, dependendo do qual se considera ser o conjunto de partida (A ou B).

Quando os alunos são solicitados a indicar e justificar, por escrito, se uma dada correspondência define uma função, no geral, os alunos evidenciaram serem capazes de o fazer, sem revelar dificuldades. Ainda que se possa admitir, tal como sugerido em literatura de referência, que os alunos memorizam sem compreender a definição de função, neste trabalho, não houve evidências desse facto. Esta conclusão parece-me poder ser fundamentada, por exemplo, pelas respostas dadas pelos alunos à questão 1.2.2 da tarefa 2, na qual estes apresentaram de forma completa e clara as suas justificações e à questão 1.2 do teste de avaliação.

A linguagem utilizada pelos alunos para justificar se uma correspondência é função nem sempre foi rigorosa; por exemplo, alguns alunos usam palavras como "ligação" e "seta" para se referirem a uma correspondência. A terminologia própria das funções não se revelou, no geral, uma dificuldade para os alunos, que ao longo do estudo foram capazes de utilizar adequadamente, sobretudo nas suas respostas por escrito, termos como conjunto de partida, conjunto de chegada, objetos e imagens.

1b) *Que aprendizagens revelam os alunos no que diz respeito à determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa*?

No geral, os alunos não revelaram grandes dificuldades na determinação de um objeto conhecida a respetiva imagem nem no cálculo de uma imagem conhecido o respetivo objeto. Partindo de diferentes representações, os alunos compreenderam, interpretando a linguagem própria das funções dada nos enunciados, quando têm de determinar uma imagem e quando têm de determinar um objeto. Por exemplo, dada uma função f e uma constante k, os alunos entendem que têm de determinar um objeto, quando lhes é pedido que determinem o valor de x tal que $f(x)=k$ bem como entendem que têm de determinar uma imagem quando lhes é solicitado que calculem $f(k)$.

Partindo de uma representação algébrica, as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na determinação de um imagem conhecido o respetivo objeto são: (i) resolução por tentativa e erro, (ii) resolução por operação inversa e (iii) resolução por meio de uma equação. Quando optam pelas estratégias (i) ou (ii), alguns alunos apresentam incorreções nas notações utilizadas, sendo que a maioria não faz uso de qualquer simbologia para identificar os objetos calculados e/ou os cálculos auxiliares para os determinar.

Em suma, as incorreções cometidas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem a determinação de imagens a partir de objetos e vice-versa são ao nível do uso da simbologia adequada, evidenciando dúvidas e confusão na utilização das notações x e $f(x)$, sobretudo na determinação de objetos e imagens a partir de uma representação algébrica. Esta evidência foi encontrada sobretudo na análise das respostas dadas pelos alunos nas questões 1.2 e 1.3 da tarefa 3, na qual há alunos que usam a letra x para representar o cálculo de uma imagem ou $f(x)$ para identificar o cálculo de um objeto. Verificou-se ainda, que vários alunos não utilizam qualquer notação para identificar, quando existem, os cálculos efetuados na determinação de objetos e imagens, evidenciando que não sentem necessidade de o fazer ou que têm dificuldades na utilização de notações. Observou-se ainda, em alguns alunos, evidências na confusão entre o papel da letra " x " numa equação e o papel da letra " x " numa expressão algébrica.

Este tipo de dificuldades manifestadas pelos alunos, no âmbito da complexidade da simbologia associada à aprendizagem das funções, foram já diagnosticadas em outros estudos e são reconhecidas por outros autores como Sajka (2003), Matos (2007) e Ponte et al. (2009).

2) *A partir de diferentes representações de uma função, de que forma os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas*?

A partir de uma função representada verbalmente, com referência à semi-realidade, uma das formas como os alunos interpretam e relacionam as variáveis envolvidas é recorrer a representações icónicas e/ou numéricas, que lhes permite observar o modo como os valores de uma das variáveis se altera em função dos valores da outra e assim determinar valores da variável dependente conhecidos os valores da variável independente e vice-versa.

As representações icónicas foram um recurso utilizado pelos alunos, essencialmente numa fase inicial do estudo de relações funcionais, que os ajudou no processo de generalização da relação entre as variáveis, facilitando a escrita de expressões algébricas.

Na questão 1.2 da tarefa 5, uma abordagem de covariação, desenvolvida por iniciativa dos alunos, entre as variáveis em estudo (o aumento de 1 unidade nos valores de x e a consequente mudança nos valores de y, com o aumento de 3 unidades), também ajudou vários alunos a compreender a relação entre as variáveis e a escrever a expressão algébrica pedida.

Pelo que observei em outras tarefas, por exemplo, na tarefa 1, parece-me poder concluir que, no geral, a partir de uma função de variável natural do tipo $y = kx + b$, representada na forma de tabela, os alunos tendem a observar a diferença que existe entre os valores de duas imagens consecutivas, procuram encontrar uma regra geral que relacione as variáveis envolvidas e mostram-se capazes de traduzi-la simbolicamente.

Os resultados obtidos parecem-me concordantes com o que defende Smith (2003), relativamente ao facto de a covariação ser utilizada pelos alunos de uma forma mais intuitiva e permitir a compreensão de uma função através dos padrões de mudança que se verificam em cada uma das variáveis.

Ainda que numa minoria de alunos, verificou-se a tendência em interpretar variáveis como se estas fossem diretamente proporcionais, que não sendo, levou os alunos a determinar incorretamente valores das variáveis e a fazer construções gráficas erradas. Por exemplo, na tarefa 5, relativamente à função g, uma função afim não linear, um grupo de alunos determina $g(13)$ calculando $g(6)+g(6)+g(1)$ e representa-a graficamente por uma reta que contém o ponto de coordenadas $(0,0)$.

Como se pode observar nas tarefas 1, 3 e 5, a partir de relações funcionais representadas algebricamente, inseridas em situações contextualizadas, os alunos são capazes de interpretar globalmente a expressão algébrica, identificar as variáveis em estudo e relacionar cada um dos termos da expressão algébrica (números e variáveis) com o seu significado no contexto da situação.

Na tarefa 6, onde é apresentada uma expressão do tipo $f(x)=kx$ em contexto puramente matemático, vários alunos demonstraram dificuldades em identificar quais as variáveis envolvidas. No início da resolução desta tarefa, o papel que cada uma das letras k e x desempenha numaa expressão do tipo $f(x)=kx$ não foi de imediato entendido por alguns dos alunos, o que parece evidenciar que a interpretação e a relação entre variáveis a partir de representações algébricas, apresentadas em contextos puramente matemáticos, é uma tarefa globalmente difícil e exigente para os alunos.

A interpretação e a relação entre variáveis a partir de uma representação gráfica revelou-se uma tarefa acessível em algumas situações estudadas e uma tarefa difícil em outras. Nos casos em que os alunos estudaram gráficos onde estavam apresentadas, em cada um dos eixos coordenados, as variáveis relacionadas e dados alguns dos seus valores, no geral, os alunos revelaram facilidade em identificar a variável independente, a variável dependente e foram capazes de fazer uma leitura do comportamento global do gráfico e de alguns pontos em particular. No entanto, perante uma situação descrita em linguagem verbal e sobre a qual é apresentada uma representação gráfica sem que sejam definidas as variáveis e sem que seja dada qualquer informação quantitativa, verifica-se que um significativo número de alunos, não é capaz de definir variáveis relevantes e/ou adequadas e cuja relação possa ser traduzida pelo comportamento de um gráfico apresentado.

No geral, a escolha das variáveis e a relação da forma como ambas se relacionam graficamente foi uma tarefa difícil para os alunos. Segundo Ayalon et al. (2014), esta dificuldade dos alunos deve-se ao facto de na maioria das tarefas criadas em sala de aula as variáveis em estudo serem dadas nos enunciados e os alunos trabalharem poucas situações onde sejam eles próprios a construí-las.

