ABSTRACT

This Master thesis focus on two papers on the sum of matroids, chosen for their relevance on the subject. On one hand, for showing interesting results on the subject, using almost nothing but the basic concepts of the topic. On the other hand, for bringing comprehension to the importance and centrality of the other theory concepts and propositions.

In practice, having that on mind, we start presenting the fundamentals of Matroids Theory and of the sum of matroids operation; also presenting integer partitions, since they are used on the first paper.

With this background, we then exhibit both papers in the most simple and clear way found. Namely, in the first paper, on the μ-colorings of a matroid, we present an easier proof of each of the three main results involved. In the second one, on the notion of transversals of the sum of matroids, we also try to exhibit it in a clear way, showing in detail all the computation required, but above all, highlighting the important steps involved.

Finally, we analyse the understanding brought by the two papers to the field of the sum of matroids, studying the consequences of their results, the questions they rise and steps taken forward towards their resolution.

Along the way, we also approach one or two different Mathematics fields that this work naturally led us into. This is the case of the Linear Algebra conclusions obtained, as well as of one or two remarks on computation capacity.

Keywords:
Matroid, Sum of Matroids, coloring, transversal, Integers Partition.

SUMÁRIO

A tese aqui apresentada incide em dois artigos sobre a união de matroides, nos quais se debruça pela sua relevância no tema. Num sentido, por apresentarem resultados interessantes neste área, partindo quase exclusivamente dos conhecimentos mais elementares do tópico. No sentido inverso, por esses resultados permitirem uma melhor compreensão da importância e centralidade dos restantes conceitos e proposições da teoria.

Concretamente, tendo presente a ideia acima, começa por se apresentar os fundamentos da teoria de matroides e a operação de união de matroides. Introduz-se também o tópico de partições de inteiros, utilizado no primeiro dos artigos apresentados.

Partindo destes conhecimentos básicos, expõe-se de seguida cada um dos artigos, da forma mais simples e clara encontrada. Nomeadamente, no primeiro artigo, sobre colorações de um matroide, apresenta-se uma demonstração mais simples de cada um dos três resultados fundamentais envolvidos. No segundo artigo sobre transversais da união de matroides, faz-se também uma apresentação que se espera mais clara, expondo detalhadamente todos os cálculo que justificam os raciocínios, mas realçando sempre as ideias realmente importantes envolvidas.

Por fim faz-se uma análise da compreensão que os artigos trazem ao tema da união de matroides, estudando consequências dos seus resultados, questões que levantam e avanços na sua resolução.

Aborda-se ainda uma ou outra área diferente da matemática que os desenvolvimentos apresentados naturalmente interpelem. Tal é o caso de conclusões de Álgebra Linear obtidas, ou de uma ou outra referência de ordem computacional.

Palavras-Chave:
Matroide, União de Matroides, coloração, transversal, Partição de Inteiros.

Conteúdo

Prefácio

Para a realização desta tese de Mestrado estudei, sobre a orientação do professor José Perdigão Dias da Silva, a união de Matroides e mais concretamente, dois artigos do professor e co-autores sobre este assunto, os quais irei aqui expôr.

Não pretendendo este trabalho ser uma apresentação exaustiva sobre a União de Matroides, escolheu-se trabalhar estes artigos pela sua grande relevância no tema e por envolverem muitos dos conceitos e ideias fundamentais da teoria de matroides, bem como de outros temas da Combinatória.

Tais assuntos serão por isso objecto da Introdução, na qual mostrarei as bases da Teoria de Matroides, antecedida de uma muito breve referência a duas estruturas cujo estudo lhe está relacionado, nomeadamente espaços vectoriais e grafos. Serão ainda apresentados resultados de partições de inteiros, porque utilizados no 1º dos artigos referidos.

O Capítulo 1 apresentará a união de matroides.

O Capítulo 2 o primeiro artigo referido.

O Capítulo 3 o segundo artigo mencionado.

Quero também com este trabalho e dada a direcção aqui tomada, agradecer ao professor Perdigão, com quem tive a sorte de aprender tanto ou mais sobre a vida, como sobre matemática.[1]

Por fim, dedicar as restantes linhas a todos aqueles, a quem o cansaço ou tristeza neste ano de trabalho possa ter escondido em mim, a alegria de viver e amar.[2]

[1] Claro que tal frase, como está, não pode expressar para o leitor quantidade alguma. Espero porém, que uma boa apresentação que transpareça a compreensão dos resultados dos artigos consiga traduzir a medida referida

[2] " - O que é preciso para saber a_mar? - Passar muito tempo lá dentro"

Introdução

Os resultado apresentados nesta introdução são fundamentais nas respectivas áreas, podendo por isso ser encontrados em quase qualquer livro sobre as mesmas. Assim e não se pretendendo neste trabalho divagar sobre estes temas, os resultados serão na sua grande maioria aqui referidos sem demonstração, remetendo-se o leitor interessado para bibliografia indicada no princípio de cada secção.

0.1 Espaços Vectoriais e Grafos como inspiração

Como iremos constatar quando estudarmos matroides, estes estão intimamente relacionados quer com espaços vectoriais, quer com grafos.

Por esse motivo, apresenta-se aqui uma referência muito breve sobre estas estruturas, como inspiração para uma melhor compreensão dos matroides.

Espaços Vectoriais

Demonstrações dos resultados enunciados nesta secção podem ser consultadas em [La] da bibliografia.

Definição. *Dado V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dizemos que um sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vectores de V é <u>linearmente independente</u> (l.i.) se*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Caso contrário, dizemos que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é <u>linearmente dependente</u> (l.d.).

(Dizemos que um vector v é combinação linear de $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$).

No estudo da independência linear de sistemas de vectores (ver [La]):

- convenciona-se que $\emptyset$ é linearmente independente;
- verifica-se, como consequência trivial da definição de sistema linearmente independente, que

$$\forall X, Y \subseteq V, \quad (Y \text{ l.i. e } X \subseteq Y) \Rightarrow X \text{ é l.i.};$$

- prova-se, como consequência directa do teorema de Steinitz, que

$$\forall X, Y \subseteq V, \quad (Y \text{ l.i., } |X| < |Y|) \Rightarrow \exists y \in Y \backslash X \text{ tal que } X \cup \{y\} \text{ é l.i. .}$$

Definição. *Chama-se base de um espaço vectorial a um sistema de vectores linearmente independente maximal.*

Prova-se, pelo teorema de Steinitz, que se V admite uma base finita (dizemos que V é finitamente gerado), então todas as bases de V são finitas e têm o mesmo cardinal.

Definição. *Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definimos espaço das colunas da matriz A, como sendo o espaço vectorial gerado pelas (i.e. o conjunto de todas as combinações lineares das) colunas $C_1, \ldots, C_n$ de A, entendidas como vectores de $\mathbb{K}^m$.*

Definimos $rank(A) = \max_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}}\{|S| : (C_i)_{i\in S} \text{ é l.i.}\}$ (ou seja, $rank(A)$ é o cardinal de qualquer base do espaço vectorial gerado pelas colunas de A, entendidas como vectores de $\mathbb{K}^m$).

Grafos

Demonstrações dos resultados enunciados nesta secção podem ser consultadas em [Bo] da bibliografia.

Definição. *Um grafo G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto finito e $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V\}$.*

Aos elementos de V chamamos vértices de G. Denotamos o conjunto dos vértices de um grafo G por $V(G)$.

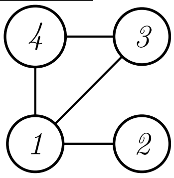
Aos elementos de E chamamos arestas de G. Denotamos o conjunto das arestas de um grafo G por $E(G)$.

Dois vértices x e y dizem-se adjacentes se $\{x, y\} \in E(G)$.

Duas arestas distintas dizem-se também adjacentes se têm um vértice em comum.

Representação. *Como os nomes sugerem, costuma-se representar um grafo por um conjunto de pontos (os vértices do grafo) unidos por linhas (as arestas do grafo).*

Exemplo.



representa o grafo $(\{1,2,3,4\},\ \ \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\})$

Definição. *Um percurso (em inglês* walk*) de G é uma sucessão*

$$W = x_0\alpha_1 x_1\alpha_2 \ldots x_{l-1}\alpha_l x_l,$$

onde $x_0, \ldots, x_l \in V(G)$ e $\alpha_i = \{x_{i-1}, x_i\} \in E(G), \forall i \in \{1, \ldots, l\}$. Dizemos que l é o comprimento do percurso W, que denotamos por $l(W)$.

Um ciclo de G é um percurso $x_0\alpha_1 x_1\alpha_2 \ldots x_{l-1}\alpha_l x_l$ satisfazendo:

1. $l(W) \geq 3$
2. $x_0 = x_l$
3. $(\,i \neq j$ *e* $(i,j) \neq (0,l)\,) \Rightarrow x_i \neq x_j$

Um Circuito de G é um percurso $x_0\alpha_1 x_1\alpha_2 \ldots x_{l-1}\alpha_l x_l$ satisfazendo:

1. $l(W) \geq 3$
2. $x_0 = x_l$
3. $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j,\ \forall i,j \in \{1, \ldots, l\}$

Um grafo G é um grafo bipartido, com classes de vértices V_1 e V_2, se $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e toda a aresta de G liga um vértice de V_1 a um vértice de V_2 (isto é, é do tipo $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$).

0.2 Teoria de Matroides

Demonstrações dos resultados enunciados nesta secção podem ser consultadas em [Ox] ou [We] da bibliografia.

A teoria de matroides trata do estudo das propriedades de independência de uma forma abstracta.

Surgiu pela primeira vez nos anos 30.

Por um lado, quando Whitney, em 1935, no seu artigo "sobre as propriedades abstractas da dependência linear", estuda em simultâneo as propriedades de independência de matrizes e grafos.

O próprio termo matroide então criado tem a sua origem na palavra matriz. Muita da terminologia como teremos oportunidade de verificar é também originária se não a mesma da utilizada nos grafos ou no estudo das matrizes.

Por outro lado em 1937, num livro chamado "Álgebra Moderna", Van der Warden aborda a independência linear e a independência algébrica de uma forma abstracta.

(Vários trabalhos se seguiram nessa mesma década e desde então muito se avançou sobre o assunto que é hoje teoria fundamental na combinatória)

Podemos pois apresentar os matroides como a generalização daquelas estruturas a que queremos chamar independentes em matemática (de facto, serão conjunto de independentes de um matroide tanto os subconjuntos de vectores linearmente independentes de um conjunto finito de vectores dado, bem como conjuntos de elementos algebricamente independentes sobre um corpo $\mathbb{F}$, ou ainda os conjuntos independentes afins de vectores de $\mathbb{R}^n$, etc..)

Podemos também pensá-los, de uma forma talvez mais sugestiva para quem estuda matemática, como a topologia da Álgebra Linear. No sentido em que, assim como na topologia se faz uma generalização de estudo da Análise Matemática, sem a noção de distância, definindo apenas aqueles conjuntos que diremos serem os abertos dum dado espaço, também a teoria de matroides permite tratar a Álgebra Linear duma forma axiomática sem a parte algébrica da estrutura, definindo antes e apenas, aqueles conjuntos que diremos serem os independentes de um dado conjunto finito.

Note-se a diferença no que foi dito que os matroides tratam apenas de conjuntos finitos (e logo que a teoria só permite estudar totalmente a independência linear dum espaço vectorial, como um todo, no caso particular de espaços vectoriais finitos). Podem no entanto definir-se ainda matroides infinitos, assunto que não será porém aqui tratado...

Definição de Matroide. Conjuntos independentes e Bases.

Definição. *Seja S um conjunto finito e $\mathscr{I}$ um conjunto de partes de S, satisfazendo:*

I1) $\emptyset \in \mathscr{I}$*;*

I2) Se $I \in \mathscr{I}$ *e* $J \subseteq I$*, então* $J \in \mathscr{I}$*;*

I3) Dados $I, J \in \mathscr{I}$*, se* $|I| < |J|$*, então existe* $s \in J \backslash I$ *tal que* $I \cup \{s\} \in \mathscr{I}$*;*

Dizemos então que o par $(S, \mathscr{I})$ é um matroide sobre S.

Terminologia e Notação. *Dado um conjunto S, denotamos o conjunto das partes de S por 2^S.*

Seja $M = (S, \mathscr{I})$ um matroide.

Os elementos de $\mathscr{I}$ dizem-se os independentes do matroide M.

Os elementos de $2^S \setminus \mathscr{I}$ dizem-se os dependentes do matroide M.

Denotamos por $S(M)$ o conjunto subjacente S sobre o qual um matroide $M = (S, \mathscr{I})$ está definido.

Denotamos por $\mathscr{I}(N)$ o conjunto dos independentes de um dado matroide N.

Exemplos.

- *Um exemplo clássico de matroide, que como se referiu está na origem do termo, é o chamado matroide vectorial de uma matriz A: Seja $S = \{1, \ldots, n\}$ o conjunto de índices das colunas de uma matriz A, do tipo $m \times n$, sobre um corpo $\mathbb{F}$. Tomemos $\mathscr{I}$ o conjunto dos subconjuntos de S tais que as colunas por eles indexadas formam, quando vistas como vectores do espaço vectorial $\mathbb{F}^m$, sistemas de vectores linearmente independentes.*

  Então $(S, \mathscr{I})$ é um matroide;

  Pois $\mathscr{I}$ satisfaz $I1)$, $I2)$ e $I3)$, conforme introdução sobre espaços vectoriais.

