

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



ESTIMAÇÃO DE VIÉS REDUZIDO EM ESTATÍSTICA DE EXTREMOS

Lígia Carla Pinto Henriques Jorge Rodrigues

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional

Especialidade: Probabilidade e Estatística

2009

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



ESTIMAÇÃO DE VIÉS REDUZIDO EM ESTATÍSTICA DE EXTREMOS

Lígia Carla Pinto Henriques Jorge Rodrigues

Tese orientada pela Professora Doutora Maria Ivette Leal de Carvalho Gomes

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional

Especialidade: Probabilidade e Estatística

2009

Resumo: Neste trabalho analisamos o problema da estimação semi-paramétrica de viés reduzido de parâmetros de acontecimentos raros em Estatística de Extremos. Trabalhamos com modelos de cauda pesada, para os quais o índice de valores extremos, γ , é positivo. Para além da estimação do índice de valores extremos debruçamo-nos também sobre a estimação de quantis elevados, apresentando estimadores de viés reduzido para estes parâmetros, em contexto de variação regular de terceira ordem, sendo o comportamento exacto obtido via método de Monte Carlo. Utilizamos ainda a metodologia PORT (do inglês “*peaks over random threshold*”) na estimação de quantis elevados e do parâmetro de forma de segunda ordem. As propriedades assintóticas destes estimadores de parâmetros de primeira e segunda ordem, invariantes para mudanças de localização, são obtidas sob condições de variação regular de segunda e terceira ordem, respectivamente. Começamos por fazer uma breve introdução ao tema desta dissertação, apresentando de seguida alguns resultados elementares sobre o comportamento exacto e assintótico de estatísticas ordinais. Recorremos à teoria das funções de Variação Regular para caracterizarmos as distribuições limite do máximo devidamente normalizado e de alguns modelos de caudas pesadas mais utilizados em aplicações. Analisamos a estimação semi-paramétrica clássica do índice de valores extremos e dos parâmetros de forma e escala de segunda ordem, em contexto de terceira ordem. Definimos duas novas classes de estimadores do índice de cauda, γ : a primeira classe, obtida acomodando o viés nos log-excessos das observações, é de viés reduzido com variância assintótica igual à do estimador de Hill; a segunda classe é obtida por acomodação do viés nos excessos acima de um “threshold” elevado e depende da estimação adequada de um parâmetro de primeira ordem. Apresentamos outros estimadores semi-paramétricos de viés reduzido de variância mínima, analisamos algumas técnicas heurísticas de escolha adaptativa do número “ótimo” de estatísticas ordinais de topo a usar em estimação de viés reduzido e introduzimos classes de estimadores de quantis elevados de viés reduzido. Utilizando a metodologia PORT obtemos uma nova classe de estimadores de quantis elevados invariante para mudanças de localização e exibindo um comportamento adequado na presença de transformações lineares dos dados. Finalizamos este trabalho introduzindo uma nova classe de estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem invariante para mudanças de localização.

Palavras-chave: Estatística de Extremos, Estimação semi-paramétrica, Caudas pesadas, Redução de viés, Metodologia PORT.

Abstract: This thesis is about reduced-bias semi-parametric estimation of parameters related with models of extreme events in Extreme Value Theory. We work with heavy-tailed models, i.e., models where the extreme value index, γ , is positive. We are interested in the estimation of the extreme value index and high quantiles providing some new reduced-bias estimators. The asymptotic behaviour of the new estimators is studied under a third-order framework and the use of Monte Carlo techniques enables us to obtain the finite sample behaviour of the new estimators. We also use the PORT methodology with PORT standing for peaks over random threshold to introduce new classes of high PORT-quantile estimators and PORT- ρ estimators. These classes of estimators are location invariant and we study them under a second and third order framework, respectively. We begin with a brief introduction to the subject of this thesis followed by some elementary results on the Extreme Value Theory. We use regular variation theory to characterize the limit distribution for extremes of independent and identically distributed random variables and to study some heavy-tailed models. We examine and study under a third-order framework some already known semi-parametric estimators of the tail index and second-order parameters. We consider two classes of tail index estimators: one of the classes derived by accommodation of bias in the weighted log-excesses is a second-order reduced-bias class with asymptotic variance equal to γ^2 , the asymptotic variance of the Hill estimator; the other class of estimators is based on the excesses over a high random threshold but with a trial of accommodation of bias in the Pareto model underlying those excesses. The adaptive choice of k , the number of top order statistics to use in the estimation of parameters of heavy-tailed models, is still an open problem for reduced-bias estimators. We present a comparative study through Monte Carlo simulation of different heuristic techniques to select the adaptive choice of the “threshold” in reduced-bias estimation and provide an empirical data analysis through the use of reduced-bias high quantile estimators. We use the PORT methodology for heavy tails and introduce a new class of location invariant high PORT-quantile estimators with an adequate behaviour, providing a linear shift in the presence of linear transformations of the data. We also introduce under a PORT framework a new class of location invariant ρ -estimators. Asymptotic normality of such estimators is achieved under a third-order condition and for suitable large intermediate ranks.

Keywords: Statistics of Extremes, Semi-parametric estimation, Heavy tails, Bias reduction, PORT methodology.

Agradecimentos

À Professora Doutora Maria Ivette Leal de Carvalho Gomes, pelo apoio e dedicação constante e permanente com que acompanhou este trabalho, pela confiança e estímulo que sempre me transmitiu e pela amizade demonstrada ao longo de cinco anos de trabalho.

Ao meu amigo e colega Professor Doutor Luís Merca Fernandes, pelo apoio e incentivo na concretização deste trabalho.

Aos meus colegas da Área Interdepartamental de Matemática da Escola Superior de Tecnologia de Tomar, pela disponibilidade e compreensão demonstradas durante o período da minha licença sem vencimento.

Ao CEAUL, pela cedência de equipamento informático.

À FCT, pelo apoio decisivo para a concretização deste trabalho, por via da atribuição de uma bolsa de doutoramento.

Aos meus Pais, por todo o apoio logístico que sempre disponibilizaram e que me permitiu ter o equilíbrio necessário durante as minhas ausências.

Ao Tiago, um agradecimento muito especial pelo seu carinho, confiança e compreensão demonstrados ao longo da realização deste trabalho.

Aos meus filhos, Afonso e Marta, agradeço os vossos sorrisos francos e ternos.

A todos aqueles que de uma forma directa ou indirecta contribuíram para a realização deste trabalho.

Este trabalho foi parcialmente suportado pela bolsa de doutoramento SFRH/BD/29010/2006 da FCT e pelo projecto POCI e PPCDT/MAT 58876/2004 - Extremos, Risco, Segurança e Ambiente (ERAS) do CEAUL.

Notação e abreviaturas

a.a.	- amostra aleatória
e.o.	- estatística ordinal ou estatísticas ordinais
f.d.	- função de distribuição
f.d.p.	- função densidade de probabilidade
i.i.d.	- independentes e identicamente distribuídas
sse	- se e só se
v.a.	- variável aleatória ou variáveis aleatórias
$\underline{X}_n = \{X_i\}_{i=1}^n$	- a.a. de dimensão n
$X_{i:n}$	- i -ésima e.o. ascendente associada à a.a. $\underline{X}_n$
$f_{i:n}$	- f.d.p. da e.o. $X_{i:n}$
$F_{i:n}$	- f.d. da e.o. $X_{i:n}$
$\frown$	- com distribuição
$f^{\leftarrow}(x)$	- inversa generalizada de f , $f^{\leftarrow}(x) = \inf \{y : f(y) \geq x\}$
$U(t)$	- função quantil recíproca associada à f.d. F , $U(t) := \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) = F^{\leftarrow}(1 - 1/t), t > 1$
$\sim$	- $f \sim g$ sse $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$
o	- $f = o(g)$ sse $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$
O	- $f = O(g)$ sse $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\xrightarrow{p}$	- convergência em probabilidade
$\xrightarrow{d}$	- convergência em distribuição
$\xrightarrow{q.c.}$	- convergência quase certa
$\stackrel{d}{\sim}$	- com a mesma distribuição assintótica
$\stackrel{p}{\sim}$	- com o mesmo comportamento em probabilidade

- o_p - $X_n = o_p(Y_n)$ sse $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty$
- O_p - $X_n = O_p(a_n)$ sse $\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon : \mathbb{P}(|X_n|/a_n \leq M_\epsilon) \geq 1 - \epsilon, n \in \mathbb{N}$
- $[\cdot]$ - parte inteira de um número real
- $\Gamma(t)$ - função Gama completa definida por $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, t > 0$,
 $\Gamma(t) = (t-1)!$, para t inteiro e positivo

Índice

1	Introdução	1
2	Teoria de Valores Extremos - uma Introdução	7
2.1	Alguns resultados preliminares sobre o comportamento exacto de estatísticas ordinais	8
2.2	Comportamento assintótico de estatísticas ordinais	10
2.2.1	Convergências estocásticas e alguns resultados limite importantes	11
2.2.2	Estatísticas ordinais extremas	13
2.2.3	Estatísticas ordinais centrais e intermédias	16
2.3	Variação Regular e domínios de atracção	19
2.3.1	Funções de Variação Regular	19
2.3.2	Caracterização dos domínios de atracção utilizando a teoria das funções de Variação Regular	22
2.3.3	Condições de primeira, segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada	23
2.3.4	Condições de segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos	26
2.4	Caracterização das condições de segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos	27
2.4.1	Subclasse de Hall-Welsh	27
2.4.2	Modelo Burr	30
2.4.3	Modelo Log-Logístico	31
2.4.4	Modelo Fréchet	32
2.4.5	Modelo Generalizado de Pareto (GP), $\gamma > 0$	33

2.4.6	Modelo Cauchy	34
2.4.7	Modelo t de Student	35
2.4.8	Modelo Geral de Valores Extremos (GEV), $\gamma > 0$	36
3	Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros	41
3.1	Propriedades de algumas estatísticas utilizadas na estimação de parâmetros de acontecimentos raros e de parâmetros de variação regular	41
3.2	Estimadores do índice de valores extremos, γ , baseados nos log-excessos	46
3.3	Estimação dos parâmetros de segunda ordem	51
3.3.1	Classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de forma de segunda ordem, ρ	52
3.3.2	Escolha do parâmetro de controlo τ na estimação de ρ	57
3.3.3	Algumas notas sobre a escolha do nível k_1 a usar na estimação de ρ	58
3.3.4	Classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de segunda ordem, β	59
4	Acomodação do Viés nos Log-excessos e nos Excessos	65
4.1	Estimadores de viés reduzido de segunda ordem	66
4.2	Propriedades dos log-excessos e dos excessos	68
4.3	Estimador dos log-excessos ponderados	72
4.3.1	Estimador semi-paramétrico do parâmetro de escala de segunda ordem baseado nos log-excessos	72
4.4	Nova classe de estimadores de máxima verosimilhança	74
4.5	Propriedades assintóticas	76
4.5.1	Comparação assintótica nos níveis óptimos dos estimadores de máxima verosimilhança	93
4.6	Comportamento do estimador dos log-excessos ponderados em amostras de dimensão finita	96
4.6.1	Aplicação a dados reais	98
4.7	Comportamento dos estimadores de máxima verosimilhança em amostras de dimensão finita	102

4.7.1	Apêndice: Versão modificada do algoritmo de Grimshaw para determinação das estimativas de máxima verosimilhança no modelo Generalizado de Pareto modificado	106
4.8	Alguns comentários e conclusões	107
5	Outros Estimadores de Viés Reduzido de Variância Mínima	109
5.1	Estimadores MVRB existentes na literatura	109
5.2	Propriedades assintóticas	111
5.2.1	Intervalos de confiança assintóticos para o índice de valores extremos, γ , baseados em estimadores MVRB	116
5.3	Escolha adaptativa do nível “ótimo” em estimação MVRB	118
5.3.1	Indicadores de redução do erro quadrático médio: um estudo de simulação	120
5.3.2	Aplicação a dados reais	123
5.4	Estimação de quantis elevados usando estimadores MVRB	124
5.4.1	Intervalos de confiança assintóticos para χ_{1-p} baseados em estimadores MVRB	129
6	Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros usando a Metodologia PORT	133
6.1	PORT-Estimadores do índice de valores extremos	134
6.1.1	Comparação assintótica nos níveis ótimos dos PORT-estimadores do índice de cauda, γ	138
6.2	Nova classe de PORT-estimadores de quantis elevados	140
6.3	Propriedades assintóticas	142
6.4	Considerações finais	147
7	A Metodologia PORT na Estimação do Parâmetro de Forma de Segunda Ordem	149
7.1	Resultados assintóticos preliminares	150
7.2	Nova classe de PORT-estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem .	152
7.3	Propriedades assintóticas	157
7.4	Escolha do parâmetro de controlo na PORT-estimação do parâmetro de forma de segunda ordem	167

7.5	Alguns comentários e conclusões	171
8	Conclusões	173
	Bibliografia	174

Lista de Figuras

3.1	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Hill, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5, -1, -2$ ($\beta = 1$).	48
3.2	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Hill, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 0.5, 1, 2$ ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$).	48
3.3	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Momentos, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5, -1, -2$ ($\beta = 1$).	50
3.4	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Momentos, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 0.5, 1, 2$ ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$).	51
3.5	Trajectórias da função $\tau(\rho, \delta)$ para os modelos $Burr(\gamma, \rho)$ e $GP(\gamma > 0)$ (lado esquerdo) e para o modelo t -Student (lado direito).	58
4.1	Desvios padrões assintóticos de $\hat{\beta}_U(k; \rho)$ e $\hat{\beta}_V(k; \rho)$ para um modelo com $\gamma = \beta = 1$.	92
4.2	Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{MP}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}$ no plano (γ, ρ)	95
4.3	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 1$ ($\beta = 1$).	97
4.4	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$ e $\beta = 0.5$).	97

4.5	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -2$ e $\gamma = 1$ ($\beta = 1$).	98
4.6	Taxa de câmbio diária Euro/Libra Inglesa (esquerda) e log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa (direita).	99
4.7	Estimativas dos parâmetros de segunda ordem ρ e β para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	99
4.8	Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H e WLE_2 para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	100
4.9	Cotação diária do índice PSI20 da bolsa Portuguesa (esquerda) e log-retornos diários do índice PSI20 (direita).	100
4.10	Estimativas dos parâmetros de segunda ordem ρ e β para os log-retornos diários do índice PSI20 da bolsa Portuguesa.	101
4.11	Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H e WLE_2 para os log-retornos diários do índice PSI20 da bolsa Portuguesa.	101
4.12	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , PORT-ML e PORT-MP, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 1.5$.	102
4.13	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , PORT-ML e PORT-MP, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 0.1$.	103
4.14	Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , PORT-ML e PORT-MP, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 0.5$.	103
5.1	Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda (a) (H, ML) , (b) (H, CH) e (c) (H, WH) , e correspondentes intervalos de confiança a 95% para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	118
5.2	Comportamento da função k_{01}/k_0^H .	119
5.3	Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	124

5.4	Estimativas fornecidas pelos estimadores de quantis elevados (a) (Q_H, Q_{ML}) , (b) (Q_H, Q_{CH}) e (c) (Q_H, Q_{WH}) , e correspondentes intervalos de confiança a 95% para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	131
5.5	Estimativas fornecidas pelos estimadores de quantis elevados Q_H , Q_{ML} , Q_{CH} e Q_{WH} para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	132
6.1	Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{M(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{H(q)}$ no plano (γ, ρ) quando $\chi_q^* \neq 0$	141
6.2	Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{H(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{M(q)}$ no plano (γ, ρ) quando $\chi_q^* = 0$	141
7.1	Trajectórias das funções τ_q para o modelo $Burr(\gamma, \rho)$ com $\gamma = -2\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.169	
7.2	Trajectórias das funções τ_q para o modelo $Burr(\gamma, \rho)$ com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.170	
7.3	Trajectórias das funções τ_q para o modelo $GP(\gamma > 0)$ com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$	170

Lista de Tabelas

2.1	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo F na subclasse de modelos de Hall-Welsh, sujeito a um deslocamento $s \neq 0$.	30
2.2	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $Burr(\gamma, \rho; s)$, $s \neq 0$.	31
2.3	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo Log-Logístico, sujeito a um deslocamento $s \neq 0$.	32
2.4	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $Fréchet(\gamma; s)$, $s \neq 0$.	33
2.5	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $GEV(\gamma > 0)$.	37
2.6	Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $GEV(\gamma > 0; s)$, $s \in \mathbb{R}$.	38
2.7	Caracterização dos parâmetros de escala de segunda e terceira ordem para alguns modelos de cauda pesada.	38
2.8	Caracterização dos parâmetros de escala de segunda e terceira ordem para alguns modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos determinísticos, $s \neq 0$.	39
4.1	Fracção óptima da amostra, valores esperados e erros quadráticos médios de $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ para um modelo Burr com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.	105
4.2	Indicadores de eficiência relativa para um modelo Burr com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.	106
5.1	Intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para γ associados aos estimadores H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	118
5.2	Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$.	121

5.3	Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -1.0$	122
5.4	Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -2.0$	122
5.5	Indicadores REFF para o Modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1.0$).	122
5.6	Estimativas do índice de cauda associadas às escolhas adaptativas $\hat{k}_0^H$ e $\hat{k}_{01}$ e respectivos intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para γ , associados aos estimadores H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	123
5.7	Estimativas do quantil elevado $\chi_{0.999}$ associadas às escolhas adaptativas $\hat{k}_0^{Q_H}$, k_b e $\hat{k}_{01}$ e respectivos intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para os log-retornos diários do Euro <i>versus</i> a Libra Inglesa.	132
6.1	Níveis óptimos para a estimação de γ associados aos estimadores PORT-Hill e PORT-Momentos.	140
7.1	Valores de τ_q para um modelo <i>Fréchet</i> (γ) com $\gamma = -2\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$	168
7.2	Valores de τ_q para um modelo <i>Fréchet</i> (γ) com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$	169

Capítulo 1

Introdução

O principal objectivo da Teoria de Valores Extremos é a previsão de acontecimentos raros, pelo que a estimação adequada dos parâmetros relacionados com este tipo de acontecimentos desempenha um papel fundamental em Estatística de Extremos. A distribuição do máximo de n observações independentes e identicamente distribuídas, após normalização adequada, converge para a designada distribuição de Valores Extremos, onde o parâmetro de forma da distribuição, γ , é designado de índice de cauda ou índice de valores extremos. Este parâmetro é um dos mais importantes em Teoria de Valores Extremos e está directamente relacionado com o peso da cauda, $1 - F$, do modelo subjacente aos dados. A sua estimação precisa é muito importante, e de enorme influência na estimação de outros parâmetros de acontecimentos raros, tais como quantis elevados ou período de retorno de níveis elevados. Trabalhamos essencialmente com distribuições de tipo Pareto, i.e., com modelos de caudas pesadas, para os quais o índice de cauda é positivo. Estes modelos têm-se revelado de grande utilidade em áreas tão diversas como finanças, seguros, telecomunicações e bioestatística. Os estimadores semi-paramétricos de parâmetros de acontecimentos extremos, tal como o índice de cauda, entre outros, têm como base as k estatísticas ordinais superiores associadas à amostra a que temos acesso. Estes estimadores semi-paramétricos são usualmente fracamente consistentes em todo o domínio de atracção da função de distribuição de Valores Extremos, sempre que k for uma sucessão intermédia, i.e., k tem de depender da dimensão da amostra n , tem de tender para infinito com n , mas a uma velocidade moderada, de modo que k/n tenda para zero. Muito frequentemente, só conseguimos obter a normalidade assintótica destes estimadores quando admitimos a validade de uma condição de segunda ordem, i.e., quando admitimos conhecer a velocidade de convergência na condição de

primeira ordem. Essa velocidade de convergência é então regulada por uma função $A(t)$ e $|A|$ tem de ser de variação regular com um índice de variação regular não-positivo, ρ , o chamado parâmetro de forma de segunda ordem ou simplesmente parâmetro de segunda ordem. Para o tópico central deste trabalho, necessitamos de uma condição de terceira ordem, que regula a velocidade de convergência na condição de segunda ordem, e que é medida por uma função $B(\cdot)$, com $|B|$ também de variação regular, com um índice de variação regular a que chamamos o parâmetro de forma de terceira ordem, ρ' . Sob o contexto de segunda ordem, e para os estimadores semi-paramétricos clássicos, existe uma função $s(t)$, que converge para 0 quando t tende para infinito, e que, juntamente com a função $A(t)$ atrás referida, nos permitem fornecer aproximações para a variância e o viés desses estimadores, os quais são proporcionais a $s^2(k)$ e $A(n/k)$, respectivamente. Consequentemente, o padrão desses estimadores tem o mesmo tipo de peculiaridade:

- variância elevada para níveis elevados, i.e., para valores pequenos de k ;
- viés elevado para níveis pequenos, i.e., para valores elevados de k ;
- uma pequena região de estabilidade das trajectórias amostrais (gráfico das estimativas versus k), como função de k , o que torna problemática a escolha adaptativa do “threshold” (ou de k), com base em qualquer critério de estabilidade das trajectórias amostrais;
- um erro quadrático médio “muito pontiagudo” como função de k , o que torna difícil a escolha do valor k_0 em que o erro quadrático médio atinge o seu valor mínimo, um dos critérios de optimalidade mais vulgares em Estatística.

Estas características têm levado os investigadores em Estatística de Extremos a considerar a possibilidade de controlar este viés, construindo de forma apropriada novos estimadores, os chamados estimadores de viés reduzido de segunda ordem. Para estes estimadores a componente dominante do viés vai ser de ordem inferior a $A(n/k)$, sendo em muitos casos da ordem de $A(n/k)B(n/k)$, envolvendo pois parâmetros de segunda e de terceira ordem. Essa redução de viés fornece usualmente trajectórias amostrais mais estáveis, um erro quadrático médio inferior no nível óptimo, sendo ainda possível manter a variância assintótica do estimador de Hill, o estimador semi-paramétrico mais conhecido do índice de cauda. Analisamos também alguns métodos heurísticos de escolha adaptativa do “threshold” em estimação de viés reduzido. Neste trabalho procuramos tirar partido do comportamento de segunda ordem de estatísticas usadas

na estimação do índice de cauda para conceber métodos de estimação de viés reduzido, em contexto semi-paramétrico. A procura de estimadores invariantes para mudanças de localização levou-nos ainda à aplicação da metodologia PORT (do inglês “*peaks over random threshold*”) na estimação de quantis elevados e na estimação do parâmetro de forma de segunda ordem.

No Capítulo 2 apresentamos uma breve introdução à Teoria de Valores Extremos. Começamos por caracterizar o comportamento exacto de uma estatística ordinal. Dado que o comportamento assintótico da estatística ordinal $X_{k:n}$ depende da forma como $k = k(n)$ se relaciona com n , classificamos as estatísticas ordinais em extremas, centrais e intermédias, e analisamos o seu comportamento assintótico. Nas estatísticas ordinais extremas damos especial destaque à distribuição de Valores Extremos e à caracterização dos diversos domínios de atracção. Seguidamente apresentamos um breve resumo da teoria das funções de Variação Regular, uma ferramenta muito importante em Teoria de Valores Extremos. Caracterizamos, ainda, os domínios de atracção com base nesta ferramenta. Seguidamente apresentamos as condições de primeira, segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada. Os modelos de cauda pesada utilizados neste trabalho satisfazem as condições de variação regular até à terceira ordem, e pertencem a uma vasta subclasse de modelos da classe de Hall-Welsh, cujo desenvolvimento, de terceira ordem, da cauda é,

$$1 - F(x) := \left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma} \left\{ 1 + E_1 \left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} + E_2 \left(\frac{x}{C}\right)^{2\rho/\gamma} + o\left(x^{2\rho/\gamma}\right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty,$$

onde $C > 0$, $E_1, E_2 \neq 0$, $\gamma > 0$ e $\rho < 0$. Seguidamente, analisamos as condições de variação regular de segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos $s \in \mathbb{R}$. Terminamos este Capítulo caracterizando as condições de segunda e terceira ordem em alguns dos modelos de cauda pesada mais utilizados em aplicações.

No Capítulo 3 analisamos a estimação de parâmetros de acontecimentos raros. Apresentamos os estimadores clássicos do índice de cauda, γ , utilizados neste trabalho, o estimador de Hill e o estimador de Momentos. Seguidamente analisamos, em contexto de terceira ordem, a estimação semi-paramétrica dos parâmetros de forma e de escala de segunda ordem, ρ e β , respectivamente.

No Capítulo 4 apresentamos formalmente os estimadores de viés reduzido de segunda ordem. Introduzimos uma nova classe de estimadores de viés reduzido de variância mínima do índice de

cauda, γ , obtida por acomodação do viés nos log-excessos das observações, uma nova classe de estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem, β , baseada nos log-excessos e ainda uma nova classe de estimadores de máxima verosimilhança do índice de valores extremos, γ , obtida através da acomodação do viés nos excessos acima de um “threshold” elevado. Com esta metodologia pretendemos obter uma nova classe de estimadores de viés reduzido, sendo, necessário proceder, para além da estimação de γ , à estimação de um outro parâmetro de primeira ordem, via máxima verosimilhança. No entanto, com a estimação deste parâmetro de primeira ordem a nova classe de estimadores de máxima verosimilhança apresenta uma componente dominante do viés da ordem de $A(n/k)$ e não de ordem inferior, como pretendido. Apresentamos o comportamento assintótico das novas classes de estimadores baseadas nos log-excessos, em contexto de segunda ordem, mas recorrendo a informação sobre o comportamento de terceira ordem, e o comportamento dos novos estimadores de máxima verosimilhança, em contexto de segunda ordem. Efectuamos, também, uma comparação assintótica, nos níveis óptimos, dos novos estimadores de máxima verosimilhança relativamente aos estimadores clássicos. Terminamos este Capítulo ilustrando o comportamento exacto destes novos estimadores, via método de Monte Carlo, e apresentando uma aplicação a dados reais.

No Capítulo 5 apresentamos outros estimadores semi-paramétricos de viés reduzido de variância mínima existentes na literatura e analisamos, para estes estimadores, algumas técnicas heurísticas de escolha adaptativa do “threshold”. A estimação de quantis elevados usando estimadores de viés reduzido será outro dos tópicos deste Capítulo.

No Capítulo 6 começamos por apresentar a metodologia PORT e alguns resultados assintóticos preliminares em contexto de segunda ordem. Efectuamos uma comparação assintótica, nos respectivos níveis óptimos, de dois estimadores do índice de valores extremos invariantes para mudanças de localização, o PORT-Hill e o PORT-Momentos. Introduzimos uma nova classe de estimadores de quantis elevados invariante para mudanças de localização e apresentamos o seu comportamento assintótico em contexto de segunda ordem.

Por último, no Capítulo 7, e depois de apresentarmos alguns resultados assintóticos preliminares associados à metodologia PORT, em contexto de terceira ordem, introduzimos uma nova classe de estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem, ρ , invariante para mudanças de localização. Provamos a consistência desta nova classe de estimadores e analisamos as condições

necessárias para garantir a normalidade assintótica dos novos estimadores. Esta classe de estimadores depende, à semelhança do estimador clássico de ρ apresentado no Capítulo 3, de um parâmetro de controlo τ_q . Apresentamos ainda um pequeno estudo sobre a escolha adequada de τ_q para alguns modelos de caudas pesadas.

Capítulo 2

Teoria de Valores Extremos - uma Introdução

Neste Capítulo apresentamos uma breve introdução à Teoria de Valores Extremos (TVE) no contexto de amostras independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Na Secção 2.1 caracterizamos o comportamento exacto de estatísticas ordinais (e.o.), apresentando os principais resultados associados a e.o. Uniformes, Exponenciais e Pareto. Seguidamente, na Secção 2.2, e após uma breve revisão dos principais tipos de convergência estocástica, analisamos o comportamento das e.o. em amostras de grande dimensão, identificando distribuições limite não-degeneradas de sequências de variáveis aleatórias (v.a.) devidamente normalizadas. Em particular, caracterizamos a distribuição limite não-degenerada, G , do máximo linearmente normalizado. Na Secção 2.3 apresentamos as funções de variação regular, e recorrendo à teoria das funções de Variação Regular e à função quantil recíproca efectuamos uma nova caracterização dos domínios de atracção para máximos da distribuição limite não-degenerada, G . Com base nesta caracterização apresentamos as condições de variação regular, até à terceira ordem, para modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos $s \in \mathbb{R}$. Por último, na Secção 2.4, efectuamos uma caracterização, em contexto de segunda e terceira ordem, dos principais modelos de cauda pesada utilizados em aplicações.

2.1 Alguns resultados preliminares sobre o comportamento exacto de estatísticas ordinais

Seja $\underline{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória (a.a.) de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição (f.d.) F e denotemos por $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, a amostra de e.o. ascendentes.

Represente-se por $F_{i:n}(x)$ a f.d. da e.o. $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$. Tem-se

$$\begin{aligned} F_{i:n}(x) &= \mathbb{P}\{X_{i:n} \leq x\} = \mathbb{P}\{\text{pelo menos } i \text{ das } n \text{ observações } \leq x\} \\ &= \sum_{r=i}^n \binom{n}{r} F^r(x) [1 - F(x)]^{n-r}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se a v.a. $X_{i:n}$ é absolutamente contínua e denotando por $f(x)$ a função densidade de probabilidade (f.d.p.) do modelo F , então

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) F^{i-1}(x) [1 - F(x)]^{n-i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se $i = n$ a e.o. $X_{n:n}$ representa o máximo amostral com f.d. e f.d.p. dadas, respectivamente, por

$$F_{n:n}(x) = P\{X_{n:n} \leq x\} = P\{\text{todas as observações } \leq x\} = F^n(x)$$

e

$$f_{n:n}(x) = n f(x) F^{n-1}(x),$$

válidas para todo o x real.

O mínimo amostral, representado pela e.o. $X_{1:n}$, obtém-se quando $i = 1$. Neste caso, a f.d. e a f.d.p., válidas para todo o x real, são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} F_{1:n}(x) &= \mathbb{P}\{X_{1:n} \leq x\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{1:n} > x\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{todas as observações } > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \end{aligned}$$

e

$$f_{1:n}(x) = n f(x) [1 - F(x)]^{n-1}.$$

Ao longo deste trabalho vão ser muito importantes alguns resultados sobre e.o. Uniformes, Exponenciais e Pareto, que passamos a apresentar:

Teorema 2.1 (Rényi [88]) *Sejam $E_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, as e.o. associadas a n v.a. $\{E_i\}_{i=1}^n$ i.i.d. exponenciais unitárias, i.e., $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, ou seja $X \sim \text{Exp}(1)$. Então, com $E_{0:n} = 0$,*

- (i) *os espaçamentos $(E_{i:n} - E_{i-1:n})$ e $(E_{j:n} - E_{j-1:n})$ são independentes para $i \neq j$ com $i, j = 1, \dots, n$;*
- (ii) *$(n - i + 1)(E_{i:n} - E_{i-1:n}) \sim \text{Exp}(1)$.*

Observação 2.1 *O ponto (ii) do Teorema anterior tem como consequência,*

$$E_i \stackrel{d}{=} (n - i + 1)(E_{i:n} - E_{i-1:n}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.1)$$

que permite obter a seguinte representação de Rényi,

$$E_{i:n} = \sum_{r=1}^i (E_{r:n} - E_{r-1:n}) \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^i \frac{E_r}{n - r + 1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.2)$$

e a relação

$$E_{j:n} - E_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{j-i:n-i}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.3)$$

Definição 2.1 *Seja $F(\cdot)$ uma f.d. qualquer e denote-se por $F^{\leftarrow}(\cdot)$ a respectiva inversa generalizada definida por*

$$F^{\leftarrow}(t) := \inf \{x : F(x) \geq t\}, \quad (2.4)$$

e por $U(\cdot)$ a função quantil recíproca da v.a. X definida por

$$U(t) := F^{\leftarrow}(1 - 1/t) = \inf \{x : F(x) \geq 1 - 1/t\}, \quad t \geq 1. \quad (2.5)$$

Teorema 2.2 *Sejam R_i , $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme em $(0, 1)$, i.e., $F(x) = x$, se $0 < x < 1$, ou seja $X \sim R(0, 1)$, e sejam X_i , $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com f.d. $F(\cdot)$, arbitrária. Tem-se que:*

$$F^{\leftarrow}(R_{i:n}) \stackrel{d}{=} X_{i:n}. \quad (2.6)$$

Demonstração: Pelo teorema da transformação uniformizante, $X \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(R)$. Como $F^{\leftarrow}$ é uma função não decrescente, $X_{i:n} \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(R_{i:n})$, $1 \leq i \leq n$. $\square$

Teorema 2.3 *Sejam Y_i , $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Pareto unitária, i.e., $F(y) = 1 - 1/y$, $y \geq 1$, e E_i , $1 \leq i \leq n$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial unitária. Então, são válidas as seguintes relações:*

$$(i) \ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{i:n};$$

$$(ii) X_{i:n} \stackrel{d}{=} U(Y_{i:n});$$

$$(iii) \frac{Y_{j:n}}{Y_{i:n}} \stackrel{d}{=} Y_{j-i:n-i}.$$

Demonstração:

- (i) Aplicando o teorema da transformação uniformizante e dado que $-\ln R \sim \text{Exp}(1)$ temos $E_{i:n} \stackrel{d}{=} -\ln R_{n-i+1:n}$. Por outro lado, $1 - \frac{1}{Y} \sim R(0, 1)$, logo

$$\frac{1}{Y_{i:n}} \stackrel{d}{=} 1 - R_{i:n} \stackrel{d}{=} 1 - (1 - e^{-E_{i:n}}) \stackrel{d}{=} e^{-E_{i:n}}.$$

Consequentemente, $\ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{i:n}$;

$$(ii) U(Y_{i:n}) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{Y_{i:n}}\right) \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(R_{i:n}) \stackrel{d}{=} X_{i:n};$$

- (iii) Aplicando a relação (i) temos

$$\ln\left(\frac{Y_{j:n}}{Y_{i:n}}\right) = \ln Y_{j:n} - \ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{j:n} - E_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{j-i:n-i} \stackrel{d}{=} \ln Y_{j-i:n-i}.$$

$\square$

2.2 Comportamento assintótico de estatísticas ordinais

Nesta Secção caracterizamos o comportamento das e.o. em amostras de grande dimensão. Começamos por apresentar os tipos de convergência estocástica mais utilizados, bem como alguns resultados limite importantes. Seguidamente analisamos os resultados de convergência

em distribuição das e.o. Assim, pretendemos identificar e caracterizar distribuições limite não-degeneradas de sequências de v.a. devidamente normalizadas. Consideramos, como é usual, uma a.a. de n v.a. provenientes de uma população com f.d. F . O comportamento assintótico da e.o. $X_{k:n}$ depende da forma como $k = k(n)$ se relaciona com n . Desta forma as e.o. podem ser classificadas num de três tipos consoante o valor a do limite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = a$. Assim,

- (i) a e.o. $X_{k:n}$ diz-se, respectivamente, uma e.o. extremal inferior ou superior se k ou $n - k$ são fixos e $n \rightarrow \infty$, tendo-se consequentemente $a = 0$ ou $a = 1$;
- (ii) a e.o. $X_{k:n}$ diz-se uma e.o. central se $a \in (0, 1)$ e $k \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. O quantil empírico $X_{k(n):n}$, $k(n) := [np] + 1$, $0 < p < 1$, com $[.]$ denotando a parte inteira de x , estimador do quantil de probabilidade p da f.d. F , é uma e.o. central;
- (iii) a e.o. $X_{k:n}$ diz-se, respectivamente, uma e.o. intermédia inferior ou superior quando $k \rightarrow \infty$ e $n - k \rightarrow \infty$, mas $a = 0$ ou 1 . Neste trabalho utilizamos apenas e.o. intermédias inferiores que são a partir de agora simplesmente designadas de e.o. intermédias.

2.2.1 Convergências estocásticas e alguns resultados limite importantes

Apresentamos em seguida os principais conceitos relativos à convergência de sucessões $\{X_n\}_{n \geq 1}$ de v.a.

Definição 2.2 (Convergência em distribuição) *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de v.a. Dizemos que X_n converge em distribuição para X sse $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_X(x)$, em qualquer ponto de continuidade de F_X , e escreve-se $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$.*

Definição 2.3 (Convergência fraca) *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de v.a. Dizemos que X_n converge fracamente para X sse*

$$\int_{\mathbb{R}} L(x) dF_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} L(x) dF_X(x),$$

para todo o funcional contínuo L , e escrevemos $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} X$.

Observação 2.2 *No caso de v.a. os dois conceitos coincidem.*

Definição 2.4 (Convergência em probabilidade) *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de v.a. Dizemos que X_n converge em probabilidade para a v.a. X (eventualmente degenerada) se $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, e escrevemos $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$.*

Observação 2.3 *A convergência em probabilidade da sucessão X_n para a v.a. X implica a convergência em distribuição da sucessão X_n para a distribuição de X , no entanto o recíproco não é verdadeiro, com exceção do caso em que X é uma v.a. degenerada, i.e., uma constante. Neste caso, a convergência em distribuição para uma constante implica a convergência em probabilidade para essa mesma constante.*

Definição 2.5 (Convergência quase certa) *Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de v.a. e X uma v.a. definidas no espaço de probabilidades $[\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}]$. Dizemos que X_n converge quase certamente para X , e escrevemos $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} X$, sse*

$$\mathbb{P} \left\{ w \in \Omega : X_n(w) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(w) \right\} = 1.$$

Observação 2.4 *A convergência quase certa é mais forte do que a convergência em probabilidade, que por sua vez é mais forte do que a convergência em distribuição (veja-se a Observação 2.3). No entanto, se $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é uma sucessão de v.a. positivas tais que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0$, então $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} 0$.*

Enunciamos agora dois resultados referentes ao comportamento limite de somas de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Teorema 2.4 (Lei fraca dos grandes números) *Seja $\{X_k\}_{k \geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, $X_k \stackrel{d}{=} X$, com valor médio μ . Então, a média amostral $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$, converge em probabilidade para μ , i.e., $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mu$.*

Teorema 2.5 (Lei forte dos grandes números) *Seja $\{X_k\}_{k \geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, $X_k \stackrel{d}{=} X$. Então $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \mu$ finito sse $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, e tem-se $\mathbb{E}(X) = \mu$.*

Observação 2.5 *As leis fraca e forte dos grandes números podem ser generalizadas. Seja $\left\{ B_n : B_n > 0 \text{ e } B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \right\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de constantes normalizadoras e $\{A_n\}_{n \geq 1}$ uma sucessão de constantes de centralização. Dizemos que a sucessão $\{X_n\}_{n \geq 1}$ obedece à lei fraca (forte) dos grandes números, com $S_n = n\bar{X}_n$, $n \geq 1$, se*

$$B_n^{-1}(S_n - A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0 \quad \left(\text{respectivamente, } B_n^{-1}(S_n - A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} 0 \right).$$

2.2.2 Estatísticas ordinais extremas

Os resultados apresentados dizem apenas respeito ao máximo amostral $X_{n:n}$, uma vez que o mínimo amostral $X_{1:n}$ de uma população com f.d. $F(x)$ tem a mesma distribuição que o simétrico do máximo amostral proveniente de uma população com f.d. $F^*(x) = 1 - F(-x)$.

Definição 2.6 (Domínio de atracção para máximos (Arnold *et al.* [3])) Diz-se que uma f.d. F (discreta ou absolutamente contínua) pertence ao domínio de atracção para máximos de uma f.d. não degenerada G , se existirem sucessões $\{a_n\}_{n>1}$ e $\{b_n > 0\}_{n>1}$ de constantes normalizadoras tais que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_{n:n} - a_n}{b_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = G(x), \quad (2.7)$$

em todos os pontos de continuidade de $G(x)$ e escreve-se $F \in \mathcal{D}(G)$.

Desta forma, sendo W uma v.a. com f.d. G é válida a seguinte equivalência,

$$F \in \mathcal{D}(G) \iff \frac{X_{n:n} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} W. \quad (2.8)$$

Importa referir que a escolha das constantes normalizadoras não é única e que a f.d. F apenas pode pertencer ao domínio de atracção para máximos de um tipo de funções de distribuição. No próximo Teorema caracterizamos as distribuições limite não degeneradas do máximo devidamente normalizado.

Teorema 2.6 (Gnedenko [44]) Se $F \in \mathcal{D}(G)$ então a distribuição limite de G apresenta uma das seguintes formas:

$$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0, \alpha > 0 \quad \text{Fréchet}, \quad (2.9)$$

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha), \quad x < 0, \alpha > 0 \quad \text{Weibull}, \quad (2.10)$$

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Gumbel}, \quad (2.11)$$

onde $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma da distribuição.

As três distribuições apresentadas no Teorema anterior pertencem a uma classe mais vasta de funções de distribuição designada de f.d. *geral de valores extremos* (distribuição GEV, do

inglês “*generalized extreme value*”), com expressão funcional

$$G(x) \equiv G_\gamma(x) = \exp \{-(1 + \gamma x)\}^{-1/\gamma}, \quad 1 + \gamma x > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

onde o parâmetro de forma da distribuição, γ , é designado de *índice de cauda* ou *índice de valores extremos*, estando directamente relacionado com o peso da cauda da distribuição, $1 - F$. Se $\gamma > 0$, $G_\gamma(x) = \Phi_{1/\gamma}(1 + \gamma x)$ e o modelo diz-se de cauda pesada (a cauda apresenta um comportamento polinomial ou de tipo Pareto) e G possui eventualmente momentos não finitos; se $\gamma = 0$, $G_\gamma(x) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \Lambda(x)$ e o modelo diz-se de cauda leve (a cauda apresenta um comportamento exponencial); se $\gamma < 0$, $G_\gamma(x) = \Psi_{-1/\gamma}(-(1 + \gamma x))$ e o modelo diz-se de cauda curta com limite superior do suporte finito.

Foi recentemente proposto em Neves & Fraga Alves [85] e em Fraga Alves *et al.* [42] um novo conceito de caudas super-pesadas obtidas a partir do logaritmo de caudas leves e cuja distribuição não tem momentos finitos.

Gnedenko [44] estabeleceu também um conjunto de condições necessárias e suficientes para que uma f.d. F pertença ao domínio de atracção para máximos de um dos três tipos de leis não degeneradas apresentadas no Teorema 2.6.

Teorema 2.7 (Condições necessárias e suficientes)

- (i) $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ sse o limite superior do suporte é infinito, i.e., $F^\leftarrow(1) = \infty$, e existe $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = -\ln(\Phi_\alpha(x)) = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

Desta forma, existe uma sequência de constantes normalizadoras $\{b_n > 0\}_{n \geq 1}$ ($\{a_n\}_{n \geq 1} = 0$) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{n:n} \leq b_n x) = \Phi_\alpha(x),$$

onde

$$b_n = F^\leftarrow\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

- (ii) $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ sse $F^\leftarrow(1) =: c_1$, finito e existe $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - F(c_1 - tx)}{1 - F(c_1 - t)} = -\ln(\Psi_\alpha(-x)) = x^\alpha, \quad \forall x > 0.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{n:n} \leq c_1 + b_n x) = \Psi_\alpha(x),$$

as constantes normalizadoras $\{a_n\}_{n>1}$ e $\{b_n > 0\}_{n>1}$ são dadas, respectivamente, por

$$a_n = c_1 \quad e \quad b_n = c_1 - F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right);$$

(iii) (de Haan [72]) $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ sse $\mathbb{E}(X|X > c)$ é finito para algum $c < F^{\leftarrow}(1) = c_1$ e

$$\lim_{t \rightarrow c_1} \frac{1 - F(t + x \mathbb{E}(X - t|X > t))}{1 - F(t)} = -\ln(\Lambda(x)) = \exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, as constantes normalizadoras são dadas por:

$$a_n = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad e \quad b_n = \mathbb{E}(X - a_n | X > a_n).$$

As condições necessárias e suficientes apresentadas são de difícil verificação. Apresentamos no próximo Teorema as condições suficientes propostas por Von Mises [94], aplicáveis apenas para funções de distribuição absolutamente contínuas.

Teorema 2.8 (Condições suficientes de von Mises) *Seja F uma f.d. absolutamente contínua com f.d.p. f . Então,*

(i) *se $f(t) > 0$ para valores elevados de t e existe uma constante $\alpha > 0$ tal que,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t f(t)}{1 - F(t)} = \alpha,$$

tem-se $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$;

(ii) *se $F^{\leftarrow}(1) =: c_1 < \infty$ e existe uma constante $\alpha > 0$ tal que,*

$$\lim_{t \rightarrow c_1} \frac{(c_1 - t)f(t)}{1 - F(t)} = \alpha,$$

tem-se $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$;

(iii) *se $f(t)/(1 - F(t))$ for diferente de zero e diferenciável no intervalo (x, c_1) , com $x < c_1$ (ou*

se $c_1 = \infty$, para valores elevados de t), e se

$$\lim_{t \rightarrow c_1} \frac{d}{dt} \left[\frac{1 - F(t)}{f(t)} \right] = 0,$$

tem-se $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Nestas condições as constantes normalizadoras $\{a_n\}_{n>1}$ e $\{b_n > 0\}_{n>1}$ são, respectivamente,

$$a_n = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad e \quad b_n = \frac{1}{n f(a_n)}.$$

Exemplo 2.1 (Modelo Weibull) Seja F a f.d. de uma v.a. X com distribuição *Weibull*(α), onde α é o parâmetro de forma, i.e., $F(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $x > 0$ e $\alpha > 0$. Como $F(\cdot)$ é absolutamente contínua, $\frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} \neq 0$ e diferenciável, $c_1 = \infty$, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{1 - F(t)}{f(t)} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha}{\alpha} t^{-\alpha} = 0,$$

a distribuição Weibull pertence ao domínio de atracção para máximos da distribuição Gumbel, com constantes normalizadoras $a_n = (\ln n)^{1/\alpha}$ e $b_n = \frac{(\ln n)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}$.

Exemplo 2.2 (Modelo Pareto) Seja F a f.d. de uma v.a. X com distribuição *Pareto*(θ), onde θ é o parâmetro de forma, i.e., $F(x) = 1 - x^{-\theta}$, $x \geq 1$ e $\theta > 0$. Como $c_1 = \infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\theta},$$

para $t > \max(1, 1/x)$, a distribuição Pareto pertence ao domínio de atracção para máximos da distribuição Fréchet, com constante de normalização $b_n = n^{1/\theta}$.

2.2.3 Estatísticas ordinais centrais e intermédias

O quantil empírico $X_{k(n):n}$, $k(n) := [np] + 1$, $0 < p < 1$ é uma e.o. central. Se F é uma f.d. absolutamente contínua, com f.d.p. f contínua e positiva em $F^{-1}(p)$, o quantil empírico, após normalização adequada, segue distribuição assintoticamente normal. Este resultado é apresentado no Teorema seguinte.

Teorema 2.9 (Distribuição assintótica de uma e.o. central) *Seja F uma f.d. absoluta-*

mente contínua com f.d.p. f contínua e positiva em $F^{-1}(p)$, com $0 < p < 1$. Para $k(n) = [np] + 1$,

$$\sqrt{n} f(F^{-1}(p)) \frac{X_{k(n):n} - F^{-1}(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.13)$$

Observação 2.6 Pelo Teorema anterior o quantil empírico $X_{k(n):n}$ é um estimador consistente de $F^{-1}(p)$. No entanto, se as condições do Teorema 2.9 não forem satisfeitas, a distribuição limite de $X_{k(n):n}$ pode não ser normal (Smirnov [92], Balkema & de Haan [4]).

Exemplo 2.3 (Modelo Weibull) Seja $X \sim \text{Weibull}(\alpha)$, com f.d.p. $f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha)$, $x > 0$ e $\alpha > 0$. A distribuição assintótica do quantil empírico $X_{k(n):n}$ com $k(n) := [np] + 1$, $0 < p < 1$, é,

$$\sqrt{n} \left(X_{k(n):n} - (-\ln(1-p))^{1/\alpha} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{p(-\ln(1-p))^{2(1/\alpha-1)}}{\alpha^2(1-p)} \right).$$

Se $\alpha = 1$ então $X \sim \text{Exp}(1)$, e

$$\sqrt{n} (X_{k(n):n} + \ln(1-p)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(0, \frac{p}{1-p} \right).$$

Analisamos de seguida o comportamento assintótico das e.o. intermédias que, como Falk [37] constatou pode ser normal ou não dependendo da velocidade de crescimento da sucessão $k(n)$.

Teorema 2.10 *Seja F uma f.d. absolutamente contínua satisfazendo uma das condições de von Mises apresentadas no Teorema 2.8. Se $k = k(n) \rightarrow \infty$ e $k = o(n)$, quando $n \rightarrow \infty$, existem constantes normalizadoras $\{a_n\}_{n>1}$ e $\{b_n > 0\}_{n>1}$ tais que:*

$$\frac{X_{n-k+1:n} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.14)$$

sendo $a_n = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{k}{n} \right)$ e $b_n = \frac{\sqrt{k}}{n f(a_n)}$ uma possível escolha para as constantes normalizadoras.

Definição 2.7 (Sucessão intermédia) *A sequência de valores inteiros $k = k(n)$ entre 1 e n diz-se uma sucessão ou sequência intermédia se*

$$k = k(n) \rightarrow \infty, \quad e \quad k = o(n) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Exemplo 2.4 (Modelo Weibull) Nos exemplos 2.1 e 2.3 caracterizámos o comportamento assintótico de e.o. extremas e centrais provenientes de um modelo $Weibull(\alpha)$. Analisamos agora o comportamento limite das e.o. intermédias. Pelo Teorema 2.10 existem sucessões de constantes normalizadoras $a_n = (\ln(n/k))^{1/\alpha}$ e $b_n = \sqrt{k} \left((\ln(n/k))^{1/\alpha-1} \right) / \alpha$ tais que

$$\frac{X_{n-k+1:n} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1), \text{ se } k \rightarrow \infty \text{ e } \frac{k}{n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Para $\alpha = 1$, i.e., se $X \sim Exp(1)$ temos

$$\frac{X_{n-k+1:n} - \ln(n/k)}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

O Teorema 2.10 foi reescrito por de Haan & Ferreira [74] recorrendo à função quantil recíproca, $U(t) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{t} \right)$, e estabelece uma relação entre as e.o. intermédias e a TVE. Assim,

Teorema 2.11 *Seja F uma f.d. absolutamente contínua satisfazendo uma das condições de von Mises apresentadas no Teorema 2.8. Se $k = k(n)$ é uma sequência intermédia satisfazendo (2.15), então*

$$\sqrt{k} \frac{X_{n-k+1:n} - U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k} U'\left(\frac{n}{k}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.16)$$

Corolário 2.1 *Seja Y uma v.a. Pareto unitária, i.e., $F(y) = 1 - 1/y$, $y \geq 1$. Se $k = k(n)$ é uma sucessão intermédia de inteiros satisfazendo (2.15), então*

$$\sqrt{k} \left(\frac{k}{n} Y_{n-k+1:n} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.17)$$

Demonstração: Começamos por observar que a função quantil recíproca associada ao modelo Pareto unitário é $U(t) = t$, pelo que $U'(t) = 1$, e o resultado obtém-se de forma directa. $\square$

Com base no Corolário anterior apresentamos em seguida um resultado muito importante relativo às e.o. intermédias do modelo Pareto unitário.

Proposição 2.1 *Seja Y uma v.a. Pareto unitária e $k = k(n)$ uma sucessão intermédia satisfazendo (2.15), então*

$$\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1. \quad (2.18)$$

Na sequência da Proposição anterior podemos ainda apresentar a seguinte Proposição referente ao comportamento assintótico de $\left(\frac{k}{n}Y_{n-k:n}\right)^\theta$.

Proposição 2.2 *Nas condições da Proposição anterior é válida a seguinte representação em distribuição,*

$$\left(\frac{k}{n}Y_{n-k:n}\right)^\theta \stackrel{d}{=} 1 + \frac{\theta}{\sqrt{k}}P_k(1 + o_p(1)), \quad (2.19)$$

onde $P_k = \sqrt{k} \left(\frac{k}{n}Y_{n-k:n} - 1\right)$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão.

Demonstração: O resultado apresentado obtém-se aplicando o desenvolvimento em série de Taylor de primeira ordem da função x^θ no ponto $x = 1$. $\square$

2.3 Variação Regular e domínios de atracção

Nesta Secção começamos por definir as funções de Variação Regular, apresentando algumas propriedades das mesmas. Caracterizamos também os domínios de atracção introduzidos na Secção anterior com base nesta ferramenta tão útil e importante em TVE. Seguidamente apresentamos as condições de Variação Regular, até à terceira ordem, para modelos de cauda pesada bem como as condições de segunda e terceira ordem associadas a modelos com deslocamentos $s \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Funções de Variação Regular

Definição 2.8 (Função de variação regular) *Uma função positiva mensurável $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é de variação regular em ∞ com índice de variação regular α , e escreve-se $f \in RV_\alpha$, se para todo o $x > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Por omissão, a referência a variação regular pressupõe tratar-se de variação regular em ∞ . Se $\alpha = 0$ dizemos que a função é de variação lenta, i.e., $f \in RV_0$, sendo usualmente denotada por $L(\cdot)$. As funções de variação regular com índice α admitem a seguinte representação, $f(x) = x^\alpha L(x)$, com $L(x) \in RV_0$.

Apresentamos em seguida algumas propriedades das funções de variação regular utilizadas ao longo deste trabalho. Para uma consulta mais detalhada sobre este tópico veja-se Seneta [91],

Bingham *et al.* [10], Geluk & de Haan [43], Resnick [89] e de Haan & Ferreira [74].

Teorema 2.12 (Teorema de Karamata) *Seja $f \in RV_\alpha$ uma função integrável em intervalos finitos. Se $\alpha \geq -1$ então $\int_0^t f(x)dx \in RV_{\alpha+1}$ e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t f(t)}{\int_0^t f(x)dx} = \alpha + 1;$$

se $\alpha < -1$ (ou $\alpha = -1$ e $\int_1^\infty f(x)dx < \infty$), então $\int_t^\infty f(x)dx \in RV_{\alpha+1}$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx} = -\alpha - 1.$$

Corolário 2.2 (Representação de Karamata) *A função f satisfaz $f \in RV_\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, sse existirem funções $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_0 \ (0 < \xi_0 < \infty) \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \alpha,$$

tais que, para $t > 1$

$$f(t) = \xi(t) \exp \left(\int_1^t \frac{\varepsilon(x)}{x} dx \right).$$

Proposição 2.3 (Condição de von Mises) *Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é absolutamente contínua e tem derivada, f' , perto de ∞ satisfazendo,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t f'(t)}{f(t)} = \alpha,$$

então $f \in RV_\alpha$.

Proposição 2.4 (Propriedades das funções de Variação Regular)

(i) Limite: *Se $f \in RV_\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\ln f(t)/\ln t \rightarrow \alpha$, quando $t \rightarrow \infty$, pelo que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

(ii) Adição e Composição: *Se $f_1 \in RV_{\alpha_1}$ e $f_2 \in RV_{\alpha_2}$ então $f_1 + f_2 \in RV_{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}}$. Se para além das condições anteriores $\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = \infty$, então $f_1 \circ f_2 \in RV_{\alpha_1 \alpha_2}$.*

- (iii) **Derivada:** Se $f \in RV_\alpha$ com $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) então f é assintoticamente equivalente a uma função g estritamente crescente (decrecente) e diferenciável com derivada $g' \in RV_{\alpha-1}$ ($-g' \in RV_{\alpha-1}$). Ou seja, se $f \in RV_\alpha$ com $\alpha < 0$, existe uma função $s = -g' \in RV_{\alpha-1}$, tal que

$$f(t) \sim \int_t^\infty s(x)dx, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

- (iv) **Inversa:** Se $f \in RV_\alpha$, com $\alpha > 0$, é uma função limitada em intervalos finitos de $\mathbb{R}^+$, então $f^\leftarrow \in RV_{1/\alpha}$. Se $\alpha < 0$ considere-se a função $g(t) := 1/f(t)$. Então $g \in RV_{-\alpha}$. Se g for uma função limitada em intervalos finitos de $\mathbb{R}^+$, tem-se que $g^\leftarrow \in RV_{-1/\alpha}$ e como $g^\leftarrow(t) = f^\leftarrow(1/t)$, então $f^\leftarrow(1/t) \in RV_{-1/\alpha}$.

- (iv) **Inversa Assintótica:** Para qualquer função de variação lenta L , existe uma função de variação lenta, L^* , assintoticamente única, designada de função de variação lenta conjugada, satisfazendo as seguintes condições: $L(x)L^*(xL(x)) \rightarrow 1$ e $L^*(x)L(xL^*(x)) \rightarrow 1$, quando $x \rightarrow \infty$. Definindo $h(x) := xL(x)$, tem-se $L^*(x) \sim h^\leftarrow(x)/x$, quando $x \rightarrow \infty$. Se a função L verificar

$$\frac{L(x)}{L(xL(x))} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \frac{L\left(\frac{x}{L(x)}\right)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad \text{quando } x \rightarrow \infty,$$

então $L^* = 1/L(x)$ e $h^\leftarrow(x) \sim x/L(x)$, quando $x \rightarrow \infty$.

- (iv) **Inversa Complementar:** Se $f \in RV_\alpha$, com $\alpha < 0$, é limitada em intervalos da forma (a, ∞) , para $a > 0$, a inversa complementar de f é definida por

$$\begin{aligned} f_c(x) &:= \inf_{y>0} \{f(y) + xy\}, \quad x > 0 \\ &\stackrel{(iii)}{=} \inf_{y>0} \left\{ \int_y^\infty s(x)dx(1 + o(1)) + xy \right\}, \quad x > 0, \quad \text{quando } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dekkers & de Haan [28] mostraram que $f_c(x)$ pode ainda ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \inf_{y>0} \left\{ \int_y^\infty s(x)dx + xy \right\} (1 + o(1)), \quad \text{quando } x \rightarrow 0, \\ &= \int_0^x s^\leftarrow(u)du(1 + o(1)), \quad \text{quando } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.3.2 Caracterização dos domínios de atracção utilizando a teoria das funções de Variação Regular

Recorrendo à teoria das funções de Variação Regular apresentamos de seguida uma formulação alternativa à apresentada na Secção 2.2.2 para caracterização dos domínios de atracção. No que se segue, considera-se

$$U := \left(\frac{1}{1-F} \right)^{\leftarrow} \quad \text{e} \quad U(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} U(t), \quad \text{sendo} \quad x_0^* := \sup \{x : F(x) < 1\} = U(\infty).$$

Teorema 2.13 *Seja F uma f.d., então*

- (i) $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma > 0$ sse $U(\infty) = \infty$ e $U(t) \in RV_\gamma$;
- (ii) $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma < 0$ sse $U(\infty) < \infty$ e $U(\infty) - U(t) \in RV_\gamma$;
- (iii) se $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma = 0$, então $U(t) \in RV_0$, se $U(\infty) = \infty$, e $U(\infty) - U(t) \in RV_0$, se $U(\infty) < \infty$.