Observaram-se também evidências de que existem alunos que não relacionam a natureza (discreta ou contínua) das variáveis com o aspeto do gráfico (pontos ou linha contínua), considerando variáveis discretas em gráficos contínuos, como aconteceu na tarefa 4, e unindo os pontos e obtendo uma reta, em gráficos de variáveis discretas, como aconteceu na tarefa 5.

No geral, foram evidenciadas dificuldades na interpretação e na relação entre variáveis representadas graficamente, nomeadamente na questão 1.1 da tarefa 3 e na situação II da tarefa 4. Partindo de cada uma das restantes formas de representação, não foram evidenciadas dificuldades na interpretação e na compreensão da relação entre variáveis.

As diferentes representações trabalhadas ao longo da unidade de ensino, quer ao nível informal quer ao nível formal (icónicas, tabulares, verbais e simbólicas) ajudaram os alunos a compreender e a generalizar a relação entre as variáveis envolvidas nas situações estudadas e as oportunidades dos alunos em definir, interpretar, relacionar e a refletir sobre as variáveis foram de extrema importância para a compreensão da noção de função como relação entre duas variáveis.

3) *Que dificuldades manifestam os alunos na transição entre os diferentes modos de representar uma função?*

No geral, não foram observadas dificuldades significativas na maioria das situações que implicavam a transição entre representações. Apenas na transição entre uma representação algébrica e uma representação gráfica foram diagnosticadas algumas dificuldades, nomeadamente na questão 1.3 da tarefa 3. No teste de avaliação também foram identificadas algumas incorreções neste tipo de transição. Na questão 8, na qual a representação fonte era algébrica e a representação alvo era gráfica, os alunos apresentaram erros na construção do gráfico e no cálculo de imagens, determinadas usando a representação algébrica. Este facto parece-me evidenciar que as dificuldades de alguns alunos estão relacionadas não só com a conversão, como também com o tratamento de cada uma das representações, algébrica e gráfica.

Quando são apresentadas representações algébricas de uma função f do tipo $f(x)=kx+b$, sendo k e b números concretos, por exemplo na expressão $f(x)=3x+10$ dada na tarefa 5, e pedida a representação gráfica, os alunos evidenciaram três tipos diferentes de dificuldades e/ou incorreções: (i) erros de cálculo na determinação de imagens, (ii) erros na definição das escalas do gráfico e /ou na identificação dos eixos coordenados e (iii) erros na marcação dos pontos coordenados.

Nos casos em que é apresentada uma expressão do mesmo tipo, por exemplo, $f(x)=2x+2$ como a apresentada na tarefa 3 e pedido aos alunos que identifiquem se um determinado gráfico pode ou não representar a função f, sem que sejam apresentados dados quantitativos, as dificuldades foram notórias. Há evidências de que, muitos alunos, não são capazes de estimar valores de pontos do gráfico e reconhecê-los como pontos que não podem pertencem à função representada algebricamente.

No entanto, partindo deste tipo de representação algébrica, os alunos mostraram facilidade na transição para uma representação tabular, reconhecendo facilmente se os pontos apresentados na tabela pertencem à função apresentada de forma simbólica. Neste processo, os alunos utilizam como estratégia, o recurso à expressão algébrica para calcular e validar as imagens correspondentes aos objetos apresentados na tabela.

Quando são apresentadas representações algébricas de uma função f do tipo $f(x)=kx$, sendo k, qualquer valor real, tal como aconteceu na tarefa 6, e solicitada a transição para uma representação gráfica, os alunos manifestam as primeiras dificuldades no tratamento da expressão algébrica dada, uma vez que têm muitas dúvidas sobre o significado da letra k, tal como já foi referido anteriormente. Posteriormente na transição para a representação gráfica, quando pedida uma construção, são evidenciados os erros também já referidos anteriormente. Ainda assim, neste contexto, considero que a generalidade dos alunos foi capaz de relacionar o valor do declive, k, da reta definida algebricamente, com uma maior ou menor inclinação da reta representada gráficamente.

Os resultados parecem indicar que o facto de as funções terem sido estudadas articulando diferentes representações, valorizando as representações verbais e tabulares, mais intuitivas para o geral dos alunos, facilitou o entendimento da relação entre as variáveis e consequentemente a escrita e a interpretação de expressões algébricas. Assim, não foram manifestadas dificuldades na transição entre representações quando a representação alvo foi uma representação algébrica e a representação fonte foi verbal ou tabular.

No geral, os alunos compreenderam a definição de função e foram capazes de analisar uma função a partir de diferentes representações matemáticas. As dificuldades transversais reveladas pelos alunos ao longo da unidade de ensino foram as seguintes: (i) compreender o significado e utilizar adequadamente a simbologia matemática própria das funções e (ii) relacionar variáveis representadas graficamente. As principais incorreções apresentadas foram na construção de gráficos. Em algumas das situações trabalhadas, a transição para uma representação gráfica e a interpretação da relação entre as variáveis, partindo de uma representação gráfica, revelaram-se as atividades cognitivas onde os alunos manifestaram maiores dificuldades.

6.2. Reflexão final

Ao longo da realização deste estudo, tentei compreender como uma metodologia de ensino focada em tarefas que promovem o uso de diferentes representações matemáticas contribui para a aprendizagem das funções.

Na elaboração das tarefas, procurei que, partindo de uma abordagem informal de relações funcionais, valorizando conhecimentos e experiências anteriores dos alunos, a aprendizagem das funções fosse desenvolvida com a introdução gradual e contextualizada de novos conceitos e da simbologia e terminologia próprias das funções. Tal como Ponte et al. (2009), considero que a dificuldade com o uso da simbologia matemática é acrescida quando as notações surgem em situações exclusivamente matemáticos e não em situações contextualizadas. Ainda assim, foram evidentes as dificuldades que os alunos continuaram a manifestar, ao longo da unidade de ensino, no trabalho com a simbologia própria das funções, o que me parece natural, uma vez que a experiência dos alunos a este nível é ainda muito reduzida. O uso adequado de notações só será consolidado com o tempo e com futuras experiência de aprendizagem que promovam naturalmente a necessidade e a importância do uso de simbologia matemática.

Tal como Friedlander e Tabach (2001), considero que o facto de a natureza das tarefas propostas aos alunos influenciarem o recurso a várias representações e as questões colocadas abordarem situações problemáticas e de natureza reflexiva são um contributo nobre na aprendizagem. O facto de todas as tarefas que propus aos alunos incidirem na utilização e na transição de diferentes representações de uma função e, no geral, os alunos terem manifestado uma boa compreensão da noção de função parecem-me evidenciar que, tal como defendem Duval (2006), Triphathy (2008) e Nitsch et al. (2014), o uso de diferentes representações são essenciais à compreensão de um determinado conceito, uma vez que evidenciam diferentes características da sua estrutura e desenvolvem capacidades cognitivas diferentes.

Ao longo da unidade de ensino, os alunos familiarizaram-se com diferentes modos de representações matemáticas (verbal, icónicas, numéricas e simbólicas) e mais em concreto, com as diferentes formas de representação de uma função (descrição verbal, diagramas sagitais, gráficos, gráficos cartesianos, tabelas e expressões algébricas). Numa fase inicial do trabalho, como se pode verificar nas tarefas 1 e 2, os alunos recorreram a representações informais e pré-formais como uma estratégia para interpretar e dar resposta às questões propostas. Posteriormente, após o contacto com novas aprendizagens, os alunos começaram a fazer uso de representações mais formais, tais como gráficos e expressões algébricas. As representações informais dos alunos foram bastante valorizadas, sobretudo nas tarefas 1 e 2 e vieram dar lugar e sentido a representações mais formais nas tarefas 5 e 6.

