

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO NUMA PERSPETIVA DE
DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO:
UM ESTUDO COM ALUNOS DO 1.º CICLO

Maria de Fátima Pista Calado Mendes

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO
DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO



A APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO NUMA PERSPETIVA DE
DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO:
UM ESTUDO COM ALUNOS DO 1.º CICLO

Maria de Fátima Pista Calado Mendes

DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO
DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Orientadoras: Prof.^a Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Prof.^a Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira

2012

Resumo

Este estudo tem como objetivos: (i) compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem e (ii) descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. Especificamente caracteriza: os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação, a sua evolução, as dificuldades manifestadas e os aspetos do sentido de número revelados. Analisa, ainda, o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem.

O quadro teórico integra duas temáticas essenciais: o sentido de número e a aprendizagem da multiplicação.

O estudo segue uma metodologia de *design research* na modalidade de experiência de ensino. Os participantes são os alunos de uma turma do 3.º ano e a sua professora. A experiência de ensino na turma concretizou-se, durante um ano letivo, numa trajetória de aprendizagem. Esta foi construída, colaborativamente, pela investigadora e pela professora, que a desenvolveu na aula.

As conclusões sobre os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação evidenciam que: (i) utilizam uma grande diversidade de procedimentos; (ii) há alunos que usam vários procedimentos para realizar um mesmo cálculo; (iii) há procedimentos mais frequentes que outros e (iv) há alunos que têm preferência pelo uso de determinados procedimentos. Os resultados mostram, ainda, que a evolução dos procedimentos parece ser suportada pelas características das tarefas propostas (contextos, números e sua articulação e sequenciação) e pelo ambiente da aula. Ainda assim, esta evolução não é linear, nem se processa do mesmo modo para todos os alunos – alguns persistem em certos procedimentos e outros voltam a usar procedimentos menos potentes, perante tarefas com características particulares. A evolução dos procedimentos dos alunos evidencia, também, o desenvolvimento do seu sentido de número.

Palavras-chave – Aprendizagem da multiplicação; sentido de número; procedimentos dos alunos; trajetórias de aprendizagem; tarefas matemáticas.

Abstract

This study aims to (i) understand how third grade pupils evolve in the learning of multiplication within a learning trajectory focused on number sense development, and (ii) to describe and analyze the potential of the proposed tasks and sequences of tasks for pupils' multiplication learning. It characterizes the procedures used by pupils when solving multiplication tasks, their evolution, the difficulties they face and the aspects of number sense they reveal. The study also analyses the contribution of tasks and sequences of tasks to pupils' learning.

The theoretical framework includes two key topics: number sense and multiplication learning.

The study develops as a teaching experiment within a design research methodology. The participants are the pupils of one third grade class and their teacher. The teaching experiment occurred over one school year in a learning trajectory. The trajectory was built collaboratively between the researcher and the teacher, who developed it in the classroom.

The findings on the procedures used by pupils when solving multiplication tasks show that (i) pupils use a great variety of procedures; (ii) some pupils use several procedures to perform the same calculation; (iii) some procedures are used more frequently than others; and (iv) there are some pupils who have a preference for certain procedures. Results also show that the procedures evolution seems to be supported by the characteristics of the proposed tasks (contexts, numbers and their coordination and sequencing) and by the classroom culture.

Nevertheless, this evolution is not linear, nor does it occur in the same way for all pupils – some persist in certain procedures and others use less powerful procedures when presented with tasks with specific characteristics. The evolution of the pupils' procedures is related to the development of their number sense.

Keywords – Multiplication learning; number sense; multiplication procedures; learning trajectory; mathematical tasks.

Agradecimentos

Às minhas orientadoras, Professoras Doutoras Joana Brocardo e Hélia Oliveira, com quem muito aprendi, pelo apoio que sempre me prestaram, pelas suas sugestões e críticas pertinentes e pela confiança que sempre me transmitiram.

À Isabel, professora da turma do 3.º ano com quem tive o privilégio de trabalhar, por ter aceite o meu desafio, pela sua imensa disponibilidade, entusiasmo e profissionalismo, sem os quais este estudo não teria sido possível realizar.

Aos alunos da turma do 3.º ano, com quem muito aprendi.

Ao Instituto Politécnico de Setúbal e à Escola Superior de Educação, por me terem proporcionado condições favoráveis ao desenvolvimento deste estudo.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia, pela bolsa que me concedeu para a realização deste doutoramento (SFRH/BD/39016/2007).

A todos os colegas e amigos que, em seminários ou conversas informais, me ajudaram a refletir sobre este estudo.

À Joana, mais uma vez, pela sua amizade inquestionável e pelo modo como, ao longo dos anos, sempre me desafiou intelectualmente, acreditando que eu era capaz.

À Catarina, pela sua amizade e também pela disponibilidade que sempre encontrou para me apoiar, encorajar, discutir diferentes aspetos deste trabalho e rever algumas das suas partes.

À Ana, pela sua amizade, pelas discussões que sempre se prontificou a encetar, pelas palavras de encorajamento e pela disponibilidade com que reviu um capítulo deste estudo.

Ao Jean-Marie, pela amizade e pelos esclarecimentos que sempre me prestou.

Ao Mário, pela sua infinita disponibilidade e paciência com que me acompanhou em todas as fases deste trabalho e, sobretudo, na fase de edição final.

À minha família pelo apoio incondicional e, em particular, aos meus pais, pelo seu exemplo.

Ao Mário, mais uma vez, por todas as *pequenas grandes coisas*.

À Rita e ao Bernardo, a quem dedico este trabalho, pelo prazer de os ter como filhos.

Índice

Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1. Motivações, objetivos e questões do estudo.....	1
1.2. Pertinência do estudo	7
1.3. Organização do estudo	10
Capítulo 2 - O sentido de número.....	13
2.1. Significado de sentido de número	14
2.2. Modelos de caracterização do sentido de número.....	18
2.3. Analisar e avaliar o sentido de número	26
2.4. Orientações curriculares e sentido de número.....	30
2.5. Desenvolver o sentido de número	34
Capítulo 3 - A aprendizagem das operações aritméticas.....	49
3.1. Aprendizagem das operações aritméticas – diferentes perspectivas.....	50
3.2. Adição e subtração	53
3.2.1. Adição e subtração com números-dígito	53
3.2.1.1. Estruturas conceptuais	53
3.2.1.2. Estruturas conceptuais e métodos usados	54
3.2.2. Adição e subtração com números multidígitos.....	57
3.2.2.1. Estruturas conceptuais	57
3.2.2.2. Estruturas conceptuais e métodos usados	62
3.2.2.3. Estratégias de adição e subtração com números multidígitos.....	64
3.3. Multiplicação e divisão	69
3.3.1. Tipos semânticos ou modelos de situações	69
3.3.2. Modelos intuitivos	72
3.3.3. Estratégias de multiplicação e divisão.....	76
3.3.3.1. Estratégias de multiplicação e divisão com números-dígito.....	76
3.3.3.2. Estratégias de multiplicação e divisão com números multidígitos	83
3.3.4. Análise comparativa das estratégias de multiplicação e divisão com números multidígitos	96
3.4. Cálculo mental, cálculo algorítmico e sentido de número	100
3.4.1. Cálculo mental: Que significados?	101
3.4.2. Cálculo algorítmico: Que significados?	105
3.4.3. Métodos, estratégias, algoritmos, procedimentos: Que significados?	110

3.4.4. Cálculo mental e sentido de número: Relação de interdependência.....	116
3.4.5. Cálculo algorítmico e cálculo mental: Que relação na sala de aula?.....	124
3.5. Aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número nas orientações curriculares	133
3.5.1. Aprendizagem da multiplicação e desenvolvimento do sentido de número	134
3.5.2. A operação multiplicação	136
3.5.3. Relação entre a multiplicação e a divisão	142
Capítulo 4 - Metodologia	145
4.1. Opções metodológicas	146
4.2. Contexto e participantes	155
4.3. Colaboração com a professora	162
4.4. Métodos de recolha de dados	164
4.5. Critérios de qualidade	169
4.6. Recolha de dados.....	171
4.7. Análise de dados	174
Capítulo 5 - A experiência de ensino na turma de Isabel.....	185
5.1. As experiências numéricas dos alunos associadas ao tema Números e Operações.....	186
5.2. A conjectura que orientou a experiência de ensino	187
5.2.1. Dimensão de conteúdo da conjectura	188
5.2.1.1. As ideias associadas à multiplicação	189
5.2.1.2. As estratégias associadas à multiplicação	190
5.2.1.3. Os modelos associados à multiplicação	191
5.2.2. Dimensão pedagógica da conjectura	193
5.2.2.1. Perspetivas gerais sobre a aprendizagem da Matemática	194
5.2.2.2. A cultura de sala de aula	195
5.2.2.3. As tarefas e os seus contextos.....	197
5.2.2.4. Os tipos de tarefas e a sua alternância	200
5.2.2.5. A relação entre a multiplicação e a divisão	202
5.2.2.6. O universo numérico das tarefas.....	203
5.3. A trajetória de aprendizagem da multiplicação.....	204
5.4. A construção da trajetória de aprendizagem	208
5.4.1. As sequências de tarefas concretizadas	210
5.4.2. A preparação das aulas da experiência de ensino	221
5.4.3. As aulas da experiência de ensino	222

Capítulo 6 - Os procedimentos usados pelos alunos e a sua evolução.....	239
6.1. Os procedimentos usados pelos alunos	241
6.1.1. Caracterização dos procedimentos	241
6.1.2. Os procedimentos em cada tarefa e subtarefa.....	256
6.1.3. Síntese	275
6.2. A evolução dos procedimentos usados pelos alunos.....	276
6.2.1. Multiplicação com números naturais.....	277
6.2.1.1. As primeiras tarefas	277
6.2.1.2. As primeiras cadeias numéricas	280
6.2.1.3. Os primeiros pósteres e o respetivo congresso matemático.....	283
6.2.1.4. As tarefas que incluem a disposição retangular.....	294
6.2.1.5. Síntese	317
6.2.2. Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	318
6.2.2.1. As primeiras tarefas	319
6.2.2.2. As tarefas com contexto de dinheiro	326
6.2.2.3. Síntese	338
6.2.3. Divisão com números naturais	340
6.2.3.1. As primeiras tarefas	341
6.2.3.2. As tarefas cuja resolução se pode apoiar no modelo retangular	354
6.2.3.3. Síntese	367
6.2.4. Multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal	369
6.2.4.1. A primeira tarefa	370
6.2.4.2. A tarefa que inclui a identificação de regularidades.....	376
6.2.4.3. Síntese	385
6.3. As dificuldades dos alunos	388
6.3.1. Associadas ao contexto das tarefas.....	389
6.3.2. Relativas aos números utilizados nas tarefas.....	392
6.3.3. Na realização dos registos escritos	393
6.3.4. Na compreensão dos raciocínios de outros.....	395
6.3.5. A gestão das dificuldades dos alunos	397
6.3.6. Síntese	399
Capítulo 7 - O sentido de número dos alunos	401
7.1. O conhecimento e a destreza com os números.....	402
7.1.1. Sentido da ordenação dos números	402
7.1.2. Múltiplas representações dos números	403
7.1.3. Sentido das grandezas, absoluta e relativa, dos números	408

7.1.4.	Sistemas de referência	410
7.1.5.	Síntese.....	412
7.2.	O conhecimento e a destreza com as operações.....	413
7.2.1.	Compreensão do efeito das operações.....	414
7.2.2.	Compreensão das propriedades matemáticas	417
7.2.3.	Compreensão das relações entre as operações.....	425
7.2.4.	Síntese.....	427
7.3.	A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	428
7.3.1.	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias	429
7.3.2.	Inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes	433
7.3.3.	Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado	436
7.3.4.	Síntese.....	439
Capítulo 8 - As potencialidades das tarefas e sequências de tarefas.....		441
8.1.	A sequência 4 de tarefas de multiplicação com números naturais	442
8.1.1.	Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 10 e os procedimentos dos alunos.....	443
8.1.2.	A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos.....	447
8.1.3.	Síntese.....	451
8.2.	A sequência 6 de tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	452
8.2.1.	Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 17 e os procedimentos dos alunos.....	452
8.2.2.	A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos.....	457
8.2.3.	Síntese.....	462
8.3.	A sequência 9 de tarefas de divisão com números naturais	464
8.3.1.	Os contextos e os números das tarefas 25 e 26 e os procedimentos dos alunos	464
8.3.2.	A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos.....	469
8.3.3.	Síntese.....	474
8.4.	A sequência 10 de tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal	475
8.4.1.	Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 30 e os procedimentos dos alunos.....	475
8.4.2.	A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos.....	479
8.4.3.	Síntese.....	482

Capítulo 9 - Conclusão	485
9.1. Conclusões do estudo.....	486
9.1.1. Procedimentos usados pelos alunos: diversidade, frequência e preferência	487
9.1.1.1. Diversidade dos procedimentos.....	487
9.1.1.2. Mais do que um procedimento na mesma resolução	489
9.1.1.3. Frequência dos procedimentos	489
9.1.1.4. Preferência por certos procedimentos.....	492
9.1.2. Evolução dos procedimentos usados pelos alunos	495
9.1.2.1. Dos procedimentos de contagem aos procedimentos multiplicativos	496
9.1.2.2. Progredindo para procedimentos mais potentes e flexíveis mas não linearmente	498
9.1.3. Dificuldades manifestadas pelos alunos	503
9.1.4. Sentido de número dos alunos.....	506
9.1.5. Potencialidades das tarefas e sequências de tarefas.....	512
9.2. A concluir	516
Referências bibliográficas	525
Anexos	543

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 – Mapa aproximado da progressão na aprendizagem (Sherin & Fuson, 2005, p. 381)	80
Tabela 3.2 – Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação.....	98
Tabela 3.3 – Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão	99
Tabela 4.1 – Métodos, fontes principais e formas de registo dos dados	169
Tabela 4.2 – Síntese cronológica do processo de recolha de dados	174
Tabela 4.3 – Organização dos grupos de tarefas e sequências de tarefas.....	179
Tabela 4.4 – Organização das tarefas para análise dos procedimentos dos alunos de acordo com as suas características	180
Tabela 4.5 – Sequências de tarefas analisadas relativamente às suas potencialidades e grupos a que pertencem.....	184
Tabela 6.1 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas	241
Tabela 6.2 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação com números naturais	258
Tabela 6.3 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	259
Tabela 6.4 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de divisão com números naturais	260
Tabela 6.5 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal	261
Tabela 8.1 – A tarefa 10, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos	443
Tabela 8.2 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos nas tarefas 10 e 12 da sequência 4	449
Tabela 8.3 – A subtarefa 4 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos	453
Tabela 8.4 – A subtarefa 5 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos	454
Tabela 8.5 – A subtarefa 6 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos	456
Tabela 8.6 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 6	459
Tabela 8.7 – As tarefas 25 e 26, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos	465
Tabela 8.8 – A articulação e sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 9	472
Tabela 8.9 – A tarefa 30, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos	477
Tabela 8.10 – A articulação e sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 10	480
Tabela 9.1 – Os procedimentos usados pelos alunos	487
Tabela 9.2 – Quadro de referência para examinar o sentido de número (McIntosh et al., 1992)	522

Tabela 9.3 – Proposta de quadro de referência para examinar o sentido de número reajustando o de McIntosh et al. (1992)	523

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Modelo de ensino (Yang, 2003a).....	36
Figura 3.1 – Tipos de algoritmos escritos (adaptado de Thompson, 2003b, p. 172).....	106
Figura 3.2 – Algoritmo padronizado e formal, de acordo com Thompson (2003b).....	107
Figura 3.3 – Algoritmos não padronizados e formais (de acordo com Thompson, 2003b)	107
Figura 3.4 – Algoritmos acessíveis da multiplicação, de acordo com Fuson (2003b)	108
Figura 3.5 – Passagem gradual do cálculo em coluna para o algoritmo da multiplicação, de acordo com Treffers et al. (2008).....	109
Figura 5.1 – Elementos da dimensão de conteúdo da conjectura sobre a aprendizagem da multiplicação	193
Figura 5.2 – Perspetivas sobre a aprendizagem da Matemática e a cultura de sala de aula.....	197
Figura 5.3 – Processo cíclico de resolução de problemas e de cadeias numéricas.....	202
Figura 5.4 – Aspetos que contribuíram para a construção da trajetória de aprendizagem	209
Figura 5.5 – Registo de Enzo, a propósito da subtarefa 3 – tarefa 8B	224
Figura 5.6 – Registo de Guilherme, a propósito da subtarefa 3 – tarefa 8B	224
Figura 5.7 – Registo de Enzo e Guilherme a propósito da tarefa 26.....	224
Figura 5.8 – Alguns pósteres afixados, a propósito da tarefa 10.....	231
Figura 5.9 – Parte do quadro com os registos dos cálculos iniciais da primeira cadeia da tarefa 12.....	236
Figura 5.10 – Parte do quadro com os últimos cálculos da primeira cadeia da tarefa 12	237
Figura 6.1 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3 – tarefa 8B.....	242
Figura 6.2 – Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 2 – Tarefa 13	243
Figura 6.3 – Resolução de Bernardo da tarefa 25	243
Figura 6.4 – Resolução de Mariana da subtarefa 1 – tarefa 8A	244
Figura 6.5 – Resolução de Raquel da subtarefa 4 – tarefa 7	245
Figura 6.6 – Resolução de Gustavo de parte da tarefa 2	245
Figura 6.7 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 2 – Tarefa 30	246
Figura 6.8 – Resolução de Joana e Patrícia da subtarefa 1 – tarefa 20.....	246
Figura 6.9 – Resolução de Luís da subtarefa 3 – tarefa 7	247
Figura 6.10 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3 – tarefa 7	248
Figura 6.11 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 1 – tarefa 29	248
Figura 6.12 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10	249
Figura 6.13 – Resolução de Francisco da subtarefa 4 – tarefa 7.....	250
Figura 6.14 – Resolução de Enzo e Francisco da subtarefa 2 – Tarefa 10.....	250
Figura 6.15 – Resolução de David e Diogo da subtarefa 2 – tarefa 10	251
Figura 6.16 – Resolução de Francisco da subtarefa 3 – tarefa 8B	252
Figura 6.17 – Resolução de David, Enzo e Francisco da subtarefa 2 – tarefa 13	253
Figura 6.18 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 – tarefa 13.....	253
Figura 6.19 – Resolução de Ana Rita e Miguel de uma parte da tarefa 26	254
Figura 6.20 – Resolução de Enzo e Francisco da subtarefa 1 – tarefa 10	255
Figura 6.21 – Resolução de Duarte da subtarefa 4 – tarefa 8A.....	255
Figura 6.22 – Resolução de Eva da subtarefa 4 – tarefa 8B.....	257
Figura 6.23 – Resolução de Cristóvão da subtarefa 2 – tarefa 7	262
Figura 6.24 – Resolução de Mariana de parte da tarefa 2	263
Figura 6.25 – Resolução de Hugo e José da subtarefa 1 – tarefa 29	264

Figura 6.26 – Resolução de Bernardo e Duarte da subtarefa 3 – tarefa 29	264
Figura 6.27 – Resolução de Hugo e José da subtarefa 2 – tarefa 29	266
Figura 6.28 – Resolução de Gustavo e Leandra das subtarefas 1 e 2 – tarefa 30.....	266
Figura 6.29 – Resolução de Leandra da subtarefa 2 – tarefa 19.....	267
Figura 6.30 – Resolução de Enzo e Guilherme de parte da tarefa 26	268
Figura 6.31 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 – tarefa 13.....	269
Figura 6.32 – Resolução de Mariana da subtarefa 3 – tarefa 7	270
Figura 6.33 – Resolução de Mariana da subtarefa 1 – tarefa 16	271
Figura 6.34 – Resolução de Mariana e Eva da subtarefa 2 – tarefa 30	271
Figura 6.35 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 20	272
Figura 6.36 – Resolução de Ana Rita da tarefa 25.....	273
Figura 6.37 – Resolução de Ana Rita e Miguel de uma parte da tarefa 26	273
Figura 6.38 – Resolução de Ana Rita e Miguel da tarefa 29.....	274
Figura 6.39 – Registos efetuados por Isabel no quadro a propósito do cálculo 4×5	281
Figura 6.40 – Excerto do póster de David e Diogo da subtarefa 3 – tarefa 4.....	285
Figura 6.41 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da subtarefa 1 – tarefa 4	286
Figura 6.42 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 4	287
Figura 6.43 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 4	289
Figura 6.44 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da subtarefa 1 – tarefa 4	290
Figura 6.45 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 4	290
Figura 6.46 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da subtarefa 3 – tarefa 4	292
Figura 6.47 – Resolução de David da subtarefa 4 – tarefa 7	295
Figura 6.48 – Resolução de Patrícia da subtarefa 4 – tarefa 7	295
Figura 6.49 – Resolução de Duarte da subtarefa 4 – tarefa 8A.....	296
Figura 6.50 – Resolução de Francisco da subtarefa 4 – tarefa 8A	297
Figura 6.51 – Resolução de David da subtarefa 2 – tarefa 8B	298
Figura 6.52 – Resolução de Miguel da subtarefa 4 – tarefa 8B	298
Figura 6.53 – Resolução de Gustavo da subtarefa 4 – tarefa 8B.....	300
Figura 6.54 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 1 – tarefa 10.....	302
Figura 6.55 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 1 – tarefa 10.....	303
Figura 6.56 – Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 1 – tarefa 10.....	305
Figura 6.57 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10	306
Figura 6.58 – Resolução de Eva e Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 10.....	307
Figura 6.59 – Cálculos intermédios realizados por Eva e Guilherme na subtarefa 2 – tarefa 10.....	307
Figura 6.60 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 2 – tarefa 10.....	308
Figura 6.61 – Resolução de Maria Rita e Patrícia da subtarefa 2 – tarefa 10.....	310
Figura 6.62 – Resolução de David e Diogo da subtarefa 3 – tarefa 10	311
Figura 6.63 – Parte do póster de Eva e Guilherme com a resolução da subtarefa 3 – tarefa 10.....	312
Figura 6.64 – Parte do póster de Luís e Raquel com a resolução da subtarefa 3 – tarefa 10	314
Figura 6.65 – Aspeto de parte do quadro após a discussão sobre capacidades de garrafas de água	320
Figura 6.66 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 13	321
Figura 6.67 – Resolução de Bernardo e João da subtarefa 3 – tarefa 13.....	322
Figura 6.68 – Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 3 – tarefa 13.....	323
Figura 6.69 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 4 – tarefa 13	324
Figura 6.70 – Resolução de Francisco da tarefa 16.....	327

Figura 6.71 – Aspeto do quadro depois da discussão sobre relações entre os valores das moedas	328
Figura 6.72 – Resolução de Enzo e Raquel da subtarefa 4 – tarefa 17	330
Figura 6.73 – Resolução de Joana e Patrícia de parte da subtarefa 6 – tarefa 17	333
Figura 6.74 – Aspeto do quadro depois da discussão sobre a resolução de Joana e Patrícia	333
Figura 6.75 – Resolução de Ana Rita e Miguel de parte da subtarefa 6 – tarefa 17	334
Figura 6.76 – Resolução de Gustavo de parte da subtarefa 6 – tarefa 17.....	335
Figura 6.77 – Resolução de Enzo e Raquel de parte da subtarefa 6 - tarefa 17	335
Figura 6.78 – Resolução de Eva e Guilherme de parte da subtarefa 6 – tarefa 17.....	336
Figura 6.79 – Resolução de David e Francisco de parte da subtarefa 6 – tarefa 17.....	336
Figura 6.80 – Resolução de Diogo da subtarefa 1 – tarefa 19.....	342
Figura 6.81 – Resolução de David da subtarefa 1 – tarefa 19.....	342
Figura 6.82 – Resolução de Mariana da subtarefa 2 – tarefa 19	344
Figura 6.83 – Resolução de Gustavo da subtarefa 2 – tarefa 19	344
Figura 6.84 – Resolução de Duarte da subtarefa 2 – tarefa 19.....	346
Figura 6.85 – Póster de Joana e Patrícia da tarefa 20.....	348
Figura 6.86 – Resolução de Guilherme, Gustavo e Leandra da subtarefa 2 – tarefa 20	349
Figura 6.87 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 20	351
Figura 6.88 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 1 – tarefa 20	352
Figura 6.89 – Resolução de Diogo e Maria Rita da subtarefa 1 – tarefa 20.....	353
Figura 6.90 – Cálculo, efetuado por Eva, de 48×5 utilizando a disposição retangular	355
Figura 6.91 – Resolução de Bernardo da subtarefa 1 – tarefa 25.....	355
Figura 6.92 – Resolução de Bernardo da subtarefa 2 – tarefa 25.....	356
Figura 6.93 – Resolução de Guilherme da subtarefa 1 – tarefa 25.....	356
Figura 6.94 – Resolução de Gustavo da subtarefa 1 – tarefa 25	357
Figura 6.95 – Resolução de Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 25.....	358
Figura 6.96 – Resolução de Duarte da subtarefa 2 – tarefa 25.....	359
Figura 6.97 – Excerto do póster de Ana Rita e Miguel relativo à tarefa 26.....	360
Figura 6.98 – Excerto do póster de Hugo e José relativo à tarefa 26.....	361
Figura 6.99 – Excerto do póster de Enzo e Guilherme relativo à tarefa 26	363
Figura 6.100 – Excerto do póster de Cristóvão e Francisco relativo à tarefa 26.....	363
Figura 6.101 – Excerto do póster de Diogo e Maria Rita relativo à tarefa 26.....	365
Figura 6.102 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 1 – tarefa 29	371
Figura 6.103 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 29.....	372
Figura 6.104 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 3 – tarefa 29	373
Figura 6.105 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 3 – tarefa 29	374
Figura 6.106 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29.....	375
Figura 6.107 – Resolução de Bernardo e Duarte da subtarefa 2 – tarefa 30	377
Figura 6.108 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 1.1 – tarefa 30.....	377
Figura 6.109 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 1.1 – tarefa 30	379
Figura 6.110 – Resolução de Cristóvão e Tiago da subtarefa 1.1 – tarefa 30	380
Figura 6.111 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 1.2 – tarefa 30	380
Figura 6.112 – Resolução de Hugo e José da subtarefa 1.2 – tarefa 30	381
Figura 6.113 – Resolução de Bernardo e Duarte da subtarefa 1.2 – tarefa 30	382
Figura 6.114 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3.1 – tarefa 30.....	383
Figura 6.115 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3.1 – tarefa 30	384
Figura 7.1 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 2 – tarefa 1	404
Figura 7.2 – Resolução de Cristóvão da subtarefa 4 – tarefa 7	405

Figura 7.3 – Resolução de Diogo da subtarefa 2 – tarefa 7.....	406
Figura 7.4 – Resolução de Leandra da subtarefa 1 – tarefa 16.....	407
Figura 7.5 – Resolução de Maria Rita e Patrícia da subtarefa 3 – tarefa 10.....	409
Figura 7.6 – Tabela construída por Cristóvão relacionando as capacidades 1l; 1,5l; 2l e 2,5l..	411
Figura 7.7 – Resolução de Francisco de $93 \div 3$	412
Figura 7.8 – Resolução de Bernardo de $84 \div 7$	412
Figura 7.9 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3.1 – tarefa 30.....	415
Figura 7.10 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 2.1 – tarefa 30	418
Figura 7.11 – Resolução de Cristóvão da subtarefa 2.1 – tarefa 3	419
Figura 7.12 – Resolução de Enzo e Francisco de parte da subtarefa 2 – tarefa 10	420
Figura 7.13 – Resolução de David e Diogo de parte da subtarefa 2 – tarefa 10	420
Figura 7.14 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10	423
Figura 7.15 – Resolução de Gustavo de parte da subtarefa 6 – tarefa 17.....	423
Figura 7.16 – Parte da resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29	424
Figura 7.17 – Resolução de Raquel da subtarefa 4 – tarefa 8A	426
Figura 7.18 – Parte 1 da resolução de Cristóvão e Mariana da subtarefa 2 – tarefa 20	430
Figura 7.19 – Parte 2 da resolução de Cristóvão e Mariana da subtarefa 2 – tarefa 20	430
Figura 7.20 – Excertos dos registos no quadro relativos às resoluções de Joana, Tiago, Luís e Duarte da subtarefa 2 – tarefa 19.....	432
Figura 7.21 – Procedimento de verificação de $256:8=32$ de Cristóvão e Francisco da tarefa 26.....	438
Figura 7.22 – Parte final da resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29.....	438

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo apresenta uma introdução ao estudo que realizei e inclui as minhas motivações, os objetivos e as questões que nortearam a investigação efetuada e a justificação da sua pertinência. Termina com a explicitação do modo como está organizado o relatório do estudo.

1.1. Motivações, objetivos e questões do estudo

Documentos internacionais de referência, tais como os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, realçam que o desenvolvimento do sentido de número dos alunos é a principal finalidade do tema Números e Operações, no currículo de Matemática, ao longo de toda a escolaridade (NCTM, 1991, 2007). Pode mesmo afirmar-se que, nos primeiros anos do Ensino Básico, o desenvolvimento do sentido de número constitui um dos propósitos da Educação Matemática.

Em Portugal, no que se refere à Educação Matemática no Ensino Básico, vive-se uma mudança significativa com a entrada em vigor do novo Programa de Matemática do

Ensino Básico (que constitui um reajustamento dos Programas de 1990/91), no ano letivo de 2009/10 (ME, 2007). Este Programa apresenta uma nova perspetiva para o ensino dos números e das operações aritméticas, associada ao desenvolvimento do sentido de número (Ponte, 2008). Quando comparado com os Programas anteriores, introduz algumas alterações no foco da aprendizagem do tema Números e Operações. De facto, é assumido explicitamente que “o seu estudo [dos números e operações] tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo” (ME, 2007, p. 7).

Ora, no nosso país, só muito recentemente, as temáticas do sentido de número e do seu desenvolvimento são discutidas ao nível da Educação Matemática, tanto por investigadores como por professores. A publicação de materiais curriculares para educadores e professores do Ensino Básico, no âmbito de um projeto de investigação – Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspetivas e Exigências Curriculares (DSN) – e a implementação a nível nacional do Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) para professores do 1.º e 2.º ciclos têm contribuído para a discussão que tem sido feita, ultimamente, sobre o desenvolvimento do sentido de número, em fóruns de natureza diversa que incluem investigadores e professores de vários níveis de ensino.

A relevância da discussão em torno do sentido de número, a nível internacional, bem como a sua pertinência e atualidade a nível nacional, articuladas com o meu contexto profissional contribuíram para despertar o interesse pessoal e profissional nesta temática.

De facto, no período que antecede este estudo (entre 2004 e 2007), estive envolvida no projeto de investigação DSN, cuja temática geral está relacionada com o desenvolvimento do sentido de número em crianças dos cinco aos doze anos. Mais especificamente, o projeto incluiu duas vertentes. A primeira, de desenvolvimento curricular, correspondeu à conceção e elaboração de tarefas, que foram exploradas na sala de aula e reformuladas de acordo com a reflexão realizada a partir da sua experimentação. A segunda vertente, de investigação educacional, procurou compreender o modo como as crianças desenvolvem o sentido de número, sobretudo em contexto de resolução de problemas, e identificar práticas profissionais e o tipo de currículo que

favorecem esse desenvolvimento (tanto ao nível dos números naturais como dos números racionais). As aprendizagens realizadas pela equipa do projeto incluem um conjunto de aspetos centrais: a organização da aprendizagem tendo em conta as produções dos alunos, a potencialidade educativa da construção de trajetórias de aprendizagem (Simon & Tzur, 2004), a importância de selecionar tarefas que estimulem a aprendizagem dos alunos e, finalmente, a pertinência de estudar o papel do professor no desenvolvimento do sentido de número dos alunos (Brocardo et al., 2008).