Observação 2.7 *Para os modelos em (i) e (ii) são válidas, respectivamente, as seguintes representações na cauda da distribuição, de tipo Fréchet, $U(t) \sim t^\gamma L(t)$, quando $t \rightarrow \infty$, e de tipo Weibull, $U(\infty) - U(t) \sim t^\gamma L(t)$, quando $t \rightarrow \infty$.*

Os itens (i) e (ii) do Teorema anterior correspondem às condições necessárias e suficientes (i) e (ii) apresentadas no Teorema 2.7, referentes ao domínio de atracção para máximos dos modelos Fréchet e Weibull. O item (iii) é uma condição suficiente para que um modelo pertença ao domínio da Gumbel. Para obtermos uma condição necessária e suficiente é necessário introduzirmos uma extensão da classe das funções de variação regular, a variação Π .

Definição 2.9 (Variação Π) *Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Diz-se que f é de variação Π , e escreve-se $f \in \Pi$, se existir uma função auxiliar $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que, para todo o $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} = \ln x. \quad (2.21)$$

Desta forma, a condição necessária e suficiente para que um modelo F pertença ao domínio da Gumbel, $\mathcal{D}(\Lambda)$, é

Teorema 2.14 *Nas condições do Teorema anterior, $F \in \mathcal{D}(G_0)$ sse $U(t) \in \Pi$.*

A importância em TVE da função quantil recíproca, definida em (2.5), conduziu de Haan à uniformização das condições necessárias e suficientes para que uma f.d. pertença ao domínio de atracção da distribuição GEV, em (2.12). Assim,

Teorema 2.15 (de Haan [73]) *Uma f.d. $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma \in \mathbb{R}$, sse existir uma função positiva $a(\cdot)$, tal que para todo o $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \begin{cases} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \ln x, & \text{se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Corolário 2.3 *Nas condições do Teorema anterior,*

(i) *se $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma < 0$ então $U(\infty) < \infty$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(\infty) - U(t)}{U(t) - U(tx)} = \frac{1}{x^\gamma - 1} \quad e \quad a(t) \sim \gamma(U(t) - U(\infty));$$

(ii) *se $F \in \mathcal{D}(G_\gamma)$, com $\gamma > 0$ então $U(\infty) = \infty$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma \quad e \quad a(t) \sim \gamma U(t).$$

2.3.3 Condições de primeira, segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada

Como referimos anteriormente, neste trabalho analisamos apenas a estimação de parâmetros de acontecimentos raros associados a modelos de cauda pesada, i.e., a modelos cujo domínio de atracção é o modelo Fréchet ou seja modelos onde o parâmetro de forma da distribuição, γ , é positivo.

Recorrendo à teoria de Variação Regular podemos caracterizar o comportamento da função cauda da distribuição, $\bar{F} = 1 - F$, da função quantil recíproca, U , definida em (2.5), e de funções afins. A caracterização dos domínios de atracção recorrendo à teoria das funções de Variação Regular permite-nos escrever, para modelos de caudas pesadas, a condição de variação regular de primeira ordem. Assim,

$$F \in \mathcal{D}(GEV_{\gamma>0}) \quad \text{sse} \quad U \in RV_\gamma \quad \text{sse} \quad 1 - F \in RV_{-1/\gamma}. \quad (2.23)$$

A condição $U \in RV_\gamma$ que, como vimos na Secção 2.3.1, corresponde ao limite, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma$, pode ser reescrita do seguinte modo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U(tx) - \ln U(t)}{\ln x} = \gamma \text{ (de Haan [72])}.$$

A condição de primeira ordem é utilizada para garantir a consistência dos estimadores semi-paramétricos de parâmetros de acontecimentos extremos.

É ainda usual considerar uma condição de variação regular de segunda ordem, utilizada na derivação do comportamento assintótico não-degenerado dos estimadores semi-paramétricos de parâmetros de acontecimentos raros. Esta condição permite medir a velocidade de convergência de $U(tx)/U(t)$ para x^γ , através do parâmetro de forma de segunda ordem $\rho \leq 0$, sendo dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{U(tx)}{U(t)} - x^\gamma}{A(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad (2.24)$$

válida para $x > 0$ e onde $|A(t)| \in RV_\rho$ (Geluk & de Haan [43]).

A condição anteriormente apresentada também pode ser reescrita em termos da função cauda. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} - x^{-1/\gamma}}{A^*(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma},$$

válida para $x > 0$ e onde $|A^*(t)| \in RV_{\rho/\gamma}$.

Mostra-se que as funções $A(t)$ e $A^*(t)$ estão relacionadas do seguinte modo: $A(t) \sim \gamma^2 A^*(U(t))$ (Geluk & de Haan [43]). Como $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{x^\rho - 1}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma} = \ln x$, os termos $\frac{x^\rho - 1}{\rho}$ e $\frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma}$ deverão ser substituídos por $\ln x$ quando $\rho = 0$. No entanto, neste trabalho excluimos de todas as análises o caso $\rho = 0$ e admitimos sempre que $\rho < 0$.

Tendo em conta a natureza das estatísticas usadas na determinação dos estimadores semi-paramétricos em estudo, é usual apresentar a condição de segunda ordem do seguinte modo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} = \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad x > 0. \quad (2.25)$$

Observação 2.8 A condição de segunda ordem (2.24) permite-nos obter uma aproximação para

o quociente $U(tx)/U(t)$. Como,

$$\frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma \left(1 + \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} \right) A(t) \right) (1 + o(1)),$$

e $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\rho = 0$, para $\rho < 0$, tem-se, quando $x \rightarrow \infty$,

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \sim x^\gamma \left(1 - \frac{A(t)}{\rho} \right).$$

Para o tópicos central deste trabalho necessitamos ainda de uma outra condição, a condição de variação regular de terceira ordem, que mede a velocidade de convergência de (2.25), através do parâmetro de forma de terceira ordem $\rho' < 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} - \frac{x^\rho - 1}{\rho}}{B(t)} = \frac{x^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'}, \quad \forall x > 0, \quad (2.26)$$

com $|A(t)| \in RV_\rho$, $|B(t)| \in RV_{\rho'}$, $\rho, \rho' < 0$ (para mais detalhes sobre a condição de variação regular de terceira ordem, veja-se Fraga Alves *et al.* [41], Apêndice).

Sob certas condições de regularidade podemos escolher $A(t) = tL'(t)/L(t)$ e $B(t) = tA'(t)/A(t) - \rho$, sendo $L(t) \in RV_0$ e $U(t) = t^\gamma L(t)$.

Observação 2.9 A condição de terceira ordem (2.26) também pode ser apresentada do seguinte modo,

$$\ln \frac{U(tx)}{U(t)} = \gamma \ln x + \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} \right) A(t) + \left(\frac{x^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'} \right) A(t)B(t)(1 + o(1)),$$

para todo o $x > 0$, quando $t \rightarrow \infty$, pelo que

$$\frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma \left\{ 1 + A(t) \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} + B(t) \frac{x^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'} + A(t) \frac{(x^\rho - 1)^2}{2\rho^2} \right) \right\} (1 + o(1)).$$

Como $\rho, \rho' < 0$ então $x^\rho \rightarrow 0$ e $x^{\rho+\rho'} \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \infty$, e podemos escrever

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \sim x^\gamma \left\{ 1 - \frac{A(t)}{\rho} - \frac{A(t)B(t)}{\rho + \rho'} + \frac{A^2(t)}{2\rho^2} \right\}.$$

2.3.4 Condições de segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos

Se introduzirmos um deslocamento no modelo subjacente aos dados, i.e., um novo parâmetro de localização $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então para qualquer v.a. X , com função quantil recíproca $U_X(t)$, a v.a. transformada $Y = X + s$ tem uma função quantil recíproca associada dada por

$$U_s(t) \equiv U_Y(t) = U_X(t) + s.$$

As condições de segunda e terceira ordem dadas em (2.25) e (2.26) são, no contexto de modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos $s \neq 0$, dadas, respectivamente, por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U_s(tx) - \ln U_s(t) - \gamma \ln x}{A_s(t)} = \frac{x^{\rho_s} - 1}{\rho_s} \quad (2.27)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln U_s(tx) - \ln U_s(t) - \gamma \ln x}{A_s(t)} - \frac{x^{\rho_s} - 1}{\rho_s}}{B_s(t)} = \frac{x^{\rho_s + \rho'_s} - 1}{\rho_s + \rho'_s}, \quad (2.28)$$

válidas para todo o $x > 0$, com $|A_s(t)| \in RV_{\rho_s}$, $|B_s(t)| \in RV_{\rho'_s}$, $\rho_s, \rho'_s < 0$.

Observação 2.10 *A condição de terceira ordem em modelos sujeitos a deslocamentos $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pode ser reescrita do seguinte modo,*

$$\frac{U_s(tx)}{U_s(t)} = \frac{U(tx)}{U(t)} \left\{ 1 - \frac{\gamma s}{U(t)} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) - s x^{-\gamma} \left(\frac{x^{\rho} - 1}{\rho} \right) \frac{A(t)}{U(t)} + o\left(\frac{A(t)}{U(t)}\right) \right\}.$$

Logo, e recorrendo à Observação 2.9, temos

$$\begin{aligned} \frac{U_s(tx)}{U_s(t)} &= x^{\gamma} \left\{ 1 + \frac{x^{\rho} - 1}{\rho} A(t) + \frac{x^{\rho + \rho'} - 1}{\rho + \rho'} A(t) B(t) + \frac{(x^{\rho} - 1)^2}{2\rho^2} A^2(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma s}{U(t)} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) - s x^{-\gamma} \left(\frac{x^{\rho} - 1}{\rho} \right) \frac{A(t)}{U(t)} + o(A(t)B(t)) + o(A^2(t)) + o\left(\frac{A(t)}{U(t)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Em contexto de segunda ordem a aproximação anterior é dada simplesmente por

$$\frac{U_s(tx)}{U_s(t)} = x^{\gamma} \left\{ 1 + \frac{x^{\rho} - 1}{\rho} A(t) - \frac{\gamma s}{U(t)} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) + o(A(t)) + o\left(\frac{1}{U(t)}\right) \right\}.$$

2.4 Caracterização das condições de segunda e terceira ordem em modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos

A introdução de um deslocamento no modelo subjacente aos dados pode ou não alterar os parâmetros de forma de segunda e terceira ordem, ρ e ρ' , respectivamente, e o parâmetro de escala de segunda ordem β . Nas próximas Secções analisamos o impacto de um deslocamento $s \neq 0$ no vector de parâmetros (ρ_s, ρ'_s) e caracterizamos as funções $U_s(t)$, $A_s(t)$ e $B_s(t)$, comparando-as com as funções $U(t)$, $A(t)$ e $B(t)$ correspondentes a um deslocamento $s = 0$, para diversos modelos de caudas pesadas.

2.4.1 Subclasse de Hall-Welsh

A classe de modelos de Hall-Welsh foi introduzida inicialmente por Hall [77], utilizada posteriormente por Hall & Welsh [78] com a restrição $E_1, E_2 \neq 0$, e cujo desenvolvimento de terceira ordem da cauda da distribuição é,

$$1 - F(x) := \left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma} \left\{ 1 + E_1 \left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} + E_2 \left(\frac{x}{C}\right)^{(\rho+\rho_1)/\gamma} + o\left(x^{(\rho+\rho_1)/\gamma}\right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.29)$$

onde $\gamma > 0$, $\rho, \rho_1 < 0$, $C > 0$ é o parâmetro de escala de primeira ordem e $E_1, E_2 \neq 0$.

Observação 2.11 *A classe de modelos de Hall-Welsh, em (2.29), satisfaz a condição de terceira ordem (2.26) com $\rho' = \max(\rho, \rho_1) \geq \rho$.*

Neste trabalho consideramos modelos F numa vasta subclasse de modelos da classe de Hall-Welsh com $\rho = \rho_1$. Assim, a função cauda da distribuição é,

$$1 - F(x) := \left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\gamma} \left\{ 1 + E_1 \left(\frac{x}{C}\right)^{\rho/\gamma} + E_2 \left(\frac{x}{C}\right)^{2\rho/\gamma} + o\left(x^{2\rho/\gamma}\right) \right\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

A função quantil recíproca desta subclasse de modelos é apresentada na Proposição seguinte:

Proposição 2.5 *A função quantil recíproca, $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^\leftarrow$, associada aos modelos da subclasse de Hall-Welsh é*

$$U(t) = Ct^\gamma \{1 + D_1 t^\rho + D_2 t^{2\rho} + o(t^{2\rho})\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.31)$$

onde $D_1 = \gamma E_1$ e $D_2 = \gamma \left(E_2 + \frac{2\rho + \gamma - 1}{2} E_1^2 \right)$.

Demonstração: Utilizando a técnica de inversão de séries de Taylor proposta em Abramowitz & Stegun [1] com termo constante nulo, começamos por resolver em ordem a x a equação,

$$t = \frac{1}{1 - F(x)} = \left(\frac{x}{C} \right)^{1/\gamma} \left\{ 1 + E_1 \left(\frac{x}{C} \right)^{\rho/\gamma} + E_2 \left(\frac{x}{C} \right)^{2\rho/\gamma} + o \left(x^{2\rho/\gamma} \right) \right\}^{-1}.$$

Definindo $y = \left(\frac{x}{C} \right)^{\rho/\gamma}$ obtemos

$$t^\rho = y \left(1 + y(E_1 + E_2 y) + o(y^2) \right)^{-\rho},$$

e utilizando o desenvolvimento de segunda ordem de $(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)}{2!} y^2 + o(y^2)$, $m > 0$, quando $y \rightarrow 0$, temos

$$t^\rho = y \left\{ 1 - \rho E_1 y - \rho \left(E_2 - \frac{\rho + 1}{2} E_1^2 \right) y^2 + o(y^2) \right\}. \quad (2.32)$$

A série de Taylor da função inversa é dada por

$$y = t^\rho (a_1 + a_2 t^\rho + a_3 t^{2\rho} + o(t^{2\rho})). \quad (2.33)$$

A utilização do método dos coeficientes indeterminados na resolução da equação resultante da substituição de (2.33) em (2.32) permite calcular os coeficientes $\{a_i\}$ ($i = 1, 2, 3$), obtendo-se $a_1 = 1$, $a_2 = \rho E_1$ e $a_3 = \rho \left(E_2 + \frac{3\rho - 1}{2} E_1^2 \right)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{C} \right)^{1/\gamma} &= t \left\{ 1 + \rho E_1 t^\rho + \rho \left(E_2 + \frac{3\rho - 1}{2} E_1^2 \right) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}) \right\}^{1/\rho} \\ &= t \left\{ 1 + E_1 t^\rho + (E_2 + \rho E_1^2) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}) \right\} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} U(t) &= Ct^\gamma \left\{ 1 + E_1 t^\rho + (E_2 + \rho E_1^2) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}) \right\}^\gamma, \quad t \rightarrow \infty \\ &= Ct^\gamma \left\{ 1 + \gamma E_1 t^\rho + \gamma \left(E_2 + \frac{2\rho + \gamma - 1}{2} E_1^2 \right) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}) \right\}, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Utilizando o desenvolvimento $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$, obtemos

$$\ln U(tx) - \ln U(t) = \gamma \ln x + \rho D_1 \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} \right) t^\rho + 2\rho \left(D_2 - \frac{D_1^2}{2} \right) \left(\frac{x^{2\rho} - 1}{2\rho} \right) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Desta forma, este modelo satisfaz a condição de variação regular de terceira ordem, (2.26), com $\rho = \rho'$, $A(t) = \rho D_1 t^\rho$ e $B(t) = \left(2\frac{D_2}{D_1} - D_1 \right) t^\rho$.

Observação 2.12 *Os modelos log-gamma e log-Pareto ($\rho = 0$ em (2.25)) estão fora da classe de modelos de Hall-Welsh. O modelo Pareto unitário, com f.d. $F(z) = 1 - z^{-1/\gamma}$, $z \geq 1$, para o qual $U(tx)/U(t) = x^\gamma$, para todo o x , i.e., $A(t) \equiv 0$ em (2.25), está também fora desta classe de modelos.*

Observação 2.13 *O desenvolvimento de segunda ordem da função quantil associada aos modelos da classe de Hall-Welsh é,*

$$U(t) = Ct^\gamma \{1 + D_1 t^\rho + o(t^\rho)\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Estes modelos satisfazem a condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), com $A(t) = \rho D_1 t^\rho$.

Se introduzirmos um deslocamento determinístico, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, no modelo, a função quantil recíproca associada, $U_s(t)$, é dada por,

$$U_s(t) = Ct^\gamma \{1 + D_1 t^\rho + D_2 t^{2\rho} + sC^{-1}t^{-\gamma} + o(t^{2\rho})\}, \quad t \rightarrow \infty.$$

A determinação da função $A_s(t)$ depende da relação existente entre o parâmetro de primeira ordem, γ , e o parâmetro de segunda ordem, ρ . Assim, e tendo em consideração que para modelos de cauda pesada $U(t) \sim Ct^\gamma$, e sendo $A(t) = \rho D_1 t^\rho$,

$$A_s(t) := \begin{cases} -\gamma sC^{-1}t^{-\gamma}, & \text{se } \rho + \gamma < 0 \\ A(t) + \rho sC^{-1}t^\rho, & \text{se } \rho + \gamma = 0 \\ A(t), & \text{se } \gamma + \rho > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \rho_s(t) := \begin{cases} -\gamma, & \text{se } \rho + \gamma < 0 \\ \rho, & \text{se } \rho + \gamma \geq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

A caracterização da função $B_s(t)$ é um pouco mais complexa, sendo apresentada, juntamente com a função $A_s(t)$, na Tabela 2.1. A classe de modelos assim definida satisfaz a condição (2.28).

Tabela 2.1: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo F na subclasse de modelos de Hall-Welsh, sujeito a um deslocamento $s \neq 0$.

		$A_s(t)$	ρ_s	$B_s(t)$	ρ'_s
$\gamma + \rho < 0$	$\rho < -2\gamma$	$-\gamma s C^{-1} t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-s C^{-1} t^{-\gamma}$	$-\gamma$
	$\rho = -2\gamma$	$-\gamma s C^{-1} t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$\left(\frac{2C}{s} D_1 - s C^{-1}\right) t^{-\gamma}$	$-\gamma$
	$\rho > -2\gamma$	$-\gamma s C^{-1} t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{\rho C}{\gamma s} D_1 t^{\rho+\gamma}$	$\rho + \gamma$
$\gamma + \rho = 0$		$\rho (D_1 + s C^{-1}) t^\rho$	ρ	$\left(\frac{D_2}{D_1 + s C^{-1}} - (D_1 + s C^{-1})\right) t^\rho$	ρ
$\gamma + \rho > 0$	$\rho < -\gamma/2$	$\rho D_1 t^\rho \equiv A(t)$	ρ	$-\frac{\gamma s C^{-1}}{\rho D_1} t^{-\gamma-\rho}$	$-\gamma - \rho$
	$\rho = -\gamma/2$	$\rho D_1 t^\rho \equiv A(t)$	ρ	$\left(\frac{2D_2 + 2sC^{-1}}{D_1} - D_1\right) t^\rho$	ρ
	$\rho > -\gamma/2$	$\rho D_1 t^\rho \equiv A(t)$	ρ	$\left(\frac{2D_2}{D_1} - D_1\right) t^\rho \equiv B(t)$	ρ

Analizamos em seguida o comportamento de alguns dos modelos de cauda pesada mais utilizados em TVE e que pertencem à classe de Hall-Welsh.

2.4.2 Modelo Burr

Considere-se o modelo Burr, denotado por $Burr(\gamma, \rho)$, com uma parametrização onde os parâmetros de forma de primeira ordem, γ , e de segunda ordem, ρ , são independentes. A f.d. e a função quantil recíproca são dadas por,

$$\begin{aligned}
 1 - F(x) &= \left(1 + x^{-\rho/\gamma}\right)^{1/\rho}, \quad x > 0, \gamma > 0, \rho < 0, \\
 U(t) &= (t^{-\rho} - 1)^{-\gamma/\rho}, \quad t > 1.
 \end{aligned}$$

O desenvolvimento de terceira ordem da função quantil recíproca é

$$U(t) = t^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{\rho} t^\rho + \frac{\gamma(\gamma + \rho)}{2\rho^2} t^{2\rho} + o(t^{2\rho})\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Logo $C = 1$, e utilizando a aproximação de segunda ordem de $\ln(1 + x)$, $x \rightarrow 0$,

$$\ln U(tx) - \ln U(t) = \gamma \ln x + \gamma \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho}\right) t^\rho + \gamma \left(\frac{x^{2\rho} - 1}{2\rho}\right) t^{2\rho} + o(t^{2\rho}), \quad t \rightarrow \infty.$$

O modelo $Burr(\gamma, \rho)$ satisfaz então a condição de variação de terceira ordem com $A(t) = \gamma t^\rho$, $B(t) = t^\rho$ e $\rho' = \rho$.

A função quantil recíproca associada ao modelo $Y = X + s$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é dada por,

$$U_s(t) = (t^{-\rho} - 1)^{-\gamma/\rho} + s = t^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{\rho} t^\rho + \frac{\gamma(\gamma + \rho)}{2\rho^2} t^{2\rho} + st^{-\gamma} + o(t^{2\rho}) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Na Tabela 2.2 apresentamos as funções $A_s(t)$, $B_s(t)$ e os parâmetros ρ_s e ρ'_s para os quais o modelo $Burr(\gamma, \rho; s)$, $s \neq 0$, satisfaz a condição (2.28).

Tabela 2.2: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $Burr(\gamma, \rho; s)$, $s \neq 0$.

		$A_s(t)$	ρ_s	$B_s(t)$	ρ'_s
$\gamma + \rho < 0$	$\rho < -2\gamma$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-st^{-\gamma}$	$-\gamma$
	$\rho = -2\gamma$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\left(\frac{1}{s} + s\right) t^{-\gamma}$	$-\gamma$
	$\rho > -2\gamma$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{1}{s} t^{\rho+\gamma}$	$\rho + \gamma$
$\gamma + \rho = 0$		$\gamma(1-s)t^\rho$	ρ	$(1-s)t^\rho$	ρ
$\gamma + \rho > 0$	$\rho < -\gamma/2$	γt^ρ	ρ	$-st^{-\gamma-\rho}$	$-\gamma - \rho$
	$\rho = -\gamma/2$	γt^ρ	ρ	$(1-s)t^\rho$	ρ
	$\rho > -\gamma/2$	γt^ρ	ρ	t^ρ	ρ

2.4.3 Modelo Log-Logístico

No modelo Log-Logístico as expressões de $1 - F(x)$ e da função quantil recíproca, $U(t)$, são as seguintes:

$$1 - F(x) = \frac{1}{1 + \xi x^{1/\gamma}}, \quad \gamma, \xi > 0,$$

$$U(t) = \left(\frac{t-1}{\xi} \right)^\gamma, \quad t > 1.$$

O desenvolvimento de terceira ordem da função quantil recíproca é,

$$U(t) = \left(\frac{t}{\xi} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{t} \right)^\gamma = \left(\frac{t}{\xi} \right)^\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{t} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2t^2} + o(t^{-2}) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

tendo-se $C = \xi^{-\gamma}$ e

$$\ln U(tx) - \ln U(t) = \gamma \ln x + \gamma t^{-1} \left(\frac{x^{-1} - 1}{-1} \right) + \gamma t^{-2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + o(t^{-2}), \quad t \rightarrow \infty.$$

O modelo Log-Logístico satisfaz a condição de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma t^{-1}$,

$B(t) = t^{-1}$ e $\rho' = \rho = -1$.

Caso o modelo seja sujeito a um deslocamento, então

$$U_s(t) = \left(\frac{t}{\xi}\right)^\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{t} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2t^2} + s \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma} + o(t^{-2})\right), \quad t \rightarrow \infty, s \neq 0,$$

sendo necessário considerar os seguintes casos: $0 < \gamma < 1/2$, $\gamma = 1/2$, $1/2 < \gamma < 1$, $\gamma = 1$, $1 < \gamma < 2$, $\gamma = 2$ e $\gamma > 2$. Os resultados obtidos encontram-se sumariados na Tabela 2.3, sendo mais uma vez válida a condição (2.28).

Tabela 2.3: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo Log-Logístico, sujeito a um deslocamento $s \neq 0$.

	$A_s(t)$	ρ_s	$B_s(t)$	ρ'_s
$0 < \gamma < 1/2$	$-\gamma s \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-s \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma}$	$-\gamma$
$\gamma = 1/2$	$-\gamma s \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{2}{s} \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma} \left(\gamma \left(\frac{1}{\xi}\right)^{2\gamma} + \frac{s^2}{2}\right)$	$-\gamma$
$1/2 < \gamma < 1$	$-\gamma s \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{1}{s} \xi^{-\gamma} t^{\gamma-1}$	$\gamma - 1$
$\gamma = 1$	$(1 - s\xi)t^{-1}$	-1	$(s\xi - 1)t^{-1}$	-1
$1 < \gamma < 2$	γt^{-1}	-1	$-st^{1-\gamma}$	$1 - \gamma$
$\gamma = 2$	γt^{-1}	-1	$(s\xi^2 - 1)t^{-1}$	-1
$\gamma > 2$	γt^{-1}	-1	t^{-1}	-1

2.4.4 Modelo Fréchet

Considere-se o modelo Fréchet padrão, i.e., o modelo Fréchet com localização nula e escala unitária, denotado por $Fréchet(\gamma)$, e com cauda,

$$1 - F(x) = 1 - \exp\left(-x^{-1/\gamma}\right), \quad x > 0, \quad \gamma > 0,$$

ao qual está associado a função quantil recíproca,

$$U(t) = \left(\ln \frac{t}{t-1}\right)^{-\gamma}, \quad t > 1.$$

O desenvolvimento de terceira ordem da função quantil recíproca é,

$$U(t) = t^\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{2t} + \frac{\gamma(3\gamma-5)}{24t^2} + o(t^{-2})\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

pelo que

$$\ln U(tx) - \ln U(t) = \gamma \ln x + \frac{\gamma}{2t} \left(\frac{x^{-1} - 1}{-1} \right) + \frac{5\gamma}{12t^2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + o(t^{-2}).$$

Consequentemente $C = 1$, $A(t) = \frac{\gamma}{2}t^{-1}$, $B(t) = \frac{5}{6}t^{-1}$, $\rho' = \rho = -1$ e a condição (2.26) é satisfeita.

Se introduzirmos um deslocamento determinístico, $s \neq 0$, no modelo $Fréchet(\gamma)$ obtemos um novo modelo Fréchet com parâmetro de localização s , denotado por $Fréchet(\gamma; s)$, e que satisfaz a condição (2.28). Na Tabela 2.4 apresentamos os resultados obtidos para o modelo $Fréchet(\gamma; s)$.

Tabela 2.4: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $Fréchet(\gamma; s)$, $s \neq 0$.

	$A_s(t)$	ρ_s	$B_s(t)$	ρ'_s
$0 < \gamma < 1/2$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-st^{-\gamma}$	$-\gamma$
$\gamma = 1/2$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{\gamma+s}{s}t^{-\gamma}$	$-\gamma$
$1/2 < \gamma < 1$	$-\gamma st^{-\gamma}$	$-\gamma$	$-\frac{1}{2s}t^{\gamma-1}$	$\gamma - 1$
$\gamma = 1$	$\gamma(\frac{1}{2} - s)t^{-1}$	-1	$\frac{4(3s^2-3s+1)}{3(1-2s)}t^{-1}$	-1
$1 < \gamma < 2$	$\frac{\gamma}{2}t^{-1}$	-1	$-2st^{1-\gamma}$	$1 - \gamma$
$\gamma = 2$	$\frac{\gamma}{2}t^{-1}$	-1	$\frac{11-12s}{6}t^{-1}$	-1
$\gamma > 2$	$\frac{\gamma}{2}t^{-1}$	-1	$\frac{5}{6}t^{-1}$	-1

2.4.5 Modelo Generalizado de Pareto (GP), $\gamma > 0$

A f.d. e a função quantil recíproca, $U(t)$, associadas à distribuição Generalizada de Pareto, $GP(\gamma > 0)$, são:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}, \quad x > 0, \quad \gamma > 0, \\ U(t) &= \frac{t^\gamma - 1}{\gamma}, \quad t > 1. \end{aligned}$$

Logo, $C = \frac{1}{\gamma}$ e

$$\begin{aligned} \ln U(tx) - \ln U(t) &= \ln \left(\frac{(tx)^\gamma - 1}{\gamma} \right) - \ln \left(\frac{t^\gamma - 1}{\gamma} \right) \\ &= \gamma \ln x + \gamma t^{-\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) + \gamma t^{-2\gamma} \left(\frac{x^{-2\gamma} - 1}{-2\gamma} \right) + o(t^{-2\gamma}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O modelo GP($\gamma > 0$) satisfaz a condição de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma t^{-\gamma}$, $B(t) = t^{-\gamma}$ e $\rho' = \rho = -\gamma$.

O modelo resultante da transformação linear $Y = X + s$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é denotado por GP($\gamma > 0; s$) e tem uma função quantil recíproca associada igual a,

$$U_s(t) = s + \frac{t^\gamma - 1}{\gamma}, \quad t > 1.$$

Utilizando a aproximação assintótica, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \ln U_s(tx) - \ln U_s(t) &= \ln \left(s + \frac{(tx)^\gamma - 1}{\gamma} \right) - \ln \left(s + \frac{t^\gamma - 1}{\gamma} \right) \\ &= \gamma \ln x + \gamma(1 - s\gamma)t^{-\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) + \gamma(1 - s\gamma)^2 t^{-2\gamma} \left(\frac{x^{-2\gamma} - 1}{-2\gamma} \right) + o(t^{-2\gamma}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Desta forma, o modelo GP($\gamma > 0; s$) satisfaz a condição (2.28) com $A_s(t) = \gamma(1 - s\gamma)t^{-\gamma}$, $B_s(t) = (1 - s\gamma)t^{-\gamma}$ e $\rho'_s = \rho_s = -\gamma$, $s \in \mathbb{R}$.

2.4.6 Modelo Cauchy

A distribuição Cauchy é um caso particular da distribuição t de Student quando o número de graus de liberdade é igual a 1. A f.d. e a função quantil recíproca são dadas por,

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ U(t) &= \cot \left(\frac{\pi}{t} \right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

O desenvolvimento de terceira ordem da função $U(t)$ é então,

$$U(t) = \frac{t}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} t^{-2} - \frac{\pi^4}{45} t^{-4} + o(t^{-4}) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

obtendo-se $C = \frac{1}{\pi}$, $\gamma = 1$ e

$$\ln U(tx) - \ln U(t) = \ln x + \frac{2\pi^2}{3} t^{-2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + \frac{14\pi^4}{45} t^{-4} \left(\frac{x^{-4} - 1}{-4} \right) + o(t^{-4}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Tem-se então $A(t) = \frac{2\pi^2}{3} t^{-2}$, $B(t) = \frac{7\pi^2}{15} t^{-2}$, $\rho' = \rho = -2$, sendo válida a condição (2.26).

Introduzindo um deslocamento, $s \neq 0$, no modelo Cauchy, a função quantil recíproca associ-

ada é

$$U_s(t) = \frac{t}{\pi} \left(1 + s\pi t^{-1} - \frac{\pi^2}{3} t^{-2} + o(t^{-2}) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

pelo que,

$$\ln U_s(tx) - \ln U_s(t) = \ln x - s\pi t^{-1} \left(\frac{x^{-1} - 1}{-1} \right) + \frac{(2 - 3s^2)\pi^2}{3} t^{-2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + o(t^{-2}), \quad t \rightarrow \infty,$$

e a condição (2.28) é verificada com $A_s(t) = -s\pi t^{-1}$, $B_s(t) = (s - \frac{2}{3s}) \pi t^{-1}$ e $\rho'_s = \rho_s = -1$.

2.4.7 Modelo t de Student

A f.d. da t de Student com ν graus de liberdade, denotada por t_ν , é

$$F(x) = F(x|\nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right)^{-(\nu+1)/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \nu > 0.$$

Caeiro & Gomes [17] mostraram que,

$$1 - F(x) = \frac{\nu^{\nu/2-1}}{\mathcal{B}(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})} x^{-\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \frac{\nu^{k+1}}{k! (\nu + 2k)} x^{-2k}. \quad (2.36)$$

Proposição 2.6 *O modelo t de Student com ν graus de liberdade pertence à classe de modelos de Hall-Welsh, com função quantil recíproca (2.31), em que*

$$C = \frac{\sqrt{\nu}}{c_\nu}, \quad \gamma = \frac{1}{\nu}, \quad D_1 = -\frac{(\nu+1) c_\nu^2}{2(\nu+2)}, \quad D_2 = -\frac{\nu(\nu+1)(\nu+3) c_\nu^4}{8(\nu+2)(\nu+4)}, \quad \rho = -\frac{2}{\nu},$$

sendo $c_\nu = (\nu \mathcal{B}(\nu/2, 1/2))^{1/\nu}$ e $\mathcal{B}$ a função Beta completa.

Demonstração: O desenvolvimento (2.36) pode ser reescrito da seguinte forma para $k = 0, 1, 2$,

$$1 - F(x) = \frac{\nu^{\nu/2-1}}{\mathcal{B}(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})} x^{-\nu} \left(1 - \frac{(\nu+1)\nu^2}{2(\nu+2)} x^{-2} + \frac{(\nu+1)(\nu+3)\nu^3}{8(\nu+4)} x^{-4} + o(x^{-4}) \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

sendo pois do tipo,

$$1 - F(x) = A_0 x^{-\nu} (1 + A_1 x^{-2} + A_2 x^{-4} + o(x^{-4})), \quad x \rightarrow \infty.$$

De acordo com a equação (2.30) concluímos que $C = A_0^{1/\nu}$, $\gamma = \frac{1}{\nu}$ e $\frac{\rho}{\gamma} = 2$, ou seja, $\rho = -\frac{2}{\nu}$, $E_1 = A_1 C^{-2}$ e $E_2 = A_2 C^{-4}$. Os restantes resultados obtêm-se facilmente utilizando as relações

apresentadas na Proposição 2.5, sendo $D_1 = \gamma E_1$ e $D_2 = \gamma \left(E_2 + \frac{2\rho+\gamma-1}{2} E_1^2 \right)$. $\square$

A função quantil recíproca do modelo t_ν é então dada por

$$U(t) = \frac{\sqrt{\nu}}{c_\nu} t^{1/\nu} \left(1 - \frac{(\nu+1) c_\nu^2}{2(\nu+2)} t^{-2/\nu} - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+3) c_\nu^4}{8(\nu+2)^2(\nu+4)} t^{-4/\nu} + o\left(t^{-4/\nu}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \ln U(tx) - \ln U(t) &= \frac{1}{\nu} \ln x + \frac{(\nu+1) c_\nu^2 t^{-2/\nu}}{\nu(\nu+2)} \left(\frac{x^{-2/\nu} - 1}{-2/\nu} \right) \\ &\quad + \frac{(\nu+1)(\nu^2+4\nu+2) c_\nu^4 t^{-4/\nu}}{\nu(\nu+2)^2(\nu+4)} \left(\frac{x^{-4/\nu} - 1}{-4/\nu} \right) + o(x^{-4/\nu}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Deste modo $A(t) = \frac{(\nu+1) c_\nu^2}{\nu(\nu+2)} t^{-2/\nu}$, $B(t) = \frac{(\nu^2+4\nu+2) c_\nu^2}{(\nu+2)(\nu+4)} t^{-2/\nu}$ e $\rho' = \rho = -\frac{2}{\nu}$, sendo válida a condição de variação regular de terceira ordem (2.26).

A função quantil recíproca do modelo t_ν sujeito a um deslocamento, $s \neq 0$, denotado por $t_{\nu;s}$, é

$$U_s(t) = \frac{\sqrt{\nu}}{c_\nu} t^{1/\nu} \left(1 + \frac{s c_\nu}{\sqrt{\nu}} t^{-1/\nu} - \frac{(\nu+1) c_\nu^2}{2(\nu+2)} t^{-2/\nu} + o\left(t^{-2/\nu}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Tendo em conta que:

$$\begin{aligned} \ln U_s(tx) - \ln U_s(t) &= \frac{1}{\nu} \ln x - \frac{s c_\nu t^{-1/\nu}}{\nu^{3/2}} \left(\frac{x^{-1/\nu} - 1}{-1/\nu} \right) \\ &\quad + \frac{(\nu(\nu+1) - s^2(\nu+2)) c_\nu^2 t^{-2/\nu}}{\nu^2 (\nu+2)} \left(\frac{x^{-2/\nu} - 1}{-2/\nu} \right) + o(x^{-2/\nu}), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

conclui-se que o modelo $t_{\nu;s}$, $s \neq 0$, satisfaz a condição (2.28) com $A_s(t) = -\frac{s c_\nu t^{-1/\nu}}{\nu^{3/2}}$, $B_s(t) = -c_\nu \left(\frac{\sqrt{\nu}(\nu+1)}{s(\nu+2)} - \frac{s}{\sqrt{\nu}} \right) t^{-1/\nu}$ e $\rho'_s = \rho_s = -\frac{1}{\nu}$.

2.4.8 Modelo Geral de Valores Extremos (GEV), $\gamma > 0$

A f.d. do modelo GEV($\gamma > 0$) é dada por

$$1 - F(x) = 1 - \exp\left(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\right) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x + 1/\gamma}{1/\gamma}\right)^{-1/\gamma}\right\}, \quad 1 + \gamma x > 0,$$

correspondendo assim à f.d. do modelo Fréchet com parâmetros de localização e de escala iguais a $-1/\gamma$ e $1/\gamma$, respectivamente.

A função quantil recíproca associada ao modelo $GEV(\gamma > 0)$ é igual a

$$\begin{aligned} U(t) &= -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left(\ln \frac{t}{t-1} \right)^{-\gamma}, \quad t > 1 \\ &= \frac{t^\gamma}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{2t} + \frac{\gamma(3\gamma-5)}{24t^2} - \frac{1}{t^\gamma} + o(t^{-2}) \right), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

tendo-se $C = \frac{1}{\gamma}$. Este modelo satisfaz a condição de terceira ordem (2.26), com funções $A(t)$, $B(t)$ e parâmetros (ρ, ρ') apresentados na Tabela 2.5.

Tabela 2.5: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $GEV(\gamma > 0)$.

	$A(t)$	ρ	$B(t)$	ρ'
$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$t^{-\gamma}$	$-\gamma$
$\gamma = 1/2$	$\gamma t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$(\gamma + 1)t^{-\gamma}$	$-\gamma$
$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$\frac{1}{2}t^{\gamma-1}$	$\gamma - 1$
$\gamma = 1$	$\frac{3}{2}t^{-1}$	-1	$\frac{29}{18}t^{-1}$	-1
$1 < \gamma < 2$	$\frac{\gamma}{2}t^{-1}$	-1	$2t^{1-\gamma}$	$1 - \gamma$
$\gamma = 2$	t^{-1}	-1	$\frac{17}{6}t^{-1}$	-1
$\gamma > 2$	$\frac{\gamma}{2}t^{-1}$	-1	$\frac{5}{6}t^{-1}$	-1

Observação 2.14 O modelo $GEV(\gamma > 0)$ não pertence à subclasse de modelos de Hall-Welsh (2.30) porque $\rho \neq \rho'$.

A função quantil recíproca do modelo $GEV(\gamma > 0)$ sujeito a um deslocamento $s \neq 0$, denotado por $GEV(\gamma > 0; s)$, é dada por,

$$U_s(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{2t} + \frac{\gamma(3\gamma-5)}{24t^2} - \frac{1}{t^\gamma} + \gamma s t^{-\gamma} + o(t^{-2}) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

pelo que, a condição (2.28) é válida para as funções e parâmetros apresentados na Tabela 2.6.

Observação 2.15 Para os modelos da classe de Hall-Welsh satisfazendo a condição de variação regular de terceira ordem (2.26) é possível escolher as seguintes parametrizações para as funções $A(t)$ e $B(t)$: $A(t) = \gamma \beta t^\rho$ e $B(t) = \beta' t^{\rho'}$, onde β e β' são os parâmetros de escala de segunda e terceira ordem, respectivamente, tendo-se $\beta = \beta'$ para alguns modelos da referida classe. A Tabela 2.7 contém os valores dos parâmetros β e β' para os modelos de cauda pesada em análise.

Tabela 2.6: Caracterização das funções e parâmetros de segunda e terceira ordem para um modelo $\text{GEV}(\gamma > 0; s)$, $s \in \mathbb{R}$.

	$A_s(t)$	ρ_s	$B_s(t)$	ρ'_s
$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma(1 - \gamma s) t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$(1 - \gamma s) t^{-\gamma}$	$-\gamma$
$\gamma = 1/2$	$\gamma(1 - \gamma s) t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} s + (1 - \gamma s)\right) t^{-\gamma}$	$-\gamma$
$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma(1 - \gamma s) t^{-\gamma}$	$-\gamma$	$\frac{1}{2(1-\gamma s)} t^{\gamma-1}$	$\gamma - 1$
$\gamma = 1$	$\frac{3-2s}{2} t^{-1}$	-1	$\frac{2+3(3-2s)^2}{6(3-2s)} t^{-1}$	-1
$1 < \gamma < 2$	$\frac{\gamma}{2} t^{-1}$	-1	$2(1 - \gamma s) t^{1-\gamma}$	$1 - \gamma$
$\gamma = 2$	t^{-1}	-1	$\frac{17-24s}{6} t^{-1}$	-1
$\gamma > 2$	$\frac{\gamma}{2} t^{-1}$	-1	$\frac{5}{6} t^{-1}$	-1

Tabela 2.7: Caracterização dos parâmetros de escala de segunda e terceira ordem para alguns modelos de cauda pesada.

Classe de Hall-Welsh				Burr / Log-Logístico / GP($\gamma > 0$)			Fréchet
β		$\frac{\rho}{\gamma} D_1$		1			$\frac{1}{2}$
β'		$2\frac{D_2}{D_1} - D_1$		1			$\frac{5}{6}$
Cauchy				t de Student			
β		$\frac{2\pi^2}{3}$		$\frac{(\nu+1)}{\nu+2} c_\nu^2$			
β'		$\frac{7\pi^2}{15}$		$\frac{(\nu^2+4\nu+2)}{(\nu+2)(\nu+4)} c_\nu^2$			
GEV($\gamma > 0$)							
γ	$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma = 1/2$	$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma < 2$	$\gamma = 2$	$\gamma > 2$
β	1			$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
β'	1	$1 + \gamma$	$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{18}$	2	$\frac{17}{6}$	$\frac{5}{6}$

De forma análoga, nos modelos da classe de Hall-Welsh sujeitos a um deslocamento determinístico e satisfazendo a condição (2.28), as funções $A_s(t)$ e $B_s(t)$ são tais que: $A_s(t) = \gamma \beta_s t^{\rho_s}$ e $B_s(t) = \beta'_s t^{\rho'_s}$, onde β_s e β'_s são os parâmetros de escala de segunda e terceira ordem, respectivamente, associados a um modelo de cauda pesada com deslocamento. Na Tabela 2.8 apresentamos os valores dos parâmetros β_s e β'_s para os modelos de cauda pesada em estudo.

Tabela 2.8: Caracterização dos parâmetros de escala de segunda e terceira ordem para alguns modelos de cauda pesada sujeitos a deslocamentos determinísticos, $s \neq 0$.

Subclasse de Hall-Walsh						
(γ, ρ)	$\rho < -2\gamma$	$\rho = -2\gamma$	$-2\gamma < \rho < -\gamma$	$\rho = -\gamma$	$-\gamma < \rho < -\gamma/2$	$\rho = -\gamma/2$
β_s		$-s C^{-1}$		$\frac{\rho(D_1 + s C^{-1})}{\gamma}$		$\rho \frac{D_1}{\gamma}$
β'_s	$-s C^{-1}$	$\left(\frac{2C D_1}{s} - s C^{-1}\right)$	$-\frac{\rho C D_1}{\gamma s}$	$\left(\frac{D_2}{D_1 + s C^{-1}} - (D_1 + s C^{-1})\right)$	$-\frac{\gamma s C^{-1}}{\rho D_1}$	$\left(\frac{2D_2 + 2s C^{-1}}{D_1} - D_1\right)$
Modelo Burr						
(γ, ρ)	$\rho < -2\gamma$	$\rho = -2\gamma$	$-2\gamma < \rho < -\gamma$	$\rho = -\gamma$	$-\gamma < \rho < -\gamma/2$	$\rho = -\gamma/2$
β_s		$-s$		$1 - s$		1
β'_s	$-s$	$-\left(\frac{1}{s} + s\right)$	$-\frac{1}{s}$	$1 - s$	$-s$	$1 - s$
Modelo Log-Logístico						
γ	$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma = 1/2$	$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma < 2$	$\gamma = 2$
β_s		$-s \xi^\gamma$		$1 - s \xi$		1
β'_s	$-s \xi^\gamma$	$-\frac{2\xi^\gamma}{s} \left(\gamma \xi^{-2\gamma} + \frac{s^2}{2}\right)$	$-\frac{1}{s} \xi^{-\gamma}$	$s \xi - 1$	$-s$	$s \xi^2 - 1$
Modelo Fréchet						
γ	$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma = 1/2$	$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma < 2$	$\gamma = 2$
β_s		$-s$		$\frac{1}{2} - s$		$\frac{1}{2}$
β'_s	$-s$	$-\frac{\gamma + s}{s}$	$-\frac{1}{2s}$	$\frac{4(3s^2 - 3s + 1)}{3(1 - 2s)}$	$-2s$	$\frac{11 - 12s}{6}$
Modelo GEV ($\gamma > 0$)						
γ	$0 < \gamma < 1/2$	$\gamma = 1/2$	$1/2 < \gamma < 1$	$\gamma = 1$	$1 < \gamma < 2$	$\gamma = 2$
β_s		$1 - \gamma s$		$\frac{3 - 2s}{2}$		$\frac{\gamma}{2}$
β'_s	$1 - \gamma s$	$\frac{\gamma}{1 - \gamma s} + 1 - \gamma s$	$\frac{1}{2(1 - \gamma s)}$	$\frac{2 + 3(3 - 2s)^2}{6(3 - 2s)}$	$-2(1 - \gamma s)$	$\frac{17 - 24s}{6}$
Modelo GP ($\gamma > 0$)						
β_s	$1 - s \gamma$			$-s \pi$		$-c_\nu \left(\frac{\sqrt{\nu}(\nu+1)}{s(\nu+2)} - \frac{s}{\sqrt{\nu}}\right)$
β_s	$1 - s \gamma$			$\left(s - \frac{2}{3s}\right) \pi$		
Modelo Cauchy						
β_s	$1 - s \gamma$			$-s \pi$		
β_s	$1 - s \gamma$			$\left(s - \frac{2}{3s}\right) \pi$		
Modelo t de Student						
β_s	$1 - s \gamma$			$-c_\nu \left(\frac{\sqrt{\nu}(\nu+1)}{s(\nu+2)} - \frac{s}{\sqrt{\nu}}\right)$		

Capítulo 3

Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros

Neste Capítulo analisamos, em contexto de terceira ordem, o comportamento de algumas estatísticas utilizadas na estimação de parâmetros de acontecimentos extremos e de parâmetros de variação regular. Apresentamos os estimadores semi-paramétricos clássicos do índice de cauda, γ , utilizados neste trabalho, o estimador de Hill e o estimador de Momentos, ilustrando o comportamento exacto dos mesmos. A componente dominante do viés dos estimadores clássicos de γ depende dos parâmetros de forma e de escala de segunda ordem, ρ e β , respectivamente, sendo pois de extrema importância a correcta e adequada estimação destes parâmetros para a obtenção dos estimadores de viés reduzido.

3.1 Propriedades de algumas estatísticas utilizadas na estimação de parâmetros de acontecimentos raros e de parâmetros de variação regular

Nesta Secção estudamos o comportamento de algumas estatísticas utilizadas na estimação dos parâmetros γ , ρ e β , em contexto de terceira ordem. Sendo

$$V_{ik} := \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}, \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (3.1)$$

os excessos das log-observações e,

$$U_i := i \{ \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-i:n} \}, \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (3.2)$$

os espaçamentos das log-observações devidamente escalados, as estatísticas em análise são:

$$M_n^{(\alpha)}(k) \equiv M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n})^\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik}^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

$$N_n^{(\alpha)}(k) := \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^\alpha (\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-i:n}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{\alpha-1} U_i, \quad \alpha \geq 1, \quad (3.4)$$

e

$$N_n'^{(\alpha)}(k) = \frac{dN_n^{(\alpha)}(k)}{d\alpha} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{\alpha-1} \ln \left(\frac{i}{k} \right) U_i, \quad \alpha \geq 1. \quad (3.5)$$

Observação 3.1 *O estimador semi-paramétrico mais conhecido de um índice de cauda positivo, γ , é o estimador de Hill (Hill [80]), com expressão funcional,*

$$\hat{\gamma}_n^H(k) \equiv \hat{\gamma}_n^H(k; \underline{X}_n) \equiv H(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}). \quad (3.6)$$

Este estimador é um caso particular das estatísticas $M_n^{(\alpha)}(k)$ e $N_n^{(\alpha)}(k)$, uma vez que $H(k) = M_n^{(1)}(k) = N_n^{(1)}(k)$.

Considere-se a seguinte notação:

Seja E uma v.a. exponencial unitária, $\Gamma(t)$ a função Gama completa e $\alpha \geq 1$,

$$\mu_\alpha^{(1)} := \mathbb{E}[E^\alpha] = \Gamma(\alpha + 1), \quad (3.7)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)} := \sqrt{\text{Var}[E^\alpha]} = \sqrt{\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)}, \quad (3.8)$$

$$\mu_\alpha^{(2)}(\rho) := \mathbb{E} \left[E^{\alpha-1} \left(\frac{e^{\rho W} - 1}{\rho} \right) \right] = \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho} \frac{1 - (1 - \rho)^\alpha}{(1 - \rho)^\alpha}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_\alpha^{(2)}(\rho) := \sqrt{\text{Var} \left[E^{\alpha-1} \left(\frac{e^{\rho W} - 1}{\rho} \right) \right]} = \sqrt{\mu_{2\alpha}^{(3)}(\rho) - \left(\mu_\alpha^{(2)}(\rho) \right)^2}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^{(3)}(\rho) &:= \mathbb{E} \left[E^{\alpha-2} \left(\frac{e^{\rho E} - 1}{\rho} \right)^2 \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \ln \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho}, & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^2(\alpha-1)} \left\{ \frac{1}{(1-2\rho)^{\alpha-1}} - \frac{2}{(1-\rho)^{\alpha-1}} + 1 \right\}, & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\bar{\mu}_\alpha^{(j)}(\rho) = \frac{\mu_\alpha^{(j)}(\rho)}{\mu_\alpha^{(1)}}, \quad j = 2, 3, \quad (3.12)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha^{(1)} = \frac{\sigma_\alpha^{(1)}}{\mu_\alpha^{(1)}}, \quad \bar{\sigma}_\alpha^{(2)}(\rho) = \frac{\sigma_\alpha^{(2)}(\rho)}{\mu_\alpha^{(1)}}. \quad (3.13)$$

Teorema 3.1 (Gomes *et al.* [50]) *Admitindo a validade da condição de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e considerando sucessões intermédias $k = k_n$ satisfazendo (2.15) é válida a seguinte representação em distribuição,*

$$\begin{aligned} M_n^{(\alpha)}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma^\alpha \mu_\alpha^{(1)} + \gamma^\alpha \sigma_\alpha^{(1)} \frac{\bar{P}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{k}} + \alpha \gamma^{\alpha-1} \mu_\alpha^{(2)}(\rho) A(n/k) \\ &+ \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \gamma^{\alpha-2} \mu_\alpha^{(3)}(\rho) A^2(n/k) + \alpha \gamma^{\alpha-1} \mu_\alpha^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \\ &= \gamma^\alpha \mu_\alpha^{(1)} \left[1 + \bar{\sigma}_\alpha^{(1)} \frac{Z_k^{(\alpha)}}{\sqrt{k}} + \frac{\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(\rho) A(n/k) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma^2} \bar{\mu}_\alpha^{(3)}(\rho) A^2(n/k) + \frac{\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $Z_k^{(\alpha)}$ são v.a. assintoticamente normais padrão,

$$Z_k^{(\alpha)} := \frac{\bar{P}_k^{(\alpha)}}{\sigma_\alpha^{(1)}} = \frac{\sqrt{k}}{\sigma_\alpha^{(1)}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^\alpha - \Gamma(\alpha+1) \right), \quad (3.15)$$

e E_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas exponenciais unitárias.

Teorema 3.2 (Fraga Alves *et al.* [40]) *Nas condições do Teorema anterior é válida a seguinte representação em distribuição,*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{M_n^{(\alpha\theta)}(k)}{\mu_{\alpha\theta}^{(1)} \gamma^{\alpha\theta}} \right)^{\tau/\theta} &\stackrel{d}{=} 1 + \frac{\tau}{\theta} \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta}^{(1)}}{\sqrt{k}} Z_k^{(\alpha\theta)} + \frac{\alpha\tau}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho) A(n/k) \\
&+ \frac{\alpha\tau}{2\gamma^2} A^2(n/k) \left((\alpha\theta - 1) \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau - \theta) (\bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho))^2 \right) (1 + o_p(1)) \\
&+ \frac{\alpha\tau}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)).
\end{aligned}$$

Demonstração: Basta utilizar a representação em distribuição (3.14) e o desenvolvimento em série de MacLaurin de ordem 2 da função $(1+x)^\alpha$. $\square$

Observação 3.2 *A obtenção do comportamento em distribuição, em contexto de terceira ordem, das estatísticas apresentadas depende do comportamento assintótico de $A(Y_{n-k:n})$ e de $B(Y_{n-k:n})$, onde $Y_{n-k:n}$ é a $(n-k)$ -ésima e.o. proveniente de uma a.a. de dimensão n do modelo Pareto unitário. Como $|A| \in RV_\rho$, $\rho < 0$, e admitindo que a função A admite uma representação do tipo,*

$$A(t) = at^\rho, \quad a \neq 0, \quad \rho < 0,$$

então,

$$A(Y_{n-k:n}) = a(Y_{n-k:n})^\rho = a \left(\frac{n}{k} \right)^\rho \left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\rho = A(n/k) \left(1 + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right).$$

Como $|B| \in RV_{\rho'}$, $\rho' < 0$, e admitindo uma representação semelhante para $B(t)$, $B(t) = bt^{\rho'}$, $b \neq 0$, $\rho' < 0$, então $B(Y_{n-k:n}) = B(n/k) \left(1 + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right)$.

Apresentamos em seguida o comportamento assintótico referente às estatísticas $N_n^{(\alpha)}$ e $N_n'^{(\alpha)}$, dadas, respectivamente em (3.4) e (3.5), e baseadas nos espaçamentos das log-observações devidamente escalados, U_i , em (3.2).

Teorema 3.3 (Gomes *et al.* [51]; Caeiro *et al.* [18]) *Admitindo a validade da condição de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e considerando níveis k tais que (2.15) é satisfeita são válidas para as estatísticas $N_n^{(\alpha)}$ e $N_n'^{(\alpha)}$, com $\alpha \geq 1$, dadas em (3.4) e (3.5), respectivamente, as seguintes representações em distribuição,*

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha-1)k}} + \frac{A(n/k)}{\alpha - \rho} + O_p \left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}} \right) + \frac{A(n/k)B(n/k)}{\alpha - \rho - \rho'} (1 + o_p(1)) \quad (3.16)$$

e

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} -\frac{\gamma}{\alpha^2} - \frac{\gamma \overline{W}_k^{(\alpha)}}{(2\alpha - 1)\sqrt{(2\alpha - 1)k/2}} - \frac{A(n/k)}{(\alpha - \rho)^2} + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right) - \frac{A(n/k)B(n/k)}{(\alpha - \rho - \rho')^2}(1 + o_p(1)), \quad (3.17)$$

onde

$$\overline{Z}_k^{(\alpha)} := \sqrt{(2\alpha - 1)k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} E_i - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3.18)$$

e

$$\overline{W}_k^{(\alpha)} := \frac{(2\alpha - 1)\sqrt{(2\alpha - 1)k}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} \ln\left(\frac{i}{k}\right) E_i + \frac{1}{\alpha^2} \right), \quad (3.19)$$

são v.a. assintoticamente normais padrão e $\{E_i, 1 \leq i \leq k\}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas exponenciais unitárias.

