

Biblioteca
#G 8844.263
2004 54077

Bserrado

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO



MESTRADO EM: Ciências Actuarias

ASSET LIABILITY MANAGEMENT

Soraia Leonilde Coelho Rodrigues

Orientação: Professor Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

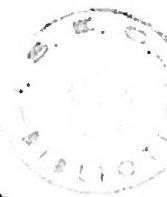
Júri:

Presidente: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Vogais: Professor Doutor Manuel Leote Inglês Esquível
Professor Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Julho de 2004

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO



MESTRADO EM: Ciências Actuarias

ASSET LIABILITY MANAGEMENT

Soraia Leonilde Coelho Rodrigues

Orientação: Professor Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Júri:

Presidente: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Vogais: Professor Doutor Manuel Leote Inglês Esquível
Professor Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Julho de 2004

“Tudo, inclusive o que já nos parece trivial, agora que sabemos alguma coisa, tudo custou esforço, erros, tentativas, até que um resultado fosse construído.”

Carl B. Boyer

História da Matemática



RESUMO

Em Portugal, os primeiros modelos de *Asset Liability Management* foram desenvolvidos pelas companhias de seguros vida. Estes modelos geriam apenas o risco da taxa de juro, assunto chave para as seguradoras.

Actualmente um modelo de *Asset Liability Management* tem como principal objectivo estruturar a carteira de activos representativos da carteira de responsabilidades de uma seguradora de modo a conseguir uma imunização tão perfeita quanto possível relativamente ao risco financeiro gerado pelos movimentos do mercado, ao longo do prazo de duração das responsabilidades.

Para estruturar a carteira de activos é necessário conhecer a estrutura de responsabilidades.

O presente trabalho desenvolve um modelo investimento de forma a obter os retornos acumulados de diferentes tipos de activos e um modelo de avaliação de responsabilidades para projectar as responsabilidades futuras. Estas variáveis são projectadas numa base estocástica, através de um conjunto de numerosos e diferentes cenários, cada um deles com uma determinada probabilidade associada.

Depois de obtidas estas variáveis acumuladas ao fim de vinte e três anos, o horizonte temporal considerado, aplica-se o modelo de selecção de carteiras de activos.

Palavras – chave: selecção de carteira, carteira de *matching*, activos, responsabilidades, risco, retorno esperado.

ABSTRACT

The first models of Asset Liability Management developed in Portugal we are put to reality thanks to the work done by life insurance companies. These models we are more concerned with the risk associated with the income tax, key element for the insurance companies.

Nowadays, an Asset Liability Management model has as its prime purpose the structuring of a portfolio of assets that can match the portfolio of liabilities on an insurance company so that it can be possible to achieve a risk immunization as perfect as possible concerning the financial risk involved in the market oscillations, the duration associated with liabilities.

In order to be possible to provide structure to the portfolio of assets, it is necessary to know the structure of liabilities.

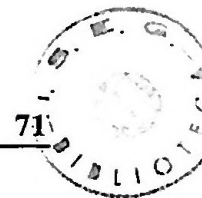
On the present paper it is developed an investment model, in order to be possible to obtain the accumulated returns on different types of assets, and a model to measure the liabilities. Both are used to provide projections on the future liabilities. These variables are projected on a stochastic basis, by means of a numerous set of different scenarios, each one of those with a certain probability associated.

Once these accumulated variables are obtained at the end of a time spread of twenty-three years, the time horizon in here considered, it is then applied the model for the selection of asset portfolios.

Key Words: portfolio selection; matching portfolio; assets; liabilities; risk; expected return.

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE GRÁFICOS	9
AGRADECIMENTOS	10
INTRODUÇÃO	11
1. MODELO DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS DE WILKIE	13
1.1 Inflação	16
1.2 Acções	17
1.2.1 Taxa de Rendimento das Acções	18
1.2.2 Dividendos das Acções	20
1.3 Obrigações a longo prazo	23
1.4 Numerário	26
1.5 Obrigações de Taxa Indexada a um índice de acções	27
1.6 Imobiliário	28
1.6.1 Taxa de Rendimento de Imobiliário	29
1.6.2 Índice de Rendimento Imobiliário	30
1.7 Imobiliário desenvolvido pelos seguidores de <i>Wilkie</i>	31
1.8 Parametrização e Resultados de <i>Wilkie</i>	32
1.8.1 Parametrização	33
1.8.2 Resultados	36
1.9 Método dos Mínimos Quadrados	38
2. MODELO DE SELECÇÃO DE CARTEIRAS DE ACTIVOS	41
2.1 Descrição do Modelo de Dois Activos	42
2.2 Modelo de Dois Activos – Óptica do Actuário	45
2.3 Critério de Eficiência – Dois Activos	48
2.4 Modelo de N Activos – Óptica do Actuário	50
2.5 Critério de Eficiência N Activos	54
2.6 Exemplo de Wise e Wilkie	56
3. AVALIAÇÃO DE RESPONSABILIDADES FUTURAS	62
3.1 Teoria	62
3.2 Aplicação	65



4. APLICAÇÃO PRÁTICA

4.1 Caso de quatro Activos – Acções, Obrigações de longo prazo, Imobiliário e Obrigações indexadas	75
4.2 Caso de dois Activos – Acções e Obrigações de longo prazo	78
4.3 Caso de dois Activos – Imobiliário e Obrigações de longo prazo	79
CONCLUSÃO	80
BIBLIOGRAFIA	81
ANEXOS	83
I – MODELO DE MARKOWITZ – CARTEIRA TRADICIONAL	84
II – DEFINIÇÕES – Processo Estocástico; Modelos Autoregressivos; Processos Estocásticos Estacionários; Ruído Branco; Processo Autoregressivo de primeira ordem e Processo de Médias Móveis de primeira ordem	86
III – LISTAGEM DO PROGRAMA EM VBA – MODELO DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS DE WILKIE	90
IV – LISTAGEM DO PROGRAMA EM VBA – RESPONSABILIDADES FUTURAS DE UM CONTRATO DE SEGURO	104
V – LISTAGEM DO PROGRAMA EM VBA – SELECÇÃO CARTEIRA ACTIVOS	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parametrização – Modelo de Retorno dos Investimentos de *Wilkie* (1982-1999).

Tabela 2 – Parametrização – condições iniciais neutras.

Tabela 3 – Resultados dos retornos de 1000 simulações.

Tabela 4 – Retorno Acumulado por unidade de Activo 1.

Tabela 5 – Retorno Acumulado por unidade de Activo 2.

Tabela 6 – Montante Acumulado de Responsabilidades.

Tabela 7 – Matriz V .

Tabela 8 – Vector c .

Tabela 9 – Vector e .

Tabela 10 – Modelo de Selecção de carteira de *Wise – Wilkie*, $P_1 = 93$; $P_2 = 95$.

Tabela 11 – Modelo de Selecção de carteira de *Wise – Wilkie*, $P_1 = 90$; $P_2 = 100$.

Tabela 12 – Valores Observados por apólice.

Tabela 13 – Pressupostos.

Tabela 14 – Valores de RL.

Tabela 15 – Valores de 20 (das 1000 calculadas) simulações do retorno acumulado por unidade investida.

Tabela 16 – Média e desvio padrão do retorno acumulado por unidade investida.

Tabela 17 – Matriz de Correlações entre os retornos acumulados dos activos em carteira.

Tabela 18 – Vector de Correlações entre o retorno acumulado de cada activo e a taxa de retorno das responsabilidades.

Tabela 19 – Óptica do Actuário para quatro activos – acções, obrigações de longo prazo, imobiliário e obrigações indexadas.

Tabela 20 – Óptica do Actuário para quatro activos – continuação.

Tabela 21 – Óptica do Actuário para dois activos – acções e obrigações de longo prazo.

Tabela 22 – Óptica do Actuário para dois activos – imobiliário e obrigações de longo prazo.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Evolução da Taxa de Inflação Italiana.

Gráfico 2 – Probabilidade de Resgate.

Gráfico 3 – Saídas no final de cada ano / Vencimentos.

Gráfico 4 – Montante médio de saídas no final de cada ano (1000 simulações) / Vencimento – Morte – Resgate.

Gráfico 5 – Taxas de juro.

Gráfico 6 – Histograma do retorno acumulado de ações.

Gráfico 7 – Histograma do retorno acumulado de obrigações de longo prazo.

Gráfico 8 – Histograma do retorno acumulado do imobiliário.

Gráfico 9 – Histograma do retorno acumulado de obrigações indexadas.

AGRADECIMENTOS

A todos os que deram o seu contributo e me ajudaram, ao longo desta árdua mas também enriquecedora tarefa, não poderia deixar de lhes manifestar o meu agradecimento da forma que me é possível. Esta página é dedicada a todos eles.

Ao Professor Doutor Jorge Garcia pela orientação científica que me concedeu, pelo papel motivador que desempenhou na realização deste trabalho, dispensando sempre o seu tempo para ajudar em todas as questões que me surgiram.

Ao Dr. João Cordovil e ao Sr. José Romão pelo interesse demonstrado, pelas suas sugestões, pela prontidão, incentivo e amizade prestados.

Aos meus pais e ao Vítor, o meu muito obrigado por todo o permanente apoio, incentivo e paciência ao longo destes últimos tempos.

INTRODUÇÃO

Na actividade seguradora, ao contrário do que se verifica nas outras actividades, o ciclo de produção é invertido. Primeiro, a companhia recebe os prémios pagos pelos segurados e só apenas mais tarde, caso ocorra sinistro, é que é paga a indemnização.

Durante este ciclo de produção, é imprescindível constituir provisões para assegurar o cumprimento destas responsabilidades. Estas provisões são investidas em activos financeiros que geram um determinado fluxo de rendimento ao longo da sua duração.

É imprescindível estruturar a carteira de activos em função do perfil da estrutura de responsabilidades assumida, tentando encontrar um equilíbrio entre segurança, liquidez e rendibilidade na carteira de investimentos.

O risco na selecção de carteiras de activos está associado à incerteza de diversos indicadores económicos, tais como a taxa de inflação e as taxas de retorno dos investimentos.

Perante esta conjuntura, começou-se a debater no mundo financeiro o tema *Asset Liability Management*, ALM que representa para além dum modelo, uma estratégia permanente para as seguradoras.

Esta dissertação tem como objectivo estudar um modelo de alocação de activos para o caso dos seguros, tendo em conta o valor das responsabilidades a longo prazo e um determinado perfil de risco, num contexto de incerteza de diversos indicadores económicos, financeiros e de mercado.

A dissertação articula-se em quatro capítulos. No primeiro capítulo são abordados os modelos de retorno dos investimentos de *Wilkie* – modelos que permitem a modelização dos retornos de alguns activos financeiros.

No segundo capítulo apresenta-se o modelo de selecção de carteiras de activos com responsabilidades conhecidas desenvolvido por *Wise* e *Wilkie*, na óptica do actuário. Também aqui é apresentado o exemplo de *Wise* e *Wilkie* que foi descrito ao longo dos seus múltiplos *papers*.

No terceiro capítulo desenvolve-se um modelo para avaliar as responsabilidades futuras de uma companhia de seguros vida, referente a um conjunto de apólices de um determinado contrato de seguros.

Por fim, no último capítulo a metodologia definida é posta em prática e analisam-se os resultados de onde se retiram as conclusões.

1 - MODELO DE RETORNO DOS INVESTIMENTOS DE WILKIE

Alasdair Wilkie é um Actuário internacionalmente conhecido e um Professor Universitário Britânico que, desde meados da década de 80, tem vindo a publicar artigos sobre abordagens estocásticas aos problemas da optimização do investimento, envolvendo séries cronológicas de taxas de juro de diversos tipos de investimentos.

Os modelos propostos por *Wilkie* são casos particulares de processos estocásticos devidamente interligados a teorias económicas, hoje mundialmente conhecidos.

O modelo de retorno dos investimentos de *Wilkie* tem como objectivo projectar o retorno dos investimentos em padrões semelhantes aos que se espera que ocorram no futuro, tendo por base a experiência passada e hipóteses o mais realistas possíveis, expressas em termos de médias, desvios padrões, assimetrias, auto-correlações e coeficientes de sensibilidade à inflação.

Wilkie, de modo a simplificar a sua análise, criou classes de activos de acordo com as características que se seguem:

- ✓ Natureza de retorno, em forma de rendimento ou em forma de ganhos de capital;
- ✓ Tipo de rendimento, fixo ou variável;
- ✓ Valor subjacente, estável ou variável;
- ✓ Taxa de retorno, acima ou abaixo da média do mercado;

- ✓ Grau de sensibilidade à inflação;
- ✓ Tipos de riscos inerentes, risco de incumprimento e outros.

Wilkie, desenvolveu um conjunto integrado de modelos estocásticos auto regressivos para a taxa de inflação, para o retorno das acções, retorno das obrigações, retorno do imobiliário e retorno do numerário.

Genericamente, pode dizer-se, que os modelos de *Wilkie* partem de modelos univariados de séries cronológicas aplicáveis à inflação, baseados numa transformação de um processo de *Ornstein – Uhlenbeck*.

No seu conjunto, estes modelos permitem otimizar estratégias de investimento para as seguradoras, desenvolver técnicas de *Matching* de Activo / Passivo e desenvolver a previsão de variáveis económicas no longo prazo.

De referir que *Wilkie* não considera relevante para o seu modelo a compra e venda de activos ao longo da vida futura de um fundo de investimentos. Ele defende que estas transacções representam apenas uma substituição de um activo por outro, e, se não derem origem a alterações do tipo de retorno ou do perfil de risco da carteira, ou ainda, se não acarretarem custos de transacção significativos, não é necessário ter as mesmas em consideração.

Ao longo deste capítulo apresentam-se as equações que permitem modelizar os retornos acumulados dos seguintes activos financeiros:

- ✓ Acções,
- ✓ Obrigações;
- ✓ Numerário,
- ✓ Imobiliário.

O modelo da taxa de inflação participa activamente em todos os outros. O modelo de retorno das acções assenta nas séries temporais do *dividend yield* sobre o índice de preços e do índice de dividendos. O modelo das obrigações a longo prazo, tem por base a *yield* das *consols*. O Modelo de retorno no imobiliário segue um modelo em tudo idêntico ao das acções.

As *Consols*, são um título de rendimento fixo existente no Reino Unido, uma espécie de perpetuidade.

No final deste capítulo (capítulo 1.8.1 e 1.8.2), após a apresentação de todas as equações, vai ser apresentada a parametrização do modelo e os resultados que o modelo produz para as suas variáveis.

1.1 - INFLAÇÃO

Para *Wilkie* é a inflação, enquanto indicador, que funciona como força condutora geral do mercado e controla outros indicadores relevantes pelas médias e correlações interactivas assumidas. Para ele, as flutuações aleatórias na inflação, provocam alterações noutras variáveis, como sendo o preço das acções e obrigações, influenciando assim a taxa de retorno dos investimentos.

Wilkie escolheu a inflação como força condutora do modelo de retorno dos investimentos, por este ser um dos principais factores que determina as responsabilidades, o que permite assegurar uma maior consistência entre activos e responsabilidades.

Sendo as crono-séries da inflação passíveis de modelização por modelos auto regressivos lineares, *Wilkie* preferiu-os em detrimento de modelos não lineares que favoreciam a capacidade de previsão no curto prazo em vez do longo prazo.

O modelo original de *Wilkie* para o valor do índice de preços ao consumidor (IPC- variável que descreve a variação de preços de uma economia, ou seja, a inflação) no momento t , $Q(t)$, é dado pela seguinte equação:

$$Q(t) = Q(t-1)\exp\{I(t)\} \Leftrightarrow I(t) = \text{Log}Q(t) - \text{Log}Q(t-1)$$

onde $I(t)$ é a taxa de inflação durante o ano $t-1$. $I(t)$ por sua vez é modelizada por *Wilkie* através de um processo auto regressivo de 1ª ordem, denotado por $I(t) \sim \text{AR1}(QMU, QA, QSD)$, isto é:

$$I(t) = QMU + QA[I(t-1) - QMU] + QE(t), \text{ com } QE(t) = QSD QZ(t) \quad (1.1)$$

em que:

QMU - Taxa de inflação média;

QA - Parâmetro autoregressivo para a inflação;

$QZ(t)$ - Sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas seguindo uma distribuição normal estandardizada;

QSD - Desvio padrão da inflação.

$QE(t)$ - Resíduo aleatório.

A equação (1.1) pode ser descrita da seguinte forma: a inflação esperada para um dado ano é o resultado do seu valor médio (QMU) conjugado com o efeito do desvio em relação à média do período anterior ($QA[I(t-1) - QMU]$), ao qual é adicionado um factor de incerteza ($QE(t)$).

Em termos práticos, para simular os valores futuros da taxa de Inflação, é necessário estabelecer uma condição inicial, $I(0) = QMU$, e gerar os valores $QZ(t)$ de acordo com a variável aleatória Normal de valor médio igual a zero e desvio padrão igual a um.

1.2 – ACÇÕES

Wilkie subdivide o modelo de retorno das acções em dois: taxa de rendimento das acções e dividendos das acções.

As acções são um activo de rendimento variável, em que o seu retorno está associado aos dividendos futuros e à valorização e desvalorização das mesmas, o que se traduz em potenciais ganhos ou perdas de capital no momento da sua transacção.

Para simular os valores futuros do retorno acumulado das acções do ano t $PR(t)$ Wilkie recorre ao índice de preços das acções, $P(t)$ e ao índice de dividendos das acções (*share dividend index*) $D(t)$, expressos na equação seguinte:

$$PR(t) = PR(t-1) \frac{P(t) + D(t)}{P(t-1)} \quad (1.2)$$

Por sua vez, $P(t)$ é o rácio entre o índice de dividendos das acções $D(t)$ e a taxa de rendimento das acções $Y(t)$ (*share yields*):

$$P(t) = \frac{D(t)}{Y(t)} \Leftrightarrow Y(t) = \frac{D(t)}{P(t)}.$$

A equação anterior baseia-se na constatação que a taxa de rendimento de uma acção é dada pelo rácio entre os rendimentos (dividendos) que ela possa gerar sobre o preço da mesma.

As variáveis $D(t)$ e $Y(t)$ têm comportamentos diferentes, logo as equações que as modelizam são diferentes.

De seguida, apresentam-se os modelos para a taxa de rendimento das acções e para os dividendos das acções.

1.2.1 - Taxa de Rendimento das Acções

A taxa de rendimento das acções é um indicador que estabelece a relação entre o dividendo por acção e o preço da mesma. Destina-se a avaliar a rentabilidade proporcionada por determinada acção.

Este indicador permite a comparação com as rentabilidades proporcionadas por aplicações alternativas, como por exemplo as obrigações.

Wilkie observou que a inflação causa um pequeno efeito nos preços das acções, pois uma inflação elevada provoca distúrbios no mercado de activos e faz cair os preços. Algumas razões para este facto passam a ser aqui apresentadas:

- ✓ Uma inflação elevada é muitas vezes seguida por controlos governamentais nos preços, o que provoca a queda de lucros nas empresas por um certo período de tempo;
- ✓ Um período de preços elevados está muitas vezes associado a aumentos nos salários, logo, dá-se uma apropriação por parte dos empregados dos fundos disponíveis em detrimento dos detentores das acções;

Concluindo, uma taxa de inflação elevada provoca uma expectativa de diminuição dos dividendos, o que faz descer o preço das acções e subir a taxa de rendimento das mesmas.

Wilkie parte do pressuposto que os preços das acções antecipam alterações nos dividendos. A expectativa de dividendos futuros faz aumentar ou diminuir a procura de

acções que provoca oscilações nos preços das mesmas. Se os dividendos que assentam nos lucros do ano precedente tendem a subir, os preços das acções também sobem e a taxa de rendimento das mesmas diminui.

Considere-se as seguintes variáveis:

$Y(t)$ - Taxa de rendimento das acções do ano t .

$D(t)$ - Índice de dividendos das acções do ano t .

$P(t)$ - Índice de preço das acções do ano t .

O modelo original de *Wilkie* para modelizar a taxa de rendimento das acções é sintetizado pela seguinte equação:

$$Y(t) = \exp\{YW I(t) + \log YMU + YN(t)\}$$

ou em termos equivalentes:

$$\log Y(t) = YW I(t) + \log YMU + YN(t)$$

onde $YN(t)$ é o termo auto regressivo de 1ª ordem que se desenvolve na seguinte expressão:

$$YN(t) = YA \times YN(t-1) + YE(t), \text{ com } YE(t) = YSD YZ(t)$$

em que,

YW - Factor para a inflação do ano t ;

YMU - Média da taxa de rendimento das acções, excluída do efeito da inflação;

YA - Parâmetro autoregressivo para o desvio em relação à média do logaritmo do rendimento das acções do ano $t-1$;

YSD - Desvio padrão do resíduo aleatório;

$YZ(t)$ - Sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas seguindo uma distribuição normal, com valor médio igual a zero e desvio padrão igual a um;

$YE(t)$ - Resíduo aleatório.

Podemos explicar esta equação argumentando que o logaritmo da taxa de rendimento das acções é igual à sua média em logaritmo ($\log YMU$), mais YA do seu desvio em relação à média do ano anterior (excluído o ajustamento seguinte), mais uma influência

adicional da inflação do respectivo período e ainda um termo aleatório com média zero e desvio padrão igual a YSD .

Para calcular valores projectados da taxa de rendimento das acções é necessário gerar os valores da variável aleatória independente e identicamente distribuídas, $YZ(t)$ que seguem uma distribuição normal de média zero e desvio padrão um e determinar o desvio do ano anterior $YN(t-1)$.

É necessário estipular uma condição inicial neutra para $YN(t-1)$. Assumindo segundo *Wilkie* que $Y(0) = \exp(YW QMU) YMU$, facilmente se calcula o valor de $YN(0) = \log Y(0) - YW I(0) - \log YMU$ (uma vez que todas as outras variáveis têm valores conhecidos).

1.2.2 - Dividendos das Acções

Os Dividendos das acções correspondem à parcela dos resultados líquidos de uma empresa que são distribuídos pelos accionistas. Os dividendos têm um determinado valor por acção que é pago aos accionistas, geralmente após a aprovação das contas anuais.

Apesar dos lucros das empresas oscilarem ao longo dos anos, os seus gestores preferem suavizar o pagamento dos dividendos aos accionistas, transferindo reservas ao longo dos anos.

Os preços das acções variam em função de alterações nos dividendos, que se baseiam nos lucros do ano precedente. Logo, se estes parecem subir, os preços das acções sobem mas a taxa de rendimento das mesmas cai, visto incidir sobre os dividendos precedentes.

Dependendo os dividendos dos lucros das empresas, estes são obviamente afectados pela inflação. Os dividendos em termos reais, isto é, os dividendos divididos pelo índice de preços do consumidor, são bastante estáveis ao longo do tempo.

Wilkie explica o modelo de dividendos das acções através da inflação, do crescimento real dos dividendos das acções, da taxa de rendimento e do resíduo dos dividendos das acções do período anterior e ainda de factor aleatório.

O índice dos dividendos é modelizado como uma série independente, normalmente distribuída com média zero, o que se traduz na não existência de deslocações ascendentes ou descendentes no valor real dos dividendos.