Durante três anos e no contexto da minha vida profissional, enquanto docente de uma instituição de ensino superior de formação de professores, estive integrada no PFCM para professores do 1.º e do 2.º ciclo. Em conjunto com a restante equipa de formadores, tive oportunidade de aprofundar alguns aspetos relacionados com o conhecimento matemático, didático e curricular dos professores destes níveis de escolaridade. Para além da conceção de tarefas, da organização e da planificação do ensino, discutidas com os professores no terreno, destaco uma vertente deste Programa particularmente rica, enquanto promotora de reflexão dos formandos e formadores – as atividades de acompanhamento/supervisão. Nesse âmbito, os formandos planificavam aulas em conjunto com os seus pares e o formador e eram incentivados por este último, que acompanhava algumas das suas aulas, a desenvolver uma atitude de reflexão sobre a sua prática. Esta reflexão decorria no contexto da prática letiva e era suportada, sobretudo, pela análise das produções dos alunos, dos seus contributos para as discussões orientadas pelo professor e da forma como eram conduzidos os diferentes momentos da aula, tendo como pano de fundo a progressão dos alunos em termos da aprendizagem da Matemática.

Ao nível da sala de aula, tanto a propósito do Projeto DSN como através do PFCM, tive oportunidade de me aperceber do modo como os alunos do 1.º ciclo resolvem tarefas associadas ao tema Números e Operações e das dificuldades que, tendencialmente, revelam na utilização de procedimentos de cálculo mental. Aquelas experiências fizeram-me refletir sobre a importância de organizar o ensino construindo trajetórias de aprendizagem e de proporcionar aos alunos tarefas intencionalmente

concebidas, de modo a fazerem emergir e evoluir determinados procedimentos de resolução que promovam o desenvolvimento do sentido de número.

Também a minha experiência enquanto professora e supervisora das práticas pedagógicas, em particular de futuros professores do 1.º ciclo e do 2.º ciclo na variante de Matemática/Ciências da Natureza, justifica o interesse pessoal e profissional em aprofundar temáticas associadas ao desenvolvimento do sentido de número de alunos nos primeiros anos de escolaridade. De facto, a oportunidade para observar e estudar o modo como os alunos pensam matematicamente é uma poderosa componente tanto do desenvolvimento profissional do professor como da formação inicial de professores (Sowder, 2007).

De um modo geral, posso afirmar que a minha experiência profissional e de investigação fizeram emergir interesses e preocupações relacionados com o tema que me proponho estudar. Contudo, a temática do sentido de número é bastante vasta e, em particular, o meu interesse foca-se nos aspetos relacionados com a aprendizagem da multiplicação. Já a minha participação no projeto DSN teve uma incidência particular nesta operação aritmética, pelo que, este estudo constitui uma oportunidade para aprofundar, de modo mais sistemático, esta temática.

Este estudo é centrado nos alunos e seguiu uma modalidade de investigação de experiência de ensino orientada por uma conjectura (Confrey & Lachance, 2000). A conjectura formulada sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número inclui uma dimensão de conteúdo matemático e uma dimensão pedagógica. A dimensão de conteúdo matemático assume o desenvolvimento do sentido de número como eixo orientador da aprendizagem da multiplicação e tem em consideração as grandes ideias associadas a esta operação, os modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e os procedimentos informais dos alunos que se vão transformando em procedimentos baseados nas propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001b). A dimensão pedagógica da conjectura inclui aspetos relativos ao ambiente da sala de aula e às tarefas a propor aos alunos, tendo como base uma perspetiva de aprendizagem da Matemática com compreensão. As dimensões de conteúdo matemático e pedagógico da conjectura foram fundamentais para concretizar, na

sala de aula, uma trajetória de aprendizagem daquela operação. Nesse âmbito, foi efetuado um trabalho conjunto, por mim, na qualidade de investigadora, e pela professora titular da turma onde foi desenvolvida a experiência de ensino. Esta foi realizada numa turma do 3.º ano do Ensino Básico, ao longo do ano letivo de 2008/2009 e teve em conta um conjunto de pressupostos de base, associados às dimensões de conteúdo e pedagógica da conjectura formulada, e que passo a enunciar:

- A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número deve ser organizada tendo em consideração as grandes ideias (*big ideas*) associadas a esta operação, os modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e os procedimentos informais dos alunos que, gradualmente, se vão transformando em procedimentos baseados nas propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001b);
- A aprendizagem da Matemática deve ser realizada com compreensão (NCTM, 2007), integrando e inter-relacionando as aprendizagens individuais dos alunos com as suas aprendizagens em interação social. Daí a necessidade de construir uma certa cultura de sala de aula onde, a par das práticas matemáticas, é fundamental o estabelecimento de determinadas normas sociais e normas sociomatemáticas (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Yackel, 2001; Yackel & Cobb, 1996).
- O desenvolvimento do sentido de número, em geral, e a aprendizagem da multiplicação, em particular, devem ser sustentados pela exploração de contextos adequados (Fosnot, 2007; Fosnot & Dolk, 2001b; Fraivillig, 2001; Reys, 1994; Treffers & Buys, 2008).

Para além dos pressupostos elencados anteriormente foram, ainda, tomadas opções no sentido de diversificar e alternar o tipo de tarefas propostas aos alunos, de acordo com os objetivos de aprendizagem e com a previsível atividade matemática que proporcionam. Assim, os alunos realizaram dois tipos diferentes de tarefas matemáticas: problemas e cadeias numéricas.

Uma vez que a experiência de ensino teve como propósito global a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, o universo numérico das tarefas propostas incluiu não só os números naturais mas outros números

racionais não negativos, em particular, na sua representação decimal. Houve, ainda, uma escolha intencional dos números envolvidos nas diferentes tarefas, tendo em conta a progressão em termos da ordem de grandeza dos números e as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre eles.

Finalmente, um outro aspeto que foi considerado na experiência de ensino foi a inclusão de tarefas cujo contexto é de divisão, privilegiando a relação entre esta operação e a multiplicação, de acordo com o preconizado por autores como Fosnot (2007), Fosnot e Dolk (2001b), ME (2007) e van den Heuvel-Panhuizen (2008).

Considerando os pressupostos de base e as opções enunciados anteriormente, foi construída uma trajetória de aprendizagem da multiplicação que concretizou a experiência de ensino na sala de aula. Aquela foi sendo adaptada, alterada e melhorada pela investigadora em conjunto com a professora da turma, face ao trabalho que ia sendo realizado na sala de aula bem como a fatores imprevisíveis que surgiram no contexto da aula, da escola e/ou do Agrupamento de escolas. Nesse âmbito foram construídas onze sequências de tarefas, realizadas ao longo de um ano letivo, num total de trinta aulas.

Situando-se no contexto apresentado, este estudo tem dois objetivos: (1) compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem e (2) descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Relacionadas com o primeiro objetivo enunciado, elaborei as seguintes questões:

- Quais os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação¹?
- Como evoluem os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?
- Que dificuldades manifestam os alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?

¹ A experiência de ensino inclui, também, tarefas com contexto de divisão, tal como foi, anteriormente, explicitado.

- Quais os aspetos do sentido de número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?

Relacionada com o segundo objetivo indicado, elaborei a seguinte questão:

- Quais as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número dos alunos?

Opto por usar, nesta investigação, o termo procedimento, considerando que este inclui a escolha, por parte dos alunos, das opções associadas à estrutura da tarefa² e o modo como organizam e realizam os cálculos que efetuam, de acordo com os números envolvidos³.

1.2. Pertinência do estudo

A pertinência do estudo que efetuei é justificada pelas preocupações nacionais e internacionais sobre o desenvolvimento do sentido de número (NCTM, 1991, 2007; ME, 2007) que, tal como foi referido anteriormente, constituem, também, fatores de motivação para a realização do mesmo. Neste estudo, entende-se sentido de número como uma compreensão global do indivíduo sobre os números e as operações e a capacidade para usar essa compreensão, de modo flexível, na elaboração de juízos matemáticos e de estratégias úteis na manipulação dos números e das operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Diversos autores afirmam que a investigação disponível associada à aprendizagem da multiplicação tem sido em menor número quando comparada com a relacionada com as operações adição e subtração (Fuson, 2003a; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). A escassez de investigação é realçada por Verschaffel et al. (2007), em particular, no que diz respeito às estratégias usadas pelos alunos para resolver problemas de multiplicação (e de divisão).

² Considerada estratégia, na aceção de Beishuizen (1997).

³ Considerado procedimento, na aceção de Beishuizen (1997).

Brocardo e Serrazina (2008) referem a importância de pensar os números e as operações no currículo em termos do desenvolvimento do sentido de número e identificam alguns aspetos-chave.

[...] as decomposições do número usando a estrutura de dobro, de cinco e de dez; a estrutura multiplicativa dos números (não apenas baseada na decomposição decimal mas incluindo também decomposições como $80=4\times 20$); os sentidos e estrutura das operações e as relações entre elas. (p. 101)

Uma ideia fundamental que surge como pano de fundo para desenvolver o sentido de número e, em particular, os aspetos relacionados com a multiplicação, é a construção de uma trajetória de aprendizagem. Uma trajetória de aprendizagem é, segundo Simon (1995), um caminho de aprendizagem orientado por um conjunto de tarefas concebidas pelo professor tendo em conta as ideias e os procedimentos que quer que o aluno desenvolva. Uma trajetória de aprendizagem inclui, simultaneamente, objetivos matemáticos, modelos de pensamento dos alunos, modelos dos professores e investigadores sobre o pensamento dos alunos, sequências de tarefas de ensino e a interação de todos estes aspetos, analisados detalhadamente, do ponto de vista dos processos (Clements & Sarama, 2004).

A trajetória de aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número que concretiza a experiência de ensino inclui um conjunto de sequências de tarefas construídas e exploradas na sala de aula, e assenta nos contextos, nos modelos e nos procedimentos de cálculo associados a esta operação. O seu propósito é a progressão dos alunos em termos da sua aprendizagem, tendo por base as ideias de Treffers e Buys (2008) e de Fosnot e Dolk (2001b) sobre a multiplicação. Segundo estes autores, a ideia que os alunos têm de multiplicação determina a forma como multiplicam, o modelo que usam para organizar os dados e como calculam.

Todos os aspetos referidos anteriormente sobre a multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número devem ser considerados na organização de uma trajetória de aprendizagem relacionada com esta operação. Esta trajetória é inicialmente hipotética e a construção das tarefas e sequências de tarefas que a constituem é determinante. Para além da sua construção, as hipóteses sobre o processo de

aprendizagem dos alunos e o modo como as tarefas são exploradas na sala de aula, promovendo uma determinada ideia, conceito ou procedimento são aspetos relevantes numa trajetória (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). Assim, o professor, além de organizar a exploração das tarefas, a sua discussão e reflexão, vai adaptando a trajetória de aprendizagem inicialmente construída. Este é um processo contínuo e cíclico, dada a natureza hipotética da trajetória e os fatores imprevisíveis que surgem no contexto de sala de aula.

Caracterizar os procedimentos usados pelos alunos e compreender como evoluem dá-nos informação sobre o seu entendimento acerca da multiplicação, uma vez que “as estratégias dos alunos são sempre representativas das suas ideias matemáticas” (Dolk, 2008, p. 51). Deste modo, analisar as produções dos alunos a partir de contextos com significado para eles, identificando os procedimentos utilizados e comparando-os com outros usados anteriormente, possibilita a construção e adequação de trajetórias de aprendizagem, de modo a permitir a evolução das suas ideias matemáticas, em particular, sobre a multiplicação. A pertinência deste estudo é, assim, salientada através do aprofundamento do conhecimento sobre os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e sobre a sua evolução, e no seu contributo para a construção de trajetórias efetivas de aprendizagem desta operação.

Um outro aspeto, relacionado com o anterior, e que justifica também a pertinência deste estudo, prende-se com o desenvolvimento curricular. De facto, organizar o ensino em torno de trajetórias de aprendizagem parece ser uma evolução curricular que tem em conta múltiplas questões associadas à flexibilização e adequação das propostas a colocar aos alunos na aula de Matemática. Como referem vários autores (Clements & Sarama, 2004; Nickerson & Whitacre, 2010; Simon & Tzur, 2004) a construção de trajetórias de aprendizagem é um modo de pensar a aprendizagem de um certo tema, considerando e interrelacionando os múltiplos aspetos em jogo. Além disso, e mais geralmente, a investigação associada a trajetórias de aprendizagem tem como meta global a produção de conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem (Clements & Sarama, 2004).

Finalmente, considerando o meu contexto profissional ligado à formação de professores e futuros professores do Ensino Básico, o estudo poderá acrescentar

conhecimento sobre o modo como os alunos resolvem tarefas de multiplicação, que procedimentos utilizam e como evoluem e, deste modo, contribuir para a reflexão sobre as aprendizagens dos alunos associadas a esta operação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

1.3. Organização do estudo

Este relatório encontra-se organizado em duas partes distintas. Uma relativa à explicitação e discussão das principais referências teóricas associadas aos temas centrais do estudo e outra que corresponde à parte empírica do mesmo.

A primeira parte, para além do capítulo 1, de introdução, onde identifico os objetivos e questões do estudo, inclui os capítulos 2 e 3, onde abordo os temas centrais para esta investigação – o sentido de número e a aprendizagem das operações aritméticas, em particular, da multiplicação.

O capítulo 1 inclui os objetivos e as questões que nortearam a investigação realizada. São, ainda, apresentadas as motivações de carácter profissional que me levaram a aprofundar o conhecimento associado à aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número e fundamentada a sua pertinência.

A fundamentação teórica está organizada em torno de dois eixos: o sentido de número e a aprendizagem das operações, focando-me, concretamente, na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Em cada um dos capítulos faço uma revisão da literatura sobre o tema considerado, discutindo estudos empíricos a ele associado.

O capítulo 2 analisa e discute a temática do sentido de número, diretamente relacionada com as questões do estudo que realizo. São discutidas caracterizações, modelos de sentido de número e investigações associadas à análise e avaliação do sentido de número de alunos. Na última parte do capítulo abordo questões associadas ao desenvolvimento do sentido de número na sala de aula: o papel do professor, o ambiente

de aprendizagem e as tarefas propostas aos alunos. Considerando a vastidão do tema, privilegio as referências a estudos empíricos efetuados com alunos.

No capítulo 3 elaboro uma revisão da literatura onde analiso e discuto estudos sobre a aprendizagem das operações e, em particular, sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de sentido de número. Numa primeira parte são focadas investigações associadas à aprendizagem das operações aritméticas. Alguns destes estudos fundamentam-se em concepções teóricas diferentes das associadas ao desenvolvimento das operações entendido como parte integrante do sentido de número (McIntosh et al., 1992), tal como assumo no estudo que realizo. No entanto, pareceu-me pertinente estudar e analisar investigações enformadas por perspetivas teóricas diferentes da por mim assumida, aprofundando a temática da aprendizagem das operações. Deste modo, faço uma discussão de estudos relacionados com todas as operações aritméticas com números naturais (incluindo o zero), uma vez que a multiplicação, pela sua natureza, está associada a todas as outras operações. No que respeita à operação multiplicação e divisão, uma vez que neste estudo privilegio a relação entre as duas operações, são discutidos estudos empíricos sobre estratégias de cálculo associadas a estas operações. São, ainda, problematizados aspetos associados ao cálculo mental, ao cálculo algorítmico e ao sentido de número e às relações que podem ser estabelecidas entre eles. No que respeita à aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número são analisadas e discutidas as orientações curriculares de diversos países.

A segunda parte deste relatório inclui o capítulo 4, onde apresento e justifico a metodologia seguida, o capítulo 5, onde descrevo a experiência de ensino e os capítulos 6, 7 e 8 de análise dos dados. O capítulo 9 destina-se à conclusão do estudo realizado.

No capítulo 4 apresento e fundamento as opções metodológicas tomadas de acordo com os objetivos e as questões do estudo, o contexto e os seus participantes. São descritos e justificados os métodos de recolha de dados, o processo seguido e os procedimentos de análise dos dados.

No capítulo 5 apresento e fundamento a experiência de ensino realizada na turma da professora Isabel. Começo por referir e justificar as opções associadas à conjectura que

orientou a experiência de ensino e, em seguida, apresento a trajetória de aprendizagem que a concretizou na sala de aula. Explicito e fundamento, detalhadamente, as sequências de tarefas e as respectivas tarefas que constituem a trajetória de aprendizagem. Termino o capítulo com duas secções que clarificam o modo como se organizaram as aulas da experiência de ensino, bem como a sua preparação.

Nos capítulos 6, 7 e 8 descrevo os resultados da análise dos dados. No capítulo 6 apresento os resultados relativos aos procedimentos usados pelos alunos, à sua evolução e às dificuldades manifestadas na resolução das tarefas. No capítulo 7 apresento os resultados da análise dos aspetos do sentido de número manifestado pelos alunos da turma e, no capítulo 8, os resultados do estudo relativos às potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Finalmente, no capítulo 9, de conclusão deste trabalho, discuto os principais resultados, articulando-os com a literatura, e apresento as conclusões do estudo em função das questões enunciadas. Termino com os contributos da investigação e com uma breve reflexão pessoal sobre o percurso realizado, na qual partilho algumas questões que foram surgindo.

Capítulo 2

O sentido de número

Muitas são as investigações que, desde o final dos anos 80 do século XX, fazem tentativas de definir, de modo mais ou menos exaustivo, o significado da expressão “sentido de número”, tanto do ponto de vista da Psicologia (Berch, 2005; Dehaene, 2001; Greeno, 1989, 1991) como do ponto de vista da Educação Matemática (Markovits & Sowder, 1994; McIntosh et al., 1992; Reys, 1994; Sowder, 1992; Sowder & Schappelle, 1989; Yang 2003a).

Há, também, investigações que têm equacionado e discutido as características do sentido de número, identificando, por vezes, as suas componentes (Markovits & Sowder, 1994; McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992; Sowder & Schappelle, 1989; Yang, 2001, 2003a, 2003b, 2005a).

Uma outra linha de investigação, frequentemente associada a experiências de sala de aula, tem-se focado na análise do sentido de número de crianças e adultos. A identificação (ou não) de componentes do sentido de número de alunos e professores e a sua avaliação têm, também, sido alvo de variadas investigações no âmbito desta temática. (Beswick, Muir & McIntosh, 2004; Ferreira, 2002; McIntosh, Reys, Reys, Bana &

Farrell, 1997; Reys & Yang, 1998; Yang, 2005b; Yang, Li & Li, 2008a; Yang, Li & Lin, 2008; Yang & Reys, 2001; Zanzali & Ghazali, 1999).

Finalmente, as questões associadas à forma como se promove, na sala de aula, o desenvolvimento do sentido de número das crianças e dos jovens têm, ainda, sido objeto de numerosas investigações e publicações (Ferreira & Serrazina, 2010; Kaminski, 2002; Nickerson & Whitacre, 2010; Rodrigues, 2010; van de Walle, 2003; Whitacre & Nickerson, 2006; Yang, 2001, 2003a, 2003b, 2005a; Yang, Hsu & Huang, 2004).

Considerando as linhas de investigação anteriormente identificadas, ao longo deste capítulo são realçados os estudos que considero pertinentes e que contribuem para um maior conhecimento associado à temática, bastante abrangente, do desenvolvimento do sentido de número. Em particular, problematizo o que se entende por sentido de número, debruço-me sobre modelos para a sua caracterização, foco modos de o analisar e avaliar, analiso a sua incidência em documentos curriculares relacionados com a aprendizagem da Matemática no Ensino Básico e, por fim, aprofundo o que significa desenvolver o sentido de número na aula de Matemática. Nesta última secção, discuto o papel do professor, o ambiente de aprendizagem e as tarefas de aprendizagem que podem contribuir para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Além disso, apresento uma teoria local de ensino para o desenvolvimento do sentido de número.

2.1. Significado de sentido de número

Apesar de não se saber exatamente a sua origem, a expressão “sentido de número” surge nos Estados Unidos, por oposição a um ensino dos números muito centrado no cálculo algorítmico, rotineiro e formal, onde a compreensão sobre os números e as operações é pouco valorizada. Esta expressão aparece associada à importância de uma compreensão global e intuitiva sobre os números e as operações e de uma flexibilidade no cálculo com números, nas suas diferentes representações. A comparação entre o cálculo ensinado na escola, quase exclusivamente algorítmico, e o tipo de cálculo usado por um adulto na sua vida de todos os dias, muito baseado no

cálculo mental e na estimação, provocou uma reflexão sobre que conhecimento dos números e das suas relações e de modos de calcular faz sentido desenvolver na aula de Matemática. Assim, aspetos relacionados com o uso de diferentes estratégias de cálculo e as suas consequências ao nível dos processos de resolução e das soluções obtidas, começaram a ser discutidos e a expressão “sentido de número” foi ganhando força, expressando as mudanças relacionadas com a aprendizagem dos números e do cálculo (McIntosh et al., 1992).

Sendo uma expressão muito utilizada em contextos distintos, o seu significado é muito amplo e complexo e nem sempre são coincidentes as caracterizações apresentadas. Ainda assim, o desenvolvimento do sentido de número é considerado essencial por muitos educadores matemáticos, sendo referido em documentos de natureza curricular como um dos objetivos centrais da aprendizagem da Matemática, em particular, nos primeiros anos de escolaridade (NCTM, 2000; ME, 2007; Reys, 1994). Reforçando o seu significado holístico e a sua importância na aprendizagem da Matemática, Reys (1994) afirma que o sentido de número “é um modo de pensar que deve atravessar todos os aspetos do ensino e da aprendizagem da matemática” (p. 114). Por sua vez, McIntosh et al. (1992) realçam a sua complexidade, salientando que o desenvolvimento do sentido de número é um processo complexo, associado aos números e às operações, e às relações entre eles.

A conferência *Establishing foundations for research on number sense and related topics* (Sowder & Schappelle, 1989) foi uma das primeiras realizadas no âmbito desta temática e ainda hoje é referenciada como um momento de reflexão importante sobre aspetos associados ao sentido de número. Esta conferência reuniu um conjunto significativo de psicólogos e educadores matemáticos e centrou-se na discussão de questões relacionadas com o entendimento de sentido de número, as suas características e o seu desenvolvimento. Dos trabalhos aí realizados resultaram algumas caracterizações, não forçosamente consensuais, e foram problematizadas as consequências da sua aceitação em termos da atividade e das tarefas a realizar na aula de Matemática de modo a proporcionar o desenvolvimento do sentido de número dos alunos (Case, 1989; Greeno, 1989; Resnick, 1989).

Do ponto de vista da psicologia educacional, houve algumas tentativas de descrever o que se entende por sentido de número, sendo de realçar, nomeadamente, o contributo de Greeno (1989, 1991). De uma forma geral, este autor refere-se ao sentido de número como um conjunto de capacidades cognitivas (*expertise*) que incluem o cálculo mental flexível, a estimação numérica e a estimação associada a juízos quantitativos e a inferências. Greeno considera o sentido de número como uma condição básica do conhecimento do domínio conceptual dos números e das quantidades. Depois dele, muitos outros psicólogos e investigadores, no âmbito da ciência cognitiva, se debruçaram sobre as relações entre o sentido de número, a cognição e a neurologia (Berch, 2005; Dehaene, 2001).

Ao constatar que tanto os educadores matemáticos como os cientistas cognitivos descreviam sentido de número de maneiras muito diferentes, Berch (2005) fez uma análise exaustiva de diversos artigos e publicações sobre o tema, considerando perspetivas e pontos de vista distintos. Dessa análise resultou a identificação de um conjunto de trinta componentes do sentido de número, algumas delas incompatíveis entre si. Exemplificando as grandes disparidades entre essas componentes, Berch compara duas das identificadas. Por um lado, para alguns desses autores, o sentido de número é caracterizado como uma percepção quase intuitiva sobre os números e, por outro, é encarado como uma capacidade superior associada ao significado conceptual da Matemática. Contudo, no seu entendimento, sentido de número é “um constructo muito mais complexo e multifacetado do que ter “simplesmente”⁴ intuições elementares sobre as quantidades” (Berch, 2005, p. 336). O autor refere, ainda, que a aceitação da sua complexidade tem implicações ao nível do seu desenvolvimento na sala de aula, tal como havia já sido mencionado por Greeno (1989, 1991) e Reys (1994).

Do ponto de vista dos educadores matemáticos, muitas são, também, as tentativas para definir e caracterizar o que se entende por sentido de número. Uma delas é a efetuada por Sowder (1989) a partir das suas interpretações pessoais sobre o que foi discutido na conferência *Establishing foundations for research on number sense and*

⁴ Com aspas no original.

related topics (Sowder & Schappelle, 1989). Segunda a autora, os múltiplos entendimentos sobre sentido de número dos participantes na conferência incluem, entre outros, o conhecimento dos números e o modo como podem ser utilizados em determinadas situações, a flexibilidade para usar estratégias de cálculo mental ou de cálculo aproximado, a capacidade para utilizar números de referência apropriados, a compreensão e o uso das diferentes representações dos números e a compreensão dos efeitos relativos das operações numéricas e das suas propriedades (Sowder, 1989).

Também o National Council of Teachers of Mathematics no documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1991) caracteriza o sentido de número como “uma intuição acerca dos números que se forma a partir dos diversos significados do número” (p. 50). Concomitantemente, considera que tem cinco componentes: (i) desenvolvimento de significados acerca do número; (ii) exploração das relações entre os números, usando materiais manipuláveis; (iii) compreensão da grandeza relativa dos números; (iv) desenvolvimento de intuições acerca dos efeitos relativos das operações com números; e (iv) desenvolvimento de padrões de medida de objetos comuns e de situações no seu ambiente (NCTM, 1991, p. 50). O mesmo documento refere, ainda, algumas atividades que promovem o seu desenvolvimento na sala de aula.

De um modo geral, as caracterizações de sentido de número têm pontos comuns: entendem-no como uma noção holística e intuitiva e associam-no a uma compreensão global sobre os números, as operações e as relações entre eles. Mais especificamente, apontam para que o sentido de número inclui o conhecimento acerca da grandeza relativa dos números, acerca dos efeitos relativos das operações com números e ainda o desenvolvimento de números de referência associados a quantidades e a medidas. Nas tentativas de operacionalização da noção de sentido de número é usual, ainda, ser referida a capacidade para calcular usando os números de modo flexível, para estimar a grandeza relativa e a razoabilidade de um resultado, para passar de umas representações numéricas para outras e para relacionar números, símbolos e operações (Markovits & Sowder, 1994).

Uma das descrições mais frequentemente referida nos estudos que se debruçam sobre o sentido de número é a proposta por McIntosh et al. (1992):

O sentido de número refere-se a uma compreensão geral do indivíduo sobre os números e as operações juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis na manipulação dos números e das operações. Reflete uma capacidade e uma predisposição para usar os números e os métodos de cálculo como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação. (McIntosh et al., 1992, p. 3)

É esta descrição de sentido de número, proposta por McIntosh et al. (1992), que é assumida neste trabalho. Importa, no entanto, sublinhar que estes autores salientam que se trata de uma expressão de difícil caracterização, considerando ser mais acessível o seu reconhecimento em ação.

2.2. Modelos de caracterização do sentido de número

O modelo de McIntosh, Reys e Reys

McIntosh et al. (1992), para além de descreverem o que entendem por sentido de número, propõem um quadro de referência para o examinar. Este quadro, conhecido habitualmente por modelo de McIntosh, corresponde a uma tentativa de organizar as suas componentes, considerando três grandes áreas: (i) o conhecimento e a destreza com os números; (ii) o conhecimento e a destreza com as operações; e (iii) a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. Cada uma destas áreas é desdobrada num conjunto de aspetos particulares que, por sua vez, são desenvolvidos a um nível ainda mais específico (Anexo 1). Uma vez que neste trabalho se adota a caracterização de sentido de número dos autores referidos, assume especial relevância a clarificação dos aspetos que o caracterizam. Assim, são descritas, em seguida, de modo detalhado e aprofundado, as três áreas que funcionam como eixos organizadores das múltiplas componentes do sentido de número.

Conhecimento e destreza com os números

De acordo com McIntosh et al. (1992), a primeira grande área – o conhecimento e a destreza com os números – engloba (i) sentido da ordenação dos números; (ii) múltiplas representações dos números; (iii) sentido das grandezas, relativa e absoluta, dos números e (iv) sistemas de valores de referência.

O sentido da ordenação dos números está relacionado com o conhecimento sobre o sistema de numeração Indo-Árabe, as suas características e o modo como estas se refletem na construção dos números. A compreensão do valor de posição e da sua aplicação aos números nas suas diferentes representações, das relações de grandeza e de ordem entre números representados da mesma maneira ou utilizando diferentes modos de representação são aspetos que estão incluídos nesta categoria. Por exemplo, quando uma criança aprende a contar oralmente e a escrever a sequência dos primeiros números naturais até cinquenta, vai identificando regularidades tanto ao nível das palavras que usa para dizer os números como ao nível da sua escrita. Estas regularidades são inerentes ao sistema de numeração decimal e posicional e a sua identificação auxilia na extensão do universo numérico e na construção de números cada vez maiores. Quando os alunos contactam inicialmente com os números na sua representação decimal, é importante perceberem as regularidades associadas a essa notação, uma vez que esta perceção contribui para os conseguirem comparar e ordenar. Aspetos semelhantes a estes estão associados ao conhecimento de outros conjuntos numéricos, nomeadamente quando são introduzidos os números racionais e as suas diferentes representações.

O conhecimento e a destreza com os números englobam, também, conhecer as múltiplas representações dos números. De facto, os números surgem associados a diferentes representações, umas gráficas, outras simbólicas, sendo fundamental o seu reconhecimento. Ter sentido de número implica reconhecer que, por exemplo, o número oito pode ser representado como $2+2+2+2$ ou 2×4 ou 4×2 ou $10-2$, de acordo com os contextos e/ou com os problemas que é necessário resolver. Fazer composições e decomposições adequadas e comparar números com outros de referência, são aspetos que contribuem para o desenvolvimento do sentido de número no que diz respeito a esta componente. Por exemplo, saber que 2,49 é, aproximadamente, 2,5 permite, no contexto

de um problema que envolve dinheiro, arredondá-lo para 2,5 de modo a facilitar o cálculo ou analisar a razoabilidade de uma determinada solução.

O sentido das grandezas, relativa e absoluta, dos números diz respeito à capacidade para reconhecer a grandeza de um determinado número em termos absolutos e de acordo com determinados contextos. Assim, para uma criança de oito anos, 1000 é um número muito grande mas esta não tem noção nenhuma da sua ordem de grandeza. Neste sentido, é importante proporcionar-lhe experiências a partir das quais possa contextualizar 1000 e aperceber-se da sua grandeza e de como esta se altera em relação a determinados referenciais. Se 1000 representar 1000 metros e se estivermos a pensar na distância percorrida por um aluno todos os dias, de automóvel, de casa para a escola, 1000 metros é uma distância bastante curta. No entanto, se 1000 representar o número de berlindes da sua coleção, o mesmo número representa uma quantidade bastante grande de berlindes.