Demonstração: Começamos por determinar a distribuição assintótica de U_i . Pelo Teorema 2.3 sabemos que $X \stackrel{d}{=} U(Y)$, onde Y é uma v.a. Pareto unitária, e que $\frac{Y_{n-i+1:n}}{Y_{n-i:n}} \stackrel{d}{=} Y_{1:i} \stackrel{d}{=} e^{E_{1:i}} \stackrel{d}{=} e^{E_i/i}$. Assim, admitindo a validade da condição de terceira ordem (2.26),

$$\begin{aligned} U_i &= i \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-i:n}} \stackrel{d}{=} i \ln \frac{U\left(\frac{Y_{n-i+1:n}}{Y_{n-i:n}} Y_{n-i:n}\right)}{U(Y_{n-i:n})} \stackrel{d}{=} i \ln \frac{U(Y_{1:i} Y_{n-i:n})}{U(Y_{n-i:n})} \\ &\stackrel{d}{=} i \left(\gamma \frac{E_i}{i} + \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} A(n/i) \left(1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) \right) + \frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/i) B(n/i) (1 + o_p(1)) \right), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} N_n^{(\alpha)}(k) &\stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} E_i + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} i \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} A(n/i) \left(1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} i \frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/i) B(n/i) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} E_i \xrightarrow{p} \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}$, considere-se a v.a. $\overline{Z}_k^{(\alpha)}$ definida em (3.18). Então, como $A(n/i) = (k/i)^\rho A(n/k)$ e $B(n/i) = (k/i)^{\rho'} B(n/k)$,

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha-1)k}} + \frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} A(n/k) \left(1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\ + \frac{1}{k^{\alpha-\rho-\rho'}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho-\rho'} \frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)).$$

Pela lei fraca dos grandes números,

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} \xrightarrow{p} \frac{1}{\alpha - \rho}$$

e

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho-\rho'}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho-\rho'} \frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} \xrightarrow{p} \frac{1}{\alpha - \rho - \rho'},$$

pelo que

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha-1)k}} + \frac{A(n/k)}{\alpha - \rho} + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right) + \frac{A(n/k)B(n/k)}{\alpha - \rho - \rho'} (1 + o_p(1)),$$

ficando demonstrada a primeira parte do Teorema. A segunda parte do Teorema obtém-se aplicando o mesmo tipo de raciocínio e considerando a v.a. $\bar{W}_k^{(\alpha)}$ definida em (3.19). $\square$

Corolário 3.1 *As v.a. $Z_k^{(\alpha)}$ e $\bar{Z}_k^{(\alpha)}$, definidas em (3.15) e (3.18), respectivamente, têm a seguinte estrutura de covariância:*

$$\begin{aligned} \mathbb{Cov}\left(Z_k^{(\alpha)}, Z_k^{(\theta)}\right) &= \frac{\Gamma(\alpha + \theta + 1) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\theta + 1)}{\sigma_\alpha^{(1)} \sigma_\theta^{(1)}}, \\ \mathbb{Cov}\left(\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1} Z_k^{(\alpha\theta_1)}, \bar{\sigma}_{\alpha\theta_2} Z_k^{(\alpha\theta_2)}\right) &= \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + \theta_2))}{\alpha\theta_1\theta_2\Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} - 1, \\ \mathbb{Cov}\left(\bar{Z}_k^{(\alpha)}, \bar{Z}_k^{(\theta)}\right) &= \frac{\sqrt{(2\alpha-1)(2\theta-1)}}{\alpha + \theta - 1}. \end{aligned}$$

3.2 Estimadores do índice de valores extremos, γ , baseados nos log-excessos

O estimador semi-paramétrico mais conhecido de um índice de cauda, $\gamma > 0$, é, como referimos anteriormente, o estimador de Hill definido em (3.6) e cujo comportamento assintótico apresentamos:

Proposição 3.1 (Caeiro *et al.* [18]) *Admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e sendo k uma sequência intermédia de inteiros satisfazendo (2.15), o estimador $H(k)$ verifica a seguinte representação em distribuição,*

$$H(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1-\rho-\rho'} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) (1 + o_p(1)), \quad (3.20)$$

onde $Z_k^{(1)}$ é a v.a. assintoticamente normal padrão definida em (3.15). Considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, então

$$\sqrt{k}(H(k) - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right).$$

O nível óptimo k_0 de e.o. de topo a usar na estimar de γ obtém-se minimizando o erro quadrático médio assintótico, $AMSE$ (do inglês “*asymptotic mean-squared error*”), do estimador de Hill. Como

$$\frac{\partial}{\partial k} AMSE(H(k)) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\gamma^2}{k} + \left(\frac{\gamma\beta}{1-\rho} \right)^2 \left(\frac{n}{k} \right)^{2\rho} \right) = 0,$$

tem-se

$$k_0^H := \arg \min_k AMSE(H(k)) = \left(\frac{(1-\rho)^2}{-2\rho\beta^2} \right)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)}. \quad (3.21)$$

Desta forma, no nível óptimo do estimador de Hill, k_0^H , o valor médio assintótico da v.a. $\sqrt{k_0^H} (H(k_0^H) - \gamma)$ é $\frac{\lambda_0^H}{1-\rho} = \frac{\gamma}{\sqrt{-2\rho}}$, onde $\lambda_0^H = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_0^H} A(n/k_0^H) = \frac{\gamma(1-\rho)}{\sqrt{-2\rho}}$.

Ilustramos nas Figuras 3.1 e 3.2 o comportamento do valor médio, $E[.]$, e do erro quadrático médio, $EQM[.]$, do estimador de Hill para uma amostra de dimensão $n = 1000$, proveniente dos modelos:

- (i) *Burr*(γ, ρ): $\gamma = 1$; $\rho = -0.5, -1$ e -2 ($\beta = 1$);
- (ii) *Fréchet*(γ): $\gamma = 0.5, 1$ e 2 ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$).

Foram usadas 1000 corridas.

Como se pode observar, as trajectórias amostrais dependem do modelo em estudo e dos parâmetros em análise. Regra geral, são muito voláteis, sendo esta volatilidade crescente com ρ , o que dificulta a escolha do nível óptimo a utilizar na estimação de γ . A trajectória do erro quadrático médio apresenta a forma em “U” característica deste tipo de estimadores semi-

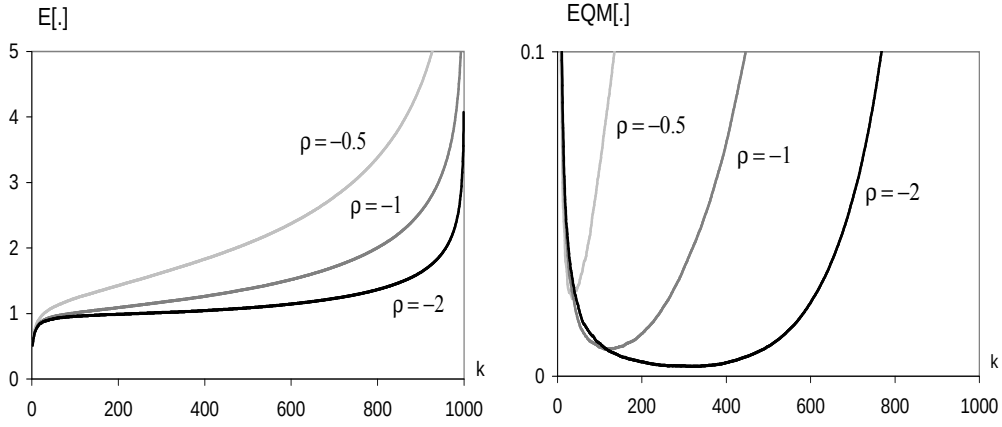


Figura 3.1: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Hill, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5, -1, -2$ ($\beta = 1$).

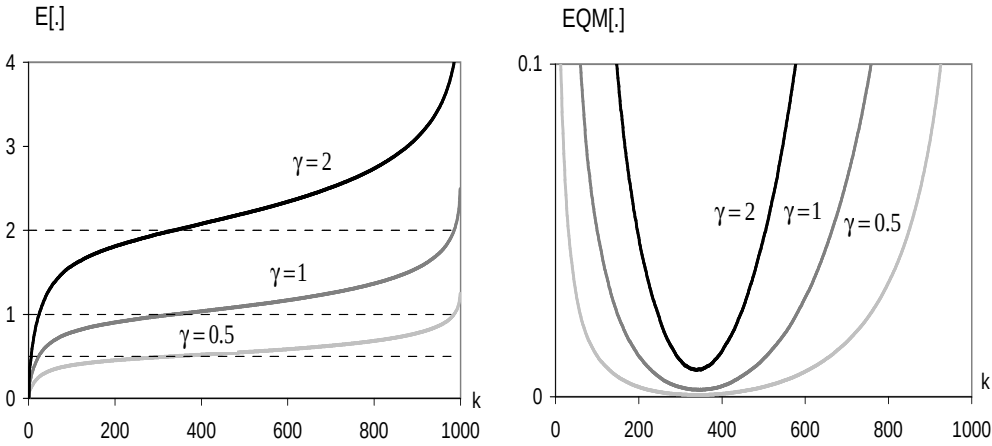


Figura 3.2: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Hill, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 0.5, 1, 2$ ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$).

paramétricos. Nas trajectórias “mais fechadas” qualquer desvio na estimação do nível óptimo provoca um aumento significativo do erro quadrático médio do referido nível óptimo.

Neste trabalho consideramos ainda o estimador de Momentos (Dekkers *et al.* [27]) válido para $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$M(k) \equiv \hat{\gamma}_n^M(k; \underline{X}_n) := M_n^{(1)}(k) + 1 - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\left(M_n^{(1)}(k) \right)^2}{M_n^{(2)}(k)} \right\}, \quad (3.22)$$

com $M_n^{(\alpha)}(k)$, $\alpha = 1, 2$ dado em (3.3).

Proposição 3.2 *Admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem, (2.26), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e considerando sucessões intermédias de inteiros, k , verificando (2.15), obtemos para o estimador de Momentos, $M(k)$, a seguinte representação em distribuição,*

$$M(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\sqrt{k}} P_k^M + \frac{\gamma(1-\rho) + \rho}{\gamma(1-\rho)^2} A(n/k) + \left(\frac{\gamma(1-\rho-\rho') + \rho + \rho'}{\gamma(1-\rho-\rho')^2} A(n/k) B(n/k) + \frac{\rho(\rho^2 + 2\rho - 1)}{\gamma^2(1-2\rho)(1-\rho)^4} A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)), \quad (3.23)$$

onde $P_k^M = \sqrt{5}Z_k^{(2)} - 2Z_k^{(1)}$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão e $Z_k^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ são as v.a. introduzidas em (3.15).

Considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, então

$$\sqrt{k}(M(k) - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda(\gamma(1-\rho) + \rho)}{\gamma(1-\rho)^2}, 1 + \gamma^2\right),$$

tendo-se um *AMSE* dado por

$$AMSE(M(k)) = \frac{1 + \gamma^2}{k} + \frac{(\gamma(1-\rho) + \rho)^2 A^2(n/k)}{\gamma^2(1-\rho)^4},$$

onde $\frac{1+\gamma^2}{k} =: \mathbb{V}ar_\infty(M(k))$ é a variância assintótica e $\frac{(\gamma(1-\rho)+\rho)A(n/k)}{\gamma(1-\rho)^2} =: \mathbb{V}iés_\infty(M(k))$ é o viés assintótico.

O nível óptimo, k_0^M , de e.o. que minimiza o $AMSE(M(k))$ é dado por,

$$k_0^M := \arg \min_k AMSE(M(k)) = \left(\frac{(1+\gamma)^2(1-\rho)^4}{-2\rho\beta^2(\gamma(1-\rho) + \rho)^2} \right)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)}, \quad (3.24)$$

e o valor médio assintótico da v.a. $\sqrt{k_0^M}(M(k_0^M) - \gamma)$ é $\frac{\lambda_0^M(\gamma(1-\rho)+\rho)}{\gamma(1-\rho)^2} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\sqrt{-2\rho}}$, onde $\lambda_0^M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_0^M} A(n/k_0^M) = \gamma \frac{\sqrt{1+\gamma^2}(1-\rho)^2}{(\gamma(1-\rho)+\rho)\sqrt{-2\rho}}$.

Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\frac{M(k) - \gamma}{A(n/k)} \xrightarrow{p} \frac{\gamma(1-\rho) + \rho}{\gamma(1-\rho)^2}.$$

Observação 3.3 Comparando os níveis óptimos k_0^H e k_0^M dados, respectivamente em (3.21) e (3.24), podemos concluir que,

$$\frac{k_0^H}{k_0^M} = \left(\frac{(\gamma(1-\rho) + \rho)^2}{(1+\gamma^2)(1-\rho)^2} \right)^{1/(1-2\rho)}.$$

Note-se o estimador de Momentos, $M(k)$, dado em (3.22) e com representação assintótica (3.23) é assintoticamente centrado para valores de $\gamma = -\frac{\rho}{1-\rho}$, e que $k_0^H < k_0^M$, para quaisquer valores de (γ, ρ) . Observamos também que $\sigma_M^2 = 1 + \gamma^2 > \gamma^2 = \sigma_H^2$.

Apresentamos ainda, nas Figuras 3.3 e 3.4, o comportamento simulado do valor médio, $E[.]$, e do erro quadrático médio, $EQM[.]$, do estimador de Momentos para uma amostra de dimensão $n = 1000$, com base em 1000 corridas, proveniente dos modelos:

(i) *Burr*(γ, ρ): $\gamma = 1$; $\rho = -0.5, -1$ e -2 ($\beta = 1$);

(ii) *Fréchet*(γ): $\gamma = 0.5, 1$ e 2 ($\rho = -1, \beta = 0.5$).

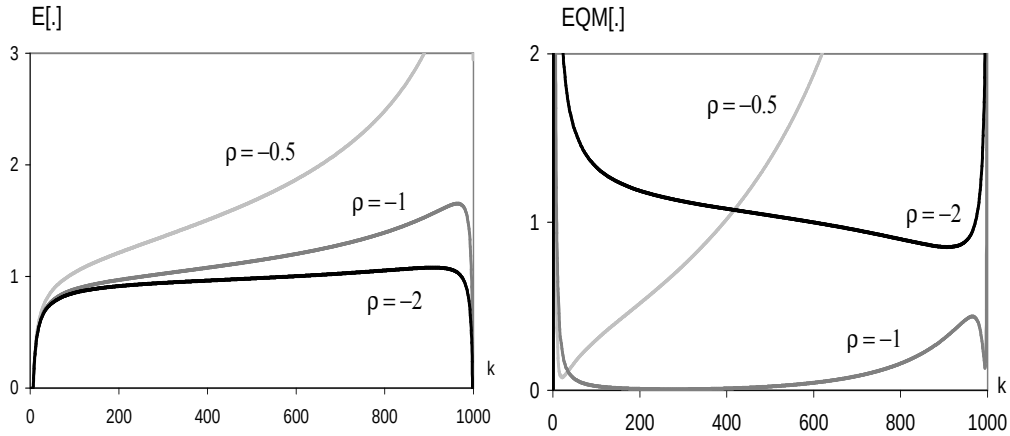


Figura 3.3: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Momentos, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5, -1, -2$ ($\beta = 1$).

As conclusões obtidas para o estimador de Momentos são muito semelhantes às apresentadas para o estimador de Hill.

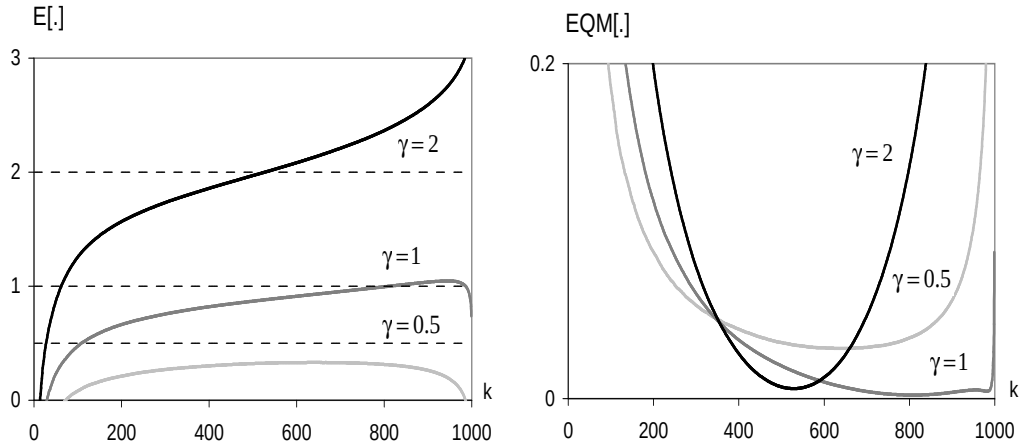


Figura 3.4: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, do estimador de Momentos, para uma amostra de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 0.5, 1, 2$ ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$).

3.3 Estimação dos parâmetros de segunda ordem

Nesta Secção analisamos a estimação dos parâmetros de forma e de escala de segunda ordem, ρ e β , respectivamente. Existem, na literatura, várias classes de estimadores de ρ , das quais destacamos as recentemente introduzidas em Gomes *et al.* [50] e Fraga Alves *et al.* [40]. Neste trabalho optámos por estudar um membro particular da classe de estimadores proposta em Fraga Alves *et al.* [40]. No que diz respeito à estimação do parâmetro de escala de segunda ordem, β , consideramos a classe de estimadores introduzida em Gomes & Martins [57].

A estimação do parâmetro de segunda ordem ρ é de extrema importância na escolha adaptativa do nível a utilizar na estimação do índice de valores extremos γ (Hall & Welsh [78], Beirlant *et al.* [5, 6], Danielson *et al.* [23], Drees & Kaufmann [34], Draisma *et al.* [29], Gomes & Oliveira [64] e Guillou & Hall [71]). Por outro lado, a componente dominante do viés dos estimadores clássicos do índice de cauda, γ , depende de ρ e de β , sendo pois fundamental a correcta e adequada estimação destes parâmetros para a obtenção dos estimadores de viés reduzido.

3.3.1 Classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de forma de segunda ordem, ρ

A classe de estimadores semi-paramétricos de ρ proposta por Fraga Alves *et al.* [40] baseia-se no comportamento da estatística,

$$T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) = \frac{D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau)}(k; \gamma)}{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)}, \quad (3.25)$$

onde

$$D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma) = \left(\frac{M_n^{(\alpha \theta_1)}(k)}{\mu_{\alpha \theta_1}^{(1)} \gamma^{\alpha \theta_1}} \right)^{\tau / \theta_1} - \left(\frac{M_n^{(\alpha \theta_2)}(k)}{\mu_{\alpha \theta_2}^{(1)} \gamma^{\alpha \theta_2}} \right)^{\tau / \theta_2}, \quad (3.26)$$

sendo $M_n^{(\alpha)}(k)$ a estatística em (3.3), e $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, a amostra de e.o. ascendentes associadas à a.a. $\underline{X}_n$.

A estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$, definida em (3.25), converge em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$, para

$$t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) := \frac{\bar{\mu}_{\alpha}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho)}{\bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(2)}(\rho)} = \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \quad (3.27)$$

independentemente de τ , sendo

$$d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) := \bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(2)}(\rho). \quad (3.28)$$

Mostra-se ainda que,

$$t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = \theta_2 \frac{(\theta_1 - 1)(1 - \rho)^{\alpha \theta_2} - \theta_1(1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - 1)} + (1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)}}{(\theta_2 - \theta_1)(1 - \rho)^{\alpha \theta_2} - \theta_2(1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} + \theta_1}. \quad (3.29)$$

Logo,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^-} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = \frac{\theta_1 - 1}{\theta_2 - \theta_1}; \quad \lim_{\rho \rightarrow -\infty} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = \frac{\theta_2(\theta_1 - 1)}{\theta_2 - \theta_1},$$

pelo que, a função $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ é decrescente (crescente) em ρ , desde que $1 < \theta_1 < \theta_2$ ($\theta_1 > \theta_2 > 1$).

Desta forma, a classe de estimadores consistentes de ρ é

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) := t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^{\leftarrow}(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)), \quad (3.30)$$

desde que $\frac{\theta_1 - 1}{|\theta_2 - \theta_1|} \leq \left| T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_p, p)}(k) \right| < \frac{\theta_2(\theta_1 - 1)}{|\theta_2 - \theta_1|}$.

Proposição 3.3 (Fraga Alves *et al.* [40]) *Admitindo a validade da condição de segunda ordem (2.25), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, $\rho, \rho' < 0$, sendo k uma sucessão intermédia de inteiros satisfazendo (2.15) e considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)}{\alpha\tau\gamma^{-1}A(n/k)} \xrightarrow{p} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho). \quad (3.31)$$

Se considerarmos válida a condição de terceira ordem (2.26) então é válida a seguinte representação em distribuição,

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)}{\alpha\tau\gamma^{-1}A(n/k)} &\stackrel{d}{=} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha\sqrt{k}A(n/k)} \\ &+ \{u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)A(n/k) + v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho')B(n/k)\} (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} := \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1}^{(1)}}{\theta_1} Z_k^{(\alpha\theta_1)} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_2}^{(1)}}{\theta_2} Z_k^{(\alpha\theta_2)}, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho) &:= \frac{1}{2\gamma} \left[(\alpha\theta_1 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau - \theta_1)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \right. \\ &\quad \left. - (\alpha\theta_2 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau - \theta_2)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho))^2 \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho') := \bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho + \rho') - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho + \rho'), \quad (3.35)$$

e $Z_k^{(\alpha)}$ é a v.a. definida em (3.15).

Dado que $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) = D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau)}(k; \gamma)/D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)$, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 3.4 (Fraga Alves *et al.* [40]) *Admitindo a validade da condição de segunda ordem (2.25) com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, $\rho, \rho' < 0$, para sucessões intermédias k verificando (2.15) e considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$,*

$$T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \xrightarrow{p} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho). \quad (3.36)$$

Considerando válida a condição de terceira ordem (2.26), a estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ tem a se-

guinte representação em distribuição,

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \\ &+ \frac{\gamma(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &+ [u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau} A(n/k) + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} B(n/k)] (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau} \equiv u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho) = \frac{u_{\alpha, 1, \theta_1, \tau}(\rho) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \quad (3.38)$$

$$v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \equiv v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho') = \frac{v_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho, \rho') - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}. \quad (3.39)$$

Corolário 3.2 (Fraga Alves *et al.* [40]) *Nas condições do Teorema anterior, a variância assintótica de $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ é,*

$$\sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2 = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\Gamma(2\alpha\theta_1)}{\theta_1^3 \Gamma^2(\alpha\theta_1)} + \frac{\Gamma(2\alpha\theta_2)}{\theta_2^3 \Gamma^2(\alpha\theta_2)} - \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + \theta_2))}{\theta_1^2 \theta_2^2 \Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} \right) - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)^2, \quad (3.40)$$

e a covariância assintótica de $(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)}, W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)})$ é dada por,

$$\begin{aligned} \sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1, \theta_2} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{(\theta_1 + 1)\Gamma(\alpha(\theta_1 + 1))}{\theta_1^2 \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha\theta_1)} - \frac{(\theta_2 + 1)\Gamma(\alpha(\theta_2 + 1))}{\theta_2^2 \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha\theta_2)} - \frac{2\Gamma(2\alpha\theta_1)}{\theta_1^3 \Gamma^2(\alpha\theta_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + \theta_2))}{\theta_1^2 \theta_2^2 \Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} \right) - \left(1 - \frac{1}{\theta_1} \right) \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Apresentamos de seguida o comportamento assintótico da classe de estimadores de ρ definida em (3.30).

Teorema 3.5 (Fraga Alves *et al.* [40]) *Supondo válida a condição de segunda ordem (2.25) com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, $\rho, \rho' < 0$, considerando sucessões intermédias k satisfazendo (2.15) e núveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, então*

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)(k)} \xrightarrow{p} \rho. \quad (3.42)$$

Admitindo a validade da condição de terceira ordem (2.26), a estatística $\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)(k)}$ tem a

seguinte representação em distribuição,

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \stackrel{d}{=} \rho + \frac{\sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2} W_k^{R|(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\sqrt{k} A(n/k)} + \left[u_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)} A(n/k) + v_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} B(n/k) \right] (1 + o_p(1)), \quad (3.43)$$

onde $W_k^{R|(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão dada por,

$$W_k^{R|(\alpha, \theta_1, \theta_2)} := \frac{1}{\sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2}} \left(\frac{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right), \quad (3.44)$$

com

$$\sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2}^2 = \left(\frac{\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right)^2, \quad (3.45)$$

sendo

$$\begin{aligned} t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) (1 - \rho) \left((\theta_2 - \theta_1)(1 - \rho)^{\alpha\theta_2} - \theta_2(1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} + \theta_1 \right)^2 = \\ = \alpha\theta_1\theta_2 \left\{ \theta_1(\theta_2 - 1)(1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - 1)} \left(1 + (1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 + 1)} \right) \right. \\ \left. - (\theta_2 - \theta_1)(1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} \left(1 + (1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 - 1)} \right) \right. \\ \left. - \theta_2(\theta_1 - 1)(1 - \rho)^{\alpha\theta_2} \left(1 + (1 - \rho)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 - 1)} \right) \right\}, \quad (3.46) \end{aligned}$$

e

$$u_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)} = \frac{u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \quad (3.47)$$

$$v_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} = \frac{v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho')}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}. \quad (3.48)$$

Na literatura tem sido sugerida a escolha dos parâmetros de controlo $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$, ficando a classe de estimadores semi-paramétricos de ρ a depender apenas de um parâmetro de controlo τ .

O estimador de ρ associado a $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$ é denotado por

$$\hat{\rho}(k; \tau) \equiv \hat{\rho}_n^{(\tau)}(k) \equiv \hat{\rho}_n^{(1, 2, 3, \tau)}(k) = \frac{3 \left(T_n^{(1, 2, 3, \tau)}(k) - 1 \right)}{T_n^{(1, 2, 3, \tau)}(k) - 3}, \text{ desde que } 1 \leq T_n^{(1, 2, 3, \tau)}(k) < 3, \quad (3.49)$$

sendo

$$T_n^{(1,2,3,\tau)}(k) := \begin{cases} \frac{\ln(M_n^{(1)}(k)) - \frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2)}{\frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2) - \frac{1}{3} \ln(M_n^{(3)}(k)/6)}, & \text{se } \tau = 0 \\ \frac{(M_n^{(1)}(k))^\tau - (M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2}}{(M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2} - (M_n^{(3)}(k)/6)^{\tau/3}}, & \text{se } \tau > 0, \end{cases}$$

com $M_n^{(\alpha)}(k)$ definido em (3.3).

Corolário 3.3 *Nas condições do Teorema anterior, considerando o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$ é válida a seguinte representação em distribuição para o estimador $\hat{\rho}(k; \tau)$,*

$$\hat{\rho}(k; \tau) \stackrel{d}{=} \rho + \frac{\sigma_\rho}{\sqrt{k}A(n/k)} W_k^R + (u_{\rho|T}A(n/k) + v_{\rho|T}B(n/k)) (1 + o_p(1)), \quad (3.50)$$

com $W_k^R \equiv W_k^{R|(1,2,3)}$, a v.a. definida em (3.44). Considerando níveis k tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A^2(n/k) = \lambda_A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k)B(n/k) = \lambda_B$, ambos finitos, então

$$\sqrt{k}A(n/k) (\hat{\rho}(k; \tau) - \rho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\mu_\rho, \sigma_\rho^2),$$

onde

$$\sigma_\rho^2 = \left(\frac{\gamma(1-\rho)^3}{\rho} \right)^2 (2\rho^2 - 2\rho + 1), \quad (3.51)$$

$$\mu_\rho = \lambda_A u_\rho + \lambda_B v_{\rho, \rho'} \quad (3.52)$$

com

$$u_\rho = \frac{\rho (\rho (42 - 45\tau) + \rho^3 (96 - 44\tau) + 8\rho^4 (\tau - 3) + 9\tau + 2\rho^2 (37\tau - 60))}{12\gamma(1 - 3\rho + 2\rho^2)^2}, \quad (3.53)$$

$$v_{\rho, \rho'} = \frac{(1-\rho)^3 \rho' (\rho + \rho')}{\rho (1 - \rho - \rho')^3}. \quad (3.54)$$

Observação 3.4 *Pelo Corolário anterior podemos concluir que se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, com λ_A e λ_B finitos (eventualmente nulos), então*

$$\hat{\rho}(k; \tau) - \rho = O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)} \right).$$

Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$ então

$$\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)} = o(A(n/k)) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)} = o(B(n/k)), e$$

$$\hat{\rho}(k; \tau) - \rho = \begin{cases} O_p(A(n/k)), & \text{se } \rho \geq \rho' \\ O_p(B(n/k)), & \text{se } \rho < \rho'. \end{cases}$$

3.3.2 Escolha do parâmetro de controlo τ na estimação de ρ

Os resultados teóricos e de simulação obtidos em Fraga Alves *et al.* [40], bem como os obtidos por Gomes & Martins [57] na estimação do índice de cauda, sugerem a utilização do parâmetro de controlo $\tau = 0$ para a região $\rho \in [-1, 0)$ e de $\tau = 1$ para a região $\rho \in (-\infty, -1)$, bem como a estimação de ρ num nível elevado k_1 . Este nível, apesar de escolhido sem qualquer critério de optimalidade, funciona bem em estudos de simulação depois de um estudo prévio relativo à escolha do parâmetro de controlo τ a usar na estimação de ρ , em (3.49). Desta forma, devemos começar por obter algumas trajectórias amostrais de $\hat{\rho}(k; \tau)$, como funções de k , para alguns valores de τ e escolher o valor τ^* da trajectória que apresenta maior estabilidade para valores grandes de k , utilizando, por exemplo, os critérios de estabilidade sugeridos em Gomes *et al.* [47, 61] e Gomes & Pestana [65].

O estimador de ρ , em (3.49), tem uma componente dominante do viés não nula, sendo função de γ, ρ e τ , pelo que, do ponto de vista puramente teórico, podemos determinar o valor de τ que anula a componente dominante do viés. Para os modelos F na vasta subclasse de modelos da classe de Hall-Welsh com função quantil recíproca (2.30), $\rho = \rho'$, $A(t) = \gamma\beta t^\rho$ e $B(t) = \beta' t^\rho$. Definindo $\delta = \beta'/\beta$ a função $\tau(\rho, \delta)$ resultante da resolução da equação, $u_\rho^{(\tau)} A(n/k) + v_\rho B(n/k) = 0$, com $u_\rho^{(\tau)} \equiv u_\rho$ e $v_\rho \equiv v_{\rho, \rho'}$, em (3.53) e (3.54), respectivamente, é dada por

$$\tau(\rho, \delta) := -6 \frac{4\delta(1-\rho)^5 + \rho(7-34\rho+56\rho^2-36\rho^3+8\rho^4)}{(1-2\rho)^3(9-9\rho+2\rho^2)}. \quad (3.55)$$

Ilustramos em seguida o comportamento da função $\tau(\rho, \delta)$ para alguns modelos da classe de Hall-Welsh. Para o modelo *Fréchet*(γ), $\delta = 5/3$ e $\rho = -1$, pelo que $\tau = -0.803704$. O comportamento da função $\tau(\rho, \delta)$ para os modelos *Burr*(γ, ρ), GP($\gamma > 0$) e *t-Student*($\nu = -2/\rho$) é apresentado na Figura 3.5.

A trajectória observada no lado esquerdo do gráfico (modelos *Burr*(γ, ρ) e GP($\gamma > 0$)) valida a regra apresentada para a escolha de τ , enquanto que a trajectória do lado direito (modelo

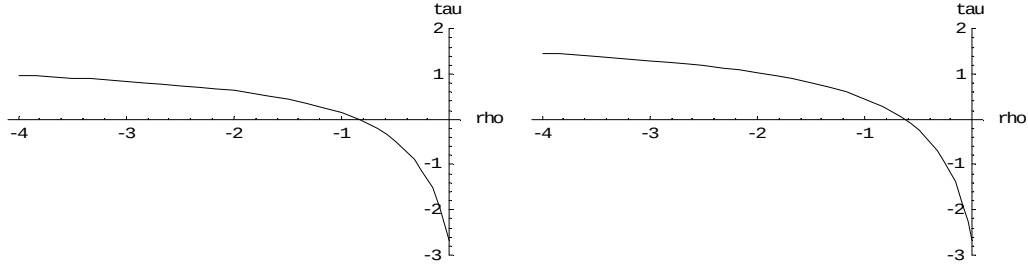


Figura 3.5: Trajectórias da função $\tau(\rho, \delta)$ para os modelos $Burr(\gamma, \rho)$ e $GP(\gamma > 0)$ (lado esquerdo) e para o modelo t -Student (lado direito).

t -Student) apresenta algumas discrepâncias com a regra empírica de escolha de τ .

3.3.3 Algumas notas sobre a escolha do nível k_1 a usar na estimação de ρ

A escolha do nível adequado k_1 a utilizar na estimação semi-paramétrica de ρ é um tópico de grande importância em estimação de viés reduzido. O nível “ótimo”, k_1 , deve ser tal que permita garantir a normalidade assintótica dos estimadores de ρ com um viés assintótico não-nulo. Desta forma, $\sqrt{k_1}A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \lambda_{B_1}$ e $\sqrt{k_1}A^2(n/k_1) \rightarrow \lambda_{A_1}$, com λ_{B_1} e λ_{A_1} finitos e sendo pelo menos um deles não-nulo. Nestas condições o nível k_1 deve ser tal que $k_1 = C_1 n^{-2(\rho+\rho')/(1-2(\rho+\rho'))}$, para modelos na classe de Hall-Welsh. Denotando por $\hat{\rho} = \hat{\rho}(k_1; \tau)$, os estimadores de ρ definidos em (3.49) e calculados no nível k_1 , então $\hat{\rho} - \rho = O_p(1/(\sqrt{k_1}A(n/k_1))) = O_p(n^{\rho'/(1-2(\rho+\rho'))})$, i.e.,

$$\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n). \quad (3.56)$$

A utilização deste nível k_1 tem alguns inconvenientes que passam pela estimação à priori de C_1 , ρ e ρ' , pelo que, a alternativa seria o uso da metodologia Bootstrap (Efron [35]; Efron & Tibshirani [36]) na escolha óptima de k_1 , à semelhança do que foi realizado em Danielsson *et al.* [24] e em Gomes & Oliveira [64], para a escolha adaptativa de k no estimador de Hill.

Os resultados teóricos e de simulação obtidos em Fraga Alves *et al.* [40] e em Gomes & Martins [57], bem como a utilização dos estimadores de ρ nas estatísticas Jackknife Generalizadas de Gomes *et al.* [58], levaram à sugestão do nível $k_1 = \min(n-1, \lceil 2n/\ln \ln n \rceil)$ para estimar ρ . No entanto, com a escolha deste nível k_1 , $\sqrt{k_1}A^2(n/k_1) \rightarrow \infty$ e

$\hat{\rho} - \rho = O_p(A(n/k_1)) = O_p((\ln \ln n)^\rho)$. Pelo que, não sendo imposta mais nenhuma restrição não podemos garantir a validade de (3.56).

Neste trabalho e à semelhança de Caeiro *et al.* [19], Gomes & Pestana [65, 66] e Gomes *et al.* [60, 51] sugerimos a utilização de um nível do tipo,

$$k_1 = [n^{1-\varepsilon}], \quad \varepsilon \sim 0^+, \quad (3.57)$$

independente de uma estimação à priori de ρ . Para este nível k_1 , $\sqrt{k_1}A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \infty$ sse $\rho + \rho' > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow -\infty$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, uma restrição quase irrelevante no modelo subjacente aos dados desde que ε seja pequeno. Por exemplo, se escolhermos $\varepsilon = 0.005$ obtemos $\rho + \rho' > -99.5$ e para $\varepsilon = 0.001$ tem-se $\rho + \rho' > -499.5$. Nestas condições, $\hat{\rho} - \rho = O_p(B(n/k_1))$, i.e., da ordem de $n^{\varepsilon\rho'} = o(1/\ln n)$, e portanto $(\hat{\rho} - \rho)$ é de ordem inferior a $1/\ln n$ e a condição (3.56) é válida.

O valor k_1 usado nos estudos de simulação foi

$$k_1 = [n^{0.995}]. \quad (3.58)$$

3.3.4 Classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de segunda ordem, β

A classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de segunda ordem, β , utilizada neste trabalho foi introduzida por Gomes & Martins [57] e é baseada nos espaçamentos das log-observações devidamente escalados, U_i ($1 \leq i \leq k$), em (3.2),

$$\hat{\beta}(k; \rho) := \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\rho}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\rho} U_i\right)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\rho}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\rho} U_i\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-2\rho} U_i\right)}. \quad (3.59)$$

A consistência e o comportamento assintótico de $\hat{\beta}(k, \rho)$, em contexto de segunda ordem, são apresentados no Teorema seguinte, cuja demonstração pode ser consultada em Gomes & Martins [57].

Teorema 3.6 (Gomes & Martins [57]) *Se a condição de segunda ordem (2.25) é válida, com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, $\rho < 0$, se k é uma sucessão intermédia de inteiros satisfazendo (2.15) e se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, então $\hat{\beta}(k, \rho)$ converge em probabilidade para β , quando*

$n \rightarrow \infty$, com $\hat{\beta}(k, \rho)$ dado em (3.59). Além disso, é válida a seguinte representação em distribuição:

$$\hat{\beta}(k; \rho) \stackrel{d}{=} \beta + \frac{\gamma|\beta|(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|\sqrt{k}A(n/k)} W_k^B + R_k^B, \quad R_k^B = o_p(1), \quad (3.60)$$

onde

$$W_k^B := \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|} \left(\frac{\bar{Z}_k^{(1)}}{1-\rho} - \frac{\bar{Z}_k^{(1-\rho)}}{\sqrt{1-2\rho}} \right), \quad (3.61)$$

e $\bar{Z}_k^{(\alpha)}$, com $\alpha \geq 1$, são v.a. assintoticamente normais padrão, definidas em (3.18).

O próximo Teorema explicita, em contexto de terceira ordem, o termo R_k^B . Assim,

Teorema 3.7 (Caeiro *et al.* [18]) *Nas condições do Teorema anterior e admitindo a validade da condição de terceira ordem, (2.26), com $B(t) = \beta' t^{\rho'}$, $\beta' \neq 0$, $\rho' < 0$, o termo $R_k^B = o_p(1)$ satisfaz,*

$$R_k^B = \beta (u_\beta A(n/k) + v_\beta B(n/k)) (1 + o_p(1)), \quad (3.62)$$

onde

$$u_\beta \equiv u_\beta(\gamma, \rho) = -\frac{2(1-\rho)}{\gamma(1-3\rho)}, \quad (3.63)$$

$$v_\beta \equiv v_\beta(\rho, \rho') = \frac{(1-\rho)(1-2\rho)(\rho+\rho')}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')}. \quad (3.64)$$

Além disso, se $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos, então

$$\sqrt{k}A(n/k) \frac{\hat{\beta}(k; \rho) - \beta}{\beta} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(\lambda_A u_\beta + \lambda_B v_\beta, \sigma_\beta^2) \quad (3.65)$$

com

$$\sigma_\beta^2 \equiv \sigma_\beta^2(\gamma, \rho) = (1-2\rho) \left(\frac{\gamma(1-\rho)}{\rho} \right)^2. \quad (3.66)$$

Demonstração: O estimador $\hat{\beta}(k; \rho)$, definido em (3.59), pode ser escrito da seguinte forma,

$$\hat{\beta}(k; \rho) =: \left(\frac{k}{n} \right)^\rho \frac{\varphi(\rho)}{\eta(\rho)} = \frac{\gamma \beta}{A(n/k)} \times \frac{\varphi(\rho)}{\eta(\rho)},$$

onde

$$\varphi(\rho) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\rho} \right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\rho)}(k)$$

e

$$\eta(\rho) = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\rho} \right) N_n^{(1-\rho)}(k) - N_n^{(1-2\rho)}(k),$$

com $N_n^{(\alpha)}(k)$ definido em (3.4). Utilizando a representação em distribuição de $N_n^{(\alpha)}(k)$, em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) \stackrel{d}{=} & \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left(\frac{\bar{Z}_k^{(1)}}{1-\rho} - \frac{\bar{Z}_k^{(1-\rho)}}{\sqrt{1-2\rho}} \right) - \frac{\rho^2 A(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho)} + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right) \\ & - \frac{\rho(\rho+\rho')A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho)(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')}(1+o_p(1)) + O_p(1/k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta(\rho) \stackrel{d}{=} & -\frac{\gamma\rho^2}{(1-\rho)^2(1-2\rho)} + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left(\frac{\bar{Z}_k^{(1-\rho)}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}} - \frac{\bar{Z}_k^{(1-2\rho)}}{\sqrt{1-4\rho}} \right) + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right) \\ & - \frac{2\rho^2 A(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho)(1-3\rho)} - \frac{\rho(2\rho+\rho')A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho-\rho')(1-3\rho-\rho')}(1+o_p(1)) + O_p(1/k). \end{aligned}$$

Tendo em conta que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, quando $x \rightarrow 0$ e que se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, então $\frac{1}{\sqrt{k}} = o(A(n/k))$, tem-se

$$\frac{1}{\eta(\rho)} = -\frac{(1-\rho)^2(1-2\rho)}{\gamma\rho^2} \left(1 - \frac{2(1-\rho)A(n/k)}{\gamma(1-3\rho)} + o_p(A(n/k)) \right)$$

e portanto, o termo dominante de $\varphi(\rho)/\eta(\rho)$ é $A(n/k)/\gamma$. Sendo W_k^B a v.a. definida em (3.61),

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\rho)}{\eta(\rho)} \stackrel{d}{=} & \frac{A(n/k)}{\gamma} + \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|\sqrt{k}} W_k^B \\ & + \frac{A(n/k)}{\sqrt{k}} \left[\frac{(1-\rho)(1-2\rho)(\rho+\rho')}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} B(n/k) - \frac{2(1-\rho)}{\gamma(1-3\rho)} A(n/k) \right] (1+o_p(1)). \end{aligned}$$

Desta forma, $\hat{\beta}(k; \rho)$ satisfaz a seguinte representação em distribuição, com (u_β, v_β) definidos em (3.63) e (3.64), respectivamente:

$$\hat{\beta}(k; \rho) \stackrel{d}{=} \beta + \frac{\gamma|\beta|(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|\sqrt{k}A(n/k)} W_k^B + \beta(u_\beta A(n/k) + v_\beta B(n/k))(1+o_p(1)),$$

obtendo-se (3.65) e (3.66). □

Observação 3.5 Para os modelos da classe de Hall-Welsh com $\rho = \rho'$, como acontece na grande

maioria dos modelos (veja-se Secção 2.4) obtemos $u_\beta = -v_\beta/\beta$. Nos modelos $\text{Burr}(\gamma, \rho)$ e $\text{GP}(\gamma > 0)$, $B(t) = A(t)/\gamma$, obtendo-se um valor médio nulo para $\sqrt{k}(\hat{\beta}(k; \rho) - \beta)$, mesmo quando $\lambda_A, \lambda_B \neq 0$.

Se substituirmos ρ por um estimador consistente $\hat{\rho}(k; \tau)$ e tendo presente que pretendemos estimar β e ρ externamente no nível k_1 , dado em (3.57), é válido o seguinte Teorema:

Teorema 3.8 (Gomes *et al.* [51]) *Nas condições do Teorema anterior, com $\hat{\rho}(k; \tau)$ e $\hat{\beta}(k; \rho)$ dados em (3.49) e (3.59), respectivamente, e sendo $\hat{\rho} := \hat{\rho}(k_1; \tau)$ o estimador de ρ calculado em k_1 e satisfazendo a condição (3.56), quando $n \rightarrow \infty$, então $\hat{\beta}(k; \hat{\rho})$ é consistente para a estimação de β e*

$$\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau)) - \beta \stackrel{p}{\sim} -\beta \ln(n/k) (\hat{\rho}(k; \tau) - \rho). \quad (3.67)$$

Consequentemente $\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau))$ é consistente para a estimação de β para sucessões intermédias k verificando (2.15) e tais que $\sqrt{k} A(n/k)/\ln(n/k) \rightarrow \infty$. Além disso, se $\sqrt{k} A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k} A(n/k) B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos, então

$$\sqrt{k} A(n/k) \frac{\beta - \hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau))}{\beta \ln(n/k)} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(\lambda_A u_\rho + \lambda_B v_{\rho, \rho'}, \sigma_\rho^2), \quad (3.68)$$

com σ_ρ^2 , u_ρ e $v_{\rho, \rho'}$ e definidos em (3.51), (3.53) e (3.54), respectivamente.

Se $\sqrt{k} A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k} A(n/k) B(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., se $1/(\sqrt{k} A(n/k)) = o(A(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k} A(n/k)) = o(B(n/k))$, então $\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau)) - \beta = O_p(\ln(n/k) A(n/k))$ ou $\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau)) - \beta = O_p(\ln(n/k) B(n/k))$.

Demonstração: Recorrendo ao método delta, podemos escrever,

$$\hat{\beta}(k; \hat{\rho}) = \hat{\beta}(k; \rho) + (\hat{\rho} - \rho) \frac{d\hat{\beta}(k; \rho)}{d\rho} (1 + o_p(1)),$$

com

$$\frac{d\hat{\beta}(k; \rho)}{d\rho} = \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \left\{ \ln(k/n) \frac{\varphi(\rho)}{\eta(\rho)} + \frac{\varphi'(\rho)\eta(\rho) - \varphi(\rho)\eta'(\rho)}{\eta^2(\rho)} \right\}.$$

Mas este resultado é válido localmente para $\rho < 0$, com ρ substituído por alguma sucessão $\rho_n \rightarrow \rho$, desde que $(\rho_n - \rho) \ln n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Nestas condições, o termo dominante da

soma anterior é o primeiro e portanto,

$$d \hat{\beta}(k; \rho) / d\rho \stackrel{p}{\sim} -\hat{\beta}(k; \rho) \ln(n/k).$$

Logo

$$\hat{\beta}(k; \hat{\rho}) \stackrel{d}{=} \hat{\beta}(k; \rho) - \hat{\beta}(k; \rho)(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)). \quad (3.69)$$

Desta forma, e com base na representação (3.60) e na condição (3.56) podemos garantir a consistência de $\hat{\beta}(k; \hat{\rho})$ na estimação de β , obtendo-se ainda

$$\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau)) \stackrel{d}{=} \beta - \beta(\hat{\rho}(k; \tau) - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)),$$

e a relação (3.67). Como $(\hat{\rho}(k; \tau) - \rho) \ln(n/k)$ é o termo dominante em (3.69), o comportamento de $\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau))$ é função do comportamento de $(\hat{\rho}(k; \tau) - \rho)$, dado no Corolário 3.3. Assim,

$$\frac{\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau)) - \beta}{-\beta \ln(n/k)} \stackrel{d}{=} \frac{\sigma_\rho W_k^R}{\sqrt{k} A(n/k)} + (u_\rho A(n/k) + v_{\rho, \rho'} B(n/k)) (1 + o_p(1)).$$

Logo, $\hat{\beta}(k; \hat{\rho}(k; \tau))$ é consistente para a estimação de β para sucessões intermédias k verificando (2.15) e tais que $\sqrt{k} A(n/k) / \ln(n/k) \rightarrow \infty$. Considerando níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k} A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k} A(n/k) B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos, obtém-se (3.68) e o resto do Teorema. $\square$

Observação 3.6 Considerando $\hat{\beta} := \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho})$ e $\hat{\rho} = \hat{\rho}(k_1; \tau)$, para qualquer τ , com $\hat{\rho}(k; \tau)$ e $\hat{\beta}(k; \rho)$ dados em (3.49) e (3.59), respectivamente, podemos concluir por (3.67) que $\hat{\beta} - \beta = O_p(\ln(n/k_1)(\hat{\rho} - \rho))$, desde que a condição (3.56) seja válida, i.e., que $\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$, condição que garante a consistência de $\hat{\beta} = \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho})$.

Finalizamos este Capítulo apresentando um algoritmo heurístico para a estimação dos parâmetros de segunda ordem ρ , em (3.49) e β , em (3.59), à semelhança de Gomes & Pestana [65] e Gomes *et al.* [60, 51].

1. Dada uma amostra $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ traçam-se as trajectórias amostrais de $\hat{\rho}(k; \tau)$, em (3.49), para alguns valores de $\tau \in \mathcal{T}$, onde $\mathcal{T} = \{0, 1\}$, por exemplo;
2. Calcula-se a mediana de $\hat{\rho}(k; \tau)$ para valores de $k \in ([n^{0.995}], [n^{0.999}])$ denotada por χ_τ e

determina-se o valor do parâmetro de controlo τ^* através do seguinte critério de estabilidade: $\tau^* := \arg \min_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_k (\hat{\rho}(k; \tau) - \chi_\tau)^2$;

3. Calcula-se a estimativa $\hat{\rho}(k_1; \tau^*)$, com $\hat{\rho}(k; \tau)$ e k_1 dados em (3.49) e (3.58), respectivamente;
4. Calcula-se $\hat{\beta}(k_1; \hat{\rho}(k_1, \tau^*))$, com $\hat{\beta}(k; \rho)$, definido em (3.59).

Capítulo 4

Acomodação do Viés nos Log-excessos e nos Excessos

Em Estatística de Extremos a inferência é muitas vezes baseada no comportamento dos log-excessos, definidos em (3.1), e no comportamento dos excessos. Neste Capítulo começamos por definir, na Secção 4.1, os estimadores de viés reduzido de segunda ordem, apresentando também uma pequena retrospectiva do problema da estimação de viés reduzido em TVE. Seguidamente analisamos, na Secção 4.2, e em contexto de segunda ordem, as propriedades dos log-excessos e dos excessos que serviram de motivação para a derivação das novas classes de estimadores de γ . Na Secção 4.3 introduzimos uma nova classe de estimadores semi-paramétricos de viés reduzido de variância mínima do índice de cauda, γ , designados de estimadores dos log-excessos ponderados. Estes estimadores são obtidos por acomodação do viés nos log-excessos acima de um nível elevado e têm variância assintótica igual à variância assintótica do estimador de Hill, em (3.6). O estimador de viés reduzido apresentado e o estimador do parâmetro de forma de segunda ordem ρ são função dos log-excessos. Este facto motivou a derivação de uma nova classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de segunda ordem, β , baseada nos log-excessos. O comportamento de segunda ordem dos excessos acima de um nível aleatório elevado permitiu-nos ainda obter uma nova classe de estimadores de máxima verosimilhança de γ , apresentada na Secção 4.4. O comportamento assintótico das novas classes de estimadores e a comparação assintótica, nos níveis óptimos, dos estimadores de máxima verosimilhança são apresentados na Secção 4.5. Finalizamos este Capítulo ilustrando, na Secção 4.6, o comportamento exacto dos novos estimadores do índice de valores extremos, via método de Monte Carlo.

4.1 Estimadores de viés reduzido de segunda ordem

Seja $\hat{\gamma}_n(k)$ um estimador semi-paramétrico consistente para a estimação de γ . Sob a validade da condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), e considerando sucessões intermédias de inteiros satisfazendo (2.15) é válida a seguinte representação assintótica,

$$\hat{\gamma}_n(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma}{\sqrt{k}} Z_k + b_\rho A(n/k)(1 + o_p(1)), \quad (4.1)$$

onde $\sigma > 0$, $b_\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e Z_k é uma v.a. assintoticamente normal padrão. As aproximações para a variância e viés assintóticos são, respectivamente, σ^2/k e $b_\rho A(n/k)$. Consequentemente, o padrão destes estimadores apresenta, como referimos anteriormente, o mesmo tipo de comportamento:

- variância elevada para níveis elevados, i.e., para valores pequenos de k ;
- viés elevado para níveis pequenos, i.e., para valores elevados de k ;
- uma pequena região de estabilidade das trajectórias amostrais (gráfico das estimativas *versus* k), como função de k , o que torna problemática a escolha adaptativa do nível (ou de k), com base em qualquer critério de estabilidade das trajectórias amostrais;
- um erro quadrático médio “muito pontiagudo” como função de k , o que torna difícil a escolha do valor k_0 em que o erro quadrático médio atinge o seu valor mínimo, um dos critérios de optimalidade mais vulgares em Estatística.

Estas características têm levado os investigadores em Estatística de Extremos a considerar a possibilidade de controlar este viés, construindo de forma apropriada novos estimadores, os chamados estimadores de viés reduzido de segunda ordem, denotados genericamente por $\hat{\gamma}_n^R(k)$.

Definição 4.1 *Sob a validade da condição de segunda ordem, em (2.25), e para sucessões k satisfazendo (2.15), a estatística $\hat{\gamma}_n^R(k)$, um estimador consistente de γ , baseado nas $k + 1$ e.o. de topo provenientes de um modelo F de cauda pesada, é um estimador semi-paramétrico de viés reduzido de segunda ordem de γ , se $\forall F \in \mathcal{D}^*(GEV_{\gamma>0}) \subseteq \mathcal{D}(GEV_{\gamma>0})$,*

$$\hat{\gamma}_n^R(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma_R}{\sqrt{k}} Z_k^R + o_p(A(n/k)),$$

onde Z_k^R é uma v.a. assintoticamente normal padrão, $\sigma_R > 0$, e $A(\cdot)$ é a função em (2.25).

Observação 4.1 *A componente dominante do viés dos estimadores de viés reduzido de segunda ordem não é da ordem de $A(n/k)$, mas sim de ordem inferior a $A(n/k)$. Logo, $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_n^R(k) - \gamma)$ é assintoticamente normal com valor médio nulo, não só para níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow 0$ (como acontece nos estimadores clássicos), mas também quando $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito não-nulo. A estimação de viés reduzido de segunda ordem pode ser estendida a outros parâmetros de primeira ordem, tais como quantis elevados e período de retorno de níveis elevados.*

A redução do viés pode ser obtida de diversas formas. No entanto, as técnicas mais utilizadas são a estimação adequada e consequente remoção da componente dominante do viés em (4.1), ou o estudo do comportamento de segunda ordem de algumas estatísticas utilizadas na estimação de γ , tais como os log-excessos dados em (3.1), os espaçamentos das log-observações devidamente escalados, em (3.2), e os excessos,

$$W_{ik} := X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n}, \quad 1 \leq i \leq k < n. \quad (4.2)$$

A estimação de viés reduzido em Estatística de Extremos surgiu no trabalho de Gomes [45], que sugere a utilização da metodologia “Jackknife” Generalizado, de Gray & Schucany [69], para a estimação de um parâmetro de acontecimentos raros. Com um espírito muito ligado a esta mesma metodologia, mas sem a referir explicitamente, Peng [86] considera combinações lineares de estimadores adequados do índice de cauda. Essa mesma técnica foi também usada em Martins *et al.* [82], onde se consideram misturas convexas de dois estimadores de Hill, calculados em níveis diferentes, e, mais tarde, em Gomes *et al.* [58, 59]. Estes autores sugerem, tal como já tinha sido feito em Feuerverger & Hall [39], a especificação (possivelmente incorrecta) do valor do parâmetro de segunda ordem ρ em -1 . Posteriormente, surgiram abordagens diversas para a estimação de viés reduzido, de que mencionamos os trabalhos de Gomes & Martins [56] e Caeiro & Gomes [13, 14]. Estes autores consideram classes de estimadores, convenientemente construídas, dependentes de um parâmetro de controlo, cuja escolha, dependente do parâmetro de forma de segunda ordem, permite a obtenção do estimador de viés reduzido “óptimo”. Num contexto ligeiramente diferente, Beirlant *et al.* [7, 8] e Feuerverger & Hall [39] consideram a acomodação do viés nos espaçamentos escalados das log-observações e derivam estimadores do índice de cauda com viés reduzido, de tipo “máxima verosimilhança” e “mínimos quadrados”, obtendo uma variância assintótica mínima de $\gamma^2(1 - \rho)^4/\rho^4$. As novas classes de estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem, introduzidas em Gomes *et al.* [50] e em Fraga Alves

et al. [40], permitiram a Gomes & Martins [57] o uso da estimação do parâmetro de segunda ordem nos estimadores “Jackknife” Generalizado fornecidos em Gomes *et al.* [58]. Gomes & Martins [57] consideram também a acomodação do viés nos espaçamentos escalados das log-observações, de modo semelhante ao feito em Feuerverger & Hall [39], mas juntamente com a utilização de uma aproximação de primeira ordem para $\exp(-x)$, quando x tende para infinito. Essa aproximação permitiu-lhes obter um estimador explícito do índice de cauda, dependente da estimação “externa” do parâmetro de forma de segunda ordem. Nesse trabalho é sugerida a utilização de um estimador consistente do parâmetro de forma de segunda ordem, calculado num nível de ordem superior ao usado para a estimação do índice de cauda. Comparativamente à estimação conjunta dos parâmetros de primeira e segunda ordem no mesmo nível k , esta forma simples de proceder permitiu a estes autores reduzir a variância assintótica do estimador de viés reduzido em análise para $\gamma^2(1 - \rho)^2/\rho^2$, que embora mínima na classe de funcionais considerada em Drees [30] é sempre superior à variância assintótica do estimador de Hill, o estimador de máxima verosimilhança do índice de cauda em modelo de Pareto “standard”. Neste Capítulo consideramos a estimação externa não só do parâmetro de forma de segunda ordem, mas também do parâmetro de escala de segunda ordem, sendo com isso capazes de reduzir ainda mais a variância assintótica dos estimadores semi-paramétricos de viés reduzido de um índice de cauda positivo, a qual passa a ser γ^2 , igual ao valor obtido para o clássico estimador de Hill. Conseguiram-se assim, para um índice de cauda positivo, estimadores que são alternativas aos estimadores clássicos não só em níveis óptimos no sentido de erro quadrático médio mínimo, mas em qualquer nível k . Esta metodologia foi também recentemente utilizada em Caeiro *et al.* [19], Gomes & Pestana [65, 66] e Gomes *et al.* [51].

4.2 Propriedades dos log-excessos e dos excessos

Nesta Secção analisamos o comportamento de segunda ordem dos log-excessos, V_{ik} , definidos em (3.1) e dos excessos acima de um nível aleatório elevado, W_{ik} , definidos em (4.2).

