UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Otimização de uma carteira internacional com base na semi-variância

Catarina Salomé Dias Valverde

Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

Trabalho de Projeto orientado por:
Prof.ª Doutora Raquel João Fonseca

2019

Resumo

Dada a incerteza associada à evolução dos preços dos ativos e das respetivas taxas de câmbio num mercado internacional, o investidor de hoje atribui maior relevância à conservação do capital investido do que à obtenção de largos ganhos. Assim, o risco torna-se no foco da análise na construção de uma carteira de investimentos. Como tal, o presente trabalho procura, em particular, analisar o risco de perda numa carteira de investimentos, considerando os ganhos como uma oportunidade para o investidor. Consequentemente, recorre-se à semi-variância para efetuar a medição do risco e procura-se comparar o modelo de seleção de carteiras utilizando esta medida de risco com o tradicional modelo de *Markowitz*. O retorno esperado com o investimento é outro fator importante, sendo essencial para a escolha de ativos na integração dessa carteira. É no binómio retorno e risco que se irá basear o modelo em estudo, realçando a importância da interação entre os ativos, representada por uma matriz de semi-covariâncias e que será gerada de forma a ser de natureza simétrica e exógena. Uma estratégia de *backtesting* encontra-se implementada de forma a observar a evolução do comportamento em ambos os modelos com base nos dados históricos. Para investimentos por vários períodos, tornam-se necessários ajustes na carteira através da compra e venda de ativos. Face a isto, será apresentado um modelo linear recursivo de decisões de investimentos sequenciais para dois períodos. Em ambos os casos, o modelo com base na semi-variância tende a apresentar um melhor desempenho do que o modelo tradicional baseado na variância dos retornos.

Palavras-Chave: Carteira de Investimentos Internacional; Otimização de Carteiras; Semi-variância; Multiperíodo; Regras Lineares de Decisão.

Abstract

Due to the uncertainty associated with the evolution of asset prices and their respective exchange rate in an international market, investors give nowadays more importance to maintaining a certain level of capital than to obtaining large gains. Thus, risk becomes the focus of the analysis on the construction of an investment portfolio. The present work aims, in particular, to analyse the risk of loss in an investment portfolio, while considering the price movements above a pre-defined value as an opportunity to the investor. Consequently, the semivariance is used to measure risk and a comparison is made between the portfolio selection model using this risk measurement and the Markowitz's traditional model. The minimum required return on the investment is another important factor, essential to the assets'selection to integrate the portfolio. The model in this study will be based on the trade-off between risk and return, highlighting the importance of the interaction between the assets, represented by the semicovariance matrix, which will be generated to be symmetrical and exogenous. A backtesting strategy will be implemented in order to observe the portfolio's behavior in both models based on historical data. For investments over multiple periods, portfolio adjustments are required through the sale and acquisition of the available assets. Having this in consideration, a model based on linear decisions rules for two periods of investment will be developed. In both cases, the model based on the semivariance tends to achieve better results than the traditional model based on returns variance.

Keywords: International Portfolio; Portfolio Optimization; Semivariance; Multiperiod; Linear Decisions Rules.

Agradecimentos

Em primeiro de tudo, quero agradecer aos meus pais por toda a educação e formação concedida, que me permitiu o alcance de mais um sucesso pessoal e académico.

À minha admirável orientadora, Raquel Fonseca, agradeço profundamente todos os conselhos e sugestões sábias que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho e para a consolidação do meu conhecimento científico.

Devo um agradecimento muito especial ao João Coelho, por toda esta viagem de vida e pelo constante interesse e entusiasmo demonstrados sobre o presente trabalho.

Por fim, um obrigada a todos os professores e colegas que me ensinaram e acompanharam em todo o meu percurso académico nesta prestigiada instituição.

"The Pessimist complains about the wind,
The Optimist expects it to change,
The Realist adjusts the sails. "

William Arthur Ward

Índice

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **xi**

Acrónimos **xiii**

1 Introdução **1**
- 1.1 Contextualização . . . 1
- 1.2 Estrutura . . . 3

2 Revisão da Literatura **5**
- 2.1 Constituição de uma Carteira Diversificada . . . 5
- 2.2 Modelos Alternativos de Medida de Risco . . . 8
  - 2.2.1 Rácio de Sharpe . . . 8
  - 2.2.2 *Value at Risk* – VaR . . . 10
  - 2.2.3 *Conditional Value at Risk - CVaR* . . . 11
  - 2.2.4 *Downside Risk* . . . 13
- 2.3 Carteira de Investimentos Internacionais . . . 20
  - 2.3.1 Relevância das Taxas de Câmbio . . . 21
  - 2.3.2 Ajustes na Taxa de Retorno . . . 23
  - 2.3.3 Diversificação Internacional . . . 24

3 Metodologia **27**
- 3.1 *Post Modern Portfolio Theory* . . . 29
- 3.2 Multiperíodo . . . 31

4 Resultados **37**
- 4.1 Análise Geral aos Dados . . . 37
- 4.2 Constituição da Carteira . . . 43
- 4.3 *Backtesting* . . . 45
- 4.4 Multiperíodo . . . 49

5 Conclusão **53**
- 5.1 Discussão Final . . . 53
- 5.2 Limitações do Estudo e Tópicos para Investigação Futura . . . 55

Lista de Figuras

2.1 Fronteira de eficiência de uma carteira de investimentos. Fonte: Matlab 7
2.2 Representação da reta de mercado de capitais (CML) com a fronteira de eficiência de *Markowitz*. Fonte: Matlab 9
2.3 Distribuição normal standard dos retornos de um ativo. 11
2.4 Ilustração gráfica das diferentes medidas de risco: VaR, CVaR, Perda máxima, Desvio do VaR, Desvio CVaR e Desvio de perda máxima. Fonte: Sergey Sarykalin et al. (2008). 12
2.5 Distribuição normal dos retornos, destacando os retornos negativos dos positivos. Fonte: Rom et al. (1993) 14
2.6 Distribuição dos retornos dos ativos com diferentes assimetrias. 15
2.7 Exemplo de obtenção dos retornos condicionais em função do retorno da carteira. Fonte: Estrada (2008) 18
2.8 Exemplo de obtenção dos retornos condicionais considerando o retorno de cada ativo. Fonte: Estrada (2008) 19
2.9 Exemplo de aplicação com recurso ao *downside risk*. Fonte: Estrada (2006) 20
2.10 Evolução mensal da variação das taxas de câmbio de EUR/GBP e EUR/USD. Fonte: Investing.com. 23

3.1 Esquema de otimização da carteira para dois períodos. 34

4.1 Evolução percentual dos preços dos ativos considerando o preço inicial como base, jan-14 a dez-16. 38
4.2 Evolução das taxas de câmbio EUR/USD e EUR/GBP, no período jan-14 e dez-16. . . . 38
4.3 Histograma da distribuição dos retornos de cada ativo. 40
4.4 Pesos atribuídos a cada ativo em cada modelo. 43
4.5 Fronteiras de eficiência e respetivas carteiras ótimas dos modelos PMPT e MPT. 45
4.6 Evolução percentual dos preços dos ativos considerando o preço inicial jan-14 como base, no período jan-17 e dez-18. 46
4.7 Carteiras determinadas pelo procedimento de *backtesting* para cada modelo. 47
4.8 Evolução da riqueza acumulada ao longo do período mensal simulado, desde jan-17 a dez-18. 48

Lista de Tabelas

4.1 Análise geral dos retornos ajustados no período de janeiro 2014 a dezembro 2016. 39
4.2 Matriz de semi-covariâncias dos ativos, no período jan-14 até dez-16 41
4.3 Matriz de covariâncias dos retornos ajustados, no período jan-14 até dez-16 41
4.4 Análise global ao conjunto de dados no período de jan-14 a dez-16. 42
4.5 Histograma dos retornos ajustados acompanhado da distribuição Normal, no período de janeiro 2014 a dezembro 2016. 42
4.6 Retorno e Risco de cada carteira consoante o modelo utilizado. 44
4.7 Valores para o retorno e risco determinados no início e no final do período de *backtesting* 48
4.8 Expectativa de retorno por ativo. 49
4.9 Constituição de cada carteira em função das quantias em Euros investidas em cada ativo, em cada período de tempo. 50
4.10 Ajustes efetivamente ocorridos em cada ativo quando $t = 1$. 50
4.11 Valores dos ajustamentos em cada ativo quando $t = 1$. 51
4.12 Matriz de reação aos desvios do mercado. 51
4.13 Riqueza alcançada em cada período de tempo. 51
4.14 Semi-variância de cada carteira por período de tempo. 52

Acrónimos

AAPL *Apple Inc.*

ALV *Allianz.*

AMZN *Amazon.com Inc.*

BC8G *Bechtle AG.*

CVaR *Conditional Value at Risk.*

FB *Facebook Inc.*

LPM *Lower Partial Moment.*

MAR *Minimum Acceptable Return.*

MPT *Modern Portfolio Theory.*

NESN *Nestle SA.*

PMPT *Post Modern Portfolio Theory.*

RR *Rolls-Royce Holdings PLC.*

SAPG *SAP SE.*

SK *Skewness.*

ULVR *Unilever PLC.*

VaR *Value at Risk.*

VOWG *Volkswagen AG.*

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

O mercado financeiro surge com a crescente comercialização de ativos financeiros entre os mercados nacional e mundial, que se traduzem em compras e vendas de produtos ou instrumentos com valor, podendo estes ser materiais ou imateriais. Nos dias de hoje, este mercado caracteriza-se como sendo o maior mercado do mundo que, sem espaço físico, existe em qualquer lugar, via *internet*, telemóvel ou qualquer outro meio de comunicação.

A crescente expansão deste processo traduz-se na valorização ou desvalorização dos ativos financeiros, refletindo-se nas oscilações dos respetivos valores de mercado que, consequentemente, se traduzem em impactos financeiros para os investidores, através de ganhos ou perdas financeiras. Pretende-se assim elucidar o leitor para a importância da estratégia de formação de uma carteira de investimentos e chamar a atenção para alguns critérios possíveis de controlar. Deste modo, será praticável a obtenção de benefícios com os investimentos, mesmo que com diferentes tipos de ativos, emitentes, setores, países ou regiões geográficas. Realça-se a importância desta seleção inteligente para um futuro incerto.

A vasta diversidade de produtos financeiros oferecidos e a incerteza para com determinados investimentos contribuem para as oscilações dos valores desses ativos. Acresce-se assim a dificuldade de previsão do comportamento dos mesmos e, como consequência, surge a preocupação com os riscos inerentes, particularmente o impacto que o risco de mercado possa ter nos preços dessas trocas e investimentos. Assim, uma análise cuidada e fundamentada relativamente às potencialidades e fraquezas dos ativos são essenciais para uma melhor seleção de ativos, complementada com a diversificação dos mesmos, sendo considerada uma mais valia nos investimentos, pois cria um contrabalanço dos riscos entre os diferentes ativos, particularmente os não correlacionados, permitindo que haja menos volatilidade na carteira.

Perante um mercado internacional, surge um risco adicional devido às alterações contínuas nas taxas de câmbio, originando o designado risco cambial. Gera-se a inevitabilidade de análise da medida de risco tendo em consideração as oscilações entre o valor das divisas dos diferentes países a que o investidor se encontrará sujeito, enquanto mantiver ativos de países cuja moeda não é (nem vale) o mesmo. Num mercado doméstico em exclusivo, esta análise não seria necessária, visto que o investimento seria feito na própria moeda base. Há ainda outros fatores determinantes no valor da moeda (a inflação, a taxa de juro, entre outros), que não serão considerados neste trabalho. Desta forma, o risco torna-se ainda mais incerto e acaba refletido na rentabilidade do investimento. A diversificação internacional tem assim um papel ainda mais relevante, e em conjunto com uma boa análise é possível tirar vantagens desta volatilidade das taxas de câmbio. Nomeadamente, num período de valorização da moeda estrangeira face à moeda local, o que irá levar a um ganho extra.

Por outro lado, quando se fala numa carteira de investimentos, considera-se uma lista de ativos investidos conjuntamente, cujo objetivo se prende num contrabalanço mútuo entre eles, promovendo uma proteção ao investidor e dando resposta aos seus interesses. Assim, a análise de uma qualquer carteira de investimentos prende-se com a melhor conjugação para a formação dessa face aos ativos disponíveis, tendo como base a combinação entre o risco e a recompensa da carteira. Markowitz (1959), galardoado com o Prémio Nobel da Economia em 1990, foi o pioneiro desta temática com a Teoria Moderna das Carteiras, introduzindo um modelo teórico para a construção de um conjunto de carteiras ótimas. Contudo, o próprio sugere:

"Analyses based on Semivariance tend to produce better portfolios than those based on Variance. Variance considers extremely high and extremely low returns equally undesirable. An analysis based on Variance seeks to eliminate both extremes. An analysis based on S_E[1]*, on the other hand, concentrates on reducing losses."*

Assim, este trabalho procura analisar os riscos de uma carteira de investimentos internacional, considerando a semi-variância como medida de risco. Acredita-se que seja uma melhor medida para a análise do risco do que a tradicional variância e, por isso, será analisada tal hipótese, procurando a comparação dos dois modelos. A semi-variância é uma medida de risco que tem em consideração o perfil de risco do investidor para a análise do risco da carteira, considerando um determinado retorno alvo pretendido e proporcionando maior coerência no investimento. Desta forma, permite considerar apenas os valores abaixo desse retorno como risco indesejável, designando-os de *perdas*. Quanto aos valores acima do valor esperado, apesar de incertos, não serão considerados como perdas mas sim ganhos, visto ser algo benéfico e, por isso, não influenciarão o risco da carteira. Consequentemente, considera-se o grau de assimetria da distribuição dos retornos como um fator influenciador desta medida de risco, sendo que quando os retornos apresentam uma distribuição simétrica, o método funciona de forma idêntica à variância. Por outro lado, será introduzido um conceito recente para observar a interação entre os diferentes ativos de uma carteira, visto que esta irá influenciar o risco e o retorno pretendidos de um investidor, tal como sugerido por Estrada (2008). Deste modo, será possível determinaruma matriz de semi-covariâncias que refletirá estas interações e será, em particular, de natureza simétrica e exógena, o que a tornará generalizável para a construção de quaisquer carteiras que considerem o mesmo retorno alvo definido.

Será aplicada uma estratégia de *backtesting*, que consiste na formação de várias carteiras para um horizonte temporal considerando os dados históricos mensais, a fim de se observar o comportamento das carteiras estimadas através da metodologia em análise. Para cada carteira simulada serão simultaneamente determinados os respetivos retorno e risco. Face às oscilações dos dados históricos, as carteiras irão consequentemente alterar-se, refletindo a evolução que os ativos tiveram no mercado e que irá permitir analisar o comportamento de cada modelo face a essas mudanças.

Quando considerada uma sequência de diversos períodos de investimento, a volatilidade nos preços dos ativos obriga por vezes a reajustes na carteira em diferentes momentos do horizonte temporal, a fim de direcionar o desempenho da carteira de forma a obter benefícios pretendidos, como minimizar o risco incorrido e alcançar o retorno esperado. Deste modo será introduzida uma otimização de carteiras para multiperíodos, permitindo eventuais reajustes de compra e venda de ativos em diferentes períodos do horizonte de investimento. O desenvolvimento deste método dinâmico terá como base decisões lineares recursivas de um investimento sequencial que serão implementadas para dois períodos. Desta forma, pretende-se minimizar a totalidade de risco incorrido durante todo o investimento e alcançar um

[1] Semi-variância em torno da média, *E*.

determinado valor de riqueza.

Em suma, considera-se relevante uma análise e interpretação sobre a forma de constituir uma carteira de investimentos face ao risco disposto a incorrer, procurando saber de que forma a semi-variância contribui para a análise do risco, bem como acompanhar a evolução da carteira por diversos períodos, dando resposta a necessidades de ajustes de compra e venda de ativos por forma a alcançar os objetivos.

1.2 Estrutura

O presente trabalho encontra-se dividido em 5 capítulos, sendo este o primeiro deles, intitulado de Introdução, no qual se pretende contextualizar o tema e enunciar a temática que será desenvolvida e apresentada ao longo do trabalho. Segue-se a Revisão Literária, cujo objetivo se prende com o estudo e análise de trabalhos científicos anteriores, contendo a informação essencial para a investigação e entendimento dos resultados que se seguirão. No capítulo seguinte, Metodologia, será apresentado o desenvolvimento do modelo em estudo, para um período e para uma sequência de dois períodos. Neste último caso, serão estabelecidas restrições lineares recursivas, permitindo eventuais reajustes na carteira e que serão observados através de uma análise multiperíodo. Segue-se o capítulo Resultados, onde serão apresentados os dados, uma análise global dos mesmos e uma estimativa para um determinado período futuro, feita através de uma estratégia de *backtesting* para um determinado horizonte temporal, terminando com a evolução de uma carteira multiperíodo. A Conclusão será o capítulo final, onde serão expostos e analisados os resultados alcançados do modelo desenvolvido e uma comparação com um outro modelo mais tradicional, bem como apresentadas sugestões e complementos para um trabalho futuro.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Nesta capítulo, encontram-se os conceitos teóricos necessários ao desenvolvimento deste projeto, sendo tais baseados na leitura de trabalhos de diversos autores, que não só estudaram em detalhe as temáticas em causa, como também analisaram e desenvolveram modelos fulcrais à sua conceção, nomeadamente na constituição de carteiras de investimento, realçando a importância da semi-variância nos modelos modernos. Igualmente, procura-se saber quais os impactos da taxa de câmbio num mercado de investimentos internacionais. É com a fusão destas temáticas que se desenvolverá o presente trabalho.

2.1 Constituição de uma Carteira Diversificada

A análise de uma carteira de investimentos apresenta-se como sendo fundamental para contrabalançar a proteção de um investidor e o respeito pelas oportunidades surgidas. Markowitz (1952) revolucionou esta temática através da construção de um modelo de seleção de carteiras, cujo objetivo se prende com a formação de uma carteira de investimentos ótima, determinando consequentemente a carteira mais adequada a cada investidor, de acordo com o seu perfil de risco e rentabilidade.

O objetivo deste modelo consiste em saber quais os pesos a atribuir a cada ativo na formação da carteira, por forma a otimizar o risco incorrido face aos retornos pretendidos, ou seja, a aplicação do modelo vai consistir num *trade-off* entre retorno e risco. Inicialmente não foi considerada a possibilidade de vendas a descoberto (venda de ativos financeiros que não se possui), quer isto dizer que os valores dos pesos na carteira não podem tomar valores negativos. Para tal, o modelo precisa dos retornos individuais dos ativos, dos respetivos desvios-padrão e das covariâncias entre cada dois ativos. O retorno da carteira formada baseia-se na média ponderada dos pesos atribuídos a cada um dos ativos, w_i, com os respetivos retornos esperados de cada um, μ_i, apresentado na equação (2.1). O risco da carteira é medido pelo desvio-padrão, ou raiz quadrada da variância da carteira, sendo esta última determinada em função dos pesos, variâncias e covariâncias dos ativos, encontrando-se na equação (2.2). As variâncias e covariâncias são representadas por σ_{ij}. Ou seja, quando $i = j$ representa a própria variância do ativo; e quando $i \neq j$, fica a representar a interação entre os ativos i e j, designando-se de covariância. Considere-se ainda que existem n ativos disponíveis no mercado.

$$\mu_{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\mathbf{P},\mathbf{w}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{2.2}$$

Uma carteira consiste num conjunto de diversos instrumentos financeiros que procuram dar resposta às necessidades pessoais de investimento. Segundo Markowitz (1959), quando se detém uma carteira constituída por diversos ativos é possível reduzir o risco inerente a essa carteira sem sacrificar a rendibilidade, através da denominada diversificação de ativos. Assim, a constituição de uma carteira com mais do que um ativo traz um maior benefício para o investidor. Consequentemente, chamar-se-á de carteira diversificada quando a combinação de ativos da carteira permitir ter o benefício referido. Desta forma, quanto maior for o número de títulos que integram uma carteira, menor será o seu risco total, ficando reduzido o risco específico em cada um dos títulos.

A Teoria Moderna das Carteiras, *Modern Portfolio Theory* (MPT), desenvolvida por Markowitz (1952), culmina na utilização do modelo matemático (2.3), aqui na sua forma matricial, cujo objetivo é a minimização do risco da carteira para um certo nível mínimo de retorno, $R_\mathbf{P}$.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \sigma_\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}} \\ \text{s.a.} \quad & \mu\ \mathbf{w} \geq R_\mathbf{P} \\ & \mathbf{w}'\ \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Considerando n o número total de ativos disponíveis para investir, tem-se que $\sigma_\mathbf{P}$ corresponde ao desvio-padrão da carteira em função dos pesos, μ ao vetor linha do retorno esperado de cada ativo, $\mathbf{w}$ é um vetor coluna com os pesos de cada ativo na carteira, Σ é a matriz quadrada de dimensão n das covariâncias dos ativos, e cuja diagonal contém exatamente as variâncias de cada ativo. Finalmente $\mathbf{1}$ é um vetor unitário em coluna com dimensão $n \times 1$.

Como Markowitz (1959) explica, para que haja efetivamente uma diversificação na carteira é preciso entender de que forma os retornos dos ativos se encontram relacionados, com o fim de interpretar a sua interação e desempenho conjunto, procurando saber de que modo estas poderão reduzir o risco deste mesmo investimento. Caso estejam positivamente correlacionados, mas não perfeitamente correlacionados, significa que os retornos de cada um desses ativos têm a tendência para se deslocarem em conjunto no mesmo sentido, ou seja, ambos para valorizarem ou desvalorizarem, o que fará com que o risco da carteira aumente. Caso não estejam correlacionados, o investimento nesses ativos não leva a um acréscimo do risco na carteira para além das volatilidades individuais. Por fim, no caso de estarem negativamente correlacionados, poderão sim, reduzir o risco ou até eliminá-lo, através da anulação do risco um do outro. De notar que a correlação entre dois ativos tenderá a ser maior quando pertencentes à mesma indústria, consequência do facto de dependerem de bens/serviços necessários comuns, do que outros que não estejam em indústrias semelhantes. Também Sharpe (1964) menciona a necessidade de diversificar a carteira, visto que o risco de um ativo isolado não tem grande significado ao contrário do risco total de uma carteira que, fruto da interação entre os ativos, pode ser bastante reduzido.

Com este modelo, Markowitz (1959) estabeleceu que é no conjunto de combinações eficientes do binómio média-variância que se encontram as melhores combinações de seleção de carteiras, constituindo a denominada "Fronteira de Eficiência". Este modelo sugere um conjunto de carteiras eficientes, estando o critério de escolha de uma determinada carteira dependente do investidor, e do risco que este esteja disposto a incorrer. Pode-se observar na figura 2.1 a respetiva fronteira.