- *Alternativamente, dados $\mathbb{F}$ espaço vectorial e $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uma família de vectores de $\mathbb{F}$, define-se o matroide vectorial associado à família de vectores $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, que denotamos por $\mathbb{L}in(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, como sendo o matroide $(\{1, \ldots, n\}, \mathscr{I})$, com*

$$\mathscr{I} = \{J \subseteq \{1, \ldots, n\} : (v_j)_{j \in J} \text{é linearmente independente}\}$$

- *$M = (S, 2^S)$ é um matroide, chamado o matroide livre sobre S.*

  dem. Claramente $\mathscr{I}(M) = 2^S$ verifica $I1)$, $I2)$ e $I3)$.

Todos os sujconjuntos de S são independentes no matroide livre.

- *Seja $\mathscr{I}_k = \{X \subseteq S : |X| \leq k\}$.*

  Temos que $U_k = (S, \mathscr{I}_k)$ é um matroide sobre S, designado por matroide uniforme de rank k.

  dem. Uma vez mais, verifica-se facilmente que $\mathscr{I}_k$ satisfaz $I1$), $I2$) e $I3$).

- *Dado um matroide M sobre S e $S' \subseteq S$, temos que $\mathscr{I}(M(S')) = \{J \in \mathscr{I}(M) : J \subseteq S'\}$ é conjunto de independentes de um matroide que denotamos por $M(S')$. Designamo-lo por restrição de M a S'.*

Definição. *Seja $M = (S, \mathscr{I})$ um matroide. Um subconjunto $B \subseteq S$ diz-se uma base de M se:*

i) $B \in \mathscr{I}(M)$;

ii) B *é maximal pela inclusão em* $\mathscr{I}(M)$.

Denotamos por $\mathscr{B}(M)$ o conjunto das bases de M.

Verifica-se que as bases de um matroide têm todas a mesma cardinalidade

Teorema. *Sejam B_1,B_2 bases de um matroide M. Então $|B_1| = |B_2|$.*

dem. Sejam B_1,B_2 bases de um matroide M (quaisquer).
Então, por definição de base $B_1, B_2 \in \mathscr{I}(M)$.
Suponhamos com vista a um absurdo que $|B_1| < |B_2|$.
Consideremos por $I1$), $b \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{b\} \in \mathscr{I}(M)$. Vem então que B_1 não é independente maximal, o que contradiz B_1 ser base de M.
Logo $|B_1| \geq |B_2|$.
Analogamente vem que $|B_2| \geq |B_1|$.
$\therefore |B_2| = |B_1|$.

Teorema. *Seja M um matroide.*
Tem-se que:

B-1) $\mathscr{B}(M) \neq \emptyset$;

B-2) *Dadas $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(M)$ e $x \in B_1 \setminus B_2$, existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}(M)$.*

<u>dem</u>. [B1)] Como $\emptyset \in \mathscr{I}(M)$ (por $I1$)), temos então, por definição de bases como conjuntos independentes maximais, que $\mathscr{B}(M)$ é não vazio.

[B2)] Sejam $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(M)$ (quaisquer). Então, pelo teorema anterior, $|B_1| = |B_2|$.

Seja $x \in B_1 \setminus B_2$ (qualquer).

Como $B_1 \setminus \{x\} \subseteq B_1 \in \mathscr{I}(M)$, então por $I2$) da def. de matroide $B_1 \setminus \{x\} \in \mathscr{I}(M)$.

Dado que $|B_1 \setminus \{x\}| = |B_1| - 1 = |B_2| - 1 < |B_2|$, por I3) da def. de matroide, consideremos $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ tal que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{I}(M)$ (note-se que, como $x \notin B_2$, $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\}) = B_2 \setminus B_1$).

Mas $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$, pelo que B_1 tem que ser independente maximal (caso contrário teriamos uma base contendo-o de cardinal maior que $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$, o que seria absurdo pelo teorema anterior).

Logo $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B}(M)$.

OBSERVAÇÃO: $B2$) é chamado o axioma da troca das bases.

Prova-se mesmo que estas propriedades $B1$) e $B2$) satisfeitas pelas bases de um matroide M, definem essas mesmas bases (definindo um único matroide que admite como bases exactamente esses conjuntos e logo os seus independentes por estes não serem mais que os subconjuntos de S contidos nalguma base!).

Teorema. *Seja S um conjunto finito e $\mathscr{B}$ um conjunto de subcojuntos de S satisfazendo $B1$) e $B2$). Então $\mathscr{B}$ é conjunto de bases de um matroide $M = (S, \mathscr{I})$, com $\mathscr{I} = \{X \subseteq S : X \subseteq B$, para algum $B \in \mathscr{B}\}$.*

<u>dem</u>. Não será aqui demonstrado, por não ser sequer utilizado no resto deste trabalho, podendo porém ser consultado na bibliografia deste capítulo.

OBSERVAÇÃO: Pode-se por isso definir matroide a partir da noção de base, pelas propriedades B1) e B2), no lugar da definição apresentada.

Uma das propriedades interessantes dos matroides é a de poderem ser definidos de muitas maneiras diferentes, das quais referirei aqui apenas algumas e sem demonstração, quando ligadas aos conceitos apresentados. Por exemplo, podemos definir os matroides a partir dos seus conjuntos dependentes minimais, ou a partir da função que a cada subconjunto do conjunto subjacente do matroide faz corresponder o cardinal dum conjunto independente maximal nele contido, etc... Estes conceitos, que por si só têm grande relevância nos matroides, são a seguir apresentados.

Uma última definição relacionada com a noção de base e que utilizaremos no segundo artigo apresentado é a de istmo de um matroide.

Definição. *Dado M um matroide sobre um conjunto finito S dizemos que $x \in S$ é um* <u>*istmo*</u> *de M se x pertence a todas as bases de M.*

Função de rank de um Matroide

Num espaço vectorial finitamente gerado por n vectores, sabemos que a dimensão (i.e. o cardinal dum sistema linearmente independente maximal) do espaço vectorial gerado por um subconjunto X desses n vectores, é dada pela característica ou "rank" da matriz formada pelos elementos de X, entendidos como vectores coluna.

Definição. *Seja $M = (S, \mathscr{I})$ um matroide.*

Dado $X \subseteq S$ (qualquer), chama-se <u>*rank de X*</u> *e denotamos por $\rho_M(X)$, o inteiro não negativo $\rho_M(X) = \max\{|I| : \underbrace{I \subseteq X \ e \ I \in \mathscr{I}(M)}_{I \in 2^X \cap \mathscr{I}}\}$.*

Define-se ainda <u>*função de rank,*</u> *como sendo a aplicação $\rho : 2^S \to \mathbb{Z}$ definida, para $X \subseteq S$, por*

$$\rho(X) = \max\{|I| : I \subseteq X \ e \ I \in \mathscr{I}(M)\}$$

(NOTA: Trata-se de um abuso de notação e de terminologia que não trará no entanto qualquer inconveniente)

Chamamos <u>*rank de M*</u> *a rank de $S(M)$, ou seja a $\rho_M(S)$.*

Verifica-se que a função de rank satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição. *R-1)* $0 \leq \rho_M(X) \leq |X|, \ \forall X \subseteq S$;

R-2) $X \subseteq Y \subseteq S \Rightarrow \rho_M(X) \leq \rho_M(Y)$;

R-3) Dados $X, Y \subseteq S$, $\rho_M(X \cup Y) + \rho_M(X \cap Y) \leq \rho_M(X) + \rho_M(Y)$ *(propriedade que designamos por submodularidade da função de rank).*

<u>**dem**</u>. $R1$) e $R2$) saem quase directamente da definição.

A demonstração de R3) pode ser consultada na bibliografia indicada no princípio da secção.

Prova-se mesmo que estas propriedades definem a função de rank de um matroide (definindo um único matroide que admite esta como função de rank e logo os seus independentes por estes não serem mais que os sobconjuntos $X \subseteq S$ tais que $\rho_M(X) = |X|!$), como se enuncia no seguinte teorema:

Teorema. *Seja S um conjunto finito e $f : 2^S \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo as propriedades $R1$), $R2$) e $R3$).*

Então, considerando $\mathscr{I} = \{X \subseteq S : f(X) = |X|\}$ temos que $(S, \mathscr{I})$ é um matroide, com função de rank f.

<u>**dem**</u>**.** Ver na bibliografia da secção.

Definição. *Seja $M = (S, \mathscr{I})$ um matroide, $X \subseteq S$.*
Definimos <u>fecho de X em M</u> como sendo o conjunto

$$\overline{X}^M = \{x \in S : \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X)\ \}$$

Circuitos

Seja M um matroide sobre um conjunto finito S.

Definição. *Chamamos <u>circuito</u> de M a um conjunto dependente minimal de M, pela relação de inclusão.*
Notação: Denotamos o conjunto dos circuitos de M por $\mathscr{C}(M)$.

Propriedades:

1. Se $C \in \mathscr{C}(M)$, então $C \setminus \{x\} \in \mathscr{I}(M)$ (por definição de circuito como dependente minimal);

2. $\rho_M(C) = |C| - 1$ (por 1. e porque o próprio circuito não é independente);

3. $\forall C \in \mathscr{C}(M), \quad |C| \leq \rho_M(S) + 1$ (pois por 2., $|C| = \rho_M(C) + 1 \leq \rho_M(S) + 1$);

4. $\emptyset \notin \mathscr{C}(M)$ (pois, por $I1$), $\emptyset \in \mathscr{I}(M)$);

5. Se $C_1, C_2 \in \mathscr{C}(M), \quad C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$ (por definição de circuito como conjunto dependente minimal);

6. Se $C_1, C_2 \in \mathscr{C}(M)$, $C_1 \neq C_2$ e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe $C_3 \in \mathscr{C}(M)$, tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. <u>dem.</u> Pode ser consultada na bibliografia da secção.

As propriedades 4. 5. e 6. definem os circuitos de um matroide (e logo um único matroide já que dada $\mathscr{C}(M)$ família de circuitos de um matroide, $I \in \mathscr{I}(M) \Leftrightarrow I \not\supseteq C, \forall C \in \mathscr{C}(M)$).

Teorema. *Seja S um conjunto finito.*
Seja $\mathscr{C} \subseteq 2^S$ satisfazendo as propriedades:
4) $\emptyset \notin \mathscr{C}$;
5) $\forall C_1, C_2 \in \mathscr{C},\ C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
6) $\forall C_1, C_2 \in \mathscr{C}, \quad \left.\begin{array}{c} C_1 \neq C_2 \\ e \in C_1 \cap C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists C_3 \in \mathscr{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}.$
Então $\mathscr{C}$ é o conjunto dos circuitos de um matroide M sobre S.

dem. Ver bibliografia da secção.

Muitas vezes a trabalhar com matroides, estamos interessados em circuitos especiais, ligados à noção de base, que aqui iremos definir

Lema. *Seja M um matroide sobre S. Sejam $X \in \mathscr{I}(M)$, $x \in S$ tais que $X \cup x$ é dependente. Então $X \cup x$ contém um único circuito C.*

dem. Dado que $X \cup x$ é dependente, temos por definição de circuito, que $X \cup x$ contem um circuito C.

Consideremos com vista a um absurdo, $C_1, C_2 \in \mathscr{C}(M)$, com $C_1 \neq C_2$ e $C_1, C_2 \subseteq X \cup \{x\}$.

Como $X \in \mathscr{I}(M)$, então necessariamente $C_1 \ni x$ e $C_2 \ni x$.

Logo, pela propriedade 6., $\exists C3 \in \mathscr{C}(M) : C3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq X$ o que é ABSURDO (pois X é independente e logo por I3), $C3(\subseteq X)$ será também independente).

Deste lema sai em particular a seguinte definição

Definição. *Dados B base de um matroide M, $x \in S \setminus B$, existe um e um só circuito contido em $B \cup \{x\}$.*

Chamamos a tal circuito circuito fundamental de x em B e denotamo-lo por $C(x, B)$.

- O outro exemplo clássico da teoria de matroides anteriormente referido, é o chamado matroide cíclico de um grafo G.

  Seja G um grafo, $S = E(G)$.

  Considere-se $\mathscr{I} = \{X \subseteq E(G)$: o grafo formado pelas arestas X e os vértices que lhe são adjacentes, não contém ciclos$\}$.

  Prova-se (bibliografia do capítulo) que $(S, \mathscr{I})$ é um matroide, sendo naturalmente que um conjunto é dependente minimal se é o conjunto de arestas de um ciclo.

  Tal matroide é denotado por $M(G)$.

A designação de circuitos, para os conjuntos dependentes minimais de um matroide, é inspirada neste matroide.

ATENÇÃO: Tal terminologia pode porém causar alguma confusão, se não se reparar que os circuitos de um matroide cíclico de um grafo G, correspondem aos conjuntos de arestas de ciclos de G e não, em geral, a conjuntos de arestas de circuitos do grafo.

Definição. *Chamamos "loop" a um elemento e cujo conjunto $\{e\}$ seja um conjunto dependente.*

Proposição. *Seja M um matroide e $x \in M$. São equivalentes:*

(i) x é istmo de M.

(ii) x pertence a todas as bases de M.

(iii) x não pertence a nenhum circuito de M.

dem. (i) $\Leftrightarrow$(ii) é a definição dada.

(ii)$\Leftrightarrow$ (iii) é um exercício simples envolvendo as definições (Ver [Ox]).

Matroides Transversais

Um último tópico de Matroides que felizmente precisaremos de abordar é o da teoria das transversais. "Felizmente", por este permitir perceber melhor a história dos matroides, como referiu Welsh no seu livro "Matroid Theory" à data da sua edição, em 1976. No sentido em que, dizia, a razão pela dinamização da disciplina dos matroides terá sido talvez a obtenção dos resultados fundamentais da Teoria das Transversais como corolários triviais dos teoremas provados em matroides. Mostrando-se assim prolífica a generalização estudada, na demonstração simples e de certa maneira comum, de vários resultados cujas provas anteriormente conhecidas eram todas bastante intricadas.