Usar um sistema de valores de referência (*benchmarks*) permite, nomeadamente avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar um determinado cálculo. Os números utilizados como referência podem ser de cariz matemático ou pessoal e estão relacionados com a experiência adquirida pelos alunos na aula, intencionalmente, e no seu dia-a-dia através de experiências pessoais. Os de cariz matemático estão associados, sobretudo, aos múltiplos de dois, cinco e dez e às várias representações de metade e de um quarto da unidade (0,5; $\frac{1}{2}$; 50%; 0,25; $\frac{1}{4}$; 25%). Os números de referência de carácter pessoal têm a ver com comparações que cada um pode fazer considerando números que, para si, têm um significado particular. Por exemplo, se um aluno souber que mede 1,6 metros este número pode funcionar como número de referência para estimar a altura de um outro colega mais alto ou mais baixo. A percepção do sentido de número de cada um está relacionada com a diversidade e a complexidade dos números de referência usados na tomada de decisões em contextos numéricos.

Conhecimento e destreza com as operações

Na segunda grande área — o conhecimento e a destreza com as operações — McIntosh et al. (1992) incluem a compreensão (i) do efeito das operações; (ii) das propriedades matemáticas; e (iii) das relações entre as operações.

A compreensão do efeito das operações está associada ao conhecimento das suas consequências tendo em conta os números utilizados. Por exemplo, no caso da multiplicação, frequentemente, os alunos associam o resultado desta operação a um número maior, ou igual, que os fatores envolvidos. Este facto acontece porque a multiplicação, inicialmente, é modelada a partir de situações de adição de parcelas iguais e porque o universo numérico em que se calcula corresponde aos números inteiros positivos. No entanto, quando se amplia o conjunto numérico em que se opera, esta associação nem sempre é correta. Assim, é importante diversificar os contextos e os modelos associados a cada uma das operações, de modo a que os alunos possam compreender, globalmente, as interações existentes entre as operações e os números envolvidos, contribuindo, desta maneira, para o desenvolvimento do seu sentido de número.

A compreensão das propriedades matemáticas de cada operação contribui para o seu uso de modo a facilitar o cálculo em determinadas situações. Por exemplo, reconhecer e utilizar a propriedade comutativa da multiplicação permite calcular 10×3 através do cálculo equivalente 3×10 . No início, este é muito mais fácil para os alunos, quando a multiplicação é, habitualmente, associada ao cálculo aditivo de parcelas iguais. Também a compreensão da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, auxilia bastante o cálculo mental. Exemplificando: para calcular 4×26 , se 26 for decomposto em $25 + 1$ é mais fácil calcular a soma dos produtos parciais que se obtêm, efetuando $4 \times 25 + 4 \times 1$, de modo a chegar ao resultado mentalmente.

A compreensão das relações entre as operações é um outro aspeto que contribui para o estabelecimento de múltiplas conexões entre as várias operações, permitindo recorrer àquela que, em determinado contexto, pode facilitar o cálculo associado. Um requisito fundamental é compreender cada uma das operações em particular para, a partir daí, ser possível estabelecer relações entre elas. Ter consciência, por exemplo, da relação

entre a adição e a multiplicação permite aos alunos, em determinadas situações, recorrer a esta última operação, de modo a tornar o cálculo mais eficiente e rápido. Igualmente, a compreensão das relações inversas entre as operações, por exemplo entre a multiplicação e a divisão, permite-lhes ter uma maior variedade de processos de cálculo para resolver um problema de divisão, muitas vezes mais eficazes do que o uso do algoritmo tradicional. A relação entre estas duas operações, na extensão do universo numérico dos números inteiros positivos para os números racionais, permite, ainda, estabelecer conexões que potenciam o cálculo associado a estas operações e contribuem para o desenvolvimento do sentido de número. São exemplos do estabelecimento dessas conexões ter a percepção que dividir um número por dez é o mesmo que multiplicá-lo por 0,1 ou que dividir um número por dois é o mesmo que multiplicá-lo por 0,5 ou por $\frac{1}{2}$.

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

A terceira grande área que caracteriza o sentido de número é a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. De acordo com McIntosh et al. (1992, p. 4) esta área inclui (i) a compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários; (ii) a consciencialização da existência de múltiplas estratégias; (iii) a inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz; e (iv) a inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados.

A compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários à sua resolução envolve tomar decisões sobre o uso de valores aproximados ou exatos, a estratégia adequada para o resolver e o que constitui uma solução adequada (um valor exato ou aproximado). Por exemplo, se num problema, dados os preços de dois brinquedos, 1,99€ e 2,49€, se perguntar quanto se gasta ao comprar ambos, a resposta é sempre um valor exato, mesmo que se parta de aproximações adequadas dos preços de cada brinquedo, 2€ e 2,5€ e se use uma estratégia aditiva seguida de compensação ($2+2,5=4,5$; $4,5-0,02=4,48$ €). No entanto, dada a mesma situação, a proposta pode ser saber se, com uma nota de 5€, é possível comprar os dois brinquedos. Neste último caso, basta usar valores aproximados e fazer uma estimativa do custo dos brinquedos, comparando-a com o valor da nota.

Ter consciência da existência de múltiplas estratégias para resolver problemas que envolvem números possibilita, por um lado, selecionar aquela que, à partida, parece ser a mais adequada de acordo com a situação proposta. Por outro lado, permite, no caso da estratégia utilizada se revelar ineficaz, reformular e utilizar uma outra que se revele mais adequada na procura da solução. Para além disso, se um mesmo problema tiver sido resolvido recorrendo a estratégias diferentes, possibilita a sua comparação, identificando vantagens e desvantagens de cada uma delas numa dada situação.

A partir do momento em que se tem consciência da existência de múltiplas estratégias para resolver situações de cálculo, identificar qual, ou quais, são mais apropriadas e eficazes na resolução de um determinado problema, é revelador de possuir sentido de número. Também o uso de uma determinada representação numérica adequada a uma dada situação, pode ser indiciador de sentido de número. Por exemplo, um aluno do 3.º ano ao querer saber quantos berlindes estão, no total, em quatro sacos, cada um com quinze berlindes, pode usar diferentes estratégias: adicionar o número quinze quatro vezes, “dar saltos” de quinze ou usar uma estratégia mais eficaz, fazendo a multiplicação 4×15 . Recorrendo à multiplicação pode, ainda, realizá-la usando procedimentos diferentes, uns mais adequados que outros – através do algoritmo, fazendo a decomposição do 15 em $10 + 5$ ou recorrendo ao cálculo do produto equivalente 2×30 .

Finalmente, a inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados diz respeito à atividade de examinar se um determinado resultado está de acordo com o problema proposto. Esta atividade é, muitas vezes, descurada pelos alunos mas faz parte do processo de resolução de um problema ou da realização de um cálculo puramente matemático. Por exemplo, se o problema é saber quantos litros de água levam oito garrafas de meio litro, a resposta não pode ser quarenta litros. Assim, é fundamental que os alunos se habituem a refletir sobre o resultado obtido e analisem a sua adequação perante o contexto e os dados iniciais.

McIntosh et al. (1992) consideram o seu modelo de caracterização do sentido de número como algo imperfeito e incompleto, encarando-o como um ponto de partida para uma reflexão mais aprofundada sobre o que é o sentido de número e quais os aspetos

reveladores da sua existência. Ainda assim, Verschaffel, Greer e de Corte (2007) referem que este modelo é “provavelmente a tentativa mais compreensiva e mais influente de articular uma estrutura que clarifica, organiza e inter-relaciona algumas das componentes básicas e consensualmente aceites do sentido de número” (p. 581).

Efetivamente, e tal como destacam Verschaffel et al. (2007), o referido modelo foi retomado e utilizado em várias investigações (Beswick et al., 2004; Kaminski, 2002; McIntosh & Dole, 2000) associadas ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos, dos futuros professores e dos professores, bem como à análise e avaliação do sentido de número de crianças e adultos. Algumas dessas investigações, que considero relevantes para o estudo que realizo, são discutidas nas secções seguintes.

Houve, também, investigadores que se inspiraram no modelo de McIntosh et al. (1992) e o adaptaram, de modo a usá-lo no contexto de estudos realizados sobre o sentido de número (Yang, 2003a, 2005a; Yang et al., 2004, 2008). Apresento, no próximo ponto, uma destas adaptações.

O modelo de Yang

Tendo como ponto de partida as diferentes definições e caracterizações de sentido de número propostas por educadores matemáticos e psicólogos (Berch, 2005; Greeno, 1991; Markovits & Sowder, 1994; McIntosh et al., 1992) bem como as veiculadas por documentos curriculares (NCTM, 1991, 2007), Yang (2003) organizou um modelo de caracterização do sentido de número em torno de cinco componentes:

- Compreensão dos significados dos números e das operações. Este aspeto implica o desenvolvimento da compreensão sobre os diferentes tipos de números e operações e do sistema decimal.
- Reconhecimento da grandeza dos números. Este aspeto inclui a capacidade para comparar números nas suas diferentes representações, para os ordenar e para reconhecer a sua densidade.
- Uso adequado de números de referência. Este aspeto inclui a capacidade para usar, de modo flexível, números de referência tais como $\frac{1}{2}$, 1, 10 e 100.

- Compreensão do efeito relativo das operações. Este aspeto inclui a capacidade para identificar o modo como as diferentes operações produzem efeito sobre os números envolvidos.
- Uso de estratégias apropriadas para resolver problemas numéricos e avaliação da razoabilidade dos resultados. Este aspeto inclui o desenvolvimento e o uso de diferentes estratégias, tais como cálculo mental e estimação, para resolver problemas de modo adequado e o reconhecimento da plausibilidade de um determinado resultado.

Estas cinco componentes são, posteriormente, reformuladas de acordo com estudos desenvolvidos pelo autor em diferentes níveis de ensino (Yang, 2005a; Yang, Li & Li, 2008; Yang, Li & Lin, 2008). Assim, os aspetos do sentido de número são reorganizados, de um modo geral, em quatro componentes: o reconhecimento da grandeza relativa dos números, o uso de múltiplas representações dos números e das operações, a avaliação da razoabilidade de um resultado e o reconhecimento do efeito relativo das operações sobre os números (Yang, Li & Lin, 2008). As pequenas diferenças nas componentes do sentido de número verificadas nos estudos realizados por Yang prendem-se com os vários níveis de escolaridade dos alunos envolvidos e com o conhecimento matemático associado aos números e operações que os alunos devem possuir em cada um dos níveis. Apesar de não serem totalmente coincidentes, os quatro aspetos enunciados são consistentes com o modelo de McIntosh et al. (1992) e incluem todas as vertentes aí identificadas.

Em síntese, os modelos de caracterização do sentido de número utilizados em várias investigações são bastante semelhantes e decorrem do modelo de McIntosh et al. (1992), considerado, pela maior parte dos investigadores das áreas da Educação Matemática e da Psicologia, como uma referência central para o estudo do sentido de número dos alunos e professores (Berch, 2005; Beswick et al., 2004; Kaminski, 2002; Reys, 1994; Verschaffel et al., 2007; Yang et al., 2008).

Este modelo é usado, também, no decurso da investigação que realizo, como ponto de partida para a análise do sentido de número dos alunos da turma de 3.º ano que participam no estudo.

2.3. Analisar e avaliar o sentido de número

A análise e avaliação do sentido de número de crianças e adultos constituem a finalidade de determinados estudos realizados no âmbito da temática do sentido de número (Beswick et al., 2004; McIntosh et al., 1997; Reys & Yang, 1998; Yang, 2005a). Em alguns há a destacar a construção de instrumentos específicos que analisam e avaliam aspetos do sentido de número. Considerando o âmbito do estudo que desenvolvo e as numerosas investigações sobre o tema, debruço-me, nesta secção, apenas sobre as realizadas com alunos.

McIntosh et al. (1997), a partir da caracterização de McIntosh et al. (1992), realizaram um estudo onde desenvolveram um conjunto de itens para a avaliação do sentido de número de alunos entre os oito e os catorze anos. Para o efeito, o conjunto de itens foi aplicado, inicialmente, a alunos do Japão, Estados Unidos e Austrália, e, posteriormente, da Suécia. Algumas das conclusões deste estudo apontam para um sentido de número dos alunos fraco, sobretudo no que se refere à compreensão dos conceitos associados aos números na representação decimal e muito fraco relativamente à compreensão do conceito de fração (McIntosh & Dole, 2000). Sobre o tipo de instrumento utilizado – testes escritos – esta investigação revela a dificuldade de inventar perguntas escritas que analisem o sentido de número dos alunos e a necessidade dos testes serem complementados com entrevistas individuais, de modo a revelarem o seu pensamento (McIntosh et al., 1997).

De acordo com as recomendações emanadas do estudo anteriormente referido, foi realizada, em Taiwan, uma investigação sobre sentido de número onde foram efetuadas entrevistas individuais a alguns alunos, para além de testes escritos (Reys & Yang, 1998). O seu propósito foi avaliar o sentido de número de alunos do 6.º e 8.º anos e relacioná-lo com as competências de cálculo destes mesmos alunos. Um dos resultados obtidos aponta para a não existência de uma relação evidente entre competências de cálculo escrito (associado, sobretudo, a algoritmos) e sentido de número, o que é consistente com o referido por McIntosh et al. (1992). De facto, no estudo realizado, o desempenho dos alunos no que diz respeito a certos aspetos do sentido de número foi bastante mais baixo

do que em questões que requeriam cálculos escritos associados a algoritmos. Um estudo semelhante, realizado com alunos do 6.º ano, analisou, por meio de entrevistas individuais, as estratégias usadas por alunos de modo a identificar as componentes do sentido de número aí presentes. Os resultados do estudo apontam para uma quase total ausência de estratégias de estimação e para um fraco sentido de número dos alunos entrevistados (Yang, 2005a).

Beswick et al. (2004) referem uma iniciativa de validação e adaptação de um instrumento, inicialmente elaborado na Malásia, constituído por questões diversificadas relacionadas com os números e as operações. Este avalia aspetos do sentido de número e a ele respondem, oralmente ou por escrito, alunos australianos a frequentar a escola entre o primeiro e o terceiro ano. No estudo referido, foi utilizada apenas uma parte do instrumento que inclui aspetos do sentido de número relacionados com a contagem, com vista à sua adaptação. Os seus resultados indiciam que os aspetos do sentido de número relacionados com a contagem e revelados pelas crianças envolvidas são os esperados para cada um dos anos de escolaridade a que se referem. As conclusões revelam, ainda, as potencialidades do instrumento utilizado e validado para recolher informação a nível da sala de aula, da escola e do sistema de ensino, evidenciando a facilidade da sua utilização por parte dos professores, tanto na sua aplicação como na avaliação das respostas dos alunos.

Um outro tipo de estudos relacionados com a avaliação e a análise do sentido de número dos alunos, está associado a experiências de ensino e aprendizagem. É o caso de um estudo desenvolvido por Yang (2003a) que teve como participantes os alunos de duas turmas do 5.º ano de escolaridade, uma experimental e outra de controlo. Também neste estudo, e à semelhança de outros, os instrumentos utilizados envolveram a realização de entrevistas individuais aos alunos, em vários momentos do estudo, para compreender o modo como usam, ou não, o seu sentido de número e incluírem a resolução de um conjunto de questões escritas, relacionadas com a categorização de McIntosh et al. (1992). A análise dos resultados evidencia diferenças significativas entre os alunos da turma experimental e da turma de controlo, após a realização da experiência de ensino. Estas diferenças são bastante notórias nos resultados dos testes escritos e nas entrevistas,

e sugerem a importância das atividades realizadas na sala de aula no desenvolvimento do sentido de número dos alunos. No que diz respeito aos instrumentos usados para a avaliação é realçado o contributo das entrevistas na compreensão da evolução no uso de estratégias relacionadas com o sentido de número e na exploração do modo como pensam os alunos sobre os números e as operações (Yang, 2003a).

Mais recentemente foram desenvolvidas escalas computadorizadas sobre o sentido de número, com o propósito de avaliar o desempenho dos alunos após terem frequentado o 3.º e o 5.º anos de escolaridade (Yang, Li & Li, 2008; Yang, Li & Lin, 2008). Estas escalas foram construídas e, posteriormente, aferidas e validadas, considerando o quadro teórico de sentido de número usado tanto na investigação como nos manuais de Matemática de Taiwan (Yang, 2003a; Yang, Li & Li, 2008).

No caso do estudo realizado com alunos depois de completarem o 3.º ano de escolaridade, foram identificadas e validadas as seguintes componentes do sentido de número, que estão muito próximas das do modelo de Yang (2003a): (i) a compreensão sobre o significado dos números e das operações; (ii) o uso de múltiplas representações dos números e operações; (iii) o reconhecimento da grandeza relativa dos números; (iv) o reconhecimento da razoabilidade dos resultados calculados; e (v) a capacidade para compor e decompor números. Para além da validação, em termos empíricos, do modelo de sentido de número que inclui as cinco componentes referidas, os autores identificam, também, algumas vantagens e limitações do uso de computadores como ferramentas para avaliar o sentido de número dos alunos. Como vantagens, comparando com outro tipo de ferramentas, tais como os testes escritos de escolha múltipla, identificam o facto de os alunos terem de escolher não só uma resposta correta mas também a justificação dessa mesma resposta. Além disso, tanto professores como alunos sabem imediatamente os resultados do teste, identificando pontos fortes e fracos e aspetos do sentido de número nos quais é preciso melhorar. Quanto às limitações relativas ao uso deste instrumento, os autores referem: as formas de pensar e os métodos de resolução originais são difíceis de detetar através deste tipo de instrumento; alguns alunos podem ter respondido ao acaso, visto que o fizeram depressa demais e, finalmente, a necessidade das escolas terem

computadores e acesso à Internet, para os alunos poderem responder ao teste (Yang, Li & Li, 2008).

Um estudo muito semelhante foi levado a cabo, também em Taiwan, com alunos um pouco mais velhos (Yang, Li & Lin, 2008). Os seus objetivos foram reconhecer diferenças significativas no sentido de número dos alunos após terem completado o 5.º ano, identificar diferenças significativas entre rapazes e raparigas no que respeita às suas componentes e, ainda, relacionar o desenvolvimento do sentido de número com o desempenho dos alunos em Matemática. Este estudo foi realizado recorrendo a uma escala computadorizada de sentido de número e os aspetos considerados foram: (i) o reconhecimento da grandeza relativa dos números; (ii) o uso de múltiplas representações dos números e das operações; (iii) o reconhecimento da razoabilidade da estimativa de resultados calculados; e (iv) o reconhecimento dos efeitos relativos das operações. Os resultados apontam para um melhor desempenho dos alunos na componente “reconhecimento da grandeza relativa dos números” e um menor desempenho na componente “reconhecimento da razoabilidade da estimativa de resultados calculados”, apesar de, na sua globalidade, se considerar que os alunos não têm ainda um bom sentido de número, uma vez que a sua média está abaixo dos 50%. No que diz respeito à diferença em termos do género, ela não é significativa, apesar de haver uma pequena diferença, em média, a favor das raparigas. Finalmente, constata-se que o desempenho em Matemática está correlacionado significativamente com o desempenho dos alunos nos aspetos do sentido de número (Yang, Li & Lin, 2008). As vantagens e limitações do instrumento utilizado que foram identificadas estão de acordo com as realçadas no estudo de Yang, Li e Li (2008).

Em síntese, há um conjunto de estudos efetuados cujo objetivo é avaliar o sentido de número dos alunos. Em alguns casos, essa avaliação é feita após uma experiência de ensino em sala de aula, no âmbito da qual são propostas aos alunos tarefas que pretendem contribuir para o desenvolvimento do seu sentido de número. Outro tipo de estudos inclui a construção e validação de instrumentos de modo a permitir ao professor um diagnóstico, rápido e aparentemente eficaz, do sentido de número dos alunos nas suas diversas componentes.

2.4. Orientações curriculares e sentido de número

As expressões “sentido de número” e “desenvolvimento do sentido de número” são, hoje em dia, frequentemente referidas em documentos de natureza curricular relacionados com o tema Números e Operações e, na mesma perspetiva de McIntosh et al. (1992), surgem associadas à compreensão e flexibilidade de cálculo numérico. De facto, atualmente, o desenvolvimento do sentido de número é uma referência central e muito presente em documentos curriculares sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Anghileri, 2003; National Curriculum Board, 2008; NCTM, 1991, 2007; Ponte & Serrazina, 2000; ME, 2007; van de Walle, 2003). Alguns destes documentos, tais como os publicados no Reino Unido, Austrália ou Nova Zelândia, usam termos mais abrangentes, tais como numeracia ou literacia matemática, que envolvem, para além de outros aspetos, a compreensão global dos números e o cálculo numérico flexível, incluídos no sentido de número (Department for Children, Schools and Families, 2009; National Curriculum Board, 2008; Young-Loveridge, 2005). A relação entre numeracia e sentido de número torna-se ainda mais evidente se atendermos à definição de numeracia veiculada pelo projeto nacional do Reino Unido, *The National Numeracy Project*, que inclui o conhecimento sobre os números e as operações e a capacidade para processar, comunicar e interpretar informação numérica (Straker, 2003).

É consensual que existe, atualmente, a preocupação de desenvolver o sentido de número dos alunos, uma recomendação que é explicitada em diversos projetos e documentos de natureza curricular. Por exemplo, o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicado nos Estados Unidos em 1989 (NCTM, 1991), dedica uma das normas ao sentido de número e o seu sucessor, publicado em 2000 (NCTM, 2007) refere que “a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido de número e a aquisição da destreza no cálculo aritmético constituem o cerne da Educação Matemática para os primeiros anos do ensino básico” (p. 34). Este documento identifica três grandes objetivos associados à aprendizagem dos números e operações:

(i) compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos; (ii) compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si e (iii) calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis. (p. 34)

Estes objetivos são transversais à aprendizagem da Matemática, do jardim-de-infância até ao 12.º ano e, como é referido no documento mencionado, devem contribuir para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Observando-os detalhadamente, destaca-se a flexibilidade de pensamento que é preciso desenvolver, progressivamente, ao longo de todo o trabalho com números e que constitui uma característica fundamental do sentido de número. Associado ao cálculo numérico são referidas as decisões que, perante uma dada situação, devem ser tomadas para selecionar o tipo de cálculo a efetuar: mental, escrito, com calculadora, por estimativa. Nessa escolha estão envolvidos fatores como o contexto específico, o problema e os números envolvidos (NCTM, 2007). Para fazer a escolha apropriada, considerando todos estes aspetos, os alunos têm de mobilizar o seu sentido de número.

Em Portugal, só muito recentemente, com a publicação de materiais no âmbito de projetos de natureza curricular (Equipa do projeto DSN, 2006, 2007) e com a implementação, a nível nacional, do Programa de Formação Contínua em Matemática, para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (PFCM), tem sido vindo a ser generalizada a discussão sobre a temática do desenvolvimento do sentido de número (Serrazina et al., 2005, Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha & Portela, 2006). Contudo, já em 1999, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), num documento de natureza curricular publicado pelo Ministério da Educação, realçam a importância de todos os alunos desenvolverem o sentido de número, sendo o significado atribuído a esta noção muito próximo do proposto por McIntosh et al. (1992). É, aí, mencionado o facto de o desenvolvimento do sentido de número não ser confinado a uma fase da vida escolar do aluno, mas ir sendo ampliado ao longo de todo o seu percurso escolar, desde os primeiros anos e, eventualmente, durante a sua vida adulta (Abrantes et al., 1999).

Na sequência da publicação anteriormente nomeada, o documento Currículo Nacional do Ensino Básico (Ministério da Educação. DEB, 2001), apesar de não

menção explicitamente a expressão “sentido de número”, inclui, relativamente à competência matemática que todos devem desenvolver no domínio dos Números e do Cálculo, os aspetos que fazem parte do sentido de número na aceção de McIntosh et al. (1992).

Há outros documentos que têm contribuído, também, para divulgar a temática do sentido de número, no nosso país, ao nível da Matemática escolar, desde o jardim de infância. Entre estes está o elaborado por Cebola (2002) que faz uma revisão da literatura sobre várias caracterizações de sentido de número, a sua ligação ao cálculo mental e à estimação e modos de o desenvolver na aula. Está, ainda, o de Castro e Rodrigues (2008), publicado pelo Ministério da Educação, que inclui textos de apoio sobre o desenvolvimento do sentido de número para educadores de infância.

Ao nível do currículo, a importância dos alunos desenvolverem o sentido de número desde os primeiros anos de escolaridade, está bem patente no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), publicado em 2007 e generalizado no ano letivo de 2010/11. Refere-se aqui que uma das grandes finalidades de ensino do tema Números e Operações, ao longo do Ensino Básico, é o desenvolvimento do sentido de número, a par da promoção da compreensão sobre os números e as operações e do desenvolvimento da fluência de cálculo (ME, 2007).

No PMEB, o propósito principal de ensino do tema referido é o mesmo para o 1.º, 2.º e 3.º ciclos: “desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (ME, 2007, p. 13). Neste documento é explicitado o significado de sentido de número, o que é de realçar pois trata-se de uma noção que é uma novidade para muitos dos professores destes níveis de ensino. A caracterização apresentada aproxima-se bastante do enunciado por McIntosh et al. (1992):

Sentido de número é aqui entendido como a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou $\frac{1}{2}$, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação,

quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números. (ME, 2007, p. 13)

Em particular, no que se refere ao tema Número e Operações há diferenças muito significativas entre o PMEB e o anterior Programa de Matemática do 1.º ciclo, em vigor desde 1990 e no ano letivo da realização da experiência de ensino que suporta a investigação que realizo. Neste Programa não há qualquer referência à expressão “sentido de número”, considerando-se como fundamental a construção do conceito de número e o domínio das operações e valorizando-se o cálculo mental e algorítmico. “Praticar” o cálculo mental e procurar estratégias diferentes para efetuar um cálculo são dois dos objetivos do trabalho com os números e as operações. Ainda assim, o recurso aos algoritmos das operações é bastante valorizado, fazendo-se a sua introdução bastante cedo e considerando-os como um dos meios de cálculo mais importantes. No final do 3.º ano, de acordo com o programa, todos os algoritmos das quatro operações já devem ter sido introduzidos e são usados como meio privilegiado de cálculo. Relativamente ao cálculo mental, não há referência a cálculo flexível nem são identificadas que tipos de estratégias são úteis nos cálculos a efetuar, apesar de haver alusão ao uso das propriedades das operações, ainda que de um modo intuitivo. O cálculo mental é associado, sobretudo, à realização de estimativas para verificar a razoabilidade de um determinado resultado, obtido através de um algoritmo ou de uma máquina de calcular (Ministério da Educação. DGEBS, 1990).

Em contrapartida a análise do PMEB revela, explicitamente, a intencionalidade de diversificar e flexibilizar o uso de estratégias de cálculo mental, presente tanto nos objetivos específicos associados aos tópicos numéricos como na coluna das notas que os acompanha. Aí são especificadas e exemplificadas algumas das estratégias a desenvolver pelos alunos, relacionadas com as várias operações aritméticas. Os diferentes tipos de cálculo, recorrendo às propriedades das operações e a sua adaptação a situações de cálculo são, também, aspetos a desenvolver pelos alunos nos primeiros anos de escolaridade. A flexibilidade no uso de estratégias de cálculo e a seleção das mais eficazes, para além da estimação e da perceção da razoabilidade dos resultados obtidos, são vertentes do sentido de número igualmente presentes no PMEB. Também faz parte

do sentido de número a compreensão sobre as operações considerando os significados a elas associadas. De facto, mais do que a ênfase no cálculo *per si* é realçada a importância da compreensão dos alunos, evidente mesmo quando se faz referência aos algoritmos. De acordo com as orientações do PMEB, estes devem ser introduzidos de forma gradual e utilizados com compreensão, recorrendo a representações mais detalhadas antes da representação tradicionalmente apresentada, mais simbólica e abstrata. Finalmente, e considerando os números nas suas diferentes representações, uma das inovações do PMEB em relação ao seu antecessor é a introdução, no 1.º ciclo, da representação dos números na forma de fração. Assim, um dos objetivos enunciado neste novo Programa é a compreensão dos números nas suas diferentes representações, bem como o estabelecimento de conexões entre números representados de diferentes formas.

Resumindo, há referências à importância do desenvolvimento do sentido de número em documentos portugueses de natureza curricular desde 1999 (Abrantes et al., 1999) que culminam no PMEB, generalizado recentemente, onde um dos propósitos principais de ensino do tema Números e Operações, do 1.º ao 3.º ciclos, é desenvolver nos alunos o seu sentido de número (ME, 2007).

2.5. Desenvolver o sentido de número

Sendo indiscutível a relevância do desenvolvimento do sentido de número, como está claramente expresso nas orientações incluídas em numerosos documentos de natureza curricular referidos nas secções anteriores, e reconhecendo a sua importância, interessa compreender como podem ser concretizadas essas orientações com os alunos, na sala de aula. Essa concretização inclui a necessidade de ter em consideração aspetos do papel do professor, do ambiente de aprendizagem e das tarefas de aprendizagem quando se pretende o desenvolvimento do sentido de número na sala de aula.

O papel do professor e o ambiente de aprendizagem

Admitindo a complexidade e as múltiplas facetas do conceito de sentido de número, Berch (2005) menciona algumas implicações pedagógicas ao nível do seu

desenvolvimento, explicitando que este não pode ser compartimentado nem associado apenas à aprendizagem específica numa determinada unidade de ensino. No mesmo sentido de Berch são as referências de Greeno (1989, 1991) e de Reys (1994) ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos, encarando-o numa perspetiva de mudança do ensino da Matemática e não apenas como mais um dos seus objetivos. Assim, é o próprio ensino que deve ser organizado de modo diferente, incluindo atividades ao longo do currículo que promovam o desenvolvimento do sentido de número de forma global.

Mais especificamente, e referindo-se ao processo de ensino, Reys (1994) concretiza:

Através do estabelecimento de uma atmosfera de sala de aula que encoraja a exploração, o pensamento e a discussão e através da seleção de problemas e atividades apropriadas, o professor pode promover o sentido de número em todas as experiências matemáticas. (p. 120)

Outros autores afirmam, também, que o ensino efetivo da Matemática deve colocar a ênfase no processo de aprendizagem, de modo a promover o raciocínio matemático dos alunos (Fraivillig, 2001, Yang, 2003a) e realçam o seu contributo no desenvolvimento do sentido de número. Yang (2003a) propõe mesmo um modelo (Figura 2.1) de ensino orientado para o processo de aprendizagem do sentido de número. Este modelo descreve o modo como o professor, na sua sala de aula, deve atuar e organizar as atividades de ensino. A análise da figura 2.1. revela que é essencial que o professor estimule o raciocínio e a resolução de problemas, que ouça os alunos e que coloque questões desafiadoras de modo a encontrarem, se necessário, outros caminhos. Revela, também, que não basta proporcionar momentos de trabalho em pequenos grupos. É, ainda, essencial prever discussões com toda a turma em que os alunos são encorajados e apoiados a apresentarem explicações e justificações, a debaterem ideias, a compararem as suas resoluções e a colocarem questões.

Num ambiente com estas características o professor tem o papel fundamental de colocar questões, de encorajar os alunos a formular explicações e encontrar respostas, de os ouvir, de os apoiar e de os desafiar a encontrar outros caminhos, se necessário.