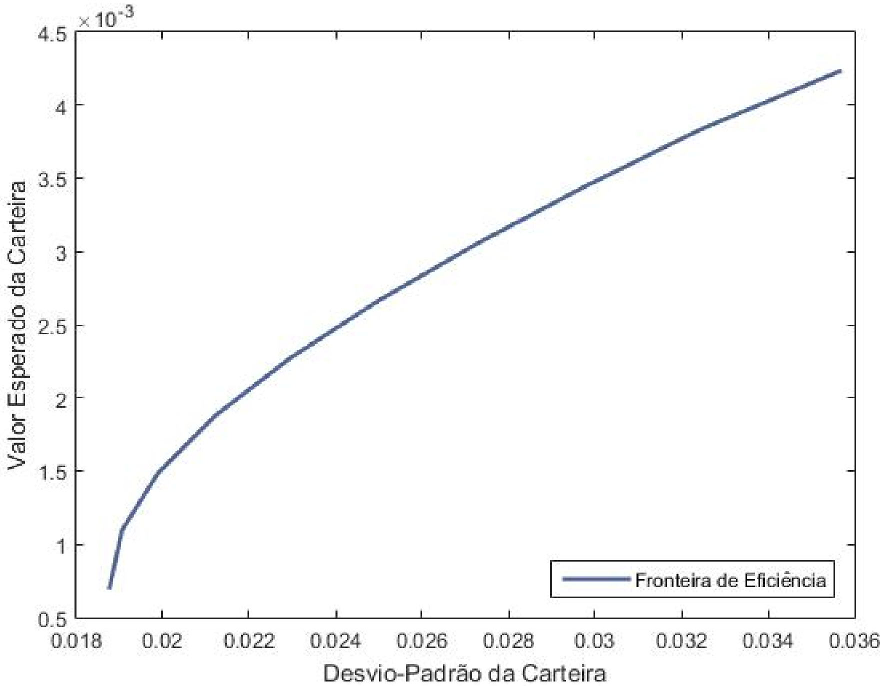


Figura 2.1: Fronteira de eficiência de uma carteira de investimentos. Fonte: Matlab

Na figura 2.1 encontra-se parte de uma parábola deitada, sendo esta, e todo o seu interior, ilustrativa das carteiras determinadas através das relações entre retorno e respetivo desvio-padrão. As carteiras mais favoráveis serão aquelas que se encontram a partir do ponto extremo da parábola, denominada de Carteira de Variância Mínima, deslocando-se ao longo da mesma para a direita, o que corresponde às carteiras presentes na já designada Fronteira de Eficiência. As carteiras no interior da parábola serão as menos eficientes pois existe pelo menos uma outra, presente na Fronteira de Eficiência, cujo retorno será sempre superior e cujo risco inerente é o mesmo. Como tal, o critério de escolha da carteira a deter será em função do risco a que o investidor se encontra disposto a incorrer. Caso existisse a possibilidade de venda a descoberto, o limite inferior da parábola seguiria para possíveis valores de retorno negativos.

Apesar de este ser o modelo mais tradicional no método de seleção de ativos, apresenta algumas ineficiências quando na presença de determinadas particularidades. Este modelo pressupõe que distribuições normais dos retornos, assumindo que é simetria e bem definida. Se os retornos dos dados subjacentes não forem normalmente distribuídos, a variância poderá levar a conclusões inapropriadas, (Vigdis Boasson et al., 2011). Consequentemente, a simetria da distribuição dos retornos dos ativos faz com que o desvio-padrão seja uma medida de risco ineficiente, pois este trata de forma igual a dispersão dos investimentos acima e abaixo da média como sendo um risco, penalizando a dispersão positiva favorável no retorno do investimento sobre o valor médio. Tendencialmente, a variância torna propícia a determinação de decisões de alocação de ativos erradas. Outro entrave está no *trade-off* entre média-variância que ignora a aversão ao risco do investidor, isto é, como a variância mede apenas a dispersão dos retornos dos ativos em torno do valor médio, não tem em consideração a aversão ao risco que o investidor pretenda. Rom et al. (1993), entre outros, afirmaram que o modelo MPT leva a comportamentos e previsões insatisfatórios.

Começaram assim a surgir outras metodologias de otimização de carteiras e minimização do risco a incorrer, na tentativa de responder a alguns dos problemas apresentados pelo modelo inicial de média-variância proposto. Algumas das novas medidas de risco estudadas são: *Rácio de Sharpe*, *Value at Risk* (VaR), *Conditional Value at Risk* (CVaR) e *Downside Risk*.

Baseado no método *Downside Risk*, Estrada (2007) sugere usar como medida de risco a própria semi-variância dos retornos, inicialmente enunciada por Roy (1952) e mais tarde defendida por Markowitz (1959). Esta medida torna-se mais útil e plausível do que a variância, isto porque apenas tem em conta a volatilidade negativa e adequa-se ao caso em que as distribuições dos retornos são assimétricas, bem como quando são simétricas. Assim, torna-se, quando necessário, tão útil como a variância.

O trabalho desenvolvido por Henk Grootveld (1999) apresenta as várias diferenças e semelhanças na utilização de diferentes medidas de risco, como a variância e o *Downside Risk*, analisando as respetivas formas de alocação de ativos. Sobressai que, na prática, a distribuição dos retornos tende a ser assimetricamente distribuída, especialmente em horizontes alargados, o que leva a que a variância se torne uma medida de risco ineficiente, visto que as flutuações abaixo do retorno esperado são indesejáveis, enquanto que no caso contrário, são desejáveis.

Como tal, recorrer à variância, ou desvio-padrão, como principal medida de risco deixa de ser o mais adequado para otimizar carteiras. Consequentemente, torna-se mais adequado e menos incerto recorrer a outros modelos alternativos, que não o MPT, e que permitem uma melhor combinação do binómio retorno/risco.

2.2 Modelos Alternativos de Medida de Risco

Dadas as limitações apresentadas pelo modelo tradicional de seleção de carteiras, surge a necessidade de construir medidas alternativas que permitam ultrapassar os entraves mencionados. Deste modo, seguem-se alguns dos modelos já introduzidos, sendo estes recorrentemente utilizados, que pretendem otimizar e proteger uma carteira de investimentos, baseando-se no risco presente no mercado.

2.2.1 Rácio de Sharpe

Um dos problemas centrais em finanças consiste na previsão e modelação do comportamento dos preços no mercado de capitais. O modelo desenvolvido por Sharpe (1964) procura determinar a opção de investimento que proporcionará os retornos mais altos dado o presente risco, ou seja, trata-se de um modelo que reflete os preços dos ativos de capital tendo em conta a relação entre o preço/retorno desse ativo e as várias componentes do seu risco global. O rácio ou índice de Sharpe corresponde ao declive da Reta do Mercado de Capitais ou *Capital Market Line* (CML), sendo esta a reta formada pela combinação ótima entre a taxa de retorno livre de risco e a carteira de mercado de ativos com risco.

Segue-se em (2.4) a fórmula matemática para a CML, que relaciona o preço do tempo com o preço do risco:

$$R_{\mathbf{P}} = r_f + \frac{R_i - r_f}{\sigma_i}\sigma_{\mathbf{P}} \tag{2.4}$$

Considerando um certo investimento i e R_i como a rentabilidade esperada do ativo i e σ_i o seu respetivo risco; r_f representa a taxa de rentabilidade do ativo sem risco, que se apresenta graficamente como sendo a ordenada na origem, considerada também como a compensação recebida pelo investidor ao adiar o consumo durante um período de tempo; $R_{\mathbf{P}}$ e $\sigma_{\mathbf{P}}$ são, respetivamente, o retorno e o risco da carteira. É nesta reta que se encontra agora o conjunto eficiente de carteiras fruto do respetivo *trade-off* entre retorno e risco. A rentabilidade esperada de uma carteira eficiente corresponde assim à soma da rentabilidade do ativo sem risco com uma rentabilidade adicional. Esta rentabilidade adicional surge da existência de risco na carteira, correspondendo ao preço do risco multiplicado pelo montante do risco da carteira eficiente.

$$\text{Rácio de Sharpe: } \frac{R_i - r_f}{\sigma_i} \tag{2.5}$$

O rácio de Sharpe surge deste preço do risco e apresenta-se então como o declive da reta. Este rácio descreve quanto se está a receber pela volatilidade extra suportada para manter um ativo mais arriscado, ou seja, expressa o excesso de retorno esperado por unidade de risco suportado. Deste modo, pretende-se medir a forma como o retorno de um ativo compensa o investidor pela exposição ao risco, ficando assim determinado o prémio de risco. Este prémio, que se encontra no numerador do rácio de Sharpe, expressa o valor esperado do retorno de um ativo acima da taxa livre de risco, e permite ao investidor isolar os ganhos associados. Observa-se que, quanto maior o rácio de Sharpe, melhor será o investimento, em termos de maior retorno para o mesmo nível de risco.

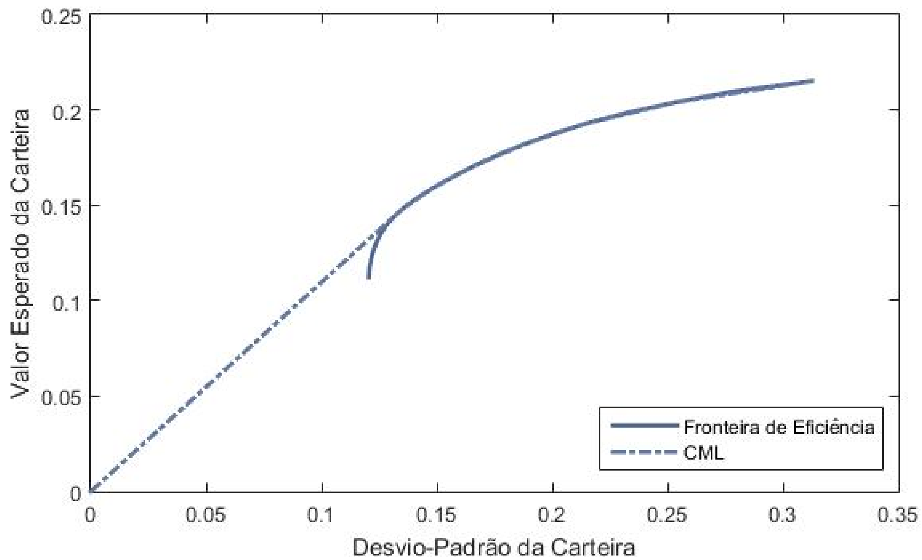


Figura 2.2: Representação da reta de mercado de capitais (CML) com a fronteira de eficiência de *Markowitz*. Fonte: Matlab

A representação gráfica na figura 2.2 reflete a interação entre a CML e a já conhecida Fronteira de Eficiência. A CML, construída de acordo com os dados mencionados, demonstra a relação entre o valor esperado de uma determinada carteira com o respetivo risco, refletido através do desvio-padrão, formando a reta que representa a interação entre a rendibilidade e o risco para carteiras eficientes. É no ponto de tangência entre a reta CML e a fronteira de eficiência que se encontra a carteira eficiente de mercado. Ativos que não sofrem com alterações na atividade económica, terão retorno igual à taxa de retorno sem risco, encontrando-se localizados na ordenada na origem. Aqueles que se alteram com a atividade económica irão prometer um maior valor nas taxas de retorno, percorrendo a reta. Ativos individuais encontram-se presentes abaixo da CML. Em equilíbrio, o investidor encontra na CML uma carteira de interesse.

Com vista à modelização do padrão de comportamentos dos retornos, independentemente de que período sejam, assume-se que estes se apresentem normalmente distribuídos. Aqui reside um entrave já mencionado, pois nem todos os retornos de ativos assumem a normalidade, invalidado a coerência destas exceções. Assim, este pode não ser o melhor modelo quando aplicado em carteiras ou ativos com grande volatilidade, o que leva a que exista uma assimetria na distribuição dos retornos. Tende também a falhar aquando da análise de carteiras com riscos não lineares.

2.2.2 *Value at Risk* – VaR

Este indicador pretende avaliar o risco inerente às operações financeiras, pretendendo resumir o risco de um produto financeiro ou carteira de investimentos a um único montante monetário, designado por Valor em Risco ou VaR. Assim, representa a pior perda esperada num determinado horizonte de tempo e encontra-se associado a um intervalo de confiança.

Segundo Linsmeier et al. (2000), esta metodologia foi desenvolvida para medir a exposição ao risco de mercado por parte de uma entidade, ou seja, o objetivo é saber em quanto do risco de mercado se está a incorrer. A necessidade do VaR deve-se com à crescente volatilidade nas taxas de câmbio, taxas de juro, entre outros, o que gerou a procura de uma medida quantitativa do risco da carteira face à interação com o mercado. De acordo com Duffie et al. (1997), a ferramenta VaR é uma medida estatística da possibilidade de perdas na carteira, isto é, mede as perdas resultantes de movimentos "normais" no mercado, procurando descrever esta magnitude das perdas nessa carteira. É uma medida expressa em quantis de risco, revelando a perda resultante de movimentos do mercado adversos com uma probabilidade especificada num intervalo de tempo.

Considere-se X como a variável aleatória que representa a perda financeira para o investidor, (Rockafellar et al., 2000). $\text{VaR}_\alpha(X)$ representa o Valor em Risco de um dado nível α entre 0 e 1. Se a variável aleatória X estiver associada à função de distribuição F_X, isto é $F_X(z) = P\ \{X \leq z\ \}$, com $z \in \mathbb{R}$, então o VaR de nível α fica caracterizado por:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \min\{z : F_X(z) \geq \alpha\} \tag{2.6}$$

Para estimar as probabilidades de perdas com um dado nível de significância é necessário definir distribuições de probabilidade para o risco. Usualmente usa-se a distribuição normal como aproximação para um elevado número de retornos, considerando estimativas para a média μ e a variância σ^2. Se assim o admitirmos, tem-se que:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \mu + k(\alpha)\sigma \tag{2.7}$$

com $k(\alpha) = \sqrt{2}\text{erf}^{-1}(2\alpha - 1)$ e $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$, (Rockafellar et al., 2000).

Desta forma considera que os retornos são independentes entre si e identicamente distribuídos, e que seguem uma distribuição normal. Interpreta-se como sendo o quantil de ordem α da variável aleatória de risco X. Exemplificando para o caso mais simples, considere-se a distribuição normal *standard* associada à perda X, isto é, de média nula e desvio-padrão igual à unidade: dado um nível de 5%, $\text{VaR}\,(0,05) = F_X^{-1}(0,05) = -1,645$, o que significa que, para uma amostra de 100 retornos, o VaR refere-se ao quinto menor retorno, havendo apenas 5 retornos cujo valor é menor do que $-1,645$, sendo este o limite máximo de perda no período considerado (apresenta-se ilustrado a figura 2.3).

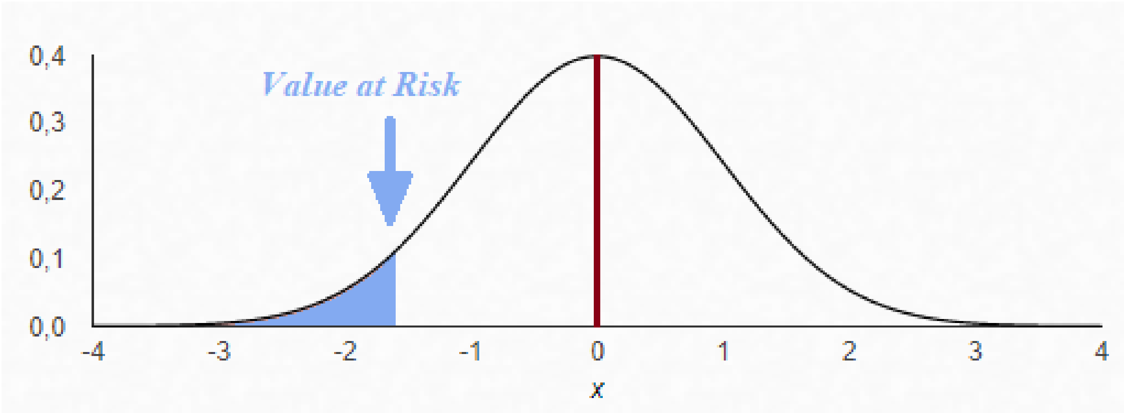


Figura 2.3: Distribuição normal standard dos retornos de um ativo.

Por vezes o VaR está associado a funções discretas, descontínuas e não convexas. Se assim o for, a função distribuição $F_X(z)$ pode não ser invertível, o que acaba por limitar o seu uso.

Existem diferentes métodos para calcular o VaR, seja através de dados históricos, da simulação de Monte Carlo ou de uma aproximação variância-covariância, como demonstrados em Linsmeier et al. (2000). O primeiro indicador tem em conta dados históricos e, através deles, faz deduções de distribuições que se adequem, tirando as respetivas conclusões. O segundo baseia-se na construção de cenários hipotéticos e, através destes, supõe algumas distribuições estatísticas dos fatores de mercado subjacentes. O último assume que os fatores de mercado seguem uma distribuição Normal Multivariada, quando se consideram múltiplos fatores de riscos. Em todos são utilizados dados históricos.

Contudo, existem igualmente limitações no uso deste indicador, por exemplo, o VaR não contém toda a informação sobre os riscos de mercado, pois podem existir diversas fontes independentes de risco. Como tal, o indicador de determinação do VaR tem por base uma aproximação linear do risco da carteira, assumindo uma distribuição Normal/LogNormal, o que contraria a não linearidade de alguns ativos financeiros, como no caso das opções (Rockafellar et al., 2000). Para além disso, o VaR depende das proporções dos ativos na carteira, o que obriga a refazer o cálculo da variância sempre que as proporções se alteram. Por último, algumas das suas propriedades dificultam a coerência, pois o VaR tem falhas na convexidade e nem sempre se caracteriza por ser sub-aditivo, o que corresponde a dizer que, para dois ativos ou carteira A e B: $\text{VaR}(A+B) > \text{VaR}(A) + \text{VaR}(B)$, Carlos Pinho et al. (2011). O que é contraditório, pois a diversificação deveria diminuir o risco da carteira e, neste caso, pode até aumentar!

2.2.3 *Conditional Value at Risk - CVaR*

Face às desvantagens do VaR, surgiu um outro indicador denominado de CVaR ou Valor em Risco Condicional. Este procura igualmente otimizar e proteger a carteira de instrumentos financeiros de forma a reduzir o risco de grandes perdas. O CVaR é contabilizado de uma forma ponderada, isto é, quantifica a perda esperada que ocorre depois do ponto de VaR. Apesar de colmatar falhas apontadas ao VaR, iremos observar que não é certo que o indicador CVaR seja a melhor alternativa para todos os casos.

Segundo Rockafellar et al. (2000), ao determinar o indicador CVaR está-se também a determinar VaR. Isto deve-se ao facto deste valor ser ainda menor do que o CVaR. Desta forma o VaR é um limite inferior para o CVaR: VaR $\leq$ CVaR. Enquanto que o VaR não diferencia duas perdas com comportamentos diferentes após o quantil limite, o CVaR pretende corrigir esta limitação. Desta forma, possui propriedades matemáticas superiores ao VaR, sendo uma medida coerente, de caráter contínuo e convexo, contrariando o facto do VaR ser de natureza descontínua.

Assim, introduz-se X como sendo a variável aleatória absolutamente contínua que representa as perdas associadas a um investimento. O CVaR caracteriza-se por ser a expectativa condicional sujeito a $X \geq \text{VaR}_\alpha(X)$, com um nível de confiança α, valor este entre 0 e 1 (Sergey Sarykalin et al., 2008):

$$\text{CVaR}_\alpha(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, dF_X^\alpha(z) \tag{2.8}$$

Onde, F_X representa a função de distribuição da variável aleatória X, isto é $F_X(z) = P\ \{X \leq z\ \}$ e z um número real, com:

$$F_X^\alpha(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z < VaR_\alpha(x) \\ \frac{F_X(z)-\alpha}{1-\alpha}, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A figura 2.4 ilustra a interação entre as duas medidas, incluindo ainda outros indicadores, como por exemplo, o desvio em torno do CVaR, designado de CVaR Deviation ou Desvio CVaR, cuja fórmula se encontra em (2.9).

$$\text{CVaR Deviation}_\alpha = CVaR_\alpha[X - E(X)] \tag{2.9}$$

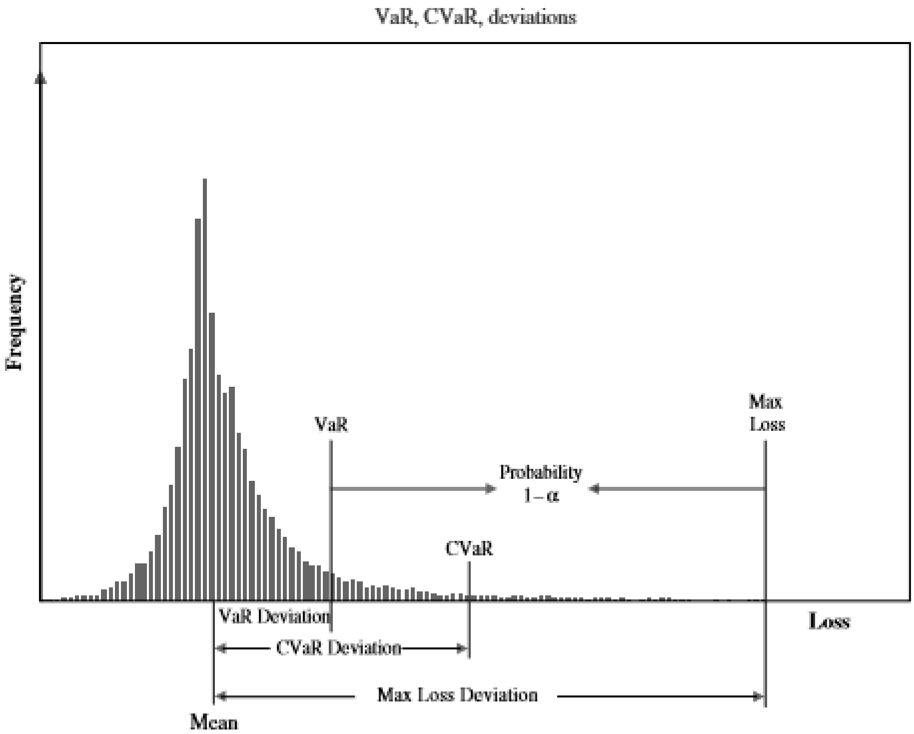


Figura 2.4: Ilustração gráfica das diferentes medidas de risco: VaR, CVaR, Perda máxima, Desvio do VaR, Desvio CVaR e Desvio de perda máxima. Fonte: Sergey Sarykalin et al. (2008).

O indicador CVaR é bastante eficiente na gestão do risco, dado que pode ser otimizado e limitado com problemas de formulação linear convexa, enquanto que o VaR é mais difícil de otimizar. Na aplicação do indicador na otimização de carteiras, minimizar o CVaR é relativamente semelhante a minimizar o VaR, sendo que, ao calcular o CVaR consegue-se determinar o VaR.

Ambos os indicadores são interessantes para gerir o risco e responder à necessidade de moldar a sua distribuição. Ainda assim, a escolha deverá ser baseada nas diferentes propriedades de ambos os indicadores, na simplicidade de procedimentos de otimização, na coerência face às hipóteses e na estabilidade de estimação dos erros. Sergey Sarykalin et al. (2008) sugerem algumas características destas medidas de risco, com alguns exemplos de aplicação, pretendendo demonstrar algumas das suas diferenças.

O VaR tem a característica de ser simples e fácil de interpretar, ou seja, pode-se saber exatamente quanto se pode perder para um dado nível através de um simples número, e também pode ser considerado mais fiável do que o desvio-padrão, por focar uma parte específica da distribuição, considerando-se estável nos procedimentos de estimação. No entanto, baseia-se em intervalos de tempo a curto prazo, e não tem em conta as propriedades da distribuição além do nível de confiança atribuído, podendo variar consoante a alteração deste, o que leva à necessidade de experimentar diferentes valores para esse nível. Para além disso, tem as propriedades de não ser convexo e se adequar mais para funções descontínuas e discretas.

Por outro lado, o CVaR é mais sensível do que a estimação de erro do VaR, sendo o CVaR altamente afetado por caudas pesadas, pelo que não dá informação sobre elas, o que obriga a assumir um certo modelo considerando os dados históricos, Rockafellar et al. (2000).

Assim, surge a dúvida, qual o melhor indicador a usar? É preciso ter em conta que medem diferentes partes da distribuição e, como tal, dependerá da necessidade ou preferência no momento. Dada a incerteza, foi proposto um método alternativo que permitirá contornar algumas das divergências aqui mencionadas, *Downside Risk*.

2.2.4 *Downside Risk*

A ideia para o método *Downside Risk* surge pela primeira vez no princípio *"Safety First"* de Roy (1952), sendo este o pioneiro no desenvolvimento de uma medida de risco de investimentos tendo por base as potenciais perdas. A medida baseia-se no facto dos investidores pretenderem diminuir a probabilidade de desastre, preferindo pelo menos conservar o capital investido. Este princípio consiste em minimizar a probabilidade de o retorno da carteira ficar abaixo do designado retorno alvo, ou nível de desastre.

Markowitz (1959) reconheceu o interesse no proposto, considerando mesmo que apenas as perdas efetivas são consideradas relevantes para o investidor, aceitando a possibilidade de que a distribuição dos retornos possa não ser de natureza normal. O próprio considerou que este seria um melhor método na otimização de carteiras comparativamente ao modelo inicialmente por ele introduzido. Contudo, desde sempre se recorreu mais ao modelo tradicional de seleção de carteiras MPT, não só porque foca o essencial para um investidor alcançar uma solução desejável, como também se considera que é um método mais prático na aquisição de uma solução possível, visto que evita cálculos extras, tendo o próprio autor considerado tal facto.