Com base na definição da função quantil recíproca U , em (2.5), e no facto de $F^{\leftarrow}(R)$ ter distribuição $F(\cdot)$ quando R é uma v.a. uniforme em $(0, 1)$ (veja-se Teorema 2.2), temos $X_{i:n} \stackrel{d}{=} U(Y_{i:n})$ onde Y é uma v.a. com distribuição Pareto unitária (i.e., $F_Y(y) = 1 - y^{-1}$, $y \geq 1$). Como para $j > i$, $Y_{j:n}/Y_{i:n} \stackrel{d}{=} Y_{j-i:n-i}$, $\ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{i:n}$ onde E denota uma v.a. com distribuição exponencial unitária (veja-se Teorema 2.3) e $Y_{n-k:n} \stackrel{p}{\sim} n/k$ (Proposição 2.1) para sucessões

intermédias k verificando (2.15), podemos escrever, sob a validade da condição de variação regular de primeira ordem em (2.23),

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \ln U(Y_{n-i+1:n}) - \ln U(Y_{n-k:n}) \sim \gamma \ln Y_{k-i+1:k} \stackrel{d}{=} \gamma E_{k-i+1:k}(1 + o_p(1)) \quad (4.3)$$

e

$$W_{ik} \stackrel{d}{=} X_{n-k:n} \left\{ \frac{U(Y_{n-i+1:n})}{U(Y_{n-k:n})} - 1 \right\} \stackrel{d}{=} U(n/k) \{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1\} (1 + o_p(1)), \quad (4.4)$$

i.e., os log-excessos V_{ik} 's, $1 \leq i \leq k$, são, aproximadamente, as k e.o. de uma amostra de dimensão k de um modelo exponencial com valor médio γ , o que fundamenta o estimador de Hill, dado em (3.6). O estimador de Hill satisfaz a representação (4.1) com $\sigma = \gamma$ e $b_\rho = 1/(1 - \rho)$ (de Haan & Peng [75]). Considerando $\alpha = 1/U(n/k)$ e sucessões intermédias k , a igualdade (4.4) pode ser reescrita do seguinte modo,

$$W_{ik} = X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n} \approx \frac{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1}{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

i.e., os excessos W_{ik} são, aproximadamente, as k e.o. de uma amostra de dimensão k de um modelo Generalizado de Pareto (GP), com função de distribuição

$$GP(x; \gamma, \alpha) = 1 - (1 + \alpha x)^{-1/\gamma}, \quad x > 0 \quad (\alpha, \gamma > 0), \quad (4.5)$$

onde os parâmetros γ e α irão ser estimados via máxima verosimilhança (ML, do inglês “*maximum likelihood*”), tendo-se a seguinte igualdade em distribuição, para $1 \leq i \leq k$,

$$\alpha W_{ik} \stackrel{d}{=} (Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1)(1 + o_p(1)). \quad (4.6)$$

A metodologia POT (do inglês “*peaks over threshold*”) foi introduzida em Smith [93], onde é usada a parametrização (γ, δ) com $\delta = \gamma/\alpha$. A parametrização da Generalizada de Pareto em (4.5) foi sugerida por Davison [26]. O estimador de máxima verosimilhança de γ , $\hat{\gamma}_n^{ML}$, designado de estimador PORT-ML, é então uma função explícita do estimador de máxima verosimilhança de α , $\hat{\alpha}_{ML}$, e da amostra dos excessos, W_{ik} . Assim,

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) \equiv \hat{\gamma}_{n, \hat{\alpha}_{ML}}^{ML}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + \hat{\alpha}_{ML} W_{ik}). \quad (4.7)$$

A metodologia associada aos excessos acima de uma e.o. central ou mais geralmente acima de um nível aleatório foi denominada de metodologia PORT (do inglês “*peaks over random threshold*”) em Araújo Santos *et al.* [2].

Note-se que uma escolha óbvia para $\hat{\alpha}$ é $1/X_{n-k:n}$. Então $1 + \hat{\alpha} V_i = X_{n-i+1:n}/X_{n-k:n}$ e o estimador em (4.7) é o estimador de Hill, em (3.6).

Vamos em seguida explicitar os factores $(1 + o_p(1))$ em (4.3) e (4.6), respectivamente. Sob a validade da condição de segunda ordem (2.25) e para sucessões k satisfazendo a condição (2.15), podemos escrever

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} + ((Y_{k-i+1:k}^\rho - 1)/\rho) A(n/k) (1 + o_p(1)) \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \ln Y_{k-i+1:k} \left(1 + (A(n/k)/\gamma) (Y_{k-i+1:k}^\rho - 1)/(\rho \ln Y_{k-i+1:k}) (1 + o_p(1)) \right) \\ &= \gamma e^{\frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}}} E_{k-i+1:k} + o_p(A(n/k)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Desta forma e com base nas equações (4.3) e (4.9), temos

$$V_{ik} - \gamma e^{\frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}}} E_{k-i+1:k} = o_p(V_{ik} - \gamma E_{k-i+1:k}). \quad (4.10)$$

Nas condições atrás indicadas, i.e., admitindo a validade da condição de variação regular de segunda ordem em (2.25) e sucessões intermédias k verificando (2.15) existem constantes γ e α tais que, para $1 \leq i \leq k$,

$$\alpha W_{ik} \stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)). \quad (4.11)$$

A equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha W_{ik} &\stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) - 1 \\ &= e^{\gamma \ln Y_{k-i+1:k} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))} - 1 \\ &= e^{\gamma \ln Y_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right)} - 1 \\ &= Y_{k-i+1:k}^{\gamma \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right)} - 1 \\ &\approx Y_{k-i+1:k}^\gamma e^{\frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}}} - 1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Com base nas equações (4.6) e (4.12) obtemos

$$\alpha W_{ik} - \left(Y_{k-i+1:k}^{\gamma e^{\frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}}}} - 1 \right) = o_p(\alpha W_{ik} - (Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1)). \quad (4.13)$$

Note-se que, para $1 \leq i \leq k$,

$$\frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} \approx -\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\rho \ln(i/k)} =: \psi_{ik} \equiv \psi(i/k) \equiv \psi_{ik}(\rho) \quad [\psi_k \equiv 1]. \quad (4.14)$$

Lema 4.1 (Gomes et al. [51]) Para qualquer $\rho < 0$, $\psi(u) = -(u^{-\rho} - 1)/(\rho \ln u)$, em (4.14), é uma função limitada, crescente em $u \in [0, 1]$, assumindo valores no intervalo $[0, 1]$, tendo-se

$$s_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\rho} \int_0^1 \frac{x^{-\rho} - 1}{\ln x} dx = -\frac{\ln(1 - \rho)}{\rho}. \quad (4.15)$$

Demonstração: Dado que $d\psi(u)/du = (1 - u^{-\rho} + u^{-\rho} \ln u^{-\rho})/(-\rho u \ln^2 u)$, e como para $0 < u < 1$, $(u^{-\rho} - 1)/u^{-\rho} < \ln u^{-\rho}$ obtemos $d\psi(u)/du > 0$. Além disso, $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = \lim_{u \rightarrow 1} \rho u^{-\rho-1}/(\rho u^{-1}) = \lim_{u \rightarrow 1} u^{-\rho} = 1$. A relação (4.15) obtém-se a partir da definição da função $\psi(u)$ juntamente com a aplicação do Teorema da derivação de um integral relativamente a um parâmetro (Abramowitz & Stegun [1]). $\square$

Considerando modelos F na subclasse de modelos de Hall-Welsh, (2.30), e ψ_{ik} a função dada na expressão (4.14), são válidas, para $1 \leq i \leq k$, respectivamente, as seguintes aproximações das equações (4.10) e (4.13),

$$V_{ik} \approx \gamma e^{\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}} E_{k-i+1:k}, \quad (4.16)$$

$$\alpha W_{ik} \approx Y_{k-i+1:k}^{\gamma e^{\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}}} - 1. \quad (4.17)$$

Esperamos assim, que os estimadores construídos com base nas aproximações (4.16) e (4.17) tenham, respectivamente, um viés inferior ao do estimador de Hill e do estimador PORT-ML.

Seja,

$$\gamma_{ik} := \gamma e^{A(n/k)\psi_i/\gamma} = \gamma e^{\beta (\frac{n}{k})^\rho \psi_{ik}}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (4.18)$$

O modelo GP com função de distribuição $GP(x; \gamma_i, \alpha)$ em (4.5) e com parâmetro de forma

γ_{ik} em (4.18), para todo $1 \leq i \leq k$, é designado de modelo de Pareto modificado (MP, do inglês “*modified Pareto*”).

4.3 Estimador dos log-excessos ponderados

Dada a validade da aproximação (4.16), a função de log-verosimilhança associada aos k log-excessos, V_{ik} , $1 \leq i \leq k$, é proporcional a

$$\mathcal{L}^*(\gamma, \beta, \rho; \underline{V}) = \exp \left(-k \ln \gamma - \beta (n/k)^\rho \sum_{i=1}^k \psi_{ik} - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k V_{ik} e^{-\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}} \right). \quad (4.19)$$

Admitindo que os parâmetros β e ρ são conhecidos, a maximização da equação $\mathcal{L}^*$ em ordem a γ permite-nos obter um novo estimador para γ que é uma combinação ponderada dos log-excessos,

$$WLE_{\beta, \rho}(k) = \hat{\gamma}_n^{WLE}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}} V_{ik}. \quad (4.20)$$

Sendo $(\hat{\beta}, \hat{\rho})$ dois estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem (β, ρ) calculados no nível k_1 de ordem superior a k , o número de e.o. de topo usadas na estimação de γ , e $\hat{\psi}_{ik} = -((i/k)^{-\hat{\rho}} - 1)/(\hat{\rho} \ln(i/k))$, $1 \leq i \leq k$, denotamos

$$WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\hat{\beta} (n/k)^{\hat{\rho}} \hat{\psi}_{ik}} (\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}). \quad (4.21)$$

Observação 4.2 *A classe de estimadores em (4.21), apesar de ser uma combinação linear dos log-excessos, não pertence à classe de estimadores do núcleo de Csörgő et al. [22], porque os pesos, $e^{-\hat{\beta} (n/k)^{\hat{\rho}} \hat{\psi}_{ik}}$, não são função de i e k através do quociente $\{i/k\}$. Também não pertence a uma classe mais geral de estimadores do núcleo proposta por Drees [30] porque os pesos dependem dos estimadores $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$, os quais são baseados num número de e.o. superior ao número de e.o. utilizadas na estimação do índice de cauda γ .*

4.3.1 Estimador semi-paramétrico do parâmetro de escala de segunda ordem baseado nos log-excessos

Grande parte dos estimadores do índice de cauda γ , incluindo o estimador WLE em (4.21), são obtidos através de combinações lineares dos log-excessos. Nesta Secção apresentamos um

novo estimador semi-paramétrico do parâmetro de escala de segunda ordem, β , baseado nos log-excessos V_{ik} , $1 \leq i \leq k$, em (3.1).

A derivada da função de log-verosimilhança $\mathcal{L}^*$ em ordem a β origina a seguinte equação de máxima verosimilhança,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} V_{ik} e^{-\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}} - \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} = 0.$$

Definindo,

$$B_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j e^{-\beta (n/k)^\rho \psi_{ik}} V_{ik}, \quad j \geq 0, \quad (4.22)$$

o primeiro termo da equação anterior é igual a $B_k^{(1)} - \gamma s_k$, com s_k definido em (4.15), convergindo para $\gamma(1/(1-\rho) + \ln(1-\rho)/\rho) \neq 0$, quando $n \rightarrow \infty$ (Ver Lema 4.1 e Teorema 4.1). A convergência para 0 é obtida substituindo, na segunda soma, o termo ψ_{ik} por,

$$\psi_{ik}^* = -\psi_{ik} \ln(i/k) = \frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\rho}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (4.23)$$

Lema 4.2 (Gomes *et al.* [54]) *Para qualquer $\rho < 0$, $\psi^*(u) = (u^{-\rho} - 1)/\rho$, em (4.23), é uma função limitada, decrescente em $u \in [0, 1]$, assumindo valores no intervalo $[0, -1/\rho]$, tendo-se*

$$s_k^* := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \int_0^1 (x^{-\rho} - 1) dx = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (4.24)$$

Demonstração: A demonstração do Lema 4.2 é semelhante à apresentada no Lema 4.1. $\square$

O estimador de “quasi-máxima verosimilhança” de β é então a solução da equação implícita,

$$\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik} V_{ik} e^{-\hat{\beta} (n/k)^{\hat{\rho}} \hat{\psi}_{ik}} \right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik} e^{-\hat{\beta} (n/k)^{\hat{\rho}} \hat{\psi}_{ik}} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik}^* \right) = 0.$$

Usando a aproximação de primeira ordem, $e^x = 1 + x$, quando $x \rightarrow 0$, obtém-se um estimador explícito para β dado por,

$$\hat{\beta}_V(k) \equiv \hat{\beta}_V(k; \hat{\rho}) := \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\rho}} \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik}^{\star}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik}\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik} V_{ik}\right)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik}^{\star}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik} V_{ik}\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik}^2 V_{ik}\right)}. \quad (4.25)$$

Considerando a notação,

$$C_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j V_{ik}, \quad j \geq 0, \quad (4.26)$$

o estimador $\hat{\beta}_V(k)$ é reescrito da seguinte forma,

$$\hat{\beta}_V(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\rho}} \frac{\hat{s}_k^{\star} \hat{C}_k^{(0)} - \hat{C}_k^{(1)}}{\hat{s}_k^{\star} \hat{C}_k^{(1)} - \hat{C}_k^{(2)}}.$$

Observação 4.3 A expressão funcional do estimador $\hat{\beta}_V(k)$, em (4.25), não é muito diferente da expressão do estimador $\hat{\beta}(k) \equiv \hat{\beta}_U(k)$, em (3.59), baseada nos espaçamentos das log-observações devidamente escalados, U_i , $1 \leq i \leq k$. O estimador $\hat{\beta}_U$ obtém-se facilmente a partir de $\hat{\beta}_V$ substituindo ψ_{ik} e V_{ik} por $(i/k)^{-\rho}$ e U_i , respectivamente, para $1 \leq i \leq k$.

4.4 Nova classe de estimadores de máxima verosimilhança

Os novos estimadores de máxima verosimilhança são obtidos admitindo a existência de um parâmetro α para o qual os excessos $W_{ik} = X_{n-i+1:n} - X_{n-k:n}$ são provenientes do modelo Generalizado de Pareto, em (4.5), com γ substituído por γ_{ik} , em (4.18).

Desta forma, a função de verosimilhança dos excessos associados à distribuição de Pareto modificada é proporcional a

$$L(\gamma, \alpha, \beta, \rho; \underline{W}) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^k \prod_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} (1 + \alpha W_{ik})^{-\frac{1}{\gamma} e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} - 1},$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned} \ln L(\gamma, \alpha, \beta, \rho; W_{ik}, 1 \leq i \leq k) &= k \ln \alpha - k \ln \gamma - \beta \left(\frac{n}{k}\right)^{\rho} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} - \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha W_{ik}) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} \ln(1 + \alpha W_{ik}). \end{aligned}$$

A maximização da equação anterior em ordem a γ permite obter o estimador de máxima verosimilhança de γ , $\hat{\gamma}_n^{MP}$, baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, e designado de estimador PORT-MP,

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) \equiv \hat{\gamma}_{n, \hat{\alpha}_{MP}, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{MP}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\hat{\beta}(n/k)^{\hat{\rho}} \hat{\psi}_{ik}} \ln(1 + \hat{\alpha}_{MP} W_{ik}), \quad (4.27)$$

onde $\hat{\alpha}_{MP}$ é o estimador de máxima verosimilhança de α baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, sendo $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ dois estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem, e $\hat{\psi}_{ik}$ o estimador da função ψ_{ik} dada em (4.14).

Se escolhermos um estimador $\hat{\alpha} = 1/X_{n-k:n}$ obtemos o estimador dos log-excessos ponderados WLE , em (4.21).

Considerem-se as seguintes notações:

$$B := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha W_{ik}), \quad B_{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} \ln(1 + \alpha W_{ik}), \quad (4.28)$$

$$C := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}}, \quad C_{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}}, \quad (4.29)$$

$$D := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2}, \quad D_{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^{\rho} \psi_{ik}} \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2}, \quad (4.30)$$

e as notações óbvias para $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{B}_{(j)}$, $\hat{C}_{(j)}$ e $\hat{D}_{(j)}$, $j \geq 1$. Desta forma, e com $j \geq 1$, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \alpha} &= \frac{C}{\alpha}, & \frac{\partial C}{\partial \alpha} &= \frac{D}{\alpha}, & \frac{\partial B_{(j)}}{\partial \alpha} &= \frac{C_{(j)}}{\alpha}, & \frac{\partial C_{(j)}}{\partial \alpha} &= \frac{D_{(j)}}{\alpha}, \\ \frac{\partial B}{\partial \beta} &= \frac{\partial C}{\partial \beta} = 0, & \frac{\partial B_{(j)}}{\partial \beta} &= -\frac{A(n/k) B_{(j+1)}}{\beta \gamma}, & \frac{\partial C_{(j)}}{\partial \beta} &= -\frac{A(n/k) C_{(j+1)}}{\beta \gamma}. \end{aligned}$$

O estimador de α baseado nos excessos associados à distribuição de Pareto modificada, $\hat{\alpha}_{MP}$, é a única solução da equação,

$$\hat{C} + \frac{\hat{C}_{(1)}}{\hat{B}_{(1)}} - 1 \equiv 0. \quad (4.31)$$

Como optámos pela estimação externa dos parâmetros de segunda ordem num nível k_1

adequado, o estimador $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$, em (4.27), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) = \hat{B}_{(1)} = B_{(1)} + C_{(1)} \frac{\hat{\alpha}_{MP} - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1)), \quad (4.32)$$

e, como $\partial(C + C_{(1)}/B_{(1)} - 1)/\partial\alpha = (D + D_{(1)}/B_{(1)} - (C_{(1)}/B_{(1)})^2)/\alpha$, o estimador $\hat{\alpha}_{MP} \equiv \hat{\alpha}_{MP}(k)$, em (4.31), é tal que

$$\hat{C} + \frac{\hat{C}_{(1)}}{\hat{B}_{(1)}} - 1 \equiv 0 = C + \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} - 1 + \frac{\hat{\alpha}_{MP} - \alpha}{\alpha} \left(D + \frac{D_{(1)}}{B_{(1)}} - \left(\frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \right)^2 \right) (1 + o_p(1)),$$

i.e.,

$$\frac{\hat{\alpha}_{MP} - \alpha}{\alpha} = \frac{1 - C - C_{(1)}/B_{(1)}}{D + D_{(1)}/B_{(1)} - (C_{(1)}/B_{(1)})^2} (1 + o_p(1)). \quad (4.33)$$

4.5 Propriedades assintóticas

Nesta Secção começamos por analisar o comportamento assintótico das v.a. em estudo, o qual será posteriormente utilizado na determinação das distribuições assintóticas dos estimadores *WLE* e *PORT-MP*, supondo inicialmente que todos os parâmetros são conhecidos à excepção do índice de cauda γ , e admitindo, em seguida, que procedemos à estimação adequada do vector de parâmetros (β, ρ) e (α, β, ρ) , respectivamente. Apresentamos também o comportamento assintótico da nova classe de estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem β baseada nos log-excessos, $\hat{\beta}_V(k)$.

Sejam $\{E_i\}_{i \geq 1}$ e $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial unitária e Pareto unitária, respectivamente, e sejam $E_{j:k}$ e $Y_{j:k}$ as j -ésimas ($1 \leq j \leq k$) e.o. de topo proveniente de amostras de dimensão k dos modelos exponencial unitário e Pareto unitário, respectivamente. Considerem-se as seguintes notações:

$$P_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j E_{k-i+1:k}, \quad j \geq 0, \quad (4.34)$$

$$Q_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho}, \quad j \geq 1, \quad (4.35)$$

$$R_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j (1 - e^{-\gamma E_{k-i+1:k}}), \quad j \geq 0, \quad (4.36)$$

$$Z_k^{(j)} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho}, \quad j \geq 0, \quad (4.37)$$

$$b_j := \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1} x} dx, \quad j \geq 1, \quad b_0 = 1, \quad (4.38)$$

$$c_{j,1} := \frac{1}{|\rho|^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j (1 - x^\gamma)}{\ln^j x} dx, \quad j \geq 0, \quad (4.39)$$

$$c_{j,2} := -\frac{1}{|\rho|^{j+1}} \int_0^1 \frac{x^\gamma (x^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j x} dx, \quad j \geq 0, \quad (4.40)$$

onde $\psi_{ik} := -((i/k)^{-\rho} - 1)/(\rho \ln(i/k))$ (definido em (4.14)) e $P_k^{(j)}$, $Q_k^{(j)}$, $R_k^{(j)}$ e $Z_k^{(j)}$ são v.a. assintoticamente normais.

Começamos por apresentar o seguinte resultado:

Proposição 4.1 (Gomes & Henriques Rodrigues [53]; Gomes *et al.* [54]) *O comportamento de primeira ordem das v.a. $P_k^{(j)}$, $Q_k^{(j)}$, $R_k^{(j)}$ e $Z_k^{(j)}$ dadas em (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente, é dado por*

$$\mathbb{E}(P_k^{(0)}) = b_0, \quad \mathbb{E}(Q_k^{(1)}) = b_1, \quad \mathbb{E}(R_k^{(0)}) = c_{0,1}, \quad \mathbb{E}(Z_k^{(0)}) = c_{0,2},$$

e, para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(P_k^{(j)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Q_k^{(j)}) = b_j \text{ (definido em (4.38))}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(R_k^{(j)}) &= c_{j,1} \text{ (definido em (4.39))}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_k^{(j)}) &= c_{j,2} \text{ (definido em (4.40))}. \end{aligned}$$

O comportamento de segunda ordem de $P_k^{(0)}$ e $R_k^{(0)}$ é,

$$k \mathbb{V}ar(P_k^{(0)}) = 1, \quad k \mathbb{V}ar(R_k^{(0)}) = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)}, \quad k \mathbb{C}ov(P_k^{(0)}, R_k^{(0)}) = \frac{\gamma}{(1 + \gamma)^2}. \quad (4.41)$$

Além disso,

$$\sigma_j^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} k \mathbb{V}ar(P_k^{(j)}) = \frac{2}{\rho^{2j}} \iint_{0 \leq u < v \leq 1} \left(\frac{u^{-\rho} - 1}{\ln u} \frac{v^{-\rho} - 1}{\ln v} \right)^j \frac{1 - v}{v} du dv < \infty, \quad [\sigma_0 = 1], \quad (4.42)$$

$k \text{Cov}(P_k^{(0)}, P_k^{(1)}) \sim b_1 = 1/(1 - \rho)$, sendo b_2 dado explicitamente pela expressão,

$$b_2 = b_2(\rho) = -\frac{\ln(1 - 2\rho) - 2\ln(1 - \rho)}{\rho^2}. \quad (4.43)$$

Demonstração: Para $j = 0$, $P_k^{(0)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i+1:k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i$. Logo, $\mathbb{E}(P_k^{(0)}) = 1 = b_0$, dado em (4.38). Utilizando a representação de Rényi, em (2.2), a e.o. $E_{i:n}$ associada a uma amostra i.i.d. de n v.a. exponenciais reduzidas é dada por,

$$E_{i:n} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^i \frac{E_j}{n - j + 1}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

e, para $j \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_k^{(j)}] &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \mathbb{E}[E_{k-i+1:k}] = \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j \sum_{j=i}^k \frac{1}{j} \right) \\ &= \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j \left(\frac{1}{k} \sum_{j=i}^k \frac{1}{j/k} \right) \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^j}{\rho^j} \int_{[0,1]} \left(\frac{x^{-\rho} - 1}{\ln x} \right)^j dx \int_x^1 \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1} x} dx = b_j, \text{ dado em (4.38).} \end{aligned}$$

Para as v.a. $Q_k^{(j)}$, $R_k^{(j)}$ e $Z_k^{(j)}$ definidas em (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente, temos

$$Q_k^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho}, \quad R_k^{(0)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - e^{-\gamma E_i}), \quad Z_k^{(0)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho}.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{E}(Q_k^{(1)}) = \mathbb{E} \left(\frac{Y^\rho - 1}{\rho} \right) = \frac{1}{1 - \rho} = b_1,$$

$$\mathbb{E}(R_k^{(0)}) = 1 - \mathbb{E}[e^{-\gamma E}] = 1 - \mathbb{E}(Y^{-\gamma}) = \frac{\gamma}{\gamma + 1} = c_{0,1}$$

e

$$\mathbb{E}(Z_k^{(0)}) = \mathbb{E} \left(Y^{-\gamma} \frac{Y^\rho - 1}{\rho} \right) = \frac{1}{(1 + \gamma)(1 + \gamma - \rho)} = c_{0,2}.$$

Assintoticamente, temos para $j > 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_k^{(j)}] &\sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\rho} \\ &= \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^j}{\ln^{j-1}(i/k)} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b_j, \text{ dado em (4.38),}\end{aligned}$$

e, para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_k^{(j)}] &\sim \frac{(-1)^j}{\rho^j} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{(i/k)^{-\rho} - 1}{\ln(i/k)} \right)^j (1 - (i/k)^\gamma) \right) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{|\rho|^j} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^j (1 - x^\gamma)}{\ln^j x} = c_{j,1}, \text{ dado em (4.39),}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_k^{(j)}] &\sim \frac{(-1)^j}{\rho^{j+1}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j(i/k)} (i/k)^\gamma \right) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{|\rho|^{j+1}} \int_0^1 \frac{x^\gamma (x^{-\rho} - 1)^{j+1}}{\ln^j x} = c_{j,2}, \text{ dado em (4.40),}\end{aligned}$$

ficando, desta forma, demonstrada a primeira parte da Proposição. No que diz respeito à segunda parte, $k \mathbb{V}ar(P_k^{(0)}) = \mathbb{V}ar[E] = 1$. Os restantes resultados obtêm-se facilmente: tendo em conta que $\mathbb{E}(e^{-\gamma E}) = \frac{1}{1+\gamma}$ e $\mathbb{E}(e^{-2\gamma E}) = \frac{1}{1+2\gamma}$ obtemos $k \mathbb{V}ar(R_k^{(0)}) = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)}$; e dado que $\mathbb{E}(E - E e^{-\gamma E}) = 1 - \frac{1}{(1+\gamma)^2}$, concluímos que $\mathbb{C}ov(E, 1 - e^{-\gamma E}) = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}$, ou seja, $k \mathbb{C}ov(P_k^{(0)}, R_k^{(0)}) = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}$.

Como $\mathbb{C}ov(E_{k-i+1:k}, E_{k-r+1:k}) = \mathbb{V}ar(E_{k-\max(i,r)+1:k}) = \sum_{s=\max(i,r)}^k \frac{1}{s^2}$,

$$\begin{aligned}k \mathbb{V}ar(P_k^{(j)}) &= \frac{2}{k} \sum_{1 \leq i \leq r \leq k} \psi_{ik}^j \psi_{rk}^j \mathbb{V}ar(E_{k-r+1:k}) \\ &= \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \psi(i/k)^j \left(\frac{1}{k} \sum_{r=i}^k \psi(r/k)^j \frac{1}{k} \sum_{s=r}^k \frac{1}{(s/k)^2} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 2 \iint_{0 \leq u \leq v \leq 1} \psi(u)^j \psi(v)^j \left(\frac{1-v}{v} \right) du dv,\end{aligned}$$

o valor σ_j^2 , dado em (4.42). Por último temos,

$$k \mathbb{C}ov(P_k^{(0)}, P_k^{(1)}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \psi_{jk} \mathbb{C}ov(E_{k-i+1:k}, E_{k-j+1:k})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \psi_{jk} \sum_{s=\max(i,j)}^k \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{j=1}^k \psi_{jk} \sum_{i=1}^j \sum_{s=j}^k \frac{1}{s^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_{jk} \sum_{s=j+1}^k \frac{s-j}{s^2} \right\} \\
&= \frac{1}{k} \left\{ \sum_{j=1}^k \psi_{jk} \sum_{s=j}^k \frac{j}{s^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \psi_{jk} \sum_{s=j+1}^k \frac{s-j}{s^2} \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi(u) du \int_u^1 \frac{1}{v} dv = a_1 = \frac{1}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

□

Observação 4.4 As constantes b_j , $c_{j,1}$ e $c_{j,2}$ definidas em (4.38), (4.39) e (4.40), respectivamente, satisfazem para $j = 0$ e $j = 1$ as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1; & b_1 &= \frac{1}{1-\rho}; \\
c_{0,1} &= \frac{\gamma}{1+\gamma}; & c_{1,1} &= -\frac{1}{\rho} \ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho}; \\
c_{0,2} &= \frac{1}{(1+\gamma)(1+\gamma-\rho)}; & c_{1,2} &= -\frac{1}{\rho^2} \ln \frac{(1+\gamma)(1+\gamma-2\rho)}{(1+\gamma-\rho)^2}.
\end{aligned}$$

Sabendo que a função ψ_{ik} , em (4.14), é limitada e que k é uma sequência intermédia de inteiros, as v.a. $B_k^{(j)}$, em (4.22), e $B_{(j)}$, $C_{(j)}$ e $D_{(j)}$, em (4.28), (4.29) e (4.30), respectivamente, podem ser escritas da seguinte forma, sendo $C_k^{(j)}$, a v.a. em (4.26),

$$\begin{aligned}
B_k^{(j)} &=: \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} V_{ik} \\
&= C_k^{(j)} - \beta \left(\frac{n}{k} \right)^\rho C_k^{(j+1)} (1 + o_p(1)) \\
&=: C_k^{(j)} - \frac{A(n/k)}{\gamma} C_k^{(j+1)} (1 + o_p(1)).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
B_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \ln(1 + \alpha W_{ik}) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \ln(1 + \alpha W_{ik}) - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \ln(1 + \alpha W_{ik}) (1 + o_p(1)) \\
&=: B_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} B_{j+1} (1 + o_p(1)).
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
C_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}} - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}} (1 + o_p(1)) \\
&=: C_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} C_{j+1} (1 + o_p(1)).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
D_{(j)} &:= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2} - \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2} \\
&=: D_j - \frac{A(n/k)}{\gamma} D_{j+1}(1 + o_p(1)).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Observação 4.5 *Note-se que $B \equiv B_1$, $C \equiv C_1$ e $D \equiv D_1$.*

Para as variáveis aleatórias em estudo são válidas as seguintes representações em distribuição:

Teorema 4.1 (Gomes & Henriques Rodrigues [53]; Gomes *et al.* [54]) *Admitindo a validade da condição de variação regular de segunda ordem, (2.25), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, e considerando sucessões intermédias de inteiros $k = k_n$ satisfazendo (2.15) são válidas as seguintes representações em distribuição:*

$$B_k^{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_j + \gamma \left(P_k^{(j)} - b_j \right) + o_p(A(n/k)), \tag{4.48}$$

$$C_k^{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_j + \gamma \left(P_k^{(j)} - b_j \right) + b_{j+1} A(n/k)(1 + o_p(1)), \tag{4.49}$$

$$B_j \stackrel{d}{=} \gamma b_{j-1} + \gamma \left(P_k^{(j-1)} - b_{j-1} \right) + b_j A(n/k)(1 + o_p(1)), \tag{4.50}$$

$$B_{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_{j-1} + \gamma \left(P_k^{(j-1)} - b_{j-1} \right) + o_p(A(n/k)), \tag{4.51}$$

$$C_j \stackrel{d}{=} c_{j-1,1} + \left(R_k^{(j-1)} - c_{j-1,1} \right) + c_{j-1,2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \tag{4.52}$$

$$C_{(j)} \stackrel{d}{=} c_{j-1,1} + \left(R_k^{(j-1)} - c_{j-1,1} \right) + \left(c_{j-1,2} - \frac{c_{j,1}}{\gamma} \right) A(n/k)(1 + o_p(1)), \tag{4.53}$$

com b_j , $c_{j,1}$ e $c_{j,2}$ definidos em (4.38), (4.39) e (4.40), respectivamente. Além disso,

$$D \equiv D_1 \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{(1 + \gamma)(1 + 2\gamma)} + o_p(1). \tag{4.54}$$

Consequentemente

$$1 - C - \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{(1 + \gamma)\sqrt{1 + 2\gamma}} \frac{S_k}{\sqrt{k}} + \frac{\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1 + o_p(1)), \tag{4.55}$$

com S_k assintoticamente normal padrão. Temos ainda que

$$D + \frac{D_{(1)}}{B_{(1)}} - \left(\frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \right)^2 \stackrel{d}{=} \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)} + o_p(1). \tag{4.56}$$

Demonstração: Começemos por $C_k^{(j)}$. Como

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} + ((Y_{k-i+1:k}^\rho - 1)/\rho) A(n/k) (1 + o_p(1)),$$

então

$$C_k^{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j V_{ik} \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j E_{k-i+1:k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)).$$

A representação (4.49) é obtida por aplicação dos resultados apresentados na Proposição 4.1. A representação em distribuição (4.48) obtém-se com base na equação (4.44) e na representação (4.49).

Analisamos agora as v.a. associadas aos log-excessos, começando por B_j . Dado que

$$\begin{aligned} \alpha W_{ik} &\stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)), \\ 1 + \alpha W_{ik} &\stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right), \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \ln(1 + \alpha W_{ik}) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} E_{k-i+1:k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Aplicando os resultados obtidos na Proposição 4.1 sobre a convergência assintótica de $P_k^{(j)}$ e $Q_k^{(j)}$, obtemos (4.50). De modo análogo,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}} &\stackrel{d}{=} \frac{Y_{k-i+1:k}^\gamma - 1 + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^\gamma \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1))}{Y_{k-i+1:k}^\gamma \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right)} \\ &= \left(1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) \\ &\quad \times \left(1 - A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) \end{aligned}$$

$$= 1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{\alpha W_{ik}}{1 + \alpha W_{ik}} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} (1 - e^{-\gamma E_{k-i+1:k}}) \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

obtendo-se (4.52). As representações em distribuição (4.51) e (4.53) obtêm-se facilmente a partir dos resultados obtidos anteriormente para as v.a. B_j e C_j , juntamente com (4.45) e (4.46). Por último,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2} &\stackrel{d}{=} \frac{1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1))}{Y_{k-i+1:k}^{\gamma} \left(1 + A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right)^2} \\ &= \left(Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} (1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma}) + A(n/k) Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) \\ &\quad \times \left(1 - 2A(n/k) \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) \\ &= Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} (1 - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma}) \\ &\quad + A(n/k) \left(2Y_{k-i+1:k}^{-2\gamma} - Y_{k-i+1:k}^{-\gamma} \right) \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho} - 1}{\rho} (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} D \equiv D_1 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha W_{ik}}{(1 + \alpha W_{ik})^2} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\gamma E_i} (1 - e^{-\gamma E_i}) \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(2Y_i^{-2\gamma} - Y_i^{-\gamma} \right) \frac{Y_i^{\rho} - 1}{\rho} A(n/k) (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

obtendo-se a igualdade em distribuição (4.54), bem como o restante do Teorema. De facto,

$$1 - C - \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{(P_k^{(0)} - b_0)}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma)(R_k^{(0)} - c_{0,1})}{\gamma} \right) + \frac{c_{1,1} - \gamma(1 + \gamma)c_{0,2}}{\gamma^2} A(n/k) (1 + o_p(1)),$$

ou seja,

$$1 - C - \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{(P_k^{(0)} - 1)}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma) \left(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)}{\gamma} \right) + \frac{\ln \frac{(1 + \gamma)(1 - \rho)}{1 + \gamma - \rho} - \frac{\gamma}{1 + \gamma - \rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1 + o_p(1)),$$

e com base na Proposição 4.1,

$$\mathbb{V}ar \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma) \left(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)}{\gamma} \right) = \frac{\gamma^2}{k(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)},$$

obtendo-se (4.55). O resultado (4.56) obtém-se facilmente a partir de (4.50), (4.52) e (4.54). $\square$

Suponhamos, então, que conhecemos todos os parâmetros à excepção do índice de cauda γ . Neste caso é válido o seguinte Teorema,

Teorema 4.2 (Gomes *et al.* [51]; Gomes & Henriques Rodrigues [53]) *Supondo que se verifica a condição de segunda ordem (2.25) e que k é uma sucessão intermédia verificando (2.15) obtém-se para as v.a. $WLE(k) \equiv WLE_{\beta, \rho}(k)$, em (4.20), e $\hat{\gamma}_{n, \alpha, \beta, \rho}^{MP}(k)$, com $\hat{\gamma}_{n, \hat{\alpha}_{MP}, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{MP}(k)$ em (4.27), denotadas por $\hat{\gamma}^{RB}(k)$, a seguinte representação em distribuição*

$$\hat{\gamma}^{RB}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} N_k + R_k^{RB}, \quad R_k^{RB} = o_p(A(n/k)), \quad (4.57)$$

onde N_k é assintoticamente normal padrão. Desta forma, a v.a. $\sqrt{k} (\hat{\gamma}^{RB}(k) - \gamma)$ segue distribuição assintótica normal com valor médio nulo e variância igual a γ^2 quando $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow 0$, e também quando $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda \neq 0$, finito. Além disso, a v.a. $\sqrt{k} (\hat{\gamma}^{RB}(k) - \gamma)$ ainda é assintoticamente normal para níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \infty$ desde que $\sqrt{k} R_k^{RB} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Com base nas igualdades (4.8) e (4.11) temos, respectivamente,

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} + ((Y_{k-i+1:k}^\rho - 1)/\rho) A(n/k) (1 + o_p(1))$$

e

$$\ln(1 + \alpha W_{ik}) \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho \ln Y_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right).$$

Logo, os estimadores $WLE(k)$ e $\hat{\gamma}_{n,\alpha,\beta,\rho}^{MP}(k)$ podem ser reescritos da seguinte forma

$$\begin{aligned} WLE(k) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik} - \beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} V_{ik}\right) (1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} \gamma P_k^{(0)} + A(n/k) (Q_k^{(1)} - P_k^{(1)}) (1 + o_p(1)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{n,\alpha,\beta,\rho}^{MP}(k) &\stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i+1:k} \left(1 + \frac{A(n/k)}{\gamma} \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho E_{k-i+1:k}} (1 + o_p(1)) \right) \left(1 - \frac{A(n/k)}{\gamma} \psi_{ik} (1 + o(1)) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \gamma P_k^{(0)} + A(n/k) (Q_k^{(1)} - P_k^{(1)}) (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

sendo $P_k^{(j)}$, $j = 0, 1$ e $Q_k^{(1)}$ v.a. definidas em (4.34) e (4.35), respectivamente. Pela Proposição 4.1 sabemos que $\mathbb{E}[P_k^{(1)}] = \mathbb{E}[Q_k^{(1)}] = b_1$. Logo, a v.a. $(Q_k^{(1)} - P_k^{(1)})$ converge em probabilidade para 0, quando $k \rightarrow \infty$, e, definindo $N_k = \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_k^{(0)} - 1 \right)$, obtemos a representação em distribuição (4.57). $\square$

Observação 4.6 O termo $R_k^{RB} = o_p(A(n/k))$ relativo ao estimador $WLE(k) \equiv WLE_{\beta,\rho}(k)$, em (4.20), é apresentado no Teorema 5.1, em contexto de terceira ordem.

Se estimarmos ρ e β externamente, de uma forma adequada no nível k_1 de ordem superior a k , o nível utilizado na estimação do índice de cauda, a variância assintótica do estimador de viés reduzido WLE ainda é igual à variância assintótica do estimador de Hill.

Teorema 4.3 (Gomes et al. [51]) Nas condições do Teorema 4.2, sendo $(\hat{\rho}, \hat{\beta}) = (\hat{\rho}(k_1; \tau), \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho}))$, com $\hat{\rho}(k; \tau)$ e $\hat{\beta}(k; \rho)$ definidos em (3.49) e (3.59), respectivamente, com $k_1 > k$ tal que a condição (3.56) é válida, denote-se por $\hat{R}_n(k; k_1) := WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - WLE_{\beta, \rho}(k)$. Temos

$$\hat{R}_n(k; k_1) \stackrel{p}{\sim} -A(n/k) \left((\hat{\beta} - \beta)/\beta + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right) / (1 - \rho) \quad (4.58)$$

$$\stackrel{p}{\sim} A(n/k) (\hat{\rho} - \rho) \ln(k/k_1) / (1 - \rho), \quad (4.59)$$

Logo, a representação em distribuição do Teorema 4.2 é válida para o estimador do índice de cauda $WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ em (4.21), com R_k^{RB} substituído por $\{R_k^{RB} + \hat{R}_n(k; k_1)\}$, i.e., $\sqrt{k}(WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$ é assintoticamente normal com variância γ^2 e valor médio nulo quando

$\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow 0$, mas também para níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda \neq 0$, finito, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Como queremos utilizar o método delta necessitamos de calcular derivadas parciais. Note-se que $\partial \psi_{ik}(\rho)/\partial \rho = \left(1 - \psi_{ik} - \rho \psi_{ik} \ln(i/k)\right)/\rho$.

Denotando $W := WLE_{\beta, \rho}(k)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)_{(\beta, \rho)} &= -\left(\frac{n}{k}\right)^\rho \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} e^{-\beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \psi_{ik}} V_{ik} \right\}, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{(\beta, \rho)} &= -\beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{\rho} + \psi_{ik} \left(\ln(n/k) - \frac{1}{\rho} - \ln(i/k) \right) \right] e^{-\beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \psi_{ik}} V_{ik} \right\}. \end{aligned}$$

Como $e^{-\beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \psi_{ik}}$ converge para 1 (Lema 4.1), temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)_{(\beta, \rho)} &= -(1 + o(1)) A(n/k) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} V_{ik} \right) / (\beta \gamma), \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{(\beta, \rho)} &= -(1 + o(1)) \frac{A(n/k)}{\gamma} \left\{ \ln(n/k) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik} V_{ik} \right. \\ &\quad \left. + \rho^{-1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [1 - \psi_{ik} - \rho \psi_{ik} \ln(i/k)] V_{ik} \right\}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.1 e sabendo que os log-excessos V_{ik} satisfazem (4.8),

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)_{(\beta, \rho)} \stackrel{p}{\sim} -\frac{b_1 A(n/k)}{\beta} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{(\beta, \rho)} \stackrel{p}{\sim} -b_1 A(n/k) \ln(n/k),$$

com b_1 dado na Proposição 4.1. Estas relações são também válidas para $\rho < 0$ e $\beta \neq 0$, com ρ substituído por alguma sucessão $\rho_n \rightarrow \rho$ ($n \rightarrow \infty$) e β substituído por $\beta_n \rightarrow \beta$ ($n \rightarrow \infty$), desde que $(\rho_n - \rho) \ln n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), i.e., desde que a condição (3.56) seja satisfeita. Temos então,

$$\begin{aligned} WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}} - WLE_{\beta, \rho} &= (WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}} - WLE_{\hat{\beta}, \rho}) - (WLE_{\hat{\beta}, \rho} - WLE_{\beta, \rho}) \\ &= (\hat{\rho} - \rho) \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{(\hat{\beta}, \rho + \theta_1(\hat{\rho} - \rho))} + (\hat{\beta} - \beta) \left(\frac{\partial W}{\partial \beta}\right)_{(\beta + \theta_2(\hat{\beta} - \beta), \rho)}, \end{aligned}$$

para $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$. Logo,

$$WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - WLE_{\beta, \rho}(k) \stackrel{p}{\sim} -b_1 A(n/k) \left((\hat{\beta} - \beta)/\beta + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right),$$

obtendo-se (4.58). Sendo $\hat{\beta}$ um estimador de β verificando a condição (3.67) obtemos (4.59). A condição (3.56) permite-nos garantir que $\hat{R}_n(k; k_1) = o_p(A(n/k))$, i.e., que a representação em distribuição (4.57) é válida, bem como o resto do Teorema. $\square$

Observação 4.7 *Os resultados apresentados no Teorema anterior permitem ultrapassar o compromisso, até agora existente, entre a variância e o viés. Conseguimos reduzir a componente dominante do viés sem aumentar a variância assintótica. Desta forma, esperamos que o estimador WLE tenha EQM inferiores aos do estimador de Hill, para todos os valores de k . A metodologia apresentada é robusta para mudanças no nível k_1 , desde que se proceda, à priori, à escolha adequada do parâmetro de controlo τ usado na estimação de ρ , em (3.49).*

Observação 4.8 *A variância assintótica do estimador WLE é igual a γ^2 , a variância assintótica do estimador de Hill. Logo, o estimador WLE diz-se um estimador de viés reduzido de variância mínima (MVRB, do inglês “minimum-variance reduced-bias”).*

Analizamos em seguida as condições necessárias para garantir o mesmo comportamento assintótico de $\sqrt{k} (WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$, em níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \infty$.

Proposição 4.2 (Gomes *et al.* [51]) *Nas condições do Teorema 4.2, para modelos na classe de Hall-Welsh, (2.29), sendo $(\hat{\rho}, \hat{\beta}) = (\hat{\rho}(k_1; \tau), \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho}))$, com $\sqrt{k_1} A(n/k_1) \rightarrow \infty$, $\hat{\rho}(k; \tau)$ e $\hat{\beta}(k; \rho)$ dados em (3.49) e (3.59), respectivamente, $\sqrt{k} (WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$ é assintoticamente normal com variância igual a γ^2 , se k_1 e k são tais que, quando $n \rightarrow \infty$,*

1. $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow 0$, a condição (3.56) é satisfeita e $k = o(k_1)$, ou
2. $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \lambda_{B_1}$, finito, não-nulo, e $k = o(k_1)$, ou
3. $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \infty$, a condição (3.56) é satisfeita e $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito.

Demonstração:

1. Se $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow 0$, é necessário impor a condição (3.56) para que a relação (4.58) seja válida. Como $\hat{\rho} - \rho = O_p(1/(\sqrt{k_1} A(n/k_1)))$, e

$$\sqrt{k} \hat{R}_n(k; k_1) \stackrel{p}{\sim} \frac{b_1 \sqrt{k} A(n/k)}{\sqrt{k_1} A(n/k_1)} \ln(k/k_1) \sim b_1 (k/k_1)^{\frac{1}{2}-\rho} \ln(k/k_1),$$

com $b_1 = 1/(1 - \rho)$, temos de ter $k/k_1 \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, para que $\sqrt{k} \hat{R}_n(k; k_1) \xrightarrow{p} 0$.

2. Se $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \lambda_{B_1}$, finito, $\hat{\rho} - \rho = O_p(1/(\sqrt{k_1} A(n/k_1))) = o_p(1/\ln n)$ (veja-se Observação 4.9). Tal como observado na alínea 1., $\sqrt{k} \hat{R}_n(k; k_1) \xrightarrow{p} 0$, desde que $k/k_1 \rightarrow 0$.
3. Se $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \infty$, $\hat{\rho} - \rho = O_p(B(n/k_1))$, então

$$\sqrt{k} \hat{R}_n(k; k_1) \stackrel{p}{\sim} b_1 \sqrt{k} A(n/k) B(n/k_1) \ln(k/k_1).$$

Para estes valores elevados de k_1 , se impusermos as condições $B(n/k_1) \ln n = o(1)$ (ou de forma equivalente, $\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$) e $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, obtemos $\sqrt{k} \hat{R}_n(k; k_1) \xrightarrow{p} 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

□

Observação 4.9 Considerando modelos F na classe (2.29), se $\sqrt{k_1} A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \lambda_{B_1}$, finito, não-nulo (alínea 2. da Proposição 4.2), $k_1 = O(n^{-2(\rho+\rho')/(1-2(\rho+\rho'))})$ e $\sqrt{k_1} A(n/k_1) = O(n^{-\rho/(1-2(\rho+\rho'))})$. Então $\hat{\rho} - \rho = O_p(1/(\sqrt{k_1} A(n/k_1))) = O_p(n^{\rho/(1-2(\rho+\rho'))})$, i.e., $\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$. Neste caso não é necessário impormos a condição (3.56), uma vez que é trivialmente verificada. No entanto, para valores pequenos ou elevados de k_1 , como nas alíneas 1. e 3. da Proposição 4.2, é necessário impor a condição (3.56), i.e., a sucessão k_1 a escolher deve ser tal que $(\hat{\rho} - \rho) \ln n = o_p(1)$ para que $\hat{R}_n(k; k_1) = o_p(A(n/k))$, mantendo assim a variância assintótica de $WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$ igual a γ^2 .

Suponhamos agora que $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ são dois estimadores quaisquer dos parâmetros de segunda ordem β e ρ , respectivamente. Nestas condições é válido o seguinte Corolário:

Corolário 4.1 (Gomes et al. [51]) Nas condições do Teorema 4.2, a representação em distribuição (4.57) mantém-se válida se considerarmos o estimador do índice de cauda $WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, em (4.21), para estimadores $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ tais que $\{\hat{\beta} - \beta\} = o_p(1)$ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1)$. Além disso, a variância assintótica de $WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ ainda é igual a γ^2 se supusermos que $\{\hat{\beta} - \beta\} = o_p(1/(\sqrt{k} A(n/k)))$ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1/(\sqrt{k} A(n/k)))$, para os níveis k utilizados na estimação de γ . As condições anteriores são triviais para níveis k tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito.

Demonstração: Se os estimadores $(\hat{\beta}, \hat{\rho})$ são consistentes para a estimação de (β, ρ) , e $\hat{\rho}$ é tal que $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1)$, os termos do segundo membro da expressão (4.58) são todos

$o_p(A(n/k))$. Para que a variância assintótica de $WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ se mantenha igual a γ^2 é necessário impor duas condições adicionais ao Corolário, as condições $\{\hat{\beta} - \beta\} = o_p(1/(\sqrt{k} A(n/k)))$ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1/(\sqrt{k} A(n/k)))$, condições estas que são de fácil verificação quando $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito. $\square$

Apresentamos em seguida o comportamento assintótico do estimador $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$. Note-se que o resultado obtido no Teorema 4.2 também é válido para $\hat{\gamma}_{n, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{MP}$ se supusermos que α é conhecido e que os parâmetros de segunda ordem ρ e β são estimados de forma adequada, i.e., se $\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$, i.e., a condição (3.56) é satisfeita, e $\hat{\beta} - \beta = o_p(1)$, para todo o k utilizado na estimação de $\hat{\gamma}_{n, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{MP}(k)$, i.e., níveis k tais que $k = o(n)$ e $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$. Procedendo à estimação conjunta de γ e α via máxima verosimilhança é válido o seguinte Teorema:

Teorema 4.4 (Gomes & Henriques Rodrigues [53]) *Nas condições do Teorema 4.2, com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, são válidas as seguintes representações em distribuição:*

$$\frac{\hat{\alpha}_{MP}(k) - \alpha}{\alpha} \stackrel{d}{=} \frac{(1+\gamma)\sqrt{1+2\gamma}}{\gamma\sqrt{k}} S_k + \frac{(1+\gamma)^2(1+2\gamma) \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)}{\gamma^4} A(n/k)(1+o_p(1)), \quad (4.60)$$

e desde que $\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n)$ e $\hat{\beta} - \beta = o_p(1)$,

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{(1+\gamma)}{\sqrt{k}} V_k + \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma) \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)}{\gamma^3} A(n/k)(1+o_p(1)), \quad (4.61)$$

com S_k e V_k assintoticamente normais padrão.

Demonstração: No Teorema 4.1 obtivemos

$$1 - C_1 - \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1+\gamma} - \frac{(1+\gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1+\gamma})}{\gamma} \right) + \frac{\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho}}{\gamma^2} A(n/k)(1+o_p(1)).$$

Como

$$D_1 + \frac{D_{(1)}}{B_{(1)}} - \left(\frac{C_{(1)}}{B_{(1)}} \right)^2 \stackrel{d}{=} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2(1+2\gamma)} + o_p(1)$$

$$\text{e } \frac{\hat{\alpha}_{MP}(k) - \alpha}{\alpha} = \frac{1 - C_1 - \frac{C_{(1)}}{B_{(1)}}}{D_1 + \frac{D_{(1)}}{B_{(1)}} - \left(\frac{C_{(1)}}{B_{(1)}}\right)^2}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\alpha}_{MP}(k) - \alpha}{\alpha} &\stackrel{d}{=} \frac{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma)}{\gamma^2} \left(\frac{P_k^{(0)} - 1}{1 + \gamma} - \frac{(1 + \gamma)(R_k^{(0)} - \frac{\gamma}{1 + \gamma})}{\gamma} \right) \\ &\quad + \frac{(1 + \gamma)^2(1 + 2\gamma) \left(\ln \frac{(1 + \gamma)(1 - \rho)}{1 + \gamma - \rho} - \frac{\gamma}{1 + \gamma - \rho} \right)}{\gamma^4} A(n/k)(1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Com base na estrutura de covariância entre $P_k^{(0)}$ e $R_k^{(0)}$, apresentada na Proposição 4.1, obtemos (4.60).

Por último, dado que $\hat{\gamma}_n^{MP}(k) = B_{(1)} + C_{(1)} \frac{\hat{\alpha}_{MP}(k) - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1))$, podemos escrever

$$\hat{\gamma}_n^{MP}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \gamma(P_k^{(0)} - 1) + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{\hat{\alpha}_{MP}(k) - \alpha}{\alpha} (1 + o_p(1)),$$

obtendo-se (4.61). □

Observação 4.10 *O comportamento assintótico do estimador $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, em (4.7), foi obtido por Smith [93] considerando o nível u fixo. O resultado obtido no seu Teorema 3.2 foi reescrito por Gomes [46] no contexto de um nível $X_{n-k:n}$ aleatório, obtendo-se, sob a validade da condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), a seguinte representação em distribuição*

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{(1 + \gamma)}{\sqrt{k}} M_k + \frac{(1 + \gamma)(\gamma + \rho)}{\gamma(1 - \rho)(1 + \gamma - \rho)} \frac{A(n/k)}{(1 + o_p(1))}, \quad (4.62)$$

com M_k assintoticamente normal padrão. Detalhes sobre a estimação de máxima verosimilhança de $\gamma \in \mathbb{R}$ podem ser encontrados em Drees et al. [33].

Observação 4.11 *Relativamente ao resultado de Smith expresso em (4.62), obtemos um viés assintótico diferente e comparando as representações em distribuição (4.57) e (4.61) observamos que, apesar de a estimação dos parâmetros de segunda ordem ser realizada de uma forma adequada, o viés obtido em (4.61) não é de ordem inferior a $A(n/k)$, como pretendido, e a variância assintótica aumenta ligeiramente.*

Finalizamos esta Secção analisando o comportamento assintótico do estimador de β baseado nos log-excessos, $\hat{\beta}_v(k; \hat{\rho})$, em (4.25):

Teorema 4.5 (Gomes et al. [54]) Para modelos F na classe de Hall-Welsh (2.29), sendo $\hat{\rho}$ um estimador consistente de ρ , k uma sucessão intermédia satisfazendo (2.15) tal que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$, com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, o estimador $\hat{\beta}_V(k; \hat{\rho})$, em (4.25), converge em probabilidade para β quando $n \rightarrow \infty$. Se supusermos que o estimador $\hat{\rho}$ satisfaz a condição (3.56) e que F pertence à subclasse de Hall-Welsh, em (2.30), então $\hat{\beta}_V(k; \hat{\rho})$ é assintoticamente normal quando $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, finito, quando $n \rightarrow \infty$. O desvio padrão assintótico de $\hat{\beta}_V(k)$ é,

$$\sigma_{\hat{\beta}_V} = \frac{\gamma |\beta| \sqrt{\sigma_1^2 - b_1^2}}{b_1^2 - b_2}, \quad (4.63)$$

com σ_1^2 e b_j , $j = 1, 2$ dados na Proposição 4.1. A velocidade de convergência de $\hat{\beta}_V(k; \hat{\rho})$ para β é da ordem de $\ln(n/k)/(\sqrt{k}A(n/k))$ para estimadores $\hat{\rho}(k) = O_p(1/(\sqrt{k}A(n/k)))$.

Demonstração: O estimador $\hat{\beta}_V(k; \rho)$ pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\frac{\hat{\beta}_V(k; \rho)}{\beta} = \frac{\gamma}{A(n/k)} \frac{s_k^* C_k^{(0)} - C_k^{(1)}}{s_k^* C_k^{(1)} - C_k^{(2)}},$$

com $C_k^{(j)}$ dado em (4.26). Pelo Lema 4.2, $s_k^* \rightarrow \frac{1}{1-\rho} = b_1$, em (4.38), logo

$$\frac{A(n/k) \hat{\beta}_V(k; \rho)}{\gamma \beta} = \frac{b_1 C_k^{(0)}(1 + o(1)) - C_k^{(1)}}{b_1 C_k^{(1)}(1 + o(1)) - C_k^{(2)}}.$$

Pelo Teorema 4.1 temos

$$C_k^{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_j + \gamma (P_k^{(j)} - b_j) + b_{j+1} A(n/k)(1 + o_p(1)).$$

Definindo a v.a.

$$\bar{P}_k^{(j)} = \sqrt{k}(P_k^{(j)} - b_j)/\sigma_j^2, \quad (4.64)$$

com $P_k^{(j)}$, b_j e σ_j^2 definidos em (4.34), (4.38) e (4.42), respectivamente, $\bar{P}_k^{(j)}$ é assintoticamente normal padrão, e

$$C_k^{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_j + \frac{\gamma \sigma_j}{\sqrt{k}} \bar{P}_k^{(j)} + b_{j+1} A(n/k)(1 + o_p(1)).$$

Logo,

$$\frac{A(n/k) \hat{\beta}_V(k; \rho)}{\gamma \beta} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{\gamma}{\sqrt{k}} (b_1 \bar{P}_k^{(0)} - \sigma_1 \bar{P}_k^{(1)}) + (b_1^2 - b_2) A(n/k) + o_p(A(n/k))}{\gamma (b_1^2 - b_2)(1 + o_p(1))}$$

e portanto

$$\frac{\hat{\beta}_V(k; \rho)}{\beta} \stackrel{d}{=} 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}A(n/k)} \left(\frac{b_1 \bar{P}_k^{(0)} - \sigma_1 \bar{P}_k^{(1)}}{b_1^2 - b_2} \right) + R_k^V, \text{ com } R_k^V = o_p(1),$$

i.e., $\hat{\beta}_V(k; \rho)$ converge em probabilidade para β para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. O resultado apresentado ainda é válido se substituirmos ρ por $\hat{\rho}$, um estimador consistente de ρ . Aplicando os resultados obtidos na Proposição 4.1 e dado que $k \text{Cov}(\bar{P}_k^{(0)}, \bar{P}_k^{(1)}) = b_1/\sigma_1$ obtém-se (4.63). Recorrendo ao método delta e sendo $\hat{\rho}$ um estimador consistente de ρ satisfazendo a condição (3.56) temos

$$\frac{d \hat{\beta}_V(k; \rho)}{d \rho} = -\hat{\beta}_V(k; \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1))$$

logo,

$$\hat{\beta}_V(k; \hat{\rho}) \stackrel{d}{=} \hat{\beta}_V(k; \rho) - \hat{\beta}_V(k; \rho)(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)),$$

obtendo-se o restante do Teorema. □

Observação 4.12 Nas condições do Teorema 4.5, Gomes & Martins [57] mostraram que o desvio padrão do estimador $\hat{\beta}_U(k; \rho) \equiv \hat{\beta}(k; \rho)$, em (3.59), é $\sigma_{\hat{\beta}_U} = \gamma |\beta| (1 - \rho) \sqrt{1 - 2\rho}/|\rho|$. Na Figura 4.1 ilustramos o comportamento dos desvios padrões dos estimadores $\hat{\beta}_U(k; \rho)$ e $\hat{\beta}_V(k; \rho)$ dados em (3.59) e (4.25), respectivamente. Como se pode observar as diferenças registradas não são relevantes.