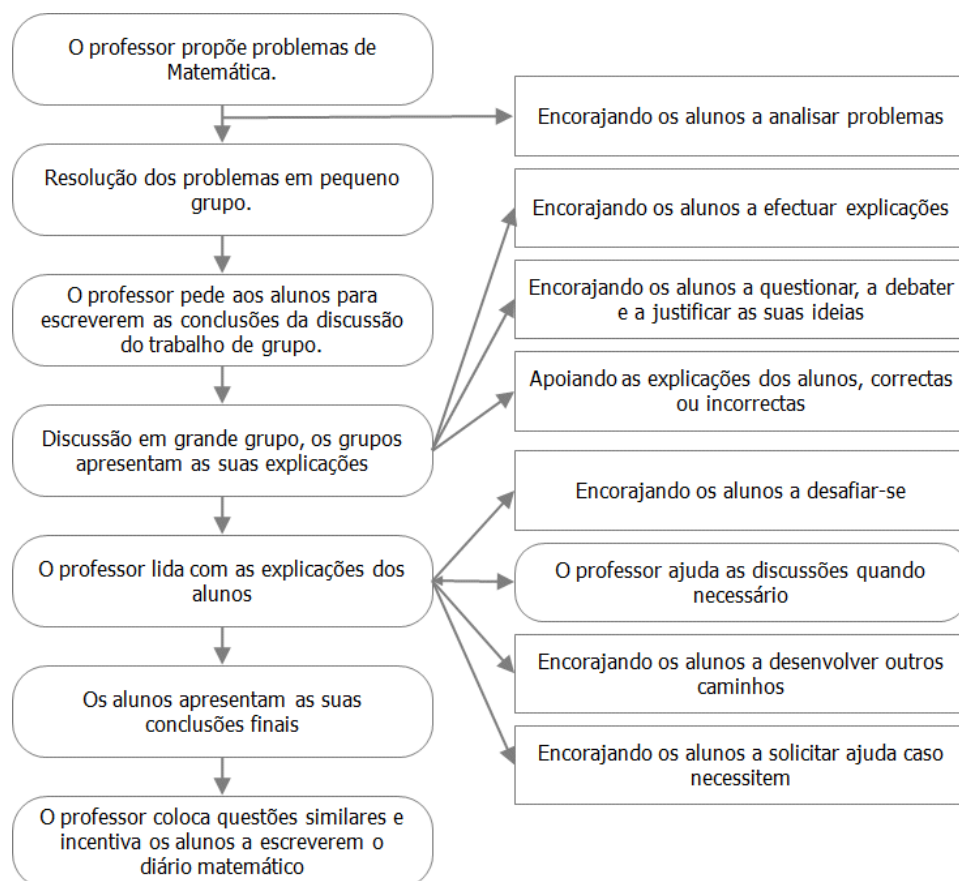


Figura 2.1 – Modelo de ensino (Yang, 2003a)

Numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, as discussões com toda a turma são um dos aspetos que Yang (2003a) destaca no modelo que apresenta. Considerando a pertinência de organizar o ensino deste modo, apresento cinco práticas-chave que, de acordo com Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), auxiliam o professor a orientar as discussões, na sala de aula, com toda a turma. Os autores referem que as discussões orquestradas deste modo desenvolvem, por um lado, o raciocínio dos alunos e, por outro, constroem ideias matemáticas importantes. Segundo estes autores, é fundamental desenvolver este tipo de práticas, a que denominam de “segunda geração”, que organizam a discussão realizada com toda a turma após os alunos terem trabalhado com tarefas de elevado nível cognitivo. Tarefas deste tipo são aquelas que provocam mudança cognitiva (Smith, Hughes, Engle & Stein, 2009; Stein et al., 2008).

As cinco práticas referidas por Smith et al. (2009) e Stein et al. (2008) são: (1) a antecipação das respostas dos alunos a tarefas cognitivamente exigentes; (2) a monitorização das respostas dos alunos às tarefas durante a fase de exploração; (3) a

seleção de determinados alunos para apresentar as suas resoluções durante a fase de discussão e sumarização; (4) a sequenciação intencional das apresentações das respostas dos alunos e (5) a ajuda à turma no estabelecimento de conexões matemáticas entre as diferentes resoluções dos alunos e entre as resoluções dos alunos e as ideias-chave que fazem parte da agenda de ensino do professor.

A primeira das práticas, a antecipação das respostas dos alunos em tarefas cognitivamente exigentes, pressupõe a construção, pelo professor, de expectativas sobre o modo como os alunos interpretam a tarefa, a inventariação de estratégias que poderão ser usadas, corretas e incorretas, e a compreensão do modo como as interpretações e as estratégias utilizadas se relacionam com os conceitos matemáticos, as representações, os procedimentos e as práticas associadas à aprendizagem dos alunos. Antecipar as respostas dos alunos auxilia o professor a reconhecer e a compreender, perante resoluções concretas, diferentes aspetos aos quais é preciso dar atenção. Na fase de antecipação é importante colocar-se na posição dos seus alunos e prever resoluções com graus de sofisticação diferentes, possíveis más interpretações ou até resoluções incorretas (Stein et al., 2008).

A segunda prática do professor é a monitorização das respostas (entendidas como resolução) dos alunos às tarefas, durante a fase de exploração das mesmas. A sua finalidade é a identificação do potencial de aprendizagem matemática de determinadas estratégias ou representações usadas pelos alunos, tendo em vista a sua partilha com toda a turma na fase de discussão. Durante a monitorização, o professor deve dedicar especial atenção ao que os alunos dizem e fazem, de modo a reconhecer as ideias matemáticas subjacentes e a analisar a sua validade. Esta prática é facilitada pelo investimento feito previamente pelo professor na prática anterior, uma vez que, se fez um verdadeiro esforço de antecipação dos modos de resolução dos alunos, ser-lhe-á mais fácil reconhecê-los. Nesta fase é importante fazer perguntas aos alunos sobre o seu trabalho, de modo a avaliar o raciocínio matemático que estes usam, sobretudo no que diz respeito à compreensão dos conceitos relacionados com o objetivo da aula (Stein et al., 2008). Se o professor, compreender o modo como os alunos raciocinam relativamente a uma tarefa proposta, mais facilmente conseguirá colocar questões que, por um lado, os ajudem a

construir argumentos sólidos acerca do seu modo de pensar e, por outro, aumentem a sua compreensão sobre os aspetos matemáticos que estão em causa (Smith, Bill, & Hughes, 2008).

A terceira prática corresponde à seleção de determinados alunos ou grupos de alunos, a partir das suas resoluções, para as partilharem com o resto da turma. Esta seleção deve ser feita tendo em conta um aspeto particular, uma ideia, uma estratégia ou uma representação que o professor considere importante ser partilhada com os outros e que esteja relacionada com o que o professor considera importante realçar. Deste modo, o professor controla, até um certo ponto, o que os alunos apresentam e, consequentemente, o conteúdo matemático dessa apresentação.

A quarta prática corresponde à sequenciação intencional das respostas dos alunos. Esta deve ser organizada de acordo com determinadas decisões tomadas pelo professor. “Através da escolha propositada da ordem pela qual os alunos apresentam o seu trabalho os professores podem maximizar as hipóteses de atingir os objetivos previstos para a discussão” (Stein et al., 2008, p. 329). Contudo, a seleção pode obedecer a diferentes critérios: por exemplo, apresentar primeiro a estratégia usada pela maior parte dos alunos, e só depois as estratégias usadas apenas por alguns, ou iniciar a apresentação por uma estratégia bastante fácil e, progressivamente, apresentar estratégias mais complexas. Também pode ser um critério iniciar a apresentação por uma resolução incorreta mas utilizada por alguns alunos, no sentido de esclarecer os mal-entendidos e progredir para estratégias mais eficazes. No entanto, como é referido por Smith et al. (2009), qualquer que seja o critério escolhido, a sequenciação das resoluções depende do conhecimento que o professor tem dos seus alunos, das suas resoluções e das finalidades de ensino associadas à atividade desenvolvida.

Finalmente, a quinta prática, o estabelecimento de conexões entre as respostas dos alunos, permite ao professor ajudar os alunos a relacionar as suas resoluções com as de outros colegas, inter-relacionar as diferentes representações utilizadas e ainda estabelecer conexões entre as suas resoluções e as ideias matemáticas que constituem o foco de trabalho realizado (Smith et al., 2009). Nesta fase, os alunos podem também ser auxiliados a perceber como uma ideia ou um conceito matemático pode estar na base de

duas estratégias aparentemente distintas ou ainda a estabelecer padrões matemáticos de vária ordem. É, ainda, nesta fase de discussão conjunta, que os alunos devem ter consciência das consequências do uso de determinadas estratégias, mais ou menos eficazes, na resolução de certos problemas.

As cinco práticas relatadas auxiliam o professor na organização do ensino em sala de aula, de modo a orientar discussões que partem das resoluções dos alunos, promovem a aprendizagem através das interações entre eles e proporcionam uma verdadeira compreensão sobre ideias matemáticas (Smith et al, 2008, 2009; Stein et al, 2008). Contudo, para que seja possível uma prática pedagógica eficaz, incluindo as descritas anteriormente, que fomente a aprendizagem dos alunos com compreensão, é necessário também estabelecer normas que suportem a cultura de sala de aula subjacente. Esta cultura de sala de aula deve ser construída dando especial relevo, a par das práticas matemáticas, ao estabelecimento de normas sociais e normas sociomatemáticas (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001).

Em qualquer turma existe, de modo mais ou menos explícito, um conjunto de normas sociais que regem as interações entre os alunos e o professor, a propósito da atividade desenvolvida na sala de aula. Também em qualquer aula de Matemática existem normas específicas associadas à atividade matemática dos alunos. Pensando numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, as normas sociais que devem ser construídas são as que valorizam a explicação, a justificação e a argumentação referente aos modos de pensar dos alunos, a tentativa de compreender as ideias dos outros e a discussão sobre alternativas a processos ou soluções. Estas normas sociais, de acordo com Yackel e Cobb (1996), estão subjacentes a uma cultura de sala de aula que promove o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos. É de notar que estas normas sociais podem fazer parte da cultura de sala de aula de qualquer disciplina, não especificamente da aula de Matemática.

Associada à atividade matemática dos alunos, e considerando uma cultura de sala de aula baseada numa discussão de ideias matemáticas que privilegie o debate e a reflexão, é importante construir um conjunto de normas sociomatemáticas. Exemplos de normas sociomatemáticas são o que constitui uma explicação ou uma justificação

matematicamente aceitável, uma resolução ou uma solução matematicamente diferente ou ainda uma resolução matematicamente eficiente (Cobb et al., 2001; Yackel, 2001; Yackel & Cobb, 1996).

Um exemplo de uma prática de sala de aula baseada nas ideias de Smith et al. (2009) e de Stein et al. (2008) e que tem subjacente uma cultura de sala de aula regulada por um conjunto de normas sociais e sociomatemáticas como as enunciadas anteriormente, são os congressos matemáticos (Fosnot & Dolk, 2001a, 2001b). Nestes congressos, a aula de Matemática é perspectivada como uma comunidade matemática em que os alunos devem agir como matemáticos. Colocados perante tarefas desafiadoras são envolvidos na sua resolução, questionando, experimentando e construindo as suas próprias estratégias. Posteriormente, e de acordo com critérios estabelecidos pelo professor, alguns deles apresentam e justificam aos colegas as suas resoluções. O propósito de um congresso matemático não é que todos apresentem as suas ideias, mas centrar a discussão numa ideia-chave, numa estratégia ou na problematização de uma conceção errónea sobre uma determinada ideia matemática. Tal como acontece nas práticas de seleção e sequenciação intencional das resoluções dos alunos, referidas por Smith et al. (2009) e Stein et al. (2008), é o professor que decide como estruturar o congresso, como o organizar, quais as ideias que o norteiam e como vai garantir que todos se sintam desafiados (Fosnot & Dolk, 2001a, 2001b).

Há investigações associadas, explicitamente, ao desenvolvimento do sentido de número e realizadas com alunos de diferentes anos de escolaridade (Markovits & Sowder, 1994; Yang, 2001, 2003a; Yang, Hsu & Huang, 2004; Yang & Reys, 2001), que evidenciam que o ensino que promove o seu desenvolvimento é aquele que se foca na compreensão dos conceitos criando, para isso, um ambiente de sala de aula onde é encorajada a comunicação, a exploração, a discussão e o raciocínio, tal como foi referido anteriormente. Promover o sentido de número dos alunos num ambiente de ensino com as características enunciadas foi o proposto, por exemplo, por Markovits e Sowder (1994) num estudo realizado com alunos do 7.º ano de escolaridade. Nesse estudo o trabalho foi organizado na sala de aula de modo a promover a discussão das várias estratégias de resolução das tarefas propostas pelos alunos e a incentivar a sua

justificação, ainda que de modo informal. No mesmo sentido foi desenvolvida uma experiência de ensino mais recente, com alunos do 6.º ano, onde foi dada especial ênfase ao ambiente de sala de aula e às atividades propostas aos alunos, com a finalidade de desenvolver o seu sentido de número (Yang et al., 2004). Realçando a importância, tanto do papel do professor como do ambiente de sala de aula, os autores caracterizam a cultura de sala de aula da turma onde foi realizada a experiência:

[...] na turma de sentido de número, os professores ajudam os alunos a desenvolver o sentido de número colocando questões diferentes das que surgem nos seus livros de texto, encorajando discussões, promovendo oportunidades de os alunos comunicarem e partilharem os seus raciocínios e as suas justificações com os seus colegas. (Yang et al., 2004, p. 427)

Há vários autores que destacam a importância do papel desempenhado pelo professor na organização do ensino numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número (Nickerson & Whitacre, 2010; Yang & Reys, 2001; Yang, Reys & Reys, 2008c). Em particular, sublinham que é fundamental que, ele próprio, tenha um bom sentido de número e uma compreensão sólida sobre o que é o sentido de número e como se desenvolve, para poder orientar as experiências dos seus alunos. Além disso, e tal como acontece a propósito de outras temáticas da Educação Matemática, é indispensável que os professores tenham um conhecimento da Matemática para o ensino que inclui, entre outros aspetos, um conhecimento profundo do conteúdo de ensino que vai influenciar fortemente o que é e como é ensinado (Ball, Hill, & Bass 2005; Yang & Reys, 2001; Yang et al., 2008c).

Se equacionar o ensino numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número é um objetivo transversal a todo o currículo de Matemática, é pertinente desenvolver também o sentido de número dos professores para que estes, na sala de aula, estejam atentos e encontrem oportunidades favoráveis ao seu desenvolvimento nos alunos. Dedicar atenção a este aspeto é, especialmente relevante em Portugal pois, como foi anteriormente mencionado, esta orientação é bastante recente em termos curriculares.

Tendo como preocupação o sentido de número de professores e futuros professores, são organizadas formações em alguns países, a nível da formação inicial e

contínua de professores com a finalidade de desenvolver o sentido de número dos seus intervenientes, uma vez que a investigação mostra que muitos deles têm “ausência” de sentido de número (Kaminski, 2002; Yang et al., 2008c; Whitacre & Nickerson, 2006). Em particular, Whitacre e Nickerson (2006) realizaram uma experiência de ensino com futuros professores do Ensino Básico cujo objetivo foi desenvolver o seu sentido de número, em particular, nos aspetos relacionados com o cálculo mental. No decurso dessa experiência foi dada especial ênfase ao uso de modelos para raciocinar, e os resultados da investigação apontam para um aumento significativo do sentido de número dos futuros professores envolvidos (Whitacre & Nickerson, 2006).

As tarefas de aprendizagem

Na secção anterior, foi realçado o papel do professor na construção de uma cultura de sala de aula, propícia ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Reys (1994) reforça o envolvimento do professor em todo o processo destacando, para além da criação de um ambiente favorável de sala de aula e do uso de determinadas práticas de ensino, a importância da seleção das tarefas a propor aos alunos. De facto, o professor deve organizar o ensino na sala de aula em torno de tarefas matemáticas, a partir das quais pode orquestrar discussões promotoras de conhecimento matemático.

As tarefas matemáticas assumem especial relevância quando se pensa a aprendizagem dos alunos na aula de Matemática (NCTM, 1991; Stein, Remillard, & Smith, 2007; Walls, 2005). Com efeito, “as tarefas nas quais os alunos se envolvem determinam o que eles aprendem em Matemática e como o aprendem” (Stein et al., 2007, p. 346).

O entendimento de tarefa matemática é diversificado. Na aceção de Stein et al. (2007), uma tarefa matemática é entendida como “a atividade matemática na sala de aula cujo propósito é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular” (p. 346). A ideia de tarefa surge associada à sua construção e seleção, de acordo com a intencionalidade visada. Alguns autores sugerem princípios para a sua seleção, uma vez que a tarefa “precisa de ser o veículo” pelo qual o professor explora a Matemática com os alunos, num ambiente de inquirição (Watson & Mason, 2007). No mesmo sentido, Doyle

(1988) considera as tarefas matemáticas como um “contexto” para a aprendizagem. Assim sendo, a seleção de tarefas que promovam o desenvolvimento do sentido de número dos alunos deve ser cuidadosamente pensada pelo professor.

Focando-se numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, Reys (1994) afirma que as atividades que o aumentam, sendo centradas nos processos, têm características comuns. De acordo com a mesma autora, estas características são as seguintes: (i) encorajam os alunos a pensar sobre o que vão fazer e a partilhá-lo com os colegas; (ii) promovem a criatividade e a investigação e permitem o uso de estratégias diversificadas; (iii) auxiliam os alunos a decidir o tipo de cálculo (por estimação ou exato, cálculo mental, calculadora ou papel e lápis) apropriado a cada situação; (iv) ajudam os alunos a compreender as regularidades da Matemática e as relações entre esta e o mundo real e (v) contribuem para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações.

As características das atividades que promovem o sentido de número, identificadas por Reys (1994), vão ao encontro do que preconizam Nickerson e Whitacre (2010), uma vez que se relacionam com a construção de uma certa cultura de sala de aula baseada na inquirição. Mas, como referem estes autores, esta cultura de sala de aula não é um “pré-requisito” que deve existir antes de os alunos realizarem as atividades que desenvolvem o sentido de número. Pelo contrário, “são as atividades de ensino que são desenhadas para contribuir para o desenvolvimento dessas normas. As atividades e as normas são construídas interativamente” (Nickerson & Whitacre, 2010, p. 233).

Subjacente a esta perspectiva de desenvolvimento do sentido de número há, também, autores que enfatizam a importância da exploração de contextos adequados (Fraivillig, 2001; Reys, 1994). Outros (Fosnot & Dolk, 2001a; Yang, 2003b), ainda, suportados por investigação realizada, fundamentam que o desenvolvimento do sentido de número deve ser relacionado com situações do dia-a-dia. De facto, usando os números em contextos reais, estes ganham um significado para os alunos. Yang (2003b) descreve uma experiência de ensino, realizada numa turma do 5.º ano, onde, através de contextos realistas, os alunos desenvolveram aspetos do sentido de número. Em particular, através do estabelecimento de conexões entre os problemas propostos na aula e situações do dia-

a-dia, compreenderam o significado dos números “grandes” e do cálculo usando números de referência.

Na mesma linha, Fosnot e Dolk (2001a) referem-se também à importância de organizar atividades que, dada a sua especificidade contribuem para o aumento do sentido de número dos alunos. Em particular, no início da escolaridade, reportam-se a jogos, rotinas e investigações. Justificam o uso de jogos como um contexto especialmente propício à aprendizagem da Matemática, desde que seja minimizado o efeito da competição. Consideram, ademais, que as rotinas são especialmente importantes no início da escolaridade, para dar significado aos números. Finalmente as investigações devem ser construídas e adaptadas de modo a terem como ponto de partida situações realistas que façam sentido para os alunos.

Uma teoria local de ensino para o desenvolvimento do sentido de número

Alguns autores destacam a importância de construir teorias locais de ensino, justificando que estas são indispensáveis para planificar o ensino (Gravemeijer, 2004b; Nickerson & Whitacre, 2010). Assumindo esta perspectiva, Nickerson e Whitacre (2010) construíram uma teoria local de ensino que pode orientar a construção de tarefas de ensino que suportem o desenvolvimento do sentido de número na aula. Pela sua relevância, atualidade e relação com a investigação que desenvolvo, passo a apresentar o estudo que estes autores realizaram, em particular, nos aspetos relacionados com a teoria local de ensino. É de notar que os alunos a que se referem no estudo são futuros professores do Ensino Básico.

O constructo teoria local de ensino, assumido por Gravemeijer (2004b), refere-se à “descrição de um caminho de aprendizagem previsto, e a sua justificação, no que diz respeito a um conjunto de atividades de ensino para um determinado tópico” (p. 107) e surge no contexto de estudos do tipo *design research*⁵. Uma teoria local de ensino de um determinado tópico diz respeito aos objetivos de aprendizagem, às atividades de ensino, e ao papel das ferramentas e das imagens na sequência de aprendizagem prevista. Uma vez

⁵ No capítulo 4 é discutida esta metodologia de investigação.

que este constructo se pode confundir com o de trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995), Gravemeijer (2004b) clarifica a distinção entre os dois.

Considerando as ligações do sentido de número ao cálculo mental e ao cálculo por estimação, Nickerson e Whitacre (2010) organizaram um conjunto de sequências de ensino que suportasse o desenvolvimento do sentido de número e cujo quadro teórico fosse fornecido pela teoria local de ensino. Os objetivos gerais de aprendizagem à volta dos quais foi organizada a teoria local de ensino são os seguintes: (i) os alunos devem capitalizar as oportunidades para usar estratégias sensíveis aos números⁶; (ii) os alunos devem desenvolver um repertório de estratégias sensíveis aos números; e (iii) os alunos devem desenvolver a capacidade para raciocinar com modelos (Nickerson & Whitacre, 2010, p. 233-234). Estes objetivos, de acordo com os autores, estão relacionados com as características dos indivíduos que têm bom sentido de número.

A partir dos objetivos enunciados foi planificado o ensino. Assim, o professor da turma procurou identificar atividades, relacionadas com o currículo, que constituíssem oportunidades que permitissem aos alunos usar estratégias sensíveis aos números. Na sala de aula foi negociada uma norma que remetia para a necessidade de partilhar e discutir com a turma as estratégias que faziam sentido para cada um na resolução dos problemas propostos. Além disso, os alunos deviam reconhecer as vantagens e desvantagens, em cada situação, de usar estratégias sensíveis aos números. Os problemas propostos eram suportados por contextos que fizessem sentido para os alunos (Fosnot & Dolk, 2001b) e os apresentados inicialmente tinham um contexto de vida real. O objetivo deste tipo de problemas era suportar a mudança no uso de procedimentos aprendidos na escola, sem compreensão, para procedimentos com compreensão e significativos para cada aluno.

Relativamente ao segundo objetivo da teoria local de ensino, foram propostas atividades de ensino em que estivessem envolvidos aspetos essenciais do números e das operações, fundamentais para o desenvolvimento do cálculo mental. Assim foram-lhes apresentados problemas relacionados com o valor de posição, os significados e as

⁶ No capítulo 5 é clarificado o que se entende por estratégias sensíveis aos números.

propriedades das operações, números de referência e propriedades dos números. Depois foram partilhadas as estratégias usadas pelos alunos e “o professor e os alunos negociaram então normas sociomatemáticas de estratégias matematicamente diferentes, com facilidade relativa e eficazes” ((Nickerson & Whitacre, 2010, p. 239). Em todo este processo os alunos iam aprofundando o seu conhecimento sobre os números e as operações, subjacente à construção do repertório de estratégias. Além disso, iam dando nomes às estratégias para as poderem distinguir entre si.

Quanto ao terceiro objetivo da teoria local de ensino, interrelacionado com os anteriores, o professor negociou com os alunos o uso de modelos que auxiliasse o raciocínio e pudesse facilitar a invenção de novas estratégias. Com exemplos de modelos os autores referem a linha numérica vazia, que suporta o desenvolvimento de estratégias ligadas à adição e à subtração, e o modelo retangular, que suporta o uso de estratégias associadas à multiplicação e à divisão, baseadas nas propriedades da multiplicação.

Em articulação com os objetivos formulados, Nickerson e Whitacre (2010) apresentam uma listagem das atividades de ensino em termos gerais, que fazem parte da teoria local de ensino e que passo a apresentar:

- O professor antecipa oportunidades de trabalhar o cálculo mental e a estimação, relacionadas com determinadas unidades curriculares. Organiza, depois trajetórias hipotéticas de aprendizagem;
- O professor antecipa estratégias específicas associadas a certos problemas e identifica os aspetos matemáticos aí implícitos. Estas estratégias são suportadas pela escolha dos problemas e pela compreensão da estrutura dos números e das propriedades das operações;
- O professor antecipa modelos produtivos que apoiam o raciocínio dos alunos;
- O professor modela situações identificando oportunidades para o uso autêntico de estratégias sensíveis aos números na resolução de problemas;
- Os alunos aprendem como usar o raciocínio quantitativo na resolução de problemas;

- Os alunos, desde o início, devem efetuar cálculos e estimativas mentalmente e partilhar com os colegas, sendo a negociação destas normas promovida pelo professor;
- A turma negoceia coletivamente os modelos de estratégias dos alunos;
- A turma começa por identificar certas estratégias referindo-se a exemplos concretos;
- Os alunos nomeiam as estratégias de modos significativos, refletindo sobre elas;
- O professor incentiva a elaboração de uma lista de estratégias, o que permite discutir o que constitui uma estratégia diferente de outra e identificar o que é essencial para a definir;
- A partir da organização de vários exemplos sobressai um repertório forte de estratégias de recurso, e os seus nomes e a sua caracterização são refinados.

Os aspetos identificados por Nickerson e Whitacre (2010), para além de evidenciarem o que é essencial nesta teoria local de ensino, dão-nos conta da progressão que vai acontecendo na sala de aula, tendo no horizonte os objetivos que norteiam esta teoria. Os mesmos autores apresentam, ainda, exemplos da concretização do caminho de aprendizagem previsto, extraídos da experiência de ensino realizada na sala de aula.

Uma teoria local de ensino auxilia os professores no desenvolvimento de atividades na sua aula relacionadas com um determinado tópico (Nickerson & Whitacre, 2010). A pertinência desta teoria acresce no caso de tópicos como o sentido de número, muito abrangente e transversal a todo o currículo: “Em casos como este, uma teoria local de ensino é essencial para alcançar os nossos objetivos de aprendizagem” (Nickerson & Whitacre, 2010, p. 250).

Os mesmos autores prosseguem trabalho nesta área, estendendo a teoria local de ensino para o desenvolvimento do sentido de número aos números racionais e trabalhando, neste caso, com professores já no terreno (Nickerson & Whitacre, 2011).

Em síntese, na discussão realizada neste capítulo, evidenciam-se vários significados associados à expressão “sentido de número”, identificando-se, apesar desta diversidade, aspetos comuns aos vários entendimentos. A caracterização de McIntosh et

al. (1992) incorpora os aspetos essenciais do sentido de número referidos pelos vários autores e é a adotada como caracterização associada a esta investigação. São, ainda, discutidos e comparados dois modelos de caracterização de sentido de número. Neste estudo, e como ponto de partida para a análise do sentido de número manifestado pelos alunos nas resoluções das tarefas propostas, é adotado o modelo dos autores supramencionados.

As orientações curriculares relacionadas com a aprendizagem da Matemática do Ensino Básico, tanto a nível internacional como nacional, consideram o desenvolvimento do sentido de número como um aspeto central dos currículos, havendo um conjunto bastante vasto de estudos associados. Uns têm como propósito analisar o sentido de número de alunos e professores, enquanto outros discutem o seu desenvolvimento na aula de Matemática. Também nas orientações curriculares associadas ao Programa de Matemática do Ensino Básico, generalizado no ano letivo de 2010/11, o desenvolvimento do sentido de número é assumido como um dos propósitos principais de ensino do tema Números e Operações, ao longo de todo o Ensino Básico.

No que diz respeito ao desenvolvimento do sentido de número, mais do que relacioná-lo com uma unidade de ensino, há a destacar a cultura de sala de aula que deve ser construída, as tarefas que devem ser propostas e as práticas do professor que promovem o seu desenvolvimento. Deste modo, é realçado o papel do professor na construção de um ambiente favorável a este desenvolvimento e no modo como organiza o ensino, em torno de tarefas que fomentam o sentido de número dos seus alunos. Todos estes aspetos foram discutidos separadamente, assumindo-se, contudo, a sua necessária e evidente inter-relação, como é, aliás, visível na apresentação feita de uma teoria local de ensino para o desenvolvimento do sentido de número, em que todas as vertentes abordadas anteriormente, se interligam e são interdependentes umas das outras.

Capítulo 3

A aprendizagem das operações aritméticas

A grande quantidade de investigações associadas ao tema Números e Operações é proporcional à sua importância no currículo de Matemática da maior parte dos países. Assim, desde sempre, no contexto desta temática houve a preocupação, tanto da parte de educadores matemáticos como de investigadores no campo da psicologia, de estudar o modo como os alunos compreendem os conceitos associados aos números e às operações e os procedimentos que utilizam para resolver tarefas numéricas.

Neste capítulo, numa primeira parte, apresento e discuto investigações sobre a aprendizagem das quatro operações aritméticas. Nos estudos internacionais sobre esta temática considero como ponto de partida, e como referência, os mencionados por Verschaffel et al. (2007) e por Fuson (2003a) uma vez que este campo de investigação é muito vasto. Embora discuta e analise estudos relacionados com todas as operações aritméticas elementares, privilegio, contudo, os associados às operações multiplicação e divisão, considerando a investigação que realizo.

Numa outra parte do capítulo, analiso e discuto investigações centradas nas estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e de divisão,

uma vez que um dos focos do estudo que realizo é a caracterização e evolução dos procedimentos utilizados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação e estes estão intimamente ligados às estratégias.

Numa outra secção, comparo e discuto os significados dos termos cálculo mental, cálculo algorítmico e sentido de número, considerando que estes nem sempre são usados de modo consensual nem coincidente, de uns estudos para outros. Analiso, também, perspetivas sobre a inter-relação entre cálculo mental, cálculo algorítmico e sentido de número no contexto da sala de aula. Discuto, ainda, em particular, coincidências e/ou divergências sobre os significados de termos tais como métodos, estratégias, algoritmos e procedimentos dos alunos, usados nas diferentes investigações sobre a temática. Justifico, também que, no estudo que realizo, opto pelo termo procedimento.

Numa última parte deste capítulo analiso e discuto os aspetos essenciais da aprendizagem da multiplicação (abrangendo a sua relação com a divisão) numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, mencionados nas orientações curriculares de diversos países, incluindo Portugal. Aí, realço as principais diferenças e semelhanças no que respeita aos aspetos que são privilegiados nos vários documentos em análise.

3.1. Aprendizagem das operações aritméticas – diferentes perspetivas

A maior parte das investigações relacionadas com a aprendizagem das operações, sobretudo até aos anos 90 do século XX, teve como objeto de estudo alunos ou grupos de alunos, fora do contexto da sala de aula. O seu propósito era a compreensão dos conceitos numéricos e o desempenho individual das crianças em termos dos procedimentos usados na resolução de problemas numéricos (Verschaffel et al., 2007).

Nesse âmbito foram realizados estudos cujo foco era o cálculo com números-dígito⁷ e outros, o cálculo com números multidígitos⁸.

A partir dos anos 90 do século XX, o contexto das investigações relacionadas com as operações aritméticas passou a ser, quase sempre, a turma ou pequenos grupos de alunos em interação e integrados numa sala de aula. Verschaffel et al. (2007) apontam algumas razões para essa mudança metodológica. A primeira que referem está relacionada com alterações no quadro teórico relativo à aprendizagem, considerando que o modo como as crianças pensam e aprendem Matemática é fortemente influenciado por contextos sociais e culturais bastante complexos (teorias socioconstrutivistas e socioculturais). A outra das razões da mudança do foco das investigações está interligada com o seu propósito, dado que, cada vez mais, estes estudos são desenvolvidos com finalidades relacionadas com a construção, implementação e avaliação de currículos, de programas e de conjuntos de tarefas de ensino e aprendizagem de um determinado tema.