Assim, inicia-se a transição do modelo MPT para um novo modelo, *Post Modern Portfolio Theory* (PMPT), apresentado por Rom et al. (1993), onde se referem os diferentes pontos de cada metodologia. Passa-se então a deixar a variância dos retornos, ou desvio-padrão, como medida de risco da carteira, pois mostrou-se ineficiente ao considerar apenas o caso simétrico, passando a recorrer-se à semi-variância, ou *semideviation*, como medida de risco da carteira, que engloba também os casos assimétricos. Enquanto que a primeira medida se preocupa com o risco em torno da média, tratando toda a incerteza da variabilidade de igual forma, quer seja positiva ou negativa, a segunda medida reconhece que o risco de investimento deve estar ligado à especificidade de cada investidor, considerando que qualquer resultado acima do objetivo pretendido não representa um risco económico, particularizando a atenção no lado negativo (*downside* como é ilustrado na figura 2.5). Tal consideração justifica-se no interesse primário do investidor pretender evitar perdas, mais do que obter ganhos. Como mencionado, também o risco não deve ser considerado apenas simétrico, podendo ser de natureza assimétrica.

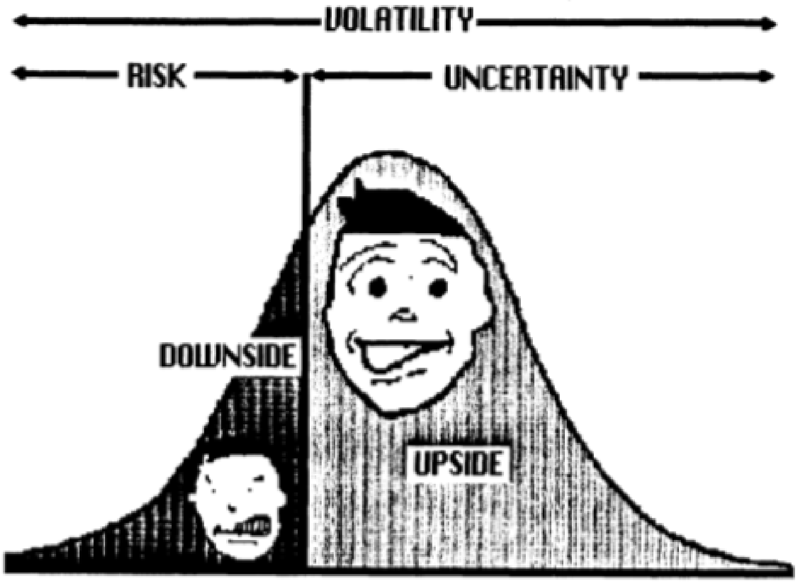


Figura 2.5: Distribuição normal dos retornos, destacando os retornos negativos dos positivos. Fonte: Rom et al. (1993)

Desta forma, o modelo PMPT pretende medir a volatilidade considerando apenas a variabilidade abaixo do retorno alvo do investidor como risco. Todos os retornos acima do pretendido causam "incertezas", mas não serão considerados como prejudiciais ao objetivo pretendido. Em (Rom et al., 1993) considera-se o retorno alvo como sendo o *Minimum Acceptable Return* (MAR), que será apresentado por τ, representando o retorno que deve ser determinado por forma a evitar perdas e a alcançar um ganho financeiro, sendo este escolhido de acordo com o objetivo do investidor.

Segundo Roy (1952), a semi-variância é vista como a medida de risco a ter em conta no método *Downside Risk*, sendo definida como a média dos quadrados dos desvios entre cada retorno de ativo e o seu retorno alvo, o denominado MAR, sendo que terá apenas em conta aqueles que forem considerados perdas (z_i), ou seja, terá em consideração apenas os valores que se encontrem abaixo desse alvo esperado. Na prática, será contabilizado o valor do retorno abaixo do retorno alvo, caso contrário, ficará o valor nulo caso o retorno seja igual ou superior ao pretendido. Considerando R_i o retorno do ativo i e $z_i = R_i - \tau$, é possível determinar os Retornos Condicionais através de:

$$\min\{z_i, 0\} = \begin{cases} z_i, & se\ z_i < 0 \\ 0, & se\ z_i \geq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

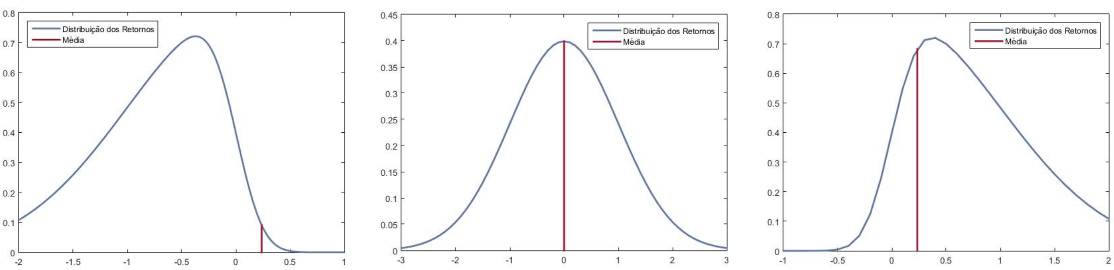
Assim, o pretendido será construir uma carteira tendo como objetivo o de minimizar a proporção de ocorrências de desastre. Mais concretamente, procura minimizar o risco consequente de perdas inesperadas, mantendo o interesse de alcançar um retorno maior do que o investido, caso o alvo esperado seja maior que zero. (Roy, 1952) propôs ainda duas possibilidades, sendo a primeira de considerar a semi-variância abaixo de um valor limite esperado τ, e em alternativa considerar a semi-variância abaixo do valor médio, μ.

Outro fator influenciador da semi-variância é o grau de assimetria, ou *Skewness* (SK). Por definição, uma distribuição diz-se simétrica quando fica refletida sobre o valor médio de uma variável aleatória.

A equação (2.11), sugerida por Markowitz (1959), permite determinar esse grau de assimetria de uma distribuição. Esta equação tem em conta a variância, σ^2, e a semi-variância em torno desse valor médio, S_E. Assim, se for igual a 1, tem-se uma distribuição simétrica. Caso seja inferior a 1 ou superior a 1 tem-se, respetivamente, uma distribuição assimétrica negativa ou assimétrica positiva.

$$SK = \frac{\sigma^2}{2\, S_E} \tag{2.11}$$

A figura 2.6 ilustra cada uma dos formatos de uma distribuição. Para cada formato apresentado está associado um grau de assimetria. Pede-se ao leitor uma especial atenção para a localização do valor médio em cada um dos casos, por forma a entender a análise em estudo, sendo que este é considerado como um potencial valor alvo de retorno.



(a) Assimétrica Negativa. (b) Simétrica (c) Assimétrica Positiva

Figura 2.6: Distribuição dos retornos dos ativos com diferentes assimetrias.

Assim, a figura 2.6a corresponde a uma distribuição dos retornos assimétrica negativa, onde SK $<$ 1; a figura 2.6b representa uma distribuição simétrica, com SK $=$ 1; e na figura 2.6c temos uma distribuição assimétrica positiva, com SK $>$ 1. O modelo MPT considera apenas a distribuição simétrica, supondo uma distribuição Normal ou LogNormal dos retornos. Já o modelo PMPT considera as distribuições assimétricas e também as simétricas.

De acordo com (Rom et al., 1993), a assimetria negativa corresponde a que os ativos tenham mais risco negativo, o que significa que se encontram mais retornos abaixo da média, enquanto que a assimetria positiva corresponde a ter menos risco negativo, por se encontrarem menos retornos abaixo do valor médio. Através desta interpretação, é importante notar o impacto que a assimetria demonstra. Ignorar a assimetria significa ignorar os valores acima do valor médio, ou seja, sobrestimar os riscos inerentes aos ativos. Por outro lado, ignorar os valores negativos leva a subestimar os verdadeiros riscos. Daí ser mais favorável que a assimetria seja tida em consideração. Os autores afirmam que, dados os avanços tecnológicos e da própria teoria de seleção de carteiras, é facilmente aplicável o uso da PMPT, ou seja, o método *Downside Risk* e a consideração da assimetria da distribuição dos retornos, tendo a vantagem de providenciar uma maior flexibilidade de análise aos investidores, permitindo a construção de carteiras mais eficientes.

O trabalho de Nawrocki (1999) permite acompanhar o desenvolvimento deste conceito, *Downside Risk*, dando a conhecer, de uma forma sequencial, a origem e o modo de implementação do mesmo como medida de risco, mencionando ainda o caso generalizado da semi-variância, denominado de *Lower Partial Moment* (LPM) ou Momento Parcialmente Inferior, introduzido por Bawa (1975). Este conceito surge como fórmula generalizada da medida de risco abaixo de um valor de referência, o retorno alvo. Tem em consideração a tolerância do investidor, através de um parâmetro a, proporcionando toda uma família de funções utilidade. Considerando T o número total de observações, τ o retorno alvo, e R_{it} o retorno do ativo i no período t, temos:

$$LPM_{a,\tau,i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \max\left[0, (\tau - R_{it})\right]^{a} \tag{2.12}$$

Assim, quanto maior o valor a, maior a aversão do investidor ao risco. Deste modo, se $a = 0$, tem-se a probabilidade certa de o retorno esperado não ser atingido, sendo considerado um investimento arriscado, ou seja, é simplesmente a probabilidade de perda com $LPM = 1$. Se $a = 1$, tem-se um investidor agressivo, e obtém-se a média das perdas esperadas. Se $a = 2$, tem-se a própria semi-variância. A equação (2.12) corresponde a considerar a semi-variância abaixo de um valor limite esperado como referido por Roy (1952), sendo que a equação facilmente é adaptada à segunda versão, isto é, da semi-variância abaixo do valor médio, estabelecendo que esse retorno alvo, τ, poderá ser considerado como o valor médio dos retornos dos ativos.

Hardin et al. (2005) realçam o facto de o método medir os retornos abaixo de um certo valor limite, pretendendo captar as perspetivas de risco do investidor. Através de um exemplo dado por estes, entende-se que, se esse valor limite for nulo, o investidor está preocupado em perder todo o capital principal, consequentemente, a probabilidade de perda do capital seria vista como muito arriscada. Se esse valor limite for igual a um determinado valor, por exemplo 10%, significa que o retorno mínimo que o investidor espera ter será de 10%, sendo que abaixo disto será considerado arriscado.

De acordo com Harlow (1991), o objetivo prende-se com a procura de um equilíbrio entre alcançar ganhos e defender-se contra adversidades que possam surgir com o desempenho da carteira. Para além da sua simplicidade e consistência, o método *Downside Risk* pode ser exatamente usado como a variância, permitindo determinar o conjunto de oportunidades de investimento para investidores avessos a perdas, sendo tão eficiente como técnicas convencionais. Estas decisões de investimento são feitas, assim como o método usado por Markowitz (1952), através de um *trade-off* entre retorno e risco, diferindo na medida de risco utilizada. Harlow (1991) apresenta uma aproximação da alocação de ativos baseada em definições de risco que são consideradas mais atrativas do que a variância e que providenciam uma aproximação mais robusta de otimização de carteiras, incluindo informações sobre as medidas de probabilidade de perda, perda esperada e semi-variância.

Através de um exemplo de uma carteira internacional e variando o valor do MAR, Harlow (1991) concluiu que, se o MAR aumenta, então existe uma maior probabilidade dos retornos serem menores do que o objetivo, o que significa que a curvatura da fronteira de eficiência do LPM se vai acentuar mais, o que é lógico pois os retornos que se encontrem abaixo do retorno alvo esperado serão em maior quantidade devido ao elevado valor de MAR. Com essa acentuação, o lado esquerdo da distribuição contém mais retornos, o que faz aumentar o valor do risco. Através do mesmo exemplo, compara as fronteiras de eficiência entre os modelos MPT e PMPT, recorrendo a LPM com $a = 2$ por ser uma medida de segunda ordem aplicável aos dois métodos e com $MAR = 0\%$. Assim, conclui que as carteiras com o segundo modelo providenciam mais proteção contra as perdas do que aquelas usando o primeiro modelo. Menciona o facto de que as fronteiras, numa perspetiva gráfica, coincidiriam se os retornos usados para a sua construção fossem normalmente distribuídos, sendo um fator indicativo da não existência de uma simetria no exemplo dado. Do ponto de vista da constituição de carteiras, ambas as alocações são muito distintas, sendo que estas diferenças se acentuam mais à medida que as fronteiras de eficiência convergem para as extremidades. Para finalizar, afirma que o método *Downside Risk* possui menor risco para um maior ou igual nível de retorno esperado do que o tradicional modelo, MPT.

Estrada (2007) afirma que a perceção de risco que o investidor tem nos dias de hoje está em desacordo com a definição de risco definida na teoria tradicional de carteiras. Assim, procurou mostrar como se pode aplicar a semi-variância de forma a construir uma carteira de investimentos, focando algumas das propriedades do modelo PMPT. Mostra ainda exemplos na estimação da semi-variância dos retornos da carteira utilizando uma expressão semelhante à da variância, mas cujo foco consiste na solução de alguns dos problemas que poderão ocorrer com a sua utilização.

Um desses problemas prende-se com a construção da matriz de semi-covariâncias. Markowitz (1959) ainda analisou esta questão e, como tal, também o próprio propôs uma alternativa que viria a permitir uma estimação da matriz de semi-covariâncias. Contudo, a fórmula de cálculo da mesma torna-a sensível às variações nos pesos dos ativos na carteira, caracterizando-a como endógena. Consequentemente, determina-se uma matriz cujas entradas se alteram quando se alteram os pesos alocados aos ativos. Estrada (2008) sugere uma alternativa que permite solucionar este entrave, tornando-a como uma matriz simétrica e exógena, baseada na estimação da semi-variância da carteira.

Considerem-se os ativos i e j. Sejam R_{it} e R_{jt} o retorno do ativo i e j no momento t, respetivamente, e B o retorno alvo escolhido pelo investidor, num total de T observações. A semi-variância de um ativo i, $\Omega^2_{i,B}$, idêntica ao LPM com $a = 2$, desta vez usando o mínimo e as respetivas alterações, encontra-se estimado em (2.13), sendo a *semideviation*, a raiz quadrada da semi-variância.

$$\Omega^2_{i,B} = E\left\{\min\left[(R_i - B), 0\right]^2\right\} \simeq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\min\left[(R_{it} - B), 0\right]^2 \tag{2.13}$$

A semi-variância de uma carteira será determinada tendo em consideração as relações entre os diferentes ativos que possam vir a constituir essa carteira. Assim, é através da matriz de semi-covariâncias que será possível observar essas interações. Estrada (2008) sugere uma heurística, apresentada em (2.14), que simplifica a aplicação do algoritmo na otimização de carteiras, procurando tornar a matriz de semi-covariâncias numa matriz simétrica e exógena, isto é, respetivamente, cuja transposta da matriz seja a mesma que a inicial e cujos valores nas entradas da matriz não se alterem em consequência de uma variação nos pesos dos ativos na carteira. Deste modo, torna-se simétrica, permitindo que $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$, e também exógena, mantendo-se inalterável.

$$\Omega_{ij,B} = E\left\{\min\left[(R_i - B), 0\right] \times \min\left[(R_j - B), 0\right]\right\} \simeq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\{\min\left[(R_{it} - B), 0\right] \times \min\left[(R_{jt} - B), 0\right]\right\} \tag{2.14}$$

Por forma a elucidar melhor o significado de uma matriz exógena, Estrada (2008) expõe um exemplo ilustrativo, realçando a importância dos retornos condicionais na construção de uma matriz de semi-covariâncias. Esta torna-se exógena quando definida em função do desempenho de cada ativo em relação a determinado valor B, consequência dos retornos condicionais, em alternativa ao desempenho da carteira face ao mesmo valor B.

Analisando a tabela da figura 2.7 e considerando os dados apresentados nas respetivas primeiras 3 colunas, o objetivo consiste em construir duas carteiras constituídas por dois índices com pesos diferentes, S&P e Nikkei, recorrendo ao auxílio dos retornos condicionais. A primeira carteira apresenta-se na quarta coluna, definida através da soma do valor anual de cada índice em função do peso respetivo, neste caso $80-20$ para cada índice respetivamente. A segunda dá uma ponderação de $10-90$ e encontra-se na 5ª coluna. Assim, construída cada uma das carteiras, determinam-se os respetivos retornos condicionais, apresentados como *Conditional Returns*, tendo em consideração um B nulo. Quando o retorno da carteira for positivo, atribui-se o valor de 0% aos retornos de cada índice; caso contrário, isto é, caso o retorno da carteira seja inferior ou igual ao retorno alvo, devolve o valor do retorno anual de cada índice, como apresentado nas colunas 6 e 7 ou 9 e 10 consoante as carteiras. De seguida, procede-se ao produto dos valores obtidos por índice para determinar o Retorno Condicional da Carteira, colunas 8 e 11 designadas de *Product*. Definidos os retornos condicionais, será possível determinar a matriz de semi-covariâncias para cada carteira.

Year	S&P	Nikkei	80-20	10-90	'Conditional Returns'					
					80-20 Portfolio			10-90 Portfolio		
					S&P	Nikkei	Product	S&P	Nikkei	Product
1997	31.0	−21.2	20.6	−16.0	0.0	0.0	0.0	31.0	−21.2	−6.6
1998	26.7	− 9.3	19.5	−5.7	0.0	0.0	0.0	26.7	−9.3	−2.5
1999	19.5	36.8	23.0	35.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2000	−10.1	−27.2	−13.5	−25.5	−10.1	−27.2	2.8	−10.1	−27.2	2.8
2001	−13.0	−23.5	−15.1	−22.5	−13.0	−23.5	3.1	−13.0	−23.5	3.1
2002	−23.4	−18.6	−22.4	−19.1	−23.4	−18.6	4.4	−23.4	−18.6	4.4
2003	26.4	24.5	26.0	24.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2004	9.0	7.6	8.7	7.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2005	3.0	40.2	10.4	36.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2006	13.6	6.9	12.3	7.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Figura 2.7: Exemplo de obtenção dos retornos condicionais em função do retorno da carteira. Fonte: Estrada (2008)

Contudo, este procedimento torna-se moroso, pois obriga a determinar os retornos condicionais para cada carteira (consoante a atribuição dos pesos), o que vai levar ao cálculo de diferentes valores para formar a matriz de semi-covariâncias. Ou seja, se a medida de risco escolhida for a *semideviation* e o objetivo for o de construir uma carteira ótima de entre muitas outras, pôr-se-ia um entrave na determinação dessa carteira visto que, face à diversificação, o número de ativos aumentaria, o número de carteiras admissíveis aumentaria consoante as diferentes possibilidades de conjugação. Desta forma, tornar-se-ia difícil escolher a carteira ótima devido à necessidade de calcular a matriz de semi-covariâncias associada a cada atribuição de pesos.

Em oposição a este entrave surge a alternativa apresentada na figura 2.8, onde os retornos condicionais passam a ser definidos em função do retorno de cada ativo. Considerando na mesma um B nulo, primeiro obtém-se o retorno condicionado de cada índice e, só mais tarde, constitui-se a carteira com os pesos pretendidos. Deste modo, caso o retorno do índice subtraído ao B seja positivo, obtém-se um valor nulo; se a respetiva subtração for negativa, obtém-se o próprio valor do retorno, fixando assim os valores para os retornos condicionais. Através dos valores determinados será possível construir uma matriz de semi-covariâncias fixa, sendo que o retorno e risco da carteira dependerão apenas dos pesos definidos para os ativos.

Year	Assets		Portfolios		'Conditional Returns'		
	S&P	Nikkei	80-20	10-90	S&P	Nikkei	Product
1997	31.0	−21.2	20.6	−16.0	0.0	−21.2	0.0
1998	26.7	−9.3	19.5	−5.7	0.0	−9.3	0.0
1999	19.5	36.8	23.0	35.1	0.0	0.0	0.0
2000	−10.1	−27.2	−13.5	−25.5	−10.1	−27.2	2.8
2001	−13.0	−23.5	−15.1	−22.5	−13.0	−23.5	3.1
2002	−23.4	−18.6	−22.4	−19.1	−23.4	−18.6	4.4
2003	26.4	24.5	26.0	24.6	0.0	0.0	0.0
2004	9.0	7.6	8.7	7.7	0.0	0.0	0.0
2005	3.0	40.2	10.4	36.5	0.0	0.0	0.0
2006	13.6	6.9	12.3	7.6	0.0	0.0	0.0

Figura 2.8: Exemplo de obtenção dos retornos condicionais considerando o retorno de cada ativo. Fonte: Estrada (2008)

Considerando os ativos pretendidos, torna-se assim possível formar uma matriz de semi-covariâncias generalizável e que se mantém constante a alterações dos pesos atribuídos a esses ativos na carteira, apenas o risco e retorno da carteira se alteram em função dos pesos. Esta matriz reflete a interação entre os diferentes ativos da carteira e torna-se necessária para analisar o impacto que a interação de cada dois ativos tem no risco global da carteira.

Desta forma, Estrada (2008) argumenta que o risco de uma carteira, **P**, ou seja, a semi-variância de uma carteira em função de um determinado B, pode ser calculada através da aproximação mencionada em (2.15), que será determinada em função dos pesos atribuídos a cada ativo e a respetiva matriz de semi-covariâncias definida de forma exógena. Deste modo, torna-se fidedigno resolver o problema PMPT da mesma forma que MPT.

$$\Omega^2_{\mathbf{P},B} \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \Omega_{ij,B} \tag{2.15}$$

Em (Estrada, 2006) é possível observar um exemplo de aplicação prática desta medida de risco, utilizando os retornos anuais da *Oracle*, no período de $1995-2004$. As análises e conclusões são apresentadas na figura 2.9 através de duas tabelas, em que a primeira demonstra a semi-variância aplicada aos dados referidos, para três valores diferentes de B: a média dos retornos ($41,1\%$), a taxa livre de risco (5%) e um B nulo. Por fim, na segunda tabela estão apresentados os resultados dos modelos em estudo, o desvio-padrão e a *semideviation* de duas empresas, a referida *Oracle* e a empresa *Microsoft*, para o mesmo período, com uma média de $35,5\%$ e cujos valores foram determinados da mesma forma. Note-se que o desvio-padrão mede a volatilidade dos retornos em torno do média e a *semideviation* mede a volatilidade dos retornos abaixo de B.

Exhibit 2 **Semideviations**

Year	R	$\{Min(R-\mu, 0)\}^2$	$\{Min(R-R_f, 0)\}^2$	$\{Min(R-0, 0)\}^2$
1995	44.0%	0.0000	0.0000	0.0000
1996	47.8%	0.0000	0.0000	0.0000
1997	–19.8%	0.3709	0.0617	0.0393
1998	93.3%	0.0000	0.0000	0.0000
1999	289.8%	0.0000	0.0000	0.0000
2000	3.7%	0.1394	0.0002	0.0000
2001	–52.5%	0.8752	0.3304	0.2754
2002	–21.8%	0.3952	0.0718	0.0475
2003	22.5%	0.0345	0.0000	0.0000
2004	3.7%	0.1396	0.0002	0.0000
Average	**41.1%**	**0.1955**	**0.0464**	**0.0362**
Square Root		**44.2%**	**21.5%**	**19.0%**

Exhibit 3 **Volatility and Downside Volatility**

Company	σ	Σ_μ	Σ_f	Σ_0
Oracle	91.7%	44.2%	21.5%	19.0%
Microsoft	50.4%	38.1%	23.1%	21.1%

Figura 2.9: Exemplo de aplicação com recurso ao *downside risk*. Fonte: Estrada (2006)

De notar que, na segunda tabela da figura 2.9, a empresa *Oracle* é, segundo o critério do desvio-padrão, a mais arriscada, mas não de acordo com a semi-variância, particularmente para um *B* nulo ou de valor igual à taxa livre de risco. Pode-se ainda concluir que apenas metade da volatilidade apresentada pelo desvio-padrão da *Oracle* se encontra abaixo da média, se observarmos conjuntamente com o valor da *semideviation*, o que significa que se está a considerar como risco quase tantos ganhos como perdas. Deste modo, realça-se o comportamento de cada medida de risco, como também se encontra demonstrado que a escolha de um retorno esperado adequado torna-se relevante para a análise da *semideviation*.