Considero que o estudo de relações funcionais em situações contextualizadas, com foco nas representações verbais e tabulares, facilitou a compreensão das representações algébricas. A escrita de expressões algébricas revelou-se uma tarefa acessível aos alunos, depois de a análise da forma como as variáveis se relacionam ter sido explorada a partir da descrição verbal e do preenchimento de tabelas. Este resultado parece corroborar o que defendem Gafanhoto e Canavarro (2011), relativamente à obtenção da expressão analítica que, em muitos casos, pode ser auxiliada pela construção de tabelas, uma vez que este tipo de representação força o estabelecimento de relações entre as variáveis.

Tal como Webb et al. (2008), considero que o tempo investido com os alunos em experiências de aprendizagem ao nível pré formal pode reduzir significativamente o tempo necessário à aprendizagem ao nível formal e, tendo em conta o formalismo associado ao tema das funções, o caminho pelas representações simbólicas deve ser feito de forma gradual e cautelosa.

Ao longo da concretização da unidade de ensino foi atribuída muita importância à interpretação e à relação entre variáveis partindo de diferentes representações. Em todas as tarefas foi pedido aos alunos que identificassem e interpretassem o significado de cada uma das variáveis em estudo, de acordo com as situações descritas e que justificassem a razão das suas escolhas. Assim, os alunos tiveram oportunidade de desenvolver ações cognitivas como identificar, construir, descrever e explicar que, tal como afirmam Nitsch et al. (2014) são ações essenciais e altamente relevantes para os alunos no processo de aprendizagens das funções.

Durante as discussões coletivas, promovidas ao longo da unidade de ensino, os alunos puderam apresentar e justificar as suas resoluções, ouvir e discutir as resoluções dos colegas e as sugestões da professora. Para além dos conhecimentos e das estratégias partilhadas, esta parte de trabalho foi um contributo extremamente rico, em particular, para a apropriação da noção de função e, em geral, para o desenvolvimento do pensamento algébrico e de capacidades transversais como o raciocínio e a comunicação. Por exemplo na tarefa 4, talvez a tarefa onde os alunos revelaram maiores dificuldades, a discussão coletiva teve um papel importantíssimo. Só depois da discussão coletiva alguns alunos compreenderam o que era pedido na tarefa e tomaram consciência que as suas respostas estavam no geral incompletas e tinham sido pouco refletidas. Com a discussão em grande grupo, os alunos tiveram a oportunidade de verificar que nem sempre há uma único caminho como método de resolução e não existe apenas uma resposta correta. É importante justificar cuidadosamente as respostas, refletir sobre as resoluções apresentadas e sobretudo acreditar que encontrar obstáculos e/ou errar faz parte dos processos de aprendizagem e que os resultados por si só não são a parte mais importante do trabalho em sala de aula.

O facto de a turma ter trabalhado bem em pares e o facto da partilha de ideias entre os alunos surgir naturalmente contribuiram para aprendizagens com significado e desempenharam um papel fundamental na atitude dos alunos que se revelaram ativos, interessados e responsáveis nas suas aprendizagens.

Considero, como professora e investigadora, que a forma como decorreu este trabalho e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. As tarefas de natureza exploratória e a dinâmica da sala de aula permitiram-me conhecer melhor os alunos, as suas reais capacidades e dificuldades, dando-me a possibilidade de fazer uma preparação mais adequada das aulas (Ponte et al.; 1998). Ainda assim, reconheço que alguns aspetos poderiam ter sido antecipados no planeamento da unidade de ensino, como por exemplo: (i) incluir nas tarefas questões que promovessem a transição de um gráfico para uma expressão algébrica, (ii) colocar valores nos eixos coordenados dos gráficos apresentados na questão 1.1 da tarefa 3, (iii) alterar o gráfico F dado na tarefa 4 e (iv) introduzir a noção de função linear, a partir da sua representação algébrica, antes da aplicação da tarefa 6.

Relativamente ao tratamento dos dados, senti algumas dificuldades na interpretação das respostas dadas pelos alunos, porque apesar das notas adicionais que registei em cada aula, e de alguns registos audio das "discussões entre os alunos" não tive em sala de aula, a oportunidade de acompanhar os raciocínios de todos os grupos de trabalho. Assim sendo, considero que ter optado por fazer entrevistas, como método de recolha documental, poderia ter sido uma mais valia para a análise de alguns dos dados.

A necessidade de ler e refletir sobre diversos estudos na área do ensino das funções e das representações matemáticas, trouxe-me novas visões sobre estes temas e sobre outras práticas letivas, motivando-me a refletir sobre o que têm sido as minhas práticas em sala de aula e de que forma as posso melhorar. A motivação dos alunos na maioria das aulas e a minha motivação em continuar a desenvolver uma prática letiva que incide sobre o trabalho em três fases: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva com sistematização das principais ideias discutidas (Ponte, 2005), veio reforçar a minha convicção de que este ambiente de trabalho deveria ser vivido, em todas as escolas, por alunos e professores, e que certamente contribuiria para o desenvolvimento de aprendizagens efetivas e para um menor insucesso na disciplina de matemática.

Acredito que este trabalho terá deixado aos meus alunos boas bases para a aquisição de futuras aprendizagens matemáticas e espero que, apesar de não poderem ser generalizáveis, os resultados deste estudo possam contribuir, de alguma forma, para outros trabalhos na área do ensino–aprendizagem da matemática.

Referências

Abrahamson, D. (2006). Mathematical representations as conceptual composites: Implications for design. In S. Alatorre (Ed.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Universidad Pedagógica Nacional, Mérida, Yucatán, México: PME–NA.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School Science and Mathematics*, *112*(3), 159–170.

Ainsworth, S.E. (1999). The functions of multiple representations. *Computers* & *Education, 33*, 131–152.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Ayalon. M; Watson A., & Lerman S. (2016). Progression Towards Functions: Students`Performance on Three About Variables from Grades 7 to 12. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 1154–1172.

Bárrios, A. (2011). *Funções usando o software Graph – Um estudo com alunos de um Curso de Educação e Formação (Tipo II)* (Tese de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Boavida, A. M. , Paiva, A. L. , Cebola, G. , Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. Internacional *Eletronic Journal of Mathematics Educations*, *6*(3), 113–133.

Brown, S.A. & Mehilos, M.(2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(9), 532–538.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas* *de Ensino da Matemática* (pp. 255–266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Matemática.

Canavarro, A. P. & Gafanhoto, A. P. (2014). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 113 – 132). Lisboa: P3M–IEUL.

Candeias, A. (2010). *Aprendizagem das Funções no 8.º ano com o auxílio do software Geogebra* (Tese de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Cuoco, A. (2001). *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook.* Reston, VA: *NCTM.*

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino e aprendizagem. In A.P. Canavarro (Org.), *20 Anos de temas na EeM*. (pp. 126–136). Lisboa: APM.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales (tradução).Cali, Colombia: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103 – 131.

Ellis, A. (2011). Algebra in the middle-school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A dialogue from multiple perspectives* (pp. 215–238). Dordrecht: Springer.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. P. (2011). *Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra).* Lisboa: APM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problema solving. In L. English (Ed), *Handbook of internacional research in mathematics education* (pp.178 – 203). New York, NY: Routledge.

Guerreiro, L. (2009). *Papel das representações algébricas na aprendizagem das funções* (Tese de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Instituto de Educação (2016). Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Jesus, N. (2016). *Resolução de problemas com a função afim em diferentes contextos*. (Tese de Mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1–64.

Lopes, A. , Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M., Delgado, M., Bastos, R., & Graça, T. (1990). *Atividades Matemáticas na Sala de Aula*. *Educação Hoje*. Lisboa: Texto Editores.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8º. ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* Universidade de Lisboa, Lisboa .

Matos, A. & Ponte, J. P. (2008). *O Estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano*. *Relime*, *11*(2), 195–231.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2012). A co-construção da generalização nas discussões coletivas: Um estudo com uma turma do 4º ano. *Quadrante*, *XXI*(2), 111–137.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-MEC.