Verschaffel et al. (2007) referem, ainda, que a mudança do contexto dos estudos se deu tanto ao nível da Psicologia Educacional como ao nível da Educação Matemática. Considerando este último campo de investigação, são destacados, no início da década de 90 do século XX, investigadores como Freudenthal, Rouche e Wittmann, que defendem os estudos centrados na sala de aula como o principal tipo de investigação a ser desenvolvida. Wittmann (1998, 2000) menciona mesmo que o objetivo da investigação em Educação Matemática é construir conjuntos de unidades de ensino e estudar os seus efeitos nas diferentes comunidades educacionais. De uma forma geral, Verschaffel et al. (2007) destacam as principais linhas de investigação dos estudos desenvolvidos na sala de aula, relacionados com a temática das operações aritméticas:

A aprendizagem da aritmética como resolução de problemas, o ensino da aritmética inerentemente algébrica, a construção de uma cultura de sala de aula socioconstrutivista, o uso de modelos emergentes como um *design* heurístico, o ensino de problemas de palavras numa perspetiva de modelação e a mudança do conhecimento e das conceções dos professores. (p. 559)

⁷ Neste trabalho, a expressão números-dígito é a tradução de *single-digit number* e designa os números que só têm um algarismo ou dígito.

⁸ Do mesmo modo, a expressão números multidígitos é a tradução de *multidigit numbers* e designa os números que têm mais do que um algarismo ou dígito.

Nas secções seguintes apresento alguns estudos relacionados com a compreensão e o desempenho individual de alunos, fora do contexto da sala de aula, no cálculo com números-dígito e números multidígitos, fazendo a distinção entre, por um lado, as operações adição e subtração e, por outro, a multiplicação e divisão. Faço, também, referência a investigações associadas a estratégias de resolução de problemas, apresentando, de modo mais detalhado, as que se referem à operação multiplicação, por ser esta o foco principal do estudo que realizei.

No que diz respeito às investigações realizadas desde a década de 90 do século XX até à atualidade, tendo como contexto a turma ou pequenos grupos de alunos integrados na sala de aula, seleciono as que considero relevantes, tendo em conta os seus autores, sobre a aprendizagem da aritmética e a resolução de problemas numa perspetiva de modelação, dando ênfase a situações matemáticas significativas e a estratégias e procedimentos usados pelas crianças. Também neste caso dou maior realce aos estudos no âmbito da operação multiplicação e da interligação multiplicação/divisão, considerando a relação intrínseca entre as duas operações, uma vez que dizem diretamente respeito ao estudo que efetuei.

É de destacar que os estudos apresentados no âmbito da aprendizagem da multiplicação e da divisão com números multidígitos, realizados nas últimas décadas estão, frequentemente, ancorados em pressupostos teóricos diferentes dos associados à aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, assumida neste estudo. Considero, no entanto, que a sua discussão contribui, também, para o aprofundamento da compreensão sobre os aspetos associados à aprendizagem destas operações e, em particular, dos procedimentos construídos pelos alunos quando resolvem tarefas relativas a estas operações.

Neste capítulo, quando são referidos estudos associados às operações aritméticas, o universo numérico considerado é o conjunto dos números naturais ao qual se reúne o conjunto formado pelo número zero, ou seja, o conjunto de referência é N_0 . Nos documentos internacionais de língua inglesa usa-se para o mesmo tipo de números o termo *whole numbers* e as investigações associadas são, na sua maior parte, distintas das efetuadas com números racionais nas suas diferentes representações, dada a natureza

diferente dos números envolvidos. Contudo, uma vez que o estudo que realizei inclui, também, a aprendizagem da multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal, refiro alguns estudos que abordam este aspeto particular.

3.2. Adição e subtração

3.2.1. Adição e subtração com números-dígito

Os psicólogos e os educadores matemáticos foram, durante muitas décadas, bastante influenciados pelos estudos realizados por Piaget, partindo do pressuposto que a aprendizagem se faz através de estádios sequenciais com determinadas características. Em particular, para desenvolver a compreensão sobre o conceito de número, as crianças teriam de passar pelo estágio pré-operatório, onde as operações lógicas tais como a classificação, a seriação e a conservação das quantidades ainda não foram assimiladas e apenas no estágio das operações concretas, por volta dos 6-7 anos, estas teriam condições para compreender aspetos relacionados com o conceito de número natural. No entanto, foram surgindo algumas críticas à teoria de Piaget em termos gerais: a objeção ao estruturalismo, a dificuldade de articulação da teoria com a influência do contexto social, a demasiada rigidez entre os estádios e a caracterização do estágio formal. No que diz respeito ao desenvolvimento do conceito de número natural, a sua teoria também foi posta em causa por alguns investigadores, apesar de haver outros que se basearam em alguns aspetos que consideraram relevantes evoluindo para teorias próximas das piagetianas mas considerando, nomeadamente, as interações socioculturais no desenvolvimento dos conceitos (Verschaffel et al., 2007).

3.2.1.1. Estruturas conceptuais

Nos anos 90 do século XX, começam a surgir alguns estudos associados ao desenvolvimento dos conceitos numéricos e das operações, colocando em causa a ideia que caracterizava, de um modo geral, a aprendizagem das operações com números com

um só dígito como “aprendizagem de factos matemáticos” (Fuson, 2003a). Destes, destaco os que relacionam as estratégias e os procedimentos usados pelas crianças na resolução de tarefas simples de adição e de subtração com o seu desenvolvimento conceptual, começando por apresentar o modelo de desenvolvimento das estruturas conceptuais para a adição, proposto por Fuson (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson, 1998; Fuson, 1992a, 1992b; Fuson et al., 1997a; Fuson, Smith & Cicero, 1997b; Sherin & Fuson, 2005).

Uma caracterização de estruturas conceptuais é proposta por Fuson et al. (1997b) “Nós entendemos as estruturas conceptuais como categorias hipotéticas de atividade quantitativa que parecem ser úteis na compreensão do ensino e aprendizagem de um domínio” (p. 740). Numa outra publicação (Fuson et al., 1997a) a expressão “estrutura conceptual” é entendido, de uma forma geral, como uma interpretação mental do mundo que nos rodeia. Mais especificamente, “uma estrutura conceptual em uso indica/reflete os aspetos de uma situação matemática considerada pelo utilizador num dado momento: ela capta quais os aspetos que são focados e como são interpretados” (p. 133).

O modelo de desenvolvimento das estruturas conceptuais respeitantes às operações adição e subtração inclui três níveis progressivos, que variam em termos das unidades e operações conceptuais e dos métodos⁹ usados pelas crianças para adicionar e subtrair.

3.2.1.2. Estruturas conceptuais e métodos usados

No primeiro nível do modelo de desenvolvimento das estruturas conceptuais relativo à operação adição, denominado por Itens de unidade percetual (*perceptual unit itens*), as crianças são capazes de construir situações de adição usando objetos físicos de vários tipos. Estes objetos são usados para modelar a operação, que encaram como a junção de unidades simples. As crianças veem apenas uma representação de cada vez,

⁹ Fuson usa o termo método (*method*) em alguns dos seus artigos, preferindo-o aos termos procedimentos (*procedures*) e estratégias (*strategies*). No entanto, em outros artigos mais recentes e em colaboração com outros investigadores, são também usados os termos procedimentos de solução (*solution procedures*) e estratégias de cálculo (*computational strategies*) ou de solução (*solution strategies*). Os termos usados neste estudo são definidos numa secção posterior deste Capítulo.

seja ela a correspondente a uma das parcelas ou à soma, o que tem consequências em termos dos procedimentos que usam. Os métodos associados a este primeiro nível são denominados por *contar tudo*, pois as crianças começam num dos conjuntos de objetos ou na sua representação e contam tudo a partir do um, usando o mesmo procedimento para todos os conjuntos, até chegar ao total (Sherin & Fuson, 2005).

No segundo nível, denominado por Integração inclusa (*embedded integration*), as três quantidades (relativas às parcelas e à soma na adição correspondente) podem ser, simultaneamente, vistas e representadas enquanto entidades incluídas e relacionadas entre si, o que permite a aplicação de métodos de contagem mais abreviados e eficientes do que os usados no primeiro nível. Os procedimentos associados a este nível de desenvolvimento conceptual são denominados por *contagem a partir de*, pois as crianças partem da contagem de uma das quantidades e continuam a partir daí, até chegar ao total (Fuson, 1992b).

Finalmente, no terceiro nível, Itens de unidade ideal (*ideal unit itens*), as crianças já criaram estruturas que lhes permitem construir, simultaneamente, representações mentais dos números que correspondem às parcelas e à soma. Neste nível as parcelas não estão contidas na soma, são vistas separadamente e podem ser comparadas com ela. “Os números são encarados como unidades que incluem tríades numéricas – duas parcelas e uma soma conhecidas” (Sherian & Fuson, 2005, p. 351). Assim, as crianças são capazes de transformar uma adição noutra recompondo os números, de modo a usar números conhecidos ou, ainda, a recorrer a estratégias derivadas de factos conhecidos associados a esta operação. Por exemplo, podem apelar ao uso dos dobros para determinar $3+4$, calculando $3+3+1$ ou utilizar composições dos números usando o 5, para determinar $6+3$, calculando $5+4$. As estratégias associadas ao terceiro nível são denominadas por *factos conhecidos e factos derivados* (Fuson, 1992b).

No que diz respeito à subtração e partindo do mesmo modelo de desenvolvimento das estruturas conceptuais, Fuson (2003a) associa cada um dos seus níveis à utilização de métodos de subtração diferentes, apesar de não considerar essa associação tão explícita como na adição. Os métodos iniciais inventados pelas crianças no primeiro nível estão

relacionados com situações de partir do total de objetos, retirar alguns de acordo com a situação e contar os restantes para obter a diferença.

Na subtração, os métodos associados ao segundo nível de desenvolvimento das estruturas conceptuais são de contagem, podendo variar o modo como esta se processa. Em alguns casos, as crianças podem fazer contagens decrescentes (*contar para trás*), partindo do aditivo e chegando ao resto e, em outros casos, partindo do número antes do aditivo e chegando ao resto. Qualquer um destes métodos, muito usados nos Estados Unidos e no Canadá, é difícil para as crianças, apesar de, muitas vezes, estas usarem os dedos das mãos como recurso. Um outro método considerado mais fácil, é *contar até*, partindo do subtrativo e chegando ao aditivo e que é usual, sobretudo, em alguns países da América Latina e da Europa (Fuson, 2003a).

Associados ao terceiro nível de desenvolvimento conceptual da subtração estão outros métodos relacionados com factos conhecidos ou derivados, como por exemplo, *recorrer ao 10*. Apesar de Fuson (2003a) reconhecer que há muito menos investigação sobre a subtração envolvendo números com um dígito, quando comparada com a que existe sobre a adição, dá o exemplo do Leste da Ásia onde são trabalhados dois tipos de métodos associados ao número dez. Ilustrando um dos métodos com a subtração $15-9$, adiciona-se um ao número nove (até ao 10) e depois mais cinco (até ao 15), logo $15-9=6$ porque $(1+5=6)$. Usando um outro método para efetuar a mesma subtração $15-9$, tira-se cinco do quinze, e tira-se mais um do dez até ao nove, e ficam seis $(5+1)$.

Muitos destes métodos inventados pelas crianças podem ser trabalhados na sala de aula e Fuson (2003a) refere mesmo que, no final do primeiro ano, os alunos deveriam progredir em termos dos métodos que usam associados tanto à adição como à subtração com números-dígito, recorrendo a estratégias rápidas e apropriadas, sobretudo as relacionadas com *a contagem a partir de* e *a contagem até*.

3.2.2. Adição e subtração com números multidígitos

Tal como acontece para os números-dígito muitas das investigações realizadas no âmbito das operações com números multidígitos relacionam as estruturas conceptuais e o modo como são mobilizadas na invenção e utilização de estratégias de resolução de problemas de adição e subtração. A relação entre conhecimento conceptual e conhecimento procedimental foi estudada por numerosos investigadores, que evidenciaram a sua interligação (Fuson, 1992; Fuson, 2003a; Fuson et al., 1997a; Fuson et al., 1997b; Fuson & Smith, 1997; Hiebert & Wearne, 1996; Verschaffel et al., 2007). Em particular, Hiebert e Wearne (1996) realizaram um estudo onde seguiram crianças ao longo de quatro anos (do 1.º ao 4.º ano de escolaridade) e analisaram o seu conhecimento conceptual e procedimental no que respeita à adição e subtração, identificando uma inter-relação entre eles.

3.2.2.1. Estruturas conceptuais

As estruturas conceptuais associadas aos números multidígitos estão diretamente relacionadas com as propriedades do sistema de numeração posicional decimal, com as relações entre os números e entre as suas diferentes representações (através de palavras, algarismos ou usando as diferentes operações aritméticas). No início do trabalho com números multidígitos as crianças começam por usar as estruturas conceptuais que desenvolveram a propósito dos números com um dígito e das operações associadas. Contudo, à medida que os números são cada vez maiores, essas estruturas vão evoluindo e transformam-se em outras mais complexas. As diferentes concepções¹⁰ que as crianças constroem sobre os números e as suas relações estão interligadas com as diversas interpretações e representações que podem ser feitas acerca deles (Fuson, 1992a, 1992b; Fuson & Smith, 1997; Fuson et al., 1997b).

Fuson et al. (1997a) e Fuson e Smith (1997) desenvolveram um quadro de estruturas conceptuais que as crianças constroem sobre os números multidígitos, que

¹⁰ O termo concepção é utilizado aqui na aceção de estrutura conceptual, tal como nos documentos citados.

caracterizo em seguida, e descrevem o seu uso em situações de adição e subtração. Esta categorização suporta-se em quatro projetos de investigação diferentes, nos quais os autores referidos participaram. No âmbito desses projetos, os professores envolvidos utilizaram uma metodologia de resolução de problemas na sala de aula, no desenvolvimento do trabalho sobre operações com números multidígitos. Nessas aulas os professores não ensinaram apenas uma única estratégia associada a cada problema e também não esperavam que todas as crianças usassem o mesmo procedimento, investindo bastante na explicação, na partilha e na discussão dos modos de resolução dos problemas de adição e subtração (alguns destes projetos envolveram também a multiplicação e divisão, que refiro na secção seguinte). Tendo como base os trabalhos realizados no âmbito dessas investigações, aqueles autores resumem os suportes conceptuais utilizados, identificam as estruturas conceptuais relacionadas com os números multidígitos construídas pelas crianças e, finalmente, descrevem e discutem os métodos usados na resolução de problemas de adição e de subtração.

No que diz respeito aos suportes conceptuais, inicialmente, as crianças usaram materiais com unidades simples para modelar as situações propostas, tais como pequenos cubos, passando depois para materiais estruturados, do tipo multibásico (MAB) e materiais do mesmo tipo de base dez, simbolizando dezenas e unidades e, mais tarde, centenas e milhares. Para além dos materiais concretos, recorreram, ainda, a diferentes representações e desenhos associados a unidades simples e agrupadas. As unidades simples eram representadas por pontos, círculos e pequenas linhas horizontais, tendo, também, sido utilizadas representações de objetos da vida real, como *doughnuts* ou moedas.

A categorização efetuada em torno das estruturas conceptuais tem, como ponto de partida, a identificação feita por Fuson, em 1990, para números com até quatro dígitos e o trabalho desenvolvido nos projetos acima referidos (Fuson et al., 1997a; Fuson & Smith, 1997). Estes autores identificam cinco conceções diferentes a propósito de números com dois dígitos e uma sexta associada a uma conceção de números-dígito. Estas seis conceções podem estar disponíveis (na totalidade ou em parte) numa dada criança e serem usadas em situações diferentes, à medida que vão sendo acrescentadas

novas concepções às que já existiam. Este processo de construção de novas estruturas conceptuais é bastante prolongado e ocorre em determinados contextos sociais e de atividade criados na sala de aula (Fuson et al, 1997a).

O modelo que inclui as cinco concepções relacionadas com números multidígitos foi denominado pelos seus autores por UDSSI (*unitary, decade, sequence, separate, integrated*). Cada uma das concepções compreende uma relação entre as palavras escritas que representam os nomes dos números, os números representados em linguagem simbólica e as quantidades associadas, três aspetos que os autores denominaram por tríades (Fuson et al., 1997a; Fuson & Smith, 1997). Apresento, seguidamente, cada uma das cinco concepções.

A concepção unitária para números multidígitos é uma extensão da concepção unitária dos números com um só dígito. As quantidades não são organizadas em grupos, a palavra associada é vista como um todo e a representação simbólica também. Por exemplo, 12 berlindes são vistos na totalidade, sem serem organizados em dezenas e unidades, a palavra que representa a quantidade e a representação simbólica do número 12 são encaradas como um todo, não discernindo, por exemplo 12 como $10+2$.

A concepção de década está associada à estrutura da língua inglesa e de outras com estruturas semelhantes (na língua portuguesa e em outras línguas latinas também acontece). As crianças associam a separação efetuada na linguagem simbólica à separação em dezenas e unidades na linguagem oral, relacionando, por exemplo o algarismo dois do número 23 à palavra vinte e o algarismo três à palavra três. Às vezes, no início, as crianças com esta concepção identificam padrões na linguagem oral (e na escrita) dizendo cinquenta, cinquenta e um, cinquenta e dois (*fifty, fifty-one, fifty-two*) e seguem-nos, incorretamente, na representação simbólica escrevendo 50, 501, 502, separando as dezenas das unidades e relacionando cada uma das partes com a quantidade respetiva.

A concepção de sequência de dezenas e unidades é uma versão mais estruturada da concepção anterior. As crianças com esta concepção aprenderam a contar de dez em dez e assim, para além de separarem as dezenas das unidades, separam o conjunto das dezenas

em grupos de dez. Por exemplo, no número 53, para além de separarem as dezenas das unidades ainda estruturam o 50 em grupos de dez.

A conceção de separar as dezenas das unidades está implícita quando, num conjunto, a criança se foca na contagem dos grupos de dez e nos grupos unitários e não na contagem dos objetos em si. Esta conceção não tem suporte na linguagem oral e escrita das línguas europeias, constituindo uma dificuldade para as crianças mas, por exemplo, na língua chinesa, para ler 52 é dito o equivalente a “*cinco dez e dois*”, tal como acontece na língua inglesa para números com três dígitos.

A conceção integrada de separar sequências de dezenas está relacionada com as duas anteriores. As crianças que as construíram são capazes de passar de uma para a outra rapidamente, o que lhes facilita a compreensão sobre os números com dois dígitos e lhe permite ter flexibilidade na sua abordagem durante a resolução de problemas. Por exemplo, para contarem 50 *doughnuts* dispostos em cinco caixas de dez conseguem fazê-lo facilmente, com as caixas abertas ou fechadas, identificando tanto cinco grupos de dez unidades como cinco “*dez*” (Fuson et al., 1997a).

Finalmente, a conceção relacionada com a conceção dos números-dígito está relacionada com o facto de as crianças, mesmo depois de terem construído algumas conceções corretas acerca dos números multidígitos, às vezes, encararem um número com dois dígitos como dois números com um dígito. Esta conceção é usada, nomeadamente, para adicionar ou subtrair horizontalmente (Fuson et al., 1997a; 1997b).

De início, as crianças europeias têm alguma dificuldade na relação e construção das tríades, considerando a estrutura das línguas associadas (na sua vertente oral e escrita) e a representação simbólica do nosso sistema de numeração decimal. De facto, para uma compreensão aprofundada sobre todos os aspetos incluídos nas tríades é necessário construir muitas das conceções que fazem parte do modelo UDSSI. Pelo contrário, as crianças chinesas, dado o tipo de palavras usadas na sua língua materna e a linguagem simbólica associada precisam apenas de construir a conceção de separar as dezenas das unidades, relacionando mais facilmente as palavras com os símbolos (Fuson, 2003a).

O nosso sistema de numeração decimal, dada a sua característica posicional, permite escrever eficazmente números muito grandes mas é bastante abstrato e, no início da sua aprendizagem, pode ser enganoso. De facto, os algarismos usados são sempre os mesmos, mudando apenas a sua posição, o que é difícil de compreender por crianças pequenas. De modo a facilitar essa compreensão é importante que professores e educadores proponham às crianças numerosas experiências usando recursos variados. Quando isso não acontece muitas delas têm uma compreensão deficiente acerca dos números multidígitos, não os percebendo de modo global mas como dígitos colocados lado a lado (Fuson, 2003a).

Os próprios autores do modelo de desenvolvimento das estruturas conceptuais (UDSSI) identificam-lhe alguns pontos fracos, constatando que aquele é bastante mais complexo do que a construção sequencial das concepções. Por um lado, há diferenças qualitativas e quantitativas nessa construção, que dependem substancialmente da língua utilizada, tal como foi ilustrado. Por outro lado, as crianças podem construir todas as relações para um determinado número antes de desenvolverem uma outra concepção para um número diferente e, também, nem todas as crianças constroem todas as concepções. Finalmente, crianças que construíram mais do que uma concepção são capazes de as usar em diferentes situações, mas também, de misturar entre si partes de tríades de concepções distintas (Fuson et al., 1997a).

É importante, ainda, realçar que as concepções subjacentes ao modelo de estruturas conceptuais referido focam-se, sobretudo, na compreensão sobre o nosso sistema de numeração posicional de base decimal. Fuson (2003b) chama a atenção para um outro aspeto relacionado com a interpretação do número, associado à sequência numérica e à posição que cada número ocupa nessa sequência. As concepções associadas são semelhantes às identificadas por outros autores, tais como Treffers (2008). Se o foco for nos números, no lugar que estes ocupam na sequência numérica e na sua posição correspondente na linha numérica, a concepção relativa a esta interpretação é de posição e, se os números forem interpretados considerando as suas características estruturais, a sua notação decimal e a sua relação com outros números, a concepção subjacente está relacionada com a sua estrutura (Treffers, 2008).

Verschaffel et al. (2007) referem que, embora as diferentes concepções possam ser identificadas e relacionadas com as estratégias inventadas e usadas pelas crianças na resolução de problemas numéricos, no que diz respeito à concepção e interpretação dos números inteiros associadas ao seu posicionamento na sequência numérica, não têm, ainda assim, conhecimento de estudos que suportem o seu contributo para o desenvolvimento do conhecimento conceptual sobre os números.

3.2.2.2. Estruturas conceptuais e métodos usados

Na subsecção anterior apresentei o referencial teórico sobre as estruturas conceptuais das crianças associadas aos números multidígitos, seguindo a perspectiva de Fuson et al. (1997a). Nesta subsecção, adotando como referência os mesmos autores, relaciono as estruturas conceptuais para os números com dois dígitos com os métodos usados pelas crianças quando resolvem problemas de adição e subtração, descrevendo, resumidamente, cada um deles.

Os métodos utilizados pelas crianças na resolução de problemas de adição e subtração que envolvem números multidígitos dependem e são generalizações dos usados com números-dígito. De uma forma sistemática Fuson retoma os métodos identificados pelos autores anteriormente referidos (Fuson, 1992; Fuson et al., 1997a; 1997b; Fuson & Smith, 1997) e organiza-os em três tipos: métodos de contagem, métodos de decomposição e métodos de recomposição (Fuson, 2003a).

Os métodos de contagem são aqueles em que as crianças começam por contar tudo de modo unitário, usando objetos, desenhos ou apenas recorrendo à sequência numérica. Estes procedimentos, apesar de poderem evoluir para outros mais elaborados – que recorrem a contagens, crescentes ou decrescentes, a partir de um número usando dezenas e unidades – rapidamente se revelam ineficazes na adição e subtração, condicionados pela grandeza dos números e pela evolução da fluência das crianças na contagem (Fuson, 2003a).

Os métodos de decomposição são os usados pelas crianças quando necessitam de adicionar ou subtrair dois números e o fazem por partes, adicionando (ou subtraindo)

dezenas com dezenas e unidades com unidades, sendo facilmente extensíveis ao trabalho com números maiores (Fuson, 2003a). Neles incluem-se diferentes tipos de métodos: os que partem de um número ao qual é adicionado ou subtraído outro número usando sequências de dezenas e unidades, em que são separadas as dezenas das unidades e operadas cada uma por si e os mistos, em que se adicionam ou subtraem as dezenas e depois se usa a sequência numérica para operar com as unidades.

Existem ainda os métodos de recomposição em que são alterados ambos os números operados, de modo a facilitar a adição ou a subtração (Fuson et al., 1997a). Na adição correspondem, por exemplo, a adicionar a um dos números uma parte do outro, de modo a obter “dezenas certas” (múltiplos de dez) ou dobros e, na subtração, correspondem a mudar ambos os números de modo conveniente, mantendo a equivalência entre as subtrações (Fuson, 2003a). Os métodos de recomposição são bastante eficazes com alguns números e são denominados também por outros autores por estratégias de compensação ou *varying* (Buys, 2008; Treffers, 2008).

A categorização dos métodos usados pelas crianças, definida por Fuson et al. (1997), é retomada e adaptada em numerosos estudos associados às estratégias (na aceção de métodos) inventadas na resolução de problemas de adição e subtração. Apesar disso, por vezes, as denominações das estratégias são um pouco diferentes tais como: estratégias “sequenciais”, de combinação das unidades separadamente e de compensação (Carpenter et al., 1998; Thompson, 2003b, 2003c).

A denominação de métodos usados pelas crianças é utilizada nas investigações referidas anteriormente (Carpenter et al., 1998; Thompson, 2003b, 2003c) por um lado, na aceção de estratégias usadas pelas crianças e, por outro, na aceção de algoritmo tradicional. Assim, em alguns casos, tanto são apresentados exemplos de cálculo horizontal como de cálculo vertical ou em coluna, tradicionalmente denominado por algorítmico.

3.2.2.3. Estratégias de adição e subtração com números multidígitos

Para além dos estudos referidos na subsecção anterior, relacionando estruturas conceptuais e métodos usados, salientam-se outras investigações cujo propósito é identificar as estratégias inventadas e usadas pelas crianças na adição e subtração quando os números envolvidos são menores que 20 ou estão entre 20 e 100 (Carpenter & Moser, 1984; Thompson, 2003b; 2003c).

No que respeita aos números até 20, são caracterizadas diferentes estratégias de cálculo mental usadas pelas crianças quando resolvem problemas de adição e subtração. Um dos estudos a realçar é realizado por Thompson, que agrupa as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração com números até 20. Estas são organizadas em estratégias de contagem e estratégias que envolvem o uso de factos numéricos, conhecidos ou derivados (Thompson, 2003b). As estratégias de contagem identificadas por este autor são: contar a partir do primeiro número, contar a partir do número maior, contar para trás a partir de, contar para trás até e contar para a frente a partir de. As estratégias de cálculo que envolvem o uso de factos numéricos conhecidos ou derivados são: usar os dobros (na adição), usar os “quase dobros” na subtração ou na adição, usar a subtração como inversa da adição, usar a estrutura do cinco e do dez, compensar e redistribuir. As estratégias de contagem com números até 20 identificadas por Thompson (2003b) são muito semelhantes às já referidas por Fuson et al. (1997a) e Fuson (2003a), a propósito dos números-dígito, apesar das denominações usadas não serem totalmente coincidentes.

No caso da resolução de problemas de adição e subtração com números entre 20 e 100, Thompson (2003b) identifica quatro tipos de estratégias mais usadas pelos alunos: estratégias de decomposição, por “saltos”, mistas e de compensação.

Nas estratégias de decomposição, as dezenas e as unidades são operadas separadamente. Este é o tipo de estratégia mais utilizado no Reino Unido. Por exemplo, para adicionar $23+35$, calcula-se separadamente $20+30$ e $3+5$. Esta é, também, conhecida por partição ou 1010 (dezdez), sobretudo na Holanda (Beishuizen, 1997).

Um segundo tipo de estratégias é “saltar”, sendo referido, por vezes, como estratégias cumulativas ou sequenciais, muito usadas na Holanda. Para calcular $25+33$ recorrendo a esta estratégia, parte-se do 25 e dá-se um salto de 30, adicionando, chegando ao 55. Depois dá-se um salto de três e chega-se ao 58.

O terceiro tipo de estratégias identificado por Thompson (2003b) é uma mistura dos dois anteriores e, por isso, denominado por estratégias mistas ou “decompor e saltar”. Recorrendo ao mesmo exemplo, do cálculo de $23+35$, utilizando esta estratégia, parte-se do 20, dá-se um salto de 30, obtendo 50 e depois saltos de cinco e de três, obtendo sucessivamente 55 e 58.

Finalmente, o quarto tipo de estratégias é o de compensação ou de “saltar para além de”. Exemplificando com o mesmo cálculo, parte-se do 25 e dá-se um salto de 30, mais um salto de cinco, obtendo 60. Mas como é necessário adicionar apenas 33, compensa-se depois, dando um salto de duas unidades para trás.

A categorização das estratégias apresentada por Thompson (2003b) tem algumas semelhanças com os métodos usados pelos alunos descritos a propósito das investigações associadas às estruturas conceptuais, já referidas.

Para além da categorização das estratégias usadas pelos alunos coloca-se também a questão do modo como são desenvolvidas e do seu papel na compreensão dos conceitos e procedimentos associados às operações adição e subtração. Nesse âmbito, Carpenter et al. (1998), desenvolvem um estudo longitudinal, ao longo de três anos, que envolveu 82 crianças do 1.º ao 3.º ano, cujo propósito foi investigar o papel das estratégias inventadas pelas crianças na compreensão dos conceitos e procedimentos de adição e subtração com números multidígitos. Neste estudo são usadas, como ponto de partida, as categorizações definidas por Fuson et al. (1997a) para as estratégias inventadas pelas crianças na resolução de problemas de adição e subtração, tal como acontece em muitas outras investigações.

Carpenter et al. (1998) referem que, à semelhança de Fuson (1992a, 1992b) e de Fuson et al. (1997a; 1997b), frequentemente, as estratégias inventadas pelas crianças estão interligadas com as conceções subjacentes que estas têm sobre os números e as suas

relações. Assim, uma estratégia sequencial está relacionada com uma concepção de posição na sequência numérica, uma estratégia de decomposição com a estrutura do sistema decimal e uma estratégia de compensação com uma concepção que relaciona e interliga as concepções anteriores. No decorrer do estudo mencionado são identificadas as seguintes estratégias: modelação ou contagem um a um, modelação usando materiais estruturados em dezenas e unidades, estratégias sequenciais (ou de saltos), estratégias de combinação de unidades, estratégias de compensação, outras estratégias inventadas e algoritmos (Carpenter et al., 1998).

Os investigadores supramencionados chamam a atenção para o facto de as crianças envolvidas no estudo referido não inventarem as estratégias no “vazio” e individualmente, não sendo esse o propósito da investigação. Estas são construídas no contexto social da sala de aula, onde há partilha e discussão das estratégias inventadas pelos vários alunos. Apesar de estes apresentarem, fundamentarem e compararem as suas estratégias com as de outros, nenhum dos professores das turmas envolvidas, deliberadamente, realça alguma dessas estratégias nem as tenta ensinar. Em alguns casos, e considerando pressões curriculares, há professores que ensinaram os algoritmos tradicionais no 2.º ou 3.º ano. No entanto, os autores do estudo mantiveram-se neutros relativamente a esta decisão dos professores e consideram que, para além das vantagens na utilização de algoritmos há, atualmente, outras formas de calcular, nomeadamente, recorrendo à calculadora, quando se trata de efetuar, rápida e eficazmente, cálculos complexos.