Henk Grootveld (1999) apresenta uma nova representação da Fronteira de Eficiência, considerando o método LPM. Análogo ao demonstrado inicialmente por Markowitz (1952), a fronteira será o conjunto que contém todas as carteiras com o maior retorno esperado para um dado nível de risco e, da mesma forma, contém a carteira com o menor risco esperado para determinado retorno esperado. A escolha da carteira ótima será, do mesmo modo, de acordo com as preferências de cada investidor.

Face ao mencionado, o método *Downside Risk* garante aos investidores uma seleção de carteiras que permite alcançar um retorno esperado da carteira que coincide ou até excede o retorno determinado com o modelo tradicional de *Markowitz*. Em simultâneo e de uma forma mais coerente, consegue-se estimar o risco que se estará possivelmente a incorrer e que não é de todo desejável, permitindo que os ganhos não sejam contabilizados como risco indesejável. Esta última forma de medição do risco apresentada é a que vai ser utilizada e desenvolvida no capítulo seguinte.

2.3 Carteira de Investimentos Internacionais

O foco desta subsecção será essencialmente na análise do risco cambial. Este risco fica caracterizado pela taxa de câmbio, sendo esta definida pela posição de uma moeda em relação a outra, onde uma delas vai valer o mesmo ou menos do que a contraparte. Esta permuta constante entre duas moedas levará à designada valorização ou desvalorização das mesmas, em resposta à pressão dos mercados.

De acordo com Adler et al. (1984), determinada exposição económica ao risco da moeda estrangeira deve ser definida e medida independentemente da escolha entre as taxas de câmbio atuais ou históricas para a conversão de determinadas posições em moeda estrangeira. Uma moeda não é considerada arriscada porque existe a possibilidade da sua desvalorização. Na verdade, se a desvalorização fosse tão certa quanto a magnitude e o tempo, não haveria risco algum. Risco ou incerteza, trata-se de uma questão meramente aleatória, ficando caracterizado pelas variações inesperadas da taxa de câmbio. Assim, a exposição deve ser definida em termos do que se pretende ter em risco.

2.3.1 Relevância das Taxas de Câmbio

Em tempos as taxas de câmbio eram definidas e inalteráveis, fixando-se permanentemente no valor estipulado, originando a denominada taxa de câmbio fixa. Com o fim do acordo de *Bretton-Woods*, (McKenzie, 1999), criou-se a possibilidade de existirem taxas de câmbio variáveis (atualmente em vigor), sendo que estas passam a ser definidas pela interação dos diversos países, oscilando consoante a intensificação das suas trocas, consequência do acentuado interesse no mercado internacional. Esta volatilidade nas taxas de câmbio dificultou a previsão das mesmas, o que gerou o denominado risco cambial, ou seja, risco deficinido como a possibilidade de perda de dinheiro devido a alterações cambiais.

Brada et al. (1988) procuraram analisar algumas das vantagens que surgiram com uma taxa de câmbio não fixa, ao estudarem o risco criado pela instabilidade da taxa de câmbio, procurando quantificar não apenas os efeitos do risco cambial sobre o comércio, mas também o efeito dos regimes cambiais sobre o volume do comércio internacional. Assim, este efeito do regime cambial sobre o volume de comércio entre dois países depende do regime cambial que cada país emprega e da relação resultante entre as diferentes moedas.

Veio a concluir-se que os fluxos de comércio bilateral entre países com taxas de câmbio flutuantes são mais elevados do que aqueles entre países com taxas fixas. Embora a incerteza quanto às taxas de câmbio diminua o volume de comércio entre os países, independentemente da natureza dos seus regimes cambiais, os efeitos gerados são menores do que os efeitos redutores de outras políticas comerciais restritivas impostas pelos países com taxas de câmbio fixas.

Segundo Shamah (2003), o valor de uma moeda em relação a outra altera-se de acordo com a oferta e a procura, fruto do investimento e da comercialização nessas moedas, o que significa que se houver uma elevada procura por uma moeda o seu valor aumenta. Consequentemente, é preciso ter em conta que mudanças nas taxas de câmbio afetam significativamente o valor dos produtos e instrumentos financeiros que levam a alterações nos nossos investimentos, refletindo a volatilidade do mercado. Pelo que, negociar em qualquer moeda tem um certo grau de risco, sendo necessário o acompanhamento constante, pois um investimento potencialmente lucrativo em determinado momento pode-se tornar numa perda futura. Consequentemente, está-se sempre sujeito a ganhos e perdas devido às variações cambiais, podendo o investimento lucrativo tornar-se também numa perda após a respetiva conversão. Como tal, surge a necessidade de estudar o impacto da taxa de câmbio nas diferentes carteiras de investimento, nas suas composições ou até mesmo no binómio rendimento/risco.

Deste modo, as taxas de câmbio flutuantes acabam por ser mais arriscadas do que as taxas fixas, uma vez que estão constantemente livres de alterar o seu valor. Esta volatilidade dificulta por vezes o comércio internacional e as decisões de investimento, consequência do aumento do risco cambial, gerando um impacto nas taxas esperadas de retorno dos investimentos internacionais. Contudo, também as taxas de câmbio voláteis permitem uma rápida e significativa lucratividade nas trocas comerciais, podendo gerar ganhos superiores do que no mercado doméstico. Hoje em dia existem diversas formas de proteção, cujo objetivo é evitar determinada perda abaixo do pretendido (por vezes também "protegem" de potenciais ganhos inesperados).

Para fins de análise financeira, Adler et al. (1984) consideram que uma medida razoável de exposição ao risco cambial deve considerar os seguintes critérios:

1. a sua dimensão deve ser possível de medir numa quantia monetária, designada de doméstica para o risco de moeda nacional e estrangeira para o risco de moeda estrangeira.

2. deve ser uma característica de qualquer ativo ou passivo, físico ou financeiro, que um determinado investidor possa possuir ou a vir a deter, definido do ponto de vista do próprio investidor;

3. deve ser implementável no sentido de que a medição pode ser realizada com a tecnologia disponível e, face à exposição, poderá ser protegida ou coberta com instrumentos financeiros disponíveis.

Por forma a elucidar o leitor dos possíveis cenários que podem ser observados com o impacto a evolução da taxa de câmbio, introduz-se a fórmula que permite converter o preço de um qualquer ativo numa moeda estrangeira para a respetiva moeda doméstica, seguida de um exemplo ilustrativo do modo de aplicação desta conversão.

Supondo que P_t é o preço que se pretende determinar de um ativo em Euros, no momento t, P_t^* o preço desse ativo na moeda estrangeira, e S_t a taxa de câmbio entre o preço em Euros e essa moeda estrangeira, expressa em Euros por uma unidade de moeda estrangeira.

$$P_t = P_t^* \cdot S_t \tag{2.16}$$

Considerando que hoje $1,00$€ corresponde a $1,00$\$, ou seja, a taxa de câmbio EUR/USD é atualmente de $1,00$, ter-se-ia $S_t = 1$, o que corresponde a dizer que se investir 100 000\$, correspondente a $P_t^* = 100\ 000\$$, hoje tem-se o equivalente a 100 000€. Considerando que, dentro de um mês, há uma alteração na taxa de câmbio, vai se obter um de dois possíveis cenários:

A : Se a taxa de câmbio EUR/USD $= 0,78$, $S_t = 0,78$, equivale a dizer que, após um mês, os 100 000\$ correspondem a 78 000€. O que significa que existiu uma valorização do Euro e uma desvalorização do Dólar Americano comparativamente ao dia do investimento, isto é, por cada euro investido serão necessários mais dólares.

B : Se a taxa de câmbio EUR/USD $= 1,11$ equivale a dizer que, após um mês, os 100 000\$ correspondem a 111 000€. Significa que desde o dia do investimento, existiu uma desvalorização do Euro e uma valorização do Dólar Americano.

A figura 2.10 descreve a evolução mensal de duas taxas de câmbio, expresso através das variações das taxas entre Euro/Libra Esterlina, €/£, e Euro/Dólar, €/\$, no período de um ano, desde outubro de 2017 a outubro de 2018.

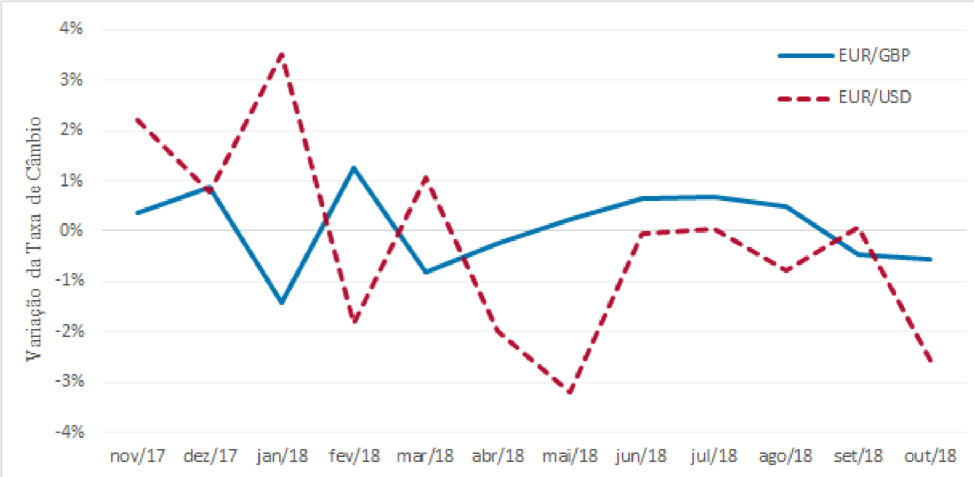


Figura 2.10: Evolução mensal da variação das taxas de câmbio de EUR/GBP e EUR/USD. Fonte: Investing.com.

Como se pode analisar na figura 2.10, existem oscilações entre os diferentes meses no decorrer de um ano, que na verdade ocorrem de uma forma diária, sendo que se encontram apresentadas apenas variações mensais. Graficamente observa-se que desde novembro de 2017 a abril de 2018 existiram desenvolvimentos alternados nas evoluções de e em ambas as taxas de câmbio, ou seja, durante este período tanto uma das taxas evoluí positivamente e a outra negativamente no mesmo mês como no seguinte trocavam, caminhando em sentidos contrários, oscilando face ao Euro. De notar que em ambas as taxas existiram variações significativas, notando que a taxa de câmbio EUR/USD teve alterações mais acentuadas, especialmente nos meses de janeiro de 2018, com uma variação de cerca de 3%, e de maio de 2018, com uma variação igualmente acentuada mas negativa. Já a taxa EUR/GBP apresentou uma variação entre 0% e 1%, entre maio de 2018 e agosto do mesmo ano, refletindo uma ligeira valorização do Euro face à Libra Esterlina no momento referido.

As flutuações nas cotações das taxas de câmbio carregam um risco de mercado associado, o risco cambial, que pode gerar efeitos adversos nos investimentos, como mencionado. Torna-se assim importante a avaliação do risco, sendo relevante observar as consequências na carteira através dos ajustes no retorno.

2.3.2 Ajustes na Taxa de Retorno

Tratando-se de uma carteira internacional, torna-se necessário converter todas as divisas integrantes na mesma unidade monetária, preferencialmente na moeda base. Por vezes, torna-se necessário saber se será mais rentável investir no mercado doméstico ou num mercado estrangeiro. Neste caso a melhor forma de saber em que mercado atuar passa por determinar qual o investimento que se torna mais rentável. Torna-se necessário calcular a taxa de retorno dos investimentos e depois fazer a respetiva conversão para as mesmas unidades monetárias, por forma a ser comparável ou a tornar a interpretação coerente. Deste modo, é relevante considerar o risco cambial num investimento em mercados estrangeiros.

Os investimentos feitos no mercado doméstico não precisarão de sofrer qualquer alteração na taxa de retorno, pelo que essa será a taxa de retorno esperada. Quando o investimento ocorre num mercado estrangeiro, cuja divisa é outra, por exemplo USD ou GBP, será necessário ajustar a taxa obtida com os retornos para a moeda base, que será o EUR, refletindo o impacto das diferentes moedas no investimento. Segue-se em (2.18) a fórmula para determinar a taxa do retorno na divisa doméstica, designada de *base*.

Assim, denomina-se de *local* ao retorno na moeda estrangeira e considere-se e_t a respetiva variação da taxa de câmbio entre base/local no momento t, ou seja,

$$\mathrm{e}_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{2.17}$$

Generaliza-se para qualquer moeda estrangeira desde que considerada a respetiva taxa cambial, num momento t.

$$\text{Retorno Ajustado}_{\,t,\,\text{base}}(\%) = (1 + \text{Retorno}_{\,t,\,\text{local}})\,(1 + \mathrm{e}_t) - 1 \tag{2.18}$$

Vai existir um impacto no valor total investido, não só pelo desempenho dos ativos na carteira mas também face à evolução de uma moeda em relação a outra, quer isso dizer que, se a moeda local valorizar em relação à sua contraparte num determinado período, e acreditando que as evoluções dos ativos foram positivas, a variação no retorno vai refletir-se num lucro com este investimento, cujo impacto poderá ser maior do que o inicialmente esperado. Se desvalorizar, e mantendo as condições, então o retorno será inferior ao retorno determinado antes da conversão. Por vezes o ajuste pode levar a alterações significativas nos retornos finais, refletindo a evolução da taxa de câmbio, fazendo com que um retorno positivo passe a ser negativo. Daí ser essencial a análise e acompanhamento do processo.

2.3.3 Diversificação Internacional

É sabido que a taxa de câmbio pode gerar instabilidade no mercado, e como tal, é indispensável procurar diminuir o risco incorrido com estas transações. Assim, como inicialmente vimos em (Markowitz, 1952), a diversificação permite obter benefícios, em particular, na redução do risco ao investir numa carteira com um elevado número de ativos negativamente correlacionado. Neste ponto vamos acrescentar que também se pode generalizar a obtenção de benefícios aquando de investimentos internacionais, ou seja, para além dos comuns investimentos domésticos.

Segundo Grubel (1968), um dos pioneiros na diversificação internacional, um investimento deste âmbito permite alcançar ganhos diferentes dos tradicionais ganhos domésticos. Assim, Grubel (1968) descreve e quantifica os ganhos possíveis de se alcançarem através da diversificação internacional, explicando o percurso dos ativos e das taxas cambiais neste investimento. O próprio apela à importância da diversificação tida com ativos de países diferentes, pelo facto de que, no geral, permite aos investidores alcançarem maiores retornos ou menor risco nas suas carteiras. Solnik (1974) complementa apresentando que o risco de uma carteira internacional é menor do que o risco de uma carteira doméstica, em particular, se o comportamento entre os diferentes mercados for independente entre si.

Levy et al. (1970) demonstram igualmente a importância da diversificação internacional, focando o impacto que as correlações entre os ativos internacionais têm na constituição da carteira, pelo que é importante que a covariância entre os diferentes ativos seja, preferencialmente, negativa ou perto de zero, para que se possa beneficiar de um risco global menor.

Os autores Eun et al. (1988) apontam para consequências das variações das taxas de câmbio, apelando o impacto que estas têm no risco e retorno de uma carteira de investimentos. Um investimento internacional torna-se arriscado face a essas variações cambiais, visto afetarem o risco individual de cada ativo e também o risco inerente à interação entre ativos, apresentados através das covariâncias elevadas. Consequentemente, o risco cambial reflete um impacto negativo nos potenciais ganhos, ou seja, podem-se alcançar largos ganhos com a diversificação internacional mas, devido às flutuações nas taxas de câmbio, os mesmos podem sofrer reduções quando convertidos à moeda de base, tornando o investimento no estrangeiro mais arriscado. Apesar disso, é possível obter ganhos com a diversificação internacional. Eun et al. (1988) mencionam ainda que carteiras internacionais diversificadas podem superar ganhos de carteiras domésticas. Como tal, focam a procura na determinação de estratégias para estimar o risco de desempenho da carteira internacional, capaz de capturar o maior ganho possível através da diversificação internacional. Mais ainda, procuram implementar estratégias de proteção, aplicando contratos *forward* às moedas, contratos estes de cobertura de risco, que permitem antecipar o que poderá acontecer no futuro, de forma a que o investidor se possa precaver em caso de variações com impacto negativo nos ganhos.

Num contexto global, o risco acaba por ser inferior, visto haver mais oportunidades de formação de carteiras cujo desempenho venha a ser mais benéfico do que num contexto doméstico. Como tal, é essencial realçar não só a avaliação do risco como a gestão do mesmo. Assim, num investimento desta natureza será importante ter-se em consideração os efeitos da diversificação internacional na carteira e, se necessário, de cobertura da mesma.

Em suma, pretende-se construir uma carteira de investimentos internacionais que permita a determinação de uma melhor estratégia de investimentos, utilizando a semi-variância como medida de risco. Para tal, será na combinação do modelo *Downside Risk* e da análise do risco cambial que se desenvolverá o modelo em análise no presente trabalho. O risco presente será fruto das combinações entre ativos internacionais e das respetivas moedas. Pretende-se assim adquirir a melhor combinação de ativos numa carteira diversificada, com o intuito de mitigar o risco esperado considerado como negativo, assumindo que as variações nas taxas de câmbio serão os únicos riscos associados aos investimentos estrangeiros.

Capítulo 3

Metodologia

Tendo por base a teoria apresentada na secção anterior, pretende-se agora formular um modelo de otimização cujo foco consiste em encontrar a solução mais adequada para a alocação de ativos internacionais numa carteira de investimentos, considerando um determinado retorno mínimo esperado. O processo terá início com a obtenção dos retornos históricos dos ativos e das respetivas taxas de câmbio, seguindo-se a estipulação das condições necessárias ao modelo. No final, serão tidos em consideração dois modelos distintos, um primeiro que considera todos os ativos em moedas domésticas e um segundo, onde se estará perante uma carteira internacional, isto é, onde se tem em conta o retorno na moeda específica de cada ativo e a respetiva taxa de câmbio. Através deste último será possível determinar a solução ao pretendido. O objetivo final consistirá em construir uma carteira ótima e comparar os resultados gerados pelo modelo em estudo, PMPT, com os do modelo tradicional, MPT.

No final deste capítulo será apresentado um modelo multiperíodo, por forma a implementar a estratégia adotada mas abrangendo dois períodos de tempo, cujo interesse se prende em reajustar a carteira em diferentes alturas, fruto das oscilações do mercado e com o intuito de dirigir o investimento de forma favorável ao investidor. O desempenho dos modelos propostos será avaliado com recurso a dados históricos.

A carteira em estudo será constituída por n ativos diferentes, mantidos durante um determinado período de tempo. Pretende-se construir uma carteira internacional e, como tal, os ativos que a irão integrar encontrar-se-ão em moedas diferentes, sendo alguns de natureza doméstica e outros de natureza estrangeira. Em particular, os ativos de natureza doméstica encontrar-se-ão cotados na moeda base, que será o Euro – EUR. Dos ativos estrangeiros alguns estarão cotados em Dólares Americanos – USD e os restantes em Libras Esterlinas – GBP.

Considerando um ativo i, com i de $\{1,2,\ldots,n\}$, tem-se que um retorno desse ativo num momento isolado t, R_{it}, corresponderá ao ganho ou à perda obtidos como resultado da variação relativa entre o preço do ativo nesse momento t, P_t^i, e o preço do ativo no momento anterior P_{t-1}^i, onde $t > 0$ pertencente ao período de estudo em análise $[0,T]$, com $T > 0$, e que pode ser determinado através da fórmula (3.1), já excluindo potenciais dividendos. O mesmo deverá ser feito para determinar os retornos das respetivas taxas de câmbio.

$$R_{it} = \frac{P_t^i - P_{t-1}^i}{P_{t-1}^i} \tag{3.1}$$

Pretende-se saber quais os pesos a atribuir a cada ativo na carteira de modo a que se determinar a melhor alocação do capital, ou seja, corresponde a saber quais as proporções ideias do capital total que será investido por ativo num período de tempo. Para que tal seja feito com coerência, será necessário estipular as condições para delimitar o conjunto de soluções admissíveis.

Deste modo, os pesos serão as variáveis de decisão do modelo e representar-se-ão por w_i, ou $\mathbf{w}$ na forma matricial que corresponderá a um vetor coluna $n \times 1$. Por coerência, a soma de todos os pesos definidos terá de dar a unidade, o que significa que o somatório das respetivas quantias investidas em cada ativo terá de corresponder ao valor total disponibilizado para o investimento na carteira. Como também não serão permitidas vendas a descoberto, tem-se que o valor de cada um dos pesos não poderá ser negativo. Ambas as restrições se encontram respetivamente formuladas em (3.2), para todo o ativo i.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i &= 1 \\ w_i &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para que seja estipulado um retorno mínimo esperado com o presente investimento, será necessário definir no que consiste o retorno de um ativo para um intervalo de tempo e o retorno de uma carteira de ativos. Para um intervalo de tempo, o retorno esperado de um qualquer ativo i encontra-se em (3.3) e pode ser estimado através da média dos retornos históricos de cada ativo ao longo do período em estudo, sendo T representativo do número total de meses. Deste modo, o valor esperado da carteira será determinado em função dos retornos esperados de cada ativo com os pesos considerados após a implementação do modelo, sendo $\mu_{\mathbf{P}}$ o valor pretendido.

$$\mu_i = \mathrm{E}\left[R_i\right] \simeq \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T} \tag{3.3}$$

Consequentemente, determina-se o valor esperado da carteira recorrendo à fórmula (3.3) combinada com a fração investida de cada ativo na carteira. Encontra-se em (3.4) o valor esperado da carteira, onde matricialmente μ corresponde a um vetor linha $1 \times n$ dos retornos de cada ativo.

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{P}} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}\left[R_i\right] \\ &= \mu\ \mathbf{w} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como se pretende analisar uma carteira internacional, será necessário ter em consideração os reajustes dos retornos face às diferentes moedas que integrarão a carteira, pois só assim é que se torna possível garantir que se alcança o retorno mínimo para o investidor. Como o investidor ainda está sujeito à volatilidade da taxa de câmbio, será necessário ajustar a equação (3.4) para que isso seja tido em consideração. Assim, pretende-se determinar os retornos ajustados para cada ativo, $\Re$, associando a variação das respetivas taxas de câmbio, segundo a equação (2.18).

Deste modo, será possível determinar o retorno ajustado da carteira considerando os pesos atribuídos a cada um dos ativos e o respetivo valor esperado dos retornos ajustados. De forma semelhante ao procedimento anterior, determinar-se-á um vetor linha representativo do valor esperado de $\Re$, representado por Γ, onde $\Gamma = E\left[\Re\right]$. Deste modo, a equação do retorno ajustado da carteira encontra-se em (3.5).

$$\mu_{\mathbf{P}}^{*} = \Gamma\ \mathbf{w} \tag{3.5}$$

No presente trabalho, o retorno mínimo esperado ficará definido por τ, sendo este representativo do retorno que se pretende alcançar no final do investimento. Será assim mais uma restrição que estará presente no modelo.

$$\mu_{\mathbf{P}}^{*} \geq \tau \tag{3.6}$$

O conjunto admissível fica delimitado após a implementação das restrições (3.2) e (3.6), restando agora minimizar o problema de acordo com a função objetivo de forma a determinar a solução ótima. A função objetivo será expressa consoante o modelo pretendido, ou seja, dependerá da medida de risco usada para otimizar o problema.

Será ainda relevante analisar os retornos ajustados dos ativos em conjunto, para verificar se os mesmos assumem uma forma simétrica, isto é, se existe uma exata repartição em torno da média global, ou se se comportam de uma forma assimétrica, podendo esta ser positiva ou negativa. Se assumirem uma assimetria negativa significa que predominam retornos mais baixos do que a média, o que se traduz numa perda maior quando considerando a média como o retorno alvo. Caso contrário, apresentam uma assimetria positiva, o que se reflete na existência de maior predominância de retornos com valores acima da média, podendo considerar-se como um potencial ganho. Deste modo, será possível ter uma noção *a priori* sobre se vai existir maior ou menor risco em função de perdas ou ganhos contabilizados através da média global.