Seja S um conjunto finito e $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ uma família de subconjuntos de S (i.e. $A_i \subseteq S, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$).

Dizemos que $X \subseteq S$ é uma transversal de $\mathscr{A}$, se existe uma bijecção $\pi : X \to J = \{1, \ldots, m\}$, tal que $x \in A_{\pi(x)},\ \forall x \in X$ (ou seja , se existe aquilo a que chamamos um sistema de representantes distintos (SRD) da família $\mathscr{A}$, isto é, se $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq S$, com $x_i \in A_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$).

Dizemos que um conjunto $X \subseteq S$ é uma transversal parcial de $\mathscr{A}$, se existe $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ e uma bijecção $\pi : X \to J$ tal que $x \in A_{\pi(x)}$, $\forall x \in X$. Ou seja, se $X = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\}$, com $x_{j_i} \in A_{j_i}$ e $x_{j_i} \neq x_{j_k}$ se $i \neq k$.

Alternativamente, podemos pensar em transversais parciais através da noção de emparelhamentos em grafos bipartidos. Por não trabalharmos aqui desse modo, não se apresenta essa definição que poderá ser consultada na bibliografia da secção.

Teorema. *Seja* $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ *uma família de subconjuntos de um conjunto finito* S.

Sendo $\mathscr{I}$ *o conjunto das transversais parciais de* $\mathscr{A}$, *tem-se que* $\mathscr{I}$ *é conjunto de independentes de um matroide sobre* S.

dem. Ver bibliografia da secção.

A ideia de transversal é de grande importância neste trabalho, não só por estar na origem do que é feito no 2º artigo, como sobretudo por a generalização do resultado central da teoria das transversais (o teorema de Hall) a matroides, ser o resultado principal a partir do qual se consegue definir o rank da união de matroides.

0.3 Partições de inteiros

Os conceitos sobre partições que se seguem são de fácil compreensão, mas de uma mais complicada definição rigorosa. Optou-se por isso não definir tudo ao promenor, esperando que os exemplos clarifiquem alguma dúvida de linguagem.

Partições

Uma partição é uma sequência (ou seja sucessão finita) decrescente, em sentido lato, de inteiros não negativos.

Definição. *Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{Z}$, dizemos que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ é uma partição, se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_t \geq 0$.*

Se $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = m$ dizemos que λ é partição de m e escrevemos $\lambda \vdash m$.

Definimos comprimento de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ como sendo o número de coordenadas não nulas de λ; denotamo-lo por $l(\lambda)$ (i.e. $l(\lambda) = \max\{i \in \{1, \ldots, t\} : \lambda_i > 0\}$).

Convenciona-se que dada uma partição $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_t)$ e $s > t$, então $\eta_i = 0, \forall i \in \{t+1, \ldots, s\}$.

Dadas λ, μ partições de um mesmo inteiro, dizemos que λ domina μ e escrevemos $\lambda \succcurlyeq \mu$ se:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_i, \ \forall k \in \{\, 1, \ldots, \max\{l(\lambda), l(\mu)\} \,\}$$

Colorações

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

Denotamos o conjunto de todas as aplicações $\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ por $\Gamma_{m,n}$.

Chamamos composição das multiplicidades de α, que denotamos por $m(\alpha)$, à sequência $m(\alpha) = (|\alpha^{-1}(1)|, \ldots, |\alpha^{-1}(n)|)$.

Chamamos partição das multiplicidades de α, que denotamos por $M(\alpha)$, à partição obtida ordenando de forma descrescente $(|\alpha^{-1}(1)|, \ldots, |\alpha^{-1}(n)|)$.

Diagramas de Young

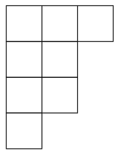
Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ uma partição de $m \in \mathbb{N}$.

Chamamos diagrama de Young associado a λ e denotamos por $[\lambda]$ ao conjunto

$$\{(i, j_i) : i \in \{1, \ldots, l(\lambda)\},\ j_i \in \{1, \ldots, \lambda_i\}\}$$

Intuitivamente e graficamente, pensamos e trabalhamos diagrama de Young associado a λ como um conjunto de caixas dispostas por tantas linhas quantas as coordenadas da partição, com cada linha i constituída por λ_i caixas.

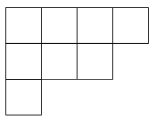
Exemplo. *Consideremos* $\lambda = (3, 2, 2, 1)$

O diagrama de Young $[\lambda] = [(3, 2, 2, 1)] =$  .

Chamaremos extremidades de colunas de $[\lambda]$ a caixas que se encontrem na última linha de alguma coluna (não definiremos rigorosamente linha e coluna, devendo o seu significado ser agora óbvio para o leitor a partir do exemplo gráfico acima de um diagrama de Young).

Dado $[\lambda]$ um diagrama de Young, chamamos conjugado de $[\lambda]$ ao diagrama obtido tomando como linhas as colunas de $[\lambda]$ e como colunas as linhas de $[\lambda]$. Designamos a partição associada ao diagrama conjugado de $[\lambda]$ por partição cojugada de λ e denotamo-la por $\tilde{\lambda}$.

Exemplo. *O conjugado de* $[\lambda]$ *do exemplo acima é o diagrama*

$[\tilde{\lambda}] =$  $= [(4, 3, 1)]$.

Note-se que $\tilde{\lambda}$ é dada por $\tilde{\lambda}_j = |\{i : \lambda_i \geq j\}|$, $\forall j \in \mathbb{N}$ (ou alternativamente $\tilde{\lambda}_j = \max\{i : \lambda_i \geq j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$).

Propriedade trivial: $\tilde{\tilde{\lambda}} = \lambda$.

Quadros de Young (do Francês "Young Tableaux")

Chamamos quadro de Young a um par $Q = ([\lambda], \alpha)$, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash m$ e $\alpha \in \Gamma_{m,n}$.

Chamamos conteúdo de $Q = ([\lambda], \alpha)$ a $m(\alpha)$.

Intuitivamente e graficamente, pensamos e trabalhamos quadro de Young como um diagrama de Young, subentendendo as m caixas numeradas de 1 a m de forma crescente, começando na 1ª linha da esquerda para a direita, percorrendo a linha seguinte, igualmente da esquerda para a direita, etc.. com cada caixa j preenchida pelo inteiro $\alpha(j)$.

Chamamos quadro de Young semistandard a um quadro de Young $Q = ([\lambda], \alpha)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\alpha \in \Gamma_{m,n}$ é sobrejectiva;
- α é crescente sobre as linhas de $[\lambda]$ e estritamente crescente sobre as colunas de $[\lambda]$.

Exemplo. *Consideremos* $m = 12$, $\lambda = (5, 3, 2, 2) \vdash 12$ *e*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Temos que $Q = ([\lambda], \alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} 4 & 5 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} \end{array}$.

O conteúdo de α *é* $m(\alpha) = (2, 1, 3, 3, 2, 1)$.

O partição das multiplicidade de α *é* $M(\alpha) = (3, 3, 2, 2, 1, 1)$.

Teorema. *Sejam* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ *e* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ *partições dum mesmo inteiro.*

Se $\lambda \succcurlyeq \mu$, *é possível suprimir* μ_r *extremidades das colunas de* $[\lambda]$ *e obter um diagrama* $[\hat{\lambda}]$, *satisfazendo* $\hat{\lambda} \succcurlyeq (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})$.

dem. Ver [Fu] ou [DS1] da Bibliografia.

Teorema. *Sejam* λ,μ *partições de* $m > 0$.

Existe um quadro semistandard associado a λ *de conteúdo* μ *se e só se* $\lambda \succcurlyeq \mu$.

dem. $[\Leftarrow]$ [Por indução em $l(\mu)$]

Caso $l(\mu) = 1$: Então dado que $\lambda \succcurlyeq \mu$, temos que $\lambda = (\lambda_1) = (\mu_1) = \mu$.

Logo, considerando o quadro de Young $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline \end{array}$ (μ_1 caixas), temos um quadro semistandard associado a λ de contúdo μ.

(Hipótese de Indução (H.I.):) Suponhamos que tal vale para $l(\mu) \leq r - 1$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ partições de m, com $\lambda \succcurlyeq \mu$.

Pelo teorema anterior, podemos considerar $[\hat{\lambda}]$, tal que $\hat{\lambda} \succcurlyeq (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})$ (com $[\hat{\lambda}]$ obtido de $[\lambda]$ por remoção de μ_r caixas de extremidades das colunas de $[\lambda]$).

Por (H.I.), consideremos então um quadro semistandard $R = ([\hat{\lambda}], \beta)$ de conteúdo $(|\beta^{-1}(1)|, |\beta^{-1}(2)|, \dots, |\beta^{-1}(r-1)|) = (\mu_1, \dots, \mu_{r-1})$.

Tomando então α a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha :&[\lambda] \to \{1, \dots, r\} \\ &\alpha|_{[\lambda]} = \beta \\ &\alpha|_{[\lambda] \setminus [\hat{\lambda}]} = r \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} &\alpha^{-1}(j) = \beta^{-1}(j), \forall j \in \{1, \dots, r-1\} \ , \\ \text{e} \quad &\alpha^{-1}(r) = |\, [\lambda] \setminus [\hat{\lambda}]\, | = \mu_r \ . \end{aligned}$$

Logo $Q = ([\lambda], \alpha)$ é quadro semistandard (já que Q se obtem de R adicionando caixas nas extremidades de colunas, sendo que R era já um quadro semistandard e que as caixas adicionadas se encontram coloridas por r que é estritamente maior que os restantes elementos que preenchiam R), com $m(\lambda) = (|\beta^{-1}(1)|, |\beta^{-1}(2)|, \dots, |\beta^{-1}(r-1)|, |\alpha^{-1}(r)|) = (\mu_1, \dots, \mu_{r-1}, \mu_r)$.

$[\Rightarrow]$ $[\, Q = (\,[\lambda], \alpha)$ tem contúdo $\mu \ \Rightarrow \ \lambda \succcurlyeq \mu\,]$

Note-se que num quadro semistandard as caixas preenchidas com 1's estão obrigatoriamente na 1ªlinha (pois α é estritamente crescrente sobre as colunas), as preenchidas com 1's ou 2's estão necessariamente na 1ªou 2ª linhas (pela mesma razão), etc...

Logo dado que $Q = ([\lambda], \alpha)$ tem conteúdo $(\mu_1, \dots, \mu_{r-1}, \mu_r)$, temos que $\lambda_1 \geq \mu_1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$, $\dots$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$, $\forall k \in \{1, \dots, max\{l(\lambda), l(\mu)\}\}$.

Capítulo 1

União de matroides

Teorema. *Sejam* M_1 *e* M_2 *matroides sobre um mesmo conjunto* S.
Defina-se $M_1 \vee M_2 = (S, \mathscr{I})$, *com*

$$\mathscr{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathscr{I}(M_1) \text{ e } I_2 \in \mathscr{I}(M_2)\}.$$

Tem-se que $M_1 \vee M_2$ *é matroide, dito matroide união ou soma de* M_1 *e* M_2, *com função de rank dada por*

$$\rho_{M_1 \vee M_2}(X) = \min_{A \subseteq X}\{\rho_1(A) + \rho_2(A) + |X \setminus A|\}, \ \forall X \subseteq S$$

dem. [**Mostremos que** $M_1 \vee M_2$ **é matroide:**] (Conforme [Go])

[**I1)**] $\emptyset = \underbrace{\emptyset}_{\in \mathscr{I}(M_1)} \cup \underbrace{\emptyset}_{\in \mathscr{I}(M_2)} \in \mathscr{I}(M_1 \vee M_2)$.

[**I2)**] Sejam $X, Y \subseteq S$, com $X \subseteq Y$.
Suponhamos que $Y \in \mathscr{I}(M_1 \vee M_2)$.
Então $Y = Y_1 \cup Y_2$, com $Y_1 \in \mathscr{I}(M_1), Y_2 \in \mathscr{I}(M_2)$.
Dado que $X \subseteq Y$, temos que $X = (X \cap Y_1) \cup (X \cap Y_2)$, sendo que, por M_1 e M_2 serem matroides, $\begin{array}{l} X \cap Y_1 \in I(M_1) \ \ (\text{pois } X \cap Y_1 \subseteq Y_1 \text{ e } Y_1 \in \mathscr{I}(M_1)\,) \\ X \cap Y_2 \in I(M_2) \end{array}$.
Logo $X = (X \cap Y_1) \cup (X \cap Y_2) \in \mathscr{I}(M_1 \vee M_2)$.

[**I3)**] Sejam $X, Y \in \mathscr{I}(M_1 \vee M_2)$, com $|X| < |Y|$ (quaisquer).
Consideremos $X_1, Y_1 \in \mathscr{I}(M_1), X_2, Y_2 \in \mathscr{I}(M_2)$ tais que $\begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2 \\ Y = Y_1 \cup Y_2 \end{array}$.

- Podemos (pela condição I2) da definição de matroide), supor tais uniões disjuntas.
- Consideremos, entre as possíveis escolhas de tais conjuntos $X_i's$ e $Y_i's$, uma que maximize $|X_1 \cap Y_1| + |X_2 \cap Y_2|$.

Dado que $|Y| > |X|$, temos que $|Y_1| > |X_1|$ ou $|Y_2| > |X_2|$.

Caso $|Y_1| > |X_1|$: Como M_1 é matroide, consideremos então $s \in Y_1 \setminus X_1$ tal que $X_1 \cup \{s\} \in \mathscr{I}(M_1)$.

Tem-se, pela condição de maximalidade, que $s \notin X_2$ (de facto, se por absurdo $s \in X_2$, então, como $s \notin Y_2$ (já que $s \in Y_1$ e $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$) ter-se-ia $|(X_1 \cup \{s\}) \cap Y_1| + |X_2 \setminus \{s\} \cap Y_2| = |X_1 \cap Y_1| + 1 + |X_2 \cap Y_2|$, o que contradiria a condição de maximalidade na escolha de $X_i's$ e $Y_i's$).