O modelo proposto originalmente por *Wilkie* para modelizar o comportamento do índice dos dividendos das acções é sintetizado na seguinte equação:

$$D(t) = D(t-1) \exp\{DW DM(t) + DX I(t) + DMU + DY YE(t-1) + DB DE(t-1) + DE(t)\},$$

com $DE(t) = DSD DZ(t)$

onde $DM(t)$ representa a média móvel das taxas de inflação passadas ponderadas exponencialmente,

$$DM(t) = DD \times I(t) + (1 - DD) \times DM(t-1) =$$

$$= DD \times I(t) + DD \times (1 - DD) \times I(t-1) + DD \times (1 - DD)^2 \times I(t-2) + \dots$$

em que:

DW - Factor para a inflação do ano t ;

DD - Factor de desfasamento da inflação;

DMU - Média do crescimento real dos dividendos das acções;

DY - Factor para a taxa de rendimento das acções;

DB - Factor de desfasamento para o resíduo dos dividendos das acções do ano $t - 1$;

$YE(t-1) = YSD YZ(t)$;

$DE(t) = DSD DZ(t)$, Resíduo aleatório, com $DZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e DSD desvio padrão do resíduo aleatório.

O efeito da inflação pode ser descrito em separado pela seguinte expressão:

$$DI(t) = DW DM(t) + DX I(t)$$

onde o primeiro termo representa o efeito retardado de vários anos precedentes e o segundo termo o efeito adicional imediato.

Respeitando o número de parâmetros, podemos assumir a seguinte simplificação

$$DX = 1 - DW$$

logo,



$$DI(t) = DW DM(t) + (1 - DW) I(t);$$

Além desta simplificação, também a notação da equação original pode ser substancialmente simplificada se tomarmos como referência a variação anual do logaritmo natural dos índices das acções, isto é,

$$K(t) = \log \left[\frac{D(t)}{D(t-1)} \right] = \log D(t) - \log D(t-1)$$

A equação $K(t)$ pode ser simplificada para:

$$K(t) = \log \left[\frac{D(t)}{D(t-1)} \right] = DI(t) + DMU + DY YE(t-1) + DB DE(t-1) + DE(t)$$

onde,

$DY YE(t-1)$, representa a influência da variação aleatória da taxa de rendimento das acções do ano anterior, isto é devido, segundo o autor, ao facto dos investidores conseguirem prever alterações nos dividendos das acções e, portanto, incorporarem essas expectativas nos preços das acções.

$DB DE(t-1)$, representa a influência dum alteração do dividendo do ano precedente no dividendo do ano corrente;

A inclusão deste termo pode-se justificar pelo simples facto de os conselhos de administração das companhias listadas nas *stock exchanges*, pagarem normalmente num certo ano, apenas uma parte do ganho adicional obtido nesse ano, e reservarem o pagamento do restante para o ano seguinte.

O raciocínio subjacente a este modelo consiste em considerar que a variação do índice dos dividendos das acções, em logaritmo, é explicada através da função da inflação passada e actual ($DM(t)$) adicionada da média do crescimento real (DMU), de uma influência do resíduo aleatório do ano anterior referente à taxa de rendimento das acções (DY) e também referente ao dividendo das acções (DB), e ainda de um resíduo aleatório.

Depois de modelizadas estas duas componentes, deduz-se o modelo para o índice de preços das acções à custa dos índices anteriores da seguinte forma:

$$P(t) = \frac{D(t)}{Y(t)} \Leftrightarrow \log P(t) = \log D(t) - \log Y(t);$$

Na prática precisamos do valor, $P(0)$ que é obtida pelo rácio entre $D(0)$ e $Y(0)$, onde $D(0)$ pode ser considerado 1, 100 ou 1000 e $Y(0) = \exp\{YW \text{ QMU}\} YMU$.

O retorno acumulado das acções do ano t é determinado pela equação (1.2).

Para simular os valores futuros do retorno acumulado das acções, é necessário estipular um valor inicial para $PR(0)$, que é um valor arbitrário e marca o valor inicial para o retorno acumulado das acções (pode ser 1, 100 ou 1000).

É preciso não esquecer que, os modelos de *Wilkie* são por natureza genéricos, pois visam abarcar todos os activos dentro de uma classe.

As acções constituem uma classe, a dos activos de rendimento variável. O retorno de todas as acções vai ser modelizado pelo mesmo modelo, diferindo apenas nos valores iniciais, neste caso, o valor inicial para o *dividend yield*, $Y(0)$ e da taxa de retorno, $PR(0)$.

1.3 - OBRIGAÇÕES A LONGO PRAZO (de taxa fixa)

Wilkie não apresentou um modelo para o retorno das obrigações, mas considera o modelo de retorno das *Consols* como uma generalização para todos os títulos de rendimento fixo.

As *consols*, são um título de rendimento fixo existente no Reino Unido, uma espécie de perpetuidade. São activos sem valor de reembolso, irredimíveis, e a sua *yield* é a taxa de juro a longo prazo.

Existe um conceito normalmente aceite pelos economistas e que segundo o conceituado economista americano *Irving Fisher*, a taxa de juro nominal corresponde à soma da taxa de juro real (explicada por factores reais) mais a taxa de inflação antecipada, isto é, a expectativa de declínio no poder de compra do consumidor.

David Wilkie investigou o efeito de *Fisher*, analisando os preços históricos das perpetuidades (obrigações perpétuas e irredimíveis que pagam juro fixo regularmente,

isto é, obrigações cuja maturidade é tão longa que, na prática, se considera que têm um comportamento equivalente às perpetuidades) transaccionadas nos mercados de títulos de vários países.

Wilkie seguiu a mesma linha de pensamento de *Fisher*, dividindo a taxa de juro de longo prazo (*yield* das *consols*) no somatório de duas influências ou taxas:

- ✓ Taxa de juro real (acima da inflação), que os investidores esperam obter;
- ✓ Inflação futura esperada.

Wilkie verificou que os rendimentos das acções e dos activos de rendimento fixo sobem e descem conjuntamente. Em geral, um aumento nas taxas de juro de longo prazo está muitas vezes associado a aumentos da taxa de juro a curto prazo, o que têm um efeito negativo nos lucros das empresas, diminuindo as perspectivas de eventuais aumentos de dividendos futuros, provocando uma queda dos preços das acções e uma subida da taxa de rendimento das mesmas.

O modelo para as obrigações a longo prazo proposto por *Wilkie*, onde $C(t)$ representa a taxa de rendimento das obrigações de longo prazo emitidas pelo estado, é dado pela seguinte equação:

$$C(t) = \text{Max}\{CW CM(t) + CR(t); CMIN\} \quad (1.3)$$

com

$$CR(t) = CMU \exp\{CN(t)\}$$

e

$$CN(t) = CA CN(t-1) + CY YE(t) + CE(t), \text{ com } CE(t) = CSD CZ(t);$$

em que,

$CR(t)$ - Parte real;

$CM(t)$ - Corresponde a uma média móvel das taxas de inflação passadas, ponderadas exponencialmente e que se pode expressar analiticamente por:

$$CM(t) = CD I(t) + (1 - CD) CM(t-1);$$

CW - Factor para a inflação;

$CMIN$ - Valor mínimo para a taxa de juro a longo prazo;

CD - Factor de desfasamento da inflação;

CMU - Média do crescimento da taxa de juro real;

CA - Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento das obrigações;

CY - Factor de ligação à taxa de rendimento das acções;

$YE(t) = YSD YZ(t)$ - Resíduos do modelo da taxa de rendimento das acções;

$CE(t)$ - Resíduo aleatório, com $CZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e CSD desvio padrão do resíduo aleatório.

É de salientar que os valores gerados por este modelo estão condicionados; se o valor da simulação for negativo, substitui-se o valor por $CMIN$.

Para iniciar as projecções futuras desta variável $C(t)$, é necessário estabelecer condições iniciais: $C(0) = 100QMU + CMU$ e $CM(0) = QMU$ (considera-se que a inflação passada é igual à média da inflação).

Resolvendo a equação (1.3) em ordem a $CN(0)$, obtém-se a condição inicial (os valores $CM(0)$ e $C(0)$ são conhecidos),

$$CN(0) = \log \left[\frac{C(0) - CW CM(0)}{CMU} \right].$$

Apesar da equação (1.3) descrever o comportamento da taxa de rendimento das obrigações a longo prazo, o nosso objectivo com a modelização desta variável é obter a taxa de retorno acumulada destas obrigações no ano t , expressa na equação seguinte:

$$CR(t) = CR(t-1) \left[\frac{1}{C(t)} + 1 \right] C(t-1);$$

Esta taxa (aleatória) vai ser a utilizada para simular o retorno acumulado das obrigações na aplicação prática.

Para estimar os valores futuros do retorno acumulado das obrigações a longo prazo, é necessário estipular um valor inicial para, $CR(t)$ quando $t = 0$, que é um valor arbitrário e marca o valor inicial para o retorno acumulado das obrigações de taxa fixa (que pode ser 1,100 ou 1000).

1.4 - NUMERÁRIO

O modelo construído por *Wilkie* nesta classe de activos, tem em conta a modelização das taxas de juro a curto prazo, o que permite obter o rendimento do numerário.

Este modelo pode ser aplicado para modelizar a taxa de rendimento das obrigações a um ano.

O modelo proposto por *Wilkie*, para modelizar a taxa de juro de curto prazo no ano t , $B(t)$ é dado pela seguinte equação:

$$B(t) = C(t) \exp\{-BD(t)\};$$

onde,

$$BD(t) = BMU + BA [BD(t-1) - BMU] + BE(t), \text{ com } BE(t) = BSD BZ(t);$$

Podemos igualmente escrever a seguinte equação,

$$\log B(t) = \log C(t) - BMU + BN(t); \quad (1.4)$$

onde,

$$BN(t) = BA BN(t-1) + BC CE(t) + BE(t), \text{ com } BE(t) = BSD BZ(t);$$

sendo, $BC.CE(t)$ uma influencia extra no resíduo aleatório do modelo das obrigações de taxa fixa. *Wilkie* diz que, esta influência pode ser considerada nula, logo a expressão acima pode ser simplificada pela que se segue,

$$BN(t) = BA BN(t-1) + BE(t), \text{ com } BE(t) = BSD BZ(t);$$

em que,

BMU - Média do logaritmo do rácio das taxas de juro (é igual ao logaritmo das taxas de juro a longo prazo / taxas de juro a curto prazo);

BA - Parâmetro autoregressivo da taxa de juro de curto prazo;

$BE(t)$, Resíduo aleatório, com $BZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e BSD desvio padrão do resíduo aleatório.

Para projectar os valores para a taxa de juro a curto prazo, que permite obter a taxa do retorno acumulado do numerário, é necessário estabelecer uma condição inicial neutra para $B(0)$ e partir daí obter o valor de $BN(0)$.

Consideremos $C(0) = 100 QMU + CMU$ (valor conhecido do modelo das obrigações de taxa fixa) e $B(0) = \exp(-BMU) C(0)$. Resolvendo a equação (1.4) em ordem a $BN(0)$, obtém-se $BN(0) = \log B(0) - \log C(0) + BMU$ (o valor de $C(0)$ e $B(0)$ são conhecidos).

Este modelo, para além de modelizar a taxa de juro a curto prazo permite simular a taxa de retorno acumulado do numerário no ano t , expressa pela seguinte equação:

$$BR(t) = BR(t-1)[1 + B(t-1)];$$

Esta taxa (aleatória) vai ser a utilizada para simular o retorno acumulado do numerário na aplicação prática.

Para estimar os valores futuros do retorno acumulado do numerário é necessário estipular uma condição inicial, $BR(t)$ quando $t=0$, que é um valor arbitrário e marca o valor inicial para o retorno acumulado do numerário (pode ser 1,100 ou 1000).

1.5 - OBRIGAÇÕES DE TAXA INDEXADA A UM INDICE DE ACÇÕES – Obrigações de Taxa Variável

O modelo original proposto por *Wilkie* para o logaritmo da taxa de rendimento real, dada por uma obrigação de taxa indexada no ano t – variável $R(t)$ – pode ser descrita na seguinte equação:

$$\log R(t) = \log RMU + RA [\log R(t-1) - \log RMU] + RE(t), \text{ com } RE(t) = RSD RZ(t);$$

em que,

RMU - Valor médio da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

RA - Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

$RE(t)$ - Resíduo aleatório, com $RZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e RSD desvio padrão do resíduo aleatório.

Também aqui, temos uma condição inicial em termos práticos para definir uma trajetória futura da variável em questão, sendo esta, $R(0) = RMU$ (o rendimento das obrigações de taxa variável no ano zero é igual ao seu valor médio).

A equação acima apresentada sintetiza o comportamento da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada, contudo, o verdadeiro objectivo da modelização desta variável é a obtenção do retorno acumulado das obrigações de taxa indexada. Este é dado pela seguinte equação:

$$RR(t) = RR(t-1) \left(\frac{1}{R(t)} + 1 \right) R(t-1) \left[\frac{Q(t)}{Q(t-1)} \right];$$

Esta taxa (aleatória) vai ser a utilizada para simular o retorno das obrigações de taxa variável no exemplo do modelo de selecção de carteiras, apresentado no capítulo IV.

Para estimar os valores futuros do retorno acumulado das obrigações de taxa variável é necessário estipular uma condição inicial para $RR(t)$ quando $t=0$, que é um valor arbitrário e marca o valor inicial para o retorno acumulado do numerário (pode ser 1,100 ou 1000).

1.6 - IMOBILIÁRIO - Wilkie

À semelhança do modelo de retorno das acções, *Wilkie* subdivide este modelo em dois: taxa do rendimento do imobiliário e índice de rendimento do imobiliário.

O modelo para o retorno acumulado dos investimentos em imobiliário durante o ano t é dado pela variação conjunta do índice de preços do imobiliário $A(t)$ e do índice do rendimento do imobiliário $E(t)$, expressos na equação seguinte:

$$AR(t) = AR(t-1) \frac{A(t) + E(t)}{A(t-1)} \quad (1.5)$$

Por sua vez $A(t)$ é dado pelo rácio entre o índice de rendimento imobiliário $E(t)$ e a taxa de rendimento imobiliário $Z(t)$, isto é,

$$A(t) = \frac{E(t)}{Z(t)} \Leftrightarrow Z(t) = \frac{E(t)}{A(t)}$$

A equação anterior traduz que a taxa de rendimento do imobiliário é definida através do rácio entre os dividendos recebidos e o custo (preço) do investimento imobiliário.

O retorno acumulado com o investimento em imobiliário é obtido a partir da variação dos preços somado com o rendimento gerado pelos imóveis. Como o modelo se está a aplicar à globalidade dos investimentos imobiliários e não a um investimento imobiliário específico, utilizam-se índices, quer de preços quer de dividendos.

1.6.1 - Taxa de Rendimento de Imobiliário

Wilkie define a taxa de rendimento de imobiliário no ano t , como $Z(t)$. A equação proposta para esta variável é:

$$Z(t) = \exp\{\log ZMU + ZA[\log Z(t-1) - \log ZMU] + ZE(t)\}, \text{ com } ZE(t) = ZSD ZZ(t);$$

em que,

ZMU - Taxa média de rendimento de imobiliário;

ZA - Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento do imobiliário;

$ZE(t)$ - Resíduo aleatório, com $ZZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e ZSD desvio padrão do resíduo aleatório.

O logaritmo da taxa de rendimento de imobiliário é explicado pelo seu valor médio ($\log ZMU$), por uma proporção (ZA) do seu desvio em logaritmo em relação à média do período anterior e ainda um factor aleatório ($ZE(t)$) de média zero e desvio padrão ZSD .

Consideremos uma condição inicial neutra para obter as trajectórias futuras desta variável: $Z(0) = ZMU$.

1.6.2 - Índice de Rendimento Imobiliário

Wilkie define o índice de rendimento do imobiliário no ano t , como $E(t)$. O Modelo proposto para esta variável é:

$$E(t) = E(t-1) \exp\{EM(t) + EMU + EBZ ZE(t) + EE(t)\}, \text{ com } EE(t) = ESD EZ(t);$$

onde,

$$EM(t) = ED I(t) + (1 - ED) EM(t-1);$$

em que,

ED - Factor da média móvel da inflação;

EMU - Média do rendimento real face à inflação;

EBZ - Factor de ligação ao resíduo do retorno do investimento imobiliário;

$ZE(t) = ZSD ZZ(t)$, Resíduos do modelo do retorno de Investimentos Imobiliários;

$EE(t)$ - Resíduo aleatório, com $EZ(t)$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada e ESD desvio padrão do resíduo aleatório.

Wilkie considera também aqui a seguinte condição inicial, $EM(0) = QMU$, isto é, o factor de inflação no ano zero é igual ao seu valor médio.

Depois de modelizadas estas duas componentes, deduz-se o modelo para o índice de preços do imobiliário, isto é,

$$A(t) = \frac{E(t)}{Z(t)} \Leftrightarrow \log A(t) = \log E(t) - \log Z(t).$$

Temos aqui mais uma condição inicial, $A(0)$ que é obtida pelo rácio entre $D(0)$ e $E(0)$, onde $E(0)$ pode ser considerado 1, 100 ou 1000 e $Z(0) = ZMU$.

O retorno acumulado do Imobiliário do ano t é dado pela equação (1.5).

Para estimar os valores futuros do retorno acumulado das acções, é necessário estipular uma condição inicial $AR(0)$, que é um valor arbitrário e marca o valor inicial para o retorno acumulado do imobiliário (pode ser 1, 100 ou 1000).

1.7 - IMOBILIÁRIO desenvolvido pelos seguidores de *Wilkie*

Daykin e Hey (1990), seguidores dos estudos de *Wilkie* subdividem este modelo em dois, o *rental yield* sobre o índice de preços e o índice das rendas.

1.7.1 - Modelo do *Rental Yield* do Imobiliário

As variáveis do modelo são as seguintes:

$d(t)$ - Índice das rendas do imobiliário no final do ano t ;

$i(t)$ - Índice de preços do imobiliário;

$H(t)$ - *Rental Yield* do índice de preços do imobiliário.

O *Rental Yield* corresponde ao quociente entre o índice das rendas e o índice de preços do imobiliário, isto é,

$$H(t) = \frac{d(t)}{i(t)}.$$

O modelo proposto por *Daykin e Hey* (1990), seguidores do estudo de *Wilkie*, para $H(t)$ *Rental Yield* do imobiliário foi o seguinte:

$$\log \left[\frac{H}{H_\mu} \right] = H_\alpha \log \left[\frac{H(t-1)}{H_\mu} \right] + H_\sigma H_z(t);$$

em que $H_z(t)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal – padrão e está correlacionada com $Y_z(t)$ do *dividend yield*, devido a influências comuns no rendimento do imobilizado das acções.

1.7.2 - Modelo das Rendas dos Imobiliário

Este modelo está subdividido em duas componentes, uma delas representa a taxa de inflação, e a outra é um processo auto regressivo que depende de valores precedentes e da taxa de inflação de anos precedentes.

A taxa de crescimento das rendas do imobiliário, corresponde ao logaritmo do quociente entre o índice das rendas no ano t , e o ano $t - 1$, e é modelizada da seguinte forma:

$$\log\left[\frac{d(t)}{d(t-1)}\right] = d_w \times WM(t) + (1 - d_w) \times I(t) + d_\mu + d_\sigma d_z(t);$$

em que $WM(t)$, corresponde a uma média móvel das taxas de inflação passadas ponderadas exponencialmente e que se expressam da seguinte forma:

$$WM(t) = d_s \times I(t) + (1 - d_s) \times WM(t - 1);$$

e,

$d_z(t)$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal – padrão e está correlacionada com $D_z(t)$ dos dividendos das acções.

1.8 - PARAMETRIZAÇÃO E RESULTADOS DE WILKIE

Depois de se ter apresentado, durante este capítulo, as equações que modelizam o comportamento das diversas variáveis do modelo chegou agora o momento indicado de expor a parametrização escolhida e apresentar os resultados numéricos obtidos com este modelo.

Uma pequena notação é necessária. Para cada variável X , vamos definir:

$$FX(t) = X(t) / X(0);$$

$$GX(t) = 100 \left\{ FX(t)^{\frac{1}{t}} - 1 \right\};$$

onde $FX(t)$ é o retorno após t anos de um investimento de uma unidade monetária no momento zero e $GX(t)$ a taxa de retorno composta anual equivalente, expressa em percentagem.

Calculamos a média, o desvio padrão de cada $GX(t)$, para diferentes valores de t e os coeficientes de correlação entre $GX_1(t)$ e $GX_2(t)$, onde X_1 e X_2 são variáveis diferentes.

Usamos as estatísticas de $GX(t)$ nas seguintes variáveis, $Q(t)$, $PR(t)$, $CR(t)$, $BR(t)$, $RR(t)$ e $AR(t)$.

A tabela 3 evidencia os resultados dos cálculos descritos acima para os retornos, $GX(t)$, para $t = 1, 2, 5, 10, 20, 50$.

Estes resultados foram calculados com auxílio do VBA (*Visual Basic for Applications*) do MS – Excel, cujo código pode ser consultado no anexo III.

1.8.1 – Parametrização

A parametrização escolhida consta do *paper* “*More on a stochastic asset model for actuarial use*” e tem em conta a situação do mercado de Junho de 1982 a Junho de 1999 para o Reino Unido, que perante a economia actual e as recentes evoluções do mercado de capitais parece mostrar-se desajustada.

Tabela 1 – Parametrização (1982-1999)

Modelos	Parâmetros	Valor
Taxa de Inflação	QMU	0.047
	QA	0.58
	QSD	0.0425
Acções Rendimento das Acções e Dividendos das Acções	YW	1.8
	YA	0.55
	YMU	0.0375
	YSD	0.155
	DW	0.58
	DD	0.13
	DMU	0.016
	DY	-0.175
	DB	0.57
	DSD	0.07
Obrigações	CD	0.045
	CMU	0.0305
	CA	0.9
	CY	0.34
	CSD	0.185
	CMIN	0.005
Numerário	BMU	0.23
	BA	0.74
	BSD	0.18
<i>Index Linked</i>	RMU	0.04
	RA	0.55
	RBC	0.22
	RSD	0.05
Imobiliário Retorno de Investimentos imobiliários Índice de Rendimento Imobiliário	ZMU	0.074
	ZA	0.91
	ZSD	0.12
	EMU	0.003
	EBZ	0.24
	EW	1
	ED	0.13

Para iniciarmos a simulação, são necessárias condições iniciais neutras. Existem diversas possibilidades:

1. Escolher as condições actuais do momento, ou de uma data estabelecida;
2. Escolher o que *Wilkie* chama condições iniciais neutras, os valores de início são atribuídos de acordo com as médias a longo prazo (considerando todos os desvios padrões zero);
3. Usar as médias incondicionais dos próprios valores.

Foram utilizadas as seguintes condições iniciais neutras, para os cálculos da tabela 3.