Este processo será verificado através de um histograma, que irá conter a distribuição das frequências dos retornos em estudo, ao qual lhe será associada uma curva de distribuição normal. Assim, será mais fácil observar em qual dos casos nos encontraremos, especialmente através dos extremos, e simultaneamente se os retornos se poderão considerar de natureza normal ou não. A assimetria de cada ativo será traduzida e apresentada de forma semelhante, quer para a média de cada ativo, quer para o retorno mínimo esperado.

3.1 *Post Modern Portfolio Theory*

Nesta subsecção será apresentada a medida de risco do modelo em estudo, tendo por base o subcapítulo *Downside Risk*. Destaca-se a *semideviation* e a matriz de semi-covariâncias para caracterizar o risco do investimento.

Como já introduzido, a *semideviation* é determinada através da raiz quadrada da semi-variância, que se encontra dependente dos retornos condicionais, e caracteriza-se por ser uma medida que reflete o interesse do investidor no desempenho da carteira, considerando *a priori* um determinado retorno mínimo pretendido, τ, e que tem em consideração apenas as potenciais perdas, ou seja, que considera como fonte de risco os investimentos cujo retorno não se encontra a ser alcançado.

Assim, quer para determinar as semi-variâncias como para a matriz de semi-covariâncias, será necessário conhecer os retornos condicionais, considerando para tal um determinado τ, isto é, um valor representativo do retorno mínimo esperado consoante o perfil do investidor. Serão também analisados os impactos resultantes de diferentes valores atribuídos para o τ. Como já exemplificado na Revisão Literária, recorre-se a um valor global para que se possa observar o quanto cada retorno dista do objetivo e de forma a que seja possível a exogeneidade da matriz de semi-covariâncias, como também se verificará nos Resultados.

Deste modo, quando considerado R_{it}, tem-se que $z_{it} = R_{it} - \tau$ e pretende-se analisar quais os retornos que não atingem o retorno alvo. Para tal, temos de minimizar z_{it} e, deste modo determinar os retornos condicionais, como apresentados em (2.10). Assim, o objetivo pretendido consiste em minimizar a probabilidade de perda do investimento, sendo caracterizado como perda os retornos cujo $z_{it} < 0$, o que vai corresponder a que o retorno determinado seja inferior ao retorno esperado mínimo. Caso isto não se verifique, significa que se obteve um retorno superior ao inicialmente pretendido e não será considerado como perda, consequentemente não será contabilizado como risco o que faz com que, numericamente, passe a ser contabilizado como valor nulo.

Para que seja possível determinar a *semideviation* de determinado ativo i, procura-se primeiro conhecer a respetiva semi-variância, sendo esta determinada com recurso ao LPM com $a = 2$. Deste modo, o risco do ativo será estimado através do valor esperado dos retornos condicionais ao quadrado, apresentado na equação (3.7).

$$\Omega^2_{i,\tau} = E\left\{\min\left[(R_i - \tau), 0\right]^2\right\} \simeq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \min\left[(R_{it} - \tau), 0\right]^2 \tag{3.7}$$

Em contrapartida, o risco da carteira fica caracterizado em função do conjunto de ativos que a integrem, de forma análoga ao modelo MPT. Para tal, torna-se necessário determinar as semi-covariâncias, isto é, conhecer de que forma interagem os ativos entre si. Isto será relevante visto que, quando formada uma carteira com diferentes ativos, a interação entre eles terá um impacto no risco conjunto da carteira. O risco entre cada dois ativos ficará definido através do valor esperado em função do produto dos retornos condicionais entre esses ativos e, desta forma, determina-se a matriz de semi-covariâncias. De notar que para cada τ surge uma diferente matriz de semi-covariâncias, face o impacto deste valor na definição de retornos condicionais.

Desta forma, a semi-covariância será estimada através do valor esperado do produto dos retornos condicionais de cada ativo, i e j, como se segue em (3.8).

$$\Omega_{ij,\tau} = E\left\{\min\left[(R_i - \tau), 0\right] \times \min\left[(R_j - \tau), 0\right]\right\} \simeq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left\{\min\left[(R_{it} - \tau), 0\right] \times \min\left[(R_{jt} - \tau), 0\right]\right\} \tag{3.8}$$

A matriz de semi-covariâncias fica definida como sendo uma matriz $n \times n$, simétrica e exógena, representativa da interação entre cada um dos ativos. Sendo simétrica, $\Omega_{ij,\tau} = \Omega_{ji,\tau}$ e, consequentemente, a transposta da matriz torna-se igual à sua matriz inicial, para todo o i e j pertencentes a $\{1, 2, \ldots, n\}$. De igual modo, sendo exógena, significa que será determinada em função dos retornos de cada ativo, através dos retornos condicionais com respeito a um determinado τ, o que permite que esta matriz se mantenha inalterada, mesmo que sejam atribuídos diferentes pesos a cada ativo aquando da formação de diferentes carteiras. Será determinada uma matriz semelhante a (3.9) em função de determinado τ, cuja diagonal corresponderá à semi-variância de cada ativo e as outras entradas à respetiva interação entre cada 2 ativos.

$$\Omega_{ij,\tau} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \ldots & \omega_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n,1} & \ldots & \omega_n^2 \end{bmatrix} =^1 \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \ldots & \omega_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{1,n} & \ldots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Posto isto, estão reunidas as condições necessárias à estipulação da função objetivo do nosso problema e que será desenvolvida de uma forma aproximada, sugerida por Estrada (2008), como se encontra

[1] Aplicável por definição de matriz simétrica.

em (3.10), permitindo aplicar o método de forma semelhante ao modelo MPT.

$$\Omega^2_{\mathbf{P},\tau} \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \Omega_{ij,\tau} \tag{3.10}$$

O modelo que permite a otimização de uma carteira de investimentos doméstica encontra-se matricialmente escrito em (3.11) e dará a solução pretendida para uma qualquer carteira de investimentos nestas condições, combinando as limitações necessárias ao conjunto de soluções admissíveis e a respetiva função objetivo. Assim, considere-se que os retornos μ foram determinados assumindo que todos os ativos se encontram cotados na moeda base, o vetor $\mathbf{w}$ com dimensões $n \times 1$ reflete os pesos ideais a atribuir a cada ativo, o vetor $\mathbf{1}$ é um vetor linha unitário, τ é o valor esperado mínimo de retorno para a carteira e Ω_τ a matriz $n \times n$ de semi-covariâncias.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \Omega^2_{\mathbf{P},\tau} &\simeq \mathbf{w}'\Omega_\tau \mathbf{w} \\ \text{s.a. } \mu\mathbf{w} &\geq \tau \\ \mathbf{1w} &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Face ao pretendido, é necessário considerar-se um modelo adequado a uma carteira internacional, de forma a que o retorno estipulado seja efetivamente alcançado, já considerando eventuais volatilidades das taxas de câmbio. Considere-se assim $\mu^*_{\mathbf{P}}$ o retorno da carteira já calculado em (3.5), valor determinado tendo em conta o vetor dos retornos ajustados dos ativos. O modelo pretendido com o objetivo de otimizar uma carteira de investimentos internacional pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \Omega^2_{\mathbf{P},\ \tau} &\simeq \mathbf{w}'\Omega_\tau \mathbf{w} \\ \text{s.a. } \Gamma\ \mathbf{w} &\geq \tau \\ \mathbf{1w} &= 1 \\ \mathbf{w} &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Deste modo, fica determinada a formulação para o presente problema em (3.12), tendo como foco a minimização do risco, representado pela semi-variância da carteira, sabendo que terá de obedecer a determinados critérios estipulados pelas restrições mencionadas e cujo objetivo consiste na determinação dos pesos a atribuir aos ativos que irão constituir a presente carteira.

3.2 Multiperíodo

Markowitz (1952) propôs o modelo MPT para a otimização de carteiras de investimentos, que permite a alocação "ideal" de diferentes quantias monetárias pelos diversos ativos, assumindo um único período de investimento. O modelo PMPT, exposto inicialmente neste capítulo, procura responder ao mesmo considerando uma abordagem de risco diferente.

Para um investimento a longo prazo, a mesma alocação torna-se ineficiente se aplicada repetidamente em diversos períodos. Em situações realistas de mercado, o comportamento dos ativos não se mantém constante e, deste modo, tornam-se necessários ajustes na carteira para os diferentes períodos em análise, de forma a que o objetivo final seja atingido. Esta alternativa será exposta neste subcapítulo apresentando uma otimização de carteiras para dois períodos tendo por base o modelo PMPT, mantendo o interesse na minimização do risco e no alcance de determinada riqueza no período final.

3. METODOLOGIA

Existem diferentes alternativas para a execução do pretendido, como sendo a programação estocástica multiperíodo, que utiliza regras de decisão condicionais para definir como se deve proceder em resposta a resultados passados. Por outro lado, a construção de árvores de cenários permite delinear exatamente quais os caminhos a percorrer, mas torna-se num entrave quando prolongado indefinidamente. Neste trabalho o pretendido será apresentar um modelo de programação convexa que pode ser resolvido global e eficientemente tendo por base regras lineares de decisão. Deste modo, o objetivo será desenvolver um modelo que recorre a equações lineares recursivas, uma alternativa às árvores de decisão e à construção de cenários e que se acredita mais adequada, (Calafiore, 2009).

Calafiore (2008), Kuhn et al. (2009) e Dantzig et al. (1993) sugerem soluções para este tipo de problemas de decisão sequencial de multiperíodos utilizando as pretendidas equações lineares recursivas. Para tal, consideram-se sequências recursivas de parametrizações afins para se determinarem as soluções pretendidas que serão exatas e facilmente encontradas, ao contrário das alternativas apresentadas. O objetivo consiste em decidir, para cada período, como reorganizar a carteira de forma a determinaro melhor retorno face ao investimento inicial. Com este fim, serão consideradas políticas de decisão, sendo estas em função dos ganhos passados do mercado, e ter-se-ão expressões explícitas para as expectativas de retornos e de volatilidades da carteira para cada fase de decisão. Esta abordagem permitirá alcançar computacionalmente soluções de problemas de programação convexa ou de segunda ordem, sendo que estas fornecem soluções apenas sub-ótimas por serem determinadas de forma parametrizada.

Calafiore e Campi (2005) apresentam um modelo para dois períodos, em que o investidor toma uma decisão de alocação no início do horizonte temporal e mantém a carteira durante esse primeiro período de tempo. No fim deste, o comportamento do seu investimento é ditado por um certo valor, representado pelo retorno. Em resultado desse valor, uma decisão pode ser tomada no início do segundo período, para compensar quaisquer efeitos negativos que se tenha experienciado anteriormente. Face às decisões tomadas para este último período, pretende-se que no final seja atingido o valor esperado pretendido. É desta forma que decorrerá a base do modelo multiperíodo, podendo generalizar-se para T períodos de tempo. Considera-se um período t como sendo a começar em $t-1$ e a acabar em t.

Consideram-se disponíveis os mesmos n ativos apresentados para dois períodos de investimento, e pretende-se determinarum determinado capital no final do período, de acordo com o valor inicialmente investido e tendo em consideração o retorno mínimo estipulado inicialmente, τ. A realização será feita considerando quantias monetárias, onde C_0 corresponderá ao capital disponível no período inicial, com $t = 0$. Assim, serão utilizados os retornos originais dos ativos, sem qualquer ajuste, e posteriormente, serão utilizadas as taxas de câmbio entre as moedas de base e local dos respetivos ativos.

O processo começa quando o investidor decide em $t = 0$ uma alocação para a sua carteira e, em cada um dos períodos seguintes $0 < t < T = 2$, pode manter a sua carteira ou alterá-la, comprando e/ou vendendo ativos nesse instante, de acordo com o desempenho de cada um dos ativos no período anterior. Estas decisões serão determinadas recorrendo às políticas de ajuste de investimento, apresentadas como funções parametrizadas. Visto não ser relevante para a presente análise, não serão considerados quaisquer custos de transação. Deste modo, considere-se:

- w_i^t - o montante em unidades locais mantidas do ativo i na carteira, no período t, sendo que $t = \{0,1,2\}$.
- u_i^t - o montante em unidades locais investidas no ativo i no período t, sendo $t = \{1\}$. Caso este valor seja positivo, então está-se perante uma compra desse ativo, sendo que vai acrescer o valor mantido desse ativo na carteira no período seguinte. Em contrapartida, um valor negativo corresponderá a uma venda desse ativo e, consequentemente, a uma diminuição da quantia mantida desse ativo

para o período seguinte. Não será considerado algum investimento em $t = 0$, nem investimentos no último momento do período $t = 2$, o que significa que para todo o $i = \{1,2,\ldots,n\}$, $u_i^0 = 0$ e $u_i^2 = 0$.

- S_i^t - a taxa de câmbio expressa em unidades domésticas por unidade da moeda estrangeira relacionada com o ativo i na carteira, no período t, sendo que $t = \{0,1,2\}$.

- R_i^t - o retorno individual do ativo i no período t, sendo que $i = \{1,2,\ldots,n\}$ e $t = \{0,1,2\}$.

As pretendidas políticas de ajustamento podem ser determinadas considerando duas abordagens: *open-loop* e *closed-loop*. A abordagem *open-loop* consiste na tomada de decisões antecipadamente e, deste modo, opta por funções de controlo que são efetivamente independentes dos retornos, pelo que não tem em consideração a natureza dinâmica do problema de decisão. Em contrapartida, a abordagem *closed-loop* tem em consideração o que aconteceu em períodos anteriores, isto é, as decisões a serem tomadas têm em consideração o que vai acontecendo progressivamente no mercado e só depois ficam efetivamente definidas, designando-se também de *"wait-and-see"*, (Calafiore, 2009).

Cada política de ajuste do investimento (neste caso só será tomada uma decisão por ativo) vai ser caracterizada com recurso a uma função parametrizada expressa por um vetor linha $\mathbf{u^1}$ em função dos retornos do primeiro período $(\mathbf{1}+\mathbf{R^1})$. Para o pretendido, vai ser considerado um retorno esperado por ativo em cada período, designadas de expetativas. Estas serão estimadas em função do valor esperado do retorno histórico de cada ativo, e representam-se por ζ_i. Desta forma, os ajustes $\mathbf{u^1}$ serão determinados considerando uma decisão nominal $\kappa^{\mathbf{1}}$ e um termo auxiliar. Cada decisão nominal $\kappa_{\mathbf{i}}^{\mathbf{1}}$ representa o que se efetuaria ao ativo i no momento $t = 1$ se o mercado decorresse como esperado até então, isto é, se as expectativas fossem atingidas. Como tal dificilmente acontece, corrige-se a decisão $\mathbf{u^1}$ recorrendo a um termo auxiliar. Este fica definido por uma matriz de reação do mercado, Θ^1, de dimensão $n \times n$ em que cada entrada representará a sensibilidade de ação de controlo.

Todo o processo decorrerá num horizonte de tempo deslizante, considerando o tamanho de cada período constante. Em cada período t tem-se associado um vetor de variáveis aleatórias representativo do montante investido na carteira nesse instante, $\mathbf{w^t}$. O problema de decisão é resolvido ao longo de um horizonte de T períodos. Considera-se nesse instante que as decisões futuras são ainda incertas devido à dependência para com os retornos passados, que só se tornam conhecidos com o avançar do tempo. Assim, o horizonte avançará um período de cada vez e atualizará o modelo com as novas estimativas, decorrendo continuamente de forma iterativa até ao final do horizonte temporal.

A vantagem com a implementação de um modelo em horizonte deslizante é que, em cada estado de decisão, existe a possibilidade de lucrar com as observações do comportamento real do mercado e usar essas informações para, por exemplo, fornecer novas estimativas ao modelo e atualizar os pesos, o risco e as metas de retorno pretendido, (Calafiore, 2009). Esta abordagem é útil para investimentos contínuos, de forma a se obter decisões *nonmyopic* ao longo de determinados períodos de tempo.

Assim, será abordada a estratégia *"closed-loop"* num horizonte deslizante, sendo a alternativa *"open-loop"* facilmente adaptada se se considerar a matriz de reação do mercado nula para todos os períodos de tomada de decisão. O objetivo será o de determinar as decisões progressivamente, não esquecendo o alcance do retorno final pretendido enquanto se minimiza o risco total associado.

De modo a entender melhor como será o desenvolvimento do multiperíodo, segue-se um esquema do procedimento em 3.1 para $T = 2$ períodos, com $t = \{0,1,2\}$.

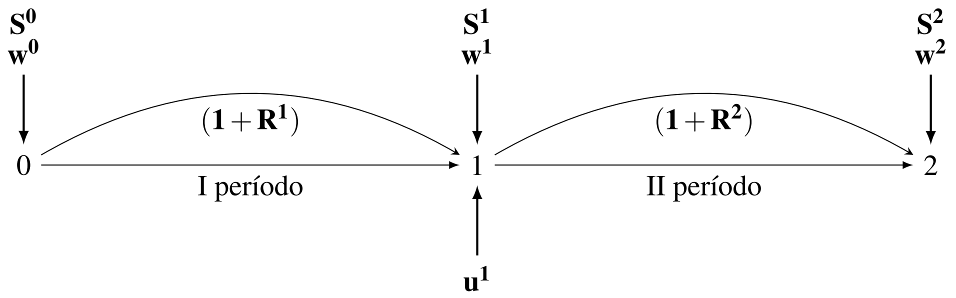


Figura 3.1: Esquema de otimização da carteira para dois períodos.

No período inicial 0, é constituída a primeira carteira representada por $\mathbf{w^0}$, convertida para Euros através das taxas de câmbio associadas $\mathbf{S^0}$. Este período será aquele em que apenas é atribuído um valor a cada ativo i, não sendo permitidas alterações nesse mesmo instante. O valor total deste investimento, em Euros, terá de corresponder exatamente ao capital inicialmente disponível. Ao longo do período I, haverá uma alteração no comportamento dos ativos representado por $(\mathbf{1}+\mathbf{R^1})$. Como consequência desta evolução "passada" seguem-se os primeiros e únicos ajustes na carteira, as designadas políticas de ajustamento, $\mathbf{u^1}$, e que representam as compras e vendas dos ativos da carteira, sendo associada a conversão $\mathbf{S^1}$. Assim, forma-se uma "nova" carteira, $\mathbf{w^1}$, que será implementada para o II período. No final desse II período, existe um novo retorno e variações cambiais face ao ocorrido nesse período, respetivamente $(\mathbf{1}+\mathbf{R^2})$ e $\mathbf{S^2}$. Com isto, é alcançado o capital final, que deverá ser igual ou superior ao pretendido inicialmente.

Compreendido o desenrolar do processo, torna-se essencial apresentar as restrições para a implementação do modelo. Deste modo, todo o valor investido inicialmente, em Euros, terá de corresponder exatamente ao montante disponível no início, como descrito em (3.13), em que $\mathbf{w^0}$ corresponde ao vetor linha $1 \times n$ com os valores investidos inicialmente na moeda local, precisando da respetiva conversão para a moeda de base apresentada pela taxa de câmbio $\mathbf{S^0}$, vetor linha representativo de cada taxa de câmbio associada à respetiva moeda.

$$\mathbf{w^0}\,\mathbf{S^0}{}' = C^0 \tag{3.13}$$

Por outro lado, pretende-se alcançar como capital final um valor que englobe o retorno esperado estipulado de acordo com o capital investido. Assim, face ao valor definido τ, espera-se que este retorno seja atingido no momento final $T = 2$ quando incorporado no capital investido inicialmente. Considere-se assim a restrição (3.14), onde $\mathbf{w^2}$ já se encontra em Euros (pela forma em como foi obtida) e $\mathbf{1}$ corresponde ao vetor coluna de valor 1.

$$\mathbf{w^2}\,\mathbf{1} \geq (1+\tau)\;C^0 \tag{3.14}$$

Para o caso em particular, existirá uma só política de ajustamento que ocorrerá em $t = 1$. Esta política apresenta-se como sendo uma função afim parametrizada e dependente dos retornos passados, expressa em (3.15), determinada através da soma de uma decisão nominal em Euros $\kappa^{*\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^{1,n}$, com os ajustes proporcionais aos desvios do mercado face ao esperado, $\Theta^1 \in \mathbb{R}^{\,n,n}$.

$$\mathbf{u^1} \;=\kappa^{*\,\mathbf{1}} \;+\; \beta^{\mathbf{1}}\,\Theta^1 \tag{3.15}$$

Onde cada elemento $\kappa_i^{*1} = \kappa_i^1\; S_i^1$ e cada $\beta_i = \left[\left(1+R_i^1\right) - (1+\zeta_i)\right] S_i^1 \;\;, \forall i = \{1,\cdots,n\}$, onde ζ_i corresponde ao retorno esperado de cada ativo. Deste modo, $\mathbf{u^1}$ fica calculado em Euros.

Como o processo será feito de forma recursiva, será necessário implementar as equações dinâmicas da carteira, de forma a que haja uma continuidade nos investimentos e coerência na sua concretização. Assim, após o desenvolvimento do primeiro período, vai-se determinar através de (3.16) para cada ativo $i = \{1,\ldots,n\}$, o valor correspondente à quantia investida no período inicial (em Euros), que terá de incluir o retorno determinado com o investimento, bem como o impacto da taxa de câmbio nesse instante, acrescido dos ajustes a serem feitos nesse ativo em Euros, podendo elevar ou diminuir a respetiva quantia na carteira consoante a decisão tomada.

$$w_i^1 = w_i^0\, S_i^0\, \left(1 + R_i^1\right)\, S_i^1\; +\; u_i^1 \tag{3.16}$$

No último período, o calculo será semelhante mas não existirá qualquer decisão de ajuste a ser considerada, (3.17).

$$w_i^2 = w_i^1\, \left(1 + R_i^2\right)\, S_i^2 \tag{3.17}$$

Como não serão considerados quaisquer custos de transação nem injeções monetárias ao longo do horizonte temporal, tem que existir um auto-financiamento do montante em circulação ao longo desse período. Assim, as compras e vendas têm de se equilibrar. Para tal, considera-se (3.18), para $t = 1$, o que significa que os valores monetários, em Euros, são transferidos entre ativos mas o valor líquido mantém-se inalterado. Ambos os valores serão determinados em Euros, pelo que não será necessário incluir conversões.

$$\begin{aligned} \kappa^{*\mathbf{1}}\, \mathbf{1} &= 0 \\ \Theta^{\mathbf{1}}\, \mathbf{1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Por outro lado, pretende-se que não existam vendas a descoberto na carteira em qualquer momento do investimento, o que corresponde a dizer que não podem existir quantias negativas investidas nos ativo:

$$\begin{aligned} w_i^0\, S_i^0 &\geq\; 0 \\ w_i^1 &\geq\; 0 \\ w_i^2 &\geq\; 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Esta equação facilmente se adapta a quantias mínimas ou máximas pretendidas para qualquer ativo e em qualquer período de tempo.

A riqueza total do investimento alcançada para os períodos de investimento $t = \{1,2\}$, ω^t, pode ser descrita através da equação (3.20).

$$\omega^t = \mathbf{w^t}\, \mathbf{1} \tag{3.20}$$

Como o objetivo prende-se na minimização da quantidade de risco do investimento total, será necessário determinaro risco de cada período face aos investimentos nos mesmos. Para tal, vai ser necessário determinara matriz de semi-covariâncias dos ativos. No presente caso, esta matriz será constante para todo o horizonte temporal e determinada recorrendo a (3.8). Por fim, será feita uma soma ponderada dessas variações em todas as fases de decisão representativa do risco total, designada de FO, como se encontra em (3.21).

$$\mathrm{FO} = \sum_{t=0}^{2} \frac{1}{3}\; \Omega_{\mathbf{P},t}^2 \tag{3.21}$$

Onde $\Omega^2_{\mathbf{P},t}$ representa a semi-variância para cada carteira **P** definida no período t, representativa do risco que será determinado consoante a combinação entre a matriz de semi-covariâncias e os respetivos montantes destinados a cada ativo em Euros nesse mesmo período, já descrita na equação (3.10).