Logo $s \notin X_1 \cup X_2 = X$.

Temos portanto que $s \in Y \setminus X$ é tal que $X \cup \{s\} \in \mathscr{I}(M_1 \vee M_2)$.

Caso $|Y_2| > |X_2|$: Análogo ao anterior.

$\therefore$ $(M_1 \vee M_2)$ é matroide.

[A função de rank de $M_1 \vee M_2$ é a função indicada:]

De facto, verifica-se muito facilmente que dado $X \subseteq S$ qualquer, $\rho_{M_1 \vee M_2}(X) \leq \min_{A \subseteq X}\{\rho_1(A) + \rho_2(A) + |X \setminus A|\}$.

No entanto a demonstração da outra desigualdade de uma forma directa parece ser mais complicada. Pretendendo-se aqui apresentar o tema da união de matroides de uma forma o mais natural e simples possível, escolheu-se por isso demonstrar da forma acima exposta tratar-se de facto de um matroide.

Não se tendo encontrado ainda uma demonstração simples da desigualdade referida para a expressão da rank de um conjunto da união de matroides, remete-se o leitor interessado para as habituais construções mais elaboradas da união de matroides, que poderá consultar por exemplo no livro [We] da Bibliografia.

Sejam $M_1, \ldots, M_k$ matroides sobre S. Analogamente e por associatividade (já que a união de conjuntos é associativa), vem também que $M_1 \vee \cdots \vee M_k$ é um matroide, verificando-se que

$$\rho_{M_1 \vee \cdots \vee M_k}(X) = \min_{A \subseteq X}\{\rho_1(A) + \cdots + \rho_k(A) + |X \setminus A|\}, \ \forall X \subseteq S \ .$$

Lema 1. *$X \subseteq S$ é independente de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ se e só se*

$$\forall A \subseteq X, \sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) \geq |A|$$

dem. Seja $X \subseteq S$ (qualquer).

Então $X \in \mathscr{I}(M) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho(X) = \min_{A \subseteq X}\{\sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) + |X \setminus A|\} = |X|.$

$\Leftrightarrow \forall A \subseteq X,\ \sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) + \underbrace{|X \setminus A|}_{=|X|-|A|} \geq |X|.$

$\Leftrightarrow \forall A \subseteq X,\ \sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) \geq |A|.$

Lema 2. *$C \subseteq S$ é circuito de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ se e só se é subconjunto minimal de S satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) = |C| - 1$.*

dem. [$\Rightarrow$]

[$\leq$] Seja C circuito de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.

Seja $s \in C$ (qualquer). Como $C \setminus \{s\}$ é independente, então $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) \geq |A|, \forall A \subseteq C \setminus \{s\}$.

Porém, como C não é independente, então, pelo lema 1, não se pode ter também $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) \geq |C|$.

Logo, $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) \leq |C| - 1$.

[$\geq$] Seja $s \in C$. (qualquer). Como $C \setminus \{s\}$ é independente, então $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{s\}) \geq |C \setminus \{s\}| = |C| - 1$.

Logo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) \geq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{s\}) \geq |C| - 1$.

Como todo o subconjunto X de S satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(X) = |X| - 1$ é dependente, temos que C circuito é minimal de S satisfazendo igualdade.

[$\Leftarrow$] Seja D subconjunto minimal de S satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(D) = |D| - 1$.

Por satisfazer $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(D) = |D| - 1$ temos, pelo Lema 1, que D é dependente.

Consideremos pois C circuito contido em D.

Pela implicação directa já provada, vem que C satisfaz $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) = |C| - 1$.

Logo, por definição de D como subconjunto minimal satisfazendo a referida igualdade, temos que $C = D$.

Toda a base da união de matroides, é união de bases dos respectivos matroides:

Teorema. *Seja B uma base de $M_1 \vee M_2$.*
Então $B = B_1 \cup B_2$, com B_1 base de M_1, B_2 base de M_2.

dem. Sejam M, N matroides e B base de $M \vee N$ (qualquer).
[Existem B_1 base de M e B_2 base de N, tais que $B = B_1 \cup B_2$?]
Por definição de $M \vee N$, temos que $B = I_1 \cup I_2$, com $I_1 \in \mathscr{I}(M)$ e $I_2 \in \mathscr{I}(N)$.
Sendo I_1 independente de M, consideremos então B_1 base de M tal que $I_1 \subseteq B_1$.
Sendo I_2 independente de N, consideremos também B_2 base de N tal que $I_2 \subseteq B_2$.
Temos que $B_1 \subseteq B$ (caso contrário $B_1 \cup I_2$ seria independente de $M \vee N$, com $B_1 \cup I_2 \supsetneq I_1 \cup I_2 = B$ o que seria ABSURDO pois B é base de $M \vee N$.)
De igual modo vem que $B_2 \subseteq B$.
Logo, temos que $B \supseteq B_1 \cup B_2 \supseteq I_1 \cup I_2 = B$
Donde, $B = B_1 \cup B_2$, c.q.d. .

OBSERVAÇÃO: Note-se porém que a união de bases de dois matroides M e N não é necessariamente uma base de $M \vee N$.

Capítulo 2

Artigo sobre μ-colorações de um Matroide

Este artigo nasce do sequinte problema:

Dado um Matroide M sobre um conjunto S e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ uma partição de $|S|$, existirão conjuntos $I_1, \ldots, I_k$ independentes e disjuntos dois a dois tais que:

(i) $S = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$

(ii) $|I_j| = \mu_j, \forall j = 1, \ldots, k$?

O autor J.A. Dias da Silva conseguiu responder ao problema enunciando um condição necessária e suficiente sobre a a partição μ, resultado que irei apresentar e demonstrar.

Procurarei dar uma demonstração alternativa e mais simples de cada um dos três resultados fundamentais de artigo [1].

De facto, a beleza deste trabalho está precisamente, na minha opinião, em conseguir responder à pergunta enunciada untilizando apenas as propriedades mais elementares da teoria de matroides.

Pergunta esta que é de facto importante. A sua resposta permite provar também um teorema de Álgebra linear, no qual este trabalho teve a sua origem sobre tensores decomponíveis não nulos. Mas mais que isso, o resultado conseguido é de natureza absolutamente geral, válido em qualquer matroide sem loops.

[1] duas das quais seguindo ideias de J.A. Dias da Silva, não publicadas.

ARTIGO:

Seja S um conjunto e $M_1, \ldots, M_k$ matroides em S.

Vimos já que $M_1 \vee \cdots \vee M_k = \{I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k : I_i$ é independente em M_i, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}\}$ é um matroide, dito soma ou união de $M_1, \ldots, M_k$, também denotado por $\bigvee_{i=1}^{k} M_i$.

No resto do artigo serão considerados apenas **matroides não contendo loops**.

Estaremos interessados na união de i cópias de um matroide M. Denotemos tal matroide por $M^{(i)}$ ($= \underbrace{M \vee \cdots \vee M}_{\text{i vezes}}$) e a sua função de rank por ρ_i.

Defina-se "covering number" de M como sendo o menor inteiro k tal que $\rho_k(M) = |S|$. Note-se que podemos sempre considera-lo por se ter tomado matroides sem loops (donde sai que, sendo $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, então $\rho_n(M) = |S|$, já que $S = \{s_1\} \cup \cdots \cup \{s_n\}$ é independente de $M^{(n)}$).

Lema 1. *Seja M um matroide sobre S. Seja k o seu "covering number".*

Existe uma família de conjuntos independentes de M não vazios e disjuntos dois a dois $B_1, \ldots, B_k$, tais que

$$B_1 \cup \cdots \cup B_r \text{ é base de } M^{(r)}, \forall r \in \{1, \ldots, k\} .$$

Tal sai directamente do resultado mais geral:

Proposição. *Seja B uma base de $M^{(t)}$ (Dado $t \in \{1, \ldots, k\}$).*

Existem t conjuntos independentes de M não vazios e disjuntos dois a dois $B_1, \ldots, B_t$, com $B = B_1 \cup \cdots \cup B_t$, tais que

$$B_1 \cup \cdots \cup B_r \text{ é base de } M^{(r)}, \forall r \in \{1, \ldots, t\} .$$

dem. [Da proposição e por indução em t:]

Caso $t = 1$: É claramente válido.

OBSERVAÇÃO Auxiliar: [Dados M, N matroides e B base de $M \vee N$, existem B_1 base de M e B_2 independente de N, tais que $B = B_1 \dot\cup B_2$, conforme visto no capítulo da união de matroides].

(Hipótese de Indução (H.I.):) Suponhamos que o resultado vale para $t \geq 1$.

Seja B uma base de $M^{(t+1)}$ (qualquer).

Como $M^{(t+1)} = M^{(t)} \vee M$, então pela observação anterior $B = B_{M^{(t)}} \dot\cup B_{t+1}$, com $B_{M^{(t)}}$ base de $M^{(t)}$ e B_{t+1} independente de M.

Consideremos, por (H.I.), $B_1, \ldots, B_t$ conjuntos independentes não vazios de M (disjuntos 2 a 2), com $B_{M^{(t)}} = B_1 \cup \cdots \cup B_t$, tais que $B_1 \cup \cdots \cup B_r$ é base de $M^{(r)}, \forall r \in \{1, \ldots, t\}$.

Vem pois que $B_1, \ldots, B_t, B_{t+1}$ são independentes de M, disjuntos dois a dois, tais que $\forall r \in \{1, \ldots, t\}$, $B_1 \cup \cdots \cup B_r$ é base de $M^{(r)}$ e

para $r = t+1$, $B_1 \cup \cdots \cup B_t \cup B_{t+1} = B$ é base de $M^{(t+1)}$.

Corolário. *Seja M um matroide sobre S, com "covering number" k. Defina-se $\rho_0 = 0$.*

Então $\rho = (\rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_1, \ldots, \rho_k - \rho_{k-1})$ é partição de $|S|$.

dem. Pelo Lema 1 consideremos $(B_i)_{i=1,\ldots,k}$ família de independentes nas condições indicadas.

Seja $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ (qualquer).

Temos que $\rho_i - \rho_{i-1} = |B_i|$ e que $\rho_{i+1} - \rho_i = |B_{i+1}|$.

Ora se, por absurdo, $\rho_{i+1} - \rho_i > \rho_i - \rho_{i-1}$, viria $|B_{i+1}| > |B_i|$ donde, por *I2)* da def. de matroide, $\exists x \in B_{i+1} \setminus B_i$ tal que $B_i \cup \{x\} \in \mathscr{I}(M)$. Além disso, dado que $x \in B_{i+1}$, teriamos ainda $B_i \cup \{x\}$ disjunto dois a dois com $B_1, \ldots, B_{i-1}$ (pois B_{i+1} o era).

Logo $B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup (B_i \cup \{x\})$ seria independente de $M^{(i)}$ o que é absurdo pois $B_1 \cup \cdots \cup B_i$ é base de $M^{(i)}$.

$\therefore \rho_i - \rho_{i-1} \geq \rho_{i+1} - \rho_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Definição. *Seja M um matroide sobre S e k o seu "covering number".*

A uma família $(B_i)_{i=1,\ldots,k}$ nas condições do Lema 1 chamamos família saturada de M.

Designamos por partição de rank a partição ρ referida no corolário anterior.

Definição. *Seja M um matroide sobre S, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ uma partição de $|S|$.*

Dizemos que uma família $(C_i)_{i=1,\ldots,r}$ de conjuntos independentes de M, não vazios e disjuntos dois a dois é uma μ-coloração de M se verifica:

(i) $S = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$

(ii) $|C_i| = \mu_i, \forall i = 1, \ldots, r$

Dizemos que um matroide é μ-colorível se admite uma μ-coloração.

Podemos agora enunciar o resultado principal:

Teorema 1. *Seja M um matroide sobre S e ρ a sua partição de rank.*

Seja μ uma partição de $|S|$.

Então M é μ-colorível se e só se $\rho \succcurlyeq \mu$.

Para demonstrar o teorema utilizaremos ainda o seguinte lema:

Lema 2. *Seja M um matroide sobre S. Seja $(B_i)_{i=1,\dots,l}$ uma família de independentes de M, não vazios disjuntos dois a dois, com $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots$.*

Seja $\rho = (r_1, \dots, r_l)$, dada por $r_i = |B_i|, \forall i = 1, \dots, l$.

Então existe uma aplicação injectiva

$$\begin{aligned} f :&[\rho] \to M \\ &(i,j) \to x_{i,j} \end{aligned}$$

satisfazendo

(i) $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,r_i}\} = B_i, \ \forall i = 1, \dots, l$

(ii) $E_{(B_i)_{i=1,\dots,l}} := \{x_{l,1}, \dots, x_{l,r_l}, x_{l-1,r_l+1}, \dots, x_{l-1,r_{l-1}}, \dots, x_{1,r_2+1}, \dots, x_{1,r_1}\}$ *é independente do matroide M.*

(isto é, é possível preencher o diagrama de Young $[\rho]$ com os elementos de $\bigcup_{i=1}^{l} B_i$ de tal modo que:

(i) Cada linha i se encontra preenchida por todos os elementos de B_i , para todo o $i \in \{1, \dots, l\}$.

(ii) O conjunto dos elementos nas extremidades das colunas é independente do matroide M.

				X	X
			X		
X	X	X			

)

<u>**dem**</u>**. [Por indução em l:]**

<u>Caso l=1:</u> Seja $B_1 = \{y_1, \dots, y_{r_1}\}$ um independente de M, não vazio (qualquer).

Seja $\rho = (r_1)$.