Tabela 2 – Parametrização – Condições iniciais neutras

Modelos	Condições Iniciais	Valor
Taxa de Inflação	I(0)	0.047
	Q(0)	1
Acções Rendimento das Acções e Dividendos das Acções	Y(0)	0.040811
	YE(0)	0
	D(0)	1
	DE(0)	0
	DM(0)	0.047
	P(0)	1
	PR(0)	24.503
Obrigações de longo prazo	C(0)	0.0775
	CM(0)	0.047
	CR(0)	1
Numerário (ou obrigações a um ano)	B(0)	0.061576
	BR(0)	1
<i>Index – Linked Stocks</i>	R(0)	0.04
	RR(0)	1
Imobiliário Retorno de investimentos imobiliários Índice de Rendimento Imobiliário	Z(0)	0.074
	E(0)	1
	A(0)	13.513
	EM(0)	0.047
	AR(0)	1

1.8.2 – Resultados

Tabela 3 – Resultados dos retornos de 1000 simulações

Vencimento, <i>t</i>	1	2	5	10	20	50
Taxa média da Inflação, GQ						
M(GQ)	4.858	4.757	4.939	4.788	4.771	4.804
SD(GQ)	4.483	4.110	3.583	2.991	2.247	1.490
Taxa média do retorno total das acções, GPR						
M(GPR)	13.731	12.270	11.333	11.353	11.065	10.959
SD(GPR)	19.666	12.828	7.143	4.928	3.432	2.368
C(GPR,GQ)	-0.289	-0.088	0.201	0.396	0.551	0.620
Taxa média do retorno total das obrigações, GCR						
M(GCR)	7.858	7.758	7.582	7.780	7.968	7.998
SD(GCR)	7.712	5.268	2.883	1.581	1.006	1.036
C(GCR,GQ)	-0.258	-0.367	-0.527	-0.527	-0.100	0.540
C(GCR,GPR)	0.283	0.211	0.083	-0.056	0.069	0.376
Taxa média do retorno total do numerário, GBR						
M(GBR)	6.158	6.224	6.350	6.441	6.490	6.564
SD(GBR)	0.000	0.630	1.135	1.265	1.300	1.173
C(GBR,GQ)	0.000	0.045	0.187	0.310	0.453	0.604
C(GBR,GPR)	0.000	-0.016	0.080	0.162	0.325	0.400
C(GBR,GCR)	0.000	-0.293	-0.289	-0.213	0.318	0.754
Taxa média do retorno total das Index – Linked, GRR						
M(GRR)	9.292	9.004	9.176	8.998	8.963	9.003
SD(GRR)	6.993	5.176	3.933	3.127	2.366	1.557
C(GRR,GQ)	0.705	0.822	0.951	0.980	0.992	0.996
C(GRR,GPR)	-0.179	-0.087	0.191	0.389	0.549	0.618
C(GRR,GCR)	-0.225	-0.344	-0.498	-0.534	-0.095	0.539
C(GRR,GBR)	0.000	0.022	0.170	0.303	0.445	0.604
Taxa média do retorno total do Imobiliário, GAR						
M(GAR)	13.552	12.977	13.114	13.147	13.187	13.210
SD(GAR)	11.720	7.609	4.273	3.177	2.700	2.275
C(GAR,GQ)	0.079	0.136	0.257	0.529	0.661	0.618
C(GAR,GPR)	0.004	0.041	0.116	0.212	0.403	0.389
C(GAR,GCR)	-0.027	-0.022	-0.151	-0.301	0.022	0.370
C(GAR,GBR)	0.000	0.009	0.060	0.169	0.298	0.389
C(GAR,GRR)	0.052	0.115	0.239	0.524	0.657	0.613

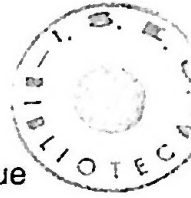
Para cada variável X , calculamos:

1. $M(GX)$ - Média de GX para as mil simulações;
2. $SD(GX)$ - Desvio padrão de GX para as mil simulações;
3. $C(GX_1, GX_2)$ - Coeficiente de correlação entre GX_1 e GX_2 .

Usamos X para representar as seguintes variáveis, $Q(t)$, $PR(t)$, $CR(t)$, $BR(t)$, $RR(t)$ e $AR(t)$.

O retorno em acções é negativamente correlacionado com a inflação de um ano, um resultado que é observado frequentemente por economistas financeiros, mas é positivamente correlacionado com a inflação em períodos mais longos, um resultado aceitável para os actuários.

O Retorno das *Consols* (obrigações de longo prazo) é correlacionado negativamente com a inflação para um período mais longo, mas no tempo devido, o coeficiente de correlação fica positivo, sendo uma consequência do reinvestimento a taxas de juro reais positivas.



1.9 - MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é um processo de busca dos coeficientes que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos.

A distribuição dos ruídos brancos no modelo "Taxa de Inflação" de *Wilkie* acima descrito é normal, logo, as estimativas de máxima probabilidade podem ser encontradas pelo método dos mínimos quadrados.

De seguida apresentamos uma versão do método dos mínimos quadrados aplicado aos valores de $\hat{I}(t)$. O modelo proposto neste trabalho para a taxa de inflação foi:

$$I(t) = QMU + QA \times [I(t-1) - QMU] + QSD QZ(t);$$

o que equivale a dizer

$$I(t) = c + QA I(t-1) + QE(t);$$

com

$$c = QMU \times (1 - QA),$$

$$\{QE(t) = QSD QZ(t), \text{ com } QZ(t) \sim i.i.d N(0,1)\}.$$

Dispomos apenas de uma realização $I(1); I(2); \dots; I(n)$ para a taxa de Inflação Italiana e sobre a hipótese de normalidade do ruído branco, podemos afirmar que o processo autoregressivo de primeira ordem que está subjacente no modelo da taxa de inflação é *Gaussiano*.

Interpretando formalmente este processo como um modelo de regressão linear múltipla de $I(t)$ sobre $I(t-1)$, os estimadores dos parâmetros podem obter-se pelo Método dos Mínimos Quadrados MMQ, ou seja, por minimização de:

$$Q = \sum_t [QE(t)]^2 = \sum_t [I(t) - c - QA I(t-1)]^2, \quad t = p+1, \dots, n$$

Assim, para um determinado conjunto de dados são inúmeros os (c, QA) que permitem ajustar equações razoáveis, mas procuramos os coeficientes que permitem obter o menor valor para a soma do quadrado dos resíduos. Para obter esse mínimo, começamos por procurar os valores c' e QA' , tais que, todas as derivadas parciais de Q sejam nulas, isto é:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial c'} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial QA'} = 0 \end{cases}$$

calculando as derivadas parciais e dividindo ambos os membros por 2, chega-se a:

$$\begin{cases} \sum_i [I(t) - c' - QA' I(t-1)] = 0 \\ \sum_i [I(t) - c' - QA' I(t-1)] \times I(t-1) = 0 \end{cases}$$

Transformando os termos $\sum_i c' = nc'$ e $\sum_i QA' I(t-1) = QA' \sum_i I(t-1)$, obtemos:

$$\begin{cases} \sum_i I(t) = nc' + QA' \sum_i I(t-1) \\ \sum_i I(t) \times I(t-1) = c' \sum_i I(t-1) + QA' \sum_i I^2(t-1) \end{cases}$$

Da resolução do sistema obtemos c' e QA' , isto é,

$$QA' = \frac{n \sum_i I(t)I(t-1) - \sum_i I(t) \sum_i I(t-1)}{n \sum_i I^2(t-1) - \left(\sum_i I(t-1) \right)^2};$$

$$c' = \frac{\sum_i I(t) - QA' \sum_i I(t-1)}{n},$$

Determinados os parâmetros QA' e c' , facilmente se determina QMU' e QSD' como explicamos de seguida:

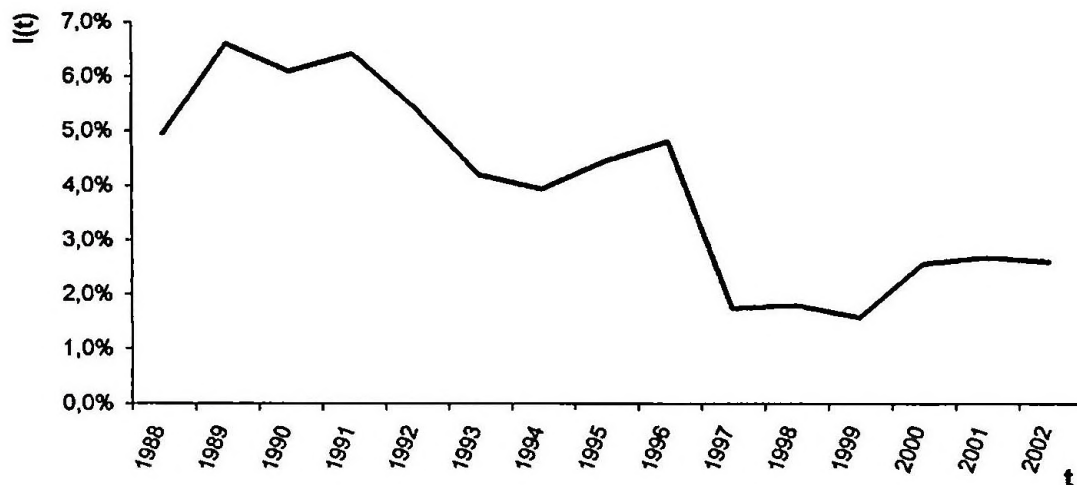
$$QMU' = \frac{c'}{1 - QA'} \text{ e } QSD' = \sqrt{\text{Var } QE(t)}.$$

Tendo conseguido a série cronológica da taxa de inflação Italiana junto do ISTAT "Istituto Nacional de Estatística Italiano", no período 1988 a 2002, seguimos o modelo

de *Wilkie* acima descrito para modelizar esta taxa e utilizamos o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros do modelo.

Observe-se a evolução da taxa de Inflação Italiana no gráfico seguinte,

Gráfico 1 – Evolução da Taxa de Inflação Italiana



Considerou-se o período de 1992 a 2002 suficiente para fornecer alguma fiabilidade nos parâmetros que daí podem resultar.

Encontramos os seguintes valores para os parâmetros do modelo da taxa de inflação:

$$QMU = 0.0270 \quad QA = 0.5451 \quad QSD = 0.0089 .$$

É necessário ter em consideração que estes valores estão intimamente ligados à realidade Italiana.

O nível médio da inflação ou o seu nível a longo prazo toma o valor de 2.7% em vez de 5% (o valor proposto por *Wilkie*), dado a conjuntura actual de taxas de inflação baixas.

2 - MODELO DE SELECÇÃO DE CARTEIRAS DE ACTIVOS de *Wise* e *Wilkie*

Os trabalhos desenvolvidos por *Wise* e *Wilkie* sobre a teoria tradicional de selecção de carteira, encontram-se descritos em diversos artigos por estes publicados ao longo de muitos anos. A teoria tradicional de selecção de carteira desenvolvida por estes astuciosos professores, está intimamente ligada aos investimentos realizados pelas Companhias de Seguros.

Wise, no seu artigo "*The Matching of Assets to Liabilities*", descreve uma nova abordagem de *Matching*, sugerindo uma carteira de activos que inclua além dos activos de rendimento fixo, os activos de rendimento variável, como por exemplo as acções, produtos estruturados.

Esta nova forma de encarar o *Matching*, tem como grande objectivo quantificar os aspectos da avaliação actuarial, sobretudo nos seguros.

Wilkie posteriormente publicou o artigo "*Portfolio Selection in the Presence of Fixed Liabilities*", um comentário ao artigo "*The Matching of Assets to Liabilities*". O objectivo foi complementar o modelo de selecção de carteiras, inovando com a introdução da variável preço como um factor adicional a considerar.

Wise pretende determinar quantidades de activos disponíveis que melhor compensem as responsabilidades, enquanto *Wilkie* pretende encontrar o conjunto de activos mais desejável, tendo em conta o seu preço actual e as responsabilidades assumidas. Logo, a carteira óptima encontrada pelos dois professores é diferente.

Tardiamente, outro artigo é publicado por *Wise*, "*Matching and Portfolio Selection*", uma resposta ao artigo de *Wilkie*, onde este defende a validade do seu trabalho sobre o *matching* para o caso particular dos seguros.

Wise analisa a relação entre a carteira de *Matching* e o conjunto das carteiras eficientes definidas por *Wilkie* e demonstra que qualquer carteira eficiente possui três componentes distintas e mutuamente exclusivas:

- ✓ A carteira de *Matching* é definida pela propriedade de que o excedente final (retorno esperado) é zero e a variância (risco) é mínima;
- ✓ Uma componente que traduz o retorno esperado da carteira, que é independente do grau de risco;
- ✓ Uma componente que traduz o grau de risco da carteira, que é independente do retorno esperado.

Wise tem como objectivo examinar a relação entre a carteira de *Matching* e o conjunto das carteiras eficientes.

Vejamos a descrição do modelo e as equações que permitem calcular as quantidades a deter de activos para fazer face a um conjunto de responsabilidades assumidas.

2.1 - DESCRIÇÃO DO MODELO DE DOIS ACTIVOS

Na teoria de carteira convencional – Modelo de *Markowitz*, apenas o rendimento e o risco da carteira são considerados. *Wilkie* generalizou a teoria de carteira convencional pela inclusão do preço dos activos em carteira. Este transporta o problema da optimização para um plano tridimensional, com as seguintes variáveis:

- ✓ O excedente final esperado da carteira de investimentos (retorno esperado) E ;
- ✓ A variância do excedente final (o risco da carteira) V ;
- ✓ O preço da carteira P .

O retorno esperado e o risco de uma carteira são definidos em relação a um conjunto de responsabilidades especificadas. Se as responsabilidades alteram, também altera o risco e o retorno esperado de uma determinada carteira.

O modelo em estudo tem inerente os seguintes pressupostos:

- ✓ O horizonte temporal é fixo, cuja data fim é aquela em que todas as responsabilidades assumidas são cumpridas, isto é, quando ocorre o último *outflow* das responsabilidades.
- ✓ A taxa (aleatória) de retorno de cada activo e o montante de responsabilidades são acumulados para o final do horizonte temporal. Sendo o montante das responsabilidades projectado a uma taxa de juro (aleatória).

Para aplicarmos o modelo seleccionado é imprescindível conhecer os seguintes valores:

- a) Os *cash – flows* futuros de uma carteira de activos estimados à custa de um modelo estocástico para factores incertos (por exemplo, o modelo de investimento de *Wilkie*);
- b) Os *cash – flows* futuros de um conjunto de responsabilidades assumidas;

Fazendo uso à notação usada por *Wilkie*, consideremos as seguintes variáveis:

S_i Activo i ;

x_i Número de unidades adquiridas do activo i ;

P_i Preço por unidade de activo i ;

R_i Retorno acumulado por unidade de activo i no final do horizonte temporal, assumindo que os *cash – flows* intermédios são reinvestidos (em euros por unidade de activo adquirido);

E_i Valor esperado da variável aleatória R_i (em euros por unidade de activo adquirido);

V_i Variância da variável aleatória R_i (em quadrados de euros por unidade de activo adquirido);

L Responsabilidades;

R_L Montante de responsabilidades no final do horizonte temporal (em euros);

E_L Valor esperado da variável aleatória R_L (em Euros);

V_L Variância da variável aleatória R_L (em quadrados de Euros);

E Excedente final esperado da carteira (retorno esperado);

V Variância do excedente final da carteira (risco);

P Preço da carteira.

Seguidamente são apresentadas as equações para calcular o valor, do excedente final esperado da carteira E , da variância do excedente final da carteira V e do preço da carteira P .

$$\begin{aligned} E &= x_1 E_1 + x_2 E_2 - E_L \\ V &= x_1^2 V_1 + 2 x_1 x_2 C_{12} + x_2^2 V_2 - 2 x_2 C_{2L} + V_L \\ P &= x_1 P_1 + x_2 P_2 \end{aligned}$$

Uma vez que estamos no modelo de dois activos distintos, S_1 e S_2 , as quantidades x_1 e x_2 destes activos podem ser determinadas através das três equações acima definidas.

O investidor expressa as suas preferências em termos dos valores E e P (ou E e V ou P e V) ou em termos dos seguintes parâmetros:

$\lambda = \delta E / \delta P$, Representa o acréscimo no retorno esperado que o investidor pretende obter, se aumentar, em uma unidade monetária, o valor investido;

$\mu = \delta E / \delta V$, Representa o acréscimo no retorno esperado que ele exige se aumentar, se aumentar em uma unidade monetária ao quadrado, a variância da carteira;

$\nu = -\delta V / \delta P$, Representa o acréscimo de risco que o actuário está disposto a suportar se diminuir o valor das suas provisões numa unidade monetária.

Os parâmetros λ , μ e $\delta V / \delta P$ representam os *trade-off* marginais (escolhas ao acaso marginais) entre o retorno esperado, o preço e o risco da carteira.

Mostra-se de seguida como determinar as quantidades x_1 e x_2 , quando o investidor expressa as suas preferências em termos dos parâmetros λ e μ .

Quando a escolha da carteira está restrita às quantidades x_1 e x_2 de dois activos específicos, então E , V e P são todas funções de x_1 e x_2 . A variância é uma função quadrática de E e P , e o retorno esperado pode ser expresso, analiticamente, como função de V e P . Assim sendo, podem-se calcular as primeiras derivadas em ordem a cada um dos activos:

$$\frac{\delta E}{\delta x_1} = \frac{\delta E}{\delta P} \frac{\delta P}{\delta x_1} + \frac{\delta E}{\delta V} \frac{\delta V}{\delta x_1} \Leftrightarrow \frac{\delta E}{\delta x_1} = \lambda \frac{\delta P}{\delta x_1} + \mu \frac{\delta V}{\delta x_1};$$

$$\frac{\delta E}{\delta x_2} = \frac{\delta E}{\delta P} \frac{\delta P}{\delta x_2} + \frac{\delta E}{\delta V} \frac{\delta V}{\delta x_2} \Leftrightarrow \frac{\delta E}{\delta x_2} = \lambda \frac{\delta P}{\delta x_2} + \mu \frac{\delta V}{\delta x_2};$$

onde, $\lambda = \frac{\partial E}{\partial P}$ e $\mu = \frac{\partial E}{\partial V}$.

fazendo, $\delta E/\delta x_1 = E_1$ e $\delta P/\delta x_1 = P_1$, obtemos

$$E_1 = \lambda \times P_1 + 2\mu(x_1 \times V_1 + x_1 \times C_{12} - C_{1L});$$

$$E_2 = \lambda \times P_2 + 2\mu(x_2 \times V_2 + x_2 \times C_{12} - C_{2L});$$

Resolvendo as duas equações acima em ordem a x_1 e x_2 , obtemos:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2\mu}(E_1 V_2 - E_2 C_{12}) - \frac{\lambda}{2\mu}(P_1 V_2 - P_2 C_{12}) + (C_{1L} V_2 - C_{2L} C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2};$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2\mu}(E_2 V_1 - E_1 C_{12}) - \frac{\lambda}{2\mu}(P_2 V_1 - P_1 C_{12}) + (C_{2L} V_1 - C_{1L} C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2};$$

O investidor que expressa as suas preferências em termos dos parâmetros λ e μ , investe as provisões técnicas, que correspondem ao valor actual das suas responsabilidades em dois activos, S_1 e S_2 , nas quantidades x_1 e x_2 .

Wilkie considera dois pontos de vista mais específicos para a resolução do problema de alocação de activos nos seguros: a óptica do actuário e a óptica do gestor de investimentos.

De seguida apresentamos o modelo de selecção de activos, na óptica do actuário.

2.2 - MODELO DE DOIS ACTIVOS – ÓPTICA DO ACTUÁRIO

O actuário é responsável pela gestão dos riscos actuariais de um contrato de seguros. Para ele, o preço da carteira P não é uma restrição, mas sim o valor das responsabilidades.

O actuário procura fundamentalmente fazer o *matching* entre os fluxos dos activos e os fluxos das responsabilidades, isto é, procura encontrar sincronismo entre os fluxos de entrada e os de saída de um contrato de seguros.

Uma das restrições fundamentais para o actuário é o valor do excedente final E . Se este se aproximar do valor zero, então obviamente o preço da carteira P pode ser interpretado como o montante de activos requeridos para fazer face às responsabilidades.

O actuário deve especificar o valor do excedente final da carteira que espera obter. Assim, a carteira eficiente para o actuário é aquela que: - para um mesmo preço, não existe outra com menor variância V , ou, - para a mesma variância V , não existe outra com menor preço P .

O actuário expressa as suas preferências de selecção de carteira de activos tendo em conta os seguintes parâmetros: o valor do excedente final E , e o valor do *trade-off* entre o risco e o preço da carteira $\nu = -\delta V / \delta P$.

O parâmetro $\nu = -\delta V / \delta P$ corresponde ao grau de risco da carteira do ponto de vista do actuário. Consideremos as seguintes situações para diferentes valores de ν :

Para $\nu = 0$, a variância da carteira, para um dado valor do excedente final, atinge o seu mínimo, e;

Para $\nu > 0$, a variância da carteira, para o mesmo valor do excedente final, aumenta.

Podemos concluir que o parâmetro ν é uma medida de risco e define-se como uma medida de distanciamento da carteira de variância mínima.

Mostra-se de seguida como determinar as quantidades x_1 e x_2 , quando o actuário expressa as suas preferências em termos dos parâmetros acima mencionados.

As quantidades a deter de cada activo, x_1 e x_2 , obtém-se tendo em atenção os seguintes passos:

1. Rescrevendo a variância da carteira, V , como uma função do excedente final, E , e do preço, P ;

2. Calculando as derivadas parciais em ordem a cada activo, isto é, $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial V}{\partial x_2}$;
3. Construindo um sistema de três equações com as derivadas referidas no segundo passo e com a equação do excedente final da carteira.

V é função de P e E , logo calculando as derivadas parciais em ordem a cada activo, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x_1} \Leftrightarrow 2x_1V_1 + 2x_2C_{12} - 2C_{1L} = -vP_1 + \frac{1}{\mu}E_1;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x_2} \Leftrightarrow 2x_2V_2 + 2x_1C_{12} - 2C_{2L} = -vP_2 + \frac{1}{\mu}E_2;$$

onde, $v = -\frac{\partial V}{\partial P}$, $\frac{1}{\mu} = \frac{\partial V}{\partial E}$, $\frac{\partial E}{\partial x_1} = E_1$ e $\frac{\partial P}{\partial x_1} = P_1$;

fazendo, $x_3 = -\frac{1}{2\mu}$, temos:

$$x_1V_1 + x_2C_{12} + x_3E_1 = C_{1L} - \frac{1}{2}vP_1; \quad (2.1)$$

$$x_1C_{12} + x_2V_2 + x_3E_2 = C_{2L} - \frac{1}{2}vP_2; \quad (2.2)$$

e a equação do excedente final da carteira é:

$$x_1E_1 + x_2E_2 = E + E_L; \quad (2.3)$$

Multiplicando (2.1) por E_2^2 , (2.2) por $-E_1E_2$ e (2.3) por $(E_1V_2 - E_2C_{12})$, obtemos:

$$\begin{aligned} & x_1(E_2^2V_1 - 2E_1E_2C_{12} + E_1^2V_2) = \\ & = E_2^2\left(C_{1L} - \frac{1}{2}vP_1\right) - E_1E_2\left(C_{2L} - \frac{1}{2}vP_2\right) + (E + E_L)(E_1V_2 - E_2C_{12}); \end{aligned}$$

Multiplicando (2.1) por $-E_1E_2$, (2.2) por E_1^2 e (2.3) por $(E_2V_1 - E_1C_{12})$, e resolvendo em ordem a x_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} & x_2(E_1^2V_2 - 2E_1E_2C_{12} + E_2^2V_1) = \\ & = E_1^2\left(C_{2L} - \frac{1}{2}vP_2\right) - E_1E_2\left(C_{1L} - \frac{1}{2}vP_1\right) + (E + E_L)(E_2V_1 - E_1C_{12}); \end{aligned}$$

O que é equivalente a:

$$x_1 = \frac{E_2(E_2C_{1L} - E_1C_{2L}) + (E + E_L)(E_1V_2 - E_2C_{12}) + \frac{1}{2}vE_2(P_1E_2 - P_2E_1)}{E_1^2V_2 - 2E_1E_2C_{12} + E_2^2V_1}; \quad (2.4)$$

$$x_2 = \frac{E_1(E_1C_{2L} - E_2C_{1L}) + (E + E_L)(E_2V_1 - E_1C_{12}) + \frac{1}{2}vE_1(P_2E_1 - P_1E_2)}{E_1^2V_2 - 2E_1E_2C_{12} + E_2^2V_1}; \quad (2.5)$$

O actuário que expressa as suas preferências em termos dos parâmetros E e v , investe as provisões técnicas, que correspondem ao valor actual das suas responsabilidades em dois activos, S_1 e S_2 , nas quantidades x_1 e x_2 .