Ministério da Educação (2017). *Aprendizagens Essenciais de 7º ano*. Lisboa: DGE–ME.

Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston, VA: NCTM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2014). *Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9–12*. Reston, VA: NCTM.

Nitsch, R., Bruder R., Leuders, T., & Wirtz. M. (2014). *Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education* - Empirical examination of a.competence structural model. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education, 13* (3). 656–682.

Oliveira Martins et al. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção- Geral da Educação.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs* (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P.; Oliveira, H ; Cunha, H. & Segurado, M. (1998). *Histórias de Investigações Matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Ministério da Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). *Sequência e Funções – Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano*. Lisboa: DGIDC.

Projeto Matemática para Todos (1999). *Investigações Matemáticas na sala de aula – Propostas de trabalho*. Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research- based framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 303-319. DOI 10.1007/s10649–015–9631–1.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function - a case study. *Educational Studies in Mathematics, 53,* 229 - 254.

Santos, L. (2000). *A prática letiva como atividade de resolução de problemas*. (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Saraiva, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via 'exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 19, Supplemento n° 4,* 74–83.

Saraiva, M. J. & Andrade, J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Relime, 15*(2), 137–169.

Skovsmose, O. (2000): Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66–91.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathemat ics* (pp. 136-150). Reston, VA: NCTM.

Stylianou, D. A. (2010). An examination of middle school students´ representation practises in mathematical problema solving through the lens of expert work: towards an arganizing scheme. *Educacional of Studies in Mathematics, 76*(3), 265–280.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Matemática: Funções – 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.

Vinner, S. (1983). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1,2), 149–156.

Webb, D. C., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of Iceberg: Using Representation to Support Student understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *14*(2), 110 – 113.

Legislação consultada

Decreto-lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Anexos

Anexo 1 – Autorização da direção da escola

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas de XXXXXXX,

Eu, Liliana dos Prazeres dos Santos Silva, docente de Matemática nesta escola, venho por este meio solicitar autorização para concretizar na turma X do 7ºano, o trabalho que dará suporte ao meu projeto de Mestrado, a desenvolver sob orientação da Professora Doutora Hélia Oliveira, sobre o tema "Representações matemáticas na aprendizagem das funções". Pretendo proporcionar aos alunos um conjunto de experiências que favoreçam as suas aprendizagens neste importante tema matemático.

Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Para a concretização do relatório deste estudo, necessito de recolher dados respeitantes aos trabalhos dos alunos através de: registos de momentos das aulas, gravações áudio e/ou vídeo, recolha de trabalhos realizados pelos alunos e eventuais entrevistas a alguns alunos.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma para a participação neste trabalho e salvaguardado o anonimato dos alunos.

Atentamente,

Pede deferimento,

____

(Liliana dos Prazeres dos Santos Silva)

X, 24 de Janeiro de 2018

Anexo 2 – Autorização dos encarregados de educação

Exmo(a). Sr(a). Encarregado de Educação,

Com vista à concretização do meu trabalho de Mestrado em Educação, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, cujo tema é "Representações matemáticas na aprendizagem das Funções", pretendo fazer um estudo para compreender a forma como os alunos da turma E do 7º ano desenvolvem a aprendizagem das funções.

Para a concretização do trabalho supracitado serão efetuados registos de momentos das aulas, recolha de trabalhos realizados pelos alunos, gravações áudio e/ou vídeo e eventualmente, entrevistas a alguns dos alunos.

A privacidade do seu educando está garantida uma vez que no relatório do trabalho não serão utilizadas imagens dos alunos, sendo estes identificados com nomes fictícios.

A Direção da Escola foi informada deste trabalho e dos procedimentos necessários relativos à recolha de dados em sala de aula.

Para o efeito, solicito a sua autorização para a participação do seu educando neste estudo manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento adicional.

Contacto: lpsilva@aeXXXXX.edu.pt

Atenciosamente,

A professora, ____

(Liliana dos Prazeres dos Santos Silva)

X, 25 de Janeiro de 2018

□ Autorizo o meu educando, ____________________________________, nº___, da turma E do 7º ano da Escola Secundária de XXXXX a participar no estudo desenvolvido pela professora de matemática, Liliana Silva, sobre o tema "Representações matemáticas na aprendizagem das Funções".

Assinatura: ____

□ Não autorizo o meu educando, ____________________________________, nº___, da turma E do 7º ano da Escola Secundária de XXXXX a participar no estudo desenvolvido pela professora de atemática, Liliana Silva, sobre o tema "Representações matemáticas na aprendizagem das Funções".

Assinatura:____

Anexo 3 – Planificação da unidade de ensino

Nº de aula/ Data	Conteúdos	Indicações Metodológicas	Objetivos específicos
Aula nº 1 23/2/2018	• Relação entre duas variáveis; • Função como relação entre duas variáveis; • Variável dependente e variável independente.	Resolução em pares da Tarefa 1; Discussão coletiva das questões 1.2 e 1.3 da Tarefa 1; Sínteses das ideias e conteúdos abordados (Noção de função como relação entre duas variáveis, noção de variável independente e de variável dependente).	Promover o recurso a representações matemáticas ; Familiarizar os alunos com a noção de variável e com uma relações entre duas variáveis; Criar aos alunos a oportunidade de raciocinarem na forma como as alterações nos valores de uma variável influenciam o comportamento da outra.
Aula nºs 2 e 3 26/2/2018	• Função como relação entre duas variáveis; • Função como correspondência entre dois conjuntos.	Revisão de conceitos: polígono, raiz quadrada, números naturais e números inteiros; Resolução em pares da Tarefa 2 e discussão coletiva das questões 1.2.1 e 1.2.2; Registo no caderno diário da definição de função.	Promover o recurso a representações matemáticas; Distinguir correspondências entre dois conjuntos que definem funções de correspondências que não definem funções; Identificar dificuldades e/ou erros na construção de tabelas e gráficos Cartesianos.
Aula nº 4 1/3/2018	• Notação e linguagem das funções; • Função numérica e função numérica de variável numérica; • Igualdade de funções.	Identificar “objetos, imagens, domínio, conjunto de chegada e contradomínio” a partir das correspondências estabelecidas pelos alunos na questão 1.2.1 da tarefa; Definir, a partir dos diagramas, tabelas e gráficos construídos pelos alunos na tarefa 2, os conteúdos a lecionar nesta aula. Resolução de exercícios do caderno de atividades Exercício 1.1, 1.2 e 1.3 da página 51	Promover o recurso e a transição entre diferentes tipos de representação: verbal, tabular, gráfica e simbólica Identificar: objetos, imagens, domínio, conjunto de chegada e contradomínio Consolidar o conceito de função.