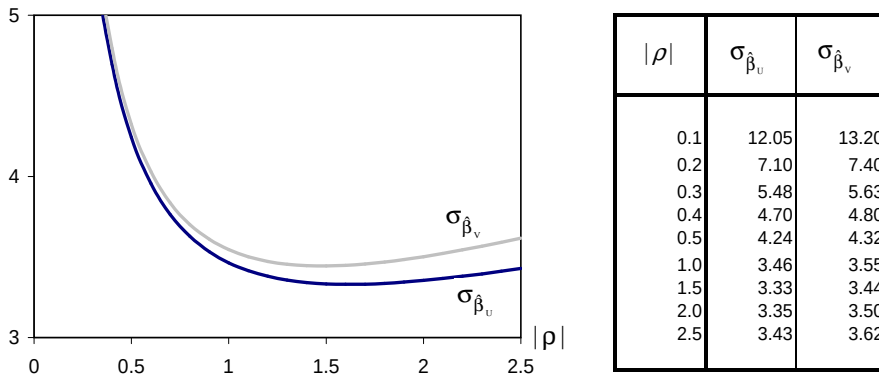


Figura 4.1: Desvios padrões assintóticos de $\hat{\beta}_U(k; \rho)$ e $\hat{\beta}_V(k; \rho)$ para um modelo com $\gamma = \beta = 1$.

4.5.1 Comparação assintótica nos níveis óptimos dos estimadores de máxima verosimilhança

Nesta Secção efectuamos uma comparação assintótica nos níveis óptimos dos estimadores $\hat{\gamma}_n^{MP}$ e $\hat{\gamma}_n^{ML}$, em (4.27) e (4.61), respectivamente. A abordagem seguida é semelhante à de de Haan & Peng [75], Gomes & Martins [56], Gomes *et al.* [61, 62] e Gomes & Neves [63].

Suponhamos que $\hat{\gamma}_n^\bullet(k)$ é um estimador semi-paramétrico genérico do índice de cauda, verificando a seguinte representação assintótica em distribuição,

$$\hat{\gamma}_n^\bullet(k) = \gamma + \frac{\sigma_\bullet}{\sqrt{k}} Z_n^\bullet + b_\bullet A(n/k) + o_p(A(n/k)), \quad (4.65)$$

válida para sucessões intermédias k em (2.15), e onde $Z_n^\bullet$ é assintoticamente normal padrão. Temos,

$$\sqrt{k}[\hat{\gamma}_n^\bullet(k) - \gamma] \xrightarrow{d} \mathbb{N}(\lambda b_\bullet, \sigma_\bullet^2), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$.

O erro quadrático médio assintótico, $AMSE$, é dado por,

$$AMSE[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)] := \frac{\sigma_\bullet^2}{k} + b_\bullet^2 A^2(n/k),$$

onde $Viés_\infty[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)] := b_\bullet A(n/k)$ e $Var_\infty[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)] := \sigma_\bullet^2/k$.

Seja $k_0^\bullet := \arg \inf_k AMSE[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)]$ o nível óptimo para a estimação de γ através do estimador $\hat{\gamma}_n^\bullet(k)$, i.e., o nível com o menor erro quadrático médio assintótico, e denote-se por $\hat{\gamma}_{n0}^\bullet := \hat{\gamma}_n^\bullet(k_0^\bullet(n))$, o estimador calculado no respectivo nível óptimo. Recorrendo a resultados sobre a teoria de Variação Regular (Bingham *et al.* [10]), Dekkers & de Haan [28] mostraram que, quando $b_\bullet \neq 0$, existe uma função $\varphi(n) = \varphi(n; \rho, \gamma)$, dependente do modelo subjacente aos dados, e não do estimador, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) AMSE[\hat{\gamma}_{n0}^\bullet] = \frac{2\rho - 1}{2\rho} (\sigma_\bullet^2)^{-\frac{2\rho}{1-2\rho}} (b_\bullet^2)^{\frac{1}{1-2\rho}} =: LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^\bullet], \quad (4.66)$$

onde $LMSE$ representa o erro quadrático médio limite (do inglês “*limiting mean-squared error*”).

Para cada $\rho \leq 0$, existe uma função positiva e decrescente $s(\cdot) \in RV_{2\rho-1}$, quando $t \rightarrow \infty$,

tal que, $A^2(t) \sim \int_t^{+\infty} s(u)du$ (Proposição 1.7.3 de Geluk & de Haan [43]). Definindo $r := n/k$, $b \neq 0$ e pelo Lema 2.9 de Dekkers & de Haan [28], temos,

$$\inf_{r>0} \left\{ r \frac{\sigma_{\bullet}^2}{n} + b_{\bullet}^2 A^2(r) \right\} = \inf_{r>0} \left\{ r \frac{\sigma_{\bullet}^2}{n} + b_{\bullet}^2 \int_r^{+\infty} s(u)du \right\} (1 + o(1)) = \int_0^{\frac{\sigma_{\bullet}^2}{b_{\bullet}^2 n}} s^{\leftarrow}(u)du (1 + o(1)).$$

Sendo $r_0^{\bullet} = n/k_0^{\bullet}$, como $s^{\leftarrow}(1/t) \in RV_{-\frac{1}{2\rho-1}}$,

$$r_0^{\bullet} = \arg \inf_{r>0} \left\{ r \frac{\sigma_{\bullet}^2}{n} + b_{\bullet}^2 A^2(r) \right\} = s^{\leftarrow} \left(\frac{\sigma_{\bullet}^2}{b_{\bullet}^2 n} \right) (1 + o(1)) = \left(\frac{b_{\bullet}^2}{\sigma_{\bullet}^2} \right)^{\frac{1}{2\rho-1}} s^{\leftarrow} \left(\frac{1}{n} \right) (1 + o(1)).$$

Logo,

$$k_0^{\bullet} := \arg \inf_k AMSE[\hat{\gamma}_n^{\bullet}(k)] = \left(\frac{\sigma_{\bullet}^2}{b_{\bullet}^2} \right)^{\frac{1}{1-2\rho}} \frac{n}{s^{\leftarrow}(1/n)} (1 + o(1)) \in RV_{\frac{2\rho}{2\rho-1}},$$

e para $\varphi(n) = n/s^{\leftarrow}(1/n)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \text{Var}_{\infty}[\hat{\gamma}_{n0}^{\bullet}] = (\sigma_{\bullet}^2)^{\frac{-2\rho}{1-2\rho}} (b_{\bullet}^2)^{\frac{1}{1-2\rho}}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{\varphi(n)} \text{Viés}_{\infty}[\hat{\gamma}_{n0}^{\bullet}]| = (-2\rho)^{-1/2} (\sigma_{\bullet}^2)^{\frac{-\rho}{1-2\rho}} (b_{\bullet}^2)^{\frac{1}{1-2\rho}}$$

obtendo-se assim (4.66).

Considere-se a seguinte definição:

Definição 4.2 Dados dois estimadores $\hat{\gamma}_n^{(1)}$ e $\hat{\gamma}_n^{(2)}$ verificando a representação em distribuição (4.65) com constantes (σ_1, b_1) e (σ_2, b_2) , $b_1, b_2 \neq 0$, respectivamente, calculados nos seus níveis óptimos, $\hat{\gamma}_{n0}^{(1)} = \hat{\gamma}_n^{\bullet}(k_0^{(1)}(n))$ e $\hat{\gamma}_{n0}^{(2)} = \hat{\gamma}_n^{\bullet}(k_0^{(2)}(n))$, a raiz quadrada da eficiência assintótica, (AREFF, do inglês “asymptotic root efficiency”), de $\hat{\gamma}_n^{(1)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{(2)}$ é

$$AREFF_{1|2} \equiv AREFF_{\gamma_n^{(1)}|\gamma_n^{(2)}} := \sqrt{LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{(2)}]/LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{(1)}]},$$

com LMSE dado em (4.66).

Os níveis óptimos para a estimação de γ através dos estimadores $\hat{\gamma}_n^{ML}$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}$ denotam-se, respectivamente, por k_0^{ML} e k_0^{MP} e obtêm-se através da minimização, em ordem a k , do erro

quadrático médio assintótico dos respectivos estimadores. Assim,

$$k_0^{ML} = k_0^{ML}(\rho, \beta) := \left[\frac{(1-\rho)(1+\gamma-\rho)n^{-\rho}}{\sqrt{-2\rho}(\gamma+\rho)|\beta|} \right]^{\frac{2}{1-2\rho}} \quad (\gamma+\rho \neq 0), \quad (4.67)$$

$$k_0^{MP} = k_0^{MP}(\rho, \beta) := \left[\frac{\gamma^2 n^{-\rho}}{\sqrt{-2\rho}(1+2\gamma)|\beta| \left(\ln \frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)} \right]^{\frac{2}{1-2\rho}}. \quad (4.68)$$

Proposição 4.3 (Gomes & Henriques Rodrigues [53]) *O indicador AREFF de $\hat{\gamma}_n^{MP}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}$ é*

$$AREFF_{MP|ML} = \left| \frac{\gamma^2(\gamma+\rho)}{(1+2\gamma)(1-\rho)(1+\gamma-\rho) \left(-\frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{(1+\gamma)(1-\rho)}{1+\gamma-\rho} \right) - \frac{\gamma}{1+\gamma-\rho} \right)} \right|^{\frac{1}{1-2\rho}}.$$

Na Figura 4.2 apresentamos a medida $AREFF_{MP|ML}$.

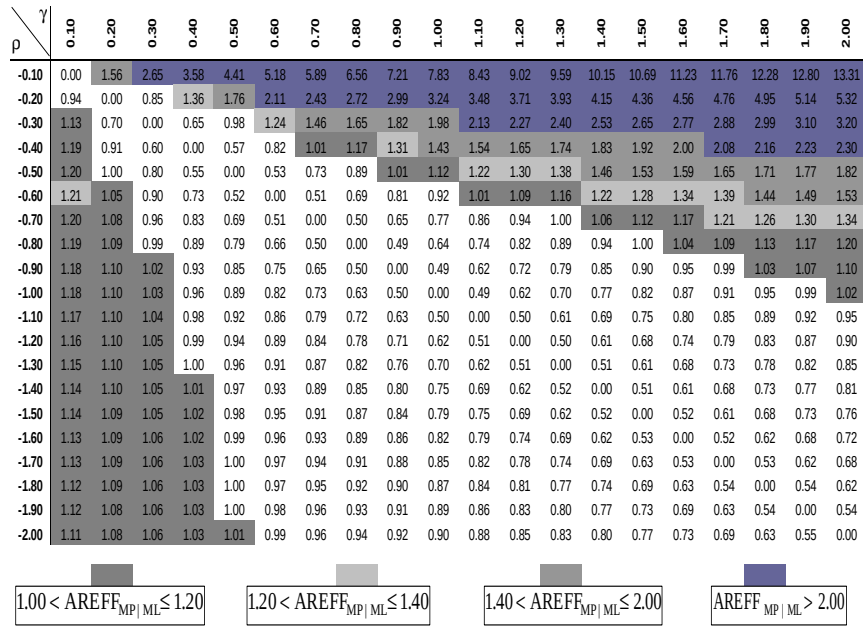


Figura 4.2: Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{MP}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}$ no plano (γ, ρ) .

Como se pode observar o estimador PORT-MP é mais eficiente que o estimador PORT-ML em duas regiões de valores de (γ, ρ) . Na primeira região temos $\gamma \leq -a\rho$, com $a < 1/2$ e na segunda temos $\gamma \geq -b\rho$ com $b \geq 2$. Na região $\gamma + \rho = 0$, o estimador PORT-ML é um estimador de viés reduzido de segunda ordem, pelo que, nos níveis óptimos é mais eficiente que o estimador

PORT-MP.

4.6 Comportamento do estimador dos log-excessos ponderados em amostras de dimensão finita

Os resultados de simulação associados ao estimador WLE foram obtidos com base numa réplica com 1000 corridas para amostras de dimensão $n = 1000$. O estimador $\hat{\rho}(k; \tau)$ em (3.49) foi calculado no nível k_1 em (3.58) e denotado por $\hat{\rho}$. Denotamos por $\hat{\beta}(k; \hat{\rho})$ as estimativas de β calculadas no nível k utilizado na estimação de γ e por $\hat{\beta} = \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho})$. As estimativas de β e ρ foram incorporadas no estimador WLE obtendo-se os estimadores $WLE_1 = WLE_{\hat{\beta}(k, \hat{\rho}), \hat{\rho}}$ e $WLE_2 = WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$. A v.a. $WLE_{\beta, \rho}$ é denotada simplesmente por WLE .

Na Figura 4.3 apresentamos as trajectórias amostrais dos estimadores WLE para um modelo Burr, $F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}$, $x \geq 0$, com $(\gamma, \rho) = (1, -0.5)$ ($\beta = 1$). As simulações mostram que o estimador WLE_2 é melhor que o estimador de Hill, qualquer que seja o valor de k e que o estimador WLE_1 , usando a estimação interna de β , é o pior estimador para valores pequenos de k apesar de, no nível óptimo ter um EQM inferior ao do estimador de Hill. Note-se ainda que para este modelo, onde $\rho = -0.5$ e para outros modelos com $|\rho| < 1$, a v.a. WLE é melhor do que qualquer estimador em análise para todo o k . Assim, deveremos utilizar os verdadeiros valores de β e ρ , caso sejam conhecidos. Por outro lado, a discrepância observada entre as trajectórias amostrais de WLE e de WLE_2 sugere a possibilidade de melhorar as estimativas dos parâmetros de segunda ordem.

As trajectórias amostrais dos estimadores WLE para o modelo Fréchet, $F(x) = \exp(-x^{-1/\gamma})$, $x > 0$, $\gamma = 1$ ($\rho = -1, \beta = 0.5$) são apresentadas na Figura 4.4. Para este modelo, as simulações mostram que a v.a. WLE não é uniformemente melhor, contrariamente ao que acontece quando $\rho \rightarrow 0$ (Figura 4.3). O estimador WLE_1 apresenta, uma vez mais, um desempenho pior do que o estimador WLE_2 . Para valores pequenos ou moderados de k deveremos utilizar os verdadeiros valores de β e ρ , caso sejam conhecidos, e para valores elevados de k deveremos utilizar o estimador WLE_2 . Por outro lado, o EQM de WLE_2 é, para valores moderados e elevados de k , sempre inferior ao EQM do estimador de Hill.

Para valores de $|\rho| > 1$, apresentamos na Figura 4.5 as trajectórias amostrais dos estimadores WLE associadas a um modelo Burr, com $(\gamma, \rho) = (1, -2)$. As simulações mostram que o

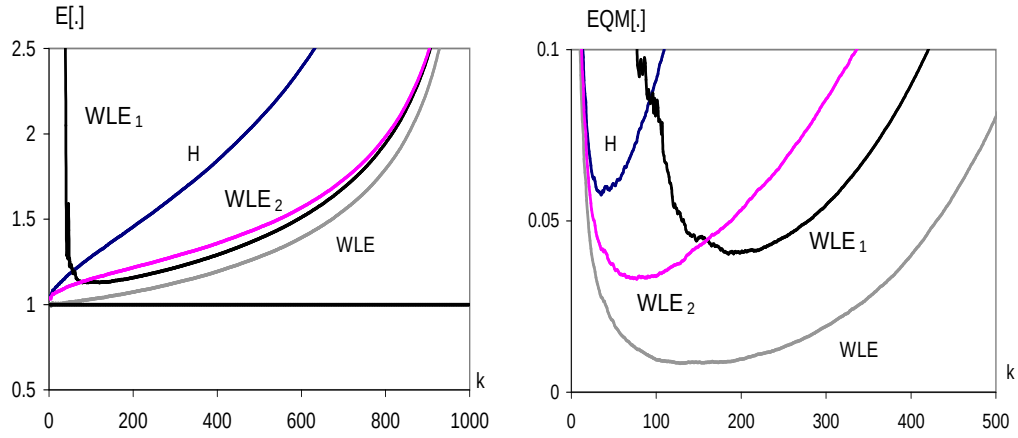


Figura 4.3: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 1$ ($\beta = 1$).

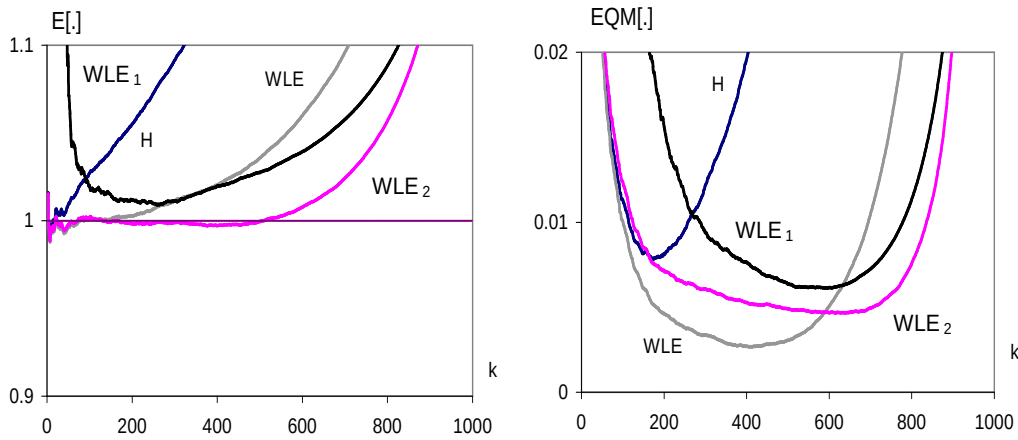


Figura 4.4: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$ e $\beta = 0.5$).

estimador WLE_2 é melhor que o estimador de Hill, qualquer que seja o valor de k . Para valores pequenos e moderados de k deveremos utilizar o estimador WLE_2 , para valores moderados e elevados WLE_1 , porque apresenta EQM inferiores. Mais uma vez, a discrepância observada entre as trajetórias amostrais de WLE e de WLE_2 sugere a possibilidade de melhorar as estimativas dos parâmetros de segunda ordem, ρ e β .

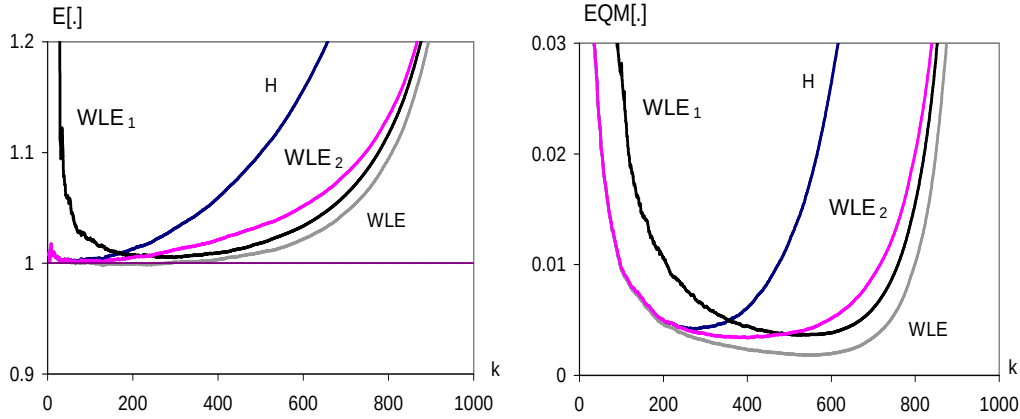


Figura 4.5: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE , WLE_1 e WLE_2 , para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -2$ e $\gamma = 1$ ($\beta = 1$).

4.6.1 Aplicação a dados reais

Em Teoria de Risco um dos tópicos de interesse dos analistas financeiros é a modelação do risco de uma perda elevada que ocorre muito raramente. Este risco conhecido geralmente por “Value at Risk” (VaR) é um quantil muito elevado associado aos log-retornos, e é uma das medidas de risco mais utilizadas nas instituições financeiras. Apesar de se poderem utilizar modelos econométricos para modelar os log-retornos, a abordagem mais correcta é a utilização da Teoria de Valores Extremos, uma vez que os modelos associados aos log-retornos são de cauda pesada. Os resultados apresentados sobre a estimação de parâmetros de acontecimentos raros, obtidos no contexto de amostras i.i.d. podem ser generalizados para sucessões de variáveis aleatórias fracamente dependentes (Drees [31, 32]), como acontece nas séries de dados financeiros.

4.6.1.1 Taxa de câmbio diária do Euro *versus* a Libra Inglesa

Considere-se a sucessão cronológica da taxa de câmbio diária do Euro *versus* a Libra Inglesa, denotada por x_t , correspondente ao período de 4 de Janeiro de 1999 até 14 de Dezembro de 2004, e os log-retornos associados, $r_t = 100(\ln x_t - \ln x_{t-1})$, apresentados na Figura 4.6.

A ilustração do comportamento dos estimadores em estudo será efectuada com base na análise dos $n_0 = 724$ log-retornos positivos. Na Figura 4.7 apresentamos as trajectórias amostrais dos estimadores dos parâmetros de segunda ordem ρ e β , dados, respectivamente, em (3.49) e (3.59). A trajectória $\hat{\rho}_0(k)$ apresenta, ao contrário do verificado para $\hat{\rho}_1(k)$, uma região de

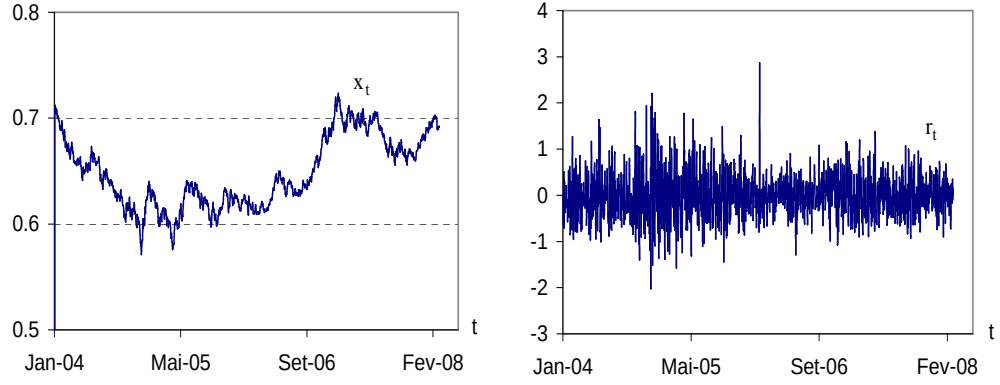


Figura 4.6: Taxa de câmbio diária Euro/Libra Inglesa (esquerda) e log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa (direita).

estabilidade para valores elevados de k . Escolhemos, conseqüentemente, o parâmetro de controle $\tau = 0$, e sendo $k_1 = \lceil 724^{0.995} \rceil = 700$, a estimativa de ρ é $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0(700) = -0.69$ e a de β é $\hat{\beta} = \hat{\beta}(700) = 1.04$.

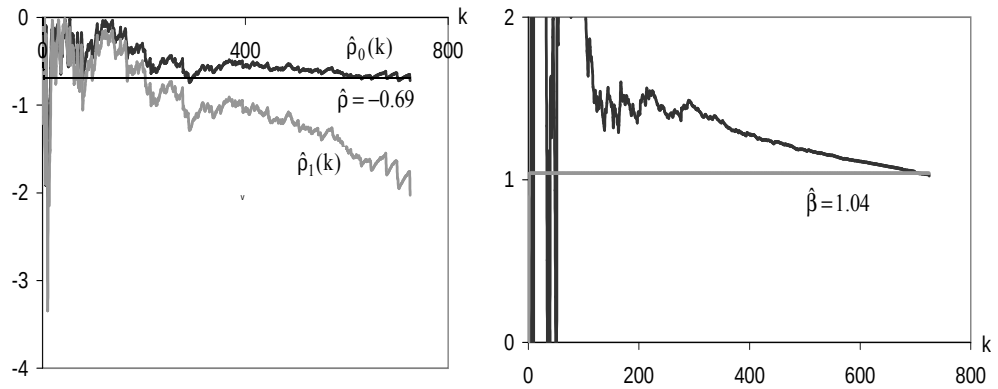


Figura 4.7: Estimativas dos parâmetros de segunda ordem ρ e β para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

As estimativas obtidas foram incorporadas no estimador WLE_2 , cuja trajetória amostral, juntamente com a do estimador de Hill, denotado por H , apresentamos na Figura 4.8. O estimador de viés reduzido de segunda ordem, WLE_2 , apresenta um viés muito inferior ao do estimador de Hill e uma região de estabilidade em torno da verdadeira estimativa de γ . Na classe de Hall-Welsh, o nível óptimo do estimador de Hill para a estimação de γ é da ordem de

$n^{-2\rho/(1-2\rho)}$, e a estimativa $\hat{\gamma}$ considerada é dada pela mediana das estimativas de WLE_2 para níveis k entre $[n_0^{-2\hat{\rho}/(1-2\hat{\rho})}/4] = 11$ e $[4n_0^{-2\hat{\rho}/(1-2\hat{\rho})}] = 182$, i.e., $\hat{\gamma} = 0.29$.

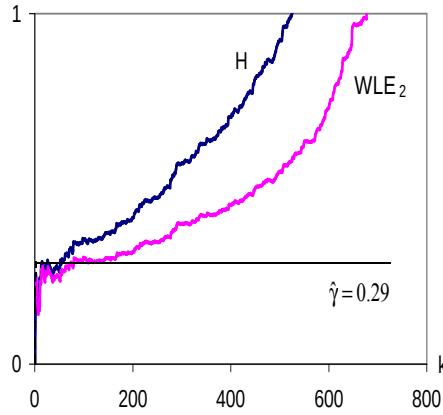


Figura 4.8: Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H e WLE_2 para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

4.6.1.2 Índice da bolsa Portuguesa PSI20

Na segunda aplicação a dados financeiros analisamos a cotação, no fecho da bolsa, do índice PSI20, denotado por x_t , durante o período de 1 de Janeiro de 1995 até 30 de Julho de 2005. A cotação diária do índice PSI20 e os log-retornos, r_t , são apresentados na Figura 4.9.

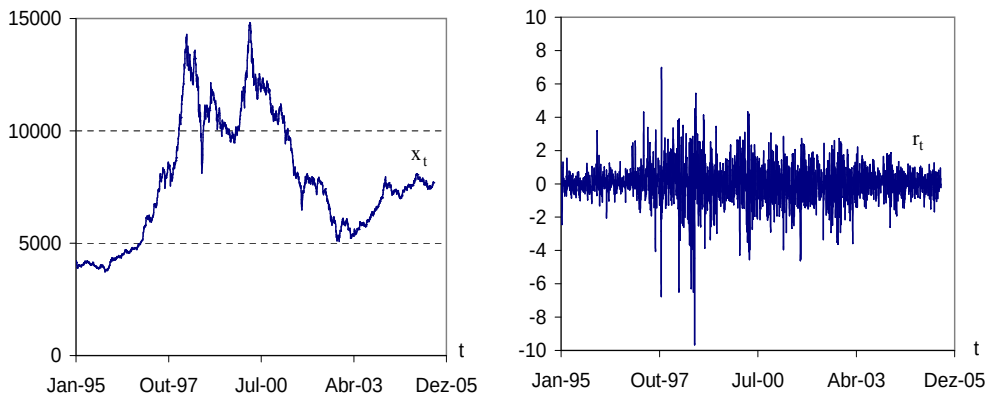


Figura 4.9: Cotação diária do índice PSI20 da bolsa Portuguesa (esquerda) e log-retornos diários do índice PSI20 (direita).

Na Figura 4.10 apresentamos as trajectórias amostrais dos parâmetros de segunda ordem resultantes da análise dos $n_0 = 1372$ log-retornos positivos. Uma vez mais e tendo por base

o critério de estabilidade da trajectória para valores elevados de k , escolhemos $\tau = 0$. Como $k_1 = \lceil 1372^{0.995} \rceil = 1323$, tem-se $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0(1323) = -0.71$, obtendo-se para β a estimativa $\hat{\beta} = \hat{\beta}(1323) = 1.04$.

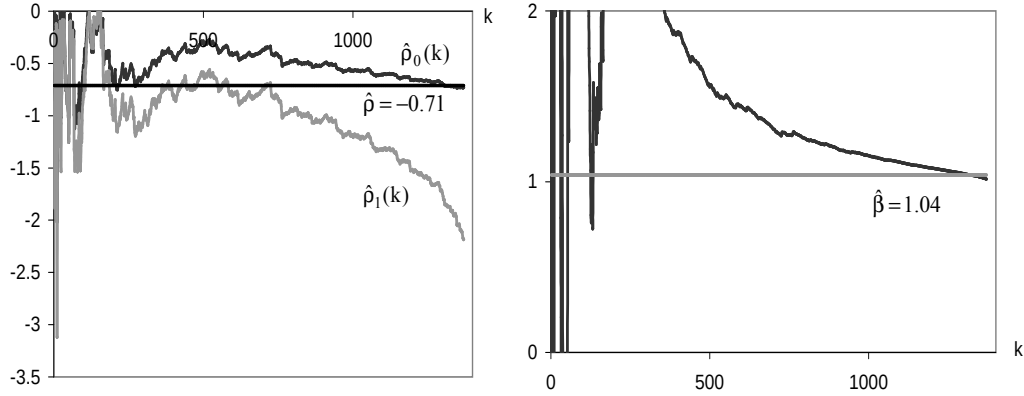


Figura 4.10: Estimativas dos parâmetros de segunda ordem ρ e β para os log-retornos diários do índice PSI20 da bolsa Portuguesa.

Analisando as trajectórias amostrais dos estimadores Hill e WLE_2 , apresentadas na Figura 4.11, constatamos que o estimador de Hill apresenta, mais uma vez, um viés positivo e muito superior ao do estimador WLE_2 . Utilizando o critério apresentado no exemplo anterior, a estimativa de γ é a mediana das estimativas de WLE_2 para valores de k entre 17 e 280, sendo igual a $\hat{\gamma} = 0.29$.

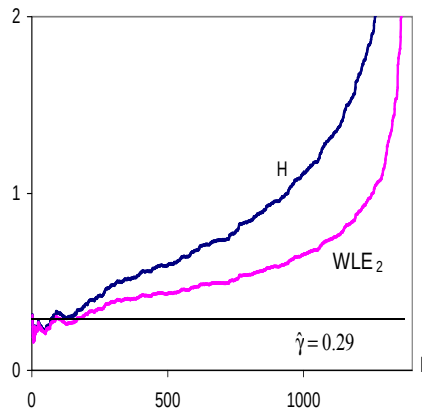


Figura 4.11: Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H e WLE_2 para os log-retornos diários do índice PSI20 da bolsa Portuguesa.

4.7 Comportamento dos estimadores de máxima verosimilhança em amostras de dimensão finita

Nesta Secção começámos por implementar o algoritmo de estimação de máxima verosimilhança do modelo Generalizado de Pareto proposto por Grimshaw [70] aplicado à amostra de excessos, W_{ik} , de modo a obtermos as estimativas associadas ao estimador PORT-ML. Para obtermos as estimativas associadas ao estimador PORT-MP, desenvolvemos e implementámos uma versão modificada do algoritmo de Grimshaw, apresentada na Secção 4.7.1.

Devido ao elevado tempo de computação dos algoritmos de Grimshaw e de Grimshaw modificado, as simulações foram baseadas em 10 réplicas com 100 corridas cada para amostras pequenas, com $n = \{100, 200, 500, 1000\}$, e escolhemos o valor $j = 100$ para o número máximo de iterações do método de Newton-Raphson modificado.

Na Figuras 4.12, 4.13 e 4.14, estão representadas as trajectórias dos valores médios, $E[.]$, e dos erros quadráticos médios, $EQM[.]$, dos estimadores em estudo, baseadas na primeira réplica, para um modelo Burr, $F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}$, $x \geq 0$ com $\gamma + \rho < 0$, $\gamma + \rho = 0$ e $\gamma + \rho > 0$. Os valores escolhidos para (γ, ρ) foram $(1.5, -0.5)$, $(0.1, -0.5)$ e $(0.5, -0.5)$, respectivamente.

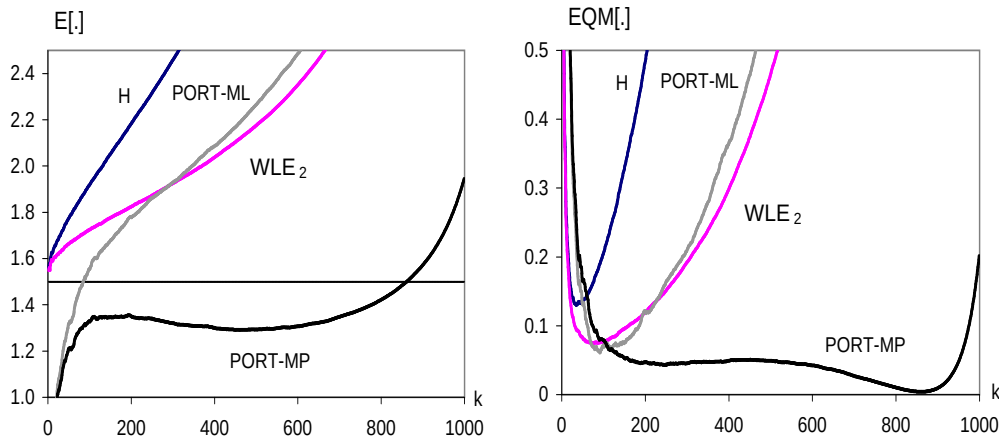


Figura 4.12: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , $PORT-ML$ e $PORT-MP$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 1.5$.

As simulações mostram que o estimador $PORT-MP$ apresenta, regra geral, trajectórias estáveis e funciona muito bem para modelos com valores de $\gamma \geq 1$ e valores de $|\rho| < 1.0$. Para esta região de (γ, ρ) o viés do estimador $PORT-MP$ é inferior ao do estimador $PORT-ML$,

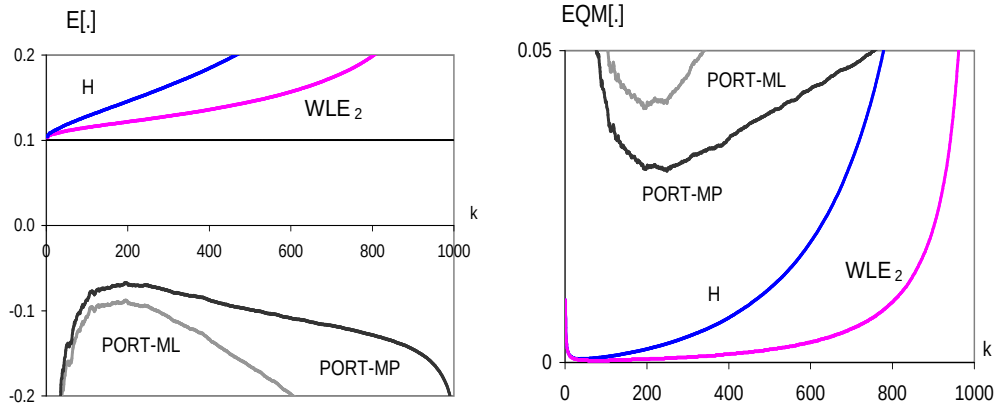


Figura 4.13: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , $PORT-ML$ e $PORT-MP$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 0.1$.

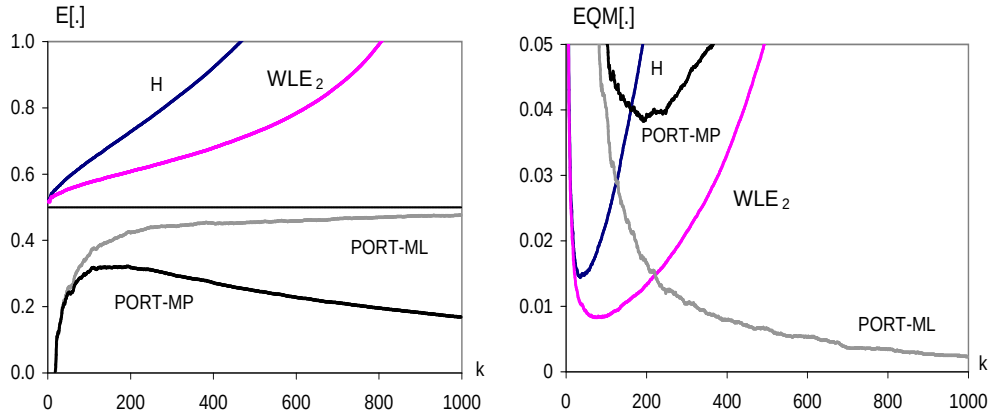


Figura 4.14: Valores médios e erros quadráticos médios simulados, dos estimadores H , WLE_2 , $PORT-ML$ e $PORT-MP$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Burr com $\rho = -0.5$ e $\gamma = 0.5$.

para todos os valores de k . O erro quadrático médio do estimador $PORT-MP$ é, regra geral e para estes modelos, inferior ao erro quadrático médio do estimador $PORT-ML$ para uma vasta gama de valores de k , sendo também inferior nos respectivos níveis óptimos. Quando $\gamma < 0.5$ e $|\rho| < 1$, o estimador $PORT-MP$ não funciona como seria expectável, apresentando, no entanto, viés e erros quadráticos médios inferiores aos do estimador $PORT-ML$, para todos os valores de k . Observamos também que as trajectórias dos estimadores $PORT-ML$ e $PORT-MP$ estão muito afastadas da trajectória do estimador de Hill. O melhor estimador para esta região é o

estimador dos log-excessos ponderados WLE_2 , em (4.21).

Nos modelos com $\gamma + \rho = 0$ (Figura 4.14) o estimador PORT-ML é um estimador de viés reduzido de segunda ordem (veja-se (4.62)) e apresenta, como esperado, viés e erros quadráticos médios inferiores aos do estimador PORT-MP, para todos os valores de k . Para valores elevados de k , o estimador PORT-ML comporta-se quase como um verdadeiro estimador “centrado” de γ superando assim o estimador WLE_2 .

As estimativas obtidas, $\hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k)$ ($\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$), com $k = 1, 2, \dots, n - 1$ e $i = 1, 2, \dots, 100$, serviram ainda de base para a determinação de

$$\begin{aligned} k_{0s}^{M\bullet} &:= \arg \min_k \widehat{EQM}(\hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k)) = \arg \min_k \left(\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k) - \gamma)^2 \right), \\ E_0^{M\bullet} &:= \widehat{E} [\hat{\gamma}_n^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet})] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet}), \\ EQM_0^{M\bullet} &:= \widehat{EQM} [\hat{\gamma}_n^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet})] = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\gamma}_{n,i}^{M\bullet}(k_{0s}^{M\bullet}) - \gamma)^2, \end{aligned}$$

e com base nos resultados obtidos nas 10 réplicas obtiveram-se os respectivos intervalos de confiança a 95%, apresentados na Tabela 4.1.

Na Tabela 4.2 apresentamos a eficiência relativa ($REFF$) dos estimadores em estudo. A eficiência simulada de $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, nos seus níveis óptimos, é dada por,

$$\bar{R}_0 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(k_{0s}^{ML})]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(k_{0s}^{MP})]}} =: \sqrt{\frac{EQM_0^{ML}}{EQM_0^{MP}}},$$

onde $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ são os estimadores dados em (4.7) e (4.27), respectivamente, e k_{0s}^{ML} e k_{0s}^{MP} os níveis óptimos simulados dos estimadores PORT-ML e PORT-MP, respectivamente.

O indicador de eficiência estimada de $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, calculado nos seus níveis óptimos estimados, é, para os modelos com $\gamma + \rho \neq 0$, dado por

$$\hat{R}_0 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(\hat{k}_0^{ML})]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(\hat{k}_0^{MP})]}},$$

onde $\hat{k}_0^{ML} := k_0^{ML}(\hat{\rho}, \hat{\beta})$ e $\hat{k}_0^{MP} := k_0^{MP}(\hat{\rho}, \hat{\beta})$ são os níveis óptimos estimados dos estimadores

Tabela 4.1: Fracção óptima da amostra, valores esperados e erros quadráticos médios de $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{MP}(k)$ para um modelo Burr com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.

n	100	200	500	1000
$(\gamma, \rho) = (0.1, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.4080 ± 0.0221	0.3185 ± 0.0247	0.2342 ± 0.0275	0.1980 ± 0.0129
k_{0s}^{MP}/n	0.5010 ± 0.0483	0.3600 ± 0.0223	0.2550 ± 0.0359	0.2354 ± 0.0130
E_0^{ML}	-0.2096 ± 0.0153	-0.1500 ± 0.0094	-0.0985 ± 0.0165	-0.0888 ± 0.0011
E_0^{MP}	-0.1061 ± 0.0125	-0.0857 ± 0.0046	-0.0669 ± 0.0112	-0.0690 ± 0.0009
EQM_0^{ML}	0.1279 ± 0.0119	0.0809 ± 0.0043	0.0483 ± 0.0052	0.0406 ± 0.0001
EQM_0^{MP}	0.0519 ± 0.0046	0.0415 ± 0.0018	0.0320 ± 0.0027	0.0307 ± 0.0003
$(\gamma, \rho) = (0.5, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.9720 ± 0.0184	0.9865 ± 0.0084	0.9866 ± 0.0172	0.9955 ± 0.0024
k_{0s}^{MP}/n	0.4650 ± 0.0411	0.3350 ± 0.0220	0.2306 ± 0.0255	0.1745 ± 0.0173
E_0^{ML}	0.4588 ± 0.0135	0.4704 ± 0.0065	0.4746 ± 0.0068	0.4763 ± 0.0042
E_0^{MP}	0.3025 ± 0.0189	0.3153 ± 0.0082	0.3261 ± 0.0112	0.3211 ± 0.0025
EQM_0^{ML}	0.0241 ± 0.0038	0.0112 ± 0.0010	0.0043 ± 0.0005	0.0025 ± 0.0002
EQM_0^{MP}	0.0568 ± 0.0072	0.0479 ± 0.0025	0.0397 ± 0.0033	0.0385 ± 0.0007
$(\gamma, \rho) = (1.5, -0.5)$				
k_{0s}^{ML}/n	0.2340 ± 0.0379	0.1785 ± 0.0243	0.1492 ± 0.0129	0.1052 ± 0.0123
k_{0s}^{MP}/n	0.7670 ± 0.0202	0.8190 ± 0.0095	0.8488 ± 0.0046	0.8592 ± 0.0035
E_0^{ML}	1.7315 ± 0.0619	1.6566 ± 0.0486	1.6375 ± 0.0327	1.5375 ± 0.0665
E_0^{MP}	1.4976 ± 0.0152	1.4960 ± 0.0063	1.4969 ± 0.0028	1.4972 ± 0.0028
EQM_0^{ML}	0.3448 ± 0.0330	0.1933 ± 0.0124	0.0968 ± 0.0074	0.0546 ± 0.0046
EQM_0^{MP}	0.0481 ± 0.0045	0.0246 ± 0.0026	0.0092 ± 0.0009	0.0051 ± 0.0006

em estudo, $\hat{\rho} := \hat{\rho}(k_1; \tau)$ e $\hat{\beta} := \hat{\beta}(k_1; \hat{\rho})$ os estimadores dos parâmetros de segunda ordem ρ e β dados em (3.49) e (3.59), respectivamente. Os parâmetros de segunda ordem ρ e β foram estimados externamente no nível k_1 introduzido em (3.58).

Nos modelos com $\gamma + \rho = 0$, o estimador $\hat{\gamma}_n^{ML}$ é de viés reduzido de segunda ordem, pelo que não é possível, e num contexto de segunda ordem, determinar analiticamente o respectivo nível óptimo. A solução encontrada passa por considerar escolhas adaptativas do nível óptimo, à semelhança do que é feito em Gomes *et al.* [60] e definir novos indicadores *REFF*. As escolhas adaptativas consideradas neste trabalho são: $k_{01}^{ML} := k_0^{MP}$ e $k_{02}^{ML} := n - 1$, com os respectivos indicadores,

$$\hat{R}_1 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(\hat{k}_0^{MP})]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(\hat{k}_0^{MP})]}} \text{ e } \hat{R}_2 := \sqrt{\frac{EQM[\hat{\gamma}_n^{ML}(n-1)]}{EQM[\hat{\gamma}_n^{MP}(\hat{k}_0^{MP})]}}.$$

Os valores dos indicadores inferiores a um encontram-se sublinhados.

Tabela 4.2: Indicadores de eficiência relativa para um modelo Burr com $\gamma = \{0.1, 0.5, 1.5\}$ e $\rho = -0.5$.

n	100	200	500	1000
$(\gamma, \rho) = (0.1, -0.5)$				
$\bar{R}_0$	1.5699 ± 0.0218	1.3959 ± 0.0131	1.2261 ± 0.0145	1.1502 ± 0.0040
$\hat{R}_0$	1.5521 ± 0.0277	1.3894 ± 0.0358	1.2231 ± 0.0215	1.1231 ± 0.0124
$(\gamma, \rho) = (0.5, -0.5)$				
$\bar{R}_0$	$\underline{0.6508} \pm 0.0388$	$\underline{0.4829} \pm 0.0279$	$\underline{0.3315} \pm 0.0258$	$\underline{0.2525} \pm 0.0102$
$\hat{R}_1$	$\underline{0.7472} \pm 0.0385$	$\underline{0.6468} \pm 0.0258$	$\underline{0.5520} \pm 0.0202$	$\underline{0.5189} \pm 0.0101$
$\hat{R}_2$	$\underline{0.6125} \pm 0.5598$	$\underline{0.4429} \pm 0.4760$	$\underline{0.3086} \pm 0.3974$	$\underline{0.2409} \pm 0.3511$
$(\gamma, \rho) = (1.5, -0.5)$				
$\bar{R}_0$	2.6843 ± 0.1344	2.8264 ± 0.1956	3.2506 ± 0.1316	3.2911 ± 0.2829
$\hat{R}_0$	3.9339 ± 0.8311	3.1137 ± 0.1895	2.1662 ± 0.1482	1.8628 ± 0.1097

4.7.1 Apêndice: Versão modificada do algoritmo de Grimshaw para determinação das estimativas de máxima verosimilhança no modelo Generalizado de Pareto modificado

A função de log-verosimilhança dos excessos associados à distribuição de Pareto modificada é, como vimos na Secção 4.4, proporcional a

$$\ln L(\gamma, \alpha, \beta, \rho; \underline{W}) = k \ln \alpha - k \ln \gamma - \beta \left(\frac{n}{k}\right)^\rho \sum_{i=1}^k \psi_{ik} - \sum_{i=1}^k \ln(1 + \alpha W_{ik}) - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \ln(1 + \alpha W_{ik}),$$

sendo $\alpha = \gamma/\delta$ e $\underline{W} = (W_{ik}, 1 \leq i \leq k)$ a amostra ordenada dos excessos associados ao modelo Pareto modificado, i.e., ao modelo Generalizado de Pareto em (4.5), com γ substituído por γ_{ik}

em (4.18). Consequentemente, a função auxiliar h utilizada no algoritmo de Grimshaw [70],

$$h(\theta) := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta W_{ik})^{-1} \right) \left[1 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(1 - \theta W_{ik}) \right] - 1,$$

é, para esta versão modificada, dada por,

$$\begin{aligned} h_1(\theta) := & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} (1 - \theta W_{ik})^{-1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \\ & + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \ln(1 - \theta W_{ik}) \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta W_{ik})^{-1} \right), \end{aligned}$$

com $\theta = -\alpha$. A função apresentada satisfaz as seguintes propriedades, necessárias à determinação dos respectivos zeros:

- (i) $\lim_{\theta \rightarrow 1/W_{kk}^-} h_1(\theta) = -\infty$;
- (ii) $h_1(\theta) < 0, \forall \theta < \theta_L := \frac{2(W_{1k} - \bar{W}_k)}{(W_{1k})^2}$;
- (iii) $h'_1(\theta) := \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} (1 - \theta W_{ik})^{-2} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} (1 - \theta W_{ik})^{-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} - \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} (1 - \theta W_{ik})^{-1} \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta W_{ik})^{-1} \right) - \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \ln(1 - \theta W_{ik}) \right] \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta W_{ik})^{-1} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1 - \theta W_{ik})^{-2} \right] \right)$;
- (iv) $\lim_{\theta \rightarrow 0} h'_1(\theta) = 0$;
- (v) $\lim_{\theta \rightarrow 0} h''_1(\theta) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k W_{ik}^2 e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} - 2\bar{W}_k \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k W_{ik} e^{-\beta(n/k)^\rho \psi_{ik}} \right)$.

4.8 Alguns comentários e conclusões

O estimador dos log-excessos ponderados é um estimador de viés reduzido de segunda ordem que permite ultrapassar o compromisso existente entre a variância e o viés. Conseguimos reduzir a componente dominante do viés mantendo a variância assintótica igual a γ^2 , a variância assintótica do estimador de Hill. Os resultados de simulação mostram que o estimador WLE apresenta trajectórias estáveis, viés e EQM inferiores, no nível óptimo, aos do estimador de Hill.

A nova classe de estimadores de máxima verosimilhança obtida por acomodação do viés nos excessos acima de um nível aleatório elevado compara favoravelmente com os estimadores clássicos na região $\{(\gamma, \rho) : (\gamma \leq -a\rho \wedge a < 1/2) \vee (\gamma \geq -b\rho \wedge b \geq 2)\}$. No entanto, a estimação conjunta dos parâmetros de primeira ordem α e γ , no mesmo nível k , provoca um ligeiro aumento da variância assintótica relativamente ao estimador WLE , e inviabiliza a obtenção de uma componente dominante do viés de ordem inferior a $A(n/k)$. Pensamos que a remoção adequada da componente dominante do viés do estimador $\hat{\alpha}_{MP}(k)$ vai permitir melhorar os resultados obtidos para o estimador PORT-MP, com a obtenção de uma nova classe de estimadores PORT-MP de viés reduzido. Esta investigação está no entanto fora do contexto desta dissertação.

Capítulo 5

Outros Estimadores de Viés Reduzido de Variância Mínima

Neste Capítulo apresentamos estimadores de viés reduzido de segunda ordem resultantes da estimação adequada e conseqüente remoção da componente dominante do viés do estimador de Hill, e estimadores de viés reduzido associados ao estudo do comportamento de segunda ordem dos espaçamentos das log-observações devidamente escalados. Considerando a estimação externa dos parâmetros de forma e escala de segunda ordem obtemos, para estes estimadores de viés reduzido, uma variância assintótica igual a γ^2 , a variância assintótica do estimador de Hill, sendo por isso designados de estimadores MVRB (do inglês “*minimum-variance reduced-bias*”). Estes estimadores servem de base para um estudo sobre a escolha adaptativa do nível “ótimo” em estimação de viés reduzido, sendo também utilizados na estimação de quantis elevados.

5.1 Estimadores MVRB existentes na literatura

Seja F um modelo da classe de Hall-Welsh, com função cauda (2.29) e onde $A(t) = \gamma\beta t^\rho$. Feuer-verger & Hall [39], procedendo à estimação conjunta de (γ, β, ρ) no mesmo nível k , consideraram a acomodação do viés nos espaçamentos das log-observações devidamente escalados obtendo estimadores de viés reduzido de tipo “máxima verosimilhança”. A derivação da nova classe de estimadores foi obtida considerando a aproximação, $U_i \approx \gamma \exp(\beta(n/i)^\rho)E_i$, $1 \leq i \leq k$, sendo $\{E_i\}$, $1 \leq i \leq k$, variáveis aleatórias exponenciais unitárias.

A equação de log-verosimilhança associada aos k log-espaçamentos U_i , $1 \leq i \leq k$, é então,

$$\ln L(\gamma, \beta, \rho; U_i, 1 \leq i \leq k) = -k \ln \gamma - \beta \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{-\rho} - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k U_i e^{-\beta(n/i)^{-\rho}}.$$

Admitindo que o parâmetro ρ é estimado externamente, no nível k_1 adequado, a equação de log-verosimilhança é função de (γ, β) e a resolução das equações,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\gamma, \beta, \rho; U_i, 1 \leq i \leq k)}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\gamma, \beta, \rho; U_i, 1 \leq i \leq k)}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

permite obter os estimadores de máxima verosimilhança $(\hat{\gamma}_n^{ML}, \hat{\beta}^{ML})$ de (γ, β) . Assim,

$$\begin{cases} -\frac{k}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k U_i e^{-\beta(n/i)^{-\rho}} = 0 \\ -\sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n}\right)^{-\rho} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k U_i e^{-\beta(n/i)^{-\rho}} \left(\frac{i}{n}\right)^{-\rho} = 0. \end{cases}$$

Usando a aproximação de primeira ordem, $e^x = 1 + x$, quando $x \rightarrow 0$, e sendo $\hat{\rho}$ um estimador consistente de ρ ,

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_n^{ML}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i - \hat{\beta}(k; \hat{\rho}) \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right) \\ \hat{\beta}^{ML}(k; \hat{\rho}) = \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\rho}} \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-2\hat{\rho}} U_i\right)}, \end{cases}$$

onde $\hat{\beta}^{ML}(k; \rho) \equiv \hat{\beta}(k; \rho)$ é o estimador apresentado em (3.59), $\hat{\gamma}_n^{ML}(k)$ é o estimador de máxima verosimilhança de γ que pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) = H(k) - \hat{\beta}(k; \hat{\rho}) \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right).$$

Se efectuarmos a estimação externa de β no nível k_1 de ordem superior a k , o número de e.o. de topo utilizadas na estimação do índice de valores extremos, obtemos

$$ML_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) = H(k) - \hat{\beta} \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right). \quad (5.1)$$

Observação 5.1 O estimador apresentado em (5.1) é tal que $ML_{\hat{\beta}(k;\hat{\rho}),\hat{\rho}}(k) \equiv \hat{\gamma}_n^{ML}(k)$, i.e., estimando β e γ no mesmo nível k , com $\hat{\beta}(k;\rho)$ definido em (3.59).

Observação 5.2 Utilizando a aproximação de primeira ordem, $e^{-\hat{\beta}(n/i)^{-\hat{\rho}}} \approx 1 - \hat{\beta}(n/i)^{\hat{\rho}}$, podemos reescrever o estimador (5.1) da seguinte forma,

$$\overline{ML}_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i \exp \left\{ -\hat{\beta} \left(\frac{n}{i} \right)^{\hat{\rho}} \right\},$$

obtendo-se um estimador assintoticamente equivalente a (5.1). Gomes *et al.* [60] mostraram que o estimador $ML_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k)$ tem um melhor desempenho que o estimador $\overline{ML}_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k)$, para uma vasta gama de modelos.

A componente dominante do viés da representação em distribuição do estimador de Hill, em (3.20), é dada por $A(n/k)/(1-\rho) = \gamma\beta(n/k)^{\rho}/(1-\rho) := \text{viés}_{\infty}(H)$. A classe de estimadores de viés reduzido proposta em Caeiro *et al.* [19] obtém-se removendo directamente do estimador de Hill a componente, $H(k)\hat{\beta}(n/k)^{\hat{\rho}}/(1-\hat{\rho})$, sendo designada de classe de estimadores de Hill corrigidos (CH, do inglês “*corrected Hill*”). Assim, e sendo $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ dois estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem β e ρ , respectivamente,

$$CH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k) := H(k) \left(1 - \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\rho}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\hat{\rho}} \right). \quad (5.2)$$

Utilizando o mesmo tipo de argumento apresentado na Observação 5.2 consideramos ainda o estimador de Hill ponderado (WH, do inglês “*weighted Hill*”), obtido a partir do estimador dos log-excessos ponderados, WLE , em (4.21), e utilizando novamente uma aproximação de primeira ordem da função e^x , quando $x \rightarrow 0$. Assim,

$$WH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k) := H(k) - \hat{\beta} \left(\frac{n}{k} \right)^{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\psi}_{ik} V_{ik} \right). \quad (5.3)$$

5.2 Propriedades assintóticas

Admitindo a validade da condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), sendo $A(t) = \gamma\beta t^{\rho}$ e considerando sucessões intermédias de inteiros, Gomes *et al.* [60], Caeiro *et al.* [19] e Gomes *et al.* [51] obtiveram para as variáveis aleatórias $ML_{\beta,\rho}$, $CH_{\beta,\rho}$ e $WLE_{\beta,\rho}$,

respectivamente, genericamente denotadas por $UH_{\beta,\rho}$, uma representação em distribuição do tipo,

$$UH_{\beta,\rho} \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + R_{UH}(k), \text{ com } R_{UH}(k) = o_p(A(n/k)), \quad (5.4)$$

onde $\bar{Z}_k^{(1)}$ é a v.a. assintoticamente normal padrão definida em (3.18) para $\alpha = 1$. Note-se que o resultado apresentado em (5.4) também é verificado pela v.a. $WH_{\beta,\rho}$, com $WH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k)$ definido em (5.3).