2.3 – CRITÉRIO DE EFICIÊNCIA – dois activos

O critério da eficiência que aqui apresentamos é para um modelo tridimensional (P, E, V) .

Podemos dizer que uma carteira é dominada por outra quando existe outra que:

- Tenha menor variância, para o mesmo preço e retorno esperado;
- Tenha maior retorno esperado, para o mesmo preço e variância;
- Tenha menor preço, para o mesmo retorno esperado e variância;
- Tenha menor retorno esperado e menor variância, para o mesmo preço;
- Tenha menor preço e menor variância, para o mesmo retorno esperado;
- Tenha menor preço e maior retorno esperado, para a mesma variância;
- Tenha menor preço, maior retorno esperado e menor variância.

A carteira óptima de *Wise* é aquela que minimiza a variância do excedente final para um valor esperado do mesmo nulo. Esta não é mais do que a carteira que se obtém definindo $E = v = 0$, isto é, a minimização da variância para um dado excedente final

equivale a igualar o grau de risco a zero, $v = -\frac{\delta V}{\delta P} = 0$.

Wilkie prova que a carteira que se obtém definindo $E = v = 0$ não é eficiente, porque é possível encontrar, pelo menos, uma outra com a mesma variância mas com um

retorno esperado maior e/ou preço menor, quando se define um valor para o grau de risco ligeiramente superior.

A carteira de *matching* ($E = v = 0$) ignora os preços dos activos e o diferencial de rendimento dos mesmos. Quando os rendimentos estão muito próximos, esta carteira praticamente não se distingue de uma carteira eficiente, mas quando houver uma diferença muito grande de preços, esta torna-se ineficiente.

Para $v = 0$ temos geralmente uma carteira ineficiente, logo pretendemos saber a partir de que valor de v se obtém uma carteira eficiente. Este ponto marca a fronteira da região das carteiras eficientes para um dado excedente final, E .

A linha divisória entre as carteiras eficientes e as ineficientes é dada pela seguinte condição:

$$\frac{\delta V}{\delta E} = \frac{1}{\mu} = x_3 = 0.$$

Podemos encontrar o valor de v , construindo o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta V}{\delta x_1} = \frac{\delta V}{\delta P} \frac{\delta P}{\delta x_1} + \frac{\delta V}{\delta E} \frac{\delta E}{\delta x_1} \Leftrightarrow x_1 V_1 + x_2 C_{12} + x_3 E_1 = C_{1L} - \frac{1}{2} v P_1 \quad (2.6) \\ \frac{\delta V}{\delta x_2} = \frac{\delta V}{\delta P} \frac{\delta P}{\delta x_2} + \frac{\delta V}{\delta E} \frac{\delta E}{\delta x_2} \Leftrightarrow x_1 C_{12} + x_2 V_2 + x_3 E_2 = C_{2L} - \frac{1}{2} v P_2 \quad (2.7) \\ x_1 E_1 + x_2 E_2 = E + E_L \quad (2.8) \end{array} \right.$$

Multiplicando (2.6) por $(E_2 C_{12} - E_1 V_2)$, (2.7) por $(E_1 C_{12} - E_2 V_1)$, (2.8) por $(V_1 V_2 - C_{12}^2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & v \left[P_1 \frac{0.5(E_1 V_2 - V_2 C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2} + P_2 \frac{0.5(E_2 V_1 - E_1 C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2} \right] = \\ & = C_{1L} \frac{E_1 V_2 - E_2 C_{12}}{V_1 V_2 - C_{12}^2} + C_{2L} \frac{E_2 V_1 - E_1 C_{12}}{V_1 V_2 - C_{12}^2} - E_L - E; \end{aligned}$$

Definamos, E_c , como o valor do retorno esperado para a carteira de variância mínima e igual à seguinte expressão:

$$E_c = C_{1L} \frac{E_1 V_2 - E_2 C_{12}}{V_1 V_2 - C_{12}^2} + C_{2L} \frac{E_2 V_1 - E_1 C_{12}}{V_1 V_2 - C_{12}^2} - E_L ;$$

Finalmente igualando n_1 e n_2 às seguintes expressões:

$$n_1 = \frac{\frac{1}{2}(E_1 V_2 - V_2 C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2} ;$$

$$n_2 = \frac{\frac{1}{2}(E_2 V_1 - E_1 C_{12})}{V_1 V_2 - C_{12}^2} ;$$

obtemos o valor v a partir do qual a carteira já é eficiente,

$$v = \frac{E_c - E}{n_1 P_1 + n_2 P_2} .$$

Podemos então concluir que, para valores acima de v , a carteira é eficiente, e para valores abaixo de v , a carteira é ineficiente, mesmo quando $v = 0$.

2.4 - MODELO DE N ACTIVOS – ÓPTICA DO ACTUÁRIO

A análise anterior pode ser generalizada para qualquer número n de activos, onde n é maior ou igual a dois.

Fazendo uso à notação de Wilkie, definamos as seguintes vectores:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - Representa o vector das quantidades detidas de cada activo em carteira;

$e = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ - Representa o vector dos valores esperados do retorno acumulado por unidade de cada activo no final do horizonte temporal;

$p = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ - Representa o vector dos preços por unidade de cada activo em carteira;

$V = (V_{ij})$ - Representa a matriz $n \times n$ das variâncias – covariâncias entre os retornos acumulados dos activos em carteira;

$c = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ - Representa o vector das covariâncias entre o retorno acumulado de cada activo e a taxa de retorno das responsabilidades;

V_L - Variância do montante acumulado das responsabilidades no final do horizonte temporal (em quadrado de Euros);

E_L - Valor esperado do montante acumulado das responsabilidades no final do horizonte temporal (em Euros).

Neste caso, o problema da optimização é expresso em termos matriciais. Os valores da carteira são expressos do seguinte modo:

$$P = x'p;$$

$$E = x'e - E_L;$$

$$V = xVx - 2x'c + V_L.$$

De forma idêntica se calculam as derivadas parciais da variância da carteira em ordem a cada um dos activos e obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x};$$

Existem n equações desta forma para os n activos, e estas podem ser expressas simultaneamente na forma vectorial por:

$$2Vx - 2c = -vp + \frac{1}{\mu}e;$$

assumindo que V pode ser invertido, tem-se que:

$$x = V^{-1}c + \frac{1}{2\mu}V^{-1}e - \frac{1}{2}vV^{-1}p;$$

como $E + E_L = e'x$ e resolvendo esta equação do valor esperado da carteira em ordem a $\frac{1}{2\mu}$ temos que:

$$E + E_L = e'x \Leftrightarrow E + E_L = eV^{-1}c + \frac{1}{2\mu}eV^{-1}e - \frac{1}{2}veV^{-1}p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\mu}\alpha = E + E_L - \varepsilon + \frac{1}{2}v\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\mu} = \left[\frac{E_L - \varepsilon}{\alpha} \right] + \frac{E}{\alpha} + \frac{1}{2}v\frac{\varphi}{\alpha};$$

onde,

$$\varepsilon = eV^{-1}c;$$



$$\alpha = eV^{-1}e;$$

$$\varphi = eV^{-1}p;$$

substituindo na expressão do vector x , obtemos o resultado da optimização:

$$x = V^{-1}c + \frac{E_L - \varepsilon}{\alpha} V^{-1}e + E \frac{1}{\alpha} V^{-1}e + \frac{1}{2} v V^{-1} \left[\frac{\varphi}{\alpha} e - p \right]. \quad (2.9)$$

Podemos explicar a equação acima separadamente, isto é:

O termo constante

Analicamente temos a expressão $x_0 = V^{-1}c - \frac{E_L - \varepsilon}{\alpha} V^{-1}e$.

O termo constante x_0 é o *Unibased Match*, representa as responsabilidades (passivo puro)- componente relacionada de qualquer *portfolio* eficiente.

Uma descrição mais pitoresca é dizer que toda a informação sobre os passivos, relevante para seleccionar o *portfolio* x , está incluída dentro do *Unbiased Match*, x_0 , de forma produzir o melhor *match* dos *cash flow* activos com os *cash flow* passivos (os das responsabilidades).

O *Unbiased Match*, x_0 é independente dos preços dos activos, assim como do seu retorno esperado e do grau de risco da carteira.

A componente y

Analicamente temos a expressão $y = \frac{1}{\alpha} V^{-1}e$.

A componente que traduz o retorno esperado, a qual é independente das responsabilidades e do grau de risco.

O vector y dá-nos a direcção na qual o *portfolio* deve ser separado do *Unibased Match* (ou a quantidade necessária dos n activos), de forma a aumentar ou diminuir o retorno esperado da carteira sem alterar o grau de risco. É independente dos preços dos activos.

A componente z

Analicamente temos a expressão $z = \frac{1}{2} V^{-1} \left[\frac{\varphi}{\alpha} e - p \right]$.

A componente que traduz o grau de risco, a qual é independente das responsabilidades e do retorno esperado da carteira.

O vector z dá-nos a quantidade necessária dos n activos, ou a direcção na qual o *portfolio* deve ser separado do *Unibased Match* (ou de $x^0 + y$), de forma a aumentar ou diminuir o grau de risco do *portfolio* sem alterar o retorno esperado da carteira.

Logo, podemos concluir desta descrição teórica do modelo na óptica do actuário que:

- 1) Uma alteração no *cash flow* das responsabilidades alterará os valores de x_0 mas não os de y e z ;
- 2) O terceiro termo da expressão do vector x , $vz = \frac{1}{2} vV^{-1} \left[\frac{\varphi}{\alpha} e - p \right]$ depende dos preços dos activos, enquanto os outros dois termos deste mesmo vector não;
- 3) Todas as informações relevantes sobre a posição do mercado de investimentos no momento de cálculo está relacionada dentro de vz ;
- 4) Quando $v=0$ (o grau de risco é nulo), a carteira resultante para o excedente final é independente dos preços dos activos;
- 5) Quando $v=0$ e $E=0$ (valor esperado do excedente final da carteira é nulo), a carteira resultante é a carteira de *matching*;
- 6) À medida que o grau de risco aumenta, o preço da carteira diminui e a variância do excedente final aumenta, dando origem a carteiras mais “baratas” e mais “arriscadas”;
- 7) À medida que aumenta o diferencial de preços, os resultados são cada vez mais sensíveis à escolha do grau de risco, v ;

- 8) Se os rendimentos esperados nos n activos são iguais, isto é, $\frac{E_i}{P_i} = r$, então a carteira resultante é independente do grau de risco v , e é igual à que se obteria se $v=0$ (isto é, o terceiro termo da expressão do vector x é igual a zero). Neste caso, o valor do excedente final da carteira não depende do retorno acumulado de cada activo, mas sim do preço da carteira, isto é, $E = rP - E_L$.

- 9) A carteira que se obtêm para $E = v = 0$, é o ponto de partida para o actuário. O actuário tem diversas hipóteses, tal como se segue:

- ✓ Se este deseja assegurar um excedente adicional como uma margem da sua avaliação, ele dá um valor a E e considera $v=0$.

- ✓ Se os rendimentos nas diferentes classes de activos forem idênticos, então, não existe necessidade na especificação do grau de risco, dado que a carteira é determinada apenas pelo valor do excedente final.
- ✓ Se os rendimentos diferirem, o actuário pode definir um grau de risco ν para a sua carteira, o que levará a deter mais do activo de maior rendimento. Em consequência, o preço da carteira diminui, aumentando a variância, isto é, passa a haver uma maior incerteza relativamente ao resultado final, uma vez que as responsabilidades estão menos cobertas pelos activos em carteira.

2.5 – CRITÉRIO DE EFICIÊNCIA – N activos

Podemos também deduzir o grau de risco ν , a partir do qual se tem carteiras eficientes em termos matriciais, isto é, para o caso em que se tem N activos.

Consideremos a seguinte condição como uma hipótese verdadeira,

$$\frac{\delta V}{\delta E} = \frac{1}{\mu} = 0 ; \text{ (isto é, a linha divisória entre as carteiras eficientes),}$$

o vector das quantidades de cada activo a deter x , é o seguinte:

$$x = V^{-1}c - \frac{1}{2}\nu V^{-1}p. \quad (2.10)$$

O valor do excedente final da carteira é dado por:

$$E = e'x - E_L;$$

substituindo a expressão (2.10) na expressão anterior, obtém-se:

$$E + E_L = e'V^{-1}c - \frac{1}{2}\nu e'V^{-1}p;$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\nu = 2 \left[\frac{e'V^{-1}c - E - E_L}{e'V^{-1}p} \right]. \quad (2.11)$$

Por outro lado, sabe-se que o vector das quantidades a deter de cada activo x , da carteira de variância mínima, resulta de:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = 0 \Rightarrow x = V^{-1}c. \quad (2.12)$$

Definamos E_c , o valor do retorno esperado para a carteira de variância mínima e igual à seguinte expressão:

$$E_c = e'x - E_L;$$

substituindo (2.12) na expressão anterior obtém-se:

$$E_c = e'V^{-1}c - E_L; \quad (2.13), \text{ e}$$

substituindo (2.13) na expressão (2.11), tem-se o parâmetro pretendido:

$$v = 2 \left[\frac{E_c - E}{e'V^{-1}p} \right].$$

2.6 EXEMPLO DE WISE E WILKIE

Neste capítulo vai-se apenas ilustrar o exemplo desenvolvido por *Wise* e *Wilkie* por aplicação do modelo anteriormente descrito, fazendo uso à mesma notação.

Ilustra-se para o caso de dois activos, para no capítulo IV – aplicação prática, se generalizar para o caso de n activos.

Consideremos as seguintes hipóteses:

1. O horizonte temporal é de três anos, o qual remete da data termo das responsabilidades assumidas;
2. Os *cash – flows* quer dos activos quer das responsabilidades são apenas considerados no final de cada ano.
3. A taxa de retorno dos investimentos assume apenas dois valores, 8 ou 10%, com igual probabilidade, não existindo correlação desta taxa de um ano para o outro (hipótese irrealista);
4. Os retornos intermédios vão sendo reinvestidos no período em que são libertados até ao final do horizonte temporal;
5. Os pagamentos relativos às responsabilidades são projectados para o final do horizonte temporal à taxa 8% ou 10%;

Para o efeito consideramos dois activos de rendimento fixo de 10 unidades monetárias até à sua maturidade com valor de reembolso de 90, reembolsáveis respectivamente ao fim do segundo e terceiro ano. Por outro lado, consideramos que existe a responsabilidade de um pagamento fixo de 100 unidades monetárias no final de cada ano.

Seja,

$R_i, i = 1, 2, 3$, O montante do retorno acumulado no final do ano i , e

R_L , O montante acumulado das responsabilidades no final do horizonte temporal (três anos).

Nas tabelas seguintes calculamos o montante de retorno acumulado no final de cada ano ao longo de três anos, por unidade de activo nos diferentes contextos possíveis de evolução de taxa de retorno.

Tabela 4 – Retorno Acumulado por unidade de Activo 1

Taxa de Juro (%)		Retorno unitário acumulado no final de:		
Ano 2	Ano 3	Ano 1	Ano 2	Ano 3
8	8	10	110,80	119,66
8	10	10	110,80	121,88
10	8	10	111,00	119,88
10	10	10	111,00	122,10

A média e a variância do retorno unitário acumulado para o activo 1 no final do terceiro ano é $E_1 = 120,881$ e $V_1 = 1,241763$.

Tabela 5 – Retorno Acumulado por unidade de Activo 2

Taxa de Juro (%)		Retorno unitário acumulado no final de:		
Ano 2	Ano 3	Ano 1	Ano 2	Ano 3
8	8	10	20,80	122,46
8	10	10	20,80	122,88
10	8	10	21,00	122,68
10	10	10	21,00	123,10

A média e a variância do retorno unitário acumulado para o activo 2 no final do terceiro ano é $E_2 = 122,781$ e $V_2 = 0,055563$.

Apresentamos na tabela seguinte, o montante acumulado das responsabilidades no final de cada ano.

Tabela 6 – Montante Acumulado de Responsabilidades

Taxa de Juro (%)		Montante acumulado de responsabilidades no final de:		
Ano 2	Ano 3	Ano 1	Ano 2	Ano 3
8	8	100	208,00	324,64
8	10	100	208,00	328,80
10	8	100	210,00	326,80
10	10	100	210,00	331,00

O montante médio acumulado de responsabilidades no final do terceiro ano E_L é de 327,81 e a variância do montante acumulado de responsabilidades no final do terceiro ano V_L é de 5,5563.

Os valores apresentados de seguida foram calculados com ajuda do programa de VBA (*Visual Basic for Applications*) do *MS-EXCEL* (programa de selecção de carteiras de activos com responsabilidades fixas), cujo código pode ser consultado no anexo V.

Calculamos os seguintes valores:

V - A matriz de variâncias – covariâncias entre os retornos esperados acumulados (por unidade) dos activos no final do terceiro ano;

c - O vector das covariâncias entre o retorno esperado acumulado (por unidade de activo) de cada activo e o montante esperado acumulado de responsabilidades;

e - O vector dos valores esperados do retorno acumulado por unidade de activo no final do terceiro ano.

Os valores obtidos encontram-se nas tabelas seguintes:

Tabela 7 – Matriz V

$$V = \begin{bmatrix} 1.24176 & 0.24366 \\ 0.24366 & 0.05556 \end{bmatrix}$$

Tabela 8 – Vector c

$$c = \begin{bmatrix} 2.43663 \\ 0.55563 \end{bmatrix}$$

Tabela 9 – Vector e

$$e = \begin{bmatrix} 120.881 \\ 122.781 \end{bmatrix}$$

O problema de optimização do ponto de vista do actuário, consiste em minimizar a variância da carteira para um determinado retorno esperado e para um nível de risco pretendido. Em termos analíticos, o problema de optimização traduz-se:

$\text{Min } V$

s.a. $E = E^*$

$$\delta V / \delta P = v$$

Resolvendo o problema da optimização à custa dos valores calculados atrás, obtém-se duas formas diferentes para calcular as quantidades a deter de cada activo, x_1 e x_2 , sejam elas:

Utilizando as expressões (2.4) e (2.5)

$$\begin{cases} x_1 = 1,698 - 0,001886 E - (0,61287 P_1 - 0,60339 P_2) \nu \\ x_2 = 0,998 + 0,010002 E + (0,60339 P_1 - 0,59405 P_2) \nu \end{cases}$$

ou

utilizando a expressão (2.9)

$$x_i = \begin{bmatrix} 7,38E - 07 \\ 9,99964 \end{bmatrix} + \frac{327,81 - 1227,81}{1277879,96} \begin{bmatrix} -2410,61 \\ 12781,10 \end{bmatrix} + E \frac{1}{1277879,96} \begin{bmatrix} -2410,61 \\ 12781,10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \nu \begin{bmatrix} 5,77 & -25,32 \\ -25,32 & 129,02 \end{bmatrix} \left(\frac{990018,28}{1277879,96} \begin{bmatrix} 120,88 \\ 122,78 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \right)$$

Alguns exemplos para diferentes valores dos parâmetros E e ν e para preços de activos de P_1 e P_2 unidades monetárias, encontram-se nas tabelas abaixo:

Tabela 10 – Modelo de Selecção de carteira de Wise – Wilkie

Preços $P_1 = 93$, $P_2 = 95$

Parâmetros		Quantidades		Valores da carteira		
E	ν	x_1	x_2	P	E	V
0	0	1.6978	0.9984	252.7385	0	0.6339
0	1	2.0225	0.6786	252.5664	0	0.7199
0	2	2.3473	0.3589	252.3943	0	0.9780
200	0	1.3205	2.9987	407.6855	200	0.3834
200	1	1.6452	2.6790	407.5134	200	0.4695
200	2	1.9700	2.3593	407.3413	200	0.7276
400	0	0.9432	4.9991	562.6325	400	0.1956
400	1	1.2680	4.6794	562.4604	400	0.2817
400	2	1.5927	4.3596	562.2883	400	0.5398

A tabela seguinte ilustra mais alguns exemplos, onde a diferença de preço entre os dois activos é mais acentuada.

A solução é:

Tabela 11 – Modelo de Selecção de carteira de Wise – Wilkie

Preços $P_1 = 90$, $P_2 = 100$

Parâmetros		Quantidades		Valores da carteira		
E	ν	x_1	x_2	P	E	V
0	0	1.6978	0.9984	252.6371	0	0.6339
0	0.5	4.2879	-1.5517	230.7438	0	6.1072
0	1	6.8781	-4.1018	208.8505	0	22.5272
200	0	1.3205	2.9987	418.7178	200	0.3834
200	0.5	3.9106	0.4487	396.8245	200	5.8568
200	1	6.5008	-2.1014	374.9312	200	22.2767

A carteira óptima, segundo os actuários, é a que se obtém para um retorno esperado zero e um grau de risco também zero.

É certo pela expressão (2.9) que, a carteira definida para $E = \nu = 0$ não tem em conta o rendimento esperado de cada activo nem o diferencial de preços entre eles.

O parâmetro ν pode ser observado como uma medida de partida do *portfolio* de *matching*. Quando $\nu = 0$, geralmente temos um *portfolio* ineficiente. É interessante encontrar o valor de ν a partir do qual o *portfolio* é eficiente. Este ponto marca a fronteira ou região de *portfolios* eficientes para um dado valor de E .

Para o exemplo apresentado durante este capítulo, o valor de ν é calculado pela seguinte equação:

$$(\text{valor de fronteira}) \nu = \frac{900 - E}{6391P_2 - 1205P_1} \text{ ou } \nu = 2 \left[\frac{900 - E}{e'V^{-1}p} \right].$$

Suponhamos que $E = 0$, $P_1 = 400$ e $P_2 = 100$ o valor de fronteira é $\nu = 0.0057$. Para preços mais realísticos $P_1 = 93$ e $P_2 = 95$, o valor de fronteira é $\nu = 0.0018$.

Acima destes valores, o *portfolio* actuarial escolhido será eficiente, em contrapartida abaixo destes valores (incluindo $\nu = 0$) os *portfolios* são ineficientes.

O valor de $\nu = 0.0018$, significa que os actuários consideram que vale a pena aceitar um custo extra de uma unidade monetária, de forma a investir num *portfolio* de risco mais baixo, o qual reduz a variância.