Nº de aula/ Data	Conteúdos	Indicações Metodológicas	Objetivos específicos
Aula nº 5 2/3/2018	• Modos de definir uma função ; • Linguagem das funções; • Notações (y=f(x)); • Igualdade de pares ordenados. •	Representar uma função por diagrama sagital, tabela, gráfico, gráfico cartesiano ou uma expressão algébrica; Construção de gráficos cartesianos e escrita de expressões algébrica; Trabalho de casa - exercícios do manual: 4 da página 136 e 10 da página 141.	Definir e relacionar diferentes tipos de representação: diagramas sagitais, tabelas, gráficos e expressões algébricas como diferentes formas de representar uma função; Identificar vantagens e desvantagens da representação de uma função por cada um dos modos definidos.
Aulas nºs 6 e 7 5/3/2018	• Modos de definir uma função; • Funções definidas por uma expressão algébrica.	Correção do trabalho de casa; Resolução e correção dos exercícios 12 e 13 da página 141 do manual; Resolução em pares da Tarefa 3; Trabalho de casa - exercícios do manual: 11 da página 141 do manual.	Promover diferentes tipos de representação de uma função e a respetiva transição entre si; Representar graficamente e analiticamente uma função conhecidos o domínio, o conjunto de chegada e a expressão algébrica.
Aula nº 8 8/3/2018	• Operações com funções.	Correção do trabalho de casa; Definir soma, diferença, produto de funções e a função f^n de domínio A e conjunto de chegada Q a partir da resolução, do exercício 21 da página 145 do manual.	Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos.
Aula nº 9 9/3/2018	• Leitura e Interpretação de gráficos.	Resolução e correção dos exercícios 27 e 28 da página 147 e do exercício 6 da página 149 do manual.	Identificar variáveis relevantes em determinados contextos reais; Leitura e interpretação de informação dada graficamente; Estudar gráficos que apresentam vários tipos de variação (crescentes, decrescentes, constantes).
Aula nº 10 e 11 12/3/2018	• Variável dependente e independente; • Leitura e Interpretação de gráficos.	Introdução e breve explicação dos objetivos da Tarefa 4. Resolução em pares e discussão coletiva da tarefa da Tarefa 4.	Identificar variáveis relevantes em determinados contextos reais; Distinguir variável independente de variável dependente; Relacionar diferentes tipos de representações: verbal e gráfica.

Nº de aula/ Data	Conteúdos	Indicações Metodológicas	Objetivos específicos
Aula n º 12 12/3/2018	• Leitura e interpretação de gráficos e tabelas; • Funções definidas por gráficos, tabelas e expressões algébricas; • Operações com funções.	Resolução em pares da Tarefa 5.	Interpretar e representar uma função a partir de diferentes representações; Transitar entre diferentes representações de uma função; Efetuar operações com funções de domínio finito definidas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos.
Aula nº 13 15/3/2018	• Funções : generalidades e modos de representação.	Correção da tarefa 5 Esclarecimento de dúvidas para o teste de avaliação. Resolução de exercícios do caderno de atividades.	Consolidar conhecimentos.
Aula nº 14 16/3/2018	Teste de avaliação		
Aulas nºs 15 e 16 19/3/2018	• Função linear.	Apresentação da tarefa 6; Resolução em grupos de 2/3 alunos na sala de computadores, da Tarefa 6; Síntese das conclusões obtidas.	Relacionar representações analíticas e gráficas de uma função do tipo $y=ax$ e analisar a forma como se relacionam entre si; Desenvolver o estudo da função linear num contexto puramente matemático; Construção e interpretação de gráficos obtidos com a utilização do programa *Geogebra*.
Aulas nº 17 22/3/2018	Entrega e correção dos testes de avaliação.		
Aula nº 18 23/3/2018	Continuação da correção do teste de avaliação. Balanço do 2º período Auto - avaliação		

Nº de aula/ Data	Conteúdos	Indicações Metodológicas	Objetivos específicos
Aula nº 19 9/4/2018	• Função linear, função constante. Propriedades.	Identificar fenómenos (com variações constantes) que podem ser representados por uma função linear ou constante; Definir, pela expressão algébrica, função linear e função constante; Construir, com os alunos, tabela e gráfico de uma função linear e de uma função constante.	Estudar funções lineares e funções constantes a partir das suas representações (verbal, tabular, gráfica e algébrica); Designar função constante; Designar função linear; Desenvolver o estudo da função linear em situações contextualizadas.
Aula nº 20 9/4/2018	• Função afim; • Operações com funções afim. Propriedades; • Forma canónica de uma função afim.	Numa situação contextualizada, apresentar uma tabela que defina uma função afim e pedir aos alunos a construção de um gráfico dessa função; Analisar as relações entre o gráfico e a tabela de uma função afim; Identificar regularidades nos valores da variável dependente (e independente) e relacioná-los com o valor de a na expressão $y = ax + b$ Definir função afim; Trabalho de casa- exercícios do manual: 41.1 e 41.3 da página 157.	Analisar funções afim a partir das suas diversas representações; Compreender cada um dos modos de representação de uma função afim e a forma como se relacionam e coordenam entre si; Identificar uma função afim como a soma de uma função linear com uma função constante; Designar por «forma canónica» da função afim a expressão «$ax + b$ », onde a é o coeficiente da função linear e b o valor da constante, e designar a por «coeficiente de x » e b por «termo independente».

3º período

Nº de aula/ Data	Conteúdos	Indicações Metodológicas	Objetivos específicos
Aula nº 21 13/4/2018	• Função de proporcionalidade direta; • Gráficos de proporcionalidade direta.	Recordar grandezas diretamente proporcionais (conceito de proporção e constante de proporcionalidade); Caraterizar uma função de proporcionalidade direta; Leitura dos exemplos 1 e 2 da página 161; Resolução e correção da atividade 45 da página 160 do manual; Trabalho de casa - caderno de atividades : tarefa 5 da página 69 (em folha à parte).	Representar gráfica e algebricamente situações de proporcionalidade direta; Reconhecer e analisar funções de proporcionalidade direta como funções lineares (funções do tipo $y = ax$).
Aula nº 22 16/4/2018	• Gráficos Cartesianos; • Resolução de problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta.	Resolução e correção das tarefas 5 e 6 da página 167 do manual; TPC: Resolução dos exercícios 1, 3, 4 e 11 da ficha nº 7 – *Função de proporcionalidade direta* do caderno de atividades.	Relacionar as diferentes representações de uma função de proporcionalidade direta: tabelas, gráficos e expressões algébricas; Interpretar enunciados, expressos em linguagem natural, que envolvem situações de proporcionalidade direta; Construir gráficos de proporcionalidade direta; Identificar, em contexto de problemas, a constante de proporcionalidade direta interpretar o seu significado; Resolver, em diversos contexto, problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta e funções de proporcionalidade direta .

Anexo 4 – Tarefa 1

Escola Secundária de XXXX

Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano

Funções - Tarefa 1

Nome: ____N.º _____ Turma: _________

1. A Associação de Estudantes da Escola Descobrir está a organizar uma festa no ginásio da escola para a qual é necessário encomendar mesas. Vão ser encomendadas mesas cujo tampo tem a forma de um quadrado. Em cada um dos lados da mesa apenas se pode sentar uma pessoa.

As mesas serão colocadas juntas (encostadas) para formar uma mesa longa em forma retangular.

1.1. No máximo, quantas pessoas será possível sentar se forem colocadas 3 mesas juntas? Mostra como chegaste à tua resposta.

1.2. Completa a tabela. Mostra como chegaste à tua resposta.

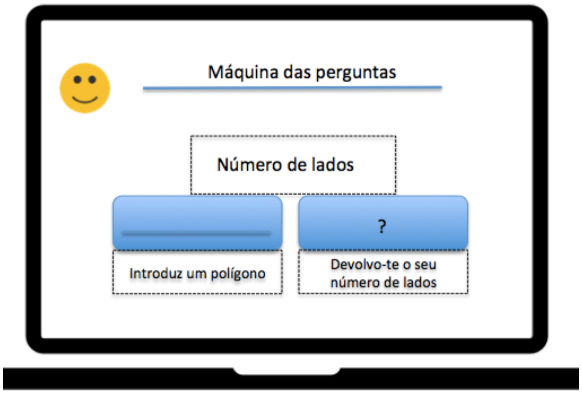
Nº de mesas que são encostadas	Nº máximo de pessoas que é possível sentar
4	
5	
	14
9	
	32

1.3. Descreve uma regra e/ou escreve uma fórmula que permita determinar o número máximo de pessoas que é possível sentar qualquer que seja o número de mesas encostadas.

Anexo 5 – Tarefa 2

Escola Secundária de XXXX Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano Funções - Tarefa 2
Nome: ____N.º _____ Turma: _________

Supõe que estás a utilizar um novo programa no computador, a " Máquina das perguntas". O programa gera, de acordo com um tema escolhido, ecrãs semelhantes ao da figura em baixo.