Supondo que os parâmetros de segunda ordem β e ρ são conhecidos e que é válida a condição de terceira ordem, (2.26), podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 5.1 (Caeiro *et al.* [18]) *Admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem, (2.26), sendo $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $B(t) = \beta' t^{\rho'}$ e considerando níveis k tais que (2.15) é satisfeita, o termo $R_{UH}(k)$, em (5.4), é dado por,*

$$R_{UH}(k) = A(n/k) \left(u_{UH} A(n/k) + v_{UH} B(n/k) + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) (1 + o_p(1)), \quad (5.5)$$

com $b_2 \equiv b_2(\rho)$ dado em (4.43), tendo-se

$$u_{WH} = -\frac{b_2}{\gamma}, \quad u_{CH} = -\frac{1}{\gamma(1-\rho)^2}, \quad u_{ML} = -\frac{1}{\gamma(1-2\rho)}, \quad v_{UH} = \frac{1}{1-\rho-\rho'}. \quad (5.6)$$

Considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos, então

$$\sqrt{k}(UH_{\beta,\rho}(k) - \gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(b_{UH} := \lambda_A u_{UH} + \lambda_B v_{UH}, \gamma^2).$$

Se $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$ então $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(A(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(B(n/k))$ e

$$\frac{UH_{\beta,\rho}(k) - \gamma}{A(n/k)} = \begin{cases} O_p(A(n/k)), & \text{se } \rho \geq \rho' \\ O_p(B(n/k)), & \text{se } \rho < \rho'. \end{cases}$$

Demonstração: Começamos pelo estimador $ML_{\beta,\rho}(k)$ dado em (5.1). Tendo em conta a representação (3.16) para $\alpha = 1 - \rho$ e a representação em distribuição do estimador de Hill

apresentada em (3.20), e dado que $Z_k^{(1)} \equiv \bar{Z}_k^{(1)}$, com $Z_k^{(\alpha)}$ e $\bar{Z}_k^{(\alpha)}$ v.a. dadas, respectivamente, em (3.15) e (3.18), podemos escrever

$$\begin{aligned} ML_{\beta,\rho}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1-\rho-\rho'}(1+o_p(1)) + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right)(1+o(1)) \\ &\quad - \frac{A(n/k)}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{1-\rho} + \frac{\gamma}{\sqrt{1-2\rho}\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1-\rho)} + \frac{A(n/k)}{1-2\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1-2\rho-\rho'}(1+o_p(1)) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1-\rho-\rho'} - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-2\rho)} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) (1+o_p(1)). \end{aligned}$$

Para o estimador $CH_{\beta,\rho}$, definido em (5.2), e utilizando a representação assintótica do estimador de Hill, em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} CH_{\beta,\rho}(k) &\stackrel{d}{=} \left(\gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1-\rho-\rho'}(1+o_p(1)) \right. \\ &\quad \left. + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right)(1+o(1)) \right) \left(1 - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)} \right) \\ &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1-\rho-\rho'} - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)^2} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) (1+o_p(1)). \end{aligned}$$

Finalmente, para o estimador $WH_{\beta,\rho}$, em (5.3), necessitamos de obter a representação em distribuição em contexto de terceira ordem da estatística $C_k^{(j)}$, definida em (4.26). Assim, como

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} + \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) + \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k)B(n/k) (1+o_p(1)) + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right), \quad (5.7)$$

então

$$\begin{aligned} C_k^{(j)} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j V_{ik} \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j E_{k-i+1:k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \frac{Y_{k-i+1:k}^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^j \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k)B(n/k) (1+o_p(1)) + O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right). \end{aligned}$$

Assintoticamente, temos para $j > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \mathbb{E} \left(\frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'} \right) &\sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi_{ik}^{j-1} \frac{(i/k)^{-(\rho+\rho')} - 1}{\rho + \rho'} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{j-1} \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^{j-1}}{\rho^{j-1} \ln^{j-1}(i/k)} \frac{(i/k)^{-(\rho+\rho')} - 1}{\rho + \rho'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^{j-1}(\rho + \rho')} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{((i/k)^{-\rho} - 1)^{j-1}}{\ln^{j-1}(i/k)} \left((i/k)^{-(\rho+\rho')} - 1 \right) \right) \\
&\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{j-1}}{\rho^{j-1}(\rho + \rho')} \int_0^1 \frac{(x^{-\rho} - 1)^{j-1} (x^{-(\rho+\rho')} - 1)}{\ln^{j-1} x} dx := d_j(\rho, \rho') < \infty.
\end{aligned}$$

Sendo $\bar{P}_k^{(j)}$ a v.a. assintoticamente normal padrão, em (4.64), então

$$C_k^{(j)} \stackrel{d}{=} \gamma b_j + \frac{\gamma \sigma_j}{\sqrt{k}} \bar{P}_k^{(j)} + b_{j+1} A(n/k) + O_p \left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}} \right) + d_{j+1}(\rho, \rho') A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)). \quad (5.8)$$

Assim, e utilizando novamente a representação (3.20) juntamente com (5.8), para $j = 1$, obtemos para o estimador $WH_{\beta, \rho}$, em (5.3), a seguinte representação em distribuição,

$$\begin{aligned}
WH_{\beta, \rho}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1 - \rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1 - \rho - \rho'} (1 + o_p(1)) \\
&+ O_p \left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}} \right) (1 + o(1)) - \frac{A(n/k)}{\gamma} \left(\gamma b_1 + \frac{\gamma \sigma_1}{\sqrt{k}} \bar{P}_k^{(1)} + b_2 A(n/k) \right. \\
&+ \left. O_p \left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}} \right) + d_2(\rho, \rho') A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \right) \\
&\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \bar{Z}_k^{(1)} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1 - \rho - \rho'} - \frac{b_2 A(n/k)}{\gamma} + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) (1 + o_p(1)).
\end{aligned}$$

Desta forma, a expressão (5.5) é válida para as três classes de estimadores de viés reduzido em estudo, com u_{UH} e v_{UH} dados em (5.6). Note-se que como $\sqrt{k} O_p(A(n/k)/\sqrt{k}) = O_p(A(n/k)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, os termos $O_p(A(n/k)/\sqrt{k})$ não afetam o viés assintótico destes estimadores. $\square$

Observação 5.3 Como $\lambda_A \geq 0$ e $(1 - \rho)^2 > 1/b_2 > 1 - 2\rho$, para todo o $\rho < 0$, concluímos que $b_{CH} \geq b_{WH} \geq b_{ML}$. Assim, e se o viés dos estimadores for positivo, o estimador ML é o que apresenta trajetórias amostrais com menor viés e o estimador CH as de maior viés.

Observação 5.4 Nos modelos da subclasse de Hall-Welsh, (2.30), onde $\rho = \rho'$, obtemos para o estimador $ML_{\beta, \rho}(k)$ um viés assintótico igual a $b_{ML} = (\lambda_B - \lambda_A/\gamma)/(1 - 2\rho)$. De acordo com a Observação 3.5 podemos ainda concluir que $b_{ML} = 0$ para os modelos Burr(γ, ρ) e GP($\gamma > 0$), uma vez que para estes modelos $\lambda_B = \lambda_A/\gamma$.

Analisemos agora o comportamento assintótico dos estimadores MVRB apresentados em (5.1), (5.2) e (5.3) admitindo que os parâmetros de segunda ordem β e ρ são estimados de forma adequada no nível k_1 de ordem superior a k .

Teorema 5.2 (Caeiro *et al.* [18]) *Admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem, em (2.26), considerem-se os estimadores de viés reduzido $ML_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, $CH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ e $WH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, genericamente denotados por $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, sendo $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ os estimadores dos parâmetros de segunda ordem β e ρ , em (3.59) e (3.49), respectivamente, calculados no nível k_1 satisfazendo a condição (3.56). Nestas condições, e para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ finito, quando $n \rightarrow \infty$, a v.a. $\sqrt{k}(UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$ é assintoticamente normal com valor médio nulo e variância*

$$\sigma_{UH}^2 = \gamma^2. \quad (5.9)$$

O comportamento limite ainda é válido para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ desde que $k = o(k_1)$, quando $n \rightarrow \infty$, com k_1 óptimo para a estimação de ρ , i.e., tal que $\sqrt{k_1}A^2(n/k_1) \rightarrow \lambda_{A_1}$ e $\sqrt{k_1}A(n/k_1)B(n/k_1) \rightarrow \lambda_{B_1}$, finitos.

Demonstração: Sejam $\hat{\beta}$ e $\hat{\rho}$ dois estimadores consistentes de β e ρ , respectivamente. Então, utilizando o método delta, podemos escrever

$$UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) = UH_{\beta, \rho}(k) + (\hat{\beta} - \beta) \frac{\partial UH_{\beta, \rho}(k)}{\partial \beta} (1 + o_p(1)) + (\hat{\rho} - \rho) \frac{\partial UH_{\beta, \rho}(k)}{\partial \rho} (1 + o_p(1)).$$

Assim, com base nas representações (3.16) e (3.17), para o estimador ML (Proposição 4.1), sabendo que os log-excessos satisfazem (5.7), para o estimador WH, e directamente para o estimador CH,

$$\begin{aligned} \frac{\partial UH_{\beta, \rho}(k)}{\partial \beta} &\underset{p}{\sim} -\frac{b_1 A(n/k)}{\beta}, \\ \frac{\partial UH_{\beta, \rho}(k)}{\partial \rho} &\underset{p}{\sim} -b_1 A(n/k) \left(\ln \left(\frac{n}{k} \right) + b_1 \right), \end{aligned}$$

com $b_1 = 1/(1 - \rho)$, dado na Proposição 4.1.

Logo, e denotando por $\hat{R}_n^{UH} := UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - UH_{\beta, \rho}(k)$,

$$\hat{R}_n^{UH} \stackrel{p}{\sim} -b_1 A(n/k) \left\{ \left(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} \right) + (\hat{\rho} - \rho) \left(\ln \left(\frac{n}{k} \right) + b_1 \right) \right\}.$$

Considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, então $\sqrt{k}\hat{R}_n^{UH} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0$, pelo que a v.a. $\sqrt{k}(UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$ é assintoticamente normal com valor médio nulo e variância igual a γ^2 .

Considerando agora níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., níveis k pequenos ou moderados, e admitindo a validade de (3.67) temos que $(\hat{\beta} - \beta)/\beta \stackrel{p}{\sim} -\ln(n/k_1)(\hat{\rho} - \rho)$, e portanto,

$$\hat{R}_n^{UH} = -b_1 A(n/k)(\hat{\rho} - \rho) \left\{ -\ln \left(\frac{k}{k_1} \right) + b_1 \right\}.$$

Sendo o nível k_1 óptimo para a estimação de ρ , então $\hat{\rho} - \rho = O_p(1/(\sqrt{k_1}A(n/k_1)))$, e

$$\sqrt{k} \hat{R}_n^{UH}(k; k_1) = O_p \left(\frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\sqrt{k_1}A(n/k_1)} \ln \left(\frac{k}{k_1} \right) \right) = O_p \left(\left(\frac{k}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}-\rho} \ln \left(\frac{k}{k_1} \right) \right) = o_p(1), \text{ se } \frac{k}{k_1} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, obtendo-se assim os restantes resultados. $\square$

Observação 5.5 *O Teorema 5.2 referente ao comportamento assintótico, em contexto de terceira ordem, da v.a. $\sqrt{k}(UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$, com $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ denotando genericamente os estimadores $ML_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, $CH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ e $WH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, generaliza o resultado obtido no item 2 da Proposição 4.2 relativamente ao comportamento assintótico, em contexto de segunda ordem, da v.a. $\sqrt{k}(WLE_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)$.*

5.2.1 Intervalos de confiança assintóticos para o índice de valores extremos, γ , baseados em estimadores MVRB

O Teorema 5.2 permite construir intervalos de confiança assintóticos para o índice de cauda, γ , com base na v.a. fulcral $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, com $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ denotando os estimadores de viés reduzido de variância mínima em (5.1), (5.2) e (5.3), para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito não necessariamente nulo. Como $\sqrt{k}(UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma)/\gamma \approx \mathcal{N}(0, 1)$, então

$$\mathbb{P} \left[-1.96 < \sqrt{k} \left(\frac{UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)}{\gamma} - 1 \right) < 1.96 \right] \approx 0.95,$$

e o intervalo de confiança assintótico para γ a 95% é,

$$(LIC_{UH}, LSC_{UH}) := \left(\frac{UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)}{1 + 1.96/\sqrt{k}}, \frac{UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)}{1 - 1.96/\sqrt{k}} \right). \quad (5.10)$$

Observação 5.6 A representação em distribuição do estimador de Hill, em (3.20), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, para modelos na classe de Hall-Welsh permite-nos também construir intervalos de confiança assintóticos para o índice de valores extremos, γ , em níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$, baseados na v.a. fulcral,

$$\sqrt{k} \left(\frac{H(k)}{\gamma} - 1 - \frac{\beta(n/k)^\rho}{1 - \rho} \right) \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Assim, o intervalo de confiança assintótico a 95% para γ é,

$$(LIC_H, LSC_H) := \left(\frac{H(k)}{1 + 1.96/\sqrt{k} + \hat{\beta}(n/k)^{\hat{\rho}}/(1 - \hat{\rho})}, \frac{H(k)}{1 - 1.96/\sqrt{k} + \hat{\beta}(n/k)^{\hat{\rho}}/(1 - \hat{\rho})} \right). \quad (5.11)$$

Na Figura 5.1 apresentamos as trajectórias amostrais dos estimadores de Hill e de MVRB (ML , CH e WH) e os correspondentes intervalos de confiança a 95% para o índice de valores extremos, γ , referentes aos log-retornos positivos da taxa de câmbio diária do Euro *versus* a Libra Inglesa, apresentados na Secção 4.6.1.1.

Uma vez que o estimador de Hill cruza o $LSC_H = LSC_H(k)$, trabalhamos apenas com níveis k inferiores ou iguais a $k_a := \min\{k : LSC_H(k) < H(k)\}$. Para este conjunto de dados $k_a = 121$, pelo que, as estimativas obtidas para os estimadores de viés reduzido de variância mínima no nível k_a são: $\hat{\gamma}_{ML} = 0.286$, $\hat{\gamma}_{CH} = 0.290$ e $\hat{\gamma}_{WH} = 0.287$. Note-se que a estimativa obtida para o estimador WH está muito próxima do valor 0.29 obtido na Secção 4.6.1.1. Se optássemos por trabalhar apenas com o estimador de Hill poderíamos calcular uma estimativa do nível óptimo, em (3.21), que para este conjunto de dados é $\hat{k}_0^H = 59$, correspondendo a uma estimativa $\hat{\gamma}_H = 0.296$.

Na Tabela 5.1 apresentamos os intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para γ , baseados nas estimativas $\hat{\gamma}_\bullet$, ($\bullet = H, ML, CH, WH$), a sua amplitude (h) e a redução de amplitude, em percentagem, dos intervalos de confiança baseados em estimadores MVRB relativamente ao intervalo de confiança assintótico associado ao estimador de Hill.

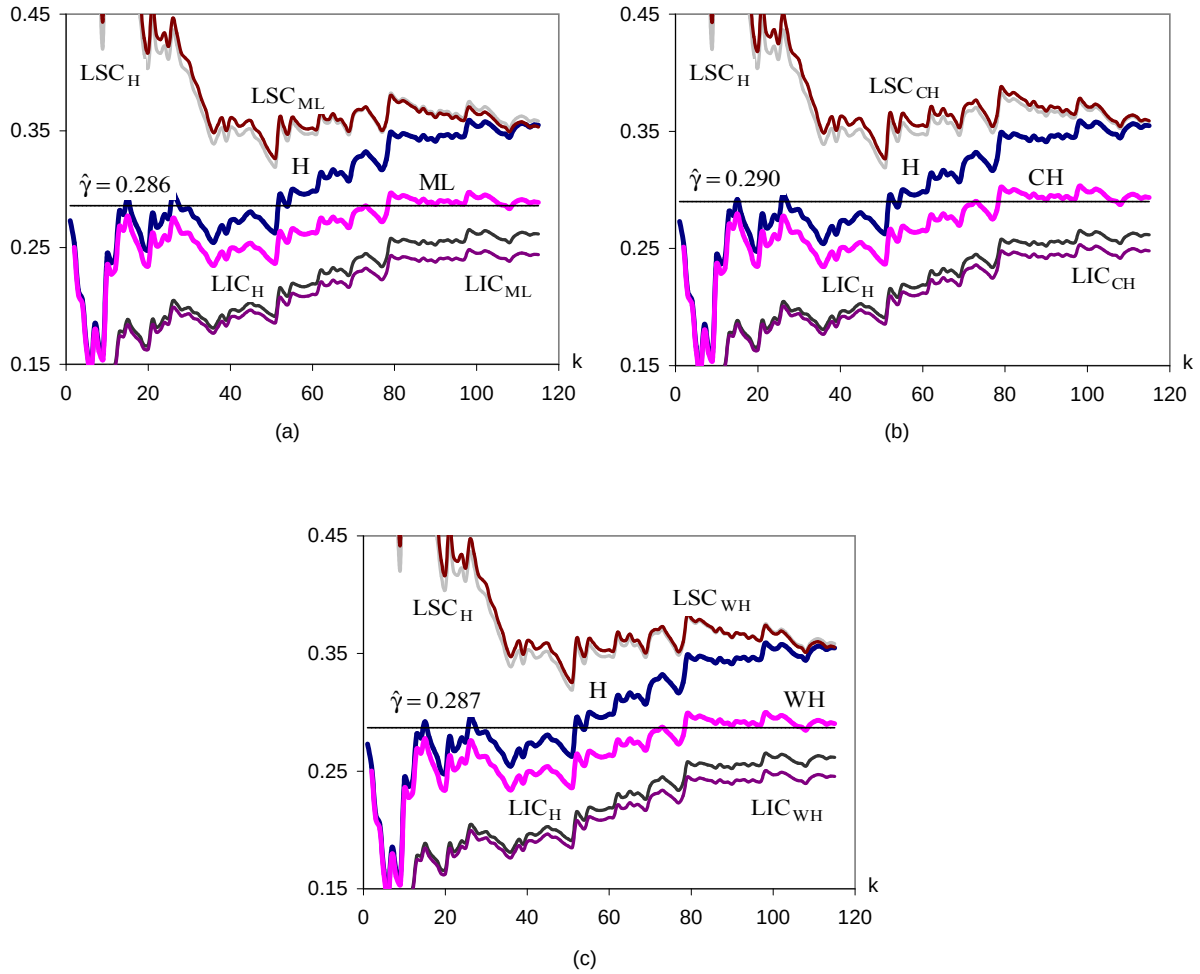


Figura 5.1: Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda (a) (H, ML) , (b) (H, CH) e (c) (H, WH) , e correspondentes intervalos de confiança a 95% para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

Tabela 5.1: Intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para γ associados aos estimadores H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

Estimador	Estimativa	$(LIC_{\bullet}, LSC_{\bullet})$	h	%
H	$\hat{\gamma}_H=0.296$	$(0.2173, 0.3472)$	0.1299	—
ML	$\hat{\gamma}_{ML}=0.286$	$(0.2425, 0.3476)$	0.1051	19.0543
CH	$\hat{\gamma}_{CH}=0.290$	$(0.2463, 0.3530)$	0.1068	17.7848
WH	$\hat{\gamma}_{WH}=0.287$	$(0.2438, 0.3496)$	0.1057	18.5940

5.3 Escolha adaptativa do nível “óptimo” em estimação MVRB

A escolha do número “óptimo” de e.o. de topo a utilizar na estimação do índice de cauda é um tópico que se encontra, para os estimadores MVRB, em fase de estudo. No entanto, sabemos

que o nível “óptimo” dos estimadores MVRB é superior ao nível óptimo do estimador de Hill. Este argumento heurístico justifica a selecção de k_0^H , em (3.21), como uma escolha adaptativa a utilizar em estimação MVRB.

A segunda técnica heurística de escolha do nível “óptimo”, k_{01} , baseia-se num argumento semelhante ao utilizado por Gomes & Pestana [65],

$$\exists k_{01} : \begin{cases} LSC_{UH}(k_{01}) = H(k_{01}), \text{ se viés}(H(k_{01})) \geq 0 \\ LIC_{UH}(k_{01}) = H(k_{01}), \text{ se viés}(H(k_{01})) < 0, \end{cases}$$

ou seja, o valor de k_{01} escolhido corresponde ao nível onde a trajectória do estimador de Hill cruza a região de confiança construída, é tal que $\sqrt{k_{01}}A(n/k_{01}) \rightarrow \lambda$, finito e não necessariamente nulo, não sendo ainda óptimo para a estimação dos estimadores de viés reduzido de variância mínima, UH , em (5.1), (5.2) e (5.3). Tem-se,

$$k_{01} = k_{01}(n; \beta, \rho) := \left(\frac{1.96(1 - \rho)n^{-\rho}}{|\beta|} \right)^{2/(1-2\rho)}. \quad (5.12)$$

Observação 5.7 *Note-se que o nível “óptimo” k_{01} é usualmente de ordem superior a k_0^H , dado que $k_{01} > k_0^H$ para valores de $\rho < -0.130154$. Na Figura 5.2 apresentamos o comportamento de k_{01}/k_0^H como função de $|\rho|$.*

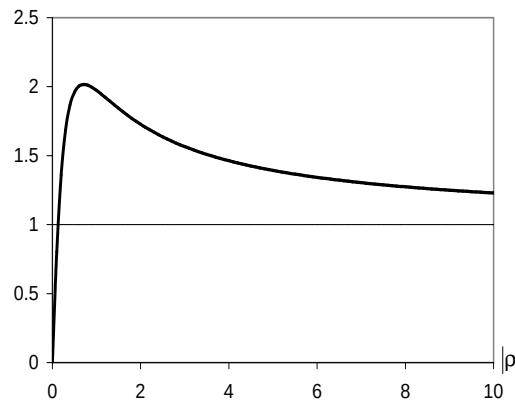


Figura 5.2: Comportamento da função k_{01}/k_0^H .

Observação 5.8 *Recentemente foram propostas novas técnicas heurísticas de escolha adaptativa do nível “óptimo” em estimação de viés reduzido utilizando pares adequados de estimadores*

de viés reduzido (Gomes et al. [55]). Sejam $(ML(k), ML^*(k))$ dois estimadores de viés reduzido, com $ML(k) \equiv ML_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$, em (5.1), e

$$ML^*(k) \equiv ML_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}^*(k) = H(k) - \hat{\beta}(k; \hat{\rho}) \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \left(\frac{1}{k^*} \sum_{i=1}^{k^*} \left(\frac{i}{k^*}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right),$$

sendo $k^* := ((1 - 2\rho) n^{2\rho} / (-2\rho \beta^2))^{1/(1-2\rho)}$, o nível óptimo de $\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}} U_i\right)$. A estabilidade do comportamento amostral do par de estimadores de viés reduzido $(ML(k), ML^*(k))$ conduziu Gomes et al. [55] a um novo critério heurístico de selecção do nível “óptimo” dado pelo $\max \{k : |ML(k) - ML^*(k)| \leq c_{crit}\}$, sendo $c_{crit} \sim 0$, um parâmetro de controlo. A análise deste critério para os estimadores de viés reduzido em estudo neste Capítulo encontra-se fora do âmbito deste trabalho.

5.3.1 Indicadores de redução do erro quadrático médio: um estudo de simulação

Nesta Secção efectuou-se um estudo de simulação, via método de Monte Carlo, para análise da redução do erro quadrático médio dos estimadores MVRB em estudo, analisando o comportamento dos mesmos nos níveis adaptativos, k_0^H e k_{01} , em (3.21) e (5.12), respectivamente.

Os resultados foram obtidos com base em simulações de 10 réplicas com 1000 corridas cada para amostras de dimensão $n \in \{100, 200, 500, 1000\}$ para os modelos Burr com as parametrizações $\gamma = 1$, $\rho \in \{-0.5, -1, -2\}$ ($\beta = 1$), e Fréchet com $\gamma = 1$ ($\beta = 0.5$ e $\rho = -1$).

Foi simulado um primeiro indicador de eficiência relativa (REFF) onde se compara o erro quadrático médio de cada um dos estimadores com o erro quadrático médio do estimador de Hill nos níveis óptimos simulados. Assim,

$$\bar{R}_0 = \bar{R}_{0j} := \sqrt{\frac{EQM[H(k_{0s}^H)]}{EQM[UH_j(k_{0s})]}},$$

onde k_{0s} é o nível óptimo simulado dos estimadores MVRB, (5.1), (5.2) e (5.3), denotados por UH , e $UH_j(k) \equiv UH_{\hat{\beta}_j, \hat{\rho}_j}(k)$, onde $j = 0$ ou 1 consoante $\rho \geq -1$ ou $\rho < -1$.

Os outros indicadores REFF utilizados dizem respeito ao comportamento dos estimadores MVRB nas escolhas adaptativas (3.21) e (5.12). Denotaremos por $\hat{k}_{0j}^H \equiv \hat{k}_0^H := k_0^H(\hat{\beta}_j, \hat{\rho}_j)$, o nível óptimo estimado do estimador de Hill e por $\hat{k}_{1j} \equiv \hat{k}_{01} := k_{01}(\hat{\beta}_j, \hat{\rho}_j)$. Os indicadores

estimados simulados foram:

$$\hat{R}_0 = \hat{R}_{0j} := \sqrt{\frac{EQM[H(\hat{k}_0^H)]}{EQM[UH_j(\hat{k}_{0j}^H)]}} \quad \text{e} \quad \hat{R}_1 = \hat{R}_{1j} := \sqrt{\frac{EQM[H(\hat{k}_0^H)]}{EQM[UH_j(\hat{k}_{1j}^H)]}}.$$

Observação 5.9 *Se o valor dos indicadores apresentados é superior a um, então o estimador em análise tem um comportamento melhor do que o estimador de Hill, no sentido de exibir menor erro quadrático médio.*

Observação 5.10 *Os indicadores REFF são medidas que, de uma forma geral, apresentam um comportamento robusto. Desta forma, a melhor escolha adaptativa para a estimação de viés reduzido é proveniente da comparação dos indicadores $\hat{R}_0$ e $\hat{R}_1$.*

Os resultados obtidos para os indicadores ($\bar{R}_0$, $\hat{R}_0$, $\hat{R}_1$) e os respectivos intervalos de confiança a 95% são apresentados nas Tabelas 5.2-5.5. Os valores inferiores a um encontram-se sublinhados. Um estudo mais detalhado sobre os indicadores de redução do erro quadrático médio pode ser encontrado em Gomes & Henriques Rodrigues [52].

Tabela 5.2: Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$.

n		100	200	500	1000
CH	$\bar{R}_0$	1.15485 ± 0.01746	1.13896 ± 0.01404	1.12989 ± 0.01395	1.12782 ± 0.01494
	$\hat{R}_0$	1.70068 ± 0.00773	1.67376 ± 0.01182	1.64464 ± 0.01176	1.63501 ± 0.00761
	$\hat{R}_1$	1.45122 ± 0.02237	1.41857 ± 0.02051	1.34060 ± 0.01391	1.27120 ± 0.01700
ML	$\bar{R}_0$	1.51062 ± 0.01566	1.40736 ± 0.02287	1.30566 ± 0.02313	1.26492 ± 0.01424
	$\hat{R}_0$	1.85124 ± 0.01156	1.78887 ± 0.01463	1.73324 ± 0.01379	1.71168 ± 0.00929
	$\hat{R}_1$	1.82589 ± 0.02366	1.67031 ± 0.02136	1.50145 ± 0.01504	1.39355 ± 0.01679
WH	$\bar{R}_0$	1.49100 ± 0.01832	1.38134 ± 0.02615	1.30651 ± 0.01440	1.26137 ± 0.01644
	$\hat{R}_0$	1.83008 ± 0.00320	1.76123 ± 0.00205	1.71071 ± 0.00262	1.68478 ± 0.00659
	$\hat{R}_1$	1.70506 ± 0.01063	1.58706 ± 0.00631	1.45328 ± 0.00553	1.35233 ± 0.00371

Os resultados obtidos permitem-nos retirar conclusões gerais e conclusões específicas para os modelos em análise. Assim, e de um modo geral, observamos que o comportamento dos indicadores REFF depende, obviamente, do modelo em estudo e do estimador em análise. Além disso, os indicadores REFF apresentam para a generalidade dos modelos valores superiores a um, pelo que os níveis k_0^H e k_{01} representam boas escolhas para os estimadores MVRB.

As conclusões obtidas para cada modelo foram:

Tabela 5.3: Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -1.0$.

n		100	200	500	1000
CH	$\bar{R}_0$	1.25826 ± 0.02279	1.30750 ± 0.02094	1.37799 ± 0.01904	1.42001 ± 0.02301
	$\hat{R}_0$	1.17929 ± 0.01884	1.09123 ± 0.01482	<u>0.93522 ± 0.01182</u>	<u>0.82244 ± 0.00686</u>
	$\hat{R}_1$	1.54407 ± 0.02226	1.41306 ± 0.01668	1.17306 ± 0.01594	1.02536 ± 0.00985
ML	$\bar{R}_0$	1.51861 ± 0.03043	1.35468 ± 0.02739	1.12414 ± 0.03332	1.01004 ± 0.02298
	$\hat{R}_0$	1.16734 ± 0.01995	1.07948 ± 0.01508	<u>0.92275 ± 0.01224</u>	<u>0.81014 ± 0.00693</u>
	$\hat{R}_1$	1.43652 ± 0.02348	1.31691 ± 0.01874	1.10641 ± 0.01493	<u>0.97450 ± 0.00912</u>
WH	$\bar{R}_0$	2.29204 ± 0.04955	2.40885 ± 0.04565	2.56410 ± 0.03398	2.61177 ± 0.05878
	$\hat{R}_0$	1.16776 ± 0.01718	1.07115 ± 0.02482	<u>0.93912 ± 0.01722</u>	<u>0.82027 ± 0.01035</u>
	$\hat{R}_1$	1.44724 ± 0.03091	1.32344 ± 0.03017	1.14576 ± 0.01735	1.00324 ± 0.01878

Tabela 5.4: Indicadores REFF para o Modelo Burr com $\gamma = 1$ e $\rho = -2.0$.

n		100	200	500	1000
CH	$\bar{R}_0$	1.10829 ± 0.01125	1.12450 ± 0.01240	1.14998 ± 0.01528	1.15557 ± 0.02235
	$\hat{R}_0$	1.16000 ± 0.01074	1.12813 ± 0.01033	1.08222 ± 0.00697	1.01916 ± 0.00519
	$\hat{R}_1$	<u>0.75050 ± 0.01925</u>	1.08376 ± 0.02119	1.23270 ± 0.01216	1.26879 ± 0.01759
ML	$\bar{R}_0$	1.39210 ± 0.03074	1.42572 ± 0.02687	1.45046 ± 0.02569	1.44796 ± 0.01839
	$\hat{R}_0$	1.16852 ± 0.01280	1.13068 ± 0.01135	1.08065 ± 0.00752	1.01491 ± 0.00534
	$\hat{R}_1$	1.44657 ± 0.02350	1.38139 ± 0.01636	1.35765 ± 0.01336	1.31653 ± 0.01665
WH	$\bar{R}_0$	1.37958 ± 0.02218	1.37301 ± 0.01724	1.38430 ± 0.02766	1.39880 ± 0.02457
	$\hat{R}_0$	1.15391 ± 0.00331	1.11673 ± 0.00402	1.06304 ± 0.00554	1.00637 ± 0.00346
	$\hat{R}_1$	1.03594 ± 0.02933	1.30157 ± 0.00409	1.34353 ± 0.00286	1.33390 ± 0.00683

Tabela 5.5: Indicadores REFF para o Modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1.0$).

n		100	200	500	1000
CH	$\bar{R}_0$	1.21598 ± 0.01306	1.26492 ± 0.02479	1.33276 ± 0.01564	1.38940 ± 0.01769
	$\hat{R}_0$	<u>0.98005 ± 0.01461</u>	<u>0.94669 ± 0.01017</u>	<u>0.89803 ± 0.00732</u>	<u>0.84458 ± 0.00948</u>
	$\hat{R}_1$	1.06836 ± 0.03664	1.10736 ± 0.01869	1.06786 ± 0.01206	1.00438 ± 0.01353
ML	$\bar{R}_0$	1.00654 ± 0.01707	1.03830 ± 0.01636	1.07232 ± 0.02010	1.10684 ± 0.01503
	$\hat{R}_0$	<u>0.96256 ± 0.01555</u>	<u>0.93121 ± 0.01048</u>	<u>0.88813 ± 0.00745</u>	<u>0.83458 ± 0.00940</u>
	$\hat{R}_1$	1.06258 ± 0.02668	1.04312 ± 0.01609	1.01328 ± 0.01072	<u>0.96051 ± 0.01313</u>
WH	$\bar{R}_0$	1.18910 ± 0.02373	1.26673 ± 0.02197	1.33108 ± 0.01817	1.37149 ± 0.02272
	$\hat{R}_0$	<u>0.95518 ± 0.00755</u>	<u>0.92917 ± 0.01542</u>	<u>0.89261 ± 0.01365</u>	<u>0.83029 ± 0.00623</u>
	$\hat{R}_1$	1.03671 ± 0.01248	1.05597 ± 0.02072	1.03076 ± 0.01435	<u>0.97476 ± 0.00409</u>

- Modelo Burr com $(\gamma, \rho) = (1, -0.5)$: observamos que a escolha adaptativa k_0^H é preferível a k_{01} para os estimadores MVRB em estudo uma vez que conduz à maior redução de EQM;
- Modelo Burr com $(\gamma, \rho) = (1, -1)$: constatamos que $\hat{R}_1 > \hat{R}_0$ para os estimadores em análise, qualquer que seja a dimensão da amostra, pelo que a escolha adaptativa k_{01} é preferível a k_0^H ;

- Modelo Burr com $(\gamma, \rho) = (1, -2)$: verificamos que o indicador $\widehat{R}_0$ apresenta uma tendência decrescente com a dimensão da amostra, sendo a tendência do indicador $\widehat{R}_1$ função do estimador MVRB em estudo. Desta forma, a melhor escolha adaptativa para este modelo é a de k_0^H para o estimador CH e de k_{01} para os estimadores ML e WH ($n \geq 200$);
- Modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$): neste modelo os indicadores apresentam, na generalidade, valores superiores a um, com excepção do indicador $\widehat{R}_0$. A melhor escolha adaptativa para este modelo é k_{01} .

5.3.2 Aplicação a dados reais

Consideremos novamente a sucessão cronológica da taxa de câmbio diária do Euro *versus* a Libra Inglesa, apresentada na Secção 4.6.1.1. A análise das escolhas adaptativas k_0^H e k_{01} , em (3.21) e (5.12), respectivamente, será efectuada com base nos $n_0 = 724$ log-retornos positivos, sendo as estimativas dos parâmetros de segunda ordem iguais a $(\widehat{\beta}, \widehat{\rho}) = (-0.69, 1.04)$. As estimativas do índice de cauda, dos estimadores em estudo, associadas às escolhas adaptativas k_0^H e k_{01} e os respectivos intervalos de confiança a 95% são apresentados na Tabela 5.6. Na Figura 5.3 apresentamos as trajectórias amostrais dos estimadores de Hill e de MVRB para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

Tabela 5.6: Estimativas do índice de cauda associadas às escolhas adaptativas $\widehat{k}_0^H$ e $\widehat{k}_{01}$ e respectivos intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para γ , associados aos estimadores H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

Escolha adaptativa	Estimativa	$(LIC_{\bullet}, LSC_{\bullet})$
$\widehat{k}_0^H = 59$	$H(\widehat{k}_0^H) = 0.296$	(0.2173, 0.3472)
$\widehat{k}_{01} = 120$	$CH(\widehat{k}_{01}) = 0.289$	(0.2454, 0.3524)
	$ML(\widehat{k}_{01}) = 0.285$	(0.2417, 0.3471)
	$WH(\widehat{k}_{01}) = 0.287$	(0.2438, 0.3496)

A estimativa escolhida para este conjunto de dados, baseada na escolha adaptativa k_{01} , é $ML(\widehat{k}_{01}) = 0.285$, uma vez que amplitude do intervalo de confiança assintótico a 95% é inferior à dos restantes intervalos, $h_{ML} = 0.1054 < h_{WH} = 0.1057 < h_{CH} = 0.1070$.

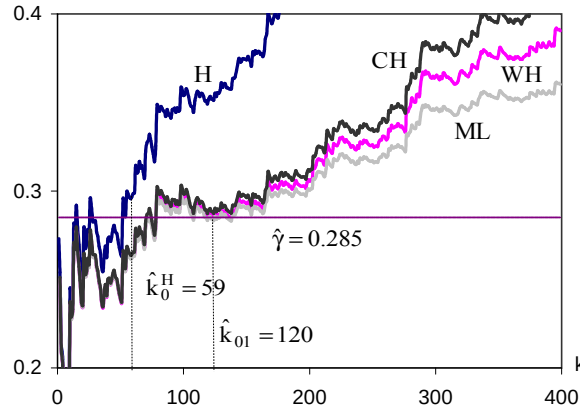


Figura 5.3: Estimativas fornecidas pelos estimadores do índice de cauda H , ML , CH e WH para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

5.4 Estimação de quantis elevados usando estimadores MVRB

Em diversas áreas de aplicação, como os Seguros, as Finanças e o Controlo Estatístico da Qualidade é fundamental a estimação de um quantil elevado, χ_{1-p} , de probabilidade $1 - p$, um valor tal que a probabilidade de ocorrência de uma excedência é igual a p , pequeno. Em Teoria de Risco este quantil elevado é, como vimos na Secção 4.6.1, designado de “Value at Risk” (VaR) e representa o risco de uma perda elevada que ocorre muito raramente.

Considerando valores pequenos de p , pretendemos estimar o parâmetro $\chi_{1-p} := F^{\leftarrow}(1 - p)$, sendo F a f.d. subjacente aos dados, i.e.,

$$\chi_{1-p} = U(1/p), \quad p = p_n \rightarrow 0, \quad np_n \rightarrow K \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad K \in [0, 1]. \quad (5.13)$$

Os modelos de caudas pesadas, $\gamma > 0$, satisfazem a condição de variação regular de primeira ordem, em (2.23), pelo que a função quantil $U \in RV_\gamma$, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} U(tx)/U(t) = x^\gamma$. Logo $U(t) \sim Ct^\gamma$, quando $t \rightarrow \infty$, para algum $C > 0$, e portanto

$$\chi_{1-p} = U(1/p) \sim Cp^{-\gamma}, \quad \text{quando } p \rightarrow 0.$$

Um estimador natural para χ_{1-p} é então $\widehat{C}p^{-\widehat{\gamma}}$, com $\widehat{C}$ e $\widehat{\gamma}$ dois estimadores consistentes de C e γ , respectivamente.

Seja Y uma v.a. Pareto unitária (i.e., $F_Y(y) = 1 - y^{-1}$, $y \geq 1$). A transformação uni-

formizante permite-nos escrever que $X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} U(Y_{n-k:n})$, e como para sucessões intermédias k , $Y_{n-k:n} \stackrel{p}{\sim} (n/k)$, podemos escrever que $X_{n-k:n} \stackrel{p}{\sim} C(n/k)^\gamma$, quando $n \rightarrow \infty$. Desta forma, um estimador possível de C , proposto por Hall [77], é

$$\widehat{C}(k) \equiv \widehat{C}_{\widehat{\gamma}}(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^{\widehat{\gamma}(k)} X_{n-k:n} \quad (5.14)$$

e

$$Q_{\widehat{\gamma}}^{(p)}(k) = \widehat{C} p^{-\widehat{\gamma}} = X_{n-k:n} (k/np)^{\widehat{\gamma}(k)} \quad (5.15)$$

é o estimador semi-paramétrico de χ_{1-p} proposto por Weissman [95]. O estimador clássico de γ usualmente considerado em (5.14) e (5.15) é o estimador de Hill, em (3.6).

Observação 5.11 *O estimador $\widehat{C}(k)$ é um estimador consistente de C para sucessões intermédias k satisfazendo (2.15). Se for válida a condição de segunda ordem, em (2.25), e impondo algumas restrições ao crescimento da sucessão k , mostra-se que é assintoticamente normal com viés eventualmente não-nulo, para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$. Os estudos de simulação de Gomes & Henriques Rodrigues [68] e de Caeiro [11] mostram que as trajetórias amostrais deste estimador são muito voláteis, apresentando para níveis $X_{n-k:n}$ elevados, i.e., para valores de k pequenos uma elevada variância e um viés elevado para níveis pequenos, i.e., para valores elevados de k .*

Para obtermos o comportamento assintótico do estimador $Q_H^{(p)}(k)$ necessitamos de apresentar os seguintes resultados referentes ao comportamento assintótico de e.o. intermédias.

Proposição 5.1 (Ferreira et al. [38]) *Se se verificar a condição de segunda ordem, em (2.25), e k for uma sequência intermédia de inteiros satisfazendo (2.15), então*

$$X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} U(n/k) \left(1 + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + o_p(A(n/k))\right), \quad (5.16)$$

onde B_k é assintoticamente normal padrão, e

$$\text{Cov}(B_i, B_j) = \sqrt{i} j \left(\frac{1 - j/n}{j - 1} \right), \quad i < j.$$

Corolário 5.1 *Nas condições da Proposição 5.1 e para modelos na classe de Hall-Welsh,*

$$\frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} \stackrel{d}{=} C \left(1 + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right). \quad (5.17)$$

Demonstração: Como $\frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} = \frac{X_{n-k:n}}{U(n/k)} \frac{U(n/k)}{(n/k)^\gamma}$, o resultado apresentado em (5.17) obtém-se directamente da Proposição 5.1 e das Observações 2.13 e 2.15. $\square$

Podemos então enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 5.3 *Seja F um modelo da classe de Hall-Welsh satisfazendo a condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, e k uma sequência intermédia de inteiros verificando (2.15), tal que $\ln(np)/\sqrt{k} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, com p em (5.13) e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, então*

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln(k/np)} \left(\frac{Q_H^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mathcal{N} \left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2 \right). \quad (5.18)$$

Demonstração: O estimador $Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}(k)$ pode ser escrito da seguinte forma,

$$Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}(k) - \chi_{1-p} = X_{n-k:n} \left[\left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}(k)} - \frac{\chi_{1-p}}{X_{n-k:n}} \right].$$

Como $\chi_{1-p} = U(1/p)$ e utilizando o resultado da Proposição 5.1,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{1-p}}{X_{n-k:n}} &= \frac{U\left(\frac{n}{k} \frac{k}{np}\right)}{U\left(\frac{n}{k}\right)} \times \frac{U\left(\frac{n}{k}\right)}{X_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np} \right)^\gamma \left(1 - \frac{(k/np)^\rho - 1}{\rho} A(n/k)(1 + o(1)) \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + o_p(A(n/k)) \right). \end{aligned}$$

Como $\frac{(k/np)^\rho - 1}{\rho} \rightarrow -1/\rho$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\frac{\chi_{1-p}}{X_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np} \right)^\gamma \left(1 - \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} - \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \right).$$

O método delta permite-nos escrever,

$$\left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}(k)} \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np} \right)^\gamma \left(1 + \ln \left(\frac{k}{np} \right) (\hat{\gamma}(k) - \gamma)(1 + o_p(1)) \right),$$

e logo, pelo Corolário 5.1,

$$Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}(k) - \chi_{1-p} \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np}\right)^{\gamma} X_{n-k:n} \left[\ln \left(\frac{k}{np}\right) (\hat{\gamma}(k) - \gamma) + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o(1)) \right].$$

Mas $\chi_{1-p} = \left(\frac{k}{np}\right)^{\gamma} U(n/k)$, e portanto

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{=} \sqrt{k} (\hat{\gamma}(k) - \gamma) + \frac{\gamma B_k}{\ln \left(\frac{k}{np}\right)} + \frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np}\right)} \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)).$$

Utilizando a representação em distribuição do estimador de Hill, em (3.20), e considerando níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$, então $\ln \left(\frac{k}{np}\right) \rightarrow \infty$, obtendo-se assim (5.18). $\square$

Detalhes sobre a estimação semi-paramétrica de quantis elevados para um índice de cauda $\gamma \in \mathbb{R}$ podem ser encontrados em de Haan & Rootzén [76], e mais recentemente em Ferreira *et al.* [38] e Matthys & Beirlant [83].

O nível óptimo $k_0^{Q_H}$ de e.o. de topo a usar na estimação de χ_{1-p} obtém-se minimizando o erro quadrático médio assintótico de $Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}$, sendo dado por,

$$k_0^{Q_H} \equiv k_0^{Q_H}(n, p; \beta, \rho) := \arg \min_k \left\{ \ln^2 \left(\frac{k}{np}\right) \left(\frac{1}{k} + \frac{\beta^2 (n/k)^{2\rho}}{(1-\rho)^2} \right) \right\}. \quad (5.19)$$

A redução de viés na estimação de quantis elevados tem sido objecto de estudo de diversos investigadores, como por exemplo, Matthys *et al.* [84], Gomes & Figueiredo [48], Gomes & Pestana [66] e Beirlant *et al.* [9]. Mais recentemente Caeiro & Gomes [16] obtiveram uma nova classe de estimadores de quantis elevados de viés reduzido baseada numa classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de primeira ordem C introduzida em Caeiro & Gomes [11].

A classe de estimadores semi-paramétricos de viés reduzido de χ_{1-p} considerada neste trabalho é,

$$Q_{UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}}^{(p)}(k) = X_{n-k:n} (k/np)^{UH}, \quad (5.20)$$

com $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$ denotando os estimadores do índice de cauda MVRB (5.1), (5.2) e (5.3). O compor-

tamento assintótico do estimador $Q_{CH\hat{\beta},\hat{\rho}}^{(p)}(k)$, obtido por Gomes & Pestana [66] e Beirlant *et al.* [9], pode facilmente ser generalizado para as classes de estimadores $ML_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$ e $WH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$, em (5.1) e (5.3), respectivamente.

Teorema 5.4 *Admita-se a validade da condição de segunda ordem, em (2.25), com $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, considerem-se sucessões intermédias de inteiros k satisfazendo (2.15) e tais que $\ln(np)/\sqrt{k} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, com p em (5.13) e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito. Denotando por $UH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$ os estimadores de viés reduzido de variância mínima, $ML_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$, $CH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$ e $WH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}$ dados em (5.1), (5.2) e (5.3), respectivamente e sendo $(\hat{\rho}, \hat{\beta})$ os estimadores dos parâmetros de segunda ordem em (3.49) e (3.59), respectivamente, calculados no nível k_1 satisfazendo a condição (3.56), então*

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln(k/np)} \left(\frac{Q_{UH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mathcal{N}(0, \gamma^2). \quad (5.21)$$

Demonstração: Na demonstração do Teorema 5.3 vimos que, sendo $\hat{\gamma}(k)$ um estimador consistente de γ

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{=} \sqrt{k}(\hat{\gamma}(k) - \gamma) + \frac{\gamma B_k}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} + \frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)).$$

Sabendo que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, quando $n \rightarrow \infty$, então $\ln\left(\frac{k}{np}\right) \rightarrow \infty$. Sendo $\hat{\rho}$ e $\hat{\beta}$ os estimadores dos parâmetros de segunda ordem calculados no nível k_1 satisfazendo a condição (3.56) então é válido o resultado apresentado no Teorema 5.2, obtendo-se assim (5.21). $\square$

Observação 5.12 *Como $\ln\left(\frac{k}{np}\right)$ tende para infinito muito lentamente podemos, para valores moderados de k e n , apresentar representações em distribuição pré-assintóticas. Assim, nas condições do Teorema 5.3 e para valores moderados de k e n é válido o seguinte resultado pré-assintótico,*

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_H^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\ln^2\left(\frac{k}{np}\right)}\right)\right),$$

e nas condições do Teorema 5.4 e para valores moderados de k e n é válido o seguinte resultado pré-assintótico,

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{UH_{\hat{\beta},\hat{\rho}}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}\left(0, \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\ln^2\left(\frac{k}{np}\right)}\right)\right).$$

5.4.1 Intervalos de confiança assintóticos para χ_{1-p} baseados em estimadores MVRB

Nesta Secoo começamos por apresentar o intervalo de confiança assintótico para o quantil χ_{1-p} , baseado na v.a. fulcral $Q_H^{(p)}$. Tendo em conta o resultado apresentado no Teorema 5.3 para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\gamma \ln(k/np)} \left(\frac{Q_H^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) - \frac{\beta(n/k)^\rho}{1-\rho} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Definindo $a_k := \frac{1.96}{\sqrt{k}} + \frac{\beta(n/k)^\rho}{1-\rho}$ e $b_k := \frac{1.96}{\sqrt{k}} - \frac{\beta(n/k)^\rho}{1-\rho}$, então

$$\mathbb{P} \left[\ln(k/np)^{-\gamma b_k} < \frac{Q_H^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 < \ln(k/np)^{\gamma a_k} \right] \approx 0.95.$$

Como a funoo exponencial  crescente em todo o seu domínio e utilizando a aproximao de primeira ordem $e^x = 1 + x$, quando $x \rightarrow 0$,

$$\mathbb{P} \left[(k/np)^{-\gamma b_k} < \frac{Q_H^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} < (k/np)^{\gamma a_k} \right] \approx 0.95$$

logo, o intervalo de confiança assintótico a 95% para χ_{1-p} , dependente de γ , 

$$\left(Q_H^{(p)}(k) \left(\frac{k}{np} \right)^{-\gamma a_k}, Q_H^{(p)}(k) \left(\frac{k}{np} \right)^{\gamma b_k} \right).$$

De modo a garantir uma probabilidade de cobertura de pelo menos 95%, e sendo LIC_H e LSC_H os limites inferior e superior de confiança introduzidos em (5.11), o intervalo de confiança assintótico para χ_{1-p}  dado por (LIC_{Q_H}, LSC_{Q_H}) , com

$$LIC_{Q_H} = Q_H^{(p)}(k) \min \left\{ \left(\frac{k}{np} \right)^{-a_k LIC_H(k)}, \left(\frac{k}{np} \right)^{-a_k LSC_H(k)} \right\}, \quad (5.22)$$

$$LSC_{Q_H} = Q_H^{(p)}(k) \max \left\{ \left(\frac{k}{np} \right)^{b_k LIC_H(k)}, \left(\frac{k}{np} \right)^{b_k LSC_H(k)} \right\}. \quad (5.23)$$

Relativamente ao estimador de viés reduzido $Q_{UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}}^{(p)}$, com $UH_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$ denotando os estimadores MVRB em (5.1), (5.2) e (5.3), vimos no Teorema 5.4 que, para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito,

$$\frac{\sqrt{k}}{\gamma \ln(k/np)} \left(\frac{Q_{UH, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Logo, o intervalo de confiança assintótico a 95% para χ_{1-p} é, para os estimadores MVRB, dado por,

$$\left(LIC_{Q_{UH}}, LSC_{Q_{UH}} \right) = Q_{UH, \hat{\beta}, \hat{\rho}}^{(p)}(k) \left(\left(\frac{k}{np} \right)^{-\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}}, \left(\frac{k}{np} \right)^{\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}} \right). \quad (5.24)$$

Observação 5.13 *Note-se que, apesar de a expressão associada ao intervalo de confiança assintótico para χ_{1-p} , em (5.24), ser mais simples do que a apresentada em (5.22) e (5.23), a probabilidade de cobertura é de pelo menos 95%. De facto,*

$$\min \left\{ \left(\frac{k}{np} \right)^{-\frac{1.96 LIC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}}, \left(\frac{k}{np} \right)^{-\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}} \right\} = \left(\frac{k}{np} \right)^{-\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}}$$

e

$$\max \left\{ \left(\frac{k}{np} \right)^{\frac{1.96 LIC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}}, \left(\frac{k}{np} \right)^{\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}} \right\} = \left(\frac{k}{np} \right)^{\frac{1.96 LSC_{UH}(k)}{\sqrt{k}}},$$

o que justifica os limites em (5.24).

De modo semelhante ao efectuado na Secção 5.2.1 para o índice de cauda, γ , ilustramos de seguida o comportamento dos estimadores de quantis elevados e dos respectivos intervalos de confiança para os log-retornos positivos da taxa de câmbio diária do Euro *versus* a Libra Inglesa (ver Secção 4.6.1.1).

Assim, na Figura 5.4 apresentamos as trajectórias amostrais do estimador, $Q_H^{(p)}$, proposto por Weissman e dos estimadores MVRB em estudo, com $p = 0.001$. Utilizando um argumento heurístico semelhante ao apresentado na Secção 5.2.1, trabalhamos apenas com níveis k inferiores ou iguais a $k_b := \min \{k : LSC_{Q_H} < Q_H\}$. O valor obtido para k_b é igual 121, ao qual correspondem as seguintes estimativas de $\chi_{0.999}$, $\hat{\chi}_{0.999|ML} = 2.821$, $\hat{\chi}_{0.999|CH} = 2.887$ e $\hat{\chi}_{0.999|WH} = 2.845$.

Para o estimador clássico, $Q_H^{(p)}$, a estimativa do nível “óptimo”, obtida numericamente, é de

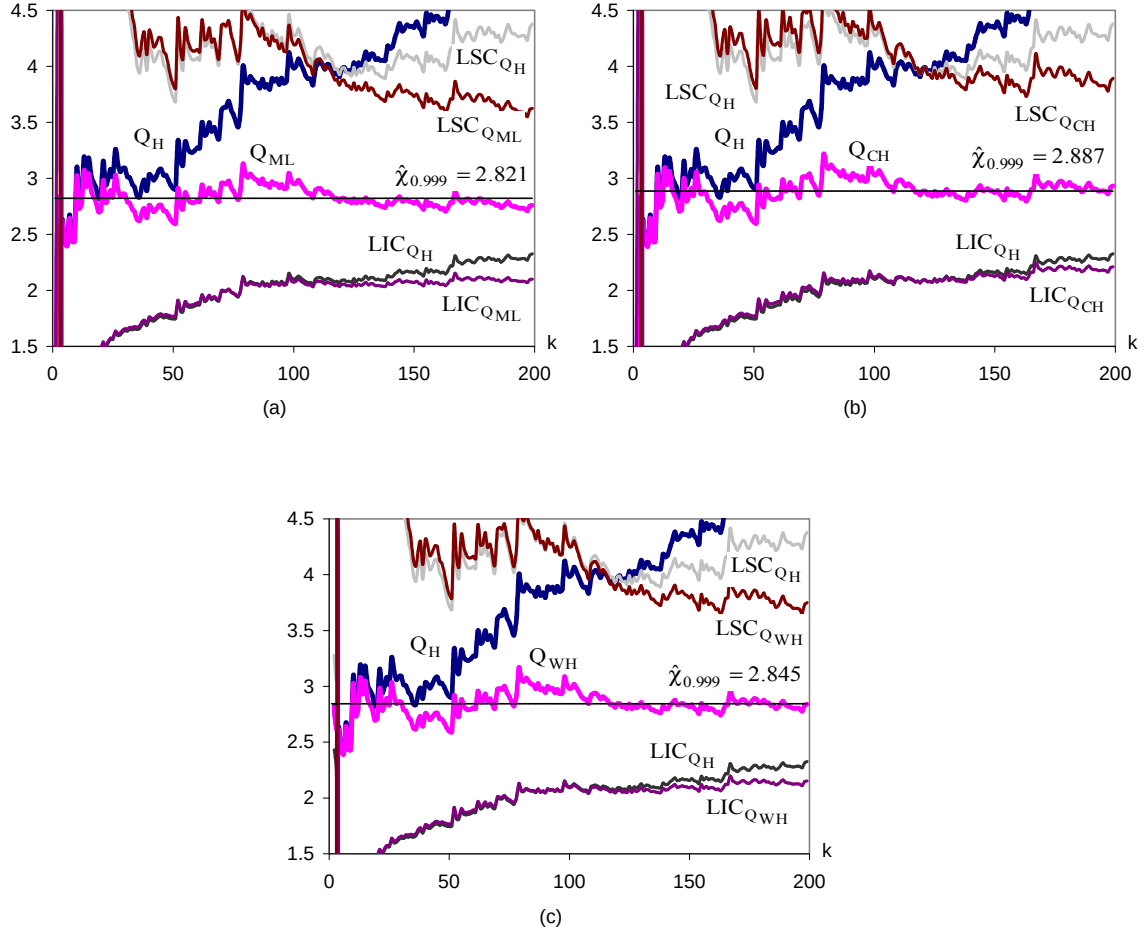


Figura 5.4: Estimativas fornecidas pelos estimadores de quantis elevados (a) (Q_H, Q_{ML}) , (b) (Q_H, Q_{CH}) e (c) (Q_H, Q_{WH}) , e correspondentes intervalos de confiança a 95% para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

$$k_0^{Q_H} = 39, \text{ e } \hat{\chi}_{0.999|H} = 2.890.$$

Em alternativa ao nível k_b poderíamos também utilizar a escolha adaptativa k_{01} , em (5.12). A informação relativa às estimativas obtidas e respectivos intervalos de confiança encontra-se na Tabela 5.7 e na Figura 5.5.

A estimativa escolhida para este conjunto de dados, baseada na escolha adaptativa k_{01} , é $Q_{ML}(\hat{k}_{01}) = 2.821$, uma vez que a amplitude do intervalo de confiança assintótico a 95% é inferior à dos restantes intervalos, $h_{Q_{ML}} = 1.821 < h_{Q_{WH}} = 1.846 < h_{Q_{CH}} = 1.891$.

Finalizamos este Capítulo referindo ainda que para além dos métodos semi-paramétricos de

Tabela 5.7: Estimativas do quantil elevado $\chi_{0.999}$ associadas às escolhas adaptativas $\hat{k}_0^{Q_H}$, k_b e $\hat{k}_{01}$ e respectivos intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

Escolha adaptativa	Estimativa	$(LIC_\bullet, LSC_\bullet)$	h
$\hat{k}_0^{Q_H} = 59$	$Q_H(\hat{k}_0^{Q_H}) = 2.890$	$(1.686, 3.962)$	2.276
$k_b = 121$	$Q_{CH}(k_b) = 2.887$	$(2.092, 3.983)$	1.891
	$Q_{ML}(k_b) = 2.821$	$(2.055, 3.874)$	1.819
	$Q_{WH}(k_b) = 2.845$	$(2.068, 3.913)$	1.845
$\hat{k}_{01} = 120$	$Q_{CH}(\hat{k}_{01}) = 2.885$	$(2.090, 3.982)$	1.891
	$Q_{ML}(\hat{k}_{01}) = 2.821$	$(2.054, 3.875)$	1.821
	$Q_{WH}(\hat{k}_{01}) = 2.844$	$(2.067, 3.913)$	1.846

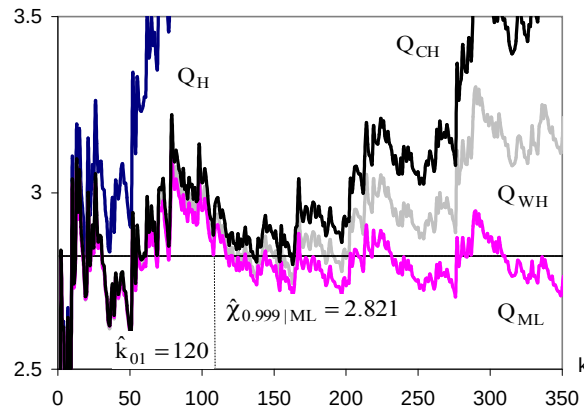


Figura 5.5: Estimativas fornecidas pelos estimadores de quantis elevados Q_H , Q_{ML} , Q_{CH} e Q_{WH} para os log-retornos diários do Euro *versus* a Libra Inglesa.

estimação do índice de cauda, γ , e de quantis elevados, existem na literatura diversos métodos paramétricos para estimação destes parâmetros de acontecimentos raros. De entre os vários procedimentos de estimação referimos o método percentil introduzido em Castillo & Hadi [20, 21] para estimação de parâmetros e quantis da distribuição GEV , $\gamma \in \mathbb{R}$. No contexto de modelos de cauda pesada, i.e., quando $\gamma > 0$, a distribuição $GEV(\gamma > 0)$ é designada de *Fréchet*(γ). Efectuámos um pequeno estudo de simulação, via método de Monte Carlo, e uma aplicação a dados reais para compararmos o desempenho dos estimadores paramétricos de Castillo & Hadi com os estimadores semi-paramétricos clássicos e de MVRB do índice de valores extremos e de quantis elevados. Os resultados obtidos podem ser consultados em Gomes *et al.* [67].