Relacionado com a utilização dos algoritmos tradicionais, o estudo realizado por Carpenter et al. (1998), em análise, permite identificar que os alunos que cometem mais incorreções no uso dos mesmos são aqueles em cuja sala de aula se introduz mais precocemente esse modo de calcular, em comparação com crianças, de outras turmas, que inventaram estratégias de cálculo mental antes e/ou durante a introdução dos algoritmos. Além disso, os alunos que inventam estratégias de cálculo antes do trabalho com os algoritmos mostram uma compreensão mais profunda sobre aspetos do sistema de numeração, assim como são melhor sucedidos em situações novas. Como conclusão a realçar Carpenter et al. (1998) destacam que “os resultados deste estudo ilustram que as

estratégias inventadas podem fornecer a base do desenvolvimento da compreensão das operações com multidígitos, mesmo quando são ensinados os algoritmos” (p. 19).

A maior parte das investigações sobre estratégias usadas na resolução de problemas de adição e subtração com números multidígitos diz respeito a números com dois algarismos. Efetivamente, existem poucos estudos que associem e efetuem a extensão dos métodos usados pelas crianças na adição e subtração com números a partir de quatro dígitos, provavelmente, porque os estudos realizados em profundidade acompanham apenas alunos até ao terceiro ano (Fuson et al., 1997a). No entanto, considerando as características do nosso sistema de numeração, decimal e posicional, os métodos de decomposição ou recomposição utilizados para adicionar e subtrair com números com dois dígitos são facilmente generalizáveis para números maiores.

Associada aos métodos e estratégias usados pelos alunos quando resolvem problemas de adição e subtração com números com mais de dois algarismos há a realçar a investigação produzida por Selter (2001). Este investigador realiza um estudo com cerca de 300 alunos, inicialmente no 3.º e até ao início do 4.º ano, que resolvem doze problemas, seis de adição e seis de subtração, envolvendo números com três dígitos com o propósito de descrever o sucesso, os métodos e as estratégias usados na sua resolução. Os problemas são propostos às crianças na sala de aula, antes e depois da introdução dos algoritmos, no 3.º ano e, pela terceira vez, no início do 4.º ano. Os métodos usados pelos alunos e descritos por Selter (2001) são de três tipos: padronizados escritos (algoritmos), informais escritos (por exemplo, notas não padronizadas) e aritmética mental (sem escrever quaisquer notas). Na classificação e caracterização destes métodos o investigador usa como referência investigações já citadas, como as de Fuson (1992a, 1992b) e de Fuson e Smith (1997).

Sobre o sucesso dos alunos na resolução dos problemas Selter refere que, no início do 4.º ano, a maior parte dos problemas é resolvido correctamente havendo, no entanto, uma diferença entre os problemas de adição e de subtração. Menciona ainda que os resultados da investigação são condicionados pelo tipo de dados recolhidos, sobretudo pelas produções escritas dos alunos. A diferença verificada entre adição e subtração pode ser explicada considerando o modo confuso, para algumas crianças, como o algoritmo da

subtração é trabalhado e o menor tempo e atenção dedicado a esta operação, quando comparado com o destinado à adição (Selter, 2001).

Relativamente à frequência e dificuldade associadas aos métodos utilizados pelos alunos constatou-se que, depois de ser introduzido, o algoritmo é o método mais usado, tendo os outros quase desaparecido, sobretudo os informais escritos. No que se refere à diferença entre os métodos escolhidos, quer se trate de adição ou de subtração, esta não é significativa, verificando-se que, no terceiro momento de recolha de dados, três quartos dos alunos usam o mesmo método para todos os problemas. As estratégias informais mais usadas são as associadas à decomposição em centenas, dezenas e unidades, operando separadamente ou partindo do primeiro número e ir adicionando ou subtraindo centenas, dezenas e unidades. As estratégias associadas à resolução dos problemas propostos, previstas por Selter (2001), e quase todas flexíveis aparecem mais raramente.

Selter (2001) conclui, ainda, que as concepções acerca do ensino e aprendizagem, veiculadas através dos manuais e dos livros didáticos, contribuem para uma certa “*inflexibilidade de pensamento*” dentro da sala de aula, considerando que os resultados deste estudo não contradizem aqueles que evidenciam as capacidades dos alunos na criação e utilização de estratégias próprias e produtivas de resolução de problemas, desde que lhes seja dada oportunidade continuada para as inventar. Assim, os resultados desta investigação estão de acordo com outros identificados nesta secção, nomeadamente, os dos estudos realizados por Carpenter et al. (1998), Fuson et al. (1997b) e Thompson (2003b).

Em suma, a investigação produzida ao longo das últimas décadas sobre a adição e a subtração com números multidígitos e sobre as estratégias usadas pelos alunos sugere que estes são capazes de inventar as suas próprias estratégias, desde que o contexto de sala de aula seja favorável. Os resultados dos estudos que envolveram abordagens não tradicionais da adição e da subtração indicam que estas auxiliam os alunos a compreender e a explicar as estratégias utilizadas e referem a importância das experiências iniciais serem suportadas por materiais de contagem e por representações (desenhos) elucidativas da estrutura do sistema decimal. É realçada, também, a importância do tempo que deve ser destinado ao desenvolvimento da compreensão dos

métodos e estratégias usados pelos alunos, de modo a tornar a sua aprendizagem significativa e duradoura (Fuson, 2003a). Ainda assim, a mesma autora chama a atenção para o facto da investigação sobre estas temáticas não ser suficientemente esclarecedora sobre os recursos, as metodologias utilizadas pelo professor e as características do trabalho em sala de aula que possam maximizar a aprendizagem sobre as operações adição e subtração com números multidígitos.

Referindo-se às investigações sobre estratégias de cálculo com números multidígitos, Verschaffel et al. (2007) afirmam:

Esta investigação [relacionada com elementos conceptuais e estratégias de cálculo] tem-nos ajudado a ilustrar um outro significado de “aritmética mental” quando comparado com o tradicional, onde a aritmética mental é vista (meramente) como fazer somas de cabeça em vez de ser com papel e lápis. (Verschaffel et al., 2007, p. 575)

Os autores anteriores destacam, também, aspetos semelhantes aos já identificados por Fuson (2003a) e realçam os progressos efetuados na caracterização de elementos conceptuais e das estratégias usadas pelas crianças e no seu contributo para as questões associadas ao cálculo mental.

3.3. Multiplicação e divisão

3.3.1. Tipos semânticos ou modelos de situações

As investigações associadas às operações multiplicação e divisão são em muito menor número quando comparadas com as relacionadas com as operações adição e subtração (Fuson, 2003a; Verschaffel et al., 2007). Além disso, considerando a interligação entre a multiplicação e divisão, muitos dos estudos realizados incidem, simultaneamente, sobre estas duas operações. Neste âmbito atribui-se uma importância especial aos problemas de palavras que envolvem uma ou mais operações aritméticas com números inteiros (Verschaffel et al., 2007).

Uma das linhas de investigação, segundo Verschaffel et al. (2007), associada à temática da multiplicação e divisão, muito complexa e diversificada, diz respeito aos tipos semânticos ou modelos de situações. Os estudos realizados estão relacionados com a categorização de situações descritas através de problemas de palavras, de acordo com a natureza das quantidades envolvidas e das relações entre elas. Greer (1992) identifica quatro tipos semânticos, que denomina por modelos de situações, associados aos problemas de multiplicação com números inteiros positivos: grupos iguais, comparação multiplicativa, disposição retangular e produto cartesiano. A cada um destes tipos semânticos são associados os correspondentes para a operação divisão.

Os quatro tipos semânticos ou modelos de situações são organizados por Greer (1992) em dois grandes grupos: situações que são “psicologicamente” não comutativas (ou assimétricas) e situações comutativas (ou simétricas). Nas situações assimétricas de multiplicação, o multiplicador e o multiplicando podem ser diferenciados, ou seja, o número que tem a função de multiplicador opera em termos conceptuais sobre o multiplicando, para ser obtido o produto. Exemplos de situações assimétricas na multiplicação são situações de grupos iguais (Quatro crianças têm cinco cromos cada uma. Quantos cromos têm ao todo?) e de comparação multiplicativa (Ana tem cinco cromos e João tem três vezes mais. Quantos cromos tem o João?). Pelo contrário, nas situações simétricas não é possível distinguir entre multiplicador e multiplicando, o que acontece no caso da disposição retangular (Se um retângulo de papel quadriculado tem dez quadrículas de comprimento e quatro de largura quantas quadrículas tem no total?) e no caso do produto cartesiano (A Ana tem três camisolas e cinco calças. De quantas maneiras diferentes se pode vestir?).

As situações assimétricas de multiplicação conduzem a dois tipos de divisão distintos mas ambos assimétricos: divisão pelo multiplicador (divisão partitiva ou por partilha) e divisão pelo multiplicando (divisão quotativa ou por medida). Um exemplo do primeiro tipo de situação é – Vinte cromos vão ser repartidos por quatro crianças. Com quantos cromos fica cada uma? – e um exemplo da situação de divisão pelo multiplicando é – Se eu tiver vinte cromos a quantas crianças posso dar cinco cromos? Pelo contrário, existe apenas um tipo de situações simétricas de divisão, que deriva

diretamente das situações simétricas de multiplicação, tanto associadas à disposição retangular como ao produto cartesiano. Um exemplo deste tipo de situações de divisão é, por exemplo, – Se um retângulo de papel quadriculado tiver quarenta quadrículas no total, e quatro quadrículas na largura, quantas tem no comprimento? (Greer, 1992).

Segundo o mesmo autor, problemas matematicamente equivalentes mas com estruturas semânticas distintas sugerem aos alunos diferentes estratégias de resolução com graus de dificuldade variados. De acordo com alguns autores (Greer, 1992; Nesher, 1988) a estrutura semântica e os aspetos linguísticos de um problema de palavras influenciam as resoluções dos alunos. No entanto, é importante realçar o referido por Greer (1992), que “a forma como uma situação é interpretada não é inerente à situação, mas depende da construção do aluno a partir dela” (p. 279). Um problema que foi pensado, por exemplo, como sendo uma situação de produto cartesiano pode ser interpretado e resolvido por um aluno fazendo a sua transposição para grupos iguais. Por exemplo o problema anterior (A Ana tem três camisolas e cinco calças. De quantas maneiras diferentes se pode vestir?) pode ser resolvido fazendo a transposição para uma situação de grupos iguais pensando da seguinte forma: “três camisolas (com as calças A) mais três camisolas (com as calças B) mais três camisolas (com as calças C) mais três camisolas (com as calças D) mais três camisolas (com as calças E)”.

No que diz respeito à categorização de modelos de situações, Mulligan e Mitchelmore (1997) realçam, também, que a classificação das estruturas semânticas depende, muitas vezes, do propósito das investigações, sendo, nesse âmbito, ampliada ou condensada. Referindo-se a esse aspecto, os mesmos autores afirmam que “a estrutura semântica de um problema é determinada por um investigador antes da sua apresentação aos alunos e não indica necessariamente como é que os alunos irão resolver o problema” (p. 310).

Quando se amplia o conjunto numérico, do conjunto dos números inteiros positivos para os racionais positivos, para além dos modelos de situações já descritos são identificados mais seis tipos: de medidas iguais, de razão, de conversão de medidas, de parte/todo, de mudança multiplicativa e de produto de medidas (Greer, 1992; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Estas situações estão diretamente relacionadas com a extensão dos

conjuntos numéricos para o conjunto dos números racionais positivos e com o entendimento dos números como medida.

A categorização sobre os tipos semânticos ou modelos de situações definida por Greer (1992) tem sido a base de diversos trabalhos empíricos sobre tipos de estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e de divisão, sobre os erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas associados aos diferentes tipos de situações e sobre a sua relação com graus de dificuldade de resolução de problemas (Anghileri, 2003).

3.3.2. Modelos intuitivos

Uma outra linha de investigação associada às operações multiplicação e divisão, para além da ligada aos tipos semânticos ou modelos de situações, é a relacionada com modelos intuitivos (Sherin & Fuson, 2005; Verschaffel et al., 2007). Esta linha de investigação está, ainda assim, interligada com a anterior e baseia-se na hipótese, formulada por Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985), de que “cada operação aritmética fundamental está geralmente relacionada com um modelo intuitivo, primitivo, implícito e inconsciente” (p. 4). No caso da operação multiplicação esse modelo é, segundo os autores nomeados, a adição repetida, o que significa que a resolução de um problema que envolve dois números a partir dos quais é preciso calcular o seu produto é mediada por esse modelo.

O termo modelo intuitivo é entendido como “uma estrutura mental interna que corresponde a uma classe de estratégias de cálculo” (Mulligan & Mitchelmore, 1997, p. 309). Estes autores associam cada um dos modelos intuitivos a uma ou mais estratégias de cálculo. No entanto, de Corte e Verschaffel (1996) apontam algumas limitações à hipótese formulada por Fischbein et al. (1985), sobretudo quando o universo numérico é ampliado, e sugerem a realização de estudos que contribuam para uma melhor compreensão sobre os processos cognitivos envolvidos na modelação de situações associadas à multiplicação.

Algumas investigações relacionadas com os modelos intuitivos mostram que os alunos são capazes de resolver problemas de multiplicação ou de divisão mesmo antes de terem trabalhado formalmente estas operações, ou seja inventam estratégias associadas a modelos multiplicativos ou de divisão que lhes permitem chegar à solução (Verschaffel et al., 2007). Os modelos usados são intuitivos e desenvolvidos em contextos informais, mas podem influenciar fortemente a compreensão dos alunos em situações mais complexas associadas às operações em questão, tanto na sua vida escolar como na sua vida adulta.

Integrado na linha de investigação que estuda a influência dos modelos intuitivos na resolução de problemas de palavras, encontra-se o estudo longitudinal levado a cabo por Mulligan e Mitchelmore (1997) que envolveu cerca de 70 alunos dos 2.º e 3.º anos, de oito escolas diferentes. Nesse âmbito foram propostos aos alunos 24 problemas de palavras com um passo, com o propósito de identificar e agrupar as estratégias de cálculo usadas e relacioná-las com modelos intuitivos de multiplicação e divisão. Os problemas de multiplicação e divisão partiam de contextos familiares dos alunos e incluíam cinco das dez categorias diferentes (considerando a extensão para os números racionais) de situações multiplicativas definidas por Greer (1992). O termo situações multiplicativas é usado, no estudo referido, para descrever situações que sugerem quer a multiplicação quer a divisão. Deste modo, os problemas envolviam situações de grupos iguais, de razão, de comparação multiplicativa, de disposição retangular e de produto cartesiano. Os problemas de divisão, relacionados com a situação de multiplicação correspondente, envolviam situações de partição, razão, comparação e partilha.

A identificação dos modelos intuitivos das crianças foi efetuada em duas fases, primeiro foram analisadas as respostas de modo a identificar as estratégias de cálculo usadas e, em segundo lugar, foram agrupadas as estratégias de modo a relacioná-las com os modelos intuitivos subjacentes. Os modelos intuitivos associados à multiplicação emergentes desta recolha de dados foram: contagem direta, adição repetida e operação multiplicativa. O modelo de contagem direta relaciona-se com estratégias de uso de material concreto ou de desenhos para resolver um problema. O modelo de adição repetida está associado a estratégias de contagem unitária, contagem crescente ritmada,

contagem por saltos para a frente, de adição repetida e de adição de dobros. O modelo de operação multiplicativa está relacionado com estratégias que usam a multiplicação enquanto operação, tais como o conhecimento de factos multiplicativos básicos e de factos multiplicativos derivados (Mulligan & Mitchelmore, 1997).

No estudo referido, no que respeita à divisão, os modelos intuitivos que surgiram foram os mesmos que os ligados à multiplicação, tendo sido acrescentada a subtração repetida (Mulligan & Mitchelmore, 1997). As estratégias associadas ao modelo de contagem direta recorreram ao uso de materiais concretos para modelar a situação e o processo de contagem subsequente, efetuando correspondência um a um, partilha, contagem unitária e tentativa e erro. O modelo de subtração repetida emergiu de estratégias tais como: contagem ritmada para trás, contagem por saltos para trás, subtração repetida e adição de metades. Todas estas estratégias partiam do dividendo e geravam sequências de múltiplos. As estratégias relacionadas com o modelo de adição repetida são muito semelhantes às ligadas ao modelo de subtração repetida, distinguindo-se porque o dividendo não é o ponto de partida mas o de chegada. O modelo intuitivo de operação multiplicativa está subjacente a estratégias que recorrem à multiplicação, usando factos conhecidos ou derivados desta operação como, por exemplo, tentar encontrar um múltiplo do divisor que seja igual ou próximo do dividendo.

Ao longo dos dois anos letivos em que decorreu o estudo realizado por Mulligan e Mitchelmore, os modelos intuitivos dos alunos foram evoluindo. Estes progrediram, recorrendo a modelos cada vez mais eficazes e que podiam ser usados em situações multiplicativas com números inteiros. Além disso, segundo os mesmos autores, na resolução de um problema, quando são mobilizados um ou mais modelos, há um conjunto de fatores que tem influência: a experiência e a capacidade do aluno para interpretar o problema, o reconhecimento da estrutura de grupos de igual tamanho e o conhecimento de factos relevantes para a situação em causa. Por isso, os alunos constroem, inicialmente, uma nova estratégia para resolver problemas se a situação lhes é familiar e se conhecem factos relevantes associados. Essa estratégia vai ser usada para outros problemas e o seu conhecimento sobre situações multiplicativas vai aumentando. Gradualmente, a estratégia utilizada vai sendo mais eficaz e refinada, podendo estar

associada, eventualmente, a um outro modelo mais sofisticado. “No entanto, e pelo menos durante o período inicial da aprendizagem, problemas distintos podem ser resolvidos utilizando modelos intuitivos diferentes” (Mulligan & Mitchelmore, 1997, p. 327).

No estudo que realizaram, os investigadores supramencionados chegaram a resultados nem sempre consistentes com o preconizado por Fischbein et al. (1985). Efetivamente, embora a estrutura semântica dos problemas de palavras propostos tenha influenciado, por vezes, a estratégia de resolução dos alunos nem sempre isso aconteceu (Mulligan & Watson, 1998). Em determinados problemas foi mais difícil estabelecer uma relação entre a sua estrutura semântica e as estratégias associadas aos modelos intuitivos usadas pelos alunos e, noutros, essa correspondência não se verificou, contrariando o estabelecido por Fischbein et al. (1985).

A investigação descrita anteriormente identifica alguns aspetos especialmente relevantes e que têm implicações, segundo os seus autores, ao nível da aprendizagem da multiplicação e divisão (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Na maior parte do trabalho proposto, usualmente, nas aulas de 3.º ano, não se têm em conta os modelos intuitivos que os alunos desenvolveram anteriormente, a partir de situações multiplicativas informais. Tradicionalmente, os professores fazem uma abordagem à multiplicação e, só posteriormente, introduzem a divisão, fundamentando a sua opção na dificuldade desta última operação. Contudo, as crianças relacionam, naturalmente, as duas operações através de modelos intuitivos, não necessariamente mais difíceis. Por isso, logo nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem resolver problemas de palavras multiplicativos, em que possam relacionar a multiplicação com a divisão. Como referem Mulligan e Watson (1998), a capacidade para reconhecer a relação inversa entre a multiplicação e a divisão e a comutatividade da multiplicação são aspetos fundamentais para desenvolver a compreensão sobre a multiplicação. Além disso, é, também, importante que o professor proponha aos alunos atividades que desenvolvam a sua compreensão sobre a multiplicação e que contribuam para a progressão das suas estratégias de cálculo, de modo a torná-las mais eficazes (Mulligan & Mitchelmore, 1997; Mulligan & Watson, 1998).

3.3.3. Estratégias de multiplicação e divisão

3.3.3.1. Estratégias de multiplicação e divisão com números-dígito

A terceira linha de investigação relacionada com a resolução de problemas de multiplicação e divisão, identificada por Verschaffel et al. (2007), está associada às estratégias de cálculo, ou seja, à descrição e caracterização de um conjunto de procedimentos utilizados pelos alunos para, partindo de dois números, calcularem o seu produto. Estas são, frequentemente, relacionadas com tipos semânticos ou modelos intuitivos e, por vezes, o termo estratégias de cálculo é substituído por outros tais como procedimentos de solução (*solution procedures*) e estratégias de solução (*solution strategies*) (Sherin & Fuson, 2005).

Os estudos sobre a multiplicação e divisão com números-dígito incidem, geralmente, sobre a evolução do uso de determinadas estratégias pelas crianças, partindo das relacionadas com a contagem de objetos, de materiais ou usando os dedos, até à utilização de outras associadas à formalização da operação respetiva. Ainda assim, as investigações realizadas sobre as estratégias dos alunos para multiplicar ou dividir não são consensuais, nem na sua descrição nem na terminologia usada pelos diferentes investigadores (Sherin & Fuson, 2005). Segundo estes autores, enquanto para a adição e subtração é consensual associar as estratégias usadas pelos alunos às suas conceções gerais sobre os números, no caso da multiplicação não é bem assim.

Um exemplo de um estudo com números-dígito (o maior produto a calcular foi 5×4) foi realizado por Anghileri (1989). Este relaciona as estratégias de resolução usadas pelos alunos com a estrutura dos problemas de multiplicação que lhes foram propostos, descreve as estratégias utilizadas e a sua progressão e relaciona-a com a compreensão crescente dos alunos sobre os números e sobre as conexões entre as operações adição e multiplicação. Apesar de não ser um estudo muito recente é frequentemente referenciado em investigações sobre as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação.

Há autores que referem que, quando se trata da multiplicação com números-dígito trabalhada explicitamente na aula, a evolução e a mudança das estratégias usadas pelos alunos estão associadas à aprendizagem e ao uso de recursos de cálculo com números específicos (Sherin & Fuson, 2005). O facto de os alunos terem um conhecimento profundo sobre alguns números permite-lhes usar novas estratégias ou as que já conhecem em novas situações. Por isso, as estratégias a que os alunos recorrem são muito sensíveis aos números envolvidos, sendo difícil de caracterizar um modelo de progressão da aprendizagem de estratégias de multiplicação, uma vez que estas variam com os diferentes contextos culturais e de aprendizagem.

No sentido de clarificar e ultrapassar as diferenças existentes nas investigações sobre a temática da multiplicação com números-dígito, Sherin e Fuson (2005) elaboram uma síntese sobre os estudos nesta área, identificam as linhas de investigação existentes e propõem uma taxonomia das estratégias usadas pelos alunos. A apresentação desta taxonomia é justificada, pelos seus autores, do seguinte modo: “Muitas vezes, na nossa opinião, há uma relação simples entre uma determinada estratégia de cálculo e o conhecimento que o aluno possui, em termos individuais, mas nem sempre é assim” (p. 350).

Os dados em que se baseia a taxonomia referida estão ancorados em estudos efetuados não só por Sherin e Fuson (2005) mas, também, por outros investigadores. Baseiam-se, sobretudo, numa investigação desenvolvida ao longo de três anos, no contexto do projeto *Children's Math Worlds Project*, que envolveu alunos do 3.º e do 4.º ano de escolaridade entrevistados e observados em aula, e que incluiu duas vertentes, uma curricular e outra de investigação. O termo estratégia de cálculo, na aceção destes autores, é entendido como “padrões na atividade de cálculo, encarados com um certo grau de abstração” (p. 350).

Apesar das situações associadas à multiplicação serem diferentes das relacionadas com a adição e estarem interligadas com os recursos de cálculo dos alunos com números específicos foi adotado um procedimento semelhante ao usado com aquela operação. Assim, foram agrupadas classes de estratégias, que Sherin e Fuson (2005) denominaram por estratégias canónicas, ao tipo de recursos de cálculo associados a números

específicos que sustentam essas mesmas estratégias. As estratégias canônicas identificadas por estes autores são: contar tudo, cálculo aditivo, contar a partir de, baseadas em padrões e produtos aprendidos. Além destas foram, ainda, identificadas estratégias híbridas. Para cada uma das estratégias canônicas são identificados os recursos de cálculo relacionados, numa perspectiva de progressão da aprendizagem. O entendimento aqui de recursos de cálculo, está relacionado com o que as crianças disponibilizam, em cada momento, que lhes permite efetuar um determinado cálculo.

Por a considerar suficientemente relevante no contexto da revisão da literatura que efetuo, apresento uma adaptação da tabela construída por Sherin e Fuson (2005), sobre a progressão da aprendizagem da multiplicação com números-dígito.

Para cada uma das estratégias canônicas, a tabela tem uma leitura coluna a coluna, de cima para baixo, apresentando os respectivos recursos de cálculo, numa perspectiva de evolução da aprendizagem. A partir de um determinado momento, quando as crianças já têm um conhecimento suficientemente rico sobre a estrutura dos números até 81 (maior produto obtido a partir de dois fatores que são números-dígito) torna-se difícil distinguir as estratégias utilizadas no cálculo (Sherin & Fuson, 2005).

Um aspeto fundamental do trabalho apresentado por Sherin e Fuson (2005) é a justificação da sua universalidade em muitos aspetos. Os autores sustentam que a progressão na aprendizagem de estratégias de multiplicação com números-dígito é bastante uniforme e independente da natureza do ensino, das salas de aula e dos contextos culturais, daí a importância do seu conhecimento. Assim, para cada estratégia canônica é feita a identificação do que é considerado quase universal, do que é culturalmente dependente e do que é fortemente dependente do contexto. Ilustrando a distinção desta caracterização, os autores sustentam que as estratégias do tipo contar tudo ou de cálculo aditivo são praticamente universais, apesar de poderem surgir diferenças culturais ou dependentes do contexto de sala de aula, no modo como são utilizados alguns dos procedimentos associados. Contudo, estratégias relacionadas com produtos aprendidos são bastante dependentes da aprendizagem e da prática efetuada na sala de aula, para além de poderem estar associadas, também, a tradições culturais.

Na sequência da discussão associada à apresentação da taxonomia das estratégias usadas pelos alunos na multiplicação com números-dígito, os autores fazem, ainda, algumas observações com suporte empírico, baseando-se, tanto em estudos anteriores levados a cabo por outros investigadores, como na sua própria experiência:

- *Dependência do uso da estratégia dos valores operados.* Os autores apresentam evidência que a estratégia usada depende dos números-dígito envolvidos;
- *Variabilidade no uso da estratégia persiste tanto durante o ensino como na vida adulta.* O uso de estratégias diferentes de acordo com os números envolvidos mantém-se, tanto depois de os alunos serem ensinados como durante a sua vida adulta, fazendo-as depender dos números operados;
- *Diversidade de variantes de estratégias.* A diversidade de estratégias parece estar associada tanto aos números envolvidos como à especificidade das tarefas a resolver;
- *Sensibilidade ao ensino.* Alguns dados mostram que parecem existir diferenças nas estratégias utilizadas, relacionadas com o ensino;
- *Mistura de recursos de cálculo.* Alguns exemplos das estratégias dos alunos são ambíguos, sobretudo quando a estratégia usada depende de um grande número de recursos numéricos interligados (Sherin & Fuson, 2005).

As considerações elencadas por Sherin e Fuson (2005) são importantes, nomeadamente, quando pensamos nas suas implicações ao nível do ensino. No entanto, os próprios autores chamam a atenção para o cuidado que é necessário ter, na apropriação de alguns dos aspetos que estabelecem relações entre o uso de determinadas estratégias e o desenvolvimento de estruturas conceptuais associadas à multiplicação com números-dígito. Em particular, se é consensual que os alunos precisam de desenvolver estratégias de cálculo associadas a números específicos, é também consensual que essas estratégias não podem ser um conjunto de factos isolados, mas devem ser trabalhadas de modo integrado na sala de aula.

Tabela 3.1 – Mapa aproximado da progressão na aprendizagem (Sherin & Fuson, 2005, p. 381)

Estratégias	Canônicas					Híbridas
Inicialmente	Contar tudo	Cálculo aditivo	Contar a partir de	Baseadas em padrões	Produtos aprendidos	Uso de tríades de multiplicação, contagem por sequências, contar tudo e cálculos aditivos
	Estruturas conceptuais de adição. Resolução de tarefas de multiplicação usando o contar tudo Normalizadas técnicas de desenho e do uso dos dedos das mãos. O seu uso pode ser continuado em problemas de palavras, para além dos problemas numéricos	Representam e usam recursos aditivos: $4 \times g = g + g + g + g$ Algumas técnicas devem ser desenvolvidas e usadas repetidamente. Uso como estratégia diferenciável e fraca, para números pequenos. Uso como estratégia diferenciável e fraca.	Usam algumas sequências conhecidas (2, 5 e 10) como meio de contagem rápida. Desenvolvimento do conhecimento de contar por sequências. Uso como estratégia diferenciável e fraca.	Padrões conhecidos ou induzidos cedo envolvendo o 0, 1, 5 e 10. Desenvolvimento do conhecimento de padrões, com 9s, em particular.	Algumas tríades de multiplicação envolvendo números pequenos. Aprendizagem gradual de tríades de multiplicação usando os dobros (com números pequenos, aprendidos inicialmente). 6's, 7's e 8's aprendidos mais tarde	
Mais tarde	Recursos de cálculo emergem do conhecimento rico sobre as estruturas multiplicativas dos inteiros $\leq 81^{11}$. Torna-se difícil diferenciar as estratégias, em particular para multiplicandos pequenos.					

¹¹ O número 81 corresponde ao maior produto com números-dígito ($9 \times 9 = 81$).

A operação divisão é pouco referida nos documentos que abordam a aritmética com números-dígito, considerando, naturalmente, a grandeza dos números envolvidos e as especificidades da operação. Quando é mencionada em alguns dos estudos, são dados exemplos em que o dividendo é um número multidígito e o divisor é um número-dígito e é sempre associada à operação multiplicação (Fuson, 2003a; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Sherin & Fuson, 2005). Neste âmbito, é sugerida a sua abordagem a partir de produtos relacionados, mas os autores supramencionados consideram que a investigação realizada não é suficientemente clara sobre a possibilidade da divisão ser introduzida mais cedo do que o habitual e ao mesmo tempo que a multiplicação. Ainda assim, começam a surgir alguns dados nesse sentido, associados ao projeto *Children's Math Worlds Project* (Sherin & Fuson, 2005). No contexto da divisão é feita, também, referência à necessidade de compreender o modo como os diversos símbolos associados a esta operação podem ser ensinados e usados adequadamente pelas crianças (Fuson, 2003a).

No caso da multiplicação com números-dígito, surge uma outra linha de investigação relacionada com modelos ou estratégias de recuperação (*retrieval*), que se foca na natureza e no desenvolvimento deste tipo de estratégias ligadas a esta operação (Sherin & Fuson, 2005). Esta linha de investigação está associada a teorias cognitivas de processamento da informação, analisando a aprendizagem como um processo através do qual a informação é recebida, organizada, retida e usada/recuperada pelo cérebro. Uma vez que o objetivo da aprendizagem da multiplicação é o desenvolvimento da capacidade para calcular um produto – rapidamente e de modo eficaz – alguns investigadores relacionam-na com a construção e desenvolvimento de modelos cognitivos relacionados com esta operação. Apesar deste tipo de investigação estar, também, associado a estratégias de cálculo, nos estudos realizados estas são identificadas e categorizadas distinguindo-se, apenas, entre estratégias de recuperação e de não recuperação (Sherin & Fuson, 2005).

Um outro estudo sobre a multiplicação com números-dígito é o levado a cabo por Baroody (1999). Nele participaram 36 alunos do terceiro ano com um domínio muito fraco sobre os diferentes produtos cujos fatores são números entre três e nove. Segundo o

autor, os resultados verificados foram inconsistentes com os de outras investigações, em particular com os obtidos por Siegler (1988), onde é proposta a prática do cálculo associado a itens específicos no sentido de promover a mudança dos padrões de erro das crianças. No estudo de Baroody (1999) os resultados associados à multiplicação com números-dígito sugerem que as crianças inventam, progressivamente, estratégias de estimação cada vez mais adequadas e flexíveis e usam o conhecimento de relações, tais como o princípio da comutatividade, aumentando a sua compreensão sobre aquela operação.