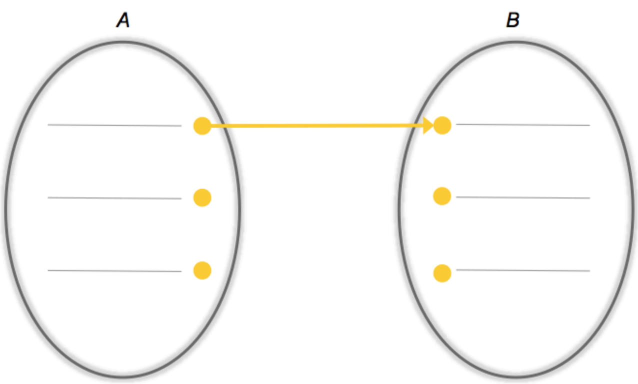
Neste exemplo, o tema é o "Números de lados" de um polígono. Na caixa da esquerda, deve ser introduzido um elemento, neste caso, o nome de um polígono. Na caixa da direita, o programa devolve um novo elemento, neste caso, o número de lados desse polígono.

1.1. Considera para A o conjunto de polígonos que escolheste e para B o número de lados obtidos.

Completa os espaços em branco:

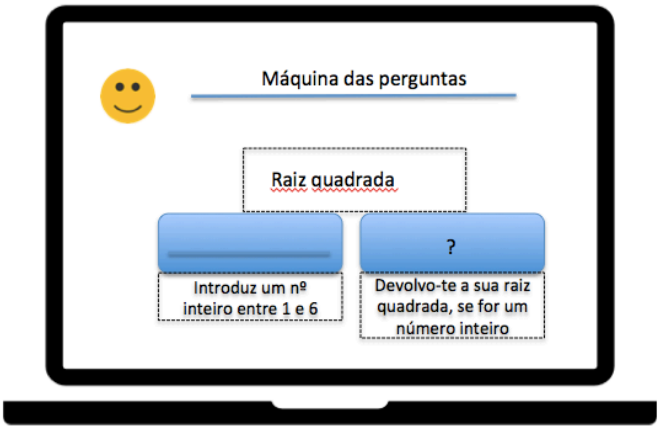
$A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ e $B = \{\_\_, \_\_, \_\_\}$

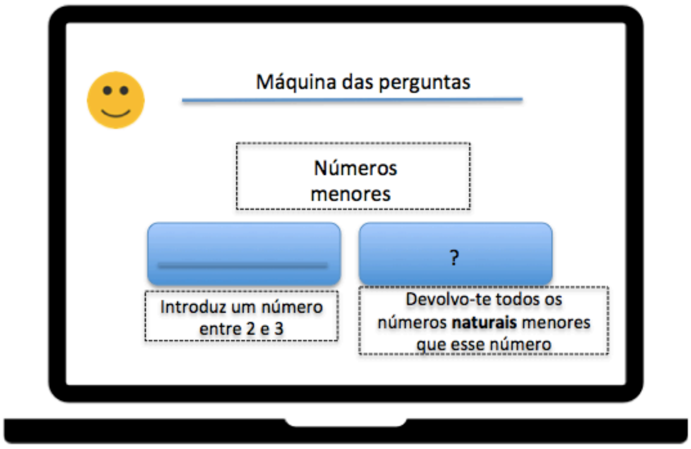
Estabelece a correspondência entre o conjunto A e o conjunto B colocando as setas que associam os elementos correspondentes no seguinte ***diagrama sagital***.

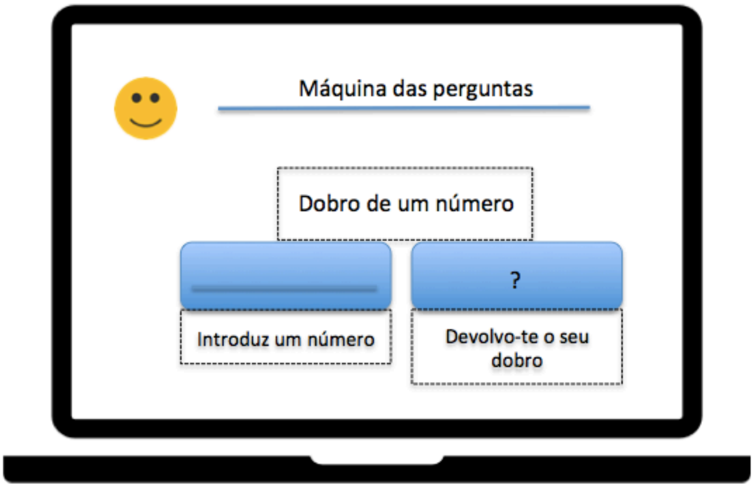


1.2. Os ecrãs em baixo mostram outros três temas da *Máquina de Perguntas*: *Raiz quadrada*, *números menores* e *dobro de um número*.

1.2.1. Para cada um dos temas apresentados, indica **três** elementos que possas introduzir e as respostas que o computador te devolve. Representa cada uma das correspondências que obtiveste num diagrama sagital.







1.2.2. Alguma das correspondências anteriores é uma função? Justifica a tua resposta.

1.3. No tema *Dobro de um número*, considera que vai introduzir no computador cada um dos elementos do conjunto $A=\{0,1,2,3\}$. Considera B o conjunto dos elementos que o computador te devolve.

1.3.1. Representa numa tabela a correspondência entre elementos dos conjuntos A e B. Esta correspondência define uma função? Justifica.

1.3.2. Constrói um gráfico que represente a correspondência anterior.

1.3.3. O gráfico que construíste representa uma função? Justifica.

Anexo 6 – Tarefa 3

Escola Secundária de XXXX

Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano

Funções - Tarefa 3

Nome: ____N.º _____ Turma: _________

Recorda a situação já estudada na aula ....

1. Para uma festa é necessário encomendar mesas quadradas. Em cada um dos lados da mesa apenas se pode sentar uma pessoa.

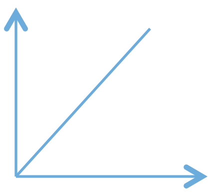
As mesas serão colocadas juntas para formar uma mesa longa em forma retangular.

Considera que a função f que ao número de mesas, x, encostadas umas às outras, faz corresponder o número máximo de pessoas que se podem sentar, é dada pela expressão:

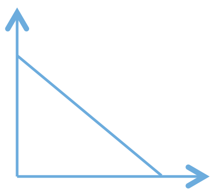
$$f(x) = 2x + 2$$

1.1. Indica justificando em qual das seguintes opções pode estar representada a função f. Indica a razão pela qual excluíste cada uma das outras opções.

Opção (A)



Opção (B)



Opção (C)

x	$f(x)$
0	2
1	4
2	8
3	12

Opção (D)

x	$f(x)$
0	2
2	6
3	8
4	10

1.2. Determina $f(7)$. Qual o significado desse valor no contexto da situação.

1.3. Resolve a equação $f(x) = 32$. Qual o significado da solução desta equação, no contexto da situação?

Anexo 7 – Tarefa 4

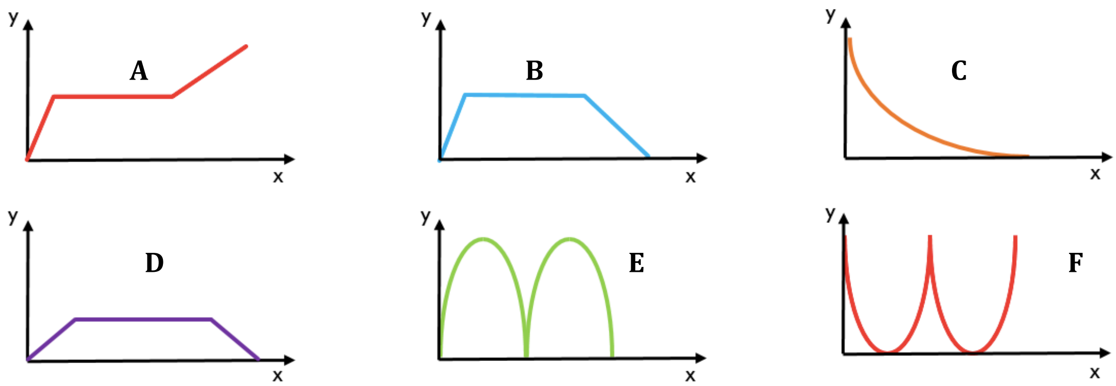
Escola Secundária de XXXX

Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano

Funções - Tarefa 4

Nome: ____N.º _____ Turma: _________

Dos gráficos que se apresentam, indica o que melhor pode descrever cada uma das situações I e II indicadas abaixo. Justifica a razão da tua escolha.