Capítulo 6

Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros usando a Metodologia PORT

Neste Capítulo apresentamos uma nova classe de estimadores semi-paramétricos de um quantil elevado, χ_{1-p} , de probabilidade $1 - p$, com p pequeno. A estimação semi-paramétrica deste parâmetro de acontecimentos raros depende, como vimos na Secção 5.4, da estimação adequada do índice de cauda, γ , e do parâmetro de escala de primeira ordem C . No entanto, as classes de estimadores existentes na literatura [95, 48, 16] não exibem um comportamento adequado na presença de transformações lineares dos dados, i.e., não satisfazem uma condição equivalente à seguinte relação linear,

$$\chi_{1-p}(s + \delta X) = s + \delta \chi_{1-p}(X), \quad (6.1)$$

válida para qualquer modelo X , $s \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$.

A derivação da nova classe de estimadores é realizada no contexto de modelos de cauda pesada pertencentes à classe de Hall-Welsh, com função quantil satisfazendo, para $\gamma > 0$, $\rho < 0$, $C > 0$ e $\beta \neq 0$, o seguinte desenvolvimento,

$$U(t) = C t^\gamma \left(1 + \frac{\gamma \beta t^\rho}{\rho} (1 + o(1)) \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

e baseia-se na aplicação da metodologia PORT (do inglês “*peaks over random threshold*”) à

classe de estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, C , introduzida em Caeiro [11], juntamente com as classes de PORT-estimadores do índice de valores extremos, PORT-Hill e PORT-Momentos, introduzidas em Araújo Santos *et al.* [2].

A classe de estimadores proposta neste trabalho, invariante para mudanças de localização e satisfazendo uma transformação linear adequada é obtida com base na amostra dos excessos acima de um nível aleatório, X_{n_q} , designada de amostra PORT,

$$\underline{X}_n^{(q)} := (X_{n:n} - X_{n_q:n}, X_{n-1:n} - X_{n_q:n}, \dots, X_{n_q+1:n} - X_{n_q:n}), \quad (6.2)$$

onde $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$, é a amostra das e.o. ascendentes associadas à a.a. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $n_q := [nq] + 1$, com:

- $0 < q < 1$, para qualquer $F \in D_{\mathcal{M}}(G_{\gamma>0})$ (o nível aleatório, $X_{n_q:n}$, é um quantil empírico);
- $q = 0$, para f.d. com limite inferior do suporte finito $x_F := \inf\{x : F(x) > 0\}$ (o nível aleatório é o mínimo, $X_{1:n}$).

6.1 PORT-Estimadores do índice de valores extremos

Nesta Secção começamos por apresentar alguns resultados assintóticos preliminares, em contexto de segunda ordem, associados à metodologia PORT. Seguidamente, analisamos o comportamento assintótico das classes de PORT-estimadores do índice de cauda utilizadas neste trabalho, a PORT-Hill, denotada por $\hat{\gamma}_n^{H(q)} := \hat{\gamma}_n^H(\underline{X}_n^{(q)})$, e a PORT-Momentos, denotada por $\hat{\gamma}_n^{M(q)} := \hat{\gamma}_n^M(\underline{X}_n^{(q)})$, introduzidas em Araújo Santos *et al.* [2], e dadas respectivamente por,

$$\hat{\gamma}_n^{H(q)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{X_{n-i+1:n} - X_{n_q:n}}{X_{n-k:n} - X_{n_q:n}} \right), \quad (6.3)$$

$$\hat{\gamma}_n^{M(q)}(k) = M_n^{(1,q)}(k) + 1 - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(M_n^{(1,q)}(k) \right)^2 / M_n^{(2,q)}(k) \right\}^{-1}, \quad (6.4)$$

sendo a estatística $M_n^{(\alpha,q)}(k) = M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n^{(q)})$, definida para $k < n - n_q$, com $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) \equiv M_n^{(\alpha)}(k)$ em (3.3), baseada na amostra de excessos $\underline{X}_n^{(q)}$, $0 \leq q < 1$, em (6.2). O estudo do comportamento destas classes em amostras de dimensão finita foi efectuado em Gomes *et al.* [49].

No que se segue denotamos por χ_q^* o q -ésimo quantil da f.d. F , i.e., $F(\chi_q^*) = q$ (por convenção $\chi_0^* := x_F$), tal que

$$X_{n_q:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \chi_q^*, \quad \text{para } 0 \leq q < 1. \quad (6.5)$$

Enunciamos sem demonstrar o seguinte Lema:

Lema 6.1 (Araújo Santos *et al.* [2]) *Admitindo a validade da condição de segunda ordem, em (2.25), considerando sucessões intermédias k , verificando (2.15), para qualquer número real q , $0 < q < 1$ ou $q = 0$ desde que χ_0^* seja finito, e $\alpha = 1, 2$,*

$$M_n^{(\alpha,q)}(k) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n} - \chi_q^*}{X_{n-k:n} - \chi_q^*} \right)^\alpha = o_p \left(\frac{1}{U(n/k)} \right).$$

Observação 6.1 *Note-se que se $q \in (0, 1)$, $X_{n_q:n} - \chi_q^* = O_p(1/\sqrt{n})$ e portanto*

$$\sqrt{k} \left[M_n^{(\alpha,q)}(k) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n} - \chi_q^*}{X_{n-k:n} - \chi_q^*} \right)^\alpha \right] = O_p \left(\frac{\sqrt{k/n}}{U(n/k)} \right) = o_p(1).$$

Proposição 6.1 *Considerando sucessões intermédias k , satisfazendo (2.15), e admitindo a validade da condição de segunda ordem, em (2.25), obtemos para $M_n^{(\alpha,q)}(k) = M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n^{(q)})$, com $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) \equiv M_n^{(\alpha)}(k)$ definido em (3.3) e $\alpha = 1, 2$, as seguintes igualdades em distribuição,*

$$M_n^{(1,q)}(k) \stackrel{d}{=} M_n^{(1)}(k) + \frac{\gamma \chi_q^*}{(1 + \gamma) U(n/k)} (1 + o_p(1)), \quad (6.6)$$

$$M_n^{(2,q)}(k) \stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\gamma^2 (2 + \gamma) \chi_q^*}{(1 + \gamma)^2 U(n/k)} (1 + o_p(1)). \quad (6.7)$$

Demonstração: O primeiro momento dos log-excessos pode ser dado por,

$$M_n^{(1,q)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{X_{n-i+1:n} - X_{n_q:n}}{X_{n-k:n} - X_{n_q:n}} \right) = M_n^{(1)}(k) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}}}{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}}} \right),$$

e utilizando a aproximação $\ln(1 + x) \sim x$, quando $x \rightarrow 0$, obtemos,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}}}{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}}} \right) \sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}} - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}} \left(1 - \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) \right].$$

Sendo k uma sucessão intermédia e Y uma v.a. Pareto unitária, $Y_{n-k:n} \stackrel{p}{\sim} (n/k)$, e, portanto

$$\begin{aligned} M_n^{(1,q)}(k) &= M_n^{(1)}(k) + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(1)}(k) + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - Y_i^{-\gamma} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Sabendo que $\mathbb{E}[Y^{-\gamma}] = \frac{1}{1+\gamma}$ e aplicando a lei fraca dos grandes números obtemos (6.6). Para $\alpha = 2$ e usando o mesmo tipo de procedimento, obtemos

$$\begin{aligned} M_n^{(2,q)}(k) &\stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \left(1 - Y_i^{-\gamma} \right) (1 + o_p(1)) \right]^2 \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right) \left(1 - Y_i^{-\gamma} \right) (1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\chi_q^*}{U(n/k)} \left[M_n^{(1)} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\gamma \ln Y_i Y_i^{-\gamma} \right) (1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Sabendo que $\mathbb{E}[\ln Y Y^{-\gamma}] = \frac{1}{(1+\gamma)^2}$ e aplicando a lei fraca dos grandes números obtemos (6.7). □

O comportamento em distribuição da estatística $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) \equiv M_n^{(\alpha)}(k)$, em (3.3), foi obtido por Martins [81] no contexto de variação regular de segunda ordem considerando sucessões intermédias k , sendo pois um caso particular do resultado apresentado no Teorema 3.1. Assim, a estatística $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) \equiv M_n^{(\alpha)}(k)$, com $\alpha = 1, 2$, satisfaz as seguintes representações em distribuição,

$$M_n^{(1)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma Z_k^{(1)}}{\sqrt{k}} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} (1 + o_p(1)), \quad (6.8)$$

$$M_n^{(2)}(k) \stackrel{d}{=} 2\gamma^2 + \frac{2\sqrt{5}\gamma^2 Z_k^{(2)}}{\sqrt{k}} + \frac{2\gamma(1-(1-\rho)^2)}{\rho(1-\rho)^2} A(n/k) (1 + o_p(1)), \quad (6.9)$$

onde $Z_k^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, em (3.15), são v.a. com distribuição assintótica normal padrão.

Com base nos resultados apresentados na Proposição 6.1 e nas representações (6.8) e (6.9) enunciamos o seguinte Teorema, respeitante ao comportamento em distribuição dos PORT-estimadores Hill e Momentos. A demonstração deste Teorema pode ser consultada em Araújo

Santos *et al.* [2].

Teorema 6.1 (Araújo Santos *et al.* [2]) *Admitindo a validade da condição de variação regular de segunda ordem, em (2.25), considerando sucessões intermédias de inteiros k , satisfazendo (2.15), e para qualquer número real q , $0 < q < 1$ ou $q = 0$ desde que χ_0^* seja finito, obtemos para os estimadores PORT-Hill (H), em (6.3), e PORT-Momentos (M), em (6.4), com T denotando H ou M , a seguinte representação em distribuição,*

$$\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma_T P_k^T}{\sqrt{k}} + \left(b_T A(n/k) + c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)), \quad (6.10)$$

onde P_k^T é uma v.a assintoticamente normal padrão, $P_k^H = Z_k^{(1)}$ a v.a. definida em (3.15) e,

$$\sigma_H^2 := \gamma^2; \quad b_H := \frac{1}{1-\rho}; \quad c_H := \frac{\gamma}{1+\gamma}; \quad (6.11)$$

$$\sigma_M^2 := 1 + \gamma^2; \quad b_M := \frac{\gamma(1-\rho) + \rho}{\gamma(1-\rho)^2}; \quad c_M := \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}. \quad (6.12)$$

Corolário 6.1 *Nas condições do Teorema 6.1, são válidos os seguintes resultados:*

- Para valores de $\gamma + \rho < 0$ e $\chi_q^* \neq 0$,

$$\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma_T P_k^T}{\sqrt{k}} + c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} (1 + o_p(1)).$$

Se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ finito, então

$$\sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_1 c_T \chi_q^*, \sigma_T^2).$$

- Para valores de $\gamma + \rho > 0$ ou $(\gamma + \rho \leq 0 \text{ e } \chi_q^* = 0)$,

$$\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma_T P_k^T}{\sqrt{k}} + b_T A(n/k) (1 + o_p(1)).$$

Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$ finito, então

$$\sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_2 b_T, \sigma_T^2).$$

- Para valores de $\gamma + \rho = 0$ e $\chi_q^* \neq 0$,

$$\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\sigma_T P_k^T}{\sqrt{k}} + \left(b_T A(n/k) + c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)).$$

Se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$, com λ_1 e λ_2 ambos finitos, então

$$\sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_1 c_T \chi_q^* + \lambda_2 b_T, \sigma_T^2).$$

6.1.1 Comparação assintótica nos níveis óptimos dos PORT-estimadores do índice de cauda, γ

Nesta Secção efectuamos uma comparação assintótica dos PORT-estimadores do índice de valores extremos, γ , nos respectivos níveis óptimos. A metodologia utilizada baseia-se numa adaptação da metodologia apresentada na Secção 4.5.1 para os estimadores de máxima verosimilhança de γ .

Seja $\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)$ um PORT-estimador semi-paramétrico do índice de cauda, com representação em distribuição,

$$\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k) = \gamma + \frac{\sigma_{\bullet}}{\sqrt{k}} P_k^{\bullet} + \left(b_{\bullet} A(n/k) + c_{\bullet} \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)), \quad (6.13)$$

válida para sequências intermédias de inteiros positivos k e onde $P_k^{\bullet}$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão. Pelos resultados obtidos no Corolário 6.1, o erro quadrático médio assintótico (*AMSE*) de $\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)$ é

$$AMSE[\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)] := \begin{cases} \frac{\sigma_{\bullet}^2}{k} + c_{\bullet}^2 \frac{(\chi_q^*)^2}{U^2(n/k)}, & \text{se } \rho < -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \frac{\sigma_{\bullet}^2}{k} + b_{\bullet}^2 A^2(n/k), & \text{se } \rho > -\gamma \vee (\rho \leq -\gamma \wedge \chi_q^* = 0) \\ \frac{\sigma_{\bullet}^2}{k} + \left(b_{\bullet} + c_{\bullet} \frac{\chi_q^*}{C\gamma\beta} \right)^2 A^2(n/k), & \text{se } \rho = -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

onde $\text{Var}_{\infty}[\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)] := \sigma_{\bullet}^2/k$ e

$$Viés_{\infty}[\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)] := \begin{cases} c_{\bullet} \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} = d_{\bullet}^{(1)}, & \text{se } \rho < -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ b_{\bullet} A(n/k) = d_{\bullet}^{(2)} A(n/k), & \text{se } \rho > -\gamma \vee (\rho \leq -\gamma \wedge \chi_q^* = 0) \\ \left(b_{\bullet} + c_{\bullet} \frac{\chi_q^*}{C\gamma\beta} \right) A(n/k) = d_{\bullet}^{(3)} A(n/k), & \text{se } \rho = -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0, \end{cases}$$

com $d_{\bullet}^{(1)} := c_{\bullet} \chi_q^*$, $d_{\bullet}^{(2)} := b_{\bullet}$ e $d_{\bullet}^{(3)} := b_{\bullet} + c_{\bullet} \frac{\chi_q^*}{C_{\gamma\beta}}$.

Seja $k_0^{\bullet(q)} := \arg \inf_k AMSE[\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)]$ o nível óptimo para a estimação de γ do PORT-estimador $\hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k)$, i.e., o nível com menor erro quadrático médio assintótico, e denote-se por $\hat{\gamma}_{n0}^{\bullet(q)} := \hat{\gamma}_n^{\bullet(q)}(k_0^{\bullet(q)}(n))$, o estimador calculado no respectivo nível óptimo. Recorrendo a resultados sobre a teoria de Variação Regular é possível mostrar que, quando $d_{\bullet}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, existe uma função $\varphi(n) = \varphi(n; \rho, \gamma)$, dependente do modelo subjacente aos dados, e não do estimador, tal que

$$LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{\bullet(q)}] := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) AMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{\bullet(q)}] = \begin{cases} \frac{1+2\gamma}{2\gamma} (\sigma_{\bullet}^2)^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}} \left((d_{\bullet}^{(1)})^2 \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}}, & \text{se } \rho < -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \frac{2\rho-1}{2\rho} (\sigma_{\bullet}^2)^{-\frac{2\rho}{1-2\rho}} \left((d_{\bullet}^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{1-2\rho}}, & \text{se } \rho > -\gamma \vee (\rho \leq -\gamma \wedge \chi_q^* = 0) \\ \frac{2\rho-1}{2\rho} (\sigma_{\bullet}^2)^{-\frac{2\rho}{1-2\rho}} \left((d_{\bullet}^{(3)})^2 \right)^{\frac{1}{1-2\rho}}, & \text{se } \rho = -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

onde $LMSE$ representa o erro quadrático médio limite (do inglês “*limiting mean-squared error*”).

Podemos então definir para os PORT-estimadores a seguinte medida de eficiência relativa assintótica:

Definição 6.1 Dados dois PORT-estimadores $\hat{\gamma}_{n0}^{T_1(q)} = \hat{\gamma}_n^{\bullet}(k_0^{T_1(q)}(n))$ e $\hat{\gamma}_{n0}^{T_2(q)} = \hat{\gamma}_n^{\bullet}(k_0^{T_2(q)}(n))$, verificando a representação em distribuição (6.13) com constantes $(\sigma_{T_1}, d_{T_1}^{(i)})$ e $(\sigma_{T_2}, d_{T_2}^{(i)})$, $d_{T_i}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, respectivamente, calculados nos seus níveis óptimos, a raiz quadrada da eficiência assintótica, ($AREFF$, do inglês “*asymptotic root efficiency*”), de $\hat{\gamma}_n^{T_1(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{T_2(q)}$ é

$$AREFF_{T_1(q)|T_2(q)} \equiv AREFF_{\hat{\gamma}_n^{T_1(q)}|\hat{\gamma}_n^{T_2(q)}} := \sqrt{LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{T_2(q)}] / LMSE[\hat{\gamma}_{n0}^{T_1(q)}]},$$

com $LMSE$ dado em (6.15).

Observação 6.2 Os níveis óptimos $k_0^{T(q)}$ para a estimação de γ através dos estimadores $\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k)$, com $T = H$ ou M são denotados por $k_0^{H(q)}$ e $k_0^{M(q)}$, e dados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Níveis óptimos para a estimação de γ associados aos estimadores PORT-Hill e PORT-Momentos.

$k_0^{T(q)}$	$H(q)$	$M(q)$
$\rho < -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0$	$\left(\frac{C(1+\gamma)n^\gamma}{ \chi_q^* \sqrt{2\gamma}} \right)^{2/(1+2\gamma)}$	$\left(\frac{C\sqrt{1+\gamma^2}(1+\gamma)^2n^\gamma}{\gamma^2 \chi_q^* \sqrt{2\gamma}} \right)^{2/(1+2\gamma)}$
$\rho > -\gamma \vee (\rho \leq -\gamma \wedge \chi_q^* = 0)$	$\left(\frac{(1-\rho)n^{-\rho}}{ \beta \sqrt{-2\rho}} \right)^{2/(1-2\rho)}$	$\left(\frac{\sqrt{1+\gamma^2}(1-\rho)^2n^{-\rho}}{ \gamma(1-\rho)+\rho \beta \sqrt{-2\rho}} \right)^{2/(1-2\rho)}$
$\rho = -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0$	$\left(\frac{C(1-\rho)n^{-\rho}}{ \beta C+\chi_q^* \sqrt{-2\rho}} \right)^{2/(1-2\rho)}$	$\left(\frac{C\sqrt{1+\rho^2}(1-\rho)^2n^{-\rho}}{\rho^2 \beta C+\chi_q^* \sqrt{-2\rho}} \right)^{2/(1-2\rho)}$

Proposição 6.2 O indicador $AREFF$ de $\hat{\gamma}_n^{M(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{H(q)}$ é:

$$AREFF_{M(q)|H(q)} = \begin{cases} \left(\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^{\frac{\gamma}{1+2\gamma}} \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1+2\gamma}}, & \text{se } \rho < -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \left(\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^{\frac{-\rho}{1-2\rho}} \left(\frac{\gamma(1-\rho)}{|\gamma(1-\rho)+\rho|} \right)^{\frac{1}{1-2\rho}}, & \text{se } \rho > -\gamma \vee (\rho \leq -\gamma \wedge \chi_q^* = 0) \\ \left(\frac{\rho^2}{1+\rho^2} \right)^{\frac{-\rho}{1-2\rho}} \left(-\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{\frac{1}{1-2\rho}}, & \text{se } \rho = -\gamma \wedge \chi_q^* \neq 0. \end{cases}$$

Observação 6.3 Se $\chi_q^* = 0$, o indicador $AREFF_{H(q)|M(q)}$ é igual ao indicador $AREFF_{H|M}$, dos estimadores semi-paramétricos clássicos do índice de cauda, com H e M denotando os estimadores de Hill e de Momentos, em (3.6) e (3.22), respectivamente. O estimador de Momentos, em (3.22), tem na linha (γ, ρ) dada por $\gamma = -\rho/(1-\rho)$ um viés assintótico nulo, sendo pois um estimador de viés reduzido de segunda ordem para estes valores de (γ, ρ) .

As medidas $AREFF_{M(q)|H(q)}$, para $\chi_q^* \neq 0$, e $AREFF_{H(q)|M(q)}$, para $\chi_q^* = 0$, são apresentadas nas Figuras 6.1 e 6.2, respectivamente, onde se pode ver que o ganho de eficiência dos PORT-estimadores ocorre para uma vasta região de valores de (γ, ρ) .

6.2 Nova classe de PORT-estimadores de quantis elevados

Recentemente, e para $\gamma > 0$, foi introduzido em Araújo Santos *et al.* [2] uma nova classe de estimadores de quantis elevados satisfazendo uma condição equivalente à relação linear (6.1), baseados na amostra $\underline{X}_n^{(q)}$, designados de PORT-estimadores de quantis elevados, e com expressão

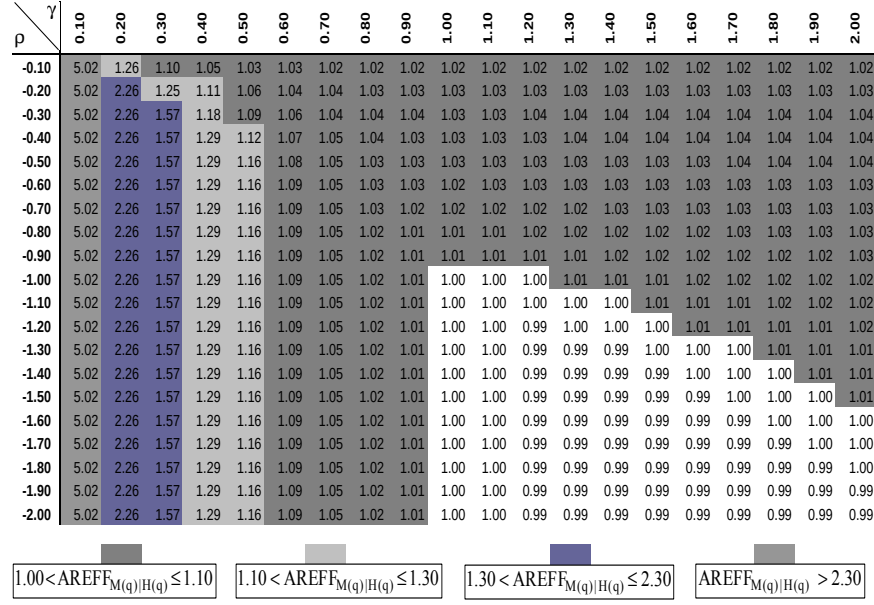


Figura 6.1: Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{M(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{H(q)}$ no plano (γ, ρ) quando $\chi_q^* \neq 0$.

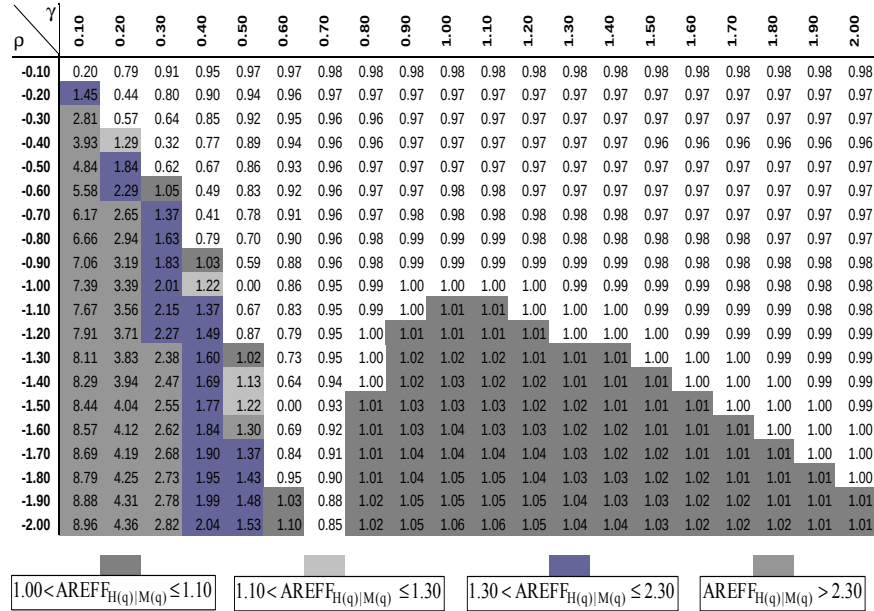


Figura 6.2: Eficiência assintótica relativa de $\hat{\gamma}_n^{H(q)}$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^{M(q)}$ no plano (γ, ρ) quando $\chi_q^* = 0$.

funcional,

$$\tilde{Q}_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) := (X_{n-k:n} - X_{n_q:n}) \left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} + X_{n_q:n}, \quad (6.16)$$

sendo $\hat{\gamma}_n^{T(q)}$ um estimador consistente de γ e invariante para mudanças de localização/escala.

Observação 6.4 *A classe de estimadores, em (6.16), obtém-se a partir do estimador clássico de quantis proposto por Weissmam [95], em (5.15), baseado na amostra $\underline{X}_n^{(q)}$. O termo adicional $X_{n_q:n}$ é introduzido de modo a obter uma condição equivalente à relação linear (6.1).*

Neste trabalho aplicamos a metodologia PORT a uma classe de estimadores de quantis elevados introduzida em Caeiro & Gomes [16]. Assim, a classe de PORT-estimadores de quantis elevados em estudo, invariante para mudanças de localização/escala, e verificando uma condição equivalente à relação (6.1) é

$$Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) := \frac{X_{n-[k/2]:n} - X_{n-k:n}}{2^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} - 1} \left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} + X_{n_q:n}. \quad (6.17)$$

Observação 6.5 *O estimador (6.17) pode ser reescrito da seguinte forma,*

$$Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) = \hat{C}_{T(q)} p^{-\hat{\gamma}_n^{T(q)}} + X_{n_q:n},$$

onde

$$\hat{C}_{T(q)} = \hat{C}_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}(k) := \frac{X_{n-[k/2]:n} - X_{n-k:n}}{2^{\hat{\gamma}_n^{T(p)}} - 1} \left(\frac{k}{n} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(p)}}$$

é um estimador semi-paramétrico de C , invariante para mudanças de localização, e designado de estimador PORT- C , com $\hat{\gamma}_n^{T(q)} := \hat{\gamma}_n^T(\underline{X}_n^{(q)})$, $0 \leq q < 1$, e $T = H$ ou M . O comportamento assintótico deste estimador foi obtido por Henriques Rodrigues & Gomes [79], em contexto de variação regular de segunda ordem.

6.3 Propriedades assintóticas

Nesta Secção pretendemos estudar o comportamento assintótico dos novos estimadores em contexto de segunda ordem.

Teorema 6.2 *Se se verificar a condição de segunda ordem, (2.25), com $A(t) = \gamma\beta t^p$, se k for uma sequência intermédia de inteiros, satisfazendo (2.15), tal que $\ln(np)/\sqrt{k} \rightarrow 0$, com p em*

(5.13), então, para qualquer número real q , $0 < q < 1$ ou $q = 0$ desde que χ_0^* seja finito, com T denotando H ou M , é válida a seguinte representação em distribuição

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) &\stackrel{d}{=} \sigma_T P_k^T + \sqrt{k} \left(b_T A(n/k) + c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)) \\ &- \left\{ \frac{\sqrt{k} A(n/k)}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(b_T \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} \right) + \frac{\sqrt{k} \chi_q^*}{U(n/k) \ln\left(\frac{k}{np}\right)} \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right\} (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (6.18)$$

com (σ_T, b_T, c_T) em (6.11) e (6.12), respectivamente, e sendo P_k^T uma v.a. assintoticamente normal padrão.

Demonstração: O PORT-estimador de quantis elevados, (6.17), pode ser reescrito da seguinte forma,

$$Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) := X_{n-k:n} \left[\left(\frac{X_{n-[k/2]:n}}{X_{n-k:n}} - 1 \right) \frac{1}{2^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} - 1} \left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} + \frac{X_{nq:n}}{X_{n-k:n}} \right],$$

logo,

$$Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) - \chi_{1-p} = X_{n-k:n} \left[\left(\frac{X_{n-[k/2]:n}}{X_{n-k:n}} - 1 \right) \frac{1}{2^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} - 1} \left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} + \frac{X_{nq:n}}{X_{n-k:n}} - \frac{\chi_{1-p}}{X_{n-k:n}} \right].$$

Dada a validade de (6.5) podemos escrever que $\frac{X_{nq:n}}{X_{n-k:n}} = o_p(1)$, e recorrendo à condição de segunda ordem, (2.25), obtemos

$$\frac{X_{n-[k/2]:n}}{X_{n-k:n}} = \frac{U\left(\frac{2^n}{k}\right)}{U\left(\frac{n}{k}\right)} \stackrel{d}{=} 2^\gamma \left(1 + \frac{2^\rho - 1}{\rho} A(n/k)(1 + o(1)) \right).$$

Como $\chi_{1-p} = U(1/p)$, $\frac{(k/np)^{\rho-1}}{\rho} \rightarrow -1/\rho$ e utilizando o resultado da Proposição 5.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{1-p}}{X_{n-k:n}} &= \frac{U\left(\frac{n}{k} \frac{k}{np}\right)}{U\left(\frac{n}{k}\right)} \times \frac{U\left(\frac{n}{k}\right)}{X_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np} \right)^\gamma \left(1 - \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o(1)) \right) \\ &\times \left(1 - \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + o_p(A(n/k)) \right) = \left(\frac{k}{np} \right)^\gamma \left(1 - \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} - \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \right). \end{aligned}$$

O método delta permite-nos escrever

$$\frac{\left(\frac{k}{np} \right)^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}}{2^{\hat{\gamma}_n^{T(q)}} - 1} \stackrel{d}{=} \frac{\left(\frac{k}{np} \right)^\gamma}{2^\gamma - 1} \left(1 + \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \left(\ln\left(\frac{k}{np}\right) - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right) (1 + o_p(1)) \right).$$

Logo, e pelo Corolário 5.1

$$\begin{aligned} Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) - \chi_{1-p} &\stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np}\right)^\gamma X_{n-k:n} \left[\left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \left(\ln \left(\frac{k}{np} \right) - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right) (1 + o_p(1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} A(n/k)(1 + o_p(1)) \right] \\ &\stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np}\right)^\gamma U(n/k) \left(1 + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) \\ &\times \left[\left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \left(\ln \left(\frac{k}{np} \right) - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right) (1 + o_p(1)) + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} A(n/k)(1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, então

$$\begin{aligned} Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k) - \chi_{1-p} &\stackrel{d}{=} \left(\frac{k}{np}\right)^\gamma U(n/k) \left[\left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \left(\ln \left(\frac{k}{np} \right) - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right) (1 + o_p(1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma B_k}{\sqrt{k}} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} A(n/k)(1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Mas $\chi_{1-p} = \left(\frac{k}{np}\right)^\gamma U(n/k)$, e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np} \right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) &\stackrel{d}{=} \sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) - \frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np} \right)} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right) \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \\ &\quad + \frac{\gamma B_k}{\ln \left(\frac{k}{np} \right)} + \frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np} \right)} \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} A(n/k)(1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Utilizando a representação em distribuição de $\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k)$, em (6.10), e considerando níveis k tais que $\ln \left(\frac{k}{np} \right) \rightarrow \infty$, obtemos (6.18). $\square$

Corolário 6.2 *Nas condições do Teorema anterior são válidos os seguintes resultados:*

- Para valores de $\gamma + \rho < 0$ e $\chi_q^* \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln \left(\frac{k}{np} \right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) &\stackrel{d}{=} \sigma_T P_k^T + \sqrt{k} \left(c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)) \\ &\quad - \frac{\sqrt{k} \chi_q^*}{U(n/k) \ln \left(\frac{k}{np} \right)} \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ finito, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_1 c_T \chi_q^*, \sigma_T^2).$$

- Para valores de $\gamma + \rho > 0$ ou $(\gamma + \rho \leq 0$ e $\chi_q^* = 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) &\stackrel{d}{=} \sigma_T P_k^T + \sqrt{k} (b_T A(n/k)) (1 + o_p(1)) \\ &\quad - \frac{\sqrt{k} A(n/k)}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(b_T \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$ finito, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_2 b_T, \sigma_T^2).$$

- Para valores de $\gamma + \rho = 0$ e $\chi_q^* \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) &\stackrel{d}{=} \sigma_T P_k^T + \sqrt{k} \left(b_T A(n/k) + c_T \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)) \\ &\quad - \left\{ \frac{\sqrt{k} A(n/k)}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(b_T \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1)} \right) + \frac{\sqrt{k} \chi_q^*}{U(n/k) \ln\left(\frac{k}{np}\right)} \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \right\} (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$, com λ_1 e λ_2 ambos finitos, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\lambda_1 c_T \chi_q^* + \lambda_2 b_T, \sigma_T^2).$$

Observação 6.6 Note-se que, em contexto de segunda ordem, os valores médios e as variâncias das variáveis aleatórias $\sqrt{k} \left(\hat{\gamma}_n^{T(q)}(k) - \gamma \right)$ e $\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right)$ são iguais. Desta forma, o PORT-estimador de quantis elevados, (6.16), introduzido em Araújo Santos et al. [2] é assintoticamente equivalente ao PORT-estimador, (6.17), proposto neste trabalho.

Como $\ln\left(\frac{k}{np}\right)$ tende para infinito muito lentamente, apresentamos uma representação em distribuição pré-assintótica, para valores moderados de k e n :

Corolário 6.3 *Nas condições do Teorema 6.2 e para valores moderados de k e n são válidos os seguintes resultados pré-assintóticos:*

- Para valores de $\gamma + \rho < 0$ e $\chi_q^* \neq 0$, se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ finito, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N} \left(\mu_1, \sigma_T^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\sigma_T^2 \ln^2\left(\frac{k}{np}\right)} \right) \right),$$

sendo

$$\mu_1 := \lambda_1 c_T \chi_q^* \left(1 - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \frac{1}{c_T \ln\left(\frac{k}{np}\right)} \right).$$

- Para valores de $\gamma + \rho > 0$ ou $(\gamma + \rho \leq 0$ e $\chi_q^* = 0)$, se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$ finito, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N} \left(\mu_2, \sigma_T^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\sigma_T^2 \ln^2\left(\frac{k}{np}\right)} \right) \right),$$

sendo

$$\mu_2 := \lambda_2 b_T \left(1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1) b_T} \right) \right).$$

- Para valores de $\gamma + \rho = 0$ e $\chi_q^* \neq 0$, se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_1$ e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda_2$, com λ_1 e λ_2 ambos finitos, então

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{Q_{\hat{\gamma}_n^{T(q)}}^{(p)}(k)}{\chi_{1-p}} - 1 \right) \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N} \left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_T^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\sigma_T^2 \ln^2\left(\frac{k}{np}\right)} \right) \right),$$

sendo

$$\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 c_T \chi_q^* \left(1 - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} \frac{1}{c_T \ln\left(\frac{k}{np}\right)} \right) + \lambda_2 b_T \left(1 + \frac{1}{\ln\left(\frac{k}{np}\right)} \left(\frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\rho(2^\gamma - 1) b_T} \right) \right).$$

6.4 Considerações finais

A principal vantagem da nova classe de estimadores é satisfazer uma condição equivalente à relação linear (6.1). Remetemos para um trabalho futuro a caracterização do comportamento dos novos estimadores de quantis elevados em amostras de dimensão finita, via método de Monte Carlo, bem como o estudo comparativo entre as duas classes de PORT-estimadores de quantis elevados. Esperamos ainda que a correcta estimação da componente dominante do viés destes estimadores possa conduzir à obtenção de classes de PORT-estimadores de quantis elevados de viés reduzido.

Capítulo 7

A Metodologia PORT na Estimação do Parâmetro de Forma de Segunda Ordem

Neste Capítulo apresentamos uma nova classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de forma de segunda ordem invariante para mudanças de localização. A derivação da nova classe de estimadores é realizada no contexto de modelos de cauda pesada pertencentes à classe de Hall-Welsh e baseia-se na aplicação da metodologia PORT, introduzida no Capítulo 6. Na estimação do parâmetro de forma de segunda ordem, consideramos o mesmo tipo de estatísticas utilizadas em Gomes *et al.* [50], Fraga Alves *et al.* [40] e Caeiro & Gomes [15], baseadas na estatística $M_n^{(\alpha,q)}(k) = M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n^{(q)})$, para $k < n - n_q$, com $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) \equiv M_n^{(\alpha)}(k)$ em (3.3), e sendo $\underline{X}_n^{(q)}$, $0 \leq q < 1$, em (6.2), a amostra de excessos acima de um nível aleatório X_{n_q} . Na Secção 7.1 apresentamos alguns resultados assintóticos preliminares relacionados com a metodologia PORT em contexto de variação regular de terceira ordem. Seguidamente, introduzimos, na Secção 7.2, uma nova classe de PORT-estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem e analisamos as condições necessárias para garantir a consistência destes estimadores. O comportamento assintótico da nova classe de estimadores é apresentado na Secção 7.3. A classe considerada depende, à semelhança da classe de estimadores clássicos de ρ (ver Secção 3.3.1), de um parâmetro de controlo τ_q . Na Secção 7.4 tecemos algumas considerações sobre a escolha do parâmetro τ_q a usar na PORT-estimação do parâmetro de forma de segunda ordem.

7.1 Resultados assintóticos preliminares

Começamos por apresentar uma generalização, em contexto de terceira ordem, dos resultados apresentados na Proposição 6.1.

Proposição 7.1 *Considerando sucessões intermédias k , satisfazendo (2.15), e admitindo a validade da condição de terceira ordem, em (2.26), obtemos para $M_n^{(\alpha,q)}(k) = M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n^{(q)})$, $\alpha \geq 1$, $k < n - n_q$, com $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n) = M_n^{(\alpha)}(k)$ em (3.3), χ_q^* em (6.5), e $\bar{\mu}_\alpha^{(2)}(\rho)$ em (3.12), a seguinte igualdade em distribuição,*

$$M_n^{(\alpha,q)}(k) \stackrel{d}{=} M_n^{(\alpha)}(k) + \frac{\Gamma(\alpha+1)\gamma^{\alpha-1}\chi_q^*}{U(n/k)} \left(\alpha \gamma \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(-\gamma) + \frac{h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)}{\gamma\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)), \quad (7.1)$$

onde

$$h^{(\alpha)}(\gamma, \rho) = \frac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^\alpha} - \frac{1+2\gamma-\rho}{(1+\gamma-\rho)^\alpha}. \quad (7.2)$$

Demonstração: O primeiro momento dos log-excessos pode ser reescrito da seguinte forma,

$$M_n^{(1,q)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{X_{n-i+1:n} - X_{n_q:n}}{X_{n-k:n} - X_{n_q:n}} \right) = M_n^{(1)}(k) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}}}{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}}} \right).$$

Como $\ln(1+x) \sim x$, quando $x \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \left(\frac{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}}}{1 - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}}} \right) \sim \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}} - \frac{X_{n_q:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{X_{n_q:n}}{X_{n-k:n}} \left(1 - \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) \right].$$

Se $k = k_n$ é uma sucessão intermédia de inteiros, satisfazendo (2.15), e $\{Y_i\}_{i=1,\dots,k}$ é uma colecção de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas Pareto unitárias, então $Y_{n-k:n} \stackrel{p}{\sim} (n/k)$ (Proposição 2.1) e,

$$\begin{aligned} M_n^{(1,q)}(k) &= M_n^{(1)}(k) + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right) \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(1)}(k) + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - Y_i^{-\gamma} - Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Sabendo que $\mathbb{E}[Y^{-\gamma}] = \frac{1}{1+\gamma}$, $\mathbb{E}\left[Y^{-\gamma} \frac{Y^\rho - 1}{\rho}\right] = \frac{1}{(1+\gamma)(1+\gamma-\rho)}$ e aplicando a lei fraca dos grandes números obtemos a igualdade (7.1), para $\alpha = 1$. Note-se que, quando $\alpha = 1$, $\frac{1}{\gamma} \frac{1}{\rho} \left(\frac{1+2\gamma}{1+\gamma} - \frac{1+2\gamma-\rho}{1+\gamma-\rho} \right) = -\frac{1}{(1+\gamma)(1+\gamma-\rho)}$ e $1 - \frac{1}{1+\gamma} = \gamma \bar{\mu}_1^{(2)}(-\gamma)$.

Considerando $\alpha = 2$, temos

$$\begin{aligned} M_n^{(2,q)}(k) &\stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} + \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \left(1 - Y_i^{-\gamma} - Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right]^2 \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\chi_q^*}{U(n/k)} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right) \left(1 - Y_i^{-\gamma} - Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\chi_q^*}{U(n/k)} \left[M_n^{(1)} - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\gamma \ln Y_i Y_i^{-\gamma} + Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \ln Y_i Y_i^{-\gamma} \frac{Y_i^\rho - 1}{\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[\ln Y Y^{-\gamma}] = \frac{1}{(1+\gamma)^2}$, $\mathbb{E}\left[Y^{-\gamma} \frac{Y^\rho - 1}{\rho}\right] = \frac{1}{(1+\gamma)(1+\gamma-\rho)}$ e $\mathbb{E}\left[\gamma Y^{-\gamma} \ln Y \frac{Y^\rho - 1}{\rho}\right] = \frac{\gamma(2+2\gamma-\rho)}{(1+\gamma)^2(1+\gamma-\rho)^2}$, a lei fraca dos grandes números permite-nos escrever

$$\begin{aligned} M_n^{(2,q)}(k) &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\gamma \chi_q^*}{U(n/k)} \left[1 - \frac{1}{(1+\gamma)^2} - \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{(1+\gamma)^2} + \frac{1}{(1+\gamma-\rho)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\gamma(1+\gamma)} + \frac{1}{\gamma(1+\gamma-\rho)} \right) \right] (1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} M_n^{(2)}(k) + \frac{2\gamma \chi_q^*}{U(n/k)} \left[2\gamma \bar{\mu}_2^{(2)}(-\gamma) + \frac{1}{\gamma\rho} \left(\frac{1+2\gamma}{(1+\gamma)^2} - \frac{1+2\gamma-\rho}{(1+\gamma-\rho)^2} \right) \right] (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

obtendo-se assim (7.1), para $\alpha = 2$.

Utilizando desenvolvimentos semelhantes aos apresentados para $\alpha = 1$ e 2 podemos provar que a relação (7.1) é válida para $\alpha \geq 1$ com $h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)$ definido em (7.2). $\square$

Utilizando a notação introduzida em (3.7)-(3.12) podemos escrever

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_n^{(\alpha,q)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)} \gamma^\alpha} \right)^{\tau/\theta} &\stackrel{d}{=} \left[\frac{M_n^{(\alpha)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)} \gamma^\alpha} + \frac{\chi_q^*}{\gamma U(n/k)} \left(\alpha \gamma \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(-\gamma) + \frac{h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)}{\gamma\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right]^{\tau/\theta} \\ &\approx \left(\frac{M_n^{(\alpha)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)} \gamma^\alpha} \right)^{\tau/\theta} \left[1 + \left(\frac{M_n^{(\alpha)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)} \gamma^\alpha} \right)^{-1} \frac{\chi_q^*}{\gamma U(n/k)} \left(\alpha \gamma \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(-\gamma) + \frac{h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)}{\gamma\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right]^{\tau/\theta}. \end{aligned}$$

Sabendo que $\frac{M_n^{(\alpha)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)}\gamma^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 1$, então

$$\left(\frac{M_n^{(\alpha,q)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)}\gamma^\alpha} \right)^{\tau/\theta} \stackrel{d}{=} \left(\frac{M_n^{(\alpha)}(k)}{\mu_\alpha^{(1)}\gamma^\alpha} \right)^{\tau/\theta} + \frac{\tau\chi_q^*}{\theta\gamma U(n/k)} \left(\alpha\gamma \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(-\gamma) + \frac{h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)}{\gamma\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)).$$

7.2 Nova classe de PORT-estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem

Para $\alpha > 0$, considere-se a estatística $M_n^{(\alpha,q)}(k) = M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n^{(q)})$, $\alpha \geq 1$, definida para $k < n - n_q$, com $M_n^{(\alpha)}(k; \underline{X}_n)$ em (3.3), e parâmetros de controlo reais τ_q e θ , não-nulos. Admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem, em (2.26), considerando sucessões intermédias de inteiros, satisfazendo (2.15), e utilizando os resultados apresentados no Teorema 3.2 e na Proposição 7.1,

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta,q)}(k)}{\mu_{\alpha\theta}^{(1)}\gamma^{\alpha\theta}} \right)^{\tau_q/\theta} &\stackrel{d}{=} 1 + \frac{\tau_q \bar{\sigma}_{\alpha\theta}^{(1)}}{\theta} \frac{1}{\sqrt{k}} Z_k^{(\alpha\theta)} + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho) A(n/k) \\ &+ \frac{\alpha\tau_q}{2\gamma^2} A^2(n/k) \left((\alpha\theta - 1) \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau_q - \theta) (\bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho))^2 \right) (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\alpha\tau_q \chi_q^* \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(-\gamma)}{U(n/k)} (1 + o_p(1)) + \frac{\tau_q \chi_q^* h^{(\alpha\theta)}(\gamma, \rho)}{\theta\gamma^2\rho} \frac{A(n/k)}{U(n/k)} (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

onde $Z_k^{(\alpha)}$ são as v.a. assintoticamente normais padrão definidas em (3.15), $\bar{\mu}_\alpha^{(j)}(\rho)$, $j = 2, 3$ e $\bar{\sigma}_\alpha^{(1)}$, dados em (3.12) e (3.13), respectivamente.

Considerando $\theta_1 \neq \theta_2$ podemos definir a versão PORT da v.a. $D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)$, em (3.26).

Assim,

$$\begin{aligned} D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma) &:= \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_1,q)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_1}^{(1)}\gamma^{\alpha\theta_1}} \right)^{\tau_q/\theta_1} - \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_2,q)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_2}^{(1)}\gamma^{\alpha\theta_2}} \right)^{\tau_q/\theta_2} \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\tau_q}{\sqrt{k}} \left(\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1}^{(1)}}{\theta_1} Z_k^{(\alpha\theta_1)} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_2}^{(1)}}{\theta_2} Z_k^{(\alpha\theta_2)} \right) \\ &+ \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho) \right) A(n/k) \\ &+ \frac{\alpha\tau_q}{2\gamma^2} \left[(\alpha\theta_1 - 1) \bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau_q - \theta_1) (\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \right. \\ &\quad \left. - (\alpha\theta_2 - 1) \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau_q - \theta_2) (\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho))^2 \right] A^2(n/k) (1 + o_p(1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho + \rho') - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho + \rho') \right) A(n/k)B(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q\chi_q^*}{U(n/k)} \left[\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(-\gamma) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(-\gamma) \right] (1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\tau_q \chi_q^*}{\gamma^2\rho} \left(\frac{h^{(\alpha\theta_1)}(\gamma, \rho)}{\theta_1} - \frac{h^{(\alpha\theta_2)}(\gamma, \rho)}{\theta_2} \right) \frac{A(n/k)}{U(n/k)}(1 + o_p(1)), \tag{7.3}
\end{aligned}$$

e portanto

$$D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma) \stackrel{d}{=} D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)}(k; \gamma) + \frac{\tau_q\chi_q^*}{U(n/k)} \left(\alpha d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) + \frac{H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho)}{\gamma^2\rho} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)),$$

com $D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k; \gamma)$, $d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ e $h^{(\alpha)}(\gamma, \rho)$ dados, respectivamente, em (3.26), (3.28) e (7.2), e

$$H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho) := \frac{h^{(\alpha\theta_1)}(\gamma, \rho)}{\theta_1} - \frac{h^{(\alpha\theta_2)}(\gamma, \rho)}{\theta_2}. \tag{7.4}$$

A determinação da componente dominante da expressão do lado direito de (7.3) depende do comportamento das funções $A(t) = \gamma\beta t^\rho$ e $1/U(t) = C^{-1}t^{-\gamma}$. Desta forma,

(i) Para valores de $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, se admitirmos que

$$\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \tag{7.5}$$

então o penúltimo termo do lado direito de (7.3) é dominante, e a estatística $\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{1/U(n/k)}$ converge em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$, para $\alpha \tau_q \chi_q^* d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)$. Tem-se, além disso

$$\begin{aligned}
\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{1/U(n/k)} & \stackrel{d}{=} \alpha \tau_q \chi_q^* d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) + \frac{\tau_q \chi_q^*}{\gamma^2\rho} H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho) A(n/k) \\
& + \frac{\tau_q}{\sqrt{k}} \left(\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1}^{(1)}}{\theta_1} Z_k^{(\alpha\theta_1)} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_2}^{(1)}}{\theta_2} Z_k^{(\alpha\theta_2)} \right) U(n/k) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho) \right) A(n/k)U(n/k) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{2\gamma^2} \left[(\alpha\theta_1 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau_q - \theta_1)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \right. \\
& \left. - (\alpha\theta_2 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau_q - \theta_2)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho))^2 \right] A^2(n/k)U(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho + \rho') - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho + \rho') \right) A(n/k)B(n/k)U(n/k)(1 + o_p(1)). \tag{7.6}
\end{aligned}$$

A estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$, em (3.25), é, na metodologia PORT, dada pelo quociente

$$T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) = \frac{D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)} = \frac{\left(\frac{M_n^{(\alpha, q)}(k)}{\mu_{\alpha}^{(1)}}\right)^{\tau_q} - \left(\frac{M_n^{(\alpha \theta_1, q)}(k)}{\mu_{\alpha \theta_1}^{(1)}}\right)^{\tau_q / \theta_1}}{\left(\frac{M_n^{(\alpha \theta_1, q)}(k)}{\mu_{\alpha \theta_1}^{(1)}}\right)^{\tau_q / \theta_1} - \left(\frac{M_n^{(\alpha \theta_2, q)}(k)}{\mu_{\alpha \theta_2}^{(1)}}\right)^{\tau_q / \theta_2}} \quad (7.7)$$

convergindo em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$, para

$$\bullet t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma) := \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(-\gamma)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)} = t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)$$

com $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, definido em (3.27) e dado explicitamente em (3.29). Mostra-se que,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \bullet t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma) = \lim_{-\gamma \rightarrow 0^-} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) = \frac{\theta_1 - 1}{\theta_2 - \theta_1}$$

e

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \bullet t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma) = \lim_{-\gamma \rightarrow -\infty} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) = \frac{\theta_2(\theta_1 - 1)}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Logo, e para valores positivos de γ , a função $\bullet t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma)$ é crescente (decrecente) em γ , desde que $1 < \theta_1 < \theta_2$ ($\theta_1 > \theta_2 > 1$), i.e., a função $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)$ é decrescente (crescente) em $-\gamma$, desde que $1 < \theta_1 < \theta_2$ ($\theta_1 > \theta_2 > 1$).

Observação 7.1 *Vimos na Secção 2.3.4 que, quando introduzimos um deslocamento $s \neq 0$ no modelo subjacente aos dados obtemos, na região $\gamma + \rho < 0$, $\rho_s = -\gamma$, e portanto $\bullet t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma) = t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) \equiv t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho_s)$.*

(ii) Para valores de $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$), se supusermos que

$$\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (7.8)$$

o segundo termo do lado direito de (7.3) é dominante, e

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{A(n/k)} &\stackrel{d}{=} \frac{\alpha \tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(2)}(\rho) \right) \\ &+ \frac{\tau_q}{\sqrt{k}A(n/k)} \left(\frac{\bar{\sigma}_{\alpha \theta_1}^{(1)}}{\theta_1} Z_k^{(\alpha \theta_1)} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha \theta_2}^{(1)}}{\theta_2} Z_k^{(\alpha \theta_2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha\tau_q}{2\gamma^2} \left[(\alpha\theta_1 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau_q - \theta_1)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \right. \\
& - (\alpha\theta_2 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau_q - \theta_2)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho))^2 \left. \right] A(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho + \rho') - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho + \rho') \right) B(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q\chi_q^*}{A(n/k)U(n/k)} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(-\gamma) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(-\gamma) \right) (1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\tau_q\chi_q^*}{\gamma^2\rho U(n/k)} H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho)(1 + o_p(1)). \tag{7.9}
\end{aligned}$$

Neste caso, a estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k)$, em (7.7), converge em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$, para $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, definido em (3.27) e com expressão explícita em (3.29).

(iii) Para valores de $\gamma = -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, se admitirmos que

$$\frac{1}{A(n/k)U(n/k)} \longrightarrow \tilde{\lambda} \equiv (C\gamma\beta)^{-1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \tag{7.10}$$

os termos dominantes do lado direito de (7.3) são o segundo e o penúltimo, pelo que

$$\begin{aligned}
\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{A(n/k)} & \stackrel{d}{=} \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left[\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho) + \gamma \tilde{\lambda}\chi_q^* \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(-\gamma) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(-\gamma) \right) \right] \\
& + \frac{\tau_q}{\sqrt{k}A(n/k)} \left(\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1}^{(1)}}{\theta_1} Z_k^{(\alpha\theta_1)} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha\theta_2}^{(1)}}{\theta_2} Z_k^{(\alpha\theta_2)} \right) (1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{2\gamma^2} \left[(\alpha\theta_1 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau_q - \theta_1)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \right. \\
& - (\alpha\theta_2 - 1)\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau_q - \theta_2)(\bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho))^2 \left. \right] A(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\alpha\tau_q}{\gamma} \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho + \rho') - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho + \rho') \right) B(n/k)(1 + o_p(1)) \\
& + \frac{\tau_q\chi_q^*}{\gamma^2\rho} \frac{H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho)}{U(n/k)} (1 + o_p(1)). \tag{7.11}
\end{aligned}$$

A estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k)$, em (7.7), converge em probabilidade, quando $n \rightarrow \infty$, para

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) & := \frac{\bar{\mu}_{\alpha}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) + \gamma \tilde{\lambda}\chi_q^* \left(\bar{\mu}_{\alpha}^{(2)}(-\gamma) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(-\gamma) \right)}{\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho) + \gamma \tilde{\lambda}\chi_q^* \left(\bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(-\gamma) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(-\gamma) \right)} \\
& = \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho) + \gamma \tilde{\lambda}\chi_q^* d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \gamma \tilde{\lambda}\chi_q^* d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} = \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} = t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho),
\end{aligned}$$

com $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ definido em (3.27) e dado explicitamente em (3.29).

Observação 7.2 *Note-se que, na região $\gamma + \rho \geq 0$, e tal como foi referido na Secção 2.3.4, $\rho_s = \rho$, pelo que $\tilde{t}_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \equiv t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho_s)$.*

A classe de estimadores consistentes de ρ_s , invariante para mudanças de localização, é denotada de PORT- ρ , sendo dada por

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) := t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^{\leftarrow}(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k)), \quad (7.12)$$

desde que, $\frac{\theta_1 - 1}{|\theta_2 - \theta_1|} \leq \left| T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) \right| < \frac{\theta_2(\theta_1 - 1)}{|\theta_2 - \theta_1|}$.

Utilizando os parâmetros de controlo sugeridos para os estimadores clássicos de ρ , $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$, obtemos uma classe de PORT-estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem dependente apenas do parâmetro de controlo τ_q . Como,

$$t(\rho_s) = t_{1,2,3}(\rho_s) = \frac{3(1 - \rho_s)}{3 - \rho_s} = \begin{cases} \frac{3(1 - \rho)}{3 - \rho}, & \text{se } \gamma + \rho \geq 0 \\ \frac{3(1 + \gamma)}{3 + \gamma}, & \text{se } \gamma + \rho < 0, \end{cases}$$

com ρ_s definido em (2.35), o estimador PORT- ρ considerando o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$ é denotado por

$$\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) \equiv \hat{\rho}_{n|T}^{1,2,3,\tau_q,q}(k) := \frac{3 \left(T_n^{(1,2,3,\tau_q,q)}(k) - 1 \right)}{T_n^{(1,2,3,\tau_q,q)}(k) - 3}, \quad (7.13)$$

desde que $1 \leq T_n^{(1,2,3,\tau_q,q)}(k) < 3$, sendo

$$T_n^{(1,2,3,\tau_q,q)}(k) := \begin{cases} \frac{\ln \left(M_n^{(1,q)}(k) \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M_n^{(2,q)}(k)}{2} \right)}{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{M_n^{(2,q)}(k)}{2} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{M_n^{(3,q)}(k)}{6} \right)} & \text{se } \tau_q = 0 \\ \frac{\left(M_n^{(1,q)}(k) \right)^{\tau_q} - \left(\frac{M_n^{(2,q)}(k)}{2} \right)^{\tau_q/2}}{\left(\frac{M_n^{(2,q)}(k)}{2} \right)^{\tau_q/2} - \left(\frac{M_n^{(3,q)}(k)}{6} \right)^{\tau_q/3}} & \text{se } \tau_q > 0. \end{cases}$$

Teorema 7.1 *Admitindo a validade da condição de segunda ordem (2.25), com $\rho < 0$, ρ_s definido em (2.35), e considerando sucessões intermédias de inteiros satisfazendo:*

(i) (2.15) e (7.5), para valores de $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, então

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \rho_s = -\gamma;$$

(ii) (2.15) e (7.8), para valores de $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$), então

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \rho_s = \rho;$$

(iii) (2.15) e (7.10), para valores de $\gamma = -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, então

$$\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \rho_s = \rho,$$

para $\alpha > 0$, $\tau_q \in \mathbb{R}$, e $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\theta_1 \neq \theta_2$ e $0 < q < 1$ ou $q = 0$ desde que χ_0^* seja finito, com $\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k)$ em (7.12), e com expressão explícita em (7.13) para o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$.

7.3 Propriedades assintóticas

Nesta Secção analisamos as propriedades assintóticas, em contexto de terceira ordem, das classes de estimadores PORT- ρ introduzidas em (7.12) e (7.13).

Com base nas igualdades (7.6), (7.9) e (7.11) podemos dizer que

(i) para valores de $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, e considerando níveis k satisfazendo as condições (2.15) e (7.5),

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{\alpha \tau_q \chi_q^* / U(n/k)} &\stackrel{d}{=} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) + \frac{1}{\alpha \chi_q^* \sqrt{k}} W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} U(n/k) \\ &+ \frac{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}{\gamma \chi_q^*} A(n/k) U(n/k) (1 + o_p(1)); \end{aligned}$$

(ii) para valores de $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$) e níveis k verificando as condições (2.15) e (7.8),

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{\alpha \tau_q \gamma^{-1} A(n/k)} &\stackrel{d}{=} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \\ &+ \{u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}(\rho) A(n/k) + v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho') B(n/k)\} (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\gamma \chi_q^*}{A(n/k) U(n/k)} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) (1 + o_p(1)); \end{aligned}$$

(iii) para valores de $\gamma + \rho = 0$ e $\chi_q^* \neq 0$, e níveis k satisfazendo (2.15) e (7.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k; \gamma)}{\alpha \tau_q \gamma^{-1} (1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*) A(n/k)} &\stackrel{d}{=} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma}{\alpha (1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*) \sqrt{k} A(n/k)} W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \\ &+ \frac{u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}(\rho) A(n/k) + v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho') B(n/k)}{1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*} (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\chi_q^*}{\alpha \gamma \rho (1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*)} \frac{H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho)}{U(n/k)} (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

sendo $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ a v.a. definida em (3.33), $d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ dado em (3.28), e $u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}(\rho) = u_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau=\tau_q}(\rho)$ e $v_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, \rho')$, definidos, respectivamente, em (3.34) e (3.35).