Verschaffel et al. (2007) realçam que, no que diz respeito à proficiência com números-dígito, o trabalho a fazer deve envolver mais do que a memorização de factos associados às operações. A investigação sugere um conjunto diversificado de questões a ter em conta, relacionadas com a aritmética: o modo como as crianças desenvolvem a compreensão sobre as operações, como vão evoluindo na utilização de métodos cada vez mais eficazes e como selecionam as estratégias a utilizar consoante (ou não) os números envolvidos. É referida, também, a necessidade de aumentar o rigor metodológico dos estudos a realizar e são apontados alguns temas para investigações futuras, tais como: o aprofundamento do modo como se relaciona o desenvolvimento dos conceitos com as estratégias associadas, a realização de mais estudos sobre a subtração e a divisão e de investigações que incidam sobre a interligação entre o desenvolvimento dos conceitos associados aos números e às operações e o contexto cultural e pedagógico em que as crianças se inserem, em particular, a relação entre as suas experiências na escola e no seu meio familiar.

Associada à aritmética com números-dígito é referida, por vezes, a realização de testes cronometrados em alguns países. Contudo, existe uma certa controvérsia sobre esta questão e não há dados empíricos que sustentem o benefício deste tipo de prática. Se, por um lado, há alunos que os encaram como um desafio individual, outros há que manifestam grande ansiedade na sua realização, sobretudo se aqueles forem efetuados antes de os alunos desenvolverem o conhecimento conceptual que lhes permite responder às questões colocadas (Fuson, 2003a).

3.3.3.2. Estratégias de multiplicação e divisão com números multidígitos

No que respeita às investigações sobre estratégias de cálculo associadas às operações multiplicação e divisão com números multidígitos existem estudos muito diversificados. Contudo, a maior parte descreve as estratégias informais (ou inventadas) usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e/ou divisão (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Anghileri, 2002; Baek, 1998, 2006; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999). Há, também, estudos que caracterizam as estratégias usadas pelos alunos e apresentam categorizações mais abrangentes, válidas para as quatro operações (Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007).

Existem, ainda, algumas investigações onde são efetuadas comparações entre a evolução das estratégias usadas pelos alunos de países diferentes, nomeadamente, no Reino Unido e na Holanda (Anghileri, 2003; Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002).

Descrevo e discuto, em seguida, algumas caracterizações das estratégias de resolução de problemas associadas à multiplicação e divisão com números multidígitos, tendo por referência os estudos desenvolvidos pelos investigadores supramencionados. Ainda assim, na opinião de Baek (1998), as investigações relacionadas com a multiplicação ou com a divisão não caracterizam, de modo aprofundado, as estratégias inventadas e utilizadas pelas crianças quando resolvem problemas associados a estas operações, mesmo quando se referem a números multidígitos.

As categorizações que apresento e discuto, de modo a facilitar a sua leitura, estão organizadas por estratégias de multiplicação, estratégias de divisão, estratégias de multiplicação e divisão e estratégias comuns às quatro operações aritméticas. Quando, nesta subsecção, me refiro às estratégias usadas pelos alunos estou a reportar-me às estratégias informais que aqueles inventam e usam no contexto da resolução de problemas que lhes são propostos. A discussão sobre o ensino ou não de estratégias que os alunos podem usar na resolução de problemas associados às várias operações aritméticas e, em particular à multiplicação (e divisão) será efetuada numa outra secção posterior a esta.

Estratégias de multiplicação. No sentido de aprofundar as caracterizações de estratégias já existentes, Baek (1998) realizou um estudo, a partir do qual descreve as estratégias inventadas por alunos de seis turmas, do 3.º ao 5.º ano, quando encorajados pelos professores a criar algoritmos para resolver problemas de multiplicação. Estes foram propostos por escrito e resolvidos pelos alunos, individualmente e por escrito. As estratégias usadas foram partilhadas, identificando semelhanças e diferenças e, posteriormente, classificadas de acordo com os esquemas utilizados pelos alunos. É de notar que, nas turmas observadas a propósito deste estudo, os professores não tinham ensinado previamente os algoritmos formais e as regras a eles associadas.

No estudo de Baek (1998) o termo algoritmo inventado é usado na aceção de estratégia inventada¹². “Estes [os algoritmos] foram classificados de acordo com os esquemas principais que as crianças usaram para resolver problemas” (p. 152). Deste modo, foram identificadas pela autora quatro categorias de algoritmos inventados: (i) modelação direta, (ii) estratégias de número completo, (iii) estratégias de partição de números e (iv) estratégias de compensação.

Na primeira categoria incluem-se as estratégias de modelação direta, que são utilizadas pelas crianças quando modelam grupos através do uso de material manipulável ou de desenhos. A partir de diversas experiências de modelação utilizando materiais concretos, tais como pequenos cubos, material multibásico ou desenhos, as crianças podem, também, usar ‘uns’ e grupos de ‘dez’, caminhando progressivamente para a invenção de algoritmos mais abstratos. Esta progressão está relacionada com o desenvolvimento da sua compreensão sobre a multiplicação (Baek, 1998).

Na segunda categoria incluem-se as estratégias de número completo, que são baseadas na adição do multiplicando, usando procedimentos mais ou menos eficientes. Assim, tanto se pode adicionar repetidamente o multiplicando, como se pode recorrer à adição de dobros. Esta última estratégia é inventada pelas crianças de modo a tornar o processo de adições repetidas menos moroso (Baek, 1998).

¹² No texto original Baek (1998) usa o termo algoritmo inventado na aceção de estratégia inventada mas, considerando a tradição portuguesa e a conotação atribuída à palavra algoritmo, opto por usar neste texto o termo estratégia.

Na terceira categoria incluem-se as estratégias de partição de números, que são utilizadas pelos alunos de modo a multiplicar mais facilmente. Esta partição pode ser realizada apenas no multiplicador, só no multiplicando, ou em ambos, de duas maneiras diferentes: usando números não múltiplos ou múltiplos de 10. Para ilustrar o primeiro caso, a investigadora dá o exemplo de uma criança que, para calcular quantas maçãs há em 15 caixas de 177 maçãs cada, usa o facto de saber que $15=5\times 3$, calculando primeiro 3×177 e depois $5\times 3\times 177$. Para cada um dos cálculos parciais, a aluna recorre a uma estratégia de número completo associada ao uso dos dobros (Baek, 1998).

Associada ao uso de estratégias de partição é referida por Baek (1998) a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ilustrada com o cálculo 16×5 . Para o efetuar, um aluno parte do produto $12\times 5=60$ (facto conhecido por ele) e vai calculando 13×5 , 14×5 , 15×5 até 16×5 . Ao calcular deste modo tem subjacente o uso da partição do número 16 em doze mais quatro "uns" ($16=12+1+1+1+1$).

A utilização da partição de um número em múltiplos de 10 no multiplicador, ou no multiplicando, ou em ambos, proporciona às crianças um conhecimento profundo sobre o sistema de numeração decimal, o que lhes permite, de forma expedita, resolver diversos problemas de multiplicação. No caso de a partição ser efetuada em ambos os fatores, a estratégia aproxima-se bastante do algoritmo tradicional, embora alguns alunos a usem de formas diferentes, mais ou menos sofisticadas. Num estudo mais recente Baek (2006) exemplifica a utilização de algumas destas estratégias de partição baseadas na decomposição decimal, ou não, de um ou dos dois fatores.

Finalmente, na quarta categoria incluem-se as estratégias de compensação. Nestas os números são ajustados de acordo com as suas características. Tal como em estratégias descritas anteriormente, este ajuste pode ser efetuado apenas no multiplicador, no multiplicando ou em ambos os números. É referido, para ilustrar, o problema – Se tiver cinco sacos com 250 berlindes cada, quantos berlindes tenho no total? – e o exemplo de uma estratégia inventada por um aluno para o resolver: “Visto que vou multiplicar por cinco posso dividir 250 ao meio e multiplicar por 10. Metade de 250 são 125 e 125 vezes 10 são 1250. É 1250” (Baek, 1998, p. 158).

Com base no estudo que realizou, Baek refere que a análise das estratégias inventadas e utilizadas pelos alunos sugere algumas pistas sobre o que estes pensam acerca da composição aditiva e multiplicativa dos números. Além disso, a oportunidade de resolverem problemas inventando as suas estratégias parece promover, também, o desenvolvimento do sentido de número dos alunos (Baek, 1998).

A mesma autora realiza, posteriormente, um outro estudo (Baek, 2006) com 58 alunos, de três turmas do 4.º e 5.º ano, a partir do qual descreve as estratégias construídas e inventadas pelas crianças quando resolvem problemas de multiplicação, baseando-se na categorização anterior (Baek, 1998). Os problemas selecionados foram todos do tipo “situações de grupos iguais”, incluído na classificação de Greer (1992) de modelos de situações de multiplicação e divisão. Esta opção é justificada por duas razões: porque era o tipo de problemas já usado pelos professores e porque correspondiam a situações da vida de todos os dias dos alunos. Nestes problemas, por constituírem situações assimétricas, os números envolvidos desempenham papéis diferentes, correspondendo uns ao multiplicador e outros ao multiplicando, o que torna a sua resolução mais complexa ao nível dos conceitos e procedimentos abrangidos. Neste estudo mais recente, Baek reformula um pouco a categorização realizada em 1998 e reorganiza as estratégias inventadas pelos alunos, identificando as seguintes categorias: modelação direta, adição repetida, uso de dobros, estratégias de partição de números e estratégias de compensação (Baek, 2006). Comparando com a anterior categorização, substitui a categoria “estratégias de número completo” pelas categorias mais específicas de “adição repetida” e “uso de dobros”. Neste estudo, a autora considera as estratégias de modelação direta e de adição repetida como “estratégias concretas” e todas as outras que identifica como “estratégias abstratas”, que os alunos inventam a partir do seu conhecimento informal sobre as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração.

À semelhança dos resultados do estudo anterior, as estratégias associadas ao uso de dobros, tanto de modo simples como complexo, são pouco utilizadas pelos alunos, que recorrem mais frequentemente a estratégias de partição, associadas a um ou dois dos fatores. Alguns dos alunos usam estratégias de compensação quando um dos números do

problema está próximo de uma dezena completa, revelando uma compreensão profunda e flexível sobre os números e a operação em causa (Baek, 2006).

No decurso desta investigação, Baek (2006) relaciona as estratégias inventadas e utilizadas pelos alunos com a sua compreensão, ainda que informal, sobre as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração. Segundo a investigadora,

[...] as crianças desenvolvem a compreensão informal sobre as propriedades associativa e distributiva e são capazes de construir estratégias ricas matematicamente. As crianças são capazes de construir estratégias flexíveis e eficientes em termos de cálculo, baseadas nas características dos fatores dos problemas”. (Baek, 2006, p. 246)

A investigadora realça, também, que as estratégias que os alunos utilizam revelam ao professor as suas limitações sobre os números e sobre o cálculo associado à multiplicação.

Na sequência do estudo realizado por Baek (1998), os investigadores Ambrose et al. (2003) efetuam uma outra investigação, com alunos dos oito aos onze anos, a partir do qual apresentam uma caracterização de estratégias¹³ inventadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação do tipo grupos iguais (Greer, 1992). Esta caracterização, muito semelhante às supramencionadas (Baek, 1998, 2006), inclui as seguintes categorias de estratégias: modelação direta, uso de adições e de dobros e algoritmos inventados usando o número dez. Cada uma destas categorias abrange tipos de estratégias mais específicos, por exemplo, a categoria de estratégias de adição e do uso de dobros inclui: adição de dobros, uso complexo de dobros e estratégias de construção a partir de outros fatores. Por sua vez, a categoria de algoritmos inventados usando o número dez contém: partição do multiplicador em dezenas e unidades e partição de ambos, do multiplicador e do multiplicando em dezenas e unidades.

¹³ No texto original Ambrose, Baek & Carpenter (2003) usam o termo algoritmo inventado na aceção de estratégia abstrata inventada, ou seja, que não envolva a manipulação de materiais concretos. Pelas razões já apontadas anteriormente, opto por usar neste texto o termo estratégia.

De modo a evitar repetições caracterizo, em seguida, apenas as estratégias identificadas por Ambrose et al. (2003) diferentes das definidas por Baek (1998, 2006), anteriormente descritas. Uma estratégia multiplicativa de uso complexo de dobros corresponde a compor o multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. Os autores dão o exemplo do cálculo do produto 47×34 , em que um aluno determina, sucessivamente, 1×34 , 2×34 , 4×34 até 48×34 , subtraindo depois 1×34 para obter o resultado pretendido. Uma estratégia de construção a partir de outros fatores corresponde a (de)compor o multiplicador de modo a obter produtos mais fáceis de calcular. O exemplo que ilustra esta estratégia corresponde ao cálculo de 24×32 , em que um aluno decompõe 24 em $20 + 1 + 1 + 2$ e, a seguir, decompõe 20 em 4×5 , efetuando depois os produtos parciais correspondentes. Subjacentes ao uso desta estratégia estão as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, ainda que implicitamente (Ambrose et al., 2003).

No estudo referido, foram identificados aspetos importantes que relacionam as estratégias usadas pelos alunos com alguns aspetos-chave associados à multiplicação tais como o uso, ainda que informal, das suas propriedades. Uma vez que só foram propostos aos alunos problemas do tipo grupos iguais e muitos dos alunos ainda estavam bastante ligados aos contextos apresentados, não usaram com facilidade a propriedade comutativa. De facto, no caso específico destes problemas o multiplicador e o multiplicando desempenham papéis diferentes no produto a efetuar e, mesmo quando os números envolvidos o sugeriam, muitos dos alunos não trocaram a ordem dos fatores. Como referem os autores “os alunos não viram a relação entre grupos de dez e 10 grupos” (Ambrose et al., 2003, p. 319) não utilizando a propriedade comutativa na resolução de problemas com um contexto de história que envolve grupos iguais. Contudo, eram capazes de o fazer quando calculavam no papel, manipulando apenas os símbolos. Os autores mencionam, ainda, contextos específicos a partir dos quais os alunos podem desenvolver a sua compreensão sobre a propriedade comutativa, tais como os que incluem a disposição retangular, modelos de área ou produto cartesiano, que lhes devem ser apresentados ao mesmo tempo que os contextos em que os fatores desempenham

papéis diferentes. Relativamente às propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, os alunos incluem o seu uso implícito nas estratégias de resolução que inventam (Ambrose et al., 2003).

Estratégias de divisão. No estudo anteriormente referido os mesmos autores caracterizam, também, as estratégias (recorrendo à palavra algoritmo inventado) usadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão de partilha e de medida (Ambrose et al., 2003). Tal como acontece na multiplicação, em que o facto de o multiplicando e o multiplicador desempenharem papéis diferentes tem implicações nas estratégias inventadas pelos alunos, também o facto de um problema ser de divisão por medida ou por partilha, condiciona, inicialmente, essas estratégias. De um modo geral, os autores identificam as seguintes categorias de estratégias inventadas: trabalhar com um grupo de cada vez, não decompor o dividendo, decompor o dividendo e estratégias de construção (*building up*).

A primeira das categorias de estratégias, trabalhar com um grupo de cada vez, refere-se à utilização de subtrações sucessivas do número mais pequeno (divisor) a partir do número maior, à adição sucessiva do número mais pequeno até perfazer o número maior (ou ficar próximo) e à estratégia distributiva. No início, as duas primeiras estratégias são usadas, sobretudo, em problemas que envolvem a divisão por medida (por vezes referida como quotativa) uma vez que, na divisão por partilha não se conhece, à partida, o número que se vai adicionar ou subtrair repetidamente. A terceira, estratégia distributiva, é usada pelos alunos em problemas de divisão por partilha e consiste em articular o seu conhecimento sobre os números (por exemplo, sobre múltiplos de dez, de cinco e de dois) com representações visuais. O exemplo que a ilustra refere-se ao cálculo $228:12$ (partilhar 228 *M&M* por 12 crianças), em que uma aluna, através de uma representação esquemática, distribui dez *M&M* por cada criança, depois cinco e, em seguida dois, duas vezes, até os esgotar (Ambrose et al., 2003).

A segunda categoria, segundo os autores, inclui estratégias mais abstratas e avançadas relativamente às anteriores. Estas não envolvem a decomposição do dividendo e correspondem à subtração, de modo eficaz, recorrendo à estrutura decimal e ao uso de múltiplos de dez. Por exemplo, para embalar 896 maçãs em embalagens de 35 cada, um

problema de divisão por medida, um aluno começa por pensar em múltiplos de dez do divisor. Então subtrai duas vezes 350 (10×35) do dividendo, depois duas vezes 70 (2×35) e, finalmente, 35. Deste modo, o quociente é obtido adicionando $10+10+2+2+1$. Este tipo de estratégias é utilizado pelos alunos tanto em problemas de divisão por medida como por partilha e, apesar de serem estratégias mais abstratas e eficazes do que as anteriores, têm flexibilidade limitada (Ambrose et al., 2003).

A terceira categoria está relacionada com o uso de estratégias que recorrem à decomposição do dividendo, por exemplo, em centenas, dezenas e unidades e, em seguida, a divisões parciais. Ilustrando o seu uso quando se pretende dividir 896 por 35, divide-se, por partes, 800, 90 e 6 por 35, adicionam-se os restos obtidos e torna-se a dividir, até ser possível fazê-lo. Este tipo de estratégias é utilizado pelos alunos tanto em problemas de divisão por medida como por partilha. Apesar de não ser particularmente eficiente, a utilização deste tipo de estratégia evidencia compreensão, por parte dos alunos, sobre a divisão e as suas propriedades (Ambrose et al., 2003).

A última categoria diz respeito a estratégias de construção, que são usadas, também, em problemas de divisão por medida e por partilha. Um dos exemplos ilustrativos é o da divisão $544 \div 17$, que foi resolvida por um aluno partindo de 170 (10×17), adicionando sucessivamente 170 até ser exequível, de modo a perfazer um número o mais próximo possível de 544 (o número 510). Depois adicionou 34 (2×17) para chegar ao total de 544. Deste modo, o quociente 32 foi obtido adicionando $10+10+10+2$ (Ambrose et al., 2003). Este tipo de estratégias está bastante ligado com as que os alunos inventam para resolver problemas de multiplicação análogos, em que um dos fatores é desconhecido.

As estratégias de construção parecem pouco eficientes, à partida, pois uma das dificuldades dos alunos é pensar em produtos que se aproximem rapidamente do número que corresponde ao dividendo. Ainda assim, os seus inventores são capazes de as justificar e de as tornar mais rápidas e eficazes em problemas seguintes, melhorando cada vez mais e reduzindo o número de produtos necessários para alcançarem o dividendo. Além disso, o facto de esta estratégia estar associada à adição permite a alguns alunos recorrerem a estratégias de uso de dobros, o que se torna mais complexo se os alunos

usarem estratégias de subtração para resolver problemas de divisão. Por vezes, ao inventar e utilizar estratégias de construção na resolução de problemas de divisão os alunos ultrapassam o valor do dividendo (ao qual querem “chegar”) e a seguir compensam usando a subtração (Ambrose et al., 2003).

De acordo com os autores supramencionados, tal como no caso da multiplicação, o contexto dos problemas de palavras propostos teve uma grande influência nas decisões dos alunos sobre as estratégias que inventaram. Além disso, as estratégias utilizadas variaram, também, de acordo com o seu conhecimento sobre factos numéricos, valor de posição e as propriedades das quatro operações aritméticas. Ambrose et al. (2003) referem também que enquanto na multiplicação, as estratégias utilizadas pelos alunos foram sensíveis aos papéis diferentes desempenhados pelo multiplicador e pelo multiplicando, na divisão, estas foram influenciadas pelo facto de os problemas a resolver serem de divisão no sentido de medida ou de partilha.

Uma das conclusões do estudo desenvolvido por Ambrose et al. (2003) tem algumas implicações curriculares. Os autores referem que os alunos não consideraram os problemas de divisão muito diferentes dos de multiplicação e, que “muitos dos algoritmos de divisão inventados para as situações de divisão eram essencialmente imagens em espelho dos algoritmos de multiplicação inventados correspondentes” (p. 329). A estratégia de não alterar o multiplicando, na multiplicação, foi adaptada para situações de divisão, havendo um maior paralelismo entre os algoritmos inventados pelos alunos para ambas as operações do que no caso dos algoritmos tradicionais. Este aspeto coloca a discussão, em termos curriculares, de serem trabalhadas as duas operações ao mesmo tempo e não deixar, como acontece frequentemente, o trabalho em torno da divisão para mais tarde.

A propósito de uma investigação que comparava as estratégias usadas pelos alunos ingleses e holandeses, Anghileri (2001) identifica e caracteriza, detalhadamente, as estratégias usadas pelos alunos ingleses do 5.º ano, de dez escolas diferentes na resolução de problemas de divisão com contextos de partilha e de medida ou em cálculos de divisão como $96 \div 6$. A investigadora identifica, inicialmente, quinze categorias diferentes de estratégias de divisão, tais como estratégias de modelação, estratégias

informais e inventadas pelos alunos e algoritmo tradicional, que foram depois agrupadas em oito categorias. Ao analisar estas categorias, sobretudo as que incluem as estratégias denominadas por informais, identificam-se bastantes semelhanças com as organizadas por Ambrose et al. (2003). Há estratégias, por exemplo, que se incluem nas categorias de decomposição e, outras, que correspondem à categoria de estratégias de construção.

O estudo realizado por Anghileri (2001) aponta para a necessidade de os professores proporem tarefas aos alunos que promovam o desenvolvimento de estratégias intuitivas inventadas pelos alunos e que, ao mesmo tempo, os auxiliem a progredir em termos da sua compreensão sobre a divisão. Além disso, a autora realça que, uma vez que os alunos devem ser encorajados a inventar as suas estratégias, é importante a discussão sobre a sua eficácia, à medida que os números usados vão sendo cada vez maiores, no sentido daqueles irem evoluindo nas estratégias que usam.

Uma vez que foram propostos diferentes tipos de problemas e de cálculos de divisão há alguns resultados do estudo que apontam para a influência da estrutura do problema, do tipo e grandeza dos números e do facto de ter ou não contexto nas estratégias informais usadas pelos alunos e no seu sucesso (Anghileri; 2001).

Estratégias de multiplicação e de divisão. Focando-se especificamente em estratégias de cálculo mental utilizadas na resolução de problemas de palavras que envolviam a multiplicação e a divisão com números com um, dois e três dígitos, Heirdsfield et al. (1999) desenvolveram um estudo longitudinal com 95 alunos do 4.º ao 6.º ano. Realizaram a recolha de dados através de entrevistas clínicas aos alunos, aos quais propuseram problemas com contextos familiares. A análise das estratégias usadas pelos alunos, tanto nos problemas de multiplicação como nos de divisão, permitiu a sua organização em cinco categorias diferentes: estratégias de contagem, uso de factos básicos, decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da direita para a esquerda, decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da esquerda para a direita e estratégias holísticas.

Os resultados deste estudo, que durou três anos e ao longo dos quais foram introduzidos os algoritmos escritos, apontam para uma mudança na seleção das

estratégias usadas pelos alunos. Contudo, esta mudança não foi a esperada, no que se refere à evolução dos alunos para o uso de estratégias mais sofisticadas, como as holísticas. O estudo evidencia que muitos dos alunos do 6.º ano foram capazes de usar estratégias holísticas na resolução de problemas de multiplicação e de divisão com números “grandes” mas, muitos outros, permaneceram no uso de estratégias de contagem. Ainda assim, apesar de haver uma progressão no uso de estratégias holísticas quando estas se revelavam apropriadas, nem sempre foram utilizadas como tinha sido previsto, aquando da escolha de determinados números a incluir nos problemas. Além disso, quando se comparou a frequência do uso de estratégias holísticas, baseadas em cálculos não padronizados, com a frequência do uso de procedimentos algorítmicos, verificou-se que aquelas foram muito menos utilizadas (Heirdsfield et al., 1999).

Verschaffel, Greer e Torbeyns (2006), ao fazerem uma síntese geral da investigação associada à análise cognitiva das estratégias de cálculo usadas pelos alunos, sem haver intervenção ao nível do seu ensino na sala de aula, organizam as estratégias de multiplicação e divisão em quatro tipos: modelação direta, número completo, partição de números e estratégias de compensação. Comparando com as categorias identificadas por Heirdsfield et al. (1999) as estratégias de modelação direta correspondem às de contagem, as estratégias de decomposição correspondem às que envolvem, também, a decomposição e o valor de posição e, tanto as estratégias de número completo como as de compensação incluem-se na categoria das estratégias holísticas.

Considerando as necessidades e exigências do mundo atual, os investigadores mencionados anteriormente, concluem que é preciso investir na sala de aula, ao nível da multiplicação e da divisão, em propostas que promovam no cálculo por estimação e o uso de estratégias de resolução diferentes das tradicionais, tais como estratégias holísticas, de decomposição não apenas decimal e de tentativa e erro. Para que isso seja possível, deve haver uma menor ênfase no trabalho com os algoritmos e um maior realce no trabalho associado às propriedades das operações e ao uso de estratégias de cálculo alternativas (aos algoritmos) e flexíveis (Heirdsfield et al., 1999).

Estratégias de cálculo para as quatro operações aritméticas. Tendo subjacente a importância do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, Hartnett (2007)

apresenta e analisa uma categorização única para as quatro operações aritméticas, de modo a suportar o seu ensino e encorajar a sua discussão na sala de aula. Segundo a autora, o propósito desta categorização não é, apenas, descrever as diferentes estratégias que podem ser usadas pelos alunos mas, também, fornecer um quadro teórico em que os professores se podem apoiar para desenvolver a sua prática na sala de aula e facilitar o uso de uma linguagem comum entre professores e alunos.

Esta investigação, um pouco diferente nas suas linhas orientadoras das discutidas anteriormente, assume que os alunos devem conhecer e dar um nome às diferentes estratégias de cálculo mental. A investigadora justifica esta opção explicitando que, deste modo o professor pode aceder, mais facilmente, ao pensamento do aluno, uma vez que este último tem acesso à denominação das várias estratégias e pode identificá-las, de acordo com o seu raciocínio (Hartnett, 2008). A discussão associada ao ensino, ou não, das estratégias de cálculo mental e da explicitação da sua identificação com os alunos será discutida numa outra secção. Contudo, por considerá-la bastante relevante e muito abrangente, apresento, nesta secção, a categorização proposta por Hartnett (2007).

A autora referida propõe cinco categorias principais de estratégias de cálculo mental, comuns às quatro operações aritméticas e que, por sua vez, se subdividem em vinte e uma subcategorias. Estas estratégias podem ser usadas ao longo de todo o ensino primário, de acordo com os diferentes tipos de números que vão sendo introduzidos: números naturais, números racionais na representação decimal e números racionais na forma de fração (Hartnett, 2007). As cinco categorias principais de estratégias de cálculo mental são as seguintes: contar para a frente e para trás, ajustar e compensar, usar dobros e/ou metades, usar partições de números e usar o valor de posição. Para cada uma destas categorias a autora apresenta as subcategorias respetivas, de acordo com as diferentes operações aritméticas e relaciona-as, sempre que possível, com categorias de estratégias de cálculo apresentadas por outros autores.

No caso da multiplicação, por exemplo, a categoria contar para a frente e para trás inclui a estratégia contar para a frente para multiplicar. A categoria usar o valor de posição inclui, também no caso da multiplicação, as estratégias: pensar em múltiplos de dez e focar-se em posições relevantes. Estes exemplos ilustram que as estratégias

apresentadas por Hartnett (2007) são, de um modo geral, semelhantes às caracterizadas por outros autores, embora, por vezes, com outras denominações. Ainda assim, considero esta categorização de estratégias de cálculo bastante relevante e abrangente, por ter a preocupação de ser comum às quatro operações aritméticas e, ao mesmo tempo, muito detalhada, uma vez que as cinco categorias se subdividem em vinte e uma subcategorias de estratégias, bastante pormenorizadas, o que não acontece com mais nenhuma das que conheço.

Uma outra categorização das estratégias utilizadas pelos alunos, que abrange as quatro operações aritméticas, surge a propósito de uma reanálise dos dados relativos às estratégias de cálculo mental usadas por alunos de onze anos de Inglaterra, País de Gales e Irlanda. Foxman e Beishuizen (2002) organizam as estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos em duas grandes categorias gerais: estratégias de número completo e estratégias de decomposição. Segundo os próprios autores, inicialmente, estas categorias surgem associadas às operações adição e subtração mas são extensíveis às operações multiplicação e divisão. Além disso, incluem a maior parte das estratégias utilizadas pelos alunos quando efetuam cálculos com números em contexto e sem contexto. Os mesmos investigadores identificam, ainda, uma outra categoria geral, associada à substituição de um número por outro, simplificando um determinado cálculo e compensando depois, que denominam por arredondar, multiplicar e compensar. Este tipo de estratégia foi utilizado nos cálculos multiplicativos, tanto em articulação com estratégias de número completo como ligado a estratégias de partição. Para além das estratégias de cálculo mental pertencentes às categorias já referenciadas, ao analisarem as respostas dos alunos às questões colocadas, Foxman e Beishuizen (2002) reconhecem, ainda, que há alunos que usam mentalmente os algoritmos padronizados, que não constituem estratégias de cálculo mental.

3.3.4. Análise comparativa das estratégias de multiplicação e divisão com números multidígitos

Na última subsecção descrevi e discuti algumas das categorizações de estratégias usadas pelos alunos, resultantes de diferentes investigações realizadas ao longo das duas últimas décadas. Apresento e analiso, seguidamente, sob a forma de tabela, um resumo comparativo dessas várias categorizações, referindo separadamente as relativas à resolução de problemas de multiplicação e de problemas de divisão, por serem um dos focos da investigação que realizei.

A tabela 3.2 resume as categorizações de estratégias usadas pelos alunos que discuti nas secções anteriores, centrando-me na operação multiplicação. A análise comparativa das diferentes categorizações permite identificar dois grandes grupos de estratégias de cálculo de multiplicação, se excluirmos as estratégias de modelação direta, muito associadas ao início do trabalho com a multiplicação e relacionadas com o uso de materiais concretos ou de registos escritos associados à contagem. Estas duas grandes categorias são as estratégias de número completo e as estratégias de decomposição. No primeiro tipo de estratégias incluem-se aquelas em que se efetuam cálculos considerando os números como um todo, tirando partido das suas características e das relações numéricas que podem ser estabelecidas. No segundo tipo de estratégias incluem-se aquelas em se realizam decomposições, decimais ou não, de um ou dos dois fatores envolvidos. Além destas duas grandes categorias há, ainda, a referir as estratégias de compensação que, para alguns autores (Baek, 1998, 2006; Hartnett, 2007) constituem mais uma categoria a acrescentar às anteriores ou estão incluídas nas estratégias holísticas (Heirdsfield et al., 1999) enquanto, para outros, são uma categoria geral que pode ser usada de modo articulado com cada uma das duas principais (Foxman & Beishuizen, 2002). A razão desta diferença está relacionada com o facto de, ao usar esta estratégia, um dos números iniciais (ou vários) ser substituído por outros, de acordo com as suas características e de modo a facilitar os cálculos, sendo efetuada depois a compensação.

As categorias gerais de estratégias de multiplicação que sobressaem da análise comparativa efetuada estão de acordo com o apresentado por Verschaffel, Greer e Torbeyns (2006) e Verschaffel et al. (2007) que, numa síntese recente da investigação sobre as estratégias usadas pelos alunos, as organizam para a multiplicação (e divisão) do seguinte modo: modelação direta, número completo, partição de números e compensação.