Tomemos então

$$\begin{aligned} f :&[(r_1)] \to M \\ &(1,j) \to y_j, \forall j \in \{1, \dots, r_1\} \end{aligned}$$

Claramente f é injectiva e satisfaz i) e ii).

(Hipótese de Indução (H.I.):) Suponhamos que o lema vale para $l \geq 1$.

Seja $(B_i)_{i=1,\ldots,l,l+1}$ uma família de independentes de M, não vazios disjuntos dois a dois, com $|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots$.

Seja $\rho = (r_1, \ldots, r_{l+1})$, dada por $r_i = |B_i|, \forall i = 1, \ldots, l+1$.

Por (H.I.), considerando a subfamília $(B_i)_{i=2,\ldots,l+1}$, e $\rho' = (r_2, \ldots, r_{l+1})$, tomemos

$$\begin{aligned} f' :& [\rho'] \to M \\ & (i,j) \to x_{i,j} \end{aligned}$$

aplicação injectiva satisfazendo i) e ii).

Tem-se que $E := E_{(B_i)_{i=2,\ldots,l+1}}$, conforme definido por ii) (o conjunto dos elementos das extremidades das colunas de $[\rho']$), é independente e $|E| = |B_2|$.

Ora, como $|B_1| \geq |B_2|$, então $|B_1| = |B_2|$ ou $|B_1| > |B_2|$.

<u>Caso $|B_1| = |B_2|$:</u> Consideremos $B_1 = \{x_1, \ldots, x_{r_1}\}$.

<u>Então tomando</u>

$$\begin{aligned} f :& [\rho] \to M \\ & f|_{[\rho']} = f' \\ & f(1,j) = x_j, \forall j \in \{1, \ldots, r_1\} \quad , \end{aligned}$$

temos claramente que f é injectiva (pois $f|_{[\rho']} = f'$ é por hipótese injectiva; $f(1,j) \neq f(i,h), \forall (i,h) \in [\rho']$, já que $B_1 \cap B_i = \emptyset, \forall i \geq 2$, e $f(1,j) = x_j \neq x_h = f(1,h), \forall i,h \in \{1, \ldots, r_1\}$).

Temos também que verifica (i) (pois f' verificava e $\{f(1,j) : j \in \{1, \ldots, r_1\}\}$ $= \{x_j : j \in \{1, \ldots, r_1\}\} = B_1$) e (ii) pois $E_{(B_i)_{i=1,\ldots,l+1}} = E \in \mathscr{I}(M)$ já que f' verifica (ii).

<u>Caso $|B_1| > |B_2|$:</u>

<u>Como $|E| = |B_2|$</u>, então $|E| < |B_1|$.

Logo, como $E \in \mathscr{I}(M)$ e $B_1 \in \mathscr{I}(M)$ e $|E| < |B_1|$, facilmente se conclui por aplicação sucessiva de I3) de def. de matroide que $\exists X \subseteq B_1 \setminus E$, tal que $E \dot\cup X \in \mathscr{I}(M)$, com $|X| = |B_1| - |E|$.

Denotemos pois $B_1 \setminus X = \{y_{11}, \ldots, y_{1r_2}\}, \; X = \{y_{1(r_2+1)}, \ldots, y_{1r_1}\}$.

Tomemos então

$$\begin{aligned} f :& [\rho] \to M \\ & f|_{[\rho']} = f' \\ & f(1,j) = y_{1j}, \forall j \in \{1, \ldots, r_2\} \\ & f(1,j) = y_{1j}, \forall j \in \{r_2+1, \ldots, r_1\} \quad . \end{aligned}$$

Vem pelas mesmas razões do caso anterior que f é injectiva, que verifica (i) e pelo modo como se escolheram na definição de f os elementos a preencher as extremidades de colunas na 1ª linha de $[\rho]$, que verifica também (ii).

Podemos finalmente demonstrar o teorema principal:

Teorema 2. *Seja M um matroide em S e ρ a sua partição de rank.*
Seja μ uma partição de $|S|$.
Então M é μ-colorível se e só se $\rho \succcurlyeq \mu$.

<u>**dem.**</u> $[\Rightarrow]$ Suponhamos que M é μ-colorível.
Seja $(C_i)_{i=1,\dots,r}$ uma μ-coloração de M.
Consideremos $\rho = (\rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_1, \dots, \rho_k - \rho_{k-1})$ a partição de rank de M.
Por definição de k covering number de M tem-se que $r \geq k$.
Temos pois que $\forall s \in \{1, \dots, k\}$, $\mu_1 + \cdots + \mu_s = |C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_s| \leq \rho_s = \rho_1 - \rho_0 + \rho_2 - \rho_1 + \cdots + \rho_s - \rho_{s-1}$, pois ρ_s é o cardinal de uma base de $M^{(s)}$ e $C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_s$ é independente de $M^{(s)}$.
Vindo ainda para $s \in \{k, \dots, r\}$ que $\mu_1 + \cdots + \mu_s = |C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_s| \leq \rho_k = \rho_1 - \rho_0 + \rho_2 - \rho_1 + \cdots + \rho_k - \rho_{k-1}$, pois $\rho_k = |S|$ e $C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_s \subseteq S$.
$\therefore \rho \succcurlyeq \mu$.
$[\Leftarrow]$ Demonstremos antes a implicação mais geral (da qual a que pretendemos provar é consequência directa):
[PROPOSIÇÃO: Seja M um matroide sobre S que admite uma λ-coloração.
Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ uma partição de $m = |S|$, tal que $\mu \preccurlyeq \lambda$.
Então existe uma μ-coloração de M.]
<u>dem.</u> **[Por indução no número r de partes de μ]**
<u>Caso $r = 1$</u> Então $\mu = (m)$ e dado que $\lambda \succcurlyeq \mu$ e $\lambda \vdash m$, vem que $\lambda = (m)$.
Por hipótese, temos então que existe uma coloração do tipo $\mu = \lambda$.
(Hipótese de Indução (H.I.):) Suponhamos que tal vale para $r \geq 1$.
Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$, uma partição de M, com $\mu \preccurlyeq \lambda$.
Consideremos o quadro de Young, $Q = ([\lambda], f)$, com f como no lema 2.
Pelo resultado visto sobre partições, dado que $\lambda \succcurlyeq \mu$, podemos retirar μ_{r+1} caixas das extremidades das colunas de $[\lambda]$ e obter um diagrama $[\hat{\lambda}]$, com $\hat{\lambda} \succcurlyeq (\mu_1, \dots, \mu_r)$.
Considerando S' os elementos que preenchem o quadro Q e se encontram nas caixas não removidas, temos que o matroide restrição $M(S') = M'$ admite a $\hat{\lambda}$-coloração $(B_i \cap S')_{i=1,\dots,l(\hat{\lambda})}$, dados B_i os conjuntos da λ-coloração.
Logo, por (H.I.), $M(S') = M'$ admite também uma $(\mu_1, \dots, \mu_r)$-coloração, $C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_r$.

Dado que, pelo Lema 2, os restantes elementos de S, os das caixas retiradas (que são exactamente μ_{r+1}), formam um conjunto independente, temos portanto que M admite a μ-coloração $(C_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} C_r) \dot{\bigcup} C_{r+1}$.

NOTA: Poder-se-ia ter utilizado na demonstração em vez deste "teorema de indução" das partições, o outro resultado referido na introdução de que se $\lambda \succcurlyeq \mu$, podemos então tomar um quadro semistandard associado a λ e de conteúdo μ.

Tal demonstração permitiria uma melhor aplicação algoritmica do método de demonstração, com o preenchimento inicial de todas as caixas de $[\lambda]$ por inteiros de $\{1, \ldots, r\}$ (na medida em que se consiga fazer este preenchimento de uma forma mais eficiente do que a de encontrar sucessivamente as μ_r caixas de extremidades de colunas cuja remoção de $[\lambda]$ nos permitem obter o diagrama $[\hat{\lambda}]$ tal que $\hat{\lambda} \succcurlyeq (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})$).

No entanto, essa abordagem seria talvez de explicação menos simples para o leitor por se ter que pensar em simultâneo tal afectação das caixas pelos elementos de $\{1, \ldots, r\}$ e o seu preenchimento pelos elementos da λ-coloração de M ...

OBSERVAÇÕES:

- O Resultado obtido neste artigo ganha um sentido especial quando consideramos o matroide vectorial.

  De facto, se pensarmos numa família $(v_i)_{i=1,\ldots,l}$ de vectores não nulos, tal teorema dá-nos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma decomposição de tal família em conjuntos de vectores linearmente independentes, com cardinalidades especificadas.

  Duma maneira ainda mais sugestiva [2], tal teorema dá-nos uma maneira de "medir a dependência linear" de uma família de vectores.

- No trabalho apresentado, toma especial importância o conceito de partição de rank (que, ao jeito da primeira observação, caracterizaria a dependência linear da família em causa).

- Como última observação, devemos referir a propósito deste artigo, um outro artigo de que se teve conhecimento já à data da escrita deste texto: [Ke].

  Nesse artigo, é feito um estudo semelhante ao deste mas para o caso geral da soma de matroides distintos.

[2] in J.A. Dias da Silva, conversa particular

Faz-se aqui esta referência, que de alguma forma sublinha o carácter fundamental das ideias, já que encontradas independentemente com poucos anos de diferença.

Note-se que sendo de um carácter mais geral as ideias do artigo [Ke] (por, como se disse, abrangerem o caso geral da união de matroides distintos), no caso de soma de um mesmo matroide, os resultados obtidos são mais fracos do que os aqui conseguidos por darem uma condição apenas necessária envolvendo a ordem lexicográfica das partições (no lugar da ordem de dominação aqui considerada, que, como se verifica trivialmente, é mais forte que aquela).

GENERALIZAÇÕES:

Dada a importância que achei neste artigo e a sua centralidade no estudo da União de Matroides, ocupei uma grande parte do tempo do trabalho de tese no seu estudo.

Gostava pois de referir aqui várias questões que surgiram como consequência deste artigo, bem como as conclusões obtidas no seu estudo, por parecerem de grande relevância e esperando por isso que suscitem novos resultados para os quais este trabalho possa servir de inspiração.

QUESTÃO 1 - Uma questão colocada pelo próprio autor J.A.Dias da Silva e à luz da 1ª observação acima, é se existirá alguma forma de se "medir a independência linear" de uma família de vectores linearmente independentes.

SOBRE 1: Entenda-se que de facto faz sentido pensar em conjuntos de elementos "mais independentes" que outros.

Temos que um conjunto com um só elemento é independente se está contido em alguma base.

Faz algum sentido pensar por exemplo que um conjunto formado por um só elemento, que esteja contido em qualquer base do matroide, seja "mais independente" em geral, que um outro conjunto independente qualquer formado por um só elemento.

Ora tais elementos chamados istmos ou "coloops" são os loops de um matroide associado ao matroide M em causa, que designamos de matroide dual e denotamos de M^*.

Trabalhando pois por exemplo com conceitos de dependência e dualidade de matroides, poder-se-ia talvez obter tais resultados.

Uma operação de matroides não estudada, que se encontra também relacionada com a dualidade e a união de matroides é a de "intersecção" de matroides definida por $M_1 \wedge M_2 = (M_1^* \vee M_2^*)^*$, conforme [We] - capítulo Covering and Packing.

Dado o contacto tardio com esta operação, já não se chegou a trabalhar esta noção. Pode no entanto ser mais uma pista para alcançar tal objectivo, como o poderão ser a noção de packing number, etc ...

Note-se que uma tal caracterização uniforme com a anterior, colocaria na álgebra linear o relevo do estudo da indepêndencia linear de famílias finitas de vectores não apenas na sua dependência/independência, mas mais num grau de dependência.

QUESTÃO 2 - Uma outra questão prende-se com a obtenção de um bom algoritmo que permita indicar se um dado matroide admite ou não uma μ-coloração.

SOBRE 2: Tais questões prendem-se grandemente com a possibilidade de se conseguir em tempo polinomial perceber se um conjunto pertence ou não aos independentes do matroide.

Podemos porém, supôr ter um oráculo que nos dá essa informação e verificar a partir desse pressuposto, se conseguimos de uma forma algorítmica eficiente perceber se o matroide admite ou não uma μ-coloração ...

Ora a demonstração do resultado apresentada, sobretudo de acordo com o procedimento alternativo observado no seu final, produz instruções bem definidas nesse sentido, pelo que a existência de um tal procedimento reduzir-se-á pois à capacidade de computação da partição de rank ρ e de uma ρ-coloração de M (supondo uma vez mais eficiente o algoritmo envolvido no referido teorema de partições a utilizar).

QUESTÃO 3 - Por fim uma última questão que parece ter grande relevância, nasce da comparação do comportamento da operação de união de matroides com o do produto de bimatroides.

Um bimatroide ou "linking system" é um triplo $L = (S, T, \Lambda)$, dados S, T conjuntos finitos e $\Lambda \subseteq 2^S \times 2^T$ um subconjunto não vazio satisfazendo:

(L1) Se $(X,Y) \in \Lambda$ e $x \in X$, então $\exists y \in Y : (X \setminus \{x\}, Y \setminus \{y\}) \in \Lambda$.

(L2) Se $(X,Y) \in \Lambda$ e $y \in Y$, então $\exists x \in X : (X \setminus \{x\}, Y \setminus \{y\}) \in \Lambda$.

(L3) Se $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in \Lambda$, então $\exists X \subseteq S$, $\exists Y \subseteq T$ tais que $(X,Y) \in \Lambda$ e $X_1 \subseteq X \subseteq X_1 \cup X_2$, $Y_2 \subseteq Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$.

Uma definição alternativa e talvez mais sugestiva de bimatroide a partir do seu conjunto de pares ligantes Λ pode ser encontrada no artigo [Mi] da bibliografia.