Desta forma, estão apresentados os métodos que serão implementados. No próximo capítulo encontram-se os resultados dos modelos propostos.

Capítulo 4

Resultados

Apresentado o enquadramento teórico e formulada a metodologia, segue-se a implementação prática para avaliar o desempenho do modelo PMPT, e a sua comparação com o modelo MPT. A análise geral dos dados e a implementação do modelo multiperíodo foram feitas considerando os dados históricos originais, isto é, os preços dos ativos nas moedas locais e respetivas taxas de câmbio. O estudo para a constituição da carteira e do *backtesting* utilizaram os retornos ajustados, quer isto dizer que os ativos já se encontrarão sob influência das taxas de câmbio. Os dados históricos foram retirados do servidor *Investing.com* e os modelos foram implementados em linguagem MATLAB com recurso ao *software* YALMIP, (Löfberg, 2004).

4.1 Análise Geral aos Dados

Considere-se um investidor europeu com um perfil de risco moderado, que pretende investir numa carteira internacional. À sua disposição estão 10 ativos, dos quais 5 estão na moeda doméstica, sendo eles *Allianz* (ALV), *Bechtle AG* (BC8G), *Nestle SA* (NESN), *SAP SE* (SAPG) e *Volkswagen AG* (VOWG). Dos restantes que se encontram em moedas estrangeiras, tem-se que *Apple Inc* (AAPL), *Amazon.com Inc* (AMZN) e *Facebook Inc* (FB) se apresentam em Dólares Americanos e *Rolls-Royce Holdings PLC* (RR) e *Unilever PLC* (ULVR) em Libras Esterlinas. Foram determinados os retornos históricos mensais considerando o período de janeiro de 2014 até dezembro de 2016.

Na figura 4.1, encontra-se apresentada a evolução percentual dos preços por ativo tendo como base de comparação o preço inicial de cada um. A marioria dos ativos apresentou uma evolução positiva no período considerado.

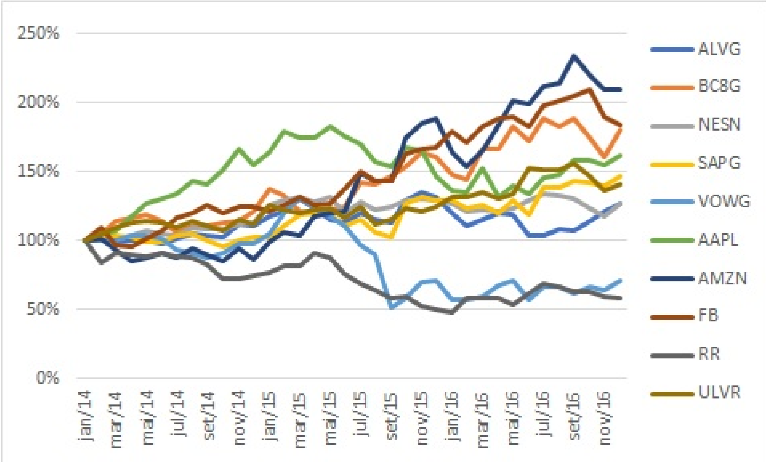


Figura 4.1: Evolução percentual dos preços dos ativos considerando o preço inicial como base, jan-14 a dez-16.

Em particular, os ativos AMZN, FB e BC8G apresentaram a melhor evolução até ao final do período, verificando-se uma valorização nos preços de cada um deles. Em contrapartida, RR e VOWG apresentaram uma evolução menos satisfatória, já que o seu preço final desvalorizou face ao respetivo incial, demonstrado pelos valores abaixo de 100%, isto é, o ativo RR tinha em janeiro de 2014 um preço de $1143,2$£ e em dezembro de 2016 passou a valer 668£, e o ativo VOWG passou de $188,05$€ para $133,35$€, respetivamente. Os preços apresentam-se ainda analisados na moeda do país de origem, moeda local, o que significa que o valor determinado da carteira constituída por estes ativos ainda estará sujeita a oscilações. Assim, torna-se igualmente interessante analisar a evolução das taxas de câmbio, de modo a que seja possível observar o comportamento dos preços das moedas estrangeiras face à moeda doméstica (figura 4.2).

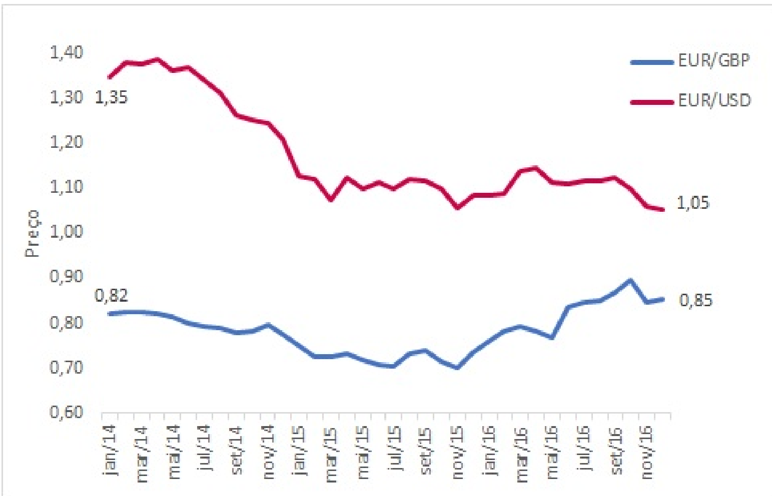


Figura 4.2: Evolução das taxas de câmbio EUR/USD e EUR/GBP, no período jan-14 e dez-16.

De notar que houve uma evolução favorável do Euro em relação à Libra Esterlina, isto é, comparando o último com o primeiro mês, é necessário obter mais Libras por cada Euro no final do período, quer isto dizer que houve uma valorização do Euro e uma desvalorização da Libra. Em contrapartida, houve uma evolução favorável do Dólar Americano face ao Euro, isto é, são necessários menos Dólares para adquirir 1 Euro no final desse mesmo período em relação ao seu início, quer isto dizer que houve uma valorização do Dólar e uma desvalorização do Euro. Todas estas variações serão relevantes para o retorno e risco efetivamente tidos no final do período. Neste caso, pode concluir-se que qualquer investimento feito na moeda GBP irá refletir-se num retorno inferior em EUR. Pelo contrário, um investimento feito em USD, fruto da desvalorização do Euro, irá traduzir-se num retorno final superior.

A análise que se segue será desenvolvida considerando os retornos ajustados, determinados pela equação (2.18). Os retornos foram ajustados para que, deste modo, se possa trabalhar já considerando a volatilidade da taxa de câmbio e permitindo a coerência na análise. Daqui em diante, as análises encontram-se expressas considerando os retornos ajustados mensais para cada ativo.

Numa primeira fase, pretende-se analisar as características numa perspetiva individual, ou seja, analisar os retornos por ativo já considerando o respetivo ajuste do câmbio. Pretende-se assim analisar a média dos retornos mensais, o respetivo grau de assimetria, cada *semideviation* e os respetivos desvios-padrão. Para que fosse possível determinara *semideviation* teve de se considerar um retorno mínimo alvo, anteriormente apresentado como τ. Para escolher um valor adequado, tem de se ter em conta o perfil pessoal do investidor e não pôr em causa a admissibilidade do problema. Dadas as circunstâncias, o valor escolhido para o retorno mínimo mensal numa perspetiva global foi $\tau = 1,6\%$. Apenas para a análise individual, serão também consideradas as médias individuais de cada ativo para o cálculo da respetiva *semideviation*, com o objetivo de se fazer uma analogia com o desvio-padrão.

Tabela 4.1: Análise geral dos retornos ajustados no período de janeiro 2014 a dezembro 2016.

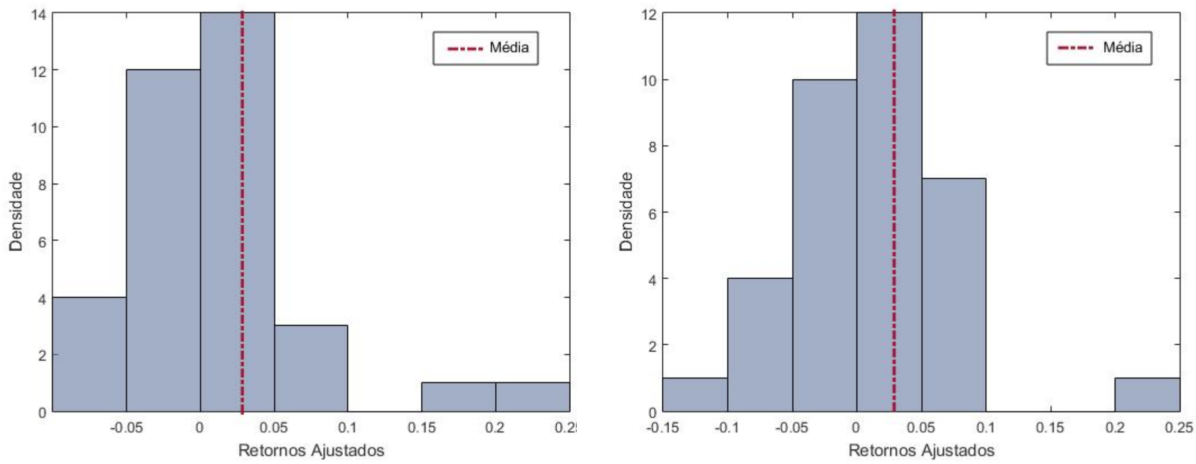
Ativos i	Médias (%) μ_i	Grau de Assimetria SK_i	*Semideviation* (%) τ = 1,6%	*Semideviation* (%) $\tau = \mu_i$ (%)	Desvio-Padrão (%) σ_i
ALV	0,84	0,98	4,51	4,06	5,68
BC8G	1,90	1,14	4,15	4,33	6,52
NESN	0,76	1,08	3,21	2,72	4,01
SAPG	1,28	1,59	3,79	3,58	6,39
VOWG	-0,21	0,81	10,04	9,19	11,69
AAPL	0,90	1,05	5,22	4,79	6,93
AMZN	1,77	1,18	5,67	5,78	8,87
FB	1,22	0,99	4,63	4,42	6,22
RR	-1,02	1,43	7,13	5,48	9,28
ULVR	1,28	1,26	4,17	3,97	6,32

O grau de assimetria de cada distribuição foi determinado conforme apresentado na equação (2.11), proposta por Markowitz (1959). Quando o valor é superior à unidade, como por exemplo acontece com SAPG, estamos perante uma distribuição assimétrica positiva, estendendo-se para valores superiores à média. Desta forma, no ativo SAPG predominam valores mais altos do que a média, $1,28\%$, e conclui-se assim que o modelo normal se torna inadequado para a representação destes retornos. Em contrapartida, um valor inferior à unidade, como o caso do ativo VOWG, indica que a sua distribuição é assimétrica negativa, estendendo-se em direção a valores muito inferiores à respetiva média, $-0,21\%$. Caso esse valor correspondesse ao valor unitário, então estar-se-ia perante uma distribuição simétrica e adequada ao uso da distribuição normal, o que aqui não acontece.

Nas três últimas colunas da tabela 4.1 encontram-se os valores determinados para o risco de cada ativo consoante o procedimento utilizado, isto é, *semideviation* ou variância. Assim, pretendeu-se determinara *semideviation* em torno da própria média de cada ativo de forma a comparar e procurar entender as diferenças entre cada medida de risco.

Comece-se por analisar a influência da localização em cada uma das medidas de risco. Uma maior proximidade do retorno ao valor médio, quer acima ou abaixo deste, irá implicar uma alteração mais pequena no valor da variância, enquanto que um retorno que se distanciar mais da média irá causar um impacto mais significativo na variância, levando-a a alcançar um valor superior. Para a *semideviation* a variação nesse impacto é semelhante, mas esta medida apenas tem em consideração os retornos que se encontrem abaixo da média, as designadas "perdas".

Considerem-se os ativos SAPG e ULVR para a interpretação prática das medidas de risco, visto terem ambos médias idênticas de $1,28\%$. Seguem-se dois histogramas em 4.3, sendo cada um relativo a um dos ativos, por forma a facilitar a sua interpretação.



(a) SAPG (b) ULVR

Figura 4.3: Histograma da distribuição dos retornos de cada ativo.

Como se pode analisar através do grau de assimetria na tabela 4.1 e do qzue se observa na figura 4.3, o ativo SAPG tem uma assimetria positiva mais acentuada do que a ULVR. A SAPG concentra mais retornos positivamente distantes da média em comparação com o ativo ULVR, de acordo com os extremos direitos de cada histograma, como é observado em 4.3a e 4.3b, o que gera as diferenças no grau de assimetria. Por outro lado, apesar de se encontrarem mais retornos abaixo da média no ativo SAPG em comparação com a ULVR, aproximadademente 16 vs 15, a *semideviation* da SAPG tem um valor inferior ao da ULVR. Isto deve-se ao facto de as designadas perdas apresentadas no ativo ULVR serem mais negativas e, consequentemente, distantes do valor de referência, a média neste caso, levando a um valor superior para esta medida de risco. Por fim, o desvio-padrão tem em consideração os desvios das perdas mas também considera os desvios dos retornos acima da média. Assim, observe-se que este valor é superior no ativo SAPG do que no ativo em comparação, ou seja, combinando a informação já analisada, apesar das perdas deste ativo serem inferiores às do ativo ULVR, existem muitos valores positivos distantes da média que fazem com que tenha um maior valor de desvio-padrão. Deste modo, pode-se afirmar que a *semideviation* tem em conta o grau de assimetria no sentido em que quanto mais assimétrica negativa a distribuição dos retornos, maior o número de valores distantes e abaixo do retorno alvo e consequentemente maior a semi-variância.

Antes de prosseguir para uma análise conjunta dos dados, pretende-se analisar a interação entre cada dois ativos por forma a avaliar o impacto no risco que dois ativos têm quando incluídos simultaneamente na futura carteira. Segue-se a matriz de semi-covariâncias na tabela 4.2 e a matriz de covariâncias na tabela 4.3.

Tabela 4.2: Matriz de semi-covariâncias dos ativos, no período jan-14 até dez-16

	Semi-Covariância (%)									
ALV	0,20									
BC8G	0,09	0,17								
NESN	0,07	0,08	0,10							
SAPG	0,12	0,06	0,08	0,14						
VOWG	0,27	0,16	0,10	0,20	1,01					
AAPL	0,11	0,09	0,08	0,11	0,21	0,23				
AMZN	0,12	0,12	0,09	0,09	0,19	0,11	0,24			
FB	0,10	0,06	0,05	0,08	0,10	0,05	0,11	0,16		
RR	0,11	0,08	0,11	0,14	0,34	0,15	0,12	0,08	0,47	
ULVR	0,05	0,09	0,09	0,09	0,08	0,10	0,10	0,06	0,13	0,13

A matriz expressa na tabela 4.2 corresponde a uma matriz simétrica e, quando considerado um $\tau = 1,6\%$, torna-se generalizável para todas as carteiras com os presentes ativos. Caso se pretenda um retorno diferente ao atribuído por este τ, então esta mesma matriz irá ser gerada de forma diferente dada a natureza da sua composição, isto é, devido aos retornos condicionais. Observe-se também que a sua diagonal corresponde exatamente à semi-variância de cada ativo, ou seja, será o quadrado da *semideviation*.

De forma análoga, a diagonal da matriz expressa na tabela 4.3 representa exatamente a variância de cada ativo, isto é, o quadrado do desvio-padrão anteriormente apresentado.

Tabela 4.3: Matriz de covariâncias dos retornos ajustados, no período jan-14 até dez-16

	Covariância (%)									
ALV	0,32									
BC8G	0,08	0,43								
NESN	0,07	0,15	0,16							
SAPG	0,20	0,11	0,09	0,41						
VOWG	0,34	0,15	0,06	0,35	1,37					
AAPL	0,07	0,16	0,07	0,16	0,19	0,48				
AMZN	0,18	0,25	0,13	0,24	0,20	0,21	0,79			
FB	0,08	0,03	-0,02	0,15	0,01	0,13	0,26	0,39		
RR	-0,21	-0,11	0,02	0,00	0,02	0,05	-0,02	-0,09	0,86	
ULVR	-0,09	0,07	0,12	0,00	-0,21	0,07	0,13	0,02	0,26	0,40

Relembrando o efeito de diversificação, quanto menor for a covariância entre dois ativos, menor o risco da carteira global. Assim, observe-se que a matriz de covariâncias tem entradas com valores negativos, o que se traduz numa potencial diminuição do risco com o modelo MPT, caso os ativos integrem a carteira. O mesmo já não acontece com a matriz de semi-covariâncias. Isto deve-se ao facto de esta última ser uma soma de produtos de valores nulos ou negativos, fazendo com que todas as entradas passem a positivas e pondo em questão o efeito da diversificação neste método. Por outro lado, a matriz de semi-covariâncias apenas está a ter em consideração as perdas e, como tal, é coerente que não hajam valores negativos, pois estamos apenas a incluir os casos em que os retornos de ambos os ativos estão abaixo do valor em simultâneo. Será de esperar que na minimização do risco, seja dada a preferência a ativos com menor semi-covariância, já que esse é um indicador de que as perdas não são muito distantes do valor mínimo pretendido. Iremos observar que, apesar de não haver valores negativos que possam diminuir o risco global, não significa que o risco determinado pela semi-variância não possa ser menor do que o risco determinado pela variância de uma carteira. Mais ainda, a diversificação não deixa de ser uma salvaguarda do retorno, pois permite um contrabalanço no desempenho dos diferentes ativos presentes na carteira.

Passando a uma análise conjunta dos dados, segue-se a tabela 4.4 com as principais informações sobre o conjunto de dados, e ainda uma apresentação do respetivo histograma acompanhado de uma curva de distribuição normal, com o intuito de observar o comportamento conjunto dos retornos determinados.

Tabela 4.4: Análise global ao conjunto de dados no período de jan-14 a dez-16.

Análise Global	
Grau de Assimetria	0,10
Valor Médio (%)	0,87
Desvio-Padrão (%)	7,43
Semideviation (%) (τ = 0,87%)	16,42
Semideviation (%) (τ = 1,6%)	17,67
Mínimo (%)	-42,33
Máximo (%)	25,68

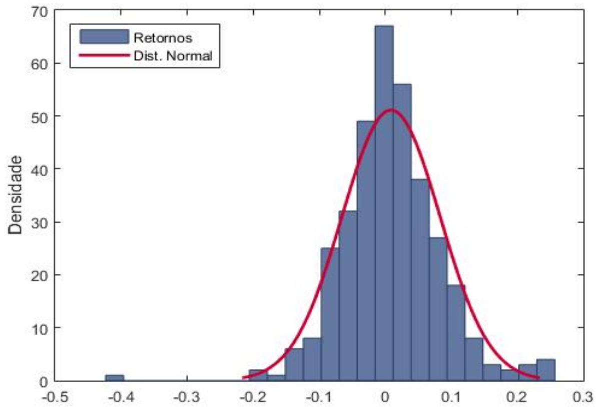


Tabela 4.5: Histograma dos retornos ajustados acompanhado da distribuição Normal, no período de janeiro 2014 a dezembro 2016.

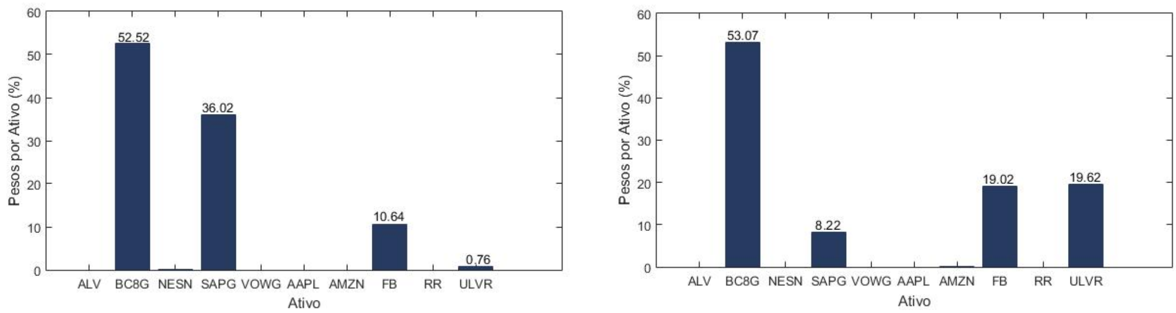
Repare-se que os dados demonstram um grau de assimetria inferior a 1, com um valor de $0,10$, o que significa que estamos perante uma distribuição assimétrica negativa, com valores negativos muito distantes da média global de $0,87\%$. Consequentemente, observa-se um valor dos retornos muito baixo de $-0,4$, apresentado no histograma em 4.5, confirmado através do valor mínimo de $-42,33\%$, em contraste com um máximo de $25,68\%$. Deste modo, a verdadeira distribuição refletir-se-ia numa cauda esquerda muito pesada, divergindo da distribuição normal.

Enquanto que o desvio-padrão mede a dispersão dos retornos em torno da média, a *semideviation* mede a dispersão dos retornos abaixo de um valor mínimo esperado. Considere-se em particular $\tau = \text{média} = 0,87\%$. Ora, os valores determinados pelo desvio-padrão e pela *semideviation* foram respetivamente $7,43\%$ e $16,42\%$. Como são muito distintos, significa que existe uma maior proximidade entre cada retorno e a média global, esteja este retorno acima ou abaixo da mesma. Consequentemente tem um impacto menor no desvio-padrão do que se tivesse uma dispersão maior. Assim, visto que a *semideviation* apenas considera os valores abaixo da média e, como observado, não só esta distribuição tem uma assimetria negativa como contém um valor muito negativo, isto faz com que haja um impacto maior no valor do risco, originando este valor elevado.

Desta forma está exposta a importância entre analisar exclusivamente perdas ou perdas e ganhos, devolvendo valores diferentes para o risco que se pretende analisar. Segue-se então uma análise aos dois métodos para a constituição de uma carteira de investimentos.

4.2 Constituição da Carteira

Nesta subsecção irão ser apresentados os resultados dos modelos implementados com o intuito de otimizar uma carteira de investimentos internacional tendo em consideração a minimização do risco presente. Para o modelo PMPT considerou-se a formulação em (3.12) e o respetivo retorno mínimo esperado de $\tau = 1,6\%$, e ainda os ativos apresentados inicialmente neste capítulo. Serão analisados os desempenhos dos modelos PMPT e MPT como descrito em (2.3). Em todas as otimizações, os retornos dos presentes ativos encontram-se tendo em consideração os retornos das taxas de câmbio, o que significa que foram considerados os retornos ajustados dos ativos, de acordo com a equação (3.5). Comece-se por apresentar os pesos determinados conforme os modelos na figura 4.4.



(a) Modelo PMPT (b) Modelo MPT

Figura 4.4: Pesos atribuídos a cada ativo em cada modelo.

Como se pode observar na figura 4.4, ambos os modelos dão um maior peso, a rondar os 53%, ao ativo BC8G. Relembro que este ativo, que já se encontrava em Euros, foi um dos ativos mais estáveis e que se considerou com uma melhor evolução desde o início do período. Assim, pode-se observar na tabela 4.1 que este ativo teve a média mais elevada dos retornos de todos os ativos, com 1,9%, uma assimetria relativamente positiva, um risco relativamente baixo, sendo que, para a *semideviation* determinou-se um valor de 4,15% e para o desvio-padrão de 6,52%, pelo que os valores acima da média não contribuem com muito peso para o risco.

A restante atribuição dos pesos, embora sobre os mesmos ativos, difere entre os dois modelos, isto é, enquanto que o modelo PMPT atribui cerca de 36% do peso total ao ativo SAPG, o modelo MPT atribui apenas 8% ao mesmo ativo e, de forma análoga, o modelo PMPT aloca cerca de 1% ao ativo ULVR e o modelo MPT atribui um valor de quase 20%. Relembrando algumas das informações sobre estes ativos apresentadas na tabela 4.1 e as observações feitas através dos dois histogramas, as diferenças que geraram estas hipóteses foram o grau de assimetria, superior no ativo SAPG do que no ULVR considerando uma média igual de 1,28%.