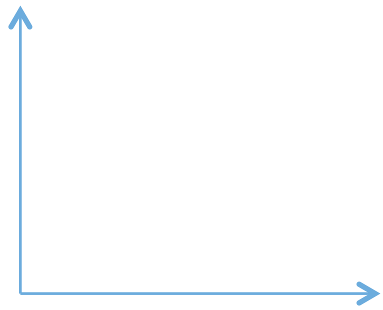


Situação I – O João foi a casa do Miguel devolver-lhe a bicicleta. Até chegar a casa do amigo, o João viajou de bicicleta. Lanchou com o amigo em casa dele e regressou a sua casa a pé.

Identifica o gráfico que melhor pode traduzir esta situação : __________

Escreve em cada um dos eixos coordenados a variável que representa.

Explica a razão da tua escolha.

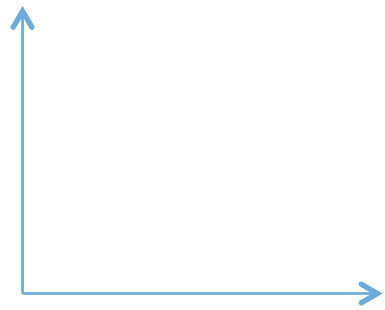


Situação II – Os dois amigos foram ao futebol no fim de semana. Em cada uma das vezes que a equipa que apoiavam marcou um golo, os dois amigos levantaram-se das cadeiras e gritaram.

Identifica o gráfico que melhor pode traduzir esta situação : __________

Escreve em cada um dos eixos coordenados a variável que representa.

Explica a razão da tua escolha.



Anexo 8 – Tarefa 5

Escola Secundária de XXXX

Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano

Funções - Tarefa 5

Nome: ____ N.º _____ Turma: _________

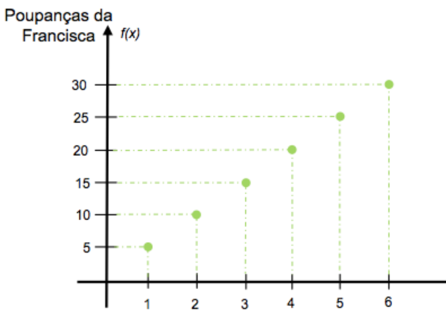
No início de Outubro, a Francisca e a Gabriela decidiram fazer uma poupança até ao final do ano (durante 13 semanas), com o dinheiro que lhes sobra da semanada que cada uma recebe dos pais.

Seja f a função que faz corresponder a cada uma das semanas x, o valor da poupança da Francisca e g a função que a cada número de semanas x faz corresponder o valor das poupanças da Gabriela.

A tabela mostra o valor da poupança da Gabriela (dinheiro acumulado) no final de cada uma das 5 primeiras semanas. Sabe-se que em cada uma das semanas a Gabriela poupa sempre a mesma quantia.

O gráfico descreve parte da função f. Sabe-se que a forma do gráfico se mantém até ao final das 13 semanas.

Semana (x)	Valor da poupança da Gabriela (g(x))
1	13
2	16
3	19
4	22
5	25



1.1. Determina $g(6)+f(6)$. Qual o significado, no contexto da situação, do valor que obtiveste?

1.2. Escreve uma expressão algébrica que defina a função g, ou seja, uma expressão que permita determinar para cada uma das semanas x, o valor da poupança feita pela Gabriela. Explica a razão pela qual consideras que a expressão que escreveste está correta.

1.3. Ao fim das 13 semanas, as duas irmãs decidem juntar as suas poupanças para comprar uma Consola de jogos que custa 100 euros. Averigua se elas terão dinheiro suficiente para fazerem a compra.
Explica como chegaste à tua resposta incluindo pelo menos uma representação de cada uma das funções f e g (diferente da que é dada no enunciado).

Anexo 9 – Tarefa 6

Escola Secundária de XXXX

Ano Letivo 2017/2018 - Matemática – 7º Ano

Funções - Tarefa 6

Nome: ____N.º _____ Turma: _________

Hoje vamos estudar a **função linear**. No 7º ano estudas este tipo de função, como uma função f de domínio e conjunto de chegada Q definida por uma expressão algébrica do tipo $f(x)=kx$ ou $y=kx$ onde k representa um qualquer número racional.

Um dos objetivos da aula é estudares o gráfico de uma função linear.

1.1. Começa por atribuir a k três diferentes **valores positivos** e escreve em baixo as expressões algébricas das diferentes funções que obténs.

$f(x)=$ ____________ ________________ ________________

1.2. Com a ajuda do *Geogebra*, visualiza o gráfico de cada uma das funções escritas na alínea anterior.

Instruções para acederes ao programa *Geogebra*:

GeoGebra

1. Acede ao *Google* e escreve *Geogebra*;

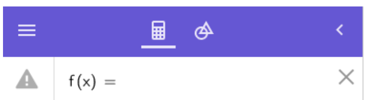
2. Seleciona o 1º link que aparece disponível:
GeoGebra - Dynamic Mathematics

Calculadora Gráfica Geogebra

3. Escolhe a primeira opção: calculadora gráfica

4. Acede à opção "Álgebra" , clicando no ícone de uma calculadora

5. No canto superior direito, no espaço em branco, escreve a expressão algébrica de uma das funções que escreveste na questão 1.1 e visualiza o respetivo gráfico.



Podes introduzir, em cada "janela" uma expressão e visualizar em simultâneo mais do que um gráfico.

Não precisas de apagar uma função para inserires uma nova.

1.3. Escreve abaixo a expressão algébrica de cada função linear que estudaste anteriormente e faz o esboço do respetivo gráfico.

Compara os gráficos obtidos. A partir destas representações o que poderás dizer sobre as características do gráfico de uma função linear, quando o k é positivo?

1.4. Faz um estudo semelhante atribuindo agora a k **valores negativos**.

Compara os gráficos das funções do tipo $y = kx$ no caso em que k é positivo e no caso em que k é negativo. O que observas? Regista as tuas conclusões.

Anexo 10 – Teste de avaliação

Escola Secundária de XXXX

4.º Teste de Avaliação de Matemática – 7º ano

Março de 2018

Nome:____ **N.º** _______ **Turma:**___________

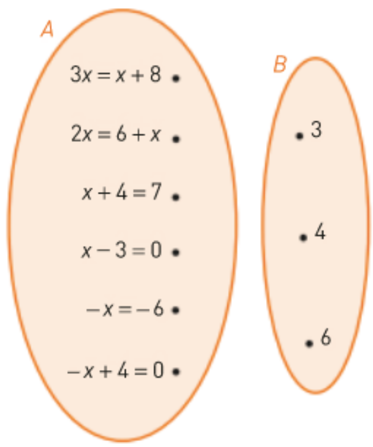
Classificação: ______________________ **Prof:** ________________ **Enc. Educ.:** ________________

As questões 5 e 6 são de escolha múltipla, deves assinalar a opção que consideras correta. Não precisas de apresentar cálculos. Nas restantes questões deves apresentar todos os cálculos que efetuares e/ou justificar de os teus raciocínios .