OBSERVAÇÃO: Temos, como consequência de (L1) e (L2), que dado $(X,Y) \in \Lambda$, então $|X| = |Y|$.

Dado $L = (S,T,\Lambda)$ um bimatroide, define-se função de birank ou função ligante ("linking function") como sendo a aplicação

$\lambda : 2^S \times 2^T \to \mathbb{Z}$

$\lambda(X,Y) = \max\{|X'| : (X',Y') \in \Lambda, X' \subseteq X, Y' \subseteq Y\}, \ \forall X \subseteq S, Y \subseteq T$

Denotaremos aqui a função de birank por $rank$ ou simplesmente por r.

Define-se também $rank(L) = \lambda(S,T)$ (por não trazer inconvenientes tal abuso de notação).

Definição. *Se $L_1 = (S_1,T_1,\Lambda_1), L_2 = (S_2,T_2,\Lambda_2)$ são bimatroides e $T_1 = S_2$ podemos definir o produto de L_1 por L_2, como sendo o triplo $L_1 * L_2 = (S_1,T_2,\Lambda_1 * \Lambda_2)$, com*

$$\Lambda_1 * \Lambda_2 = \{(X,Z) |\ \exists Y \subseteq T_1 : (X,Y) \in \Lambda_1, (Y,Z) \in \Lambda_2\}$$

Teorema. *Prova-se (ver [Mu]) que $L_1 * L_2 = (S_1,T_2,\Lambda_1 * \Lambda_2)$ é um bimatroide com função de birank $\lambda_1 * \lambda_2$ dada por*

$$\lambda_1 * \lambda_2(X,Z) = \min\{\lambda_1(X, T_1 \setminus Y) + \lambda_2(Y,Z) | Y \subseteq T_1\}, \ \forall X \subseteq S_1, Z \subseteq T_2$$

Tal como na união de matroides, podemos também aqui pensar no produto de um conjunto finito de bimatroides $L_i = (S_i,T_i,\Lambda_i)$(por associatividade) desde que os conjuntos base verifiquem $T_i = S_{i+1}$, obtendo-se também uma expressão para a expressão de rank de tal matroide.

Conforme [Mu], temos que:

Teorema (Desigualdade de Frobenius para bimatroides). *Dados três bimatroides L_1, L_2, L_3 tais que $L_1 * L_2 * L_3$ pode ser definido, tem-se*

$$rank(L_1 * L_2 * L_3) + rank(L_2) \geq rank(L_1 * L_2) + rank(L_2 * L_3)$$

dem Consultar livro [Mu], como para restantes resultados invocados sobre bimatroides.

Logo, temos os resultados análogos em bimatroides aos que nos permitiam considerar nos matroides o conceito de partição de rank:

Corolário 1. *Dado um bimatroide $L = (S, T, \Lambda)$, com $S = T$, tem-se*

$$rank(L * L * L) + rank(L) \geq rank(L * L) + rank(L * L)$$

dem. Basta tomar no teorema anterior $L_1 = L_2 = L_3 = L$.

NOTAÇÃO: Denotamos $L * \cdots * L$ por L^n.

Donde $r(L^3) - r(L^2) \geq r(L^2) - r(L)$.

Corolário 2. *Seja $n \geq 1$.*

Dado um bimatroide $L = (S, T, \Lambda)$, com $S = T$, tem-se

$$r(L^{n+2}) + r(L^n) \geq r(L^{n+1}) + r(L^{n+1})$$

dem. Considerando no teorema $L_2 = L^n$, $L_1 = L$, $L_3 = L$, sai que
$rank(L * L^n * L) + rank(L^n) \geq rank(L * L^n) + rank(L^n * L) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow rank(L^{n+2}) - rank(L^{n+1}) \geq rank(L^{n+1}) - rank(L^n) \quad \square$

FACTO. *Seja $L = (S, T, \Lambda)$ um bimatroide.*

Seja $n \geq 1$.

Temos que $rank(L^{n+1}) \leq rank(L^n)$.

dem. Seja $n \geq 1$ (qualquer).

$rank(L^{n+1}) = \max\{|X'| : (X', Y') \in \Lambda^{n+1}, X' \subseteq S, Y' \subseteq T\} = |V|$, para um certo $(V, Z) \in \Lambda^{n+1}$

Mas se $(V, Z) \in \Lambda^{n+1}$, então por definição de produto de um número finito de bimatroides a partir do produto de 2 bimatroides e por associatividade, vem que $\exists P \subseteq (S = T)$ tal que $(V, P) \in \Lambda^n$ e $(P, Z) \in \Lambda$.

Logo $rank(L^n) = \max\{|U'| : (U', W') \in \Lambda^n, U' \subseteq S, W' \subseteq T\} \geq |V|$ pois $(V, P) \in \Lambda^n$; sendo que $|V| = rank(L^{n+1})$.

$\therefore rank(L^{n+1}) \leq rank(L^n)$.

Temos pois que

$$r(L) \geq r(L^2) \geq \cdots \geq r(L^K) \geq \cdots \geq 0$$

Vimos já que $rank(L) - rank(L^2) \geq rank(L^2) - rank(L^3) \geq \cdots \geq rank(L^{k-1}) - rank(L^k)$.

Teremos portanto que $(rank(L) - rank(L^2), rank(L^2) - rank(L^3), \ldots, rank(L^{k-1}) - rank(L^k))$ é uma partição de $rank(L) - rank(L^k)$.

[$\exists t : rank(L^t) = 0$?]

Em geral tal não se dá!

Exemplo. *O exemplo de bimatroide standard ou clássico, é o de bimatroide associado a uma matriz em que os pares ligantes são os pares de um conjunto de índices de linhas e de um conjunto de índices de colunas cuja respectiva submatriz seja invertível.*

- *Considerando assim o bimatroide associado à matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  temos que $rank(L^k) = 2, \forall k \geq 1$.

- *Mas por exemplo, considerando o bimatroide associado à matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  já vem que $rank(L) = 2$ *e* $rank(L^2) = 0$.

A questão que se coloca é a de ser ou não possível, dadas as conclusões acima, proceder de forma análoga à do artigo sobre matroides, considerando uma ordem adequada (para as partições) e definindo o que se quer que sejam as colorações de bimatroide, etc..

SOBRE 3: Por serem estruturas com as quais se estava a ter um primeiro contacto, achou-se por bem não tentar, num trabalho tão curto, prosseguir muito mais este estudo.

Até porque uma formulação mais geral ainda, poderá passar por trabalhar com polimatroides ou polimatroides discretos, cujo tempo não permitiu já abordar, ...

(Como referência ver [He] da bibliografia).

Capítulo 3

Artigo sobre a noção e caracterizações de transversal da união de matroides

Neste artigo introduz-se a noção de transversal da soma de matroides, fazendo-se uma caracterização das transversais. Acaba por se conseguir provar serem as bases da restrição do matroide soma ao complementar de um subconjunto de istmos.

Este trabalho dos autores R. Cordovil, J.A. Dias da Silva e Amélia Fonseca foi apresentado em 1987, antes mesmo do trabalho sobre as "colorações da soma de cópias de um matroide" que vimos anteriormente. Tal não deixa de ser curioso por este ser, como veremos, um trabalho menos básico que o primeiro (no sentido de que aquele envolvia da teoria de matroides quase exclusivamente a definição de matroide) e que de alguma forma nos dá mais informação que percebemos poder obter com o estudo da partição de rank do matroide.

É essa informação, a meu ver, que permite perceber melhor a verdadeira importância deste artigo, na aplicação ao caso particular da união de k cópias do mesmo matroide, sobretudo no caso dum matroide vectorial, pelos resultados surpreendentes que daí conseguimos obter[1].

Sugiro por isso ao leitor que comece por ler o artigo que apresentarei, tomando contacto com os resultados verdadeiramente gerais para a união de

[1]Este artigo nasceu precisamente dum estudo correspondente para famílias de vectores, efectuado duma forma algébrica por Amélia Fonseca [DSF], que se verificou depois ser ainda válido para a união de quaisquer matroides.

matroides quaisquer. Que atente depois nalguns resultados de Álgebra linear apresentados que dele se conseguem obter. Por fim, se interessado, que volte a ler a versão geral, porventura com um maior ânimo e familiaridade com os conceitos, descobrindo então talvez muitas mais aplicações do que aquelas aqui referidas ...

INTRODUÇÃO

Seja S um conjunto finito.

Consideremos $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroides sobre o conjunto S.

Denotando ρ_i a função de rank de M_i e $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$, vem que:

$$M = M_1 \vee \cdots \vee M_k = \vee_{i=1}^{k} M_i = \{I_1 \cup \cdots \cup I_k \subseteq S : \rho_i(I_i) = |I_i|, 1 \leq i \leq k\}$$

Notemos que dados $I_1 \in \mathscr{I}(M_1), \ldots, I_k \in \mathscr{I}(M_k)$ $(\rho_i(I_i) = |I_i|)$ disjuntos dois a dois, temos que $I = I_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} I_k$ é independente de $\vee_{i=1}^{k} M_i$ e verifica

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i(I) \geq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(I_i) = \sum_{i=1}^{k} |I_i| = |I| \tag{3.1}$$

Teremos no entanto, em geral, conjuntos independentes I da soma de matroides tais que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(I) > |I|$.

Chamaremos transversais parciais de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ aos independentes de M em que se dá igualdade em 3.1 .

Definição.

- *T é transversal parcial de $M(S)$ se i) $T \in \mathscr{I}(M)$ e ii) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T) = |T|$.*

  OU (o que se prova trivialmente ser equivalente)

  Uma transversal parcial de $M(S)$ é um conjunto $T \subseteq S$ tal que existem k conjuntos I_i disjuntos dois a dois tais que

  $$T = I_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} I_k \ \text{ e } \ I_i \text{ é base de } M_i(T)$$

- *Chamamos transversal de M a uma transversal parcial maximal (para a relação de inclusão).*

Exemplo. *Seja* $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

Tomemos $M_1 = U_2$ *o matroide uniforme de rank 2 e* $M_2 = U_3$ *o matroide uniforme de rank 3, ambos sobre o conjunto* S.

Então $M = M_1 \vee M_2$ *é o matroide livre em* S.

Tem-se que as únicas transversais parciais são os conjuntos S *e* $\emptyset$, *já que estes são transversais parciais e que* $\forall\ \emptyset \neq J \subsetneq S,\ J \in \mathscr{I}(M)$ *mas* $\rho_1(J) + \rho_2(J) > |J|$.

OBSERVAÇÃO: Dada $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$ família de subconjuntos de S, chamamos transversal de $\mathscr{A}$ a um conjunto X tal que exista uma bijecção $\pi : X \to J = \{1, \ldots, k\}$ com $x \in A_{\pi(x)}$, $\forall x \in X$.

Ora tal conceito é distinto do agora apresentado.

Estão no entanto relacionados. Se tomarmos $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, M_i(S)$ dado por:

i) $\rho_i(E \setminus A_i) = 0$

ii) $\rho_i(A) = 1,\ \forall A \subseteq A_i$

vem então que X é transversal da família $\mathscr{A} \Rightarrow X$ é transversal da soma de matroides $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.

Como podemos constatar pelo exemplo anterior, o conjunto das transversais parciais da soma de matroides como aqui definidas não é o conjunto de independentes dum matroide (já que no exemplo tal implicaria, a existir tal matroide N, que $\forall X \subseteq S, X \in \mathscr{I}(N)$, visto S ser parcial transversal. Viu-se no entanto que o único outro subconjunto de S parcial transversal da soma de matroides era o $\emptyset$).

Podemos já enunciar o principal teorema do artigo

Teorema. *Seja* $M(S) = \vee_{i=1}^{k} M_i(S)$. *Prova-se então que:*

(1) Existe um subconjunto $S' \subseteq S$ *máximo de entre os subconjuntos* $X \subseteq S$ *satisfazendo:*

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(X)$$

Tem-se que $S \setminus S'$ *é um subconjunto do conjunto de istmos de* M.

(2) $T \subseteq S$ *é uma transversal de* M *se e só se* T *é base do matroide* $M(S')$.

Lemas e proposições sobre Transversais da Soma de Matroides

Dados $M_1, \ldots, M_k$ matroides sobre S, seja $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.
Vimos já, no capítulo da soma de matroides:

- que M tem função de rank

$$\rho : 2^S \to \mathbb{Z}$$

$$\rho(X) = \min_{A \subseteq X} \{ \sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) + |X \setminus A| \}, \ \forall X \subseteq S$$

- que

Lema (1). *$X \subseteq S$ é independente de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ se e só se*

$$\forall A \subseteq X, \sum_{i=1}^{k} \rho_i(A) \geq |A|$$

- e que

Lema (2). *$C \subseteq S$ é circuito de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ se e só se*
é subconjunto minimal de S satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) = |C| - 1$.

Propriedade 1. *Dado C um circuito e $s \in C$ (quaisquer), temos que $C \setminus \{s\}$ é uma transversal parcial.*

Por definição de circuito, temos que $C \setminus \{s\}$ é independente de M.
[Mostremos pois que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{s\}) = |C \setminus \{s\}|$]
Sendo C circuito e logo $C \setminus \{s\}$ independente, temos pelos lemas anteriores que

$$|C| - 1 = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(C) \geq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{s\}) \geq |C \setminus \{s\}| = |C| - 1$$

Donde as desigualdades acima são mesmo igualdades e portanto $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{s\}) = |C \setminus \{s\}|$.

$\therefore$ C circuito de M, $e \in C \Rightarrow$ $C \setminus \{e\}$ é transversal de M.