De forma análoga, o modelo PMPT atribui apenas 11% ao FB, enquanto que o modelo MPT sugere 19%. Para este ativo, o valor da *semideviation* foi de $4,63\%$ e o desvio-padrão de $6,22\%$, com uma média de $1,22\%$ e um grau de assimetria próximo de 1. Isto pode ser justificado com uma quebra dos preços que ocorreram neste ativo ao longo do horizonte temporal em análise. Ainda assim, houve uma valorização no preço deste ativo, o que faz com que haja um ganho elevado com este investimento, ainda que na moeda de base se torne superior ao valor da moeda local devido à valorização do Dólar contra o Euro.

Relembrando o gráfico 4.1, a evolução destes quatro ativos foi respetivamente de: FB 189%, BC8G 181%, SAPG 146% e ULVR 141%, o que significa que todos eles apresentam um retorno positivo considerando os dados históricos. Além disso, nota-se a clara influência da medida de risco utilizada em cada modelo, o que se reflete nas acentuadas diferenças nos valores do desvio-padrão e da *semideviation*, sendo que o modelo PMPT considera como mais arriscado o ativo FB, seguindo-se os ativos ULVR, BC8G e SAPG, enquanto que o modelo MPT considera que o ativo mais arriscado é o BC8G, seguido do SAPG, ULVR e FB.

A nível de interação entre os ativos apresentados quer pela semi-covariância quer pela covariância, as relações apresentadas são positivas e baixas entre cada dois ativos integrantes, sendo que a variância contribuirá para um maior risco final do que a semi-variância devido aos seus valores mais elevados, como apresentados nas tabelas 4.2 e 4.3. Apesar de correlações negativas permitirem uma diminuição no risco de uma carteira, não haverá grande impacto neste exemplo, visto não se estar a incluir na carteira ativos que permitam esta diminuição, face à existência de ativos com melhores desempenhos.

Na tabela 4.6 encontram-se o respetivo retorno e risco associados à composição da carteira encontrada.

Tabela 4.6: Retorno e Risco de cada carteira consoante o modelo utilizado.

Modelo	Retorno Final (%)	Risco Carteira (%)
PMPT	1,60	3,29
MPT	1,60	4,34

Como seria de esperar, ambas as carteiras atingem o retorno mínimo definido inicialmente, que era uma das restrições impostas. Como se pode observar na tabela 4.6, a carteira do modelo PMPT tem um risco inferior ao risco determinado com o modelo MPT. Ou seja, para um mesmo retorno, o modelo PMPT permite que o risco da carteira seja inferior ao alcançado com o modelo MPT, isto deve-se ao facto de cada modelo considerar uma medida de risco diferente, sabendo que o objetivo é o mesmo, o de minimizar o risco presente na carteira. Assim, o modelo PMPT toma uma posição menos conservadora, considerando apenas as perdas como potencial risco, opta pelos ativos com médias elevadas e com assimetrias preferencialmente positivas onde, simultaneamente, têm uma *semideviation* relativamente baixa. No conjunto, significa que este modelo não só tem em consideração a influência do retorno alvo pretendido no risco, como também opta por ativos com retornos elevados e preferencialmente superiores à média individual de cada um. Em contrapartida, a medida de risco do modelo MPT, a variância, tem em consideração também os ganhos como risco, sendo indiferente se tem mais retornos positivos ou negativos na contabilização do risco, o que torna difícil a sua interpretação. Considera apenas a média individual de cada ativo para medir o risco, não tendo assim integrado o retorno mínimo esperado.

Segue-se na figura 4.5 a fronteira de eficiência de cada modelo com a respetiva carteira analisada anteriormente também assinalada, considerando os retornos e riscos associados. É na fronteira de eficiência que se encontram as carteiras eficientes, refletindo várias combinações ótimas do binómio retorno/risco.

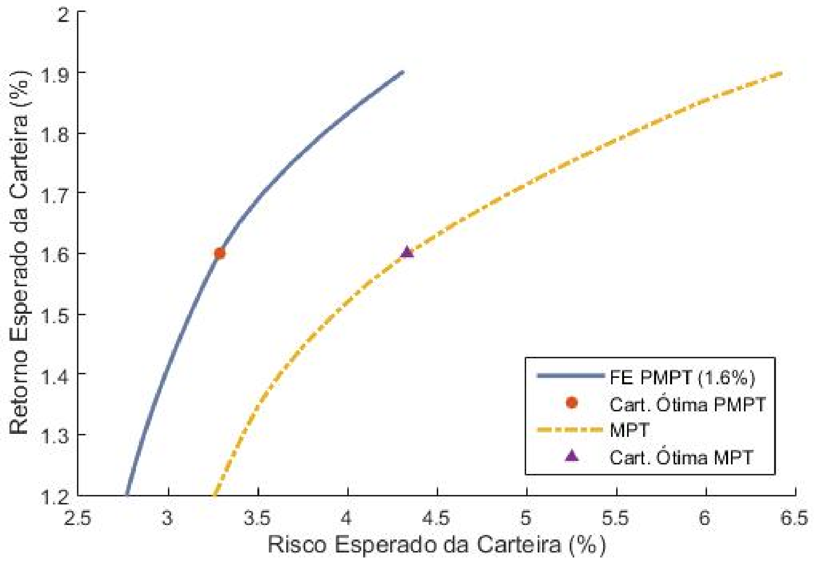


Figura 4.5: Fronteiras de eficiência e respetivas carteiras ótimas dos modelos PMPT e MPT.

Cada fronteira foi determinada de acordo com o modelo usado, sendo o PMPT o modelo em análise e o MPT o modelo tradicional. Cada ponto representado expressa a carteira determinada e apresentada neste estudo consoante cada um dos modelos.

Observe-se que o modelo PMPT demonstra ter uma alocação melhor entre o binómio retorno/risco face ao modelo MPT, o que se transmite no facto de, para um mesmo retorno esperado, o risco ser inferior, como já apresentado na tabela 4.6. Desta forma se afirma e considera que o modelo *Post Modern Portfolio Theory* demonstra ter um desempenho mais realista e plausível na medição do risco latente a uma carteira, sendo a *semideviation* a medida considerada para a análise, dando coerência à definição de risco através da incerteza negativa.

4.3 *Backtesting*

Nesta secção irá ser desenvolvida uma estratégia de investimentos para um dado horizonte temporal tendo por base dados históricos, e que se designa de *backtesting*. Desta forma, serão simuladas carteiras a investir num determinado período com base em variações históricas de preços reais e, consequentemente, procura-se determinaro respetivo retorno e o risco inerente a cada investimento.

Para a realização do *backtesting* serão considerados os mesmo ativos mas por um período de tempo mais extenso, desde janeiro de 2014 a dezembro de 2018, onde T = 59 meses, e os dados simulados corresponderão ao período de T-K = 24 meses, onde K = 35 representam os meses de dados históricos. Para o pretendido, consideram-se os retornos ajustados históricos, isto é, já considerando o retorno efetivo dos ativos e das respetivas taxas de câmbio para os correspondentes 35 meses e realiza-se um procedimento *backtest* no horizonte previsto dos restantes 24 meses. Cada simulação será feita com base em médias móveis, onde cada média, representativa do valor esperado, é reajustada consoante o período em estudo, isto é, após analisado mais um mês, a média é reajustada com esse mês deixando para trás o primeiro, bem como o risco móvel, determinado da mesma forma.

O procedimento para o *backtesting* utilizado para este trabalho pode ser percebido através das seguintes etapas:

4. RESULTADOS

Inicializa-se o processo com T-K = 0, representativo do primeiro mês a estimar, com base nas variações dos dados históricos iniciais (K = 35).

1. Estimação da matriz de semi-covariâncias (matriz de covariâncias[1]) e determinação do retorno esperado de cada ativo.
2. Através do modelo pretendido, é formada uma carteira para o intervalo com os dados históricos, e calculado o respetivo retorno esperado e risco dessa carteira.
3. O intervalo dos dados históricos utilizado para a estimação é reajustado, absorvendo um novo mês de simulação e deixando para trás o mês inicial do intervalo. É calculado o retorno real da carteira, que por sua vez é adicionado à riqueza acumulada até ao momento.
4. Repetem-se os passos 1, 2 e 3 até que T-K = 24. O tamanho do intervalo dos dados históricos será mantido constante, com 35 meses.

Antes de prosseguir com o desenvolvimento, torna-se relevante observar o comportamento dos dados para este período adicional, de janeiro de 2017 a dezembro de 2018, mantendo o preço de base inicial de janeiro de 2014 para cada ativo.

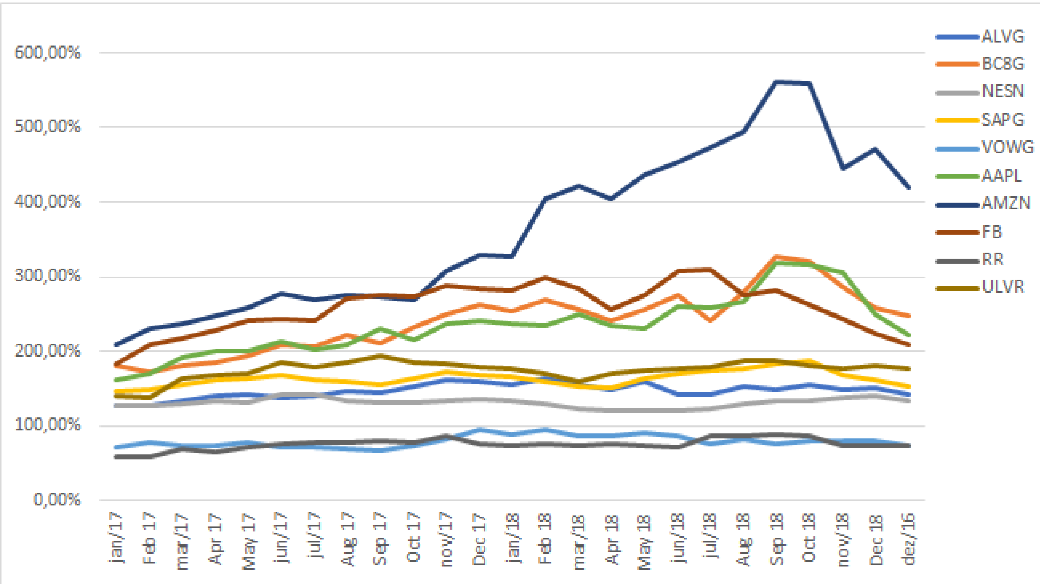


Figura 4.6: Evolução percentual dos preços dos ativos considerando o preço inicial jan-14 como base, no período jan-17 e dez-18.

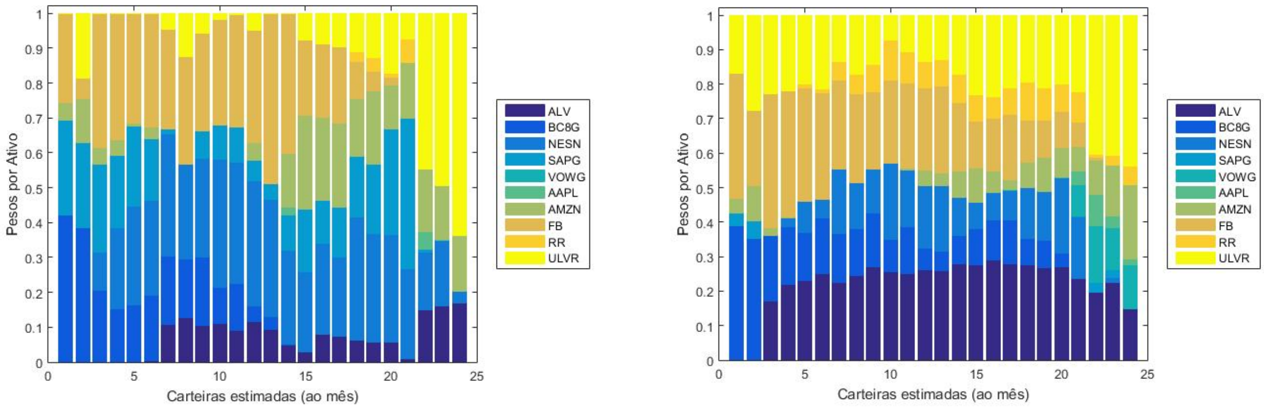
Facilmente se observa que a evolução de cada ativo se mantém muito semelhante, apesar de alguns casos com variações mais acentuadas, com destaque para o ativo AMZN que terminou com 418,74%, ou os ativos BC8G e AAPL, que terminaram com, respetivamente, 248,04% e 220,58%. Em contrapartida, os ativos RR e VOWG mantiveram-se com um preço inferior ao inicial, cerca de 72,60% e 73,87%, respetivamente.

Com a aplicação da estratégia *backtesting* tem-se, em cada carteira, os respetivos pesos, retorno e risco, que foram determinados de acordo com os modelos em estudo, sendo o PMPT definido na Metodologia e o MPT apresentado na Revisão Literária, seguindo sempre as restrições impostas. De tal

[1] No caso do modelo utilizado ser o MPT

forma, a soma dos pesos perfaz a unidade e os pesos determinados são positivos, visto não se considerarem vendas a descoberto.

Assim, encontra-se em 4.7 uma ilustração da alocação feita para cada carteira e consoante o modelo implementado ao longo dos 24 meses em análise.



(a) Modelo PMPT com $\tau = 1,6\%$

(b) Modelo MPT

Figura 4.7: Carteiras determinadas pelo procedimento de *backtesting* para cada modelo.

Como se pode observar, existe uma variação em todos os meses para cada alocação na carteira com base nos dados históricos. Para além disso, cada modelo faz uma alocação diferente para cada ativo durante esse período.

Através da evolução dos dados históricos apresentados na figura 4.1, e que foram a base de previsão desta estimativa, são notórias os maus desempenhos dos ativos RR e VOWG, cujos preços se encontram sempre inferiores aos respetivos preços iniciais, prolongando-se essa tendência até dezembro de 2018, como podemos observar na figura 4.6. Contudo, observe-se que o modelo MPT investe regularmente nestes ativos, talvez pelos valores negativos apresentados nas covariâncias que permitem diminuir o risco total da carteira, mas esquecendo que o retorno final será afetado por esta escolha. Desta forma, o modelo MPT demonstra a falta de consideração para com o risco de perda no investimento, contribuindo negativamente para o retorno final. O interesse do investidor não se prende maioritariamente na diminuição do risco, que para isso não investia, importa que o retorno aumente acompanhando o aumento desse risco. Por outro lado, as melhores evoluções até 2018 foram dos ativos AMZN, AAPL, FB e ULVR, positivamente semelhantes às de 2016, os quais pertencem, na maioria, às carteiras formadas pelos dois modelos.

Na tabela 4.7, estão expostos os valores determinados através do procedimento implementado para o retorno e o risco no período, apenas apresentados para o primeiro e último mês, de acordo com o modelo utilizado, sem esquecer que o modelo PMPT considera a *semideviation* como medida de risco e o modelo MPT a respetiva variância.

Tabela 4.7: Valores para o retorno e risco determinados no início e no final do período de *backtesting*

Modelo	t	Retorno$_t$ (%)	Risco$_t$ (%)
PMPT	1	1,06	3,31
	24	1,02	3,48
MPT	1	1,07	4,14
	24	0,97	3,92

Cada retorno e risco apresentados refletem os valores determinados consoante a carteira simulada para cada mês apresentado, sendo que na prática existem valores para todos os meses do horizonte temporal. Como se observa na tabela 4.7, o retorno determinado no primeiro mês é idêntico em ambos os modelos apresentados, contudo o risco continua a diferir, sendo inferior para o modelo PMPT. Constatou-se que o risco de todas as carteiras construídas foi maioritariamente inferior neste modelo comparativamente ao modelo MPT. Por outro lado, no último mês em análise, o retorno foi superior no modelo PMPT em contraste com o retorno alcançado com o modelo MPT, sendo até inferior a 1, tendo sido constatado que $2/3$ dos retornos de cada carteira foram superiores no modelo PMPT.

Em função dos resultados alcançados com o procedimento de *backtesting*, podemos analisar na figura 4.8 a evolução do capital acumulado considerando a respetiva evolução do retorno de cada carteira construída ao longo do período.

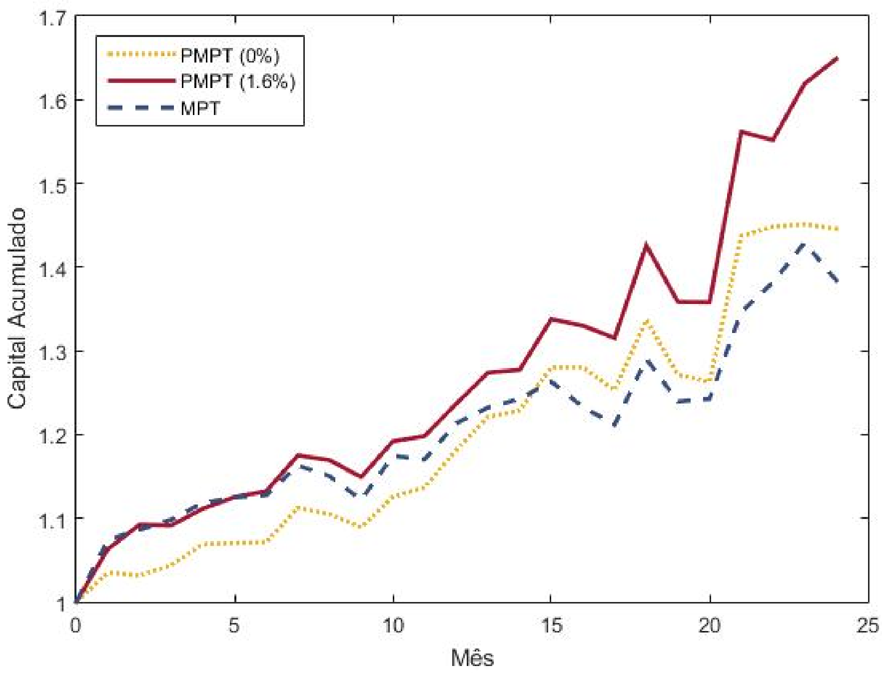


Figura 4.8: Evolução da riqueza acumulada ao longo do período mensal simulado, desde jan-17 a dez-18.

Considerando um investimento inicial de uma unidade em Euros, pode-se observar que, para o modelo PMPT com $\tau = 1,6\%$, houve uma evolução desse capital chegando a atingir $1,65$ € e que, para o modelo MPT, não passou de $1,38$ €. Apesar de como já constatado nos retornos, o modelo MPT ter alguns meses em que supera o modelo PMPT, em nada são significativos e ocorrem poucas vezes. Considerando um $\tau = 0\%$, as diferenças relativamente ao modelo MPT são mais notórias, sendo este retorno alvo inferior à média global utilizada, quer para o retorno final quer para medir o risco do modelo MPT, e que no final do período simulado se alcance igualmente valores superiores no modelo PMPT, de 1,45€. Pelo que, a longo prazo, o modelo PMPT poderá levar a maiores e mais favoráveis retornos.

Concluímos assim que o retorno esperado pretendido tem igualmente influência no investimento, devendo por isso ser bem definido, e que o desempenho do modelo PMPT tende a ser superior à do modelo MPT.

4.4 Multiperíodo

Face ao proposto na Metodologia, apresentam-se os resultados do acompanhamento de uma carteira por dois períodos em que são permitidos ajustes às quantidades investidas em cada ativo, consistindo em compras e vendas desses mesmos ativos entre os diferentes períodos. Desta forma, pretende-se alcançar uma riqueza mínima no final, associada ao estipulado τ, sendo que para cada um dos períodos estarão associados um retorno e risco face à respetiva composição da carteira. Este modelo recursivo irá desenrolar-se de modo a determinarcada quantia monetária pretendida e sem esquecer que o objetivo final consiste na minimização do risco total, caracterizado pela soma ponderada dos riscos em cada período.

Assim, pretende-se um investimento a dois períodos, onde $T = 2$, e procura-se formar e gerir uma carteira ao longo deste horizonte temporal, com os mesmos $n = 10$ ativos disponíveis. Serão necessários os retornos dos ativos para estes períodos, R_i^t, e as respetivas taxas de câmbio S_i^t. O objetivo será o de determinar os valores para w_i^t, em Euros, representativo dos montantes investidos em cada ativo nesse período na carteira, e u_i^1, os valores que expressam as compras e vendas desses ativos definidos após o primeiro período e que serão implementados para o segundo.

Para a sua resolução, será preciso ter em consideração os desvios dos valores de mercados face às expectativas pretendidas. Deste modo, considere-se que cada expectativa fica definida através da média da rentabilidade histórica de cada ativo para o período de janeiro de 2014 a dezembro de 2016, acrescida da unidade, como exposto na tabela 4.8. A matriz de semi-covariâncias já foi apresentada em 4.2. Todos estes valores serão mantidos constantes para os dois períodos de investimento.

Tabela 4.8: Expectativa de retorno por ativo.

i	ALV	BC8G	NESN	SAPG	VOWG	AAPL	AMZN	FB	RR	ULVR
$(1+\zeta_i)$	1,01	1,02	1,01	1,01	-1,00	1,02	1,03	1,02	-1,01	1,01

Desta forma, (1 + ζ_i) corresponde à expectativa de cada ativo que será essencial para definir β_i, com $\beta_i = \left[\left(1+R_i^1\right) - (1+\zeta_i)\right] S_i^1$, $\forall i = \{1, \cdots, 10\}$, valor representativo do ativo correspondente por ordem apresentada.

Considere-se um capital disponível para o investimento de $C_0 = 1$€ e também um determinado retorno final esperado de $\tau = 1,6\%$, correspondendo a determinarum valor igual ou superior a $1,016$€ em T=2. Não são consideradas vendas a descoberto, pelo que as quantias investidas em cada ativo e em qualquer período serão sempre positivas ou nulas. Por outro lado, não são considerados custos de transação nem injeções monetárias ao longo do horizonte temporal, pelo que o auto-financiamento foi considerado, correspondendo a que as compras e vendas em Euros se compensassem.

Em resposta ao pretendido, segue-se na tabela 4.9 os valores investidos em cada ativo e por período do horizonte temporal.

Tabela 4.9: Constituição de cada carteira em função das quantias em Euros investidas em cada ativo, em cada período de tempo.

	ALVG	BC8G	NESN	SAPG	VOWG	AAPL	AMZN	FB	RR	ULVR
$\mathbf{w^{0*}}$	0,252	0,000	0,237	0,000	0,000	0,000	0,000	0,025	0,000	0,485
$\mathbf{w^1}$	0,016	0,111	0,437	0,055	0,000	0,024	0,000	0,205	0,000	0,080
$\mathbf{w^2}$	0,017	0,114	0,445	0,054	0,000	0,036	0,000	0,283	0,000	0,068

As alterações efetuadas ocorrem quando $t = 1$, o que significa que $\mathbf{w^{0*}}$ [2] é a carteira inicial e $\mathbf{w^1}$ corresponde à carteira já com as decisões de ajustamento tomadas e os respetivos ganhos nesse período. Desta forma, segue-se na tabela 4.10 as alterações ocorridas através das políticas de ajustamento, que correspondem aos ajustes efetivos a implementar em cada ativo considerando os desvios aos valores de mercado.

Tabela 4.10: Ajustes efetivamente ocorridos em cada ativo quando $t = 1$.

	ALVG	BC8G	NESN	SAPG	VOWG	AAPL	AMZN	FB	RR	ULVR
$\mathbf{u^1}$	-0,222	0,111	0,198	0,055	0,000	0,024	0,000	0,175	0,000	-0,340

Com isto, espera-se que hajam compras dos ativos BC8G, NESN, SAPG, AAPL e FB, sendo que vão ser vendidas quantias dos ativos ALVG e ULVR, mantendo os restantes, VOWG, AMZN e RR. Contudo, estas políticas de ajustamento $\mathbf{u^1}$ foram determinadas através de uma função parametrizada afim, que depende do desempenho de cada ativo e de acordo com as expectativas pretendidas. Desta forma, estes efeitos surgem com a combinação entre κ^{*1}, na tabela 4.11, e a matriz Θ^1 apresentada em 4.12.