Suponhamos agora um excedente final positivo de 200 e 400 unidades monetárias, com $P_1 = 93$ e $P_2 = 95$, temos para ν um valor de 0.0014 e 0.0010, respectivamente.

Podemos concluir que o valor de ν é cada vez menor à medida que nos aproximamos da carteira de variância mínima.

3 - AVALIAÇÃO DE RESPONSABILIDADES FUTURAS de uma empresa de seguros vida

3.1 – TEORIA

O principal objectivo neste capítulo é avaliar as responsabilidades futuras de uma dada carteira de apólices de uma companhia de seguros, isto é, determinar a estrutura das responsabilidades e o seu grau de exigibilidade ao longo do período de vigência ou horizonte temporal.

A estrutura da carteira de Activos correspondente aquelas responsabilidades deverá ser determinada em função da sua estrutura e maturidade.

Para determinarmos o valor estimado dos *cash outs* (exigibilidade das responsabilidades), teremos que assumir diversas hipóteses que nos permitam avaliar a mortalidade, resgates e anulações da carteira segura ao longo do horizonte temporal.

O modelo que segue para além dos vencimentos das apólices introduz as possíveis saídas por resgate ou morte dando por conseguinte ao passivo uma estrutura aleatória.

Consideremos em relação a cada apólice em vigor, no início do t -ésimo do contrato, as seguintes variáveis:

P_t - Prémio do ano t ;

e_t - Despesas contratuais do ano t ;

i - Juros técnicos do ano t ;

q_{x+t}^* - Mortalidade esperada durante o ano t ;

f_t - Probabilidade de resgate¹ durante o ano t ;

Podemos então definir como valor esperado do *cash flow* (valor do fundo) de cada apólice em vigor no início do ano t , projectado para o final do ano, se a apólice estiver em vigor, como:

$$F_t = F_{t-1}(1+i) + (P_t - e_t)(1+i),$$

$t : 1, 2, \dots, T$, sendo T o horizonte temporal considerado.

Entende-se por *cash flow out* de um contrato de seguros as saídas por mortalidade, resgates e vencimentos.

Com os acontecimentos correspondentes às saídas por mortalidade ou resgate, podem-se construir variáveis aleatórias de *Bernoulli*, atribuindo valor um à saída da apólice e valor zero à permanência da apólice na seguradora.

Definamos uma variável aleatória X : saída por mortalidade ou saída por resgate de uma apólice, que segue uma distribuição de *Bernoulli* com parâmetro p , isto é,

$$X \sim \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}, 0 < p < 1 \Leftrightarrow X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

onde,

$p = q_{x+t}^*$, em caso de morte da pessoa segura durante o ano t ou $p = f_t$, em caso de resgate do valor do fundo durante o ano t .

Para simular estes acontecimentos, vamos utilizar uma sequência de números aleatórios com distribuição uniforme: $U(0,1)$.

Seja r o número extraído,

- ✓ Se $r > 1 - p$ a apólice sai, e
- ✓ Se $r \leq 1 - p$ a apólice não sai.

¹ Esta probabilidade foi calculada através de um modelo matemático elaborado pelo Prof. Giovanni Galatioto, cujos resultados foram fornecidos pela seguradora x .

Em caso de saída por mortalidade ou por resgate, o montante a pagar é o valor do fundo nesse momento.

Podemos então definir o montante acumulado de responsabilidades de cada apólice no final do horizonte temporal pela seguinte equação:

$$RL_{i,n} = F_{t_i} (1 + j_{T-t_i})^{T-t_i};$$

sendo, t_i , o momento de saída por vencimento, resgate ou morte e j_t , a curva que traduz as taxas de juro *forward* para $t \in (0, T)$.

Teoricamente, j deveria ter em conta a taxa de retorno esperada dos investimentos, o que não é possível numa primeira aproximação pois a respectiva carteira ainda não foi determinada.

3.2 – APLICAÇÃO

Este capítulo tem por objectivo expor e “comentar” os resultados obtidos da aplicação do modelo apresentado anteriormente.

A companhia de seguros X disponibilizou os dados para conseguirmos avaliar as responsabilidades futuras de um determinado conjunto de apólices referente a um contrato de seguros.

Os dados são referentes a 31 de dezembro de 2002 e, dizem respeito às apólices activas e reduzidas, do seguinte contrato de seguros:

Economia do Contrato:

É um contrato estabelecido no âmbito individual.

Em caso de vida da pessoa segura no final do contrato, é pago o valor do fundo.

Em caso de morte da pessoa segura, no decurso da duração do contrato, é pago o valor do fundo nesse momento.

Características Técnicas do Contrato:

É um seguro de capital diferido com contra seguro a prémios únicos sucessivos, de valor constante.

Definição do Valor do Fundo:

A Crédito:

- 100% dos prémios anuais regulares;
- Juro sobre o valor diário do fundo, determinado á taxa diária composta na base do juro garantido de 4% ano.

A débito:

- Despesas de 5% sobre os prémios regulares;
- As importâncias pagas ao segurado, incluída a dedução de 2% relativa aos resgates.

Bases Técnicas:

Taxa técnica de juro: $i = 4\%$ ao ano (juro composto)

Cargas: $e = 5\%$

Penalização por resgate: 2%

Resgate: Só pode ser efectuado ultrapassado o período de carência de 2 anos.

Participação nos resultados: As apólices não conferem direito a participação nos resultados.

Toda a informação disponível pode ser consultada, por apólice na tabela seguinte:

Tabela 12 – Valores Observados por apólice

Nr. de ordem segurado	Modalidade	Nr. Apólice	Taxa técnica	Data nascimento	Data início contrato	Prazo Contrato	Prémio Anual	Valor do Fundo 31/12/2002
1	33	50008899	4%	25-10-1965	01-01-1994	10	498,80	1.692,67
2	33	50008900	4%	25-10-1965	01-01-1994	10	498,80	1.457,95
3	33	50008926	4%	24-12-1943	01-01-1994	10	498,80	2.226,34
4	33	50008927	4%	29-09-1943	01-01-1994	10	498,80	2.227,24
5	33	50009100	4%	18-02-1949	01-01-1994	10	498,80	4.818,14
6	33	50009156	4%	15-11-1967	01-01-1994	10	997,60	20.049,88
7	33	50009301	4%	22-10-1967	01-01-1994	10	498,80	4.715,01
8	33	50009504	4%	02-08-1959	01-01-1995	15	498,80	4.675,46
9	33	50009539	4%	23-03-1941	01-01-1995	9	498,80	12.306,71
10	33	50009579	4%	28-04-1937	01-01-1995	10	498,80	4.733,97
11	33	50009580	4%	28-04-1937	01-01-1995	10	498,80	4.733,97
12	33	50009599	4%	14-04-1950	01-01-1995	15	1.052,84	8.171,05
13	33	50009613	4%	15-08-1934	01-01-1995	15	0,00	8.170,95
14	33	50009630	4%	15-08-1946	01-01-1995	10	498,80	1842,78
15	33	50009645	4%	03-12-1961	01-01-1995	20	498,80	4716,6
16	33	50009751	4%	19-09-1954	01-01-1995	20	498,8	7682,84
17	33	50009791	4%	02-02-1962	01-01-1995	15	748,2	5049,76
18	33	50009829	4%	27-01-1935	01-01-1995	10	0	9024,67
19	33	50009916	4%	17-03-1958	01-01-1995	18	498,8	4345,15
(...)								

A tabela acima é apenas uma ilustração dos dados referentes a 19 apólices, das 402 estudadas.

Analisando a tabela acima, obtêm-se os seguintes resultados:

1. A idade média é de 48;
2. O valor total do fundo a 1 de Janeiro de 2003 é de 3 204 455, 91 euros;
3. A duração média é de 15 anos;
4. O horizonte temporal é de 23 anos;
5. Todos os contratos tiveram início a um de Janeiro;
6. O Fraccionamento dos prémios é anual.

Foram considerados os seguintes pressupostos na evolução do fundo.

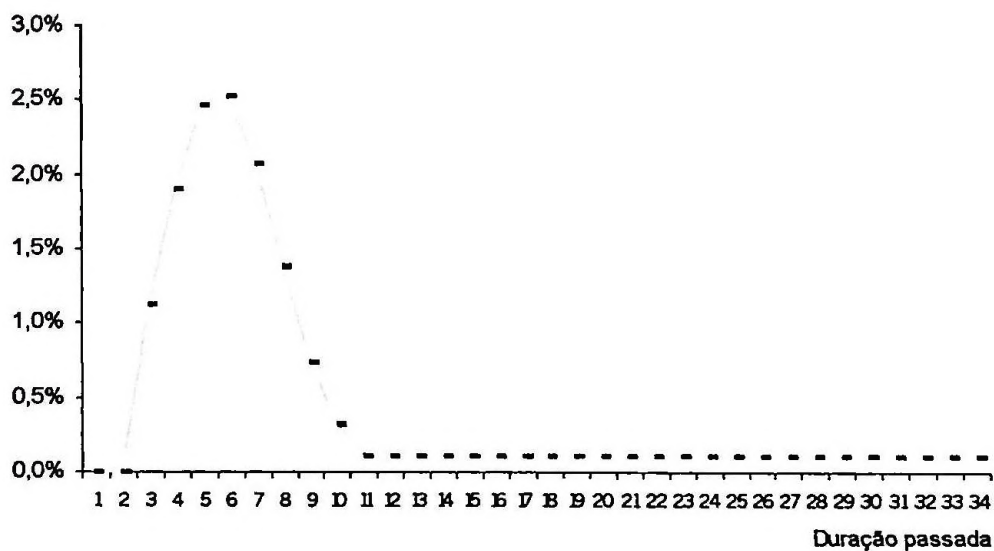
Tabela 13 – Pressupostos

	Anual
Probabilidade de resgate durante o ano t	Gráfico 2
Mortalidade esperada na carteira	50% GKM80
Juro Técnico	4%
Penalização por Resgate	2%
Carga de gestão	5%

Suponhamos que as despesas incorridas pela seguradora correspondem exactamente às hipóteses consideradas nas bases técnicas dos prémios e que não existe resseguro.

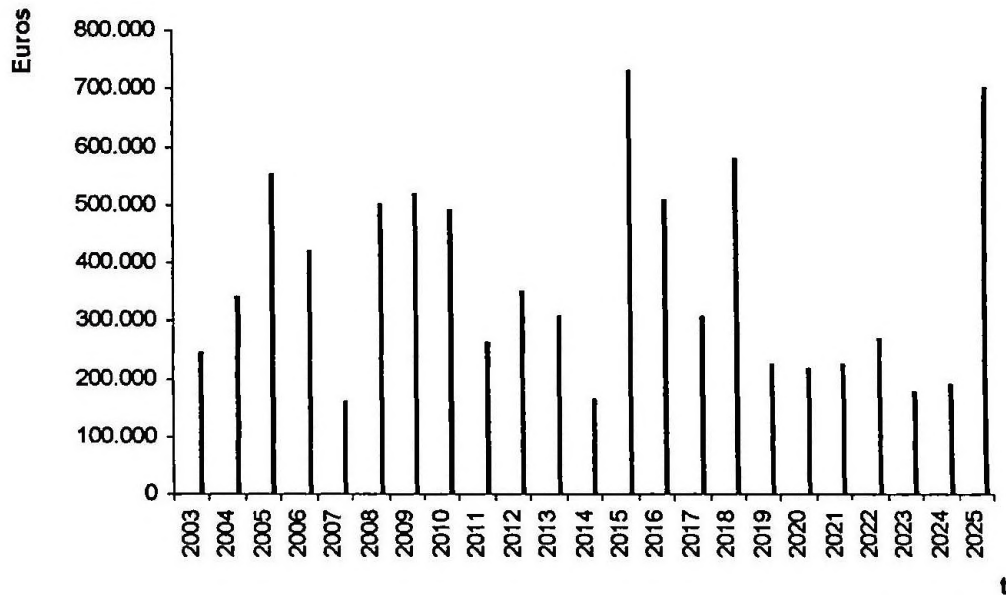
O gráfico seguinte mostra a probabilidade de resgate (a mesma foi disponibilizada pela seguradora X).

Gráfico 2 – Probabilidade de Resgate



De seguida vamos calcular as saídas por vencimento ao longo do horizonte temporal para o conjunto de apólices estudadas.

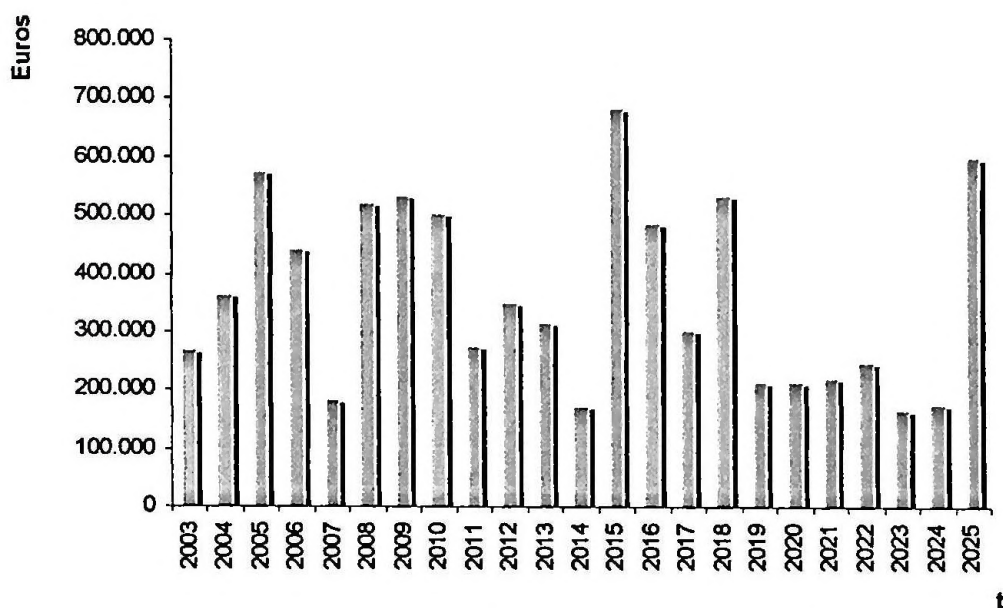
Gráfico 3 – Saídas no final de cada ano
Vencimentos



Note-se o acentuado número de vencimentos a partir de 2015.

No gráfico seguinte é possível observar os montantes médios anuais (de 1000 simulações) das saídas por mortalidade, resgate e vencimento do fundo, para o total de apólices estudadas. Estes valores foram calculados conforme se explicou no modelo anterior.

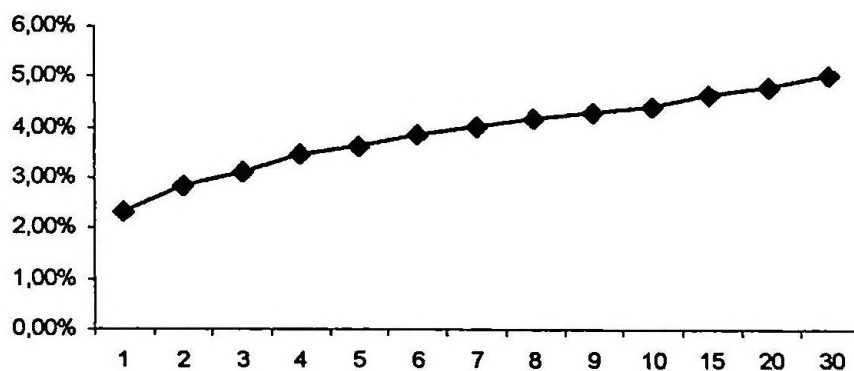
Gráfico 4 – Montante médio de saídas no final de cada ano (1000 simulações)
Vencimento – Morte – Resgate



O aspecto do gráfico é semelhante ao do gráfico anterior, já que os vencimentos que não são aleatórios constituem a parte mais significativa das saídas.

Estes montantes de saídas anuais foram projectados para o final do vigésimo terceiro ano, segundo a seguinte curva de taxas de juro.

Gráfico 5 – Taxas de juro



Na tabela seguinte conseguimos visualizar vinte simulações (das mil calculadas) do montante acumulado de saídas no final do vigésimo terceiro ano para o universo total de apólices.

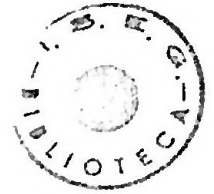


Tabela 14 – RL

RL
14.712.782,02
14.815.436,01
14.794.445,77
14.867.309,28
14.717.018,39
14.709.128,55
14.780.731,14
14.717.939,04
14.828.229,70
14.736.755,59
14.761.790,42
14.825.407,72
14.749.812,70
14.617.730,05
14.691.289,28
14.720.214,30
14.751.928,55
14.805.024,12
14.804.911,62

...

Onde RL é o montante acumulado de saídas no final do vigésimo terceiro ano.

Todos os cálculos efectuados durante esta secção foram obtidos recorrendo a macros em VBA (*Visual Basic for Applications*) do *MS-Excel*, cujo código pode ser consultado no anexo IV.

4 – APLICAÇÃO PRÁTICA

Este capítulo tem por objectivo a aplicação do modelo de selecção de activos a deter numa carteira de investimentos para fazer fase a um conjunto de responsabilidades assumidas por uma seguradora numa dada carteira. Este modelo foi detalhadamente descrito no capítulo II.

Para o efeito, vão ser utilizados resultados dos modelos descritos no capítulo I e III, isto é, o modelo de investimento de *Wilkie* e o modelo para avaliar as responsabilidades futuras da companhia.

A notação aqui utilizada é a mesma dos capítulos anteriores e idêntica à proposta por *Wilkie*.

Esta aplicação foi feita com auxílio do VBA (*Visual Basic for Applications*) do *MS-Excel*, cujo código pode ser consultado nos anexos III, IV e V.

Pressupostos

Foram considerados os seguintes propostos:

1. O horizonte temporal é de 23 anos, os quais remete da data termo das apólices consideradas;
2. Os *cash flows* quer dos activos, quer das responsabilidades, são apenas considerados no final de cada ano.
3. O retorno acumulado dos investimentos foi calculado numa base estocástica, através de um conjunto de mil cenários diferentes, cada um deles simulado de acordo com o modelo de investimento de *Wilkie*.
4. Os pagamentos relativos às responsabilidades foram igualmente calculados numa base estocástica, através de um conjunto de mil cenários diferentes, cada um deles simulado de acordo com o modelo descrito no capítulo III;
5. Os pagamentos relativos às responsabilidades foram projectados para o final do vigésimo terceiro ano (segundo a curva que traduz as taxas de juro portuguesas).

Procedemos ao cálculo dos retornos acumulados para os diferentes tipos de activos estudados. A forma de cálculo foi a descrita no capítulo I (foram tidos em conta os parâmetros e valores iniciais dados no mesmo capítulo; ver tabela 2 e tabela 3).

Foram consideradas as seguintes variáveis:

PR(23) - O retorno acumulado das ações no final do vigésimo terceiro ano;

CR(23) - O retorno acumulado das obrigações de longo prazo no final do vigésimo terceiro ano;

AR(23) - O retorno acumulado do imobiliário no final do vigésimo terceiro ano.

RR(23) - O retorno acumulado das obrigações indexadas no final do vigésimo terceiro ano;

Apresentamos de seguida uma amostra dos valores simulados para os retornos acumulados destes quatro tipos de activos, isto é, para cada um, o retorno de um investimento no final do horizonte temporal, de uma unidade monetária no momento zero.

Os valores da tabela seguinte foram calculados com a ajuda do programa que se encontra no anexo III.

Tabela 15 – Valores de 20 (das 1000 calculadas) simulações do retorno acumulado por unidade investida

Acções	Obrigações de longo prazo	Imobiliário	Obrigações indexadas
11,44226	7,382332	20,85076	8,73589
8,131656	4,970462	8,634976	5,148961
12,30438	6,881715	10,58504	8,423498
5,9794	4,832862	13,71783	7,393371
5,289888	7,284302	12,78812	5,20784
10,94174	5,919248	20,64082	10,19945
9,591053	4,051063	18,53901	6,788239
9,490449	9,564793	21,06349	13,38793
5,949591	5,327719	11,92276	4,938663
48,64776	6,3425	11,65733	14,70144
4,029916	3,692513	12,5862	3,924798
3,964431	6,057049	21,63637	11,01017
1,67453	3,485432	10,65672	3,214188
6,645259	7,793083	13,75774	7,629717
3,412443	5,283029	10,73159	5,068422
11,33273	9,179681	46,47166	9,910992
7,07916	6,967664	24,4278	10,0086
16,12027	5,843741	18,4099	5,449575
13,95967	5,875918	24,24699	4,70165
33,65075	5,00366	10,0237	5,546439

(...)

De seguida apresentam-se, para melhor visualização, os histogramas dos valores obtidos acima, para as mil simulações.