Proposição 1. *Dada B uma base de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$, existe uma parcial transversal $T \subseteq B$ máxima a respeito da inclusão no conjunto das transversais parciais contidas em B.*

Tem-se mesmo o resultado mais forte: dadas T_1, T_2 transversais parciais de M, com $T_1, T_2 \subseteq B$, então $T_1 \cap T_2$ e $T_1 \cup T_2$ (ambas $\subseteq B$) são ainda transversais parciais de M

__dem__. Seja B uma base de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.

Sejam T_1, T_2 transversais parciais, com $T_1, T_2 \subseteq B$ (quaisquer).

Então $T_1 \cap T_2 \subseteq B$ e $T_1 \cup T_2 \subseteq B$, sendo B base de $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$, pelo que são conjuntos independentes de M.

Logo, pelo lema 1, $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cup T_2) \geq |T_1 \cup T_2|$

$\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cap T_2) \geq |T_1 \cap T_2|$

Donde $|T_1 \cup T_2| + |T_1 \cap T_2| \leq$

$\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cup T_2) + \sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cap T_2) \leq$ (por submodularidade das funções rank ρ_i)

$\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1) + \sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_2) =$ (pois T_1 e T_2 são transversais)

$|T_1| + |T_2| =$

$|T_1 \cup T_2| + |T_1 \cap T_2|$

Logo as desigualdades acima são mesmo igualdades, pelo que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cup T_2) = |T_1 \cup T_2|$ e $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T_1 \cap T_2) = |T_1 \cap T_2|$ e portanto $T_1 \cup T_2$ e $T_1 \cap T_2$ são mesmo transversais parciais de M.

Mas então e dado que $\emptyset$ é transversal parcial de M contida em B, podemos considerar $T \subseteq B$ máximo para a relação de inclusão satisfazendo a propriedade de ser transversal parcial de M.

Corolário 1. *Seja B uma base de M e $T \subseteq B$ a transveral parcial máxima em B, como na proposição.*

Tem-se que $S \setminus B = \overline{T}^M \setminus T = \cap_{i=1}^{k} (\overline{T}^{M_i} \setminus T)$

__dem__. [$S \setminus B = \overline{T}^M \setminus T$:]

[$\subseteq$] Seja $a \in S \setminus B$ (qualquer).

Então $C(a, B) \subseteq B \cup \{a\}$. Denotemos $C(a, B) = C$.

Mas pela propriedade 1, $C \setminus \{a\}$ é uma transversal parcial de M, contida em B.

Pela definição de T, tem-se então mesmo que $C \setminus \{a\} \subseteq T$.

Donde $a \in \overline{C \setminus \{a\}}^M \subseteq \overline{T}^M$, ou seja $a \in \overline{T}^M$.

$\therefore S \setminus B \subseteq \overline{T}^M$.

Como $T \subseteq B$, então vem mesmo $S \setminus B \subseteq \overline{T}^M \setminus T$.

[$\supseteq$] Por definição de fecho, como T é um independente contido na base B, então $\overline{T}^M \cap B = T$.

Logo $\overline{T}^M \setminus T = \overline{T}^M \setminus (\overline{T}^M \cap B) = \overline{T}^M \setminus B \subseteq S \setminus B$.

[$\overline{T}^M \setminus T = \cap_{i=1}^k (\overline{T}^{M_i} \setminus T)$**:**]

[$\subseteq$] Seja $x \in \overline{T}^M \setminus T$ (qualquer).

Consideremos então um circuito $C \subseteq T \cup \{x\}$ tal que $x \in C$.

Dado que C é circuito, vem que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(C \setminus \{x\}) = |C| - 1 = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(C)$.

Logo, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \rho_i(C \setminus \{x\}) = \rho_i(C)$.

Ou seja $x \in \overline{C \setminus \{x\}}^{M_i} \subseteq \overline{T}^{M_i}$ sendo que por hipótese $x \notin T$.

$\therefore \overline{T}^M \setminus T \subseteq \cap_{i=1}^k (\overline{T}^{M_i} \setminus T)$.

[$\supseteq$] Seja $x \in \cap_{i=1}^k (\overline{T}^{M_i} \setminus T)$ (qualquer).

Então $\rho_i(T \cup \{x\}) = \rho_i(T)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Logo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(T \cup \{x\}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(T) \overset{\text{T é transversal parcial}}{=} |T| < |T+1| = |T \cup \{x\}|$.

Ou seja, pelo lema 1, $T \cup \{x\}$ é dependente em M.

Donde $x \in \overline{T}^M$ sendo que por hipótese $x \notin T$.

$\therefore \overline{T}^M \setminus T \supseteq \cap_{i=1}^k (\overline{T}^{M_i} \setminus T)$

NOTA: Apenas esta inclusão utiliza o facto de T ser transversal.

De facto a primeira é válida para $T \subseteq S$, conjuntos quaisquer.

OBSERVAÇÃO:

1. Deste corolário sai, do facto de $S \setminus B \subseteq \overline{T}^M \setminus T$ e por contas que se apresentam abaixo, que $B \setminus T$ é conjunto de istmos de M.

2. Em particular, vem que então B é a única base de M que contém T, pelo que T é então mesmo uma transversal de $M(S)$.

Contas: $B \setminus T$ é conjunto de istmos.

<u>dem.</u> Seja $x \in B \setminus T$ (qualquer).

Suponhamos com vista a um absurdo que x não é istmo de M.

Então, por uma das caracterizações de istmo, consideremos C circuito com $x \in C$.

Donde, pelo raciocínio auxiliar abaixo existe um circuito fundamental $C(y, B)$ com $y \neq x$ e $x \in C(y, B)$.

Mas então pelo propriedade 1, $C(y, B) \setminus \{y\}$ é transversal parcial contida em B.

Logo pela PROPOSIÇÃO 1, $C(y, B) \setminus \{y\} \subseteq T$ o que é ABSURDO, pois $x \in C(y, B) \setminus \{y\} \subseteq T$ e por hipótese $x \notin T$ já que $x \in B \setminus T$.

Raciocínio auxiliar: De facto, temos que $C \setminus \{x\} = I'$ é independente de M, pelo que pode ser estendido a uma base B', sendo que $x \notin B'$ (pois $I' \cup \{x\} = C$ é dependente).

Pelo axioma da troca das bases $\exists y \in B'$ tal que $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ é base (e em particular $y \neq x$, já que $x \notin B'$).

Logo $C(y, B)$ é circuito fundamental de B, contendo y por definição e x pois $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ é base.

Vem pois que se o matroide $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ não tiver istmos, então as transversais de M são exactamente as bases de M.

A Proposição que se segue indica-nos, em geral, quando é que uma base do matroide $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ é uma transversal.

Proposição 2. *São equivalentes:*

1. *Uma base B de M é uma transversal de M*
2. $\rho(S) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S)$
3. *Toda a base B de M, admite uma partição $B = B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_k$, com B_i base de $M_i(S)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$*
4. *Toda a base de M é uma transversal de M*

dem. $[(1) \Rightarrow (2)]$ Seja B uma base de M que é uma transversal (qualquer).

Temos então que $\rho(S) = \rho(B) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(B) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S)$, tendo-se a última igualdade porque, como já observado, toda a base da união de matroides $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ é união de bases dos matroides M_i.

$[(2) \Rightarrow (3)]$

Suponhamos que $\rho(S) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S)$.

Seja B uma base de $M(S)$ (qualquer).

Então $B = I_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} I_k$, com $I_i \in \mathscr{I}(M_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Logo $|B| = |I_1| + \cdots + |I_k|$.

Mas $|B| = \rho(S) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S)$, sendo que $I_i \in \mathscr{I}(M_i) \Rightarrow |I_i| \leq \rho_i(S)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Logo $|I_i| = \rho_i(S), \forall i \in \{1, \ldots, k\}$, sendo $I_i \in \mathscr{I}(M_i)$, ou seja I_i é base de $M_i(S)$.

[(3) $\Rightarrow$ (4)] Seja B uma base de M (qualquer).

Por (3) consideremos $B = B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_k$, com B_i base de $M_i(S)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Em particular B_i é base de $M_i(B)$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Donde B base de M é transversal de M.

[(4) $\Rightarrow$ (1)] Óbvio.

Corolário 2. *Sejam $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$ matroides sobre S e X um independente de M.*

São equivalentes:

(a) X é transversal de M

(b) $\overline{X}^M$ é um subconjunto maximal de S satisfazendo

$$\rho(\overline{X}^M) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{X}^M)$$

dem. Seja X um independente de M(qualquer).

$[(a) \Rightarrow (b)]$

Suponhamos que X é transversal de M.

Dado que X é base de $M(\overline{X}^M)$, vem pela anterior PROPOSIÇÃO 2 que $\rho(\overline{X}^M) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{X}^M)$.

[É maximal nestas condições?]

Seja $Z \subseteq S$, com $\overline{X}^M \subseteq Z$, satisfazendo $\rho(Z) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(Z)$ (qualquer).

Então, pensando no matroide $M(Z)$, viria que X é transversal de $M(Z)$.

Mas $X \subseteq Z$, sendo pois que para qualquer base Y de $M(Z)$ que contenha o conjunto independente X, se tem pela PROPOSIÇÃO anterior que Y é transversal de $M(Z)$, sendo que $X \subseteq Y$.

Donde vem que $X = Y$ (por definição de transversal como transversal parcial maximal).

Logo X é base de $M(Z)$ e portanto $\overline{X}^M \supseteq Z$.

Logo $\overline{X}^M = Z$, ou seja $\overline{X}^M$ é conjunto maximal como pretendido.

$[(b) \Rightarrow (a)]$
Suponhamos (b).

Suponhamos com vista a um absurdo que X não verifica $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(X) = |X|$.

Então, como X é conjunto independente de M (e logo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(X) \geq |X|$), temos que $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(X) > |X|$.

Logo $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{X}^M) > |X|$.

Donde, por (b), $\rho(\overline{X}^M) > |X|$.

Ou seja $\rho(X) > |X|$, o que é absurdo por ρ ser função de rank e logo $\rho(X) \leq |X|, \forall X \subseteq S$.

$\therefore \sum_{i=1}^{k} \rho_i(X) = |X|$, ou seja, sendo $X \in \mathscr{I}(M)$, temos que X é transversal parcial de M.

Se tivermos T transversal de M com $X \subseteq T$, então pela implicação já provada, $\overline{T}^M$ é subconjunto maximal de S satisfazendo $\rho(\overline{T}^M) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{T}^M)$.
Mas, por $X \subseteq T \Rightarrow \overline{X}^M \subseteq \overline{T}^M$ e por X verificar (b), temos que $\overline{X}^M = \overline{T}^M$.

Sendo X e T conjuntos independentes e $X \subseteq T$ tal implica que $X = T$.

Logo X é transversal de M.

Teorema Principal

Podemos finalmente provar o teorema principal.

Teorema. *Seja* $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.
Então:

1. *Existe* $S' \subseteq S$ *máximo de entre os conjuntos* $X \subseteq S$ *tais que*

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(X)$$

   Tem-se que $S \setminus S'$ *está contido no conjunto dos istmos de* $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.

2. $T \subseteq S$ *é transversal de* M *se e só se é base de* $M(S')$.

NOTA: Por esta demonstração envolver alguns detalhes que a tornam menos fácil de ler de seguida, estes serão indicados entre linhas, podendo ser lidos só no final, para certeza da correção das contas que justificam os raciocínios.

<u>**dem.**</u> Seja $M = \vee_{i=1}^{k} M_i$.

[1.] [Mostremos que $S' \subseteq S$ maximal satisfazendo $\rho(X) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(X)$ é complementar dum conjunto de istmos]

Seja S' um subconjunto maximal de S satisfazendo $\rho(S') = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S')$.

Então pela PROPOSIÇÃO 2, as transversais de $M(S')$ são as suas bases.

Pelo Corolário 2 anterior e pela maximalidade na definição de S' temos, conforme contas abaixo, que

i) $\rho(\overline{S'}^M) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{S'}^M)$

Donde vem em particular, por S' ser maximal nestas condições, que então $\overline{S'}^M = S'$.

ii) Toda a base de $M(S')$ é transversal de $M(S)$.

(Contas:) [i)]

[$\geq$] $\rho(\overline{S'}^M) = \rho(S') = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S') = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{S'}^{M_i}) \geq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{S'}^M)$,

pois temos que $x \in \overline{S'}^M \Rightarrow x \in \overline{S'}^{M_i}, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ e logo $\overline{S'}^M \subseteq \overline{S'}^{M_i}$. Donde $\rho_i(\overline{S'}^{M_i}) \geq \rho_i(\overline{S'}^M)$.

[$\leq$]Pela expressão da função de rank, temos sempre $\rho(X) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(X), \forall X \subseteq S$

Logo tem-se a igualdade em i).

[ii)]

De facto B base de $M(S')$ é transversal de $M(S')$, logo transversal parcial de $M(S)$.

Considerando T transversal de $M(S)$, contendo a transversal parcial B, vem, pelo corolário 2, que $\rho(\overline{T}^M) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{T}^M)$, donde pela maximalidade na definição de S', vem que $S' = \overline{T}^M$.

Logo B e T são bases de $M(S') = M(\overline{T}^M)$, donde $(B \subseteq T \Rightarrow B = T)$.

Ou seja, B é transversal de $M(S)$.

[Mostremos então que $S \setminus S'$ é conjunto de istmos de M:]

Denotemos S'' o conjunto de istmos de M.

FACTO: Dada B uma base de M, temos que $B \cap (S \setminus S'')$ é base de $M(S \setminus S'')$. <u>dem.</u> De facto, sendo independente, suponhamos com vista a um absurdo que $B \cap (S \setminus S'')$ está contido propriamente numa base B_1 de $M(S \setminus S'')$. Então sendo $B_1 \in \mathscr{I}(M)$ e S'' conjunto de istmos de M vem que $B_1 \cup S''$ é independente de M com $B_1 \cup S'' \supsetneq B$, o que é absurdo dado B ser base de M.