Observando esta tabela, 4.10, em conjunto com a tabela 4.9, são notórias as alterações em $\mathbf{w^1}$ ocorridas com as alterações dos ativos, com o impacto da evolução dos retornos e das taxas de câmbio na carteira no primeiro período. Isto é, foram investidos 0,111€ no ativo BC8G, e 0,055€ no ativo SAPG, sendo que só em $t = 1$ é que o ativo AAPL passou também a integrar a carteira, com o valor de 0,024€. Por outro lado, se subtrairmos os ajustes feitos à carteira em $t = 1$, é possível ter uma ideia da evolução dos ativos que integravam a carteira no início. Ou seja, observando o ativo ALVG já com as vendas, o valor seria superior aos 0,016€ apresentados, o que significa que ainda teve uma ligeira desvalorização no primeiro período, mais precisamente de $-5,40\%$, e de forma semelhante com o ativo NESN. Relativamente ao ativo FB, que sofreu uma desvalorização de $-12,01\%$, teve contudo um aumento do seu valor na carteira e que se deveu à sua taxa de câmbio, pois o EUR/USD diminuiu de 1,3802 para 1,3771, o que levou à obtenção de uma quantia em Euros superior à inicialmente investida. Por outro lado, o ativo ULVR, que valorizou $4,92\%$ teve uma descida no seu valor para além da venda, que se deveu à taxa do EUR/GBP, tendo esta aumentado de 0,8243 para 0,8265, o que influenciou o seu valor, tornando-o inferior quando convertido para Euros.

Relativamente ao 2º período, sem alterações feitas aos ativos da carteira, existiram variações nos seus valores entre $\mathbf{w^1}$ e $\mathbf{w^2}$. De forma semelhante, entre estes períodos, existiu uma valorização favorável nos ativos ALV, BC8G e NESN, aumentando o seu valor entre $t = 1$ e $t = 2$ com, respetivamente, 1,75%, 2,37% e 1,83%, tendência que foi contrariada com uma descida no valor do ativo SAPG, de $-1,23\%$. Por outro lado, o ativo FB teve uma descida de $-0,76\%$ do seu valor em $t = 2$ que, juntamente com a taxa EUR/USD de 1,3867, permitiu alcançar os 0,283€. Relativamente ao ativo ULVR, este teve um

[2] Correspondente aos valores de $\mathbf{w^0}$ convertido para Euros, onde cada entrada $w_i^{0*} = w_i^0 S_i^0$.

retorno de $-0,99\%$, reduzindo o seu valor na carteira e, convertido através da taxa EUR/GBP de 0,8218, sofreu uma diminuição na sua quantia em Euros.

Na tabela 4.11 estão representados os ajustamentos pretendidos em Euros que o investidor iria fazer aos ativos na sua carteira em $t = 1$ se os ganhos alcançados correspondessem exatamente aos valores esperados de cada ativo, isto é, se os valores $(1+\zeta_i)$ fossem exatamente os ganhos de cada ativo nesse momento, $(1+R_i^1)$.

Tabela 4.11: Valores dos ajustamentos em cada ativo quando $t = 1$.

	ALVG	BC8G	NESN	SAPG	VOWG	AAPL	AMZN	FB	RR	ULVR
κ^{*1}	-0,219	0,070	0,173	0,030	-0,017	0,022	-0,007	0,185	0,060	-0,295

Deste modo é possível observar que, num mercado ideal, seriam adquiridas mais quantias dos respetivos ativos: BC8G, NESN, SAPG, AAPL, FB e RR, e vendidas de: ALVG, VOWG, AMZN e ULVR.

Como tal não acontece, a decisão de ajustamento $\mathbf{u^1}$ é corrigida com o auxílio do termo β^1, por definição da equação (3.15), e que recorre à matriz Θ^1 apresentada em 4.12. Cada elemento Θ_{ji}, pertencente à linha j e à coluna i da matriz de reação do mercado, é interpretado como sendo a sensibilidade da ação de controlo do ativo i, u_i^1, em relação aos desvios do retorno do j-ésimo ativo às expectativas, com i e j pertencentes a $\{1,2,\ldots,10\}$.

Tabela 4.12: Matriz de reação aos desvios do mercado.

	Θ^1									
ALVG	0,000	-0,044	-0,021	-0,016	0,002	-0,001	0,018	0,026	0,019	0,017
BC8G	-0,014	0,039	0,018	-0,020	0,030	-0,046	0,013	0,001	-0,008	-0,014
NESN	0,002	-0,003	-0,001	-0,001	0,000	-0,001	0,000	0,001	0,002	0,001
SAPG	0,000	-0,005	-0,003	-0,008	-0,004	0,007	-0,005	0,004	0,004	0,009
VOWG	0,003	-0,002	-0,001	-0,003	-0,002	0,000	0,001	0,000	0,002	0,001
AAPL	-0,006	0,003	0,003	0,008	0,003	0,000	-0,004	0,000	-0,003	-0,003
AMZN	0,074	-0,091	-0,070	-0,156	-0,087	0,027	0,008	-0,005	0,239	0,061
FB	-0,030	-0,094	-0,052	-0,008	-0,005	-0,058	-0,052	0,040	0,108	0,152
RR	0,029	0,063	0,054	0,032	0,030	-0,033	-0,026	-0,017	-0,068	-0,063
ULVR	-0,009	0,022	0,004	0,027	0,013	-0,002	0,016	-0,017	-0,024	-0,029

Segue-se a tabela 4.13 onde estão apresentados os valores determinados com o investimento em cada carteira e período.

Tabela 4.13: Riqueza alcançada em cada período de tempo.

ω^0	ω^1	ω^2
1,00 €	0,928 €	1,016 €

É notório que o ajustamento feito favoreceu a riqueza do investimento, permitindo uma melhor otimização da carteira, tendo igualmente atingido o objetivo final de $1,016$€. Para além do retorno que se alcança, existe um risco inerente a cada carteira. Considerando as respetivas quantias investidas em cada ativo e com o auxílio da matriz de semi-covariâncias, segue-se na tabela 4.14 os riscos incorridos por cada carteira, medidos pela semi-variância em cada um desses períodos.

Tabela 4.14: Semi-variância de cada carteira por período de tempo.

$\Omega^2_{\mathbf{P},0}$	$\Omega^2_{\mathbf{P},1}$	$\Omega^2_{\mathbf{P},2}$
0,095 %	0,073 %	0,087 %

Como se pretende determinaro risco total do investimento, fez-se a média das três semi-variâncias e, de forma a analisar a *semideviation*, a respetiva raiz quadrada, alcançando um valor mínimo do total de risco com o investimento de: $2,92\%$.

Neste capítulo foram observadas as implementações práticas dos modelos pretendidos, deste modo foi possível analisar o comportamento de cada modelo e o que aconteceria caso fosse possível fazer alterações à carteira entre dois períodos consecutivos do investimento. Desta forma, ficam determinados os resultados finais, que serão ainda alvo de comentários na secção seguinte.

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Discussão Final

Desde sempre que o modelo MPT tem sido o método mais utilizado no domínio de investimentos financeiros, com o foco na formação de carteiras ótimas. Com o passar do tempo, surgiram outros interesses perante um investimento, nomeadamente devido à maior aversão aos riscos negativos. Nesse sentido, este modelo apresenta lacunas, já que assume que os retornos dos ativos estão normalmente distribuídos e, consequentemente, não mede efetivamente o risco prejudicial num investimento. Através dos ativos presentes neste trabalho, foi possível observar que é muito comum existirem assimetrias na distribuição dos retornos, o que faz com que este modelo se torne inapropriado. Assim, este método trata as perdas da mesma forma que os ganhos, e com isto o investidor não sabe ao certo se a carteira é efetivamente ótima face aos seus interesses de retorno e risco.

Surgiram assim indicadores alternativos como o Rácio de *Sharpe*, VaR, CVaR e *Downside Risk*. Como observado, o Rácio de *Sharpe* centra-se na previsão e modelação do comportamento dos preços no mercado, tendo em consideração o retorno e risco presentes. Por outro lado, os indicadores VaR e CVaR já têm em consideração a perda a que um investidor está sujeito num investimento, contudo, o VaR e o Rácio de *Sharpe* assumem novamente a normalidade dos retornos, enquanto que o CVaR pode levar a maiores erros na sua implementação, entre outras desvantagens apresentadas. Isto significa que estes três indicadores apresentam problemas semelhantes aos que surgiram com o modelo MPT. A abordagem com base no *Downside Risk* teve os seus problemas, isto é, em tempos demonstrou a dificuldade na sua implementação a nível computacional, bem como na determinação da matriz de semi-covariâncias. Contudo, a tecnologia de hoje já permite aplicar o modelo de forma rápida e eficiente, e Estrada (2008) facilitou o algoritmo para o cálculo da matriz de semi-covariâncias.

Com isto, o principal objetivo deste estudo consistiu no desenvolvimento e na análise do comportamento de uma carteira de investimentos internacional que, através do binómio retorno e risco, procurou estudar as principais particularidades do modelo PMPT, que considera apenas o risco de perda do investimento, e pretendeu-se ainda compará-lo com o tradicional modelo MPT.

Como tal, apresentou-se na Metodologia, o desenvolvimento e a construção detalhados do modelo PMPT, que tem como foco o método *Downside Risk*. Como uma carteira é constituída por diversos ativos, foi necessário ter em consideração a construção de uma matriz de semi-covariâncias, de forma a contabilizar o risco entre ativos. Para tal, recorreu-se ao mencionado método sugerido por Estrada (2008), de forma a ter igualmente em consideração o risco de perda na construção dessa matriz, tendo sempre o foco num retorno mínimo esperado. Como pretendido, a matriz determinada é de natureza simétrica e exógena, o que permitiu ao modelo PMPT ser aplicável da mesma forma que o modelo MPT.

Ainda nesta secção, foi proposta a aplicação do mesmo modelo para dois períodos consecutivos, com o objetivo de analisar o acompanhamento e evolução de uma carteira face ao comportamento dos ativos, onde foi possível fazer compras e vendas entre esses períodos.

Relativamente à influência do grau de assimetria tem-se que, se os dados apresentarem uma assimetria negativa, então o extremo esquerdo pesa mais do que o direito, o que corresponde a que existam mais retornos abaixo da média. Desta forma torna-se útil para a perceção do que acontece no modelo que utiliza o *downside risk*, com o retorno alvo neste caso a corresponder à média do próprio ativo. Assim, permite saber se existem mais retornos distantes do retorno alvo pretendido, e se esses forem negativos, então existem mais perdas. Para mais, quanto menor for esse valor, então maior será o valor de risco, ou seja, da *semideviation*. O mesmo acontece se se escolher um valor para o retorno esperado superior à média, o que ocorreu nalguns casos quando se considerou um $\tau = 1,6\%$. No modelo cuja medida de risco é a variância, ou seja MPT, este indicador não demonstra qualquer interesse, o que se deve ao facto de se estar a medir o risco contabilizando a distância dos retornos à respetiva média, sendo indiferente se são ganhos ou perdas, isto é, uma perda de -3% ou um ganho de 3% representa uma contribuição idêntica para o risco.

Na formação de carteiras a 1 período, o modelo PMPT demonstrou efetuar uma alocação mais adequada entre o binómio retorno/risco face ao modelo MPT, o que se transmite no facto de, para um mesmo retorno esperado, os riscos serem diferentes, tendo sido inferior no primeiro modelo. As fronteiras de eficiência apresentadas refletem o que se acabou de afirmar através da representação das carteiras ótimas formadas por modelo, e que diferem sempre na combinação entre risco e retorno. Desta forma, considera-se que o modelo *Post Modern Portfolio Theory* demonstrou ter um desempenho mais realista e plausível na medição do risco inerente a uma carteira.

Através do *backtesting* foi possível acompanhar e ver as diferentes carteiras formadas por cada modelo. Como tal, constatou-se que a alocação de cada ativo foi diferente em cada carteira, consoante o modelo e mês. Como observado, as escolhas dos ativos foram mais ponderadas no modelo PMPT do que no modelo MPT, permitindo uma melhor combinação entre o binómio retorno/risco. Consequentemente, o retorno e o risco em cada carteira diferiram, sendo este último maioritariamente inferior no modelo PMPT em comparação com o modelo MPT. Através da representação gráfica da evolução da riqueza acumulada no período em análise observou-se que esta foi maioritariamente superior no modelo PMPT. A longo prazo, o modelo PMPT poderá levar a investimentos mais rentáveis e menos arriscados, em contrapartida, o modelo MPT tende a formar uma carteira que possui um ganho positivo limitado e com maior risco negativo.

O modelo PMPT aplicado a 2 períodos foi realizado com base em dados históricos e recorrendo a funções parametrizadas afins através de políticas recursivas, que proporcionaram uma correção dos ganhos com respeito aos desvios do mercado, de forma a alcançar uma solução que embora sub-ótima, se mostrou exata e numericamente eficiente. As conclusões numéricas que se retiraram da sua aplicação consistem no favorecimento que o ajustamento proporcionou na riqueza do investimento, fazendo com que o reajustamento da carteira permitisse atingir o retorno final pretendido. Por outro lado, este ajustamento consentiu que o risco final desta carteira fosse inferior ao risco alcançado na carteira a um só período, para o mesmo retorno esperado, realçando a importância do acompanhamento de um investimento por um prazo mais longo.

Investindo num mercado internacional, existe sempre risco cambial devido às volatilidades das taxas de câmbio. O presente trabalho teve como moeda base o Euro, sendo que houve as respetivas conversões de USD e GBP. Como observado na evolução das taxas de câmbio respetivas, existiu uma variação ao longo dos diferentes meses, com impacto no investimento, destacando-se a valorização do EUR face à GBP e do USD face ao EUR. Desta forma, as rentabilidades das carteiras ótimas sofreram desta influência, em particular no modelo multiperíodo, onde houve a necessidade de analisar o que ocorreria com uma mudança do valor da taxa de câmbio.

Em suma, o modelo PMPT apresentou implicações práticas ao investidor, sendo transparente a análise ao risco negativo e respetiva formação de carteiras ótimas ao investimento, conseguindo facilmente perceber a sua exposição ao risco. Desta forma, os investidores podem minimizar simultaneamente o risco de perda e alcançar os retornos esperados ou superiores, mesmo com uma carteira internacional.

5.2 Limitações do Estudo e Tópicos para Investigação Futura

Relativamente ao desenvolvimento de uma carteira de investimentos internacional, este trabalho procurou demonstrar a maior flexibilidade e melhor desempenho da carteira aquando da utilização da medida de risco *semideviation*. Para finalizar, pretende-se apresentar algumas sugestões para uma futura investigação sobre o tema. Para começar, é preciso ter em consideração que o valor atribuído ao retorno mínimo esperado τ é importante, pois influencia a formação das carteiras.

No mercado real, as cotações dos ativos são apresentadas diariamente e de uma forma contínua, sendo volátil o preço diário dos mesmos. Contudo, não se teve em consideração os valores diários neste trabalho, mais precisamente, recorreu-se aos dados mensais para o período pretendido, (que corresponde a uma média dos dados diários para cada mês). Pelo que seria interessante analisar num contexto diário, tornando-se mais realista e verosímil a aplicação do modelo.

No modelo PMPT, o risco é medido através da *semideviation* e esta caracteriza-se por analisar o risco prejudicial ou de perda num investimento. Neste mesmo modelo, verificou-se que a matriz representativa das interações entre os ativos da carteira, isto é, a matriz de semi-covariâncias, se apresenta sempre positiva, de acordo com o modo como foi determinada e que se acredita ser o mais adequado. Desta forma, surge uma incerteza em relação à presença da diversificação. Ou seja, a diversificação é ainda hoje considerada como uma forma de proteção contra eventuais desvalorizações dos ativos, traduzindo-se numa diminuição do risco da carteira. Mas, dadas as circunstâncias, até que ponto é que a diversificação dos ativos numa carteira continua a ser "vantajosa" para o risco? Como tal, considera-se um tema que pode ser analisado em maior detalhe, verificando os impactos que as diferentes medidas de risco dos dois modelos apresentados têm na diversificação, MPT e PMPT.

A construção do modelo multiperíodo foi apresentada apenas para dois períodos, mas poder-se-ia generalizar para n períodos de tempo. Assim, sugere-se desenvolver um modelo multiperíodo mais alargado, podendo recorrer de igual modo à formulação em *closed-loop* utilizando as equações lineares recursivas, que são muito eficientes apesar da sua natureza sub-ótima. Com isto, seria interessante fazer a comparação dos resultados determinados através deste procedimento generalizado com os resultados apresentados na estratégia do *backtesting*. Desta forma seria possível observar os reajustamentos da carteira e, mais ainda, analisar as compras e vendas que teriam de ser efetuadas. Por outro lado, no modelo a dois períodos, considerou-se uma matriz de semi-covariâncias constante, pelo que seria também interessante reformular o mesmo problema de forma a que se tornasse móvel, de forma semelhante à que foi apresentada no desenvolvimento do *backtesting*.

Por fim, também não foram considerados custos de transação, entre outros, e que poderiam ter alterado as conclusões e custos finais. Por isso, seria interessante adaptar o modelo de forma a considerar estes custos, tornando-o mais adequado à realidade das transações internacionais.

Bibliografia

Adler, Michael e Bernard Dumas (1984). «Exposure to Currency Risk: Definition and Measurement». Em: *Financial Management* 13.2, pp. 41–50.

Bawa, Vijay S. (1975). «Optimal Rules For Ordering Uncertain Prospects». Em: *Journal of Financial Economics* 2.1, pp. 95–121.

Bawa, Vijay S. e Eric Lindenberg (1977). «Capital Market Equilibrium In A Mean-Lower Partial Moment Framework». Em: *Journal of Financial Economics* 5.2, pp. 189–200.

Brada, Josef C. e José A. Méndez (1988). «Exchange Rate Risk, Exchange Rate Regime and the Volume of International Trade». Em: *Kyklos* 41.2, pp. 263–280.

Burda, Michael e Charles Wyplosz (2011). *Macroeconomia - Uma Visão Europeia*. Portugal: Verlag Dashofer.

Calafiore, Giuseppe Carlo (2008). «Multi-period portfolio optimization with linear control policies». Em: *Automatica* 44.10, pp. 2463–2473.

— (2009). «An affine control method for optimal dynamic asset allocation with transaction costs». Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.4, pp. 2254–2274.

Calafiore, Giuseppe Carlo e Marco C. Campi (2005). «On Two-Stage Portfolio Allocation Problems with Affine Recourse». Em: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 8042–8047.

Carlos Pinho Ricardo Valente, Mara Madaleno e Elisabete Vieira (2011). *Risco Financeiro - Medida e Gestão*. Lisboa: Edições Sílabo.

Cushman, David O. (1985). «Real Exchange Rate Risk, Expectations, and the Level of Direct Investment». Em: *The Review of Economics and Statistics* 67.2, pp. 297–308.

Dantzig, George B. e Gerd Infanger (1993). «Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization». Em: *Annals of Operations Research* 45.1-4, pp. 59–76.

Duffie, Darrell e Jun Pan (1997). «An Overview of Value at Risk». Em: *The Journal of Derivatives* 4.3, pp. 7–49.

Estrada, Javier (2006). «Downside Risk in Practice». Em: *Journal of Applied Corporate Finance* 18, pp. 117–125.

— (2007). «“Mean-Semivariance Behavior: Downside Risk and Capital Asset Pricing». Em: *International Review of Economics and Finance* 16, pp. 169–185.

— (2008). «Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach». Em: *Journal of Applied Finance* 18.1, pp. 57–72.

Eun, Cheol S. e Bruce G. Resnick (1988). «Exchange Rate Uncertainty, Forwatd Contracts, and International Portfolio Selection». Em: *The Journal of Finance* 43.1, pp. 197–215.

Grubel, H. (1968). «Internationally Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows». Em: *The American Economic Review* 58.5, pp. 1299–1314.

Hany A. Shawky, Rolf Kuenzel e Azmi D. Mikhail (1997). ≪International Portfolio Diversification: A Synthesis And An Update≫. Em: *Journal of International Financial Markets* 7.4, pp. 303–327.

Hardin, William G. e Ping. Cheng (2005). ≪Farmland in a Mixed-Asset Portfolio: A Mean-Semivariance Approach≫. Em: *Journal of Real Estate Portfolio Management* 187.2, pp. 187–195.

Harlow, W. V. (1991). ≪Asset Allocation in a Downside-Risk Framework≫. Em: *Financial Analysts Journal* 47.5, pp. 28–40.

Hauser, Shmuel e Azriel Levy (1991). ≪Effect Of Exchange Rate And Interest Rate Risk On International Fixed-Income Portfolios≫. Em: *Journal of Economics and Business* 47.4, pp. 375–388.

Henk Grootveld, Winfried Hallerbach (1999). ≪Variance vs downside risk: Is there really that much difference?≫ Em: *European Journal of Operational Research* 114.2, pp. 304–319.

Jorion, Philippe (1985). ≪International Portfolio Diversification with Estimation Risk≫. Em: *The Journal of Business* 58.3, pp. 259–278.

Korteweg, Pieter (1980). *Exchange-rate policy, monetary policy, and real exchange-rate variability*. International Finance Section, Dept. of Economics, Princeton University.

Kroencke, Tim-Alexander e Felix Schindler (2010). ≪Downside risk optimization in securitized real estate markets≫. Em: *Journal of Property Investment and Finance* 28.6, pp. 434–453.

Kuhn, Daniel et al. (2009). ≪Dynamic Mean-Variance Portfolio Analysis under Model Risk≫. Em: *The journal of computational finance* 12.4, pp. 91–115. URL: https://www.alexandria.unisg.ch/60648/.

Levy, Haim e Marshall Sarnat (1970). ≪International Diversification of Investment Portfolios≫. Em: *The American Economic Review* 60.4, pp. 668–675.

— (1978). ≪Exchange Rate Risk and the Optimal Diversification of Foreign Currencies Holdings≫. Em: *Journal of Money, Credit and Banking* 10.4, pp. 453–463.

Linsmeier, Thomas J. e Neil D. Pearson (2000). ≪Value at Risk≫. Em: *Financial Analysts Journal* 56.2, pp. 47–67.

Löfberg, J. (2004). ≪YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB≫. Em: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan.

Markowitz, Harry (1952). ≪Portfolio Selection≫. Em: *The Journal Finance* 7.1, pp. 77–91.

— (1959). *Portfolio Selection: Efficiente Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.

— (1991). ≪Foundations of Portfolio Theory≫. Em: *The Journal Finance* 46.2, pp. 469–477.

McKenzie, Michael D. (1999). ≪The Impact of Exchange Rate Volatility on International Trade Flows≫. Em: *Journal of Economic Surveys* 13.1, pp. 71–106.

Nawrocki, David (1999). ≪A Brief History of Downside Risk Measures≫. Em: *The Journal of Investing* 8.3, pp. 9–25.

Paul R. Krugman, Marc Melitz e Maurice Obstfeld (2018). *International Finance: Theory And Policy, Global Edition*. Pearson Education Limited.

Rockafellar, R. Tyrrel e Stanislay Uryasey (2000). ≪Optimization of Conditional Value-at-Risk≫. Em: *Journal of Risk* 2.3, pp. 21–47.

Rom, Brian M. e Kathleen W. Ferguson (1993). ≪Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age≫. Em: *The Journal of Investing* 2.4, pp. 27–33.

Roy, A. D. (1952). ≪Safety First and The Holding of Assets≫. Em: *Econometrica* 20.3, pp. 431–449.

Sergey Sarykalin, Gaia Serraino e Stan Uryasey (2008). *Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*.

Shamah, Shani (2003). *A Foreign Exchange Primer*. England: John Wiley & Sons.

Sharpe, William F. (1964). ≪Capital Asset Prices: A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions of Risk≫. Em: *The Journal Finance* 19.3, pp. 425–442.

Solnik, Bruno H. (1974). ≪Why Not Diversify Internationally Rather Than Domestically?≫ Em: *Financial Analysts Journal* 51.1, pp. 48–54.

Vigdis Boasson, Emil Boasson e Zhao Zhou (2011). ≪Portfolio Optimization in a mean-semivariance framework≫. Em: *Investment Management and Financial Innovations* 8.3, pp. 58–68.

Wihlborg, Clas (1978). *Currency Risks In International Financial Markets*. International Finance Section, Dept. of Economics, Princeton University: Princeton, N.J.