Desta forma, a estatística $T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k)$, em (7.7), satisfaz, sob a validade das condições (2.15) e (7.5) e para valores de $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, a seguinte igualdade em distribuição,

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) \\ &+ \frac{(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma))^{-1}}{\alpha \chi_q^* \sqrt{k} / U(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &+ \frac{w_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{\chi_q^*} A(n/k) U(n/k) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Se para valores de $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$), são satisfeitas as condições (2.15) e (7.8), temos

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \\ &+ \frac{\gamma (d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &+ [u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} A(n/k) + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} B(n/k)] (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{A(n/k) U(n/k)} (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Por último, sob a validade das condições (2.15) e (7.10) e valores de $\gamma + \rho = 0$ e $\chi_q^* \neq 0$,

$$\begin{aligned}
T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \\
&+ \frac{\gamma(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha(1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*) \sqrt{k} A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\
&+ \frac{u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} A(n/k) + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} B(n/k)}{1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*} (1 + o_p(1)), \\
&+ \frac{\chi_q^* z_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{(1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*) U(n/k)} (1 + o_p(1)),
\end{aligned}$$

com $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ a v.a. definida em (3.33), $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, $d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, $u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \equiv u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau=\tau_q}$ e $v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$, definidos, respectivamente, em (3.27), (3.28), (3.38) e (3.39), e

$$w_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \equiv w_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho, -\gamma) = \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}{\gamma d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)}, \quad (7.14)$$

$$y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \equiv y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma, \rho) = \gamma \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(-\gamma) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \quad (7.15)$$

$$z_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \equiv z_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}(\gamma, \rho) = \frac{H(\alpha, 1, \theta_1, \gamma, \rho) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) H(\alpha, \theta_1, \theta_2, \gamma, \rho)}{\alpha \gamma \rho d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}. \quad (7.16)$$

Podemos então enunciar as seguintes Proposições:

Proposição 7.2 *Admitamos a validade da condição de terceira ordem, em (2.26), com $\rho, \rho' < 0$, $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$. Para seqüências intermédias de inteiros $k = k(n)$, satisfazendo (2.15), tais que $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \infty$ e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, quando $n \rightarrow \infty$, temos*

$$\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\dot{\mu}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \dot{\sigma}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

com $\dot{\mu}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, q} = \frac{w_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda}{\chi_q^*}$, $w_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$, $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ e $d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, definidos em (7.14), (3.27) e (3.28), respectivamente, e

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2 &= \left(\frac{1}{\alpha \chi_q^* d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma)} \right)^2 \mathbb{V}ar \left(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \right) \\
&= \frac{\left(\sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1}^2 + t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^2(-\gamma) \sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2 - 2t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(-\gamma) \sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1, \theta_2} \right)}{\alpha^2 (\chi_q^*)^2 d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^2(-\gamma)}, \quad (7.17)
\end{aligned}$$

sendo $\sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ a variância assintótica de $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$, dada em (3.40), e $\sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1, \theta_2}$ a covariância assintótica de $(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)}, W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)})$, dada em (3.41).

Proposição 7.3 *Admitindo a validade da condição de terceira ordem (2.26), com $\rho, \rho' < 0$,*

$\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$), e considerando sucessões intermédias de inteiros $k = k(n)$, verificando (2.15), $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ e $\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \rightarrow \lambda_U$, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

sendo

$$\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q} = \begin{cases} \chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_U, & \text{se } -\rho < \gamma < -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} + \chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_U, & \text{se } \gamma = -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}, & \text{se } \gamma > -2\rho \vee (\gamma > -\rho \wedge \chi_q^* = 0), \end{cases}$$

com $\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} = u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \lambda_A + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \lambda_B$, $u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} = u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau = \tau_q}$, $v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} = v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau = \tau_q}$, $y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} = y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau = \tau_q}$, $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ e $d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ definidos em (3.38), (3.39), (7.15), (3.27) e (3.28), respectivamente, e

$$\begin{aligned} \sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2 &= \left(\frac{\gamma}{\alpha d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right)^2 \text{Var} \left(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \right) \\ &= \frac{\gamma^2 \left(\sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1}^2 + t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^2(\rho) \sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2 - 2t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1, \theta_2} \right)}{\alpha^2 d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^2(\rho)}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

com $\sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ a variância assintótica de $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$, e $\sigma_{W|\alpha, 1, \theta_1, \theta_2}$ a covariância assintótica de $(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)}, W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)})$, definidas em (3.40) e (3.41), respectivamente.

Demonstração: Considerando sequências de inteiros positivos $k = k(n)$ tais que $k(n) = o(n)$, $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ e $\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \rightarrow \lambda_U$, quando $n \rightarrow \infty$, consideramos os seguintes casos:

- se $0 < \gamma + \rho < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, então

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha \sqrt{k}A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &\quad + \frac{\chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{A(n/k)U(n/k)} (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

e

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

onde $\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q} = \chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_U$, com $y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ definido em (7.15) e $\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ em (7.18).

- se $\gamma + \rho = -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, então

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &+ [u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} A(n/k) + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} B(n/k)] (1 + o_p(1)) \\ &+ \frac{\chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{A(n/k) U(n/k)} (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

e

$$\sqrt{k} A(n/k) \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

sendo $\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q} = u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \lambda_A + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_B + \chi_q^* y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_U$, com $u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}$, $v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ e $y_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ definidos, respectivamente, em (3.38), (3.39) e (7.15), e $\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ em (7.18).

- se $\gamma + \rho > -\rho$ ou $(\gamma + \rho > 0 \wedge \chi_q^* = 0)$, então

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^{-1}}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} \{W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}\} \\ &+ [u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} A(n/k) + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} B(n/k)] (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

e

$$\sqrt{k} A(n/k) \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

com $\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q} = \mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} = u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \lambda_A + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_B$, com $u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}$ e $v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ definidos, respectivamente, em (3.38) e (3.39), e $\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ em (7.18). $\square$

Proposição 7.4 *Se supusermos que a condição de terceira ordem (2.26) é válida para $\rho, \rho' < 0$, $\gamma + \rho = 0$, $\chi_q^* \neq 0$, e considerarmos sucessões de inteiros positivos $k = k(n)$, verificando (2.15), tais que $\sqrt{k} A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k} A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k} A(n/k) B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, $\frac{\sqrt{k} A(n/k)}{U(n/k)} \rightarrow \lambda_{AU}$ e $\frac{1}{A(n/k) U(n/k)} \rightarrow \tilde{\lambda} \neq 0$, quando $n \rightarrow \infty$, então*

$$\sqrt{k} A(n/k) \left(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}, \tilde{\sigma}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2),$$

sendo

$$\tilde{\mu}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q} = \frac{u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q} \lambda_A + v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_B + \chi_q^* z_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2} \lambda_{AU}}{1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*},$$

com $t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$, $u_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q}$, $v_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ e $z_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}$ definidos, respectivamente, em (3.27), (3.38),

(3.39) e (7.16). A variância assintótica $\tilde{\sigma}_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}^2$ é dada por,

$$\tilde{\sigma}_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}^2 = \left(\frac{\gamma}{\alpha(1 + \gamma\tilde{\lambda}\chi_q^*)d_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(\rho)} \right)^2 \mathbb{V}ar \left(W_n^{(\alpha,1,\theta_1)} - t_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(\rho)W_n^{(\alpha,\theta_1,\theta_2)} \right) = \frac{\sigma_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}^2}{(1 + \gamma\tilde{\lambda}\chi_q^*)^2},$$

com $\sigma_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}^2$ definido em (7.18).

Estamos então em condições de apresentar o comportamento assintótico da classe de estimadores PORT- ρ , introduzida em (7.12).

Assim, considerando sucessões intermédias de inteiros verificando (2.15) e satisfazendo as condições (7.5) e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, quando $n \rightarrow \infty$, temos, para valores de $\gamma < -\rho$ e $\chi_q^* \neq 0$, a seguinte convergência em distribuição do estimador PORT- ρ , $\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q)}(k)$, definido em (7.12), com ρ_s dado em (2.35),

$$\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \left(\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q)}(k) - \rho_s \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(\dot{\mu}_{\rho|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q)}, \dot{\sigma}_{\rho|T,\alpha,\theta_1,\theta_2,q}^2 \right),$$

com valor médio igual a

$$\dot{\mu}_{\rho|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q)} = \frac{\dot{\mu}_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q}}{t'_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(-\gamma)} =: \frac{w_{\rho|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2)}\lambda}{\chi_q^*}, \quad (7.19)$$

e variância

$$\dot{\sigma}_{\rho|T,\alpha,\theta_1,\theta_2,q}^2 = \dot{\sigma}_{\rho|T,\alpha,\theta_1,\theta_2}^2 = \left(\frac{\dot{\sigma}_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}}{t'_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(-\gamma)} \right)^2, \quad (7.20)$$

com $\dot{\sigma}_{T|\alpha,\theta_1,\theta_2}^2$ em (7.17) e onde $t'_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(-\gamma)$ é tal que

$$\begin{aligned} t'_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(-\gamma)(1 + \gamma) \left((\theta_2 - \theta_1)(1 + \gamma)^{\alpha\theta_2} - \theta_2(1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} + \theta_1 \right)^2 = \\ = \alpha\theta_1\theta_2 \left\{ \theta_1(\theta_2 - 1)(1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - 1)} \left(1 + (1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 + 1)} \right) \right. \\ \left. - (\theta_2 - \theta_1)(1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1)} \left(1 + (1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 - 1)} \right) \right. \\ \left. - \theta_2(\theta_1 - 1)(1 + \gamma)^{\alpha\theta_2} \left(1 + (1 + \gamma)^{\alpha(\theta_2 - \theta_1 - 1)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Se considerarmos sucessões intermédias verificando (2.15) e satisfazendo as condições (7.8), $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ e $\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \rightarrow \lambda_U$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos para o estimador PORT- ρ , $\hat{\rho}_{n|T}^{(\alpha,\theta_1,\theta_2,\tau_q,q)}(k)$, em (7.12), e para valores de $\gamma > -\rho$ ou $(\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0)$,

a seguinte distribuição assintótica,

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - \rho_s \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(\mu_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}, \sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2, q}^2 \right),$$

sendo

$$\begin{aligned} \mu_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)} &= \frac{\mu_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \\ &=: \begin{cases} \chi_q^* y_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \lambda_U, & \text{se } -\rho < \gamma < -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \mu_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)} + \chi_q^* y_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \lambda_U, & \text{se } \gamma = -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \mu_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)}, & \text{se } \gamma > -2\rho \vee (\gamma > -\rho \wedge \chi_q^* = 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (7.21)$$

com $\mu_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)} = u_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)} \lambda_A + v_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \lambda_B$, $t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ e $\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ definidos em (3.5) e (7.18), respectivamente, e

$$\sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2, q}^2 = \sigma_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2}^2 = \left(\frac{\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right)^2. \quad (7.22)$$

Considerando valores de $\gamma + \rho = 0$, $\chi_q^* \neq 0$, seqüências $k = k(n)$ verificando (2.15) e satisfazendo as condições (7.10), $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ e $\frac{\sqrt{k}A(n/k)}{U(n/k)} \rightarrow \lambda_{AU}$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos para o estimador PORT- ρ , em (7.12), o seguinte comportamento em distribuição,

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - \rho_s \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left(\tilde{\mu}_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}, \tilde{\sigma}_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2, q}^2 \right),$$

onde

$$\tilde{\mu}_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)} = \frac{\tilde{\mu}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} =: \frac{u_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q)} \lambda_A + v_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \lambda_B + \chi_q^* z_{\rho|T}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \lambda_{AU}}{1 + \gamma \tilde{\lambda} \chi_q^*}, \quad (7.23)$$

$$\tilde{\sigma}_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2, q}^2 = \tilde{\sigma}_{\rho|T, \alpha, \theta_1, \theta_2}^2 = \left(\frac{\tilde{\sigma}_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}}{t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right)^2, \quad (7.24)$$

com $t'_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)$ e $\sigma_{T|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$ dados em (3.5) e (7.18), respectivamente.

Os resultados apresentados podem ser sumariados no seguinte Teorema:

Teorema 7.2 *Admitamos a validade da condição de variação regular de terceira ordem, em*

(2.26), com $\rho, \rho' < 0$. Então, sendo θ_1 e θ_2 dois números reais distintos e diferentes de 1, $\alpha > 0$, $\tau_q \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$ ou $q = 0$ desde que χ_0^* seja finito, temos:

- para valores de $\gamma < -\rho$, $\chi_q^* \neq 0$ e sequências intermédias de inteiros $k = k(n)$ satisfazendo as condições,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}/U(n/k) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) = \lambda,$$

a v.a. $\frac{\sqrt{k}}{U(n/k)} \left(\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - \rho_s \right)$ é assintoticamente normal com valor médio (7.19) e variância (7.20).

- para valores de $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$) e sequências intermédias de inteiros $k = k(n)$ verificando as condições,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) &= \infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A^2(n/k) &= \lambda_A, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k)B(n/k) &= \lambda_B, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}/U(n/k) &= \lambda_U, \end{aligned}$$

a v.a. $\sqrt{k}A(n/k) \left(\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - \rho_s \right)$ é assintoticamente normal com valor médio (7.21) e variância (7.22).

- para $\gamma + \rho = 0$, $\chi_q^* \neq 0$ e sequências intermédias de inteiros $k = k(n)$ tais que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) &= \infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A^2(n/k) &= \lambda_A, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k)B(n/k) &= \lambda_B, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k)/U(n/k) &= \lambda_{AU}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(A(n/k)U(n/k)) &= \tilde{\lambda} \neq 0, \end{aligned}$$

a v.a. $\sqrt{k}A(n/k) \left(\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau_q, q)}(k) - \rho_s \right)$ é assintoticamente normal com valor médio (7.23) e variância (7.24).

Corolário 7.1 Admitindo a validade da condição de terceira ordem, em (2.26), com $\rho, \rho' < 0$, $\gamma < -\rho$, $\chi_q^* \neq 0$, e considerando o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$, é válida a seguinte representação em distribuição para o estimador $PORT\text{-}\rho$, $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$, em (7.13),

$$\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) \stackrel{d}{=} \rho_s + \frac{\dot{\sigma}_{\rho, q}}{\sqrt{k}/U(n/k)} W_k^{R_1} + \frac{w_{\rho|T}}{\chi_q^*} A(n/k)U(n/k)(1 + o_p(1))$$

onde $W_k^{R_1}$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão,

$$w_{\rho|T} = -\frac{\rho(1+\gamma)^3(\gamma+\rho)}{\gamma^2(1-\rho)^3}$$

e

$$\sigma_{\rho,q}^2 = \frac{(1+\gamma)^6 (1+2\gamma+2\gamma^2) (3-\rho)^4}{(\chi_q^*)^2 \gamma^2 (3+\gamma)^4}.$$

Sendo F um modelo de cauda pesada pertencente à classe de Hall-Welsh, (2.29), podemos concluir pelo Corolário anterior que se $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \infty$ e $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ finito e eventualmente nulo, então $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) - \rho_s = O_p(1/(\sqrt{k}/U(n/k)))$, para valores de $\gamma + \rho < 0$.

Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ então $1/(\sqrt{k}/U(n/k)) = o(A(n/k)U(n/k))$, e $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p((A(n/k)U(n/k)))$. Podemos então garantir um comportamento degenerado de $\hat{\rho}^{(q)}$ para ρ_s , com uma velocidade de convergência da ordem de $A(n/k)U(n/k)$, mas não podemos garantir a normalidade assintótica deste estimador.

Corolário 7.2 *Admitindo a validade da condição de terceira ordem, em (2.26), com $\rho, \rho' < 0$, $\gamma > -\rho$ ou ($\gamma \leq -\rho$ e $\chi_q^* = 0$), e considerando o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$, é válida a seguinte representação em distribuição para o estimador $PORT$ - ρ , $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$, em (7.13),*

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) &\stackrel{d}{=} \rho_s + \frac{\sigma_{\rho,q}}{\sqrt{k}A(n/k)} W_k^{R_2} \\ &+ \begin{cases} \left(\frac{y_{\rho|T} \chi_q^*}{A(n/k)U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)), & \text{se } -\rho < \gamma < -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \left(m_{\rho|T} + \frac{y_{\rho|T} \chi_q^*}{A(n/k)U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)), & \text{se } \gamma = -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ m_{\rho|T} (1 + o_p(1)), & \text{se } \gamma > -2\rho \vee (\gamma > -\rho \wedge \chi_q^* = 0), \end{cases} \end{aligned}$$

sendo $m_{\rho|T} = u_{\rho|T}A(n/k) + v_{\rho,\rho'|T}B(n/k)$, com $u_{\rho|T} \equiv u_{\rho}(\tau = \tau_q)$ e $v_{\rho,\rho'|T} \equiv v_{\rho,\rho'}$, dados em (3.53) e (3.54), respectivamente, $W_k^{R_2}$ uma v.a. assintoticamente normal padrão, $\sigma_{\rho,q}^2 \equiv \sigma_{\rho}^2$, em (3.51), e

$$y_{\rho|T} = \frac{\gamma^2(\gamma + \rho)(1 - \rho)^3}{\rho (1 + \gamma)^3}.$$

Corolário 7.3 *Se supusermos a validade da condição de terceira ordem, em (2.26), com $\rho, \rho' < 0$, $\gamma = -\rho$, $\chi_q^* \neq 0$, e considerando o caso particular $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 2, 3)$, é válida a seguinte representação em distribuição para o estimador $PORT$ - ρ , $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$, em (7.13),*

$$\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) \stackrel{d}{=} \rho_s + \frac{\tilde{\sigma}_{\rho,q}}{\sqrt{k}A(n/k)} \tilde{W}_k^{R_3} + \left(\tilde{u}_{\rho|T}A(n/k) + \tilde{v}_{\rho|T}B(n/k) + \tilde{z}_{\rho|T} \frac{\chi_q^*}{U(n/k)} \right) (1 + o_p(1)),$$

sendo $W_k^{R_3}$ uma v.a. assintoticamente normal padrão, $u_{\rho|T} \equiv u_{\rho}(\tau = \tau_q)$ e $v_{\rho,\rho'|T} \equiv v_{\rho,\rho'}$,

definidos em (3.53) e (3.54), respectivamente,

$$\tilde{u}_{\rho|T} = \frac{u_{\rho|T}}{1 + \tilde{\lambda}\chi_q^* \rho}, \quad \tilde{v}_{\rho|T} = \frac{v_{\rho|T}}{1 + \tilde{\lambda}\chi_q^* \rho}, \quad \tilde{z}_{\rho|T} = -\frac{(3-\rho)(1-6\rho+8\rho^2+4\rho^3)}{6\gamma(1-2\rho)^3(1+\tilde{\lambda}\chi_q^* \rho)}$$

e

$$\tilde{\sigma}_{\rho,q}^2 = \left(\frac{(1-\rho)^3}{1 + \tilde{\lambda}\chi_q^* \rho} \right)^2 (2\rho^2 - 2\rho + 1).$$

Desta forma, e considerando modelos na classe de Hall-Welsh, com função cauda (2.29), $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q) - \rho_s = O_p(1/(\sqrt{k}A(n/k)))$, com $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, se se verificarem as seguintes condições:

- $\gamma + \rho = 0$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)/U(n/k) \rightarrow \lambda_{AU}$, finitos e eventualmente nulos.

Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A(n/k)/U(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., se $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(B(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(A(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(1/U(n/k))$, então $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(B(n/k))$, se $\rho < \rho'$, e $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(A(n/k)) = O_p(1/U(n/k))$, se $\rho \geq \rho'$. Neste caso, não podemos garantir a normalidade assintótica de $\hat{\rho}^{(q)}$, mas apenas um comportamento degenerado de $\hat{\rho}^{(q)}$ para ρ_s , com uma velocidade de convergência da ordem de $B(n/k)$, se $\rho < \rho'$, e de $A(n/k)$ ou de $1/U(n/k)$, se $\rho \geq \rho'$.

- $\gamma + \rho < -\rho$, $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_U$, finito e eventualmente nulo.

Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., se $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(1/(A(n/k)U(n/k)))$, então $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(1/(A(n/k)U(n/k)))$. Podemos então garantir um comportamento degenerado de $\hat{\rho}^{(q)}$ para ρ_s , com uma velocidade de convergência da ordem de $1/(A(n/k)U(n/k))$, mas não podemos garantir a normalidade assintótica deste estimador.

- $\gamma + \rho = -\rho$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \lambda_U$, finitos e eventualmente nulos.

Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}/U(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., se $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(B(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(A(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(1/(A(n/k)U(n/k)))$, então $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(B(n/k))$, se $\rho < \rho'$, e

$\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(A(n/k)) = O_p(1/(A(n/k)U(n/k)))$, se $\rho \geq \rho'$. Nestes casos não podemos estabelecer a normalidade assintótica e conseguimos apenas garantir um comportamento degenerado $\hat{\rho}^{(q)}$ para ρ_s , com uma velocidade de convergência da ordem de $B(n/k)$, se $\rho < \rho'$, e de $A(n/k)$ ou de $1/(A(n/k)U(n/k))$, se $\rho \geq \rho'$.

- $\gamma + \rho > -\rho$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ e $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, finitos e eventualmente nulos. Se avançarmos para níveis k tais que $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$, i.e., se $1/(\sqrt{k} A(n/k)) = o(B(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k} A(n/k)) = o(A(n/k))$, então $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(B(n/k))$, se $\rho < \rho'$, e $\hat{\rho}^{(q)} - \rho_s = O_p(A(n/k))$, se $\rho \geq \rho'$. Podemos então garantir um comportamento degenerado de $\hat{\rho}^{(q)}$ para ρ_s , com uma velocidade de convergência da ordem de $B(n/k)$, se $\rho < \rho'$, e de $A(n/k)$, se $\rho \geq \rho'$, mas não podemos garantir a normalidade assintótica deste estimador.

7.4 Escolha do parâmetro de controlo na PORT-estimação do parâmetro de forma de segunda ordem

Nesta Secção tecemos algumas considerações sobre a escolha do parâmetro de controlo τ_q a utilizar na classe de estimadores PORT- ρ apresentada em (7.13), seguindo a mesma linha de raciocínio apresentada na Secção 3.3.2, para os estimadores clássicos de ρ . Estamos interessados em saber se, de um ponto de vista estritamente teórico, a regra utilizada para os estimadores clássicos, que corresponde à escolha de $\tau = 0$ para valores de $\rho \geq -1$ e de $\tau = 1$ para valores de $\rho < -1$, se aplica ao estimador PORT- ρ em estudo.

Tal como sugerido anteriormente para os estimadores clássicos de ρ , devemos começar por obter algumas trajectórias amostrais de $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$, como funções de k , para um q fixo e para alguns valores de τ_q e escolher o valor τ_q^* da trajectória que apresenta maior estabilidade para valores grandes de k , utilizando, por exemplo, os critérios de estabilidade sugeridos em Gomes *et al.* [47], Gomes *et al.* [61] e Gomes & Pestana [65].

O estimador PORT- ρ , introduzido em (7.13), tem, pelos resultados apresentados nos Corolários 7.1, 7.2 e 7.3, uma componente dominante do viés não-nula, sendo função de $\gamma, \rho, \rho', \tau_q$ e χ_q^* . Como se trata de uma classe de estimadores invariante para mudanças de localização podemos considerar que o deslocamento, s , é nulo e restringir a nossa análise à vasta subclasse de modelos de Hall-Welsh com função quantil, (2.31), onde podemos escolher as seguintes para-

metrizações, $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, $B(t) = \beta' t^\rho$ e $U(t) = Ct^\gamma$. Desta forma, e sendo $\delta = \beta'/\beta$ a função $\tau_q(\rho, \delta, \beta, C, \chi_q^*)$ que anula a componente dominante do viés de $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$ é,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{2\chi_q^*(1-\rho)^2(3-19\rho+30\rho^2+4\rho^3-4\rho^4)}{\beta C \rho^2(1-2\rho)^3(9-9\rho+2\rho^2)} + \tau(\delta, \rho) & \text{se } \gamma = -\rho \wedge \chi_q^* \neq 0 \\ \tau(\delta, \rho) & \text{se } \gamma > -2\rho \vee (\gamma > 0 \wedge \chi_q^* = 0) \\ -\frac{24\chi_q^*(1-\rho)^5}{\beta^2 C (1-2\rho)^3(9-9\rho+2\rho^2)} + \tau(\delta, \rho) & \text{se } \gamma = -2\rho \wedge \chi_q^* \neq 0, \end{array} \right. \quad (7.25)$$

sendo $\tau(\delta, \rho) = -6 \frac{4\delta(1-\rho)^5 + \rho(7-34\rho+56\rho^2-36\rho^3+8\rho^4)}{(1-2\rho)^3(9-9\rho+2\rho^2)}$ a função apresentada em (3.55).

Observação 7.3 O viés assintótico do estimador $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$ é, para valores de $\gamma > -2\rho$, igual ao viés assintótico do estimador clássico de ρ , em (3.49). Remetemos então para a Secção 3.3.2 a análise da escolha de τ_q para modelos com valores de $\gamma > -2\rho$. Além disso, o viés assintótico de $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$ é independente de τ_q em modelos com valores de γ na região $]0, -2\rho[\setminus \{-\rho\}$.

Analizamos agora os casos particulares $\gamma = -2\rho$ e $\gamma = -\rho$ onde a função τ_q , em (7.25), depende do quantil χ_q^* do modelo subjacente aos dados:

1º Caso: $\gamma = -2\rho$

Considerando o modelo *Burr*(γ, ρ) temos $C = 1$, $\delta = 1$ e $\chi_q^* = ((1-q)^\rho - 1)^2$. O comportamento da função τ_q é apresentado na Figura 7.1 para $q = \{0, 0.1, 0.25\}$. Para valores de $q = 0, 0.1$ as trajectórias observadas sugerem a escolha de $\tau_q = 0$ para $\rho \geq -1$ e de $\tau_q = 1$ para $\rho < -1$, i.e., a regra utilizada para os estimadores clássicos. Relativamente ao caso $q = 0.25$ sugerimos a escolha de $\tau_{0.25} = 0$, qualquer que seja o valor de ρ . Para o modelo *Fréchet*(γ) temos $C = 1$, $\delta = 5/3$, $\chi_q^* = (-\ln q)^{-\gamma}$ e $\rho = -1$. Apresentamos na Tabela 7.1 os valores do parâmetro de controlo τ_q para $q = \{0, 0.1, 0.25\}$, os quais são negativos e decrescentes com q .

Tabela 7.1: Valores de τ_q para um modelo *Fréchet*(γ) com $\gamma = -2\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

q	0	0.1	0.25
τ_q	-0.803704	-1.071950	-1.543750

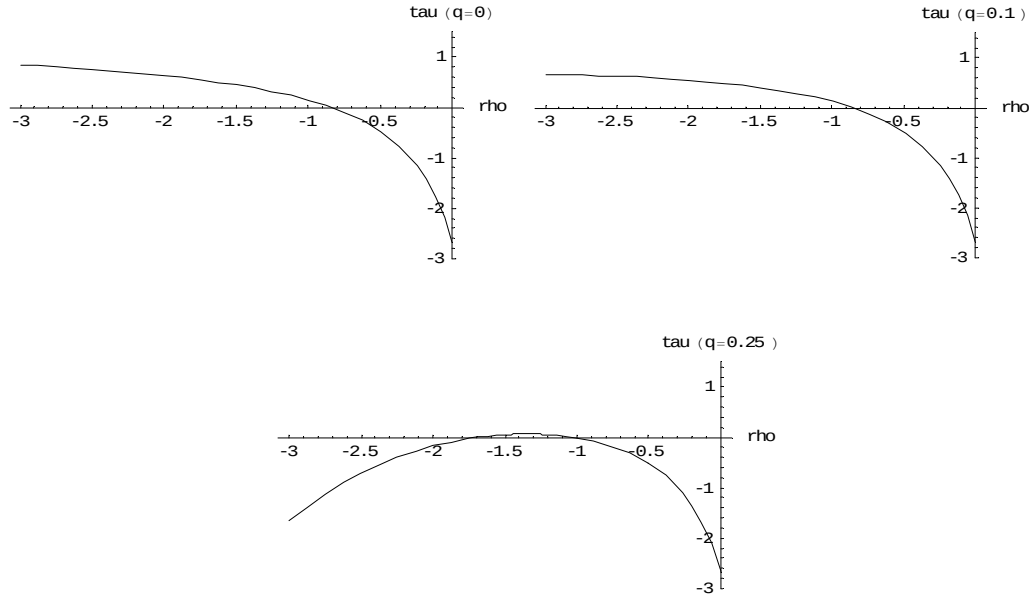


Figura 7.1: Trajectórias das funções τ_q para o modelo $Burr(\gamma, \rho)$ com $\gamma = -2\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

2º Caso: $\gamma = -\rho$

Na Figura 7.2 apresentamos as trajectórias das funções τ_q para um modelo $Burr(\gamma, \rho)$ com $\gamma = -\rho$, $q = \{0, 0.1, 0.25\}$, e constatamos que as trajectórias observadas sugerem a escolha de $\tau = 0.5$ para $\rho < -1$ e $\tau = 0$ para $\rho \geq -1$.

Para o modelo $GP(\gamma > 0)$ temos $\delta = 1$, $C = 1/\gamma$ e $\chi_q^* = ((1 - q)^{-\gamma} - 1)/\gamma$, estando o comportamento da função τ_q , para $q = \{0, 0.1, 0.25\}$, apresentado na Figura 7.3. As trajectórias observadas sugerem a escolha de $\tau_q = 0$ para $\rho \geq -1$ e de $\tau_q = 1$ para $\rho < -1$, i.e., a regra utilizada para os estimadores clássicos.

Finalmente, e considerando o modelo $Fréchet(\gamma)$, apresentamos na Tabela 7.2 os valores de τ_q para $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

Tabela 7.2: Valores de τ_q para um modelo $Fréchet(\gamma)$ com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

q	0	0.1	0.25
τ_q	-0.803704	-1.369900	-1.744130

Os resultados obtidos neste breve estudo teórico indicam-nos que os parâmetros q e τ_q são independentes para valores de $\rho \geq -1$, uma vez que se obteve $\tau_q = 0$, para qualquer $q \in$

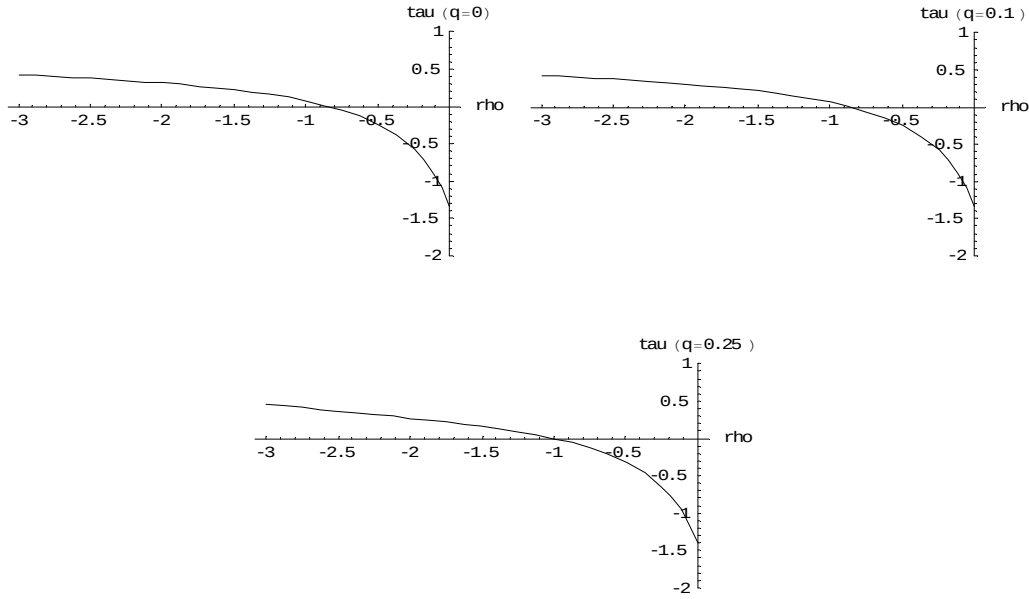


Figura 7.2: Trajectórias das funções τ_q para o modelo $Burr(\gamma, \rho)$ com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

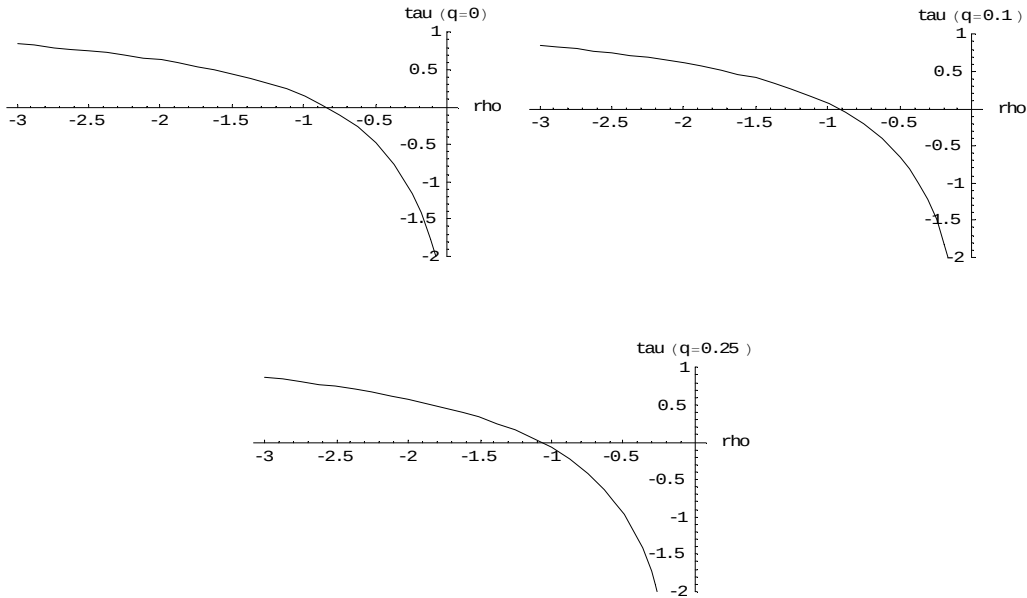


Figura 7.3: Trajectórias das funções τ_q para o modelo $GP(\gamma > 0)$ com $\gamma = -\rho$ e $q = \{0, 0.1, 0.25\}$.

$\{0, 0.1, 0.25\}$. Para valores de $\rho < -1$, e tendo em conta os comportamentos apresentados nos gráficos acima, sugerimos que se obtenham as trajectórias de $\hat{\rho}^{(q)}(k; \tau_q)$ para q fixo, considerando diversos valores de τ_q para além do valor $\tau_q = 1$. Se as trajectórias associadas a valores de $\tau_q \neq 1$

não apresentarem um comportamento muito superior, i.e., uma região de estabilidade em torno do verdadeiro valor de ρ , devemos optar pela escolha $\tau_q = 1$, utilizando assim para os estimadores PORT- ρ a regra empírica de selecção do parâmetro de controlo τ dos estimadores clássicos.

Vimos na Secção 2.3.4 que, quando introduzimos um deslocamento, s , não-nulo no modelo subjacente aos dados podemos obter um parâmetro de forma de segunda ordem, ρ_s , diferente do do modelo inicial, ρ . Denote-se por τ_s , o parâmetro de controlo τ associado ao estimador clássico de ρ , em (3.49), sujeito a um deslocamento não-nulo, s , e denotado por $\hat{\rho}_s \equiv \hat{\rho}_s(k; \tau_s)$. Os resultados teóricos apresentados em Fraga Alves *et al.* [40] foram obtidos para um parâmetro de controlo $\tau \in \mathbb{R}$. Logo, podemos inferir que existe pelo menos um τ_s para o qual o estimador $\hat{\rho}_s$ é consistente para a estimação de ρ_s . Se $\rho_s = \rho$ devemos utilizar a regra empírica de selecção de τ dos estimadores clássicos. Se $\rho_s \neq \rho$, o que acontece em modelos com valores de $\gamma + \rho \leq 0$, e onde $\rho_s = -\gamma$, devemos começar por obter as trajectórias amostrais do estimador $\hat{\rho}_s$ para diferentes valores de s . Se estas forem muito dependentes de s devemos escolher uma regra para cada deslocamento, s , introduzido no modelo. Se as trajectórias forem pouco dependentes de s devemos tentar obter uma regra para os diversos valores de s .

Observação 7.4 *Relativamente à escolha do nível $k_1^{(q)}$ a usar na PORT- estimação do parâmetro de forma de segunda ordem, este deve ser tal que nos permita garantir a normalidade assintótica dos estimadores PORT- ρ com um viés assintótico não-nulo, e satisfazer ainda a condição*

$$\hat{\rho}^{(q)}(k_1^{(q)}; \tau_q) - \rho_s = o_p(1/\ln n).$$

O nível $k_1^{(q)}$ sugerido neste trabalho para utilização em futuros estudos de simulação é $k_1^{(q)} := n_q^{1-\epsilon}$, com $\epsilon \sim 0^+$, e $n_q := n - ([nq] + 1)$.

7.5 Alguns comentários e conclusões

A classe de estimadores PORT- ρ introduzida neste Capítulo parece-nos, do ponto de vista teórico, uma boa alternativa à classe de estimadores clássicos de ρ para análise de dados reais, quando os estimadores clássicos apresentam um mau desempenho, o que poderá indiciar a presença de um deslocamento nos dados.

Por outro lado, e desenvolvendo uma nova classe de estimadores semi-paramétricos do parâmetro de escala de segunda ordem invariante para mudanças de localização podemos, também, tornar os estimadores de viés reduzido, apresentados nos Capítulos 4 e 5, invariantes para mudanças de localização.

Remetemos para um trabalho futuro o estudo do comportamento dos estimadores PORT- ρ em amostras de dimensão finita. Este estudo deve ser precedido de uma análise preliminar sobre a escolha do parâmetro de controlo τ_q a utilizar na PORT-estimação do parâmetro de forma de segunda ordem. Com esta análise pretender-se-á validar ou não a utilização da regra empírica, $\tau_q = 1$ para $|\rho| > 1$ e $\tau_q = 0$ para $0 < |\rho| \leq 1$, nos estimadores PORT- ρ .

Capítulo 8

Conclusões

Neste Capítulo apresentamos os principais resultados obtidos ao longo deste trabalho de investigação e também alguns problemas em aberto, que poderão ser objecto de estudo em trabalhos futuros.

Nesta dissertação abordámos o problema da estimação semi-paramétrica de viés reduzido em Estatística de Extremos. Começámos por efectuar um enquadramento teórico da Teoria de Valores Extremos, apresentando de seguida alguns resultados da teoria clássica de estimação de parâmetros de acontecimentos raros. Abordámos a estimação do índice de valores extremos, também designado de índice de cauda, γ , para modelos de cauda pesada, i.e., modelos com índice de cauda positivo, $\gamma > 0$, e a estimação dos parâmetros de forma e de escala de segunda ordem, ρ e β , respectivamente. Da análise das propriedades, em contexto de segunda ordem, das estatísticas log-excessos e excessos acima de um nível aleatório elevado, utilizadas na estimação de γ , obtivemos duas novas classes de estimadores semi-paramétricos de γ . Os estimadores obtidos com base na análise dos log-excessos são “assintoticamente centrados”, i.e., apresentam uma componente dominante do viés nula, e apresentam no nível óptimo erro quadrático médio inferior ao dos estimadores clássicos. A estimação externa no nível adequado k_1 dos parâmetros de segunda ordem β e ρ permitiu obter, para estes estimadores de viés reduzido, uma variância assintótica igual a γ^2 , a variância assintótica do estimador de Hill, sendo por isso designados de estimadores de viés reduzido de variância mínima, MVRB (do inglês “*minimum-variance reduced-bias*”). Ilustrámos o comportamento destes estimadores em amostras de dimensão finita, via método de Monte Carlo, tendo as simulações mostrado que estes estimadores são melhores

que o estimador de Hill para uma vasta gama de valores de k . A classe de estimadores obtida com base nos excessos acima de um nível elevado não é de viés reduzido devido à estimação conjunta, no mesmo nível k , de γ e de um parâmetro de escala de primeira ordem. Assim, e com o objectivo de obtermos estimadores “assintoticamente centrados” deixámos em aberto a remoção da componente dominante do viés do parâmetro de escala de primeira ordem. Apresentámos outros estimadores MVRB existentes na literatura e efectuámos um estudo comparativo sobre algumas técnicas heurísticas de escolha adaptativa do “nível óptimo” a usar em estimação de viés reduzido. Introduzimos ainda estimadores de quantis elevados baseados em estimadores MVRB, efectuando uma aplicação a dados reais. Sendo o objectivo desta dissertação o estudo de estimadores de viés reduzido, começámos a estudar o problema da obtenção de estimadores de viés reduzido invariantes para mudanças de localização. Recorrendo à metodologia PORT (do inglês “*peaks over random threshold*”) apresentámos uma nova classe de estimadores de quantis elevados invariante para mudanças de localização e satisfazendo uma relação linear adequada. Esta classe é assintoticamente equivalente a uma outra classe de PORT-estimadores de quantis elevados existente na literatura, remetendo para trabalho futuro a análise das propriedades exactas destes estimadores, bem como a comparação das duas classes em amostras de dimensão finita, via método de Monte Carlo. A terminar este trabalho apresentámos uma nova classe de estimadores do parâmetro de forma de segunda ordem invariante para mudanças de localização. Provámos a consistência desta nova classe e apresentámos as condições necessárias para garantir a normalidade assintótica destes estimadores. Analisámos o problema da escolha do parâmetro de controlo, τ_q , a usar na PORT-estimação do parâmetro de forma de segunda ordem, remetendo para trabalho futuro o estudo do comportamento exacto destes estimadores e a validação, utilizando técnicas de Monte Carlo, da regra empírica de escolha de τ_q . Deixámos em aberto o problema da escolha óptima do número de estatísticas ordinais de topo a usar em estimação de viés reduzido, bem como a obtenção de uma nova classe de estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem invariante para mudanças de localização, a ser designada de PORT- β . A introdução das classes de estimadores PORT- ρ e PORT- β nos estimadores MVRB, reescritos segundo a metodologia PORT, permitir-nos-á obter os PORT-estimadores MVRB, i.e., estimadores de viés reduzido de variância mínima invariantes para mudanças de localização.

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M. & Stegun I. (eds.) (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- [2] Araújo Santos, P., Fraga Alves, I. & Gomes, M. I. (2006). Peaks over random threshold methodology for tail index and high quantile estimation. *Revstat* **4** (3), 227-247.
- [3] Arnold, B. C., Balakrishnan N. & Nagaraja H. N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Balkema, A. A. & de Haan, L. (1978). Limit distributions for order statistics I-II. *Theor. Probab. Appl.* **23**, 77-92 and 341-358 (English version).
- [5] Beirlant, J., Vynckier, P. & Teugels, J. L. (1996). Excess function and estimation of the extreme-value index. *Bernoulli* **2**, 293-318.
- [6] Beirlant, J., Vynckier, P. & Teugels, J. L. (1996). Tail index estimation, Pareto quantile plots, and regression diagnostics. *J. Amer. Statist. Assoc.* **91**, 1659-1667.
- [7] Beirlant, J., Dierckx, G., Goegebeur, Y. & Matthys, G. (1999). Tail index estimation and an exponential regression model. *Extremes* **2**, 177-200.
- [8] Beirlant, J., Dierckx, G., Guillou, A. & Starica, C. (2002). On exponential representations of log-spacings of extreme order statistics. *Extremes* **5**:2, 157-180.
- [9] Beirlant, J., Figueiredo, F., Gomes, M. I. & Vandewalle, B. (2008). Improved reduced-bias tail index and quantile estimators. *Journal of Statistical Planning and Inference* **138**:6, 1851-1870.
- [10] Bingham, N. H., Goldie, C. M. & Teugels, J. L. (1987). *Regular Variation*. Cambridge University Press.

-
- [11] Caeiro, F. (2006). *Redução de Viés na Estimação Semi-Paramétrica de um Parâmetro de Escala*. Em *Ciência Estatística* (Canto e Castro L. *et al.*, eds.), 127-148. Edições S.P.E.
- [12] Caeiro, F. (2006). *Estimação de Parâmetros de Acontecimentos Raros*. Tese de Doutorado, D.E.I.O., Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [13] Caeiro, F. & Gomes, M. I. (2002). A class of asymptotically unbiased semi-parametric estimators of the tail index. *Test* **11**:2, 345-364.
- [14] Caeiro, F. & Gomes, M. I. (2002) Bias reduction in the estimation of parameters of rare events. *Theory of Stochastic Processes* **8**(24), 67-76.
- [15] Caeiro, F. & Gomes, M. I. (2006). A new class of estimators of a “scale” second order parameter. *Extremes* **9**, 193-211.
- [16] Caeiro, F. & Gomes, M. I. (2008). Semi-parametric second-order reduced-bias high quantile estimation. *Test*, in press (2008), DOI: 10.1007/s11749-008-0108-8.
- [17] Caeiro, F. & Gomes, M. I. (2008). Minimum-variance reduced-bias tail index and quantile estimation. *Revstat* **6** (1), 1-20.
- [18] Caeiro, F., Gomes, M. I. & Henriques Rodrigues, L. (2008). Reduced-bias tail index estimators under a third order framework. Aceite para publicação na revista *Communications in Statistics - Theory and Methods*.
- [19] Caeiro, F., Gomes, M. I. & Pestana, D. D. (2005). Direct reduction of bias of the classical Hill estimator. *Revstat* **3** (2), 111-136.
- [20] Castillo E. & Hadi, A. S. (1994). Parameter and quantile estimation for the generalized extreme-value distribution. *Environmetrics* **5**, 417-432.
- [21] Castillo, E. & Hadi, A. S. (1995). A method for estimating parameters and quantiles of distributions of continuous random variables. *Computational Statistics and Data Analysis* **20**, 421-439.
- [22] Csörgő, S., Deheuvels, P. & Mason, D. (1985). Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Statist.* **13**, 1050-1077.

-
- [23] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L. & de Vries C. G. (1998). Using a bootstrap method to choose the sample fraction in the tail index estimation. *J. Multivariate Analysis* **76**, 226-248.
- [24] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L. & de Vries, C. G. (2001). Using a bootstrap method to choose the sample fraction in the tail index estimation. *J. Mult. Analysis* **76**, 226-248.
- [25] David, H. A. & Nagaraja, H. N. (2003). *Order Statistics* (Third Edition). John Wiley & Sons, Inc.
- [26] Davison, A. (1984). Modeling excesses over high threshold with an application. In J. Tiago de Oliveira ed., *Statistical Extremes and Applications*, D. Reidel, 461-482.
- [27] Dekkers, A., Einmahl, J. & de Haan, L. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Annals of Statistics* **17**, 1833-1855.
- [28] Dekkers, A. L. M. & de Haan, L. (1993). Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation. *J. Multivariate Anal.* **47**, no. 2, 173-195.
- [29] Draisma, G., de Haan, L., Peng, L. & Pereira, T. T. (1999). A bootstrap-based method to achieve optimality in estimating extreme value index. *Extremes* **2**:4, 367-404.
- [30] Drees, H. (1998). A general class of estimators of the tail index. *J. Statist. Planning and Inference* **98**, 95-112.
- [31] Drees, H. (2002). Tail empirical processes under mixing conditions. In Dehling *et al.* (eds.), *Empirical Process Techniques for Dependent Data*, 325-342. Birkhäuser, Boston.
- [32] Drees, H. (2003). Extreme quantile estimation for dependent data with applications to finance. *Bernoulli* **9**, 617-657.
- [33] Drees, H., Ferreira, A. & de Haan, L. (2004). On maximum likelihood estimation of the extreme value index. *Ann. Appl. Probab.* **14**:3, 1179-1201.
- [34] Drees, H. & Kaufman, E. (1998). Selecting the optimal sample fraction in univariate extreme value distribution. *Stoch. Proc. and Appl.* **75**, 149-172.
- [35] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look to the Jackknife. *Ann. Statist.* **7**, 1-26.

-
- [36] Efron, B. & Tibshirani, R. J. (1983). *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall.
- [37] Falk, M. (1989). A note on uniform asymptotic normality of intermediate order statistics. *Ann. Statist. Math.* **41**, 19-29.
- [38] Ferreira, A., de Haan, L. & Peng, L. (2003). On optimising the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics* **37**(5), 401-434.
- [39] Feuerverger, A. & Hall, P. (1999). Estimating a tail exponent by modelling departure from a Pareto distribution. *Ann. Statist.* **27**, 760-781.
- [40] Fraga Alves, M. I., Gomes, M. I. & de Haan, L. (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Portugaliae Mathematica* **60**:1, 193-213.
- [41] Fraga Alves, M. I., de Haan, L. & Lin, T. (2003). Estimation of the parameter controlling the speed of convergence in extreme value theory. *Mathematical Methods of Statistics* **12**:2, 155-176.
- [42] Fraga Alves, M. I., de Haan, L. & Neves, C. (2009). A test procedure for detecting super heavy tails. *Journal of Statistical Planning and Inference* **139**:2, 213-227.
- [43] Geluk, J. L. & de Haan, L. (1987). *Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems*. Tech. Report CWI Tract 40, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Netherlands.
- [44] Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* **44**, 423-453.
- [45] Gomes, M. I. (1994). Metodologias Jackknife e Bootstrap em Estatística de Extremos. In Mendes-Lopes *et al.* (eds.), *Actas II Congresso S.P.E.*, 31-46.
- [46] Gomes, M. I. (2002). *A Note on the Excesses Over a High Threshold*. Notas e Comunicações CEAUL 10/2002.
- [47] Gomes, M. I., Caeiro, F. & Figueiredo, F. (2004). Bias reduction of a tail index estimator through an external estimation of the second order parameter. *Statistics* **38** 6, 497-510.
- [48] Gomes, M. I. & Figueiredo, F. (2006). Bias reduction in risk modelling: Semi-parametric quantile estimation. *Test* **15**:2, 375-396.

-
- [49] Gomes, M. I., Fraga Alves, M. I. & Araújo Santos, P. (2008). PORT Hill and Moment Estimators for Heavy-Tailed Models. *Commun. Statist. – Simul. & Comput.* **37**, 1281-1306.
- [50] Gomes, M. I., de Haan, L. & Peng, L. (2002). Semi-parametric estimation of the second order parameter - asymptotic and finite sample behaviour. *Extremes* **5**:4, 387-414.
- [51] Gomes, M. I., de Haan, L. & Henriques Rodrigues, L. (2008). Tail index estimation for heavy-tailed models: accommodation of bias in the weighted log-excesses. *J. Royal Statistical Society* **B70**, Issue 1, 31-52.
- [52] Gomes, M. I. & Henriques Rodrigues, L. (2007). Escolha adaptativa do "threshold" em estimação de viés reduzido: um estudo de simulação - In Ferrão *et al.* (eds.), *Estatística: Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 419-430.
- [53] Gomes, M. I. & Henriques Rodrigues, L. (2008). Tail index estimation for heavy tails: accommodation of bias in the excesses over a high threshold. *Extremes* **11**:3, 303-328.
- [54] Gomes, M. I., Henriques Rodrigues, L., Pereira, H. & Pestana, D. (2009). Tail index and second order parameters' semi-parametric estimation based on the log-excesses. Aceite para publicação no *J. Statist. Comp. and Simul.*
- [55] Gomes, M. I., Henriques Rodrigues, L., Vandewalle, B. & Viseu, C. (2008). A heuristic adaptive choice of the threshold for bias-corrected Hill estimators. *J. Statist. Comp. and Simul.* **78**, Issue 2, 133-150.
- [56] Gomes, M. I. & Martins, M. J. (2001). Generalizations of the Hill estimator - asymptotic versus finite sample behaviour. *J. Statistical Planning and Inference* **93**, 161-180.
- [57] Gomes, M. I. & Martins, M. J. (2002). "Asymptotically unbiased" estimators of the tail index based on external estimation of the second order parameter. *Extremes* **5**:1, 5-31.
- [58] Gomes, M. I., Martins, M. J. & Neves, M. M. (2000). Alternatives to a semi-parametric estimator of parameters of rare events - the Jackknife methodology. *Extremes* **3**:3, 207-229.
- [59] Gomes, M. I., Martins, M. J. & Neves, M. M. (2002). Generalized Jackknife semi-parametric estimators of the tail index. *Portugaliae Mathematica* **59**:4, 393-408.
- [60] Gomes, M. I., Martins, M. J. & Neves, M. M. (2007). Improving second order reduced-bias extreme value index estimation. *Revstat* **5**(2), 177-207.

-
- [61] Gomes, M. I., Miranda, C. & Pereira, H. (2005). Revisiting the role of the Jackknife methodology in the estimation of a positive extreme value index. *Comm. in Statistics – Theory and Methods* **34**, 1-20.
- [62] Gomes, M. I., Miranda, C. & Viseu, C. (2007). Reduced bias extreme value index estimation and the Jackknife methodology, *Statistica Neerlandica* **61**:2, 243-270.
- [63] Gomes, M. I. & Neves, C. (2007). Asymptotic comparison of the mixed moment and classical extreme value index estimators. *Statistics and Probability Letters* **78**:6, 643-653.
- [64] Gomes, M. I. & Oliveira, O. (2001). The bootstrap methodology in statistics of extremes: Choice of the optimal sample fraction. *Extremes* **4**:4, 331-358.
- [65] Gomes, M. I. & Pestana, D. (2007). A simple second order reduced bias tail index estimator. *J. Statist. Comput. and Simulation* **77**, No. 6, 487-504.
- [66] Gomes, M. I. & Pestana, D. (2007). A sturdy reduced bias extreme quantile (*VaR*) estimator. *J. Amer. Statist. Assoc* **102**, No. 477, 280-292.
- [67] Gomes, M. I., Pestana D., Rodrigues, L. & Viseu, C. (2008). *Tail Behaviour: An Empirical Study*. In Arnold, B.C., Balakrishnan, N., Sarabia, J.M., Mínguez, R. (eds.), *Advances in Mathematical and Statistical Modelling*, ISBN: 978-0-8176-4625-7, 195-207. Birkhäuser, Boston.
- [68] Gomes, M. I. & Rodrigues, L. (2005). Estimação do parâmetro de escala de primeira ordem em modelos de caudas pesadas. In Braumann C. *et al.* (eds.), *Estatística Jubilar*, Edições S.P.E., 355-366.
- [69] Gray, H. L. & Schucany, W. R. (1972). *The Generalized Jackknife Statistic*. Marcel Dekker.
- [70] Grimshaw, S. D. (1993). Computing maximum likelihood estimates for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics* **35**:2, 185-191.
- [71] Guillou, A. & Hall, P. (2001). A diagnostic for selecting the threshold in extreme value analysis. *J. Royal Statistical Society* **B63**, 293-305.
- [72] de Haan, L. (1970). *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*. Mathematical Centre Tract 32, Amsterdam.

- [73] de Haan, L. (1984). Slow variation and characterization of domains of attraction. *Statistical Extremes and Applications*, J. Tiago de Oliveira, ed., 31-38. Reidel, Dordrecht.
- [74] de Haan, L. & Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory - An Introduction*. Springer.
- [75] de Haan, L. & Peng, L. (1998). Comparison of tail index estimators. *Statistica Neerlandica* **52**, 60-70.
- [76] de Haan, L. & Rootzén, H. (1993). On the estimation of high quantiles. *J. Statist. Plann. Inference* **35** 1-13.
- [77] Hall, P. (1982). On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Royal Statist. Soc.* **B44**, 37-42.
- [78] Hall, P. & Welsh, A. H. (1985). Adaptative estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.* **13**, 331-341.
- [79] Henriques Rodrigues, L. & Gomes, M. I. (2008). A metodologia PORT na estimação semi-paramétrica de um parâmetro de escala. Aceite para publicação no livro de Actas do XVI Congresso da S.P.E.
- [80] Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* **3**, 1163-1174.
- [81] Martins, M. J. (2000). *Estimação de Caudas Pesadas - Variantes ao Estimador de Hill*. Tese de Doutoramento, D.E.I.O., Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [82] Martins, M. J., Gomes, M. I. & Neves, M. (1999). Some results on the behaviour of Hill's estimator. *J. Statist. Comput. and Simulation* **63**, 283-297.
- [83] Matthys, G. & Beirlant, J. (2003). Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. *Statistica Sinica* **13**, 853-880.
- [84] Matthys, G., Delafosse, M., Guillou, A. & Beirlant, J. (2004). Estimating catastrophic quantile levels for heavy-tailed distributions. *Insurance: Mathematics and Economics* **34**, 517-537.

-
- [85] Neves, C. & Fraga Alves, M. (2008). *The ratio of maximum to the sum for testing super heavy tails*. In Arnold, B., Balakrishnan, N., Sarabia, J., and Minguez, R., editors, *Advances in Mathematical and Statistical Modeling*, ISBN: 978-0-8176-4625-7. pgs 181-194 Birkhauser, Boston.
- [86] Peng, L. (1998). Asymptotically unbiased estimator for the extreme-value index. *Statistics and Probability Letters* **38**(2), 107-115.
- [87] Pestana, D. D. & Veloso, S. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [88] Rényi, A. (1953). On the theory of order statistics. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4**, 191–231.
- [89] Resnick, S. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [90] Rohatgi, V. K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [91] Seneta, E. (1976). *Regularly Varying Functions*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [92] Smirnov, N. V. (1949). Limit distributions for the term of a variational series. *trudy mat. Inst. Steklov* **25**, 1-60 (in Russian). English translation in *Am. Math. Soc. Transl.* **67** (1952).
- [93] Smith, R. L. (1987). Estimating tails of probability distributions. *The Annals of Statistics* **15**:3, 1174-1207.
- [94] von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalcanique* **1**, 141-160.[Reproduced in Selected Papers of Richard von Mises (1964), *Am. Math. Soc. II*, 271-294].
- [95] Weissman, I. (1978). Estimation of parameters of large quantiles based on the k largest observations. *J. Amer. Statist. Assoc.* **73**, 812–815.