[Mostremos então que $S \setminus S'' \subseteq S'$, (que é o mesmo que ver que $S \setminus S'$ é conjunto de istmos de M)]

Seja B' uma base de $M(S')$ (qualquer).

Então, por ii), B' é transversal de $M(S)$.

Consideremos B uma base de $M(S)$ contendo B'.

Então, pelo facto acima observado, $B \cap (S \setminus S'')$ é base de $M(S \setminus S'')$ estando contido em B base de M. Como este matroide $M(S \setminus S'')$ não tem istmos (já os tirámos!) sabemos (conforme [LR] da Bibliografia), que $\rho(S \setminus S'') = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S \setminus S'')$ e portanto $B \cap (S \setminus S'')$ é pela PROPOSIÇÃO 2 transversal parcial de $M(S \setminus S'')$ e logo de M, estando contida em B base de M.

Sendo pois B' transversal de M e $B \cap (S \setminus S'')$ transversal parcial de M ambas contidas na base B, vem pela PROPOSIÇÃO 1 que $B \cap (S \setminus S'') \subseteq B'$.

Logo $S \setminus S'' = \overline{B \cap (S \setminus S'')}^M \subseteq \overline{B'}^M = \overline{S'}^M = S'$ em que a última das igualdades vem pela observação i).

[Mostremos por fim que um tal conjunto maximal é mesmo máximo nas condições de 1)]

Seja S'_2 um outro conjunto maximal satisfazendo $\rho(S'_2) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(S'_2)$.

Seja B'_2 uma base de $M(S'_2)$ e B_2 uma base de M contendo B'_2.

Ora $B_2 \cap S'$ é base de $M(S')$, uma vez mais porque $S \setminus S' \subseteq S''$ é conjunto de istmos de M.

Por ii) temos que B'_2 e $B_2 \cap S'$ são transversais de M ambas contidas na base B_2 de M.

Logo, pela PROPOSIÇÃO 1, vem que $B'_2 = B_2 \cap S'$.

Donde $S'_2 = \overline{S'_2}^M = \overline{B'_2}^M = \overline{B_2 \cap S'}^M = \overline{S'}^M = S'$ (vindo a primeira igualdade por i) e a segunda por B'_2 ser base de $M(S'_2)$).

$\therefore \exists$ conjunto máximo nas condições de 1).

[2.]

[$\Leftarrow$] Por ii) se B é uma base de $M(S')$, então B é transversal de $M(S)$.

[$\Rightarrow$] Seja T uma transversal de $M(S)$ (qualquer).

Então, pelo anterior corolário 2 , $\overline{T}^M$ é subconjunto maximal de S satisfazendo $\rho(\overline{T}^M) = \sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i(\overline{T}^M)$.

Donde, por definição de S', vem que $\overline{T}^M = S'$.

Ou seja T é base de $M(S')$.

Aplicações e interpretações dos resultados

Os resultados obtidos são, como vimos, de um carácter geral, válidos para a união de quaisquer matroides.

No entanto, o valor e importância de tais resultados tornam-se evidentes e porventura mais surpreendentes (pois que compreendidos), quando se considera o caso particular da união de q cópias dum mesmo matroide, $M^{(q)}$ $(= \underbrace{M \vee \cdots \vee M}_{\text{q vezes}})$, e pensando no matroide vectorial (caso sobre o qual também o primeiro artigo incidia).

Seja então M um matroide sem loops, k o seu covering number e $\rho = (\rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_1, \ldots, \rho_k - \rho_{k-1})$ a sua partição de rank.

Notemos que pelos resultados deste artigo que acabámos de estudar poderíamos obter agora neste caso, resultados como os que se seguem.

OBSERVAÇÃO: Uma transversal T de $M^{(j)}$ satisfaz $T = T_1 \dot\cup \cdots \dot\cup T_j$, com T_i base de $M_i(T)$ e $|T_1| = |T_2| = \cdots = |T_j| \geq 1$.

<u>dem.</u> Seja T uma transversal de $M^{(j)}$ (qualquer).

Por definição de transversal, $T = T_1 \dot\cup \cdots \dot\cup T_j$, com T_i base de $M_i(T)$.

Consideremos, por absurdo, $i \neq l \in \{1, \ldots, j\}$ tais que $|T_i| < |T_l|$.

Então, por I3) da definição de matroide, $\exists x \in T_l \setminus T_i : T_i \cup \{x\} \in \mathscr{I}(M)$.

Logo T_i não é base de $M_i(T)$ (pois $T_i \subseteq T_i \cup \{x\} \subseteq T$ e $T_i \cup \{x\} \in \mathscr{I}(M)$), o que é ABSURDO.

$\therefore |T_i| = |T_l|, \forall i, l \in \{1, \ldots, j\}$.

Proposição. *Seja $j \in \{1, \ldots\ k-1\}$.*

Então existe uma transversal T de $M^{(j)}$, com $T = T_1 \dot\cup \cdots \dot\cup T_j$, com T_i base de $M_i(T)$, $|T_1| = |T_2| = \cdots = |T_j| := t$, com $\rho_j - \rho_{j-1} \geq t \geq \rho_{j+1} - \rho_j$.

<u>dem</u>. Conforme 1º artigo, consideremos $B = B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_k$ família saturada de um matroide M.

Temos então que $B' = B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_j$ é base de $M^{(j)}$.

Logo, voltando a este artigo, sabemos que $B' = B_1 \dot\cup \cdots \dot\cup B_j$ contém uma transversal de $M^{(j)}$, $T = T_1 \dot\cup \cdots \dot\cup T_j$, com T_i base de $M_i(T)$, $|T_1| = |T_2| = \cdots = |T_j| := t$.

$[t \geq \rho_{j+1} - \rho_j]$ Dado que, pelo corolário, $\overline{T}^{M^{(j)}} \supseteq S \setminus (B_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_j)$ e $\overline{T}^{M^{(j)}} = (\cap_{i=1}^{k} \overline{T}^{M})$ temos em particular que $\overline{T}^{M} \supseteq B_{j+1}$ e logo

$$(t = |T_j| =)\ \rho(\overline{T}^{M}) \geq |B_{j+1}|$$

$[\rho_j - \rho_{j-1} \geq t$**:**$]$

De facto, temos que $T \subseteq B' = B_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_j$.

Logo $T = \underbrace{(T \cap B_1)}_{\leq |B_1|} \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} \underbrace{(T \cap B_j)}_{\leq |B_j|}$, sendo que $(T \cap B_i) \in \mathscr{I}(M)$, $\forall i \in \{1, \ldots, j\}$.

Sabemos que $\rho_{M^{(j)}}(T) = |T| = j\rho(T)$.

Ou seja $|T| = \underbrace{|T \cap B_1|}_{\leq \rho(T)} + \cdots + \underbrace{|T \cap B_j|}_{\leq \rho(T)} = j\rho(T)$.

Donde $|T \cap B_i| = \rho(T)$, $\forall i \in \{1, \ldots, j\}$.

Em particular $\rho_j - \rho_{j-1} = |B_j| \geq |T \cap B_j| = \rho(T) \geq |T_i|$, $\forall i \in \{1, \ldots, j\}$.

Logo $\rho_j - \rho_{j-1} \geq t$, c.q.d.

Concretamente, a ideia desta proposição vem da álgebra linear da seguinte situação.

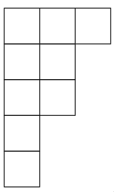
Seja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vectores não nulos, dum dado espaço vectorial.

Seja M o matroide vectorial associado ao conjunto de vectores S.

Consideremos $\rho = (\rho_1 - \rho_0, \rho_2 - \rho_1, \ldots, \rho_k - \rho_{k-1})$ partição de rank de M (matroide com covering number k).

Sabemos então pelos resultados deste artigo, por exemplo que existem $(k-1)$ conjuntos de vectores disjuntos dois a dois, com um mesmo número t de vectores, com $\rho_{k-1} - \rho_{k-2} \geq t \geq \rho_k - \rho_{k-1}$, e com todos os conjuntos a gerarem exactamente o mesmo espaço vectorial!

Ou mesmo, dado $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ qualquer, sabemos existirem $(k-i)$ conjuntos disjuntos de vectores de V com um mesmo número t de vectores, com $\rho_{k-i} - \rho_{k-i-1} \geq t \geq \rho_{k-i+1} - \rho_{k-i}$, e com todos os conjuntos a gerar o mesmo espaço vectorial.

Exemplo. *Por exemplo, se M tiver uma partição de rank ρ, com um diagrama de Young associado do seguinte tipo*  *, podemos imediatamente concluir que X contém 4 vectores colineares! (Basta pensar numa família saturada $B = B_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_5$ associada a ρ e lembrar que por este artigo e pela*

Proposição anterior, $M^{(4)}$ admite uma transversal $T = T_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}T_4$, com $1 \geq |T_1| = |T_2| = \cdots = |T_4| \geq 1$)

Conclusões análogas podem mesmo ser tiradas para o (mais relevante) caso geral de famílias de vectores.

Note-se que outros resultados do artigo permitem-nos tirar mais informação deste género, que poderemos utilizar consoante o que pretendermos saber em cada caso a considerar.

Lembrando por exemplo que dado C circuito da união de matroides $M^{(j)}$ e x elemento de C, qualquer, então $C \setminus \{x\}$ é transversal de $M^{(j)}$ poderemos também argumentar como se segue:

Consideremos $B = B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_k$ uma família saturada de um matroide M. Consideremos $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Sabemos que $B' := B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_j$ é base de $M^{(j)}$.

Seja $x \in B \setminus (B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_j)$ (qualquer).

Então $(B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_j)\cup\{x\}$ é conjunto dependente e temos (ver introdução) portanto um circuito fundamental $C(B', x) \subseteq (B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_j) \cup \{x\}$.

Logo, pela Propriedade 1 deste artigo, temos que $C(B', x) \setminus \{x\}$ ($\subseteq (B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_j) \cup \{x\}$) é uma transversal de $M^{(j)}$.

Exemplo. *Num matroide com partição de rank como no diagrama seguinte,*

x				

considerando uma família saturada $B = B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_5$ associada a ρ, pensando em $B = B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_4$ base de $M^{(4)}$ e $x \in B \setminus (B_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}B_4)$ como indicado esquematicamente, sabemos existir uma transversal, como uma das duas em baixo esquematizadas, isto é, com $\rho(T) = 2$ ou $\rho(T) = 3$

T	T			
T	T			
T	T			
T	T			
x				

T	T	T		
T	T	T		
T	T	T		
T	T	T		
x				

Ou seja, pelo que vimos, o artigo dá-nos caracterizações das transversais da soma de matroides, conceito que encontramos muito naturalmente por exemplo na Álgebra linear, sendo que os resultados aqui obtidos nos permitem tirar conclusões que à partida são pouco óbvias e que recorrendo a outras técnicas matemáticas podem ser de muito difícil demonstração (como é o caso do resultado algébrico em que se baseia este artigo, cuja demonstração Amélia Fonseca conseguiu obter por cálculos puramente algébricos, mas cuja explicitação para o caso geral de um número arbitrário de famílias de vectores torna a sua apresentação algo complicada).

Refira-se uma vez mais que, mais do que isso, os resultados aqui obtidos valem como se viu para o caso geral da estrutura de matroide e para a operação de união de matroides distintos quaisquer.

Bibliografia

[Ai] AIGNER, Martin, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[Bo] BOLLOBAS, Béla, *Graph Theory, An Introductory Course*, Springer-Verlag, 1991.

[CDF] CORDOVIL, R., DIAS DA SILVA, José & FONSECA, Amélia, *On the notion of transversals of a sum of matroids*, in Portugaliae Mathematica, Vol.45, Fasc 3, 1988.

[DS1] DIAS DA SILVA, J. A., *Apontamentos da disciplina de Combinatória*, 2008.

[DS2] DIAS DA SILVA, J.A., *On the μ-Colorings of a Matroid*, in Linear and Multilinear Algebra, 1990, Vol.27, pp.25-32, 1990.

[DSF] DIAS DA SILVA, J.A. & FONSECA, Amélia, *On the multilinearity partition of an irreducible character*, in Linear and Multilinear Algebra, 1987, Vol. 20, pp. 203-218, 1987.

[Fu] FULTON, William, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts 35, 1997.

[Go] GOEMANS, Michael X., *Lecture 13, Topics in Combinatorial Optimization* in http://math.mit.edu/~goemans/18433S07/matroidunion.pdf, Março, 10, 2004.

[He] HERZOG, Jurgen & HIBI, Takayuki, *Discrete Polymatroids*, in http://arxiv.org/PS_ cache/math/pdf/0307/0307236v1.pdf, Julho, 17, 2003.

[Ke] KELMANS, A. K. & POLESSKII, V.P., *Extremal Sets and Covering and Packing Problems in Matroids*, in Amer. Math. Soc. Trans (2), Vol. 158, 1994.

[La] LANG, Serge, *Algebra Linear*, Edgard Blucher, 1971.

[Lo] LOVÁSZ, László, KORTE, Bernhard H & SCHRADER, Rainer, *Greedoids*, Springer, 1991.

[LR] LOVÁSZ, László, & RECSKI, A., *On the sum of Matroids*, in Acta Math. Acad. Sci. Hung. (1973), 329-333, 1973.

[Mi] MITROFANOV, M., *Bimatroids and Gauss Decomposition*, in European Jornal of Combinatorics 28 (2007), pp 1180-1195, 2007.

[Mu] MUROTA, Kazuo, *Matrices and matroids for systems analysis*, Springer, 1999.

[Ox] OXLEY, James G., *Matroid Theory*, Oxford Science Publications, 1992.

[Sch] SCHRIJVER, Alexander, *Combinatorial Optimization*, Volume B, Springer, 2003.

[We] WELSH, D.J.A., *Matroid Theory*, Academic Press, 1976.