Gráfico 6 – Histograma do retorno acumulado de acções

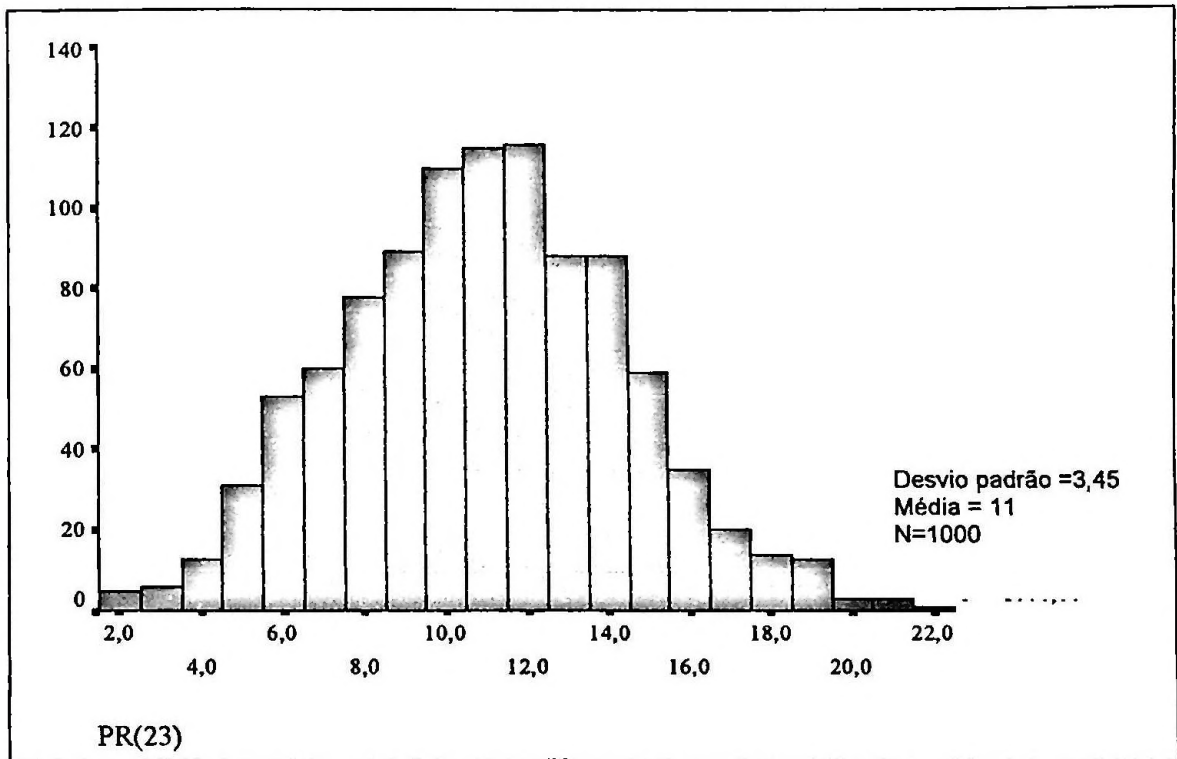


Gráfico 7 – Histograma do retorno acumulado de obrigações de longo prazo

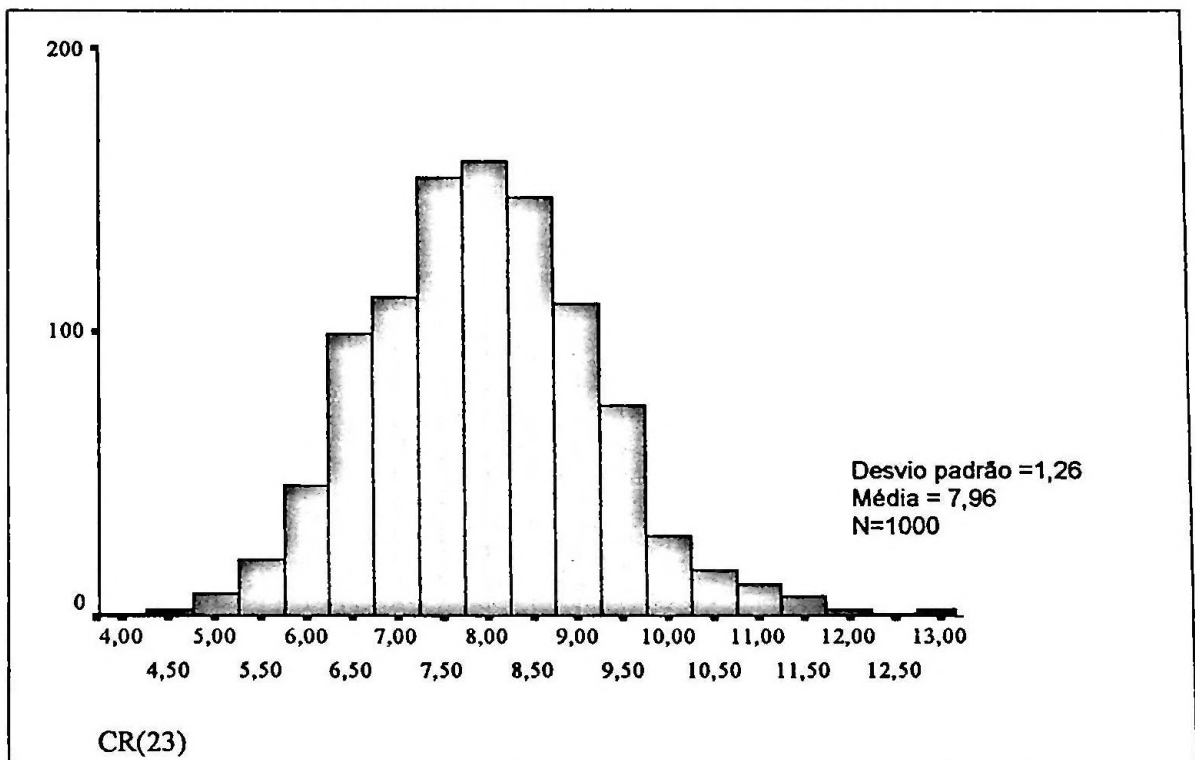


Gráfico 8 – Histograma do retorno acumulado do imobiliário

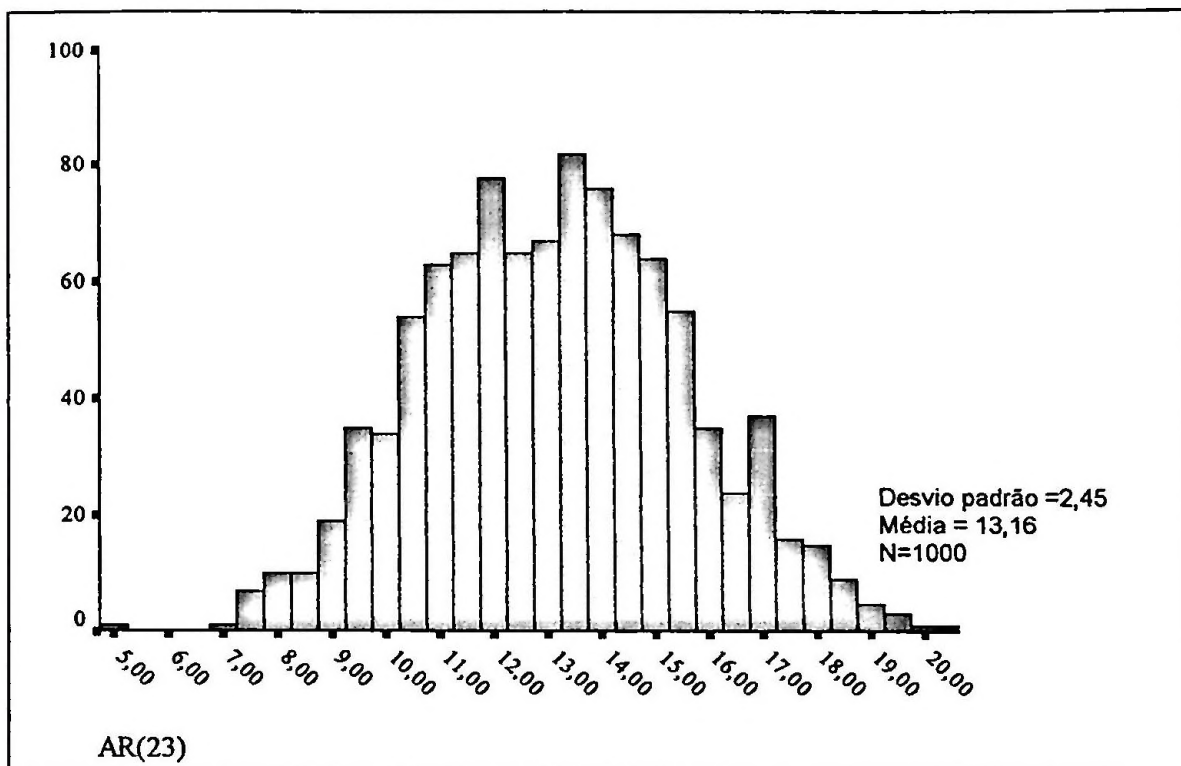
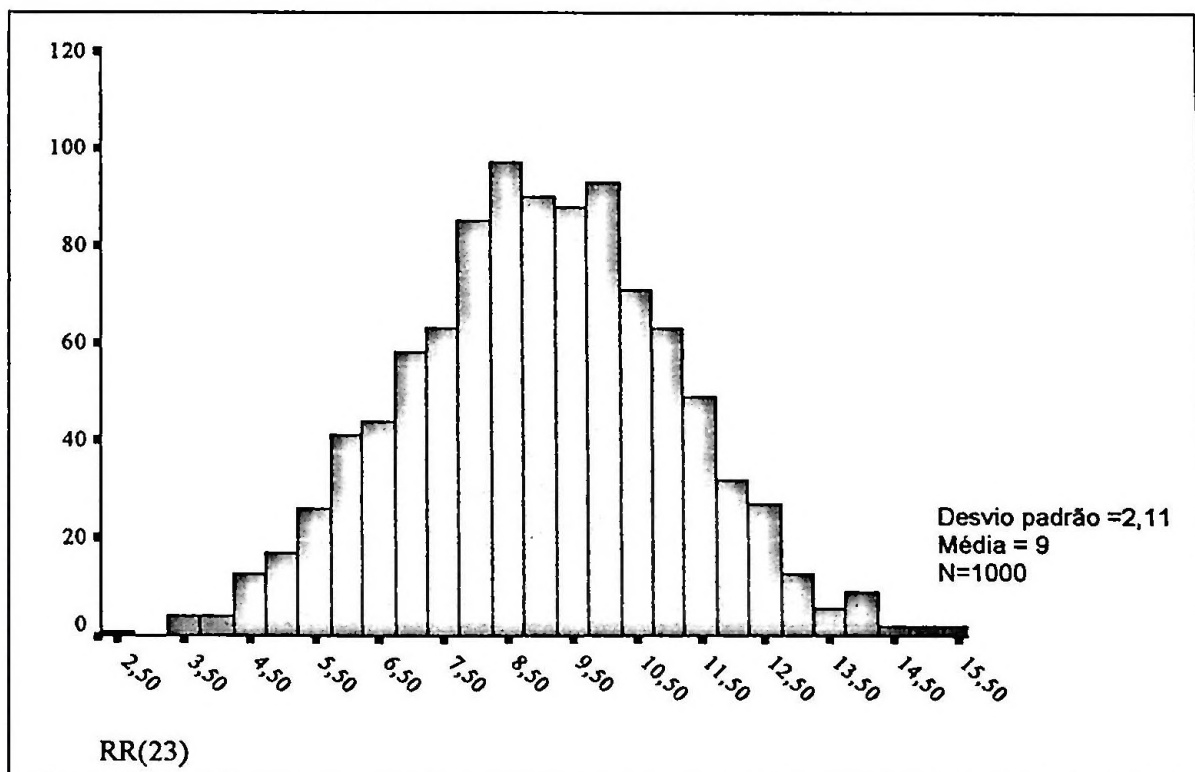


Gráfico 9 – Histograma do retorno acumulado de obrigações indexadas



A média e o desvio padrão do retorno unitário acumulado dos quatro tipos de activos no final do vigésimo terceiro ano, podem observar-se na tabela seguinte.

Tabela 16 – Média e desvio padrão do retorno acumulado por unidade investida

	Acções	Obrigações de longo prazo	Imobiliário	Obrigações Indexadas
Média	11	7,96	13,16	9
Desvio padrão	3,45	1,26	2,45	2,11

Relativamente às responsabilidades *RL*, foram consideradas as simulações obtidas no capítulo III.

Nas secções seguintes apresentamos vários exemplos de aplicação do modelo consoante o número e tipo de activos considerados.

4.1 – Caso de quatro activos – acções, obrigações de longo prazo, imobiliário e obrigações indexadas.

Neste exemplo vamos considerar quatro tipos de activos diferentes: - acções, obrigações de longo prazo, imobiliário e obrigações indexadas.

Os valores obtidos encontram-se nas tabelas seguintes, onde a ordem das variáveis é: acções, obrigações de longo prazo, imobiliário e obrigações indexadas.

Amostras do retorno acumulado destes quatro tipos de activos e do montante acumulado das responsabilidades no final do vigésimo terceiro ano podem ser observadas na tabela 15 e na tabela 14 respectivamente.

Os valores das tabelas seguintes foram calculados com ajuda do programa que se encontra no anexo V.

Tabela 17 – Matriz de Correlações entre os retornos acumulados dos activos em carteira

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0,289 & 0,368 & 0,529 \\ & 1 & 0,421 & 0,551 \\ & & 1 & 0,563 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Da matriz anterior concluímos que as correlações são muito próximas de zero, logo, não têm grande influência na constituição da carteira.

Calculamos também o vector de correlações entre o retorno acumulado de cada activo e a taxa de retorno das responsabilidades:

Tabela 18 – Vector de Correlações entre o retorno acumulado de cada activo e a taxa de retorno das responsabilidades

$$\rho = \begin{bmatrix} 0,013 \\ 0,018 \\ 0,021 \\ 0,036 \end{bmatrix}$$

Concluimos que os diferentes activos estão positivamente correlacionados com as responsabilidades, embora essa correlação seja também diminuta.

Na tabela seguinte estão apresentados os resultados da aplicação do modelo de alocação de activos, para diferentes valores dos parâmetros E (excedente final esperado da carteira) e ν (grau de risco) e para os seguintes preços de activos (arbitrariamente fixados):

- ✓ 35 Euros por acção;
- ✓ 50 Euros por cada obrigação de longo prazo;
- ✓ 40 Euros por unidade de um fundo imobiliário;
- ✓ 45 Euros por obrigação indexada.

Obtivemos os seguintes valores por aplicação do modelo de selecção de carteira na óptica do actuário.

Tabela 19 – Óptica do actuário para quatro activos

Parâmetros		Quantidades				Valores da carteira		
E	ν	Acções	Obrigações Longo Prazo	Imobiliário	Obrigações Indexadas	P	E	V
0	0	340,35	43198,48	1421,00	476,11	2250101,10	0	$1,6787 \cdot 10^{13}$
		0,53%	95,99%	2,53%	0,95%			

Verificamos que a carteira que garante o *matching* no final do vigésimo terceiro ano distribui os activos da seguinte forma: 0,53% para acções, 95,99% para obrigações de longo prazo, 2,53% para imobiliário e 0,95% para obrigações indexadas. O preço resultante para esta combinação de activos é 2 250 101 euros.

A carteira óptima segundo o actuário é a que se obtêm para um retorno esperado zero e um grau de risco zero; perante esta conjuntura, este investe uma grande parte em obrigações de longo prazo, pois este é o activo que apresenta menor risco.

A carteira de *matching*, tal como no exemplo de *Wise* e *Wilkie*, não é eficiente, visto que o valor do grau de risco a partir do qual se tem carteiras eficientes, ν , é maior que zero.

Vamos calcular, em primeiro lugar, o valor do excedente final da carteira de variância mínima:

$$\frac{\delta V}{\delta x} = 0 \Rightarrow x = V^{-1}c$$

$$E_c = e'x - E_L \Rightarrow E_c = e'V^{-1}c - E_L$$

$$E_c = 14451105,75$$

O ν (grau de risco) para a carteira de *matching* é o resultado da seguinte fórmula:

$$\nu = 2 \times \frac{E_c - E}{e'V^{-1}p} = 14919161,29$$

Reconstruindo a tabela acima para o valor encontrado, verificamos que o preço da carteira desce aumentando o risco da carteira, medido em termos de variância.

Tabela 20 – Óptica do actuário para quatro activos

Parâmetros		Quantidades				Valores da carteira		
E	V	Acções	Obrigações Longo Prazo	Imobiliário	Obrigações Indexadas	P	E	V
0	0	340,35 0,53%	43198,48 95,99%	1421,00 2,53%	476,11 0,95%	2 250 101	0	1,6787*10 ¹³
0	14919161	1741,86 3,40%	30813,44 85,90%	6130,68 13,67%	-1185,77 -2,98%	1 793 505	0	2,0197*10 ¹³
0	29838323	3143,37 8,23%	18428,41 68,92%	10840,35 32,43%	-2847,64 -9,59%	1 336 908	0	3,0419*10 ¹³
0	32822155	3423,68 9,62%	15951,40 64,03%	11782,29 37,84%	-3180,02 -11,49%	1 245 589	0	3,3281*10 ¹³

Com o aumento do grau de risco verifica-se um aumento na percentagem investida nos activos com maior rendimento e risco, o imobiliário e acções, diminuindo a percentagem investida nos activos de menor rendimento, as obrigações de longo prazo e as obrigações indexadas.

4.2 – Caso de dois activos – acções e obrigações de longo prazo.

A tabela 21 evidencia os resultados do modelo de selecção de carteiras para dois activos.

Tabela 21 – Óptica do actuário para dois activos, acções e obrigações de longo prazo

Parâmetros		Quantidades		Valores da carteira		
E	V	Acções	Obrigações Longo Prazo	P	E	V
0	0	833,51 1,24%	46618,19 98,76%	2 360 082	0	1,7062*10 ¹³
0	14457860	3231,39 5,03%	42742,59 94,97%	2 250 228	0	1,7857*10 ¹³
0	28915721	5629,27 9,21%	38866,99 90,79%	2 140 374	0	2,0241*10 ¹³
0	72289302,53	12822,91 24,78%	27240,18 75,22%	1 810 811	0	3,6921*10 ¹³

Com o aumento do grau de risco verifica-se um aumento na percentagem investida em acções (activo com maior rendimento e risco) em detrimento da percentagem investida em obrigações de longo prazo.

4.3 – Caso de dois activos – imobiliário e obrigações de longo prazo.

A tabela 22 evidencia os resultados do modelo de selecção de carteiras para dois activos.

Tabela 22 – Óptica do actuário para dois activos, imobiliário e obrigações de longo prazo

Parâmetros		Quantidades		Valores da carteira		
E	V	Imobiliário	Obrigações de longo prazo	P	E	V
0	0	1599,75 2,84%	43856,07 97,16%	2 256 794	0	$1,6810 \cdot 10^{13}$
0	14895225	6436,72 14,08%	31431,33 85,92%	1 829 036	0	$2 \cdot 10^{13}$
0	29790449	11273,69 32,18%	19006,60 67,82%	1 401 278	0	$2,9563 \cdot 10^{13}$

Tal como no caso anterior, com o aumento do grau de risco verifica-se um aumento na percentagem investida em imobiliário (activo com maior rendimento e risco) em detrimento da percentagem investida em obrigações de longo prazo.

É de salientar que todos os cálculos tiveram como base os parâmetros que têm em conta a situação de mercado de 1982 a 1999 do Reino Unido, parametrização aparentemente irrealista perante a conjuntura actual do mercado.

A média do retorno unitário acumulado dos diferentes tipos de activos varia entre 7,96 e 13,96, contra uma taxa garantida no universo de apólices estudadas de 4%, razão pela qual os diversos preços das carteiras encontradas são bastante inferiores às provisões matemáticas existentes na seguradora para aquela modalidade.

CONCLUSÃO

A aplicação prática do modelo de investimento de *Wilkie* pode adaptar-se à realidade Portuguesa. Em todos os tipos de activos estudados, os resultados obtidos variam conforme os parâmetros considerados.

Os resultados observados encontram-se um pouco distorcidos da realidade actual dos mercados, porque se utilizaram os parâmetros propostos referentes ao período 1982-1999.

O modelo de selecção de carteira considera os montantes ou as taxas acumuladas no final do horizonte temporal. Este modelo garante o *matching* final, não considerando o equilíbrio entre activos e passivos ao longo do tempo real.

Em suma, a selecção de uma carteira de activos em presença de responsabilidades fixas, através de um modelo do tipo apresentado, consiste basicamente num problema de optimização sujeita a critérios pré definidos relativos ao binómio risco/retorno, que tanto na óptica do Actuário como na do Gestor de Investimentos, “garante” o sucesso no cumprimento das responsabilidades assumidas, pelo menos no final do horizonte temporal escolhido.

Naturalmente que o termo “garante” tem um peso relativo, tanto menor quanto o grau de risco previamente assumido.

O *matching* durante o horizonte temporal não foi de todo considerado. Seria interessante desenvolver este ponto, o que tentarei fazer em trabalhos posteriores.

Bibliografia

Wilkie A. D. (1995). *More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use*, *British Actuarial Journal*, Vol. 1, pp. 777-964.

Daykin C. D., Pentikäinen T. e Pesonen M. (1993). *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall.

Geoghegan T.J.(1992). *Report on the Wilkie Stochastic Investment Model*, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 119, pp. 173-212.

Sherris M. (1992). *Portfolio selection and Matching: A Synthesis*. *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 119, pp. 87-105.

Wilkie A. D. (1995). *Portfolio Selection in the Present of Fixed Liabilities: A Comment on "the Matching of Assets to Liabilities"*. *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 112, pp. 229 – 277.

Wilkie A. D. (1992). *Modern Financial Economics in Insurance*, ISEG – UTL.

Wise A. J. (1984a). *A Theoretical Analysis of the Matching of Assets to Liabilities*. *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 111, pp. 375-402.

Wise A. J. (1984b). *The Matching of Assets to Liabilities*. *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 111, pp. 445-485.

Wise A. J. (1987). *Matching and Portfolio Selection, Parts 1 and 2*. *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 114, pp. 113-133 and 551-568.

Fabozzi Frank J. & Konishi Atsuo (1996). *Asset / Liability Management. State-of-the-Art Investment Strategies, Risks Controls and Regulatory Requirements*, Irwin.

Murteira Bento J. F, Müller Daniel A. e Turkman K. Feridun (1993), *Análise de Sucessões Cronológicas*, McGraw Hill.

Monahan John L. (2001). Numerical Methods of Statistics - Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge Press.

Willmott Paul (2001). Introduces Quantitative Finance, Wiley.

Seydel Rüdiger (2002). Tools For Computational Finance, Springer Verlag.

ANEXOS

ANEXO I – Modelo de *Markowitz* – Carteira Tradicional

No modelo de *Markowitz* o objectivo é chegar a uma carteira óptima de investimentos tendo em conta dois factores chave, o rendimento e o risco da carteira.

O rendimento de uma carteira corresponde à soma ponderada dos rendimentos médios dos activos da carteira, o que em termos analíticos corresponde ao seguinte:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^N x_i \overline{R}_i,$$

em que,

$$x_i : \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Sendo, x_i , o peso do activo i na carteira: se for positivo, diz-se que se constitui uma posição longa no activo i , se for zero, o activo i não faz parte da carteira e se for negativo, diz-se que constitui uma posição curta no activo i , isto é, está-se em dívida neste activo; N , o número de activos em carteira; \overline{R}_i , a taxa de rendimento média do activo i e \overline{R}_p , a taxa de rendimento média da carteira.

A variância da carteira, por sua vez, apresenta-se como a soma de dois termos: a variância dos títulos, ponderada pelos quadrados das proporções investidas em cada título; e o produto dos desvios padrões, ponderado pelo produto das proporções, vezes o coeficiente de correlação. Assim sendo, verifica-se que a variância é tanto menor quanto mais negativo for o coeficiente de correlação.

Uma variância baixa indica que a maioria das taxas de rendimento estão concentradas perto de um valor médio ou valor esperado. Uma variância alta ocorre quando a maioria dos rendimentos estão distantes do valor esperado, o que significa que os valores extremos ocorrem frequentemente.

Em termos analíticos, a variância da carteira corresponde a:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N x_i x_j \sigma_{ij};$$

Sendo, σ_i , o desvio padrão da taxa de rendimento do activo i ; σ_{ij} , a covariância entre o activo i e o activo j e, ρ_{ij} , o coeficiente de correlação entre o activo i e o activo j .

O coeficiente de correlação corresponde ao quociente entre a covariância entre dois activos e o produto dos desvios padrões de cada um, ou seja, em termos analíticos:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \rho_{ij} \in [-1,1].$$

A determinação analítica da fronteira das carteiras eficientes corresponde à minimização da variância de uma carteira com N títulos para um certo rendimento pretendido e para uma dada restrição orçamental.

A carteira óptima é retirada do conjunto das carteiras eficientes e é aquela que maximiza o nível de utilidade esperada do investidor em causa. Para *Markowitz*, o que distingue os investidores é o seu grau de aversão ao risco: os avessos ao risco, os indiferentes ao risco e os amantes do risco.

No modelo de *Wise – Wilkie* também existe um parâmetro de aversão ao risco, que determina, essencialmente, a escolha da proporção a ter de cada activo em carteira.

ANEXO II – Definições

Processo Estocástico

Um processo estocástico é um modelo matemático que permite descrever, para cada momento, um fenómeno aleatório, depois de fixado o instante inicial.

Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias X_t , onde t é um parâmetro tomando valores sobre o conjunto T , designado por conjunto de índices do processo. O processo representa-se por $\{X_t; t \in T\}$ ou $\{X_t\}_{t \in T}$, no qual t , na maioria das aplicações, representa o tempo.

Neste trabalho, t representa o tempo e assume apenas valores discretos e positivos, logo pode-se dizer que o processo $\{X_t; t = 0, 1, 2, \dots\}$ tem tempo discreto.

Modelos Autoregressivos

Um modelo de séries temporais permite descrever estatisticamente o comportamento de uma sucessão de valores. A sucessão de valores é normalmente designada por X e consiste num conjunto de observações x_t , observadas em determinados momentos do tempo $t = 1, 2, \dots, n$. As séries temporais estão divididas entre as que são estacionárias e as que não são. A estacionariedade das séries é caracterizada pelo facto de o valor esperado e variância da série serem constantes (isto é, não mudam ao longo do tempo).

Um modelo autoregressivo de ordem p , linear e estacionário, para a série X pode ser escrito da seguinte forma,

$$x_t = \mu + \sum_{j=1}^p a_j (x_{t-j} - \mu) + e_t.$$

O valor de x_t depende dos p valores anteriores de x (isto é, depende dos valores de $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$) e de um resíduo aleatório e_t , sendo este o último responsável pela introdução dos factores aleatórios no processo. Assume-se, normalmente, que cada e_t segue uma distribuição Normal de média nula e variância σ^2 e que os sucessivos e_t são independentes.

Fazendo uso da notação própria da análise de séries temporais, o exemplo mais simples deste tipo de modelos é o modelo autoregressivo de ordem 1 – AR(1) – que

pode ser descrito como $x_t \sim \text{AR1}(\mu, a, \sigma)$, ou seja, $x_t = \mu + a(x_{t-1} - \mu) + e_t$. Neste caso o desvio de x_t em relação à média μ é proporcional (a é a constante de proporcionalidade) ao desvio em relação à média do período anterior acrescida de um factor aleatório, que tem média nula e desvio padrão σ . A série é estacionária se e só se $-1 < a < 1$.

Processos Estocásticos Estacionários

Em termos genéricos, os processos estacionários representam um sistema no seu estado de equilíbrio estatístico em torno de um nível médio fixo, isto é, este sistema tem propriedades probabilísticas que são invariantes ao longo do tempo.

Diz-se que $\{X_t; t \in T\}$ é um processo estocástico fortemente estacionário se, para qualquer inteiro positivo n , para quaisquer inteiros t_1, t_2, \dots, t_n e k , os vectores n – dimensionais, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ possuem a mesma função de distribuição. Isto equivale a dizer que, é indiferente observar o processo nos pontos t_1, t_2, \dots, t_n ou nos pontos $t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{n+k}$.

Diz-se que $\{X_t; t \in T\}$ é um processo estocástico fracamente estacionário se, para qualquer inteiro positivo n , para quaisquer inteiros t_1, t_2, \dots, t_n e k , os vectores n – dimensionais, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ possuem momentos até à segunda ordem e esses momentos são iguais. Isto equivale a dizer que, a média e a variância são constantes,

$$E\{|X_t|\} < \infty \text{ e } E\{X_t\} = \mu,$$

$$E\{|X_t^2|\} < \infty \text{ e } V\{X_t\} = \sigma^2,$$

A covariância e correlação conferem da seguinte propriedade,

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k), \quad \forall t_1, t_2,$$

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t_1 + k, t_2 + k), \quad \forall t_1, t_2,$$

o que significa que $\gamma_k = \gamma(t, t+k)$ e $\rho_k = \rho(t, t+k)$ são independentes de momento histórico de ocorrência, t , dependendo apenas do desfasamento temporal, k .

Ruído Branco

O ruído branco é um processo estacionário até à segunda ordem que desempenha um papel importante na modelização de sucessões cronológicas.

Diz-se que um processo $\{X_t; t \in T\}$ constitui um ruído branco quando é formado por uma sucessão de variáveis aleatórias com a mesma distribuição, média constante, $E\{\varepsilon_1\} = \mu_\varepsilon$, geralmente igual a zero, variância constante, $V\{\varepsilon_1\} = \sigma_\varepsilon^2$ e covariância $\gamma_k = 0$ para todo o inteiro $k \neq 0$. Trata-se, por definição, de um processo estacionário em covariância.

Processo Autoregressivo de Primeira Ordem [AR(1)]

O processo X , diz-se $AR(1)$ quando satisfaz a equação estocástica às diferenças,

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - \phi)X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \phi_1(B)X_t = \varepsilon_t,$$

onde ϕ é um número real e ε_1 um ruído branco. A $\phi_1(B) = 1 - \phi B$ chama-se polinómio auto regressivo de primeira ordem. A condição de estacionaridade exige que a raiz do polinómio anterior tenha módulo superior à unidade,

$$\phi_1(B) = 0 \Leftrightarrow 1 - \phi B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{\phi},$$

$$|B| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\phi} \right| > 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1.$$

Em suma, num processo estacionário, v_k descreve exponencialmente para zero mas nunca se anula. Se $\phi_1 > 0$, ρ_k só assume valores positivos, se $\phi_1 < 0$, ρ_k altera o sinal.

Se $\rho_1 = \phi$, isto é, a correlação, ou o grau de acompanhamento, entre cada realização da variável X_t e a mesma realização desfasada um ano é de ϕ . As correlações para um lag temporal, k , superior a um ano igualam a ϕ^k .

Processo de Médias Móveis de Primeira Ordem [MA(1)]

O processo X_t , diz-se $MA(1)$ quando satisfaz a equação estocástica às diferenças, $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$, onde θ é um número real e ε_t um ruído branco. A $\theta_1(B) = 1 - \theta B$ chama-se polinómio de médias móveis de primeira ordem. Estes processos são sempre estacionários, qualquer que seja o número real θ . Neste caso, a correlação entre as realizações da variável aleatória X_t , desfasadas um ano equivalem a:

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{1 + \theta^2},$$

e verifica-se que, o seu módulo é sempre inferior a 0,5. Para *lags* temporais superiores a um ano a correlação é nula.

Anexo III – Listagem do programa em VBA – Modelo de Retorno dos Investimentos de *Wilkie*.

```

*****
'PROGRAMA DE CÁLCULO DOS RETORNOS ACUMULADOS DE DIFERENTES TIPOS DE
ACTIVOS
'Autor do Programa: Soraia Rodrigues Branco
'Data: Julho de 2004
*****

Private Sub cmdButtonSimular_Click()

Worksheets("Modelo_TaxaInflacção").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Modelo_DividendYieldAcções").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Classel_Pt_PRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Classell_Ct_CRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Classelll_Bt_BRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Modelo_PropertyYield").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("ClasselV_At_ART").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("ClasseV_Rt_RRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_YN").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_DM").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_CM").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_CN").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_BN").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Varint_EM").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("N01_YZ").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("N01_DZ").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("N01_CZ").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("N01_ZZ").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("Resumo").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FQt").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GQt").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FPRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GPRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FCRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GCRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FBRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GBRT").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FART").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GART").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("FRRt").Range("A1:BA2000").Clear
Worksheets("GRRt").Range("A1:BA2000").Clear

Worksheets("Dados_Sistema").Range("A1:BA2000").Clear

For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
  For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
    ' I(t) Taxa de Inflacção durante o período t-1;t => Q(t) Índice de Preços do Consumidor
    no momento t
    Call ModeloTaxaInflacção(i, j)
    ' Y(t) Dividend Yield de uma Acção no momento t
    Call ModeloDividendYieldAcções(i, j)
    ' D(t) Share Dividends | Índice dos Dividendos das Acções no momento t
    Call ModeloDividendosAcções(i, j)
  
```

```

    ' Y(t) + D(t) => P(t) Price Index of Shares | Índice de Preços das Acções => PR(t) Total
Nominal Returns for Shares
    Call Classel_Pt_PRRt(i, j)
    ' C(t) Long Term Interest Rates (Obrigações) Yield das Consols no momento t => CR(t)
Retorno Total Nominal das Obrigações
    Call Classell_Ct_CRt(i, j)
    ' B(t) Short Term Interest Rates ("Cash") | Taxa de Juro a curto prazo no momento t =>
BR(t) Retorno Total Nominal do "Cash"
    Call ClassellI_Bt_BRt(i, j)
    ' Z(t) Property Yield | Yield do Imobiliário no momento t
    Call ModeloPropertyYield(i, j)
    ' E(t) Property Income
    Call ModeloPropertyIncome(i, j)
    ' A(t) Property Price Index => AR(t) Retorno Nominal Total do Imobiliário
    Call ClasselV_At_ARt(i, j)
    ' R(t) Real Yield On Index Linked Stocks at time t => RR(t) Total Nominal Returns
    Call ClasseV_Rt_RRt(i, j)

```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
Call Ft
```

```
Call Gt
```

```
End Sub
```

```
Public i As Integer
```

```
Public j As Integer
```

```
Private Function I1(ByVal QMU As Single, ByVal QA As Single, ByVal QSD As Single, ByVal I0
As Single, ByVal QZ As Single) As Single
```

```
    I1 = QMU + QA * (I0 - QMU) + QSD * QZ
```

```
End Function
```

```
Private Sub ModeloQt(ByVal ix As Integer, ByVal jxx As Integer)
```

```
    Dim Q0x As Single
```

```
    If jxx = 1 Then
```

```
        Q0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 10)
```

```
        Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7,
5) + 2) = Q0x * Exp(Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jxx))
```

```
    Else
```

```
        Q0x = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jxx +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2 - 1)
```

```
        Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7,
5) + 2) = Q0x * Exp(Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jxx))
```

```
    End If
```

```
End Sub
```

```
Public Sub ModeloTaxaInflação(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
```

```
    Dim QMUx As Single
```

```
    Dim QAx As Single
```

```
    Dim QSDx As Single
```

```
    Dim I0x As Single
```

```
    Dim QZx As Single
```

```
    If jx = 1 Then
```

```
        QMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 10)
```

```
        QAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 10)
```

```
        QSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 10)
```

```
        I0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(10, 10)
```

```
        QZx = Normal(0, 1)
```

```
        Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx) = I1(QMUx, QAx, QSDx, I0x, QZx)
```

```
    Else
```

```

    QMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 10)
    QAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 10)
    QSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 10)
    I0x = Worksheets("Modelo_TaxaInflacção").Cells(ix, jx - 1)
    QZx = Normal(0, 1)
    Worksheets("Modelo_TaxaInflacção").Cells(ix, jx) = I1(QMUx, QAx, QSDx, I0x, QZx)
End If
Call ModeloQt(ix, jx)
End Sub
Private Function Y1(ByVal YMU As Single, ByVal YW As Single, ByVal YN As Single, ByVal It
As Single) As Single
    Y1 = Exp(YW * It + Log(YMU) + YN)
End Function
Public Sub ModeloDividendYieldAcções(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
    Dim YMUx As Single
    Dim YAx As Single
    Dim YWx As Single
    Dim YSDx As Single
    Dim YN0x As Single
    Dim YZx As Single
    Dim Itx As Single
    Dim YN1x As Single

    If jx = 1 Then
        YMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 15)
        YWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 15)
        YAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 15)
        YSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 15)
        YN0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(11, 15)
        YZx = Normal(0, 1)
        Worksheets("N01_YZ").Cells(ix, jx) = YZx
        Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflacção").Cells(ix, jx)
        YN1x = YAx * YN0x + YSDx * YZx
        Worksheets("VarInt_YN").Cells(ix, jx) = YN1x
        Worksheets("Modelo_DividendYieldAcções").Cells(ix, jx) = Y1(YMUx, YWx, YN1x, Itx)
    Else
        YMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 15)
        YWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 15)
        YAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 15)
        YSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 15)
        YN0x = Worksheets("VarInt_YN").Cells(ix, jx - 1)
        YZx = Normal(0, 1)
        Worksheets("N01_YZ").Cells(ix, jx) = YZx
        Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflacção").Cells(ix, jx)
        YN1x = YAx * YN0x + YSDx * YZx
        Worksheets("VarInt_YN").Cells(ix, jx) = YN1x
        Worksheets("Modelo_DividendYieldAcções").Cells(ix, jx) = Y1(YMUx, YWx, YN1x, Itx)
    End If
End Sub

Private Function D1(ByVal D0 As Single, ByVal DW As Single, ByVal DM1 As Single, ByVal It
As Single, ByVal DMU As Single, ByVal DY As Single, ByVal YE0 As Single, ByVal DB As
Single, ByVal DE0 As Single, ByVal DSD As Single, ByVal DZ As Single) As Single
    D1 = D0 * Exp(DW * DM1 + (1 - DW) * It + DMU + DY * YE0 + DB * DE0 + DSD * DZ)
End Function

Public Sub ModeloDividendosAcções(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
    Dim DMUx As Single
    Dim DYx As Single
    Dim DSDx As Single

```



```

Dim DWx As Single
Dim DDx As Single
Dim DBx As Single
Dim DE0x As Single
Dim D0x As Single
Dim DM0x As Single
Dim YE0x As Single
Dim DZx As Single
Dim Itx As Single
Dim DM1x As Single

```

```

If jx = 1 Then

```

```

    DMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 21)
    DYx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 21)
    DSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 21)
    DWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 21)
    DDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(10, 21)
    DBx = Worksheets("Parâmetros").Cells(11, 21)
    D0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(13, 21)
    DM0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(14, 21)
    DZx = Normal(0, 1)
    Worksheets("N01_DZ").Cells(ix, jx) = DZx
    Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
    DM1x = DDx * Itx + (1 - DDx) * DM0x
    Worksheets("VarInt_DM").Cells(ix, jx) = DM1x
    YE0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(15, 21)
    DE0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(12, 21)
    Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ix, jx) = D1(D0x, DWx, DM1x, Itx, DMUx,
DYx, YE0x, DBx, DE0x, DSDx, DZx)
Else
    DMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(6, 21)
    DYx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 21)
    DSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 21)
    DWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 21)
    DDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(10, 21)
    DBx = Worksheets("Parâmetros").Cells(11, 21)
    D0x = Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ix, jx - 1)
    DM0x = Worksheets("VarInt_DM").Cells(ix, jx - 1)
    DZx = Normal(0, 1)
    Worksheets("N01_DZ").Cells(ix, jx) = DZx
    Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
    DM1x = DDx * Itx + (1 - DDx) * DM0x
    Worksheets("VarInt_DM").Cells(ix, jx) = DM1x
    YE0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 15) * Worksheets("N01_YZ").Cells(ix, jx - 1)
    DE0x = DSDx * Worksheets("N01_DZ").Cells(ix, jx - 1)
    Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ix, jx) = D1(D0x, DWx, DM1x, Itx, DMUx,
DYx, YE0x, DBx, DE0x, DSDx, DZx)
End If
End Sub

```

```

Public Sub Classel_Pt_PRT(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
    Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ix, jx) =
Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ix, jx) /
Worksheets("Modelo_DividendYieldAcções").Cells(ix, jx)
    Call Classel_PRT(ix, jx)
End Sub

```

```

Private Sub Classel_PRT(ByVal ixx As Integer, ByVal jxx As Integer)
    Dim P0x As Single
    Dim PR0x As Single

```

```

If jxx = 1 Then
    P0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(16, 15)
    PR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(15, 15)
    Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) =
PR0x * ((Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx) +
Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ixx, jxx)) / P0x)
Else
    P0x = Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx - 1)
    PR0x = Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7,
5) + 2 - 1)
    Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) =
PR0x * ((Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx, jxx) +
Worksheets("Modelo_DividendosAcções").Cells(ixx, jxx)) / P0x)
    If jxx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) Then
        Worksheets("Dados_Sistema").Cells(ixx, 1) = Worksheets("Classel_Pt_PRT").Cells(ixx,
jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
    End If
End If
End Sub

```

```

Private Function C1(ByVal CW As Single, ByVal CM1 As Single, ByVal CR1 As Single) As
Single

```

```

    Dim CMinx As Single
    CMinx = Worksheets("Parâmetros").Cells(37, 15)
    If CW * CM1 + CR1 > CMinx Then
        C1 = CW * CM1 + CR1
    Else
        C1 = CMinx
    End If
End Function

```

```

Public Sub Classell_Ct_CRt(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)

```

```

    Dim CMUx As Single
    Dim CYx As Single
    Dim CSDx As Single
    Dim CWx As Single
    Dim CDx As Single
    Dim CA1x As Single
    Dim CM0x As Single
    Dim CN0x As Single
    Dim YEx As Single
    Dim YSDx As Single
    Dim CZx As Single
    Dim ltx As Single
    Dim CM1x As Single
    Dim CN1x As Single
    Dim CR1x As Single
    If jx = 1 Then
        CMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(29, 15)
        CYx = Worksheets("Parâmetros").Cells(30, 15)
        CSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(31, 15)
        CWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(32, 15)
        CDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(33, 15)
        CA1x = Worksheets("Parâmetros").Cells(34, 15)
        CM0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(36, 15)
        CN0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(38, 15)
        YSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 15)
        CZx = Normal(0, 1)
        Worksheets("N01_CZ").Cells(ix, jx) = CZx
    End If
End Sub

```

```

YEx = YSDx * Worksheets("N01_YZ").Cells(ix, jx)
Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
CM1x = CDx * Itx + (1 - CDx) * CM0x
Worksheets("VarInt_CM").Cells(ix, jx) = CM1x
CN1x = CA1x * CN0x + CYx * YEx + CSDx * CZx
Worksheets("VarInt_CN").Cells(ix, jx) = CN1x
CR1x = CMUx * Exp(CN1x)
Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ix, jx) = C1(CWx, CM1x, CR1x)
Else
  CMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(29, 15)
  CYx = Worksheets("Parâmetros").Cells(30, 15)
  CSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(31, 15)
  CWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(32, 15)
  CDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(33, 15)
  CA1x = Worksheets("Parâmetros").Cells(34, 15)
  CM0x = Worksheets("VarInt_CM").Cells(ix, jx - 1)
  CN0x = Worksheets("VarInt_CN").Cells(ix, jx - 1)
  YSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(8, 15)
  CZx = Normal(0, 1)
  Worksheets("N01_CZ").Cells(ix, jx) = CZx
  YEx = YSDx * Worksheets("N01_YZ").Cells(ix, jx)
  Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
  CM1x = CDx * Itx + (1 - CDx) * CM0x
  Worksheets("VarInt_CM").Cells(ix, jx) = CM1x
  CN1x = CA1x * CN0x + CYx * YEx + CSDx * CZx
  Worksheets("VarInt_CN").Cells(ix, jx) = CN1x
  CR1x = CMUx * Exp(CN1x)
  Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ix, jx) = C1(CWx, CM1x, CR1x)
End If
Call Classell_CRT(ix, jx)

End Sub

Private Sub Classell_CRT(ByVal ixx As Integer, ByVal jxx As Integer)
  Dim C0x As Single
  Dim CR0x As Single
  If jxx = 1 Then
    C0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(35, 15)
    CR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(40, 15)

    Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
    = CR0x * (1 / Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx) + 1) * C0x
  Else
    C0x = Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx - 1)
    CR0x = Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7,
5) + 2 - 1)

    Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
    = CR0x * (1 / Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx, jxx) + 1) * C0x
    If jxx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) Then
      Worksheets("Dados_Sistema").Cells(ixx, 2) = Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ixx,
jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
    End If
  End If
End Sub

Private Function B1(ByVal c As Single, ByVal BN1 As Single) As Single
  Dim BMUy As Single
  BMUy = Worksheets("Parâmetros").Cells(54, 15)
  B1 = Exp(Log(c) - BMUy + BN1)

```

End Function

Public Sub ClassellI_Bt_BRt(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)

Dim BMUx As Single

Dim BSDx As Single

Dim BAx As Single

Dim BN0x As Single

Dim BN1x As Single

Dim BZx As Single

Dim Cx As Single

If jx = 1 Then

BMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(54, 15)

BSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(56, 15)

BAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(55, 15)

BN0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(59, 15)

Cx = Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ix, jx)

BZx = Normal(0, 1)

BN1x = BAx * BN0x + BSDx * BZx

Worksheets("VarInt_BN").Cells(ix, jx) = BN1x

Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx) = B1(Cx, BN1x)

Else

BMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(54, 15)

BSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(56, 15)

BAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(55, 15)

BN0x = Worksheets("VarInt_BN").Cells(ix, jx - 1)

Cx = Worksheets("Classell_Ct_CRT").Cells(ix, jx)

BZx = Normal(0, 1)

BN1x = BAx * BN0x + BSDx * BZx

Worksheets("VarInt_BN").Cells(ix, jx) = BN1x

Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx) = B1(Cx, BN1x)

End If

Call ClassellI_BRt(ix, jx)

End Sub

Private Sub ClassellI_BRt(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)

Dim B0x As Single

Dim BR0x As Single

If jx = 1 Then

B0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(57, 15)

BR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(61, 15)

Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= BR0x * (1 + B0x)

Else

B0x = Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx - 1)

BR0x = Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx +

Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2 - 1)

Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix, jx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= BR0x * (1 + B0x)

If jx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) Then

Worksheets("Dados_Sistema").Cells(ix, 3) = Worksheets("ClassellI_Bt_BRt").Cells(ix,
jx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)

End If

End If

End Sub

Private Function Z1(ByVal ZMU As Single, ByVal ZA As Single, ByVal Z0 As Single, ByVal ZSD
As Single, ByVal Z As Single) As Single

Z1 = Exp(Log(ZMU) + ZA * (Log(Z0) - Log(ZMU))) + ZSD * Z

End Function

```

Public Sub ModeloPropertyYield(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
  Dim ZMUx As Single
  Dim ZAx As Single
  Dim ZSDx As Single
  Dim Z0x As Single
  Dim Zx As Single
  If jx = 1 Then
    ZMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(75, 15)
    ZAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(76, 15)
    ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)
    Z0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(78, 15)
    Zx = Normal(0, 1)
    Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx) = Zx
    Worksheets("Modelo_PropertyYield").Cells(ix, jx) = Z1(ZMUx, ZAx, Z0x, ZSDx, Zx)
  Else
    ZMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(75, 15)
    ZAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(76, 15)
    ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)
    Z0x = Worksheets("Modelo_PropertyYield").Cells(ix, jx - 1)
    Zx = Normal(0, 1)
    Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx) = Zx
    Worksheets("Modelo_PropertyYield").Cells(ix, jx) = Z1(ZMUx, ZAx, Z0x, ZSDx, Zx)
  End If
End Sub

Private Function E1(ByVal E0 As Single, ByVal EW As Single, ByVal EM1 As Single, ByVal It As Single, ByVal EMU As Single, ByVal EBZ As Single, ByVal ZSD As Single, ByVal ESD As Single, ByVal EZ As Single, ByVal ZZ As Single) As Single
  E1 = E0 * Exp(EW * EM1 + (1 - EW) * It + EMU + EBZ * ZSD * ZZ + ESD * EZ)
End Function

Public Sub ModeloPropertyIncome(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
  Dim EMUx As Single
  Dim EBZx As Single
  Dim ZSDx As Single
  Dim ESDx As Single
  Dim EWx As Single
  Dim EDx As Single
  Dim E0x As Single
  Dim EM0x As Single
  Dim EZx As Single
  Dim ZZx As Single
  Dim Itx As Single
  Dim EM1x As Single