1. No diagrama sagital ao lado estão representados os conjuntos A e B.

1.1. Estabelece a correspondência entre cada elemento do conjunto A (equação) e cada elemento do conjunto B (solução da equação).

1.2. A correspondência que definiste é uma função? Justifica.



2. Resolve, em Q, a seguinte equação: $\frac{2(x+1)}{3} = 1 - \frac{x}{4}$

3. Determina o valor de x, sabendo que o perímetro do retângulo é igual a 17 cm.

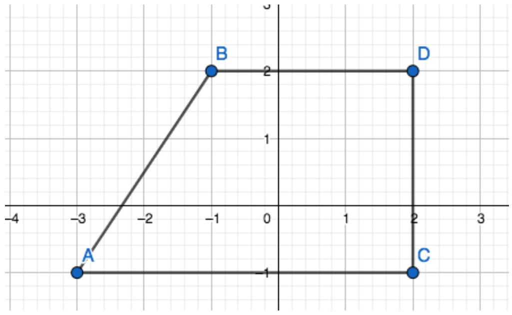
2x

3x + 1

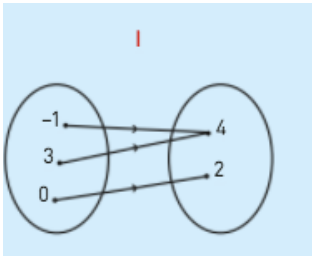
4. No Referencial Cartesiano representado ao lado estão marcados os pontos A, B, C e D.

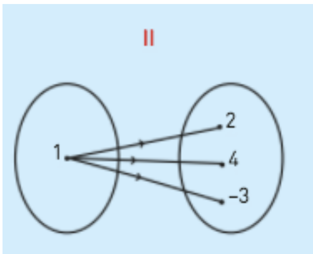
4.1. Escreve as coordenadas dos pontos A, B, C e D

4.2. Determina a área do trapézio [ABDC]



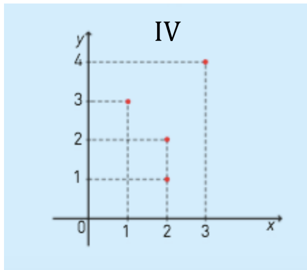
5. Das opções que se seguem **apenas uma** representa uma função. Assinala qual.





III

x	y
2	– 1
3	2
2	3



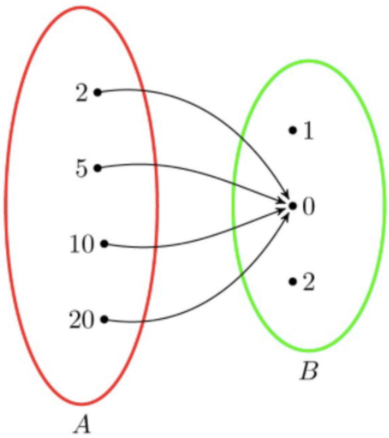
6. Acerca da função f representada no diagrama sagital qual das opções é **falsa**?

(A) f é uma função de variável numérica

(B) $D'f = \{0,1,2\}$

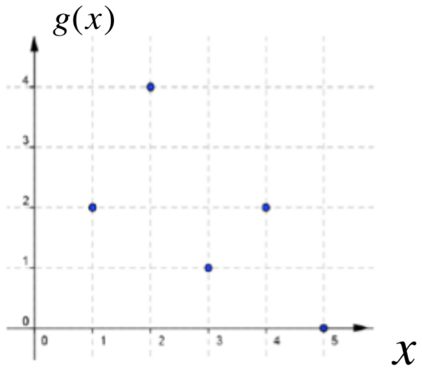
(C) Há objetos diferentes que têm imagens iguais

(D) A imagem de 2 por meio de f é 0.



7. Considera a função f e a função g representadas respetivamente por uma tabela e por um gráfico cartesiano.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	0	-1	$\frac{3}{2}$

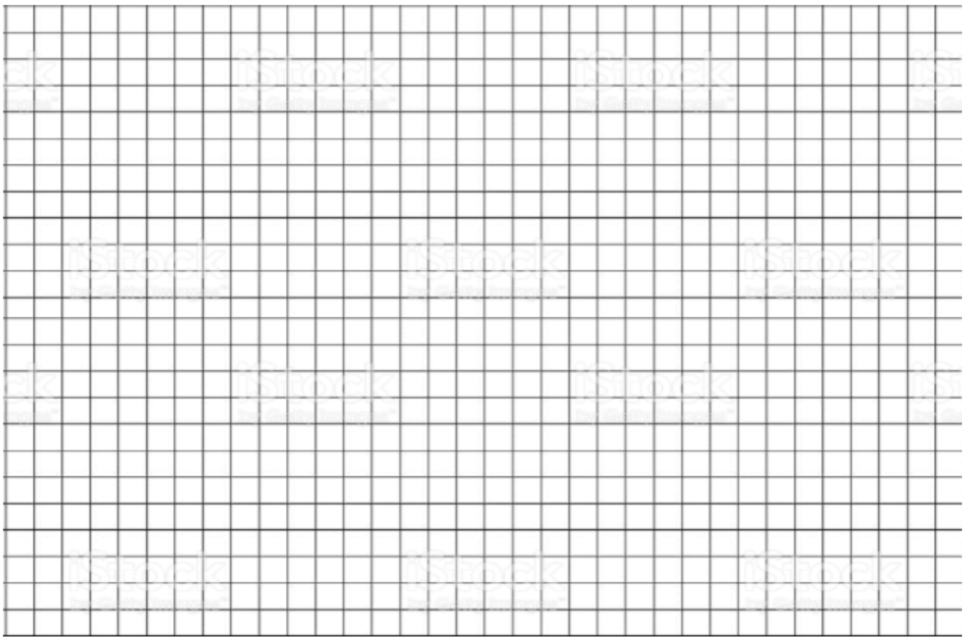


7.1. Escreve o domínio da função g

7.2. Calcula o valor de $(f+g)(4)$

7.3. Determina, na forma de fração, o valor de $g(1)-f(5)$

8. Considera uma função f tal que $f(x)=x+1$. Sabendo que o domínio da função é o conjunto A tal que $A=\left\{-1,0,2,\frac{7}{2}\right\}$ representa num referencial cartesiano a função f.



9. Com o dinheiro que lhes sobra da semanada que cada uma recebe, a Francisca e a Gabriela decidiram fazer, **durante seis semanas**, uma poupança para as férias da Páscoa.

- Seja f a função que faz corresponder a cada uma das semanas x, o valor da poupança da Francisca. Sabe-se que $f(x) = 3x + 10$

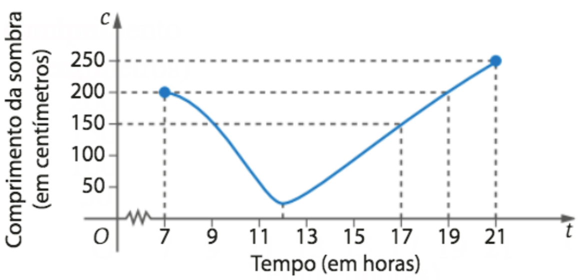
- Seja g a função que a cada semana x faz corresponder o valor da poupança da Gabriela. Parte da função g está representada na tabela.

Semana (x)	Valor da poupança da Gabriela (g(x))
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

9.1. Determina $g(5) + f(5)$. Qual o significado do valor que obtiveste.

9.2. Determina o valor de x para o qual $f(x) = 28$. Mostra como chegaste à tua resposta.

10. O gráfico representa o comprimento da sombra de uma árvore num dia de Verão.



10.1. Identifica a variável independente e a variável dependente.

10.2. A que hora do dia o comprimento da sombra da árvore foi menor?

10.3. Qual foi o comprimento da sombra da árvore às 7 horas da tarde?