  If jx = 1 Then
    EMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(75, 21)
    EBZx = Worksheets("Parâmetros").Cells(76, 21)
    ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)
    ESDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 21)
    EWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(78, 21)
    EDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(79, 21)
    E0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(80, 21)
    EM0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(81, 21)
    EZx = Normal(0, 1)
    ZZx = Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx)
    Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
    EM1x = EDx * Itx + (1 - EDx) * EM0x
  End If
End Sub

```

```

Worksheets("VarInt_EM").Cells(ix, jx) = EM1x
Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ix, jx) = E1(E0x, EWx, EM1x, Itx, EMUx,
EBZx, ZSDx, ESDx, EZx, ZZx)
Else
    EMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(75, 21)
    EBZx = Worksheets("Parâmetros").Cells(76, 21)
    ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)
    ESDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 21)
    EWx = Worksheets("Parâmetros").Cells(78, 21)
    EDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(79, 21)
    E0x = Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ix, jx - 1)
    EM0x = Worksheets("VarInt_EM").Cells(ix, jx - 1)
    EZx = Normal(0, 1)
    ZZx = Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx)
    Itx = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ix, jx)
    EM1x = EDx * Itx + (1 - EDx) * EM0x
    Worksheets("VarInt_EM").Cells(ix, jx) = EM1x
    Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ix, jx) = E1(E0x, EWx, EM1x, Itx, EMUx,
EBZx, ZSDx, ESDx, EZx, ZZx)
End If

```

```
End Sub
```

```
Public Sub ClasseIV_At_ART(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
```

```

    Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ix, jx).Font.Bold = False
    Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ix, jx) =
Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ix, jx) /
Worksheets("Modelo_PropertyYield").Cells(ix, jx)
    Call ClasseIV_ART(ix, jx)
End Sub

```

```
Private Sub ClasseIV_ART(ByVal ixx As Integer, ByVal jxx As Integer)
```

```

    Dim A0x As Single
    Dim AR0x As Single

```

```
    If jxx = 1 Then
```

```

        A0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(83, 15)
        AR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(82, 15)
    
```

```

    Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= AR0x * ((Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx) +
Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ixx, jxx)) / A0x)

```

```
    Else
```

```

        A0x = Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx - 1)
        AR0x = Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2 - 1)
    
```

```

    Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= AR0x * ((Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx, jxx) +
Worksheets("Modelo_PropertyIncome").Cells(ixx, jxx)) / A0x)

```

```
    If jxx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) Then
```

```

        Worksheets("Dados_Sistema").Cells(ixx, 4) = Worksheets("ClasseIV_At_ART").Cells(ixx,
jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
    
```

```
    End If
```

```
End If
```

```
End Sub
```

Private Function R1(ByVal RMU As Single, ByVal RA As Single, ByVal R0 As Single, ByVal RBC As Single, ByVal RBZ As Single, ByVal CE As Single, ByVal ZE As Single, ByVal RE As Single) As Single

$R1 = \text{Exp}(\text{Log}(\text{RMU}) + \text{RA} * (\text{Log}(\text{R0}) - \text{Log}(\text{RMU})) + \text{RBC} * \text{CE} + \text{RBZ} * \text{ZE} + \text{RE})$
End Function

Public Sub ClasseV_Rt_RRt(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)

Dim RMUx As Single

Dim RAx As Single

Dim RSDx As Single

Dim RBCx As Single

Dim RBZx As Single

Dim CSDx As Single

Dim ZSDx As Single

Dim R0x As Single

Dim RZx As Single

Dim CEx As Single

Dim ZEx As Single

Dim REx As Single

If jx = 1 Then

RMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(96, 15)

RAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(97, 15)

RSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(98, 15)

RBCx = Worksheets("Parâmetros").Cells(99, 15)

RBZx = Worksheets("Parâmetros").Cells(95, 15)

CSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(31, 15)

ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)

R0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(100, 15)

RZx = Normal(0, 1)

CEx = CSDx * Worksheets("N01_CZ").Cells(ix, jx)

ZEx = ZSDx * Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx)

REx = RSDx * RZx

Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ix, jx) = R1(RMUx, RAx, R0x, RBCx, RBZx, CEx, ZEx, REx)

Else

RMUx = Worksheets("Parâmetros").Cells(96, 15)

RAx = Worksheets("Parâmetros").Cells(97, 15)

RSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(98, 15)

RBCx = Worksheets("Parâmetros").Cells(99, 15)

RBZx = Worksheets("Parâmetros").Cells(95, 15)

CSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(31, 15)

ZSDx = Worksheets("Parâmetros").Cells(77, 15)

R0x = Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ix, jx - 1)

RZx = Normal(0, 1)

CEx = CSDx * Worksheets("N01_CZ").Cells(ix, jx)

ZEx = ZSDx * Worksheets("N01_ZZ").Cells(ix, jx)

REx = RSDx * RZx

Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ix, jx) = R1(RMUx, RAx, R0x, RBCx, RBZx, CEx, ZEx, REx)

End If

Call ClasseV_RRt(ix, jx)

End Sub

Private Sub ClasseV_RRt(ByVal ixx As Integer, ByVal jxx As Integer)

Dim Q0x As Single

Dim R0x As Single

Dim RR0x As Single

If jxx = 1 Then

Q0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 10)

```
R0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(100, 15)
RR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(104, 15)
```

```
Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= RR0x * (1 / Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx) + 1) * R0x *
(Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) +
2) / Q0x)
```

```
Else
```

```
Q0x = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ixx, jxx +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2 - 1)
```

```
R0x = Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx - 1)
```

```
RR0x = Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2 - 1)
```

```
Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
= RR0x * (1 / Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx, jxx) + 1) * R0x *
(Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(ixx, jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) +
2) / Q0x)
```

```
If jxx = Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) Then
```

```
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(ixx, 5) = Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(ixx,
jxx + Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2)
```

```
End If
```

```
End If
```

```
End Sub
```

```
Private Sub FQt(ByVal folha As String)
```

```
Dim Q0x As Single
```

```
Q0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 10)
```

```
For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
```

```
For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
```

```
Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("Modelo_TaxaInflação").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / Q0x
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
End Sub
```

```
Private Sub FPRt(ByVal folha As String)
```

```
Dim PR0x As Single
```

```
PR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(15, 15)
```

```
For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
```

```
For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
```

```
Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("ClasseI_Pt_PRt").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / PR0x
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
End Sub
```

```
Private Sub FCRt(ByVal folha As String)
```

```
Dim CR0x As Single
```

```
CR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(40, 15)
```

```
For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
```

```
For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
```

```
Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("ClasseII_Ct_CRT").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / CR0x
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```

End Sub
Private Sub FBRt(ByVal folha As String)
    Dim BR0x As Single
    BR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(61, 15)

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
            Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("Classell_Bt_BRt").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / BR0x
        Next j
    Next i
End Sub

Private Sub FRRt(ByVal folha As String)
    Dim RR0x As Single
    RR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(104, 15)

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
            Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("ClasseV_Rt_RRt").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / RR0x
        Next j
    Next i
End Sub

Private Sub FARt(ByVal folha As String)
    Dim AR0x As Single
    AR0x = Worksheets("Parâmetros").Cells(82, 15)

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
            Worksheets(folha).Cells(i, j) = Worksheets("ClasselV_At_ARt").Cells(i, j +
Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5) + 2) / AR0x
        Next j
    Next i
End Sub

Public Sub Ft()
    Call FQt("FQt")
    Call FPRt("FPRt")
    Call FCRt("FCRt")
    Call FBRt("FBRt")
    Call FRRt("FRRt")
    Call FARt("FARt")
End Sub

Private Sub GQt(ByVal folha As String)

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
            Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FQt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
        Next j
    Next i

End Sub

Private Sub GPRt(ByVal folha As String)
    Dim n As Integer

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1

```

```

For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
    Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FPRt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
Next j
Next i

```

End Sub

Private Sub GCRt(ByVal folha As String)

```

For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
    For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
        Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FCRt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
    Next j
Next i

```

End Sub

Private Sub GBRT(ByVal folha As String)

```

For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
    For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
        Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FBRt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
    Next j
Next i
End Sub

```

Private Sub GRRt(ByVal folha As String)

```

For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
    For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
        Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FRRt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
    Next j
Next i
End Sub

```

End Sub

Private Sub GART(ByVal folha As String)

```

For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
    For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
        Worksheets(folha).Cells(i, j) = 100 * (Worksheets("FARt").Cells(i, j) ^ (1 / j) - 1)
    Next j
Next i
End Sub

```

End Sub

Private Sub DesviosPadrõesGRRt(ByVal folha As String)

```

For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
    Worksheets(folha).Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 7, j) = DesvioPadrão(folha,
j)

```

```

    Worksheets("Resumo").Cells(21, j + 1) =

```

```

Worksheets(folha).Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 7, j)

```

```

Next j

```

End Sub

Public Sub Gt()

```

    Call GQt("GQt")

```

```

    Call GPRt("GPRt")

```

```

    Call GCRt("GCRt")

```

```

    Call GBRT("GBRT")

```

```

    Call GRRt("GRRt")

```

```

    Call GART("GART")

```

End Sub

Private Function Normal(ByVal mediana As Single, ByVal desviopadrao As Single) As Single



'Função Box-Muller para gerar N^ºs aleatórios de uma Distribuição Normal

Dim x As Single

Dim y As Single

Dim dist As Single

Randomize

Do

 x = 2 * Rnd() - 1

 y = 2 * Rnd() - 1

Anexo IV – Listagem do programa em VBA – Responsabilidades Futuras de um contrato de seguro.

```

*****
'PROGRAMA DE ESTIMAÇÃO DAS RESPONSABILIDADES DE UM CONTRATO DE
SEGURO
'Autor do Programa: Soraia Rodrigues Branco
'Data: Julho de 2004
*****
Private Sub cmdButtonSimular_Click()
  Worksheets("Modelo_CashOut").Range("A1:BA2000").Clear
  celula = 4
  While celula < 409
    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
      flag = 0
      For j = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(7, 5)
        Call ModeloCash_out(i, j)
      Next j
    Next i
    celula = celula + 1
  Wend
End Sub

Public i As Integer
Public j As Integer
Public flag As Integer
Public celula As Integer

Public Sub ModeloCash_out(ByVal ix As Integer, ByVal jx As Integer)
  Dim qx As Single
  Dim fk As Single
  Dim cash_out As Single
  Dim QZ As Single
  Dim qz1 As Single

  If flag = 0 Then
    qx = Worksheets("BaseDados").Cells(celula, 41 + jx - 1)
    fk = Worksheets("BaseDados").Cells(celula, 69 + jx - 1)
    cash_out = Worksheets("BaseDados").Cells(celula, 13 + jx - 1)
    ano_termo = Worksheets("BaseDados").Cells(celula, 12)

    Call InsertFormula
    QZ = Worksheets("parâmetros").Cells(5, 8)
    qz1 = Worksheets("parâmetros").Cells(6, 8)

    If ano_termo = 2002 + jx Then
      Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix, jx) = Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix, jx)
+ cash_out
      flag = 1
    Else
      If 0.7 * qx > QZ Then
        Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix, jx) = Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix,
jx) + cash_out
        flag = 1
      Else
        If fk > qz1 Then
          Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix, jx) =
Worksheets("Modelo_CashOut").Cells(ix, jx) + cash_out

```

```
        flag = 1
    End If
End If
End If
End If
End Sub
Sub InsertFormula()
    Worksheets("parâmetros").Cells(5, 8).Formula = "=RAND()"
    Worksheets("parâmetros").Cells(6, 8).Formula = "=RAND()"
End Sub
```

ANEXO V – Listagem do programa em VBA – Selecção de Carteiras de Activos.

```

*****
'PROGRAMA DE SELECÇÃO DE CARTEIRAS DE ACTIVOS COM RESPONSABILIDADES
FIXAS
'Autor do Programa: Soraia Rodrigues Branco
'Data: Julho de 2004
*****
*****
' Modelo de Wise - Wilkie - Óptica do Actuário
*****

Private Sub cmdButton_Click()
    Call Dados_Sistema
End Sub

Public i As Integer
Public j As Integer

Public V1(1 To 5, 1 To 5) As Double
Public V1Inv(1 To 5, 1 To 5) As Double

Public c(1 To 5, 1 To 1) As Double
Public e(1 To 5, 1 To 1) As Double
Public p(1 To 5, 1 To 1) As Double

Public cT(1 To 1, 1 To 5) As Double
Public eT(1 To 1, 1 To 5) As Double
Public pT(1 To 1, 1 To 5) As Double

Public V1Inv_c(1 To 5, 1 To 1) As Double
Public V1Inv_p(1 To 5, 1 To 1) As Double
Public V1Inv_e(1 To 5, 1 To 1) As Double
Private Function Média(ByVal folha As String, ByVal coluna As Integer) As Single
    Dim somat As Single

    somat = 0
    For i = 2 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        somat = somat + Worksheets(folha).Cells(i, coluna)
    Next i

    Média = somat / Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5)
End Function
Private Function DesvioPadrão(ByVal folha As String, ByVal coluna As Integer) As Single
    Dim somat As Single

    somat = 0
    For i = 2 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        somat = somat + (Worksheets(folha).Cells(i, coluna) -
Worksheets(folha).Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, coluna)) ^ 2
    Next i

    DesvioPadrão = Sqr(somat / (Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5)))
End Function
Private Function Covariância(ByVal folha As String, ByVal colunaj As Integer, colunajlinha As
Integer) As Single
    Dim somat As Single

```

```

    somat = 0
    For i = 2 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        somat = somat + (Worksheets(folha).Cells(i, coluna) -
Worksheets(folha).Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, coluna)) *
(Worksheets(folha).Cells(i, colunajlinha) -
Worksheets(folha).Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, colunajlinha))
    Next i

    Covariância = somat / Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5)
End Function
Public Sub Dados_Sistema()
    'coluna 6 => RL
    Call VecResponsabilidades
    'coluna 10 => e
    Call Vec_e
    'coluna 11 => c
    Call Vec_c
    'coluna => p
    Call Vec_p
    'colunas 13 a 17 => V
    Call Mat_V_VInv
    'Ec
    Call Ec
    'Ve
    Call ve
    'epsilon
    Call epsilon
    'alpha
    Call alpha
    'phi
    Call phi
    'Quantidades
    Call Quantidades
    'Calcular E, P, V
    Call E_P_V
End Sub
Public Sub VecResponsabilidades()
    Dim i As Integer

    For i = 1 To Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 1
        If i = 1 Then
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(i, 6).Font.Bold = True
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(i, 6) = "RL"
        Else
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(i, 6) = Worksheets("Parâmetros").Cells(20 + i, 10)
        End If
    Next i

    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, 6) =
Média("Dados_Sistema", 6)
    Worksheets("Parâmetros").Cells(36, 8) =
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, 6)
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 7, 6) =
DesvioPadrão("Dados_Sistema", 6) ^ 2

    Worksheets("Dados_Sistema").Columns("A:Z").AutoFit
End Sub
Private Sub Vec_e()
    Dim j As Integer

```

```

Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 10).Font.Bold = True
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 10) = "e"
For j = 1 To 5
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 9).Font.Bold = True
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 9) = "Classe " & CStr(j)
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 10) =
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 5, j)
    e(j, 1) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 10)
    eT(1, j) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 10)
Next j

End Sub
Private Sub Vec_c()
    Dim j As Integer
    Dim ajustaCOV As Single

    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 11).Font.Bold = True
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 11) = "c"

    ajustaCOV = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) / (Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) -
1)

    For j = 1 To 5
        Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 11) = Covariância("Dados_Sistema", j, 6)
        c(j, 1) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 11)
        cT(1, j) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, 11)
    Next j

End Sub
Private Sub Vec_p()
    Dim j As Integer

    For j = 1 To 5
        p(j, 1) = Worksheets("Parâmetros").Cells(j + 26, 8)
        pT(1, j) = Worksheets("Parâmetros").Cells(j + 26, 8)
    Next j

End Sub
Private Sub Mat_V_VInv()
    Dim j As Integer
    Dim jlinha As Integer
    Dim ajustaCOV As Single

    Dim myRange As Range
    Dim answer As Double

    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 13).Font.Bold = True
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 13) = "V"
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 19).Font.Bold = True
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1, 19) = "VInv"

    ajustaCOV = Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) / (Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) -
1)

    For j = 1 To 5
        For jlinha = 1 To 5
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1 + j, 12 + jlinha) = Covariância("Dados_Sistema", j,
jlinha)
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(3, 13) = 0

```

```

    V1(j, jlinha) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1 + j, 12 + jlinha)
Next jlinha
Next j

For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 5
        V1Inv(j, jlinha) =
CDBl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MInverse(V1)), j,
jlinha))
        Next jlinha
    Next j

For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 5
        Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1 + j, 18 + jlinha) = V1Inv(j, jlinha)
    Next jlinha
Next j
End Sub
Private Sub Ec()
    Dim x As Double
    Dim EL As Double
    Dim Ec As Double

    'V-1.c
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8, 19) = "V-1.c"
    For j = 1 To 5
        For jlinha = 1 To 1
            V1Inv_c(j, jlinha) =
CDBl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(V1Inv, c)), j,
jlinha))
            Next jlinha
        Next j

        For j = 1 To 5
            Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8 + j, 19) = V1Inv_c(j, 1)
        Next j

        'eT.V-1.c
        For j = 1 To 1
            For jlinha = 1 To 1
                x =
CDBl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(eT,
V1Inv_c)), j, jlinha))
            Next jlinha
        Next j
    'Stop
    EL = Worksheets("Parâmetros").Cells(36, 8)

    Ec = x - EL

    Worksheets("Parâmetros").Cells(37, 8) = Ec
End Sub

Private Sub ve()
    Dim x As Double
    Dim Ee As Double
    Dim Ec As Double
    Dim ve As Double

```

```

'V-1.p
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8, 20) = "V-1.p"
For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 1
        V1Inv_p(j, jlinha) = CDbI(Application.Index((Application.MMult(V1Inv, p)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

For j = 1 To 5
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8 + j, 20) = V1Inv_p(j, 1)
Next j

'eT.V-1.p
For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1
        x =
CDbI(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(eT,
V1Inv_p)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

Ec = Worksheets("Parâmetros").Cells(37, 8)

Ee = Worksheets("Parâmetros").Cells(22, 8)

ve = 2 * ((Ec - Ee) / x)

Worksheets("Parâmetros").Cells(38, 8) = ve
End Sub

Private Sub epsilon()
    Dim epsilon As Double

    For j = 1 To 1
        For jlinha = 1 To 1
            epsilon =
CDbI(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(eT,
V1Inv_c)), j, jlinha))
        Next jlinha
    Next j

    Worksheets("Parâmetros").Cells(41, 8) = epsilon
End Sub

Private Sub alpha()
    Dim alpha As Double

'V-1.e
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8, 21) = "V-1.e"
For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 1
        V1Inv_e(j, jlinha) =
CDbI(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(V1Inv, e)), j,
jlinha))
    Next jlinha
Next j

For j = 1 To 5
    Worksheets("Dados_Sistema").Cells(8 + j, 21) = V1Inv_e(j, 1)
Next j

```

```
'eT.V-1.e
For j = 1 To 1
  For jlinha = 1 To 1
    alpha =
CDBl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(eT,
V1Inv_e)), j, jlinha))
  Next jlinha
Next j
```

```
Worksheets("Parâmetros").Cells(42, 8) = alpha
End Sub
```

```
Private Sub phi()
  Dim phi As Double
```

```
  For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1
      phi =
CDBl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(eT,
V1Inv_p)), j, jlinha))
    Next jlinha
  Next j
```

```
Worksheets("Parâmetros").Cells(43, 8) = phi
End Sub
```

```
Private Sub Quantidades()
```

```
  Dim EL As Double
  Dim Ee As Double
  Dim v As Double
  Dim epsilon As Double
  Dim alpha As Double
  Dim phi As Double
```

```
  Dim factor As Double
```

```
  Dim Quantidades(1 To 5) As Double
```

```
  Dim VecDif(1 To 5, 1 To 1) As Double
  Dim VecMult(1 To 5, 1 To 1) As Double
```

```
  EL = Worksheets("Parâmetros").Cells(36, 8)
  Ee = Worksheets("Parâmetros").Cells(22, 8)
  v = Worksheets("Parâmetros").Cells(39, 8)
```

```
  epsilon = Worksheets("Parâmetros").Cells(41, 8)
  alpha = Worksheets("Parâmetros").Cells(42, 8)
  phi = Worksheets("Parâmetros").Cells(43, 8)
```

```
  factor = (Ee / alpha - ((EL - epsilon) / alpha))
```

```
  For j = 1 To 5
    VecDif(j, 1) = (phi / alpha) * e(j, 1) - p(j, 1)
  Next j
```

```
  For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 1
```

```

        VecMult(j, jlinha) =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(V1Inv,
VecDif)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j
For j = 1 To 5
    Quantidades(j) = V1Inv_c(j, 1) + (EL - epsilon) / alpha * V1Inv_e(j, 1) + Ee / alpha *
V1Inv_e(j, 1) + (v / 2) * VecMult(j, 1)
    If Quantidades(j) < 0 Then Quantidades(j) = 0
    Worksheets("Parâmetros").Cells(47 + j, 8) = Quantidades(j)
Next j
End Sub

Private Sub E_P_V()
Dim EL As Single
Dim VL As Single

Dim xTe As Single
Dim xTp As Single
Dim xTc As Single

Dim xTVx As Single

Dim QuantidadesT(1 To 1, 1 To 5) As Double
Dim Quantidades(1 To 5, 1 To 1) As Double

Dim Vx(1 To 5, 1 To 1) As Double

'===== Calcular E
EL = Worksheets("Parâmetros").Cells(36, 8)

For j = 1 To 5
    QuantidadesT(1, j) = Worksheets("Parâmetros").Cells(47 + j, 8)
    Quantidades(j, 1) = Worksheets("Parâmetros").Cells(47 + j, 8)
Next j

For j = 1 To 5
    e(j, 1) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1 + j, 10)
Next j

'xT.e
For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1
        xTe =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(Quantidades
T, e)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

Worksheets("Parâmetros").Cells(56, 3) = xTe - EL

'===== Calcular P
For j = 1 To 5
    p(j, 1) = Worksheets("Parâmetros").Cells(26 + j, 8)
Next j

'xT.p
For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1

```

```

        xTp =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(Quantidades
T, p)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

Worksheets("Parâmetros").Cells(56, 5) = xTp

'===== Calcular V
Worksheets("Parâmetros").Cells(35, 8) =
Worksheets("Dados_Sistema").Cells(Worksheets("Parâmetros").Cells(9, 5) + 7, 6)
VL = Worksheets("Parâmetros").Cells(35, 8)

For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 5
        V1(j, jlinha) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(j + 1, jlinha + 12)
    Next jlinha
Next j

'V.x
For j = 1 To 5
    For jlinha = 1 To 1
        Vx(j, jlinha) =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(V1,
Quantidades)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

'xT.V.x
For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1
        xTVx =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(Quantidades
T, Vx)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

For j = 1 To 5
    c(j, 1) = Worksheets("Dados_Sistema").Cells(1 + j, 11)
Next j

'xT.c
For j = 1 To 1
    For jlinha = 1 To 1
        xTc =
Cdbl(Application.WorksheetFunction.Index((Application.WorksheetFunction.MMult(Quantidades
T, c)), j, jlinha))
    Next jlinha
Next j

Worksheets("Parâmetros").Cells(56, 7) = xTVx - 2 * xTc + VL
End Sub

```