A tabela 3.3 resume as categorizações de estratégias usadas pelos alunos, caracterizadas detalhadamente nas subsecções anteriores, centrando-me agora na operação divisão. A análise comparativa das diferentes categorizações evidencia aspetos semelhantes aos já realçados no caso das estratégias associadas à resolução de problemas de multiplicação: sobressaem duas grandes categorias de estratégias, de número completo e baseadas na decomposição. A primeira inclui estratégias fundamentadas nas características dos números envolvidos nos cálculos, que são trabalhados como um todo e, a segunda, abarca as estratégias que se baseiam nas decomposições do dividendo. Tal como anteriormente, há autores (Hartnett, 2007) que consideram a estratégia ajustar e compensar como mais uma estratégia a acrescentar, outros incluem-na nas estratégias holísticas (Heirdsfield et al., 1999) e outros, ainda, consideram-na como uma estratégia transversal (Foxman & Beishuizen, 2002).

As categorias gerais de estratégias de divisão usadas pelos alunos, que sobressaem da análise da tabela, referidas pelos vários autores, são consistentes, tal como aconteceu no caso da multiplicação, com as identificadas por Verschaffel et al. (2006) e Verschaffel et al. (2007) nas sínteses de investigação que efetuam sobre a temática.

Tabela 3.2 – Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação

Autores	Baek		Ambrose, Baek e Carpenter (2003)		Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)	Hartnett (2007)	Foxman e Beishuizen (2002)	
	(1998)	(2006)						
Categorias	Modelação direta		Modelação direta		Estratégias de contagem	Contar para a frente e para trás	Número completo	Arredondar, multiplicar e compensar
					Uso de factos básicos			
	Número completo	Adição repetida	Uso de adições e de dobros	Adição de dobros	Estratégias holísticas	Usar dobros e/ou metades		
		Uso de dobros		Uso complexo de dobros		Construção a partir de outros fatores		
	Compensação						Ajustar e compensar	
	Partição de números		Algoritmos inventados usando o dez	Partição do multiplicador em dezenas e unidades	Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para a esquerda	Usar partições de números	Decomposição o	
Partição do multiplicador e do multiplicando				Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita	Usar o valor de posição			

Tabela 3.3 – Análise comparativa das categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão

Autores	Ambrose, Baek e Carpenter (2003)	Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)	Hartnett (2007)	Foxman e Beishuizen (2002)	
Categorias	Trabalhar com um grupo de cada vez	Estratégias de contagem	Contar para a frente e para trás	Número completo	Arredondar, multiplicar e compensar
		Uso de factos básicos			
	Não decompor o dividendo	Estratégias holísticas	Usar dobros e/ou metades		
	Estratégias de construção		Usar o valor de posição		
			Ajustar e compensar		
	Decompor o dividendo	Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para a esquerda	Usar partições de números	Decomposição	
		Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita			

Em termos comparativos, há, também, algumas investigações cujo propósito foi confrontar as estratégias usadas pelos alunos de países diferentes na resolução de problemas. Nomeadamente, foi realizada a análise e comparação das estratégias de resolução de problemas de divisão e a sua evolução, de alunos do Reino Unido e da Holanda (Anghileri, 2002, 2003; Anghileri et al., 2002).

O estudo referido analisa as estratégias usadas pelos alunos dos dois países e compara-as, registando algumas diferenças. As estratégias usadas pelos alunos holandeses são diversificadas inserindo-se nas categorias de estratégias informais ou inventadas pelos alunos que têm vindo a ser caracterizadas nesta secção. Além disso, a sua análise evidencia o tipo de trabalho desenvolvido na sala de aula holandesa, onde se criam as condições para que os alunos progridam do uso de estratégias informais, pouco estruturadas para estratégias mais estruturadas e eficientes. Pelo contrário, a análise das estratégias usadas pelos alunos do Reino Unido denota uma prevalência do uso do algoritmo tradicional e evidencia uma descontinuidade em termos da progressão das estratégias usadas pelos alunos (Anghileri et al., 2002).

Nas últimas subsecções foram analisadas e discutidas algumas categorizações de estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e de divisão, envolvendo números com um ou vários dígitos. Estas são baseadas em estudos empíricos realizados ao longo das últimas décadas. Apesar de haver algumas diferenças em termos da sua denominação há, contudo, bastantes semelhanças entre as suas caracterizações. Este aspeto aponta para o facto de os alunos, se lhes for proporcionado, serem capazes de inventar as suas próprias estratégias de resolução associadas à multiplicação e divisão. Alguns dos estudos relacionam as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos e a sua evolução com o trabalho que deve ser desenvolvido na sala de aula em torno destas operações. São ainda discutidas abordagens na sala de aula que promovem a compreensão sobre as operações e a sua relação com o uso de estratégias de cálculo flexíveis. Estes aspetos, mais diretamente ligados à aprendizagem das operações, em particular, à multiplicação, serão abordados com maior detalhe em secções posteriores, dada a sua relevância na investigação realizada.

3.4. Cálculo mental, cálculo algorítmico e sentido de número

Nas subsecções anteriores analisei e discuti as categorizações, que considero mais relevantes, das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e de divisão resultantes de estudos empíricos realizados nas últimas das décadas. Em alguns desses estudos os investigadores referem-se a estratégias inventadas, noutros, a estratégias informais e, noutros ainda, a estratégias de cálculo mental construídas pelos alunos. Há, ainda, casos em que, na identificação das estratégias de cálculo usadas pelos alunos, os autores referem a utilização dos algoritmos tradicionais. Além disso, nas suas investigações os autores usam diferentes designações para se referirem às produções dos alunos: métodos, estratégias, algoritmos e procedimentos.

Importa assim, clarificar e distinguir estratégias de cálculo mental do uso dos algoritmos tradicionais, caracterizando os vários tipos de cálculo, e ilustrando-os, sempre que possível, com exemplos associados à operação multiplicação (ou divisão). Pretendo, também, clarificar o significado dos termos usados nos diferentes estudos, tais como

métodos, estratégias, algoritmos e procedimentos, procurando perceber diferenças, semelhanças ou, ainda, se são empregues com o mesmo significado.

As subsecções seguintes incluem a clarificação dos aspetos mencionados anteriormente, bem como a discussão sobre a inter-relação entre cálculo mental e sentido de número e a ligação entre cálculo mental e cálculo algorítmico.

3.4.1. Cálculo mental: Que significados?

Há várias descrições que caracterizam, de modo diferente, o que se entende por cálculo mental, na aceção de estratégias de cálculo mental. Estas descrições diferem umas das outras em termos do seu significado e, também, nas denominações que são usadas. As diferenças identificadas estão relacionadas, muitas vezes, com concepções distintas sobre o ensino e a aprendizagem associados às operações aritméticas e evidenciam o que se considera importante e essencial os alunos aprenderem em determinada época cronológica.

Uma das caracterizações de cálculo mental, bastante referida por outros autores, muitas vezes para a confrontarem com outras, é a de Sowder (1988) que descreve o cálculo mental como “o processo de efetuar cálculos aritméticos sem a ajuda de meios externos” (p. 182), curiosamente a propósito da sua relação com o sentido de número, expressão que começa a ser muito utilizada precisamente nos anos 80 do séc. XX. Associada a esta ideia de cálculo mental está a expressão aritmética mental que surge no final dos anos 70 do séc. XX. Efetivamente, quando aparece, esta expressão está muito ligada à memorização e à realização de cálculos com rapidez e apenas “de cabeça” (Buys, 2008). Apesar do entendimento de aritmética mental ter evoluído e, atualmente, estar muito relacionado com a Matemática Realista, há autores que ainda encaram esta designação associada ao seu primeiro significado. O assumir desta perspetiva e a sua inter-relação com o cálculo mental tem conduzido a concepções erróneas e estritas sobre o que, atualmente, se considera cálculo mental.

A associação entre cálculo mental e o não recurso a quaisquer auxiliares externos conduz a uma dicotomia, que se manteve até recentemente (e se encontra, presentemente, em alguns textos e manuais escolares), entre cálculo mental e cálculo escrito. Ainda hoje, se procurarmos num dicionário o significado da expressão cálculo mental, encontramos uma definição muito semelhante à de Sowder (1988). Por exemplo, o Dicionário de Língua Portuguesa da Academia das Ciências de Lisboa define cálculo mental como “o [cálculo] aritmético obtido sem recurso à escrita, apenas de cabeça.” (2001, vol. I, p. 633).

Alguns anos mais tarde, após definições do tipo da de Sowder (1988), no âmbito da publicação de documentos associados à *National Numeracy Strategy Framework for Teaching Mathematics* no Reino Unido, Thompson (1999) explicita a diferença entre o “recordar mentalmente” e as estratégias mentais (de cálculo). Refere que estas últimas são “aplicações de factos numéricos conhecidos ou rapidamente calculados em combinação com propriedades específicas do sistema numérico para encontrar a solução para um cálculo cuja resposta não é conhecida” (p. 2). Além disso, segundo o mesmo autor, a referência a cálculo mental tem implícita, quase sempre, a ideia de escolha de uma estratégia a usar perante os números envolvidos nos cálculos. Contudo, se analisarmos esta caracterização de cálculo mental verificamos que ela se aplica a quase todos os tipos de cálculo, exceto àqueles que implicam apenas a memorização. De facto, esta é uma descrição bastante abrangente e, por isso, talvez não clarifique totalmente o seu significado e distinga cálculo mental de outros tipos de cálculo.

Na mesma linha de orientação de Thompson e afastando-se da dicotomia entre cálculo mental e cálculo escrito, Anghileri (2003) realça que as estratégias de cálculo mental podem requerer o uso de papel e lápis para auxiliar a memória a curto prazo, mas isso não significa que passem a ser estratégias de cálculo escrito. A autora evidencia, ainda, que as estratégias de cálculo mental devem ser “interpretadas como sendo calcular “com a cabeça” e não apenas “na cabeça”” (p. 186).

Por sua vez, Threfall (2002), ainda na tentativa de clarificar e distinguir significados, refere que as respostas dos alunos aos denominados problemas de cálculo mental podem ser obtidas de diferentes formas:

1. Através do recordar ou “apenas saber” um facto numérico
2. Através de um simples procedimento de contagem, no qual uma sequência numérica é recitada (em privado) [...]
3. Fazendo uma representação mental de um método de ‘papel e lápis’ na vertical e efetuando os procedimentos mentalmente.
4. Construindo uma sequência de transformações dos números do problema para chegar à solução [...]. (p. 30)

Todos estes modos de calcular podem ser bem-sucedidos na realização de determinados cálculos mas as abordagens do tipo 4 são aquelas que, servindo “propósitos mais amplos” do que os outros tipos são referidas, usualmente, como sendo estratégias de cálculo mental, de acordo com Threfall (2002). Na mesma linha, Hartnett (2007) explicita que as estratégias de cálculo mental requerem mais do que a memorização de um procedimento, ao contrário do que acontece quando se usam os algoritmos tradicionais.

Finalmente, Buys (2008) resume a aritmética mental como o “cálculo flexível e habilidoso baseado no conhecimento sobre as relações numéricas e as características dos números” (p. 121), afastando-se da conotação dada à expressão, desde os anos 70 do século XX, relacionada com a memorização e a rapidez de realizar cálculos “de cabeça”. O autor considera que a aritmética mental tem subjacente uma abordagem dos números e das relações numéricas de modo adequado e flexível e que o cálculo mental contém as seguintes características:

- operar com os números e não com os dígitos;
- usar propriedades das operações, relações numéricas e combinações entre elas;
- ser suportado por um bom conhecimento sobre os números e os factos numéricos elementares (até vinte e, depois, até cem);
- ser possível recorrer a registos intermédios em papel, apesar de se realizar, sobretudo, mentalmente (Buys, 2008).

A ideia de que no cálculo mental se trabalha com números e se recorre às relações numéricas e às propriedades das operações arrasta consigo a noção deste ser um cálculo pensado e não mecânico ou memorizado. Esta é a dicotomia que deve ser efetuada em

termos do cálculo mental – cálculo mental *versus* cálculo mecanizado e não, como há algum tempo atrás – cálculo mental *versus* cálculo escrito. Contudo, tal como referem Bokhove e Noteboom (2008) a aritmética mental inclui, para além do recurso às propriedades dos números e das operações, também, o uso de factos memorizados, e o modo como tudo é relacionado entre si.

A aritmética mental, de acordo com Buys (2008), assume três formas elementares de cálculo mental: (i) cálculo em linha, (ii) cálculo suportado pela decomposição decimal e (iii) cálculo baseado em estratégias variadas. No cálculo em linha os números são encarados como se estivessem na linha numérica e operar com eles corresponde a efetuar movimentos ao longo da linha. No cálculo suportado pela decomposição decimal os números são encarados de acordo com a sua estrutura decimal e operar com eles corresponde a tirar partido das suas decomposições decimais. Finalmente, no cálculo baseado em estratégias variadas, os números podem ser estruturados de diferentes formas e operar com eles corresponde a escolher uma estrutura adequada e a selecionar as propriedades aritméticas apropriadas. O autor realça, ainda, que cada um dos três tipos de cálculo mental pode ser realizado a diferentes níveis, de acordo com o conhecimento dos alunos sobre os números, as relações numéricas e as operações aritméticas (Buys, 2008).

O Programa de Matemática do Ensino Básico, nas suas orientações metodológicas gerais, especifica, também, o seu entendimento de cálculo mental, muito próximo do explicitado por Buys (2008).

O cálculo mental caracteriza-se por: (i) trabalhar com números e não com algarismos; (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares; e (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação”. (ME, 2007, p. 10)

Neste estudo, o significado atribuído a cálculo mental corresponde ao entendimento de Buys (2008), ou seja, trabalhar com números e não com dígitos, recorrendo às características dos números, às relações numéricas e às propriedades das operações e, se necessário, proceder a registos escritos auxiliares.

3.4.2. Cálculo algorítmico: Que significados?

Quando se pensa numa forma de cálculo contrária (ou alternativa) ao cálculo mental vem-nos logo à memória a palavra algoritmo ou a expressão cálculo algorítmico. Tal como acontece com a designação cálculo mental, também a palavra algoritmo assume significados distintos conforme os diferentes autores e os seus propósitos.

O Dicionário de Língua Portuguesa da Academia das Ciências de Lisboa define o significado da palavra algoritmo como o “processo de resolução de um problema, constituído por uma sequência ordenada e bem definida de passos que, em tempo finito, conduzem à solução do problema ou, indicam que, para o mesmo, não existe soluções” (2001, vol. I, p. 168). Esta definição corresponde, em termos gerais, à assumida por Bokhove e Noteboom (2008) num glossário da sua autoria: “um algoritmo é um método de cálculo passo a passo que segue um procedimento fixo” (p. 243).

Usiskin (1998) considera que é possível organizar a maior parte dos algoritmos em três grandes categorias: algoritmos aritméticos, algoritmos de cálculo e algébricos e algoritmos de desenho. Como exemplos de algoritmos aritméticos temos o algoritmo da raiz quadrada, da adição, subtração, multiplicação e divisão com números com vários algarismos. Como exemplos de algoritmos de cálculo e algébricos temos, entre outros, os que são usados para resolver equações e inequações lineares ou calcular integrais. Finalmente, algoritmos de desenho são os que são usados para fazer gráficos de barras, gráficos circulares e construções geométricas de régua e compasso, entre outros. Nesta secção explico os vários significados atribuídos a algoritmos, na aceção de algoritmos aritméticos, associados às quatro operações aritméticas elementares.

Referindo-se aos algoritmos aritméticos, Fuson (2003b) considera que os algoritmos são “métodos de solução” para as operações com números multidígitos e, mais especificamente, afirma que “um algoritmo é um procedimento geral com várias etapas que produzirá uma solução para uma dada classe de problemas” (p. 301). Referindo-se concretamente aos algoritmos da multiplicação e da divisão, a investigadora afirma que estes correspondem a um conjunto de passos alinhados e organizados segundo

os valores de posição dos algarismos e não requerem qualquer compreensão sobre o que acontece às unidades, dezenas e centenas.

Treffers, Noteboom e Goeij (2008) vão ainda mais longe do que as definições de algoritmo apresentadas anteriormente, ao afirmarem que “algoritmos são “receitas” para calcular com dígitos” (p. 147). Efetivamente, esta expressão resume as características, praticamente consensuais, do cálculo algorítmico: calcula-se com dígitos e não com os números como um todo e segue-se um conjunto de regras, segundo uma determinada ordem, em qualquer cálculo com certas características. Ainda assim, apesar de haver especificidades, aceites por quase todos os que se debruçam sobre o que é um algoritmo, há conceções um pouco diferentes sobre o seu significado. Algumas delas são bastante amplas e têm mesmo pontos comuns com o que se entende por cálculo mental.

Um dos autores que apresenta uma categorização de tipos de algoritmos é Thompson (2003b), referindo-se a algoritmos escritos. Esta é organizada considerando as características – formal *versus* informal e padronizado *versus* não padronizado – que conjuga entre si (figura 3.1).

Uma vez que não faz sentido, por ser contraditório, um algoritmo ser padronizado e informal ao mesmo tempo, Thompson (2003b) considera e caracteriza os outros três tipos de algoritmos escritos: padronizados formais, não padronizados formais e não padronizados informais.

	Formal	Informal
Padronizado	Padronizado formal	~~Padronizado informal~~
Não padronizado	Não padronizado formal	Não padronizado informal

Figura 3.1 – Tipos de algoritmos escritos (adaptado de Thompson, 2003b, p. 172)

Na primeira categoria, de algoritmos padronizados formais, inclui os algoritmos tradicionais/usuais ensinados nas escolas: com uma representação vertical e em que se calcula com dígitos. A figura seguinte apresenta o algoritmo mais usual, no caso da operação multiplicação.

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 \times 27 \\
 \hline
 301 \\
 86 \\
 \hline
 1161
 \end{array}$$

Figura 3.2 – Algoritmo padronizado e formal, de acordo com Thompson (2003b)

Na categoria de algoritmos não padronizados formais inclui um certo tipo de algoritmos considerados formais porque obedecem a uma apresentação normalizada, mas não padronizados, pois são diferentes dos tradicionais e, muitas vezes, são baseados em cálculos mentais dos alunos. A figura 3.3 apresenta, à esquerda, um exemplo deste tipo de algoritmo, na aceção de Thompson (2003b).

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 \times 27 \\
 \hline
 800 \\
 280 \\
 60 \\
 21 \\
 \hline
 1161
 \end{array}$$

	40	3
20	800	60
7	280	21

Figura 3.3 – Algoritmos não padronizados e formais (de acordo com Thompson, 2003b)

Nesta segunda categoria Thompson (2003b) inclui, ainda, cálculos verticais baseados em produtos parciais ou cálculos apoiados no modelo de área para a multiplicação “longa”, tal como se apresenta também na figura 3.3.

Finalmente, na terceira categoria de algoritmos, não padronizados informais, Thompson (2003b) inclui um conjunto amplo de procedimentos que correspondem a representações informais no papel de modos de pensar das crianças. Estes estão associados a expressões escritas que as crianças começam por fazer, naturalmente, no início do trabalho com as operações, antes de aprenderem os algoritmos padronizados formais. Um exemplo deste tipo de algoritmo associado à operação multiplicação é o cálculo do produto 125×4 através da seguinte sequência de cálculos: $100 \times 4 = 400$; $20 \times 4 = 80$; $5 \times 4 = 20$ e $400 + 80 + 20 = 500$.

A categorização apresentada por Thompson (2003b), além de muito geral, o que é contraproducente em termos da sua aplicabilidade, não é consistente com o referido por outros investigadores sobre esta mesma temática, uma vez que inclui tipos de cálculo que são considerados como não algorítmicos e, até, como exemplos de cálculo mental, por autores como Bokhove e Noteboom (2008), Threlfall (2002) e Treffers et al. (2008).

Para além dos vários entendimentos acerca dos algoritmos usuais há investigadores, como Fuson (2003b) que, apesar considerarem que um algoritmo é um conjunto de procedimentos gerais e ordenados que conduzem a uma solução de um certo tipo de problema (ver a definição de Fuson apresentada anteriormente nesta subsecção) apelam para a introdução prévia do que denominam por algoritmos acessíveis. Estes, cujo objetivo é facilitar a compreensão dos algoritmos usuais, constituem passos intermédios em que se realizam cálculos com números e não com dígitos, com significado para os alunos e cujo destino final é o algoritmo correspondente. Por exemplo, na multiplicação esses algoritmos acessíveis podem ser apoiados na disposição retangular e nos diferentes produtos parciais que surgem a partir da decomposição decimal de cada um dos fatores. A figura seguinte ilustra a construção de um algoritmo acessível da multiplicação, na aceção de Fuson (2003b):

The figure illustrates accessible multiplication algorithms. It consists of three parts:

- Rectangular Array (Left):** A table showing the decomposition of 30 and 40 into tens and units, and the resulting partial products.

	40	6
30	1200	180
7	280	42
- Partial Products (Middle):** A diagram showing the multiplication of 46 by 37, with arrows indicating the decomposition of the factors into tens and units.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 37 \\ \hline \end{array}$$
- Partial Products (Right):** A list of partial products for the multiplication of 46 by 37, showing the decomposition of the factors into tens and units.

$$\begin{array}{r} 12000 \\ 1800 \\ 2800 \\ 420 \\ \hline 17020 \end{array}$$

Figura 3.4 – Algoritmos acessíveis da multiplicação, de acordo com Fuson (2003b)

Segundo a mesma investigadora a passagem por um algoritmo acessível, apoiado no modelo retangular, em que se calculam os diferentes produtos parciais trabalhando com números e da esquerda para a direita, tal como o exemplificado na figura 3.4, permite aos alunos uma melhor compreensão sobre o processo complexo que é o

algoritmo tradicional da multiplicação, em que se calcula com dígitos e da direita para a esquerda (Fuson, 2003b).

O trabalho com os algoritmos é encarado, também, de modo progressivo por outros autores, além de Fuson (2003b), apesar de ser numa perspectiva um pouco diferente. Treffers et al. (2008) assumem que os alunos devem, gradualmente, passar primeiro por outros tipos de cálculo que lhes permitam, mais tarde, compreender os procedimentos relativos aos algoritmos tradicionais. Um desses tipos de cálculo é denominado cálculo em coluna e caracteriza-se, não apenas por se disporem os números na vertical mas, essencialmente, por se calcular com números, da esquerda para a direita e tendo subjacentes decomposições decimais dos números envolvidos. Exemplifico, na figura seguinte, a passagem gradual, preconizada pelos autores, do cálculo em coluna para o algoritmo, no caso da multiplicação.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 43 \\
 \times 27 \\
 \hline
 800 \\
 280 \\
 60 \\
 21 \\
 \hline
 1161
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 43 \\
 \times 27 \\
 \hline
 21 \\
 280 \\
 60 \\
 800 \\
 \hline
 1161
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 43 \\
 \times 27 \\
 \hline
 301 \\
 86 \\
 \hline
 1161
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.5 – Passagem gradual do cálculo em coluna para o algoritmo da multiplicação, de acordo com Treffers et al. (2008)

Na figura anterior, a representação vertical mais à esquerda inclui os produtos parciais resultantes do cálculo (mental) por decomposição, efetuado da esquerda para a direita. A representação intermédia inclui os mesmos produtos parciais que a primeira, mas escritos de modo a poderem ser adicionados de acordo com o que acontece no algoritmo. Finalmente, a terceira representação corresponde ao algoritmo usual, no qual os procedimentos estão condensados em duas linhas, não muito diferentes das duas adições parciais que podem ser efetuadas a partir da representação anterior. Esta passagem gradual do cálculo em coluna para o algoritmo, que pode ser efetuada em cada uma das operações aritméticas, é preconizada genericamente pela Matemática Realista (Treffers et al., 2008).

Em suma, há diferentes concepções sobre o que se entende por algoritmo (no que respeita às operações aritméticas) e diferentes designações e tipos de algoritmos. Para ilustrar esta constatação pode observar-se na figura 3.3, um algoritmo não padronizado formal (Thompson, 2003b), que é muito semelhante à representação mais à direita da figura 3.4 e que corresponde a um algoritmo acessível (Fuson, 2003b). Estes dois tipos de algoritmo, por sua vez, são análogos ao cálculo em coluna exemplificado na figura 3.5 (Treffers et al., 2008).

Ainda assim, quando se refere a palavra algoritmo de uma operação aritmética, na aceção de cálculo algorítmico em termos matemáticos, de um modo geral e sem detalhar especificidades concretas, há características que se evidenciam e que são relativamente consensuais: trabalhar com dígitos, calcular da direita para a esquerda (exceto no caso da divisão) e seguir um conjunto de procedimentos mecânicos e sequenciais que conduzem a uma solução de um certo modelo de problemas, quaisquer que sejam os números envolvidos. É este, também, o entendimento de algoritmo neste estudo. Além da noção de algoritmo, também o entendimento de cálculo em coluna está de acordo com o preconizado por Treffers et al. (2008).

3.4.3. Métodos, estratégias, algoritmos, procedimentos: Que significados?

Quando, ao longo das secções anteriores, analisei e discuti estudos empíricos associados ao modo como os alunos (ou, em alguns casos, crianças fora da sala de aula) resolvem tarefas associadas às operações aritméticas e, em particular, à multiplicação e à divisão, pude perceber que os diversos investigadores utilizam denominações muito distintas uns dos outros e que o mesmo autor usa mais do que uma designação para a mesma ação dos alunos, parecendo considerá-las equivalentes. Em outros casos, a mesma designação é utilizada com um sentido por um determinado autor e com um sentido diferente por um outro.

De um modo geral, as designações que, mais frequentemente, encontrei na revisão da literatura que efetuei sobre os procedimentos usados (ou informais ou

inventados ou construídos) pelos alunos quando resolvem tarefas relacionadas com as operações aritméticas foram as seguintes: métodos, algoritmos, estratégias e procedimentos. Uma vez que, no estudo que realizei, também analiso e discuto o modo como os alunos resolvem tarefas de multiplicação (e de divisão) é importante clarificar o significado das várias designações usadas em investigações sobre a mesma temática, de modo a definir e justificar as denominações e os seus significados por mim assumidos.

Uma das autoras que produziu, individualmente ou em conjunto com outros investigadores, inúmeros estudos associados ao modo como os alunos resolvem tarefas relacionadas com as operações aritméticas foi Fuson. A autora, nas investigações que realizou na última década do século XX, utiliza, preferencialmente, o termo métodos usados ou inventados pelos alunos (Fuson, 1997a; Fuson et al., 1997a; Fuson et al., 1997b) para se referir ao conjunto de procedimentos que estes utilizam na resolução de problemas relacionados com uma operação aritmética. Contudo, em investigações mais recentes opta pelo termo estratégias, atribuindo-lhe o mesmo significado, tal como acontece em Sherin e Fuson, (2005). Nesta publicação, referem-se às diversas denominações “procedimentos de solução, estratégias de solução e estratégias de cálculo” (p. 349) adotadas nos diferentes estudos e assumem, naquele caso concreto, a expressão estratégias de cálculo, clarificando que, no caso da multiplicação “a análise das estratégias de cálculo diz respeito à sequência de operações que um aluno realiza para, a partir de números indicados, obter o seu produto” (p. 349).

Também Baek, à semelhança de Fuson, vai alterando as denominações que usa para as estratégias inventadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação. Em Baek (1998) usa o termo geral algoritmo inventado mas, quando especifica as categorias de algoritmos inventados, refere-se a estratégias de compensação bem com a modelação direta, por exemplo. Mais recentemente, em colaboração com outros investigadores, clarifica o termo de algoritmo inventado, associando-o apenas a estratégias abstratas, excluindo, assim, a modelação direta (Ambrose et al., 2003). Na sua publicação de 2006, usa apenas a designação estratégias inventadas pelos alunos (Baek, 2006).

Ainda no capítulo de livro referido anteriormente (Ambrose et al., 2003), os seus autores empregam, com o mesmo significado, três designações: algoritmos inventados, procedimentos inventados e estratégias inventadas. Com efeito, o título do capítulo é “*Children’s invention of multidigit multiplication and division algorithms*¹⁴” (p. 305) mas, quando explicitam o seu objetivo escrevem “*The goal of this chapter is to provide a more complete analysis of children’s invented multidigit multiplication and division procedures*” (p. 305) e, mais à frente, intitulam uma secção do seguinte modo: “*The development of multidigit multiplication strategies*” (p. 310) onde clarificam que irão discutir “*the types of multidigit multiplication procedures children invented*” (p. 310). As evidências anteriores mostram que, nesta publicação, os seus autores usam designações diferentes – algoritmos inventados, procedimentos inventados e estratégias inventadas – para o mesmo ente designado, atribuindo-lhes o mesmo significado e entendimento e não distinguindo qualquer delas.

Hartnett (2007) refere-se sempre a estratégias de cálculo mental e apresenta uma categorização, definindo-as e caracterizando-as por oposição ao seu entendimento sobre o que é um algoritmo escrito. Justifica a autora que “estratégias de cálculo mental são diferentes dos algoritmos escritos porque requerem mais do que a aplicação de um procedimento lembrado. A diferença-chave é a necessidade de alguma aplicação do conhecimento profundo de como funcionam os números.” (p. 345).

Por sua vez, Foxman e Beishuizen (2002) no artigo de investigação que escrevem sobre os métodos de cálculo mental (incluem no título a expressão *mental calculation methods*) referem-se, no corpo do trabalho, a estratégias de cálculo mental com o mesmo significado que métodos de cálculo mental usando, quase indiscriminadamente, as duas expressões para se referirem ao mesmo conceito. Quando descrevem as estratégias de cálculo mental ligadas à adição referem-se, por exemplo, à estratégia N10, que ilustram com o cálculo aditivo $38+26$: $38+20 \rightarrow 58$; $+6 \rightarrow 64$. Ora, um dos autores, numa sua publicação anterior, considera N10 como um procedimento e não como uma estratégia, embora associado a uma estratégia aditiva (Beishuizen, 1997). Com efeito, no que diz

¹⁴ Estas transcrições são efetuadas na língua original, uma vez que se quer mostrar o uso das diferentes designações com o mesmo significado, o que não teria o mesmo impacto se fossem traduzidas.

respeito às operações adição e subtração, Beishuizen distingue estratégia de procedimento, listando e exemplificando as diversas categorias de estratégias e de procedimentos relativas a estas duas operações.

Para Beishuizen (1997), estratégia é “a escolha das opções relacionadas com a estrutura do problema” e procedimento é “a execução de passos de cálculo relacionados com os números do problema” (p. 127). Nesta publicação o autor refere-se aos termos estratégias e procedimentos, realçando que os estudos de investigação têm “inflacionado o uso” (p. 130) da palavra estratégia. A sua explicação para este facto deve-se à conotação negativa que a palavra procedimentos parece ter para alguns investigadores matemáticos, em articulação com a mudança de certos pontos de vista em termos da Educação Matemática. Ou seja, na ótica desses investigadores, segundo este autor, o recurso ao termo procedimento está mais associado à memorização de regras e ao uso rígido de algoritmos padronizados e não se interliga com as concepções sobre a aprendizagem da Matemática com compreensão. Esta discussão (e alguma falta de clareza) relacionada com o uso dos termos estratégia e procedimento deve ser aprofundada e tem algum paralelismo com o debate que surgiu, há alguns anos, sobre o conhecimento conceptual e o conhecimento procedimental (Beishuizen, 1997). O conhecimento conceptual está associado a uma rede de relações que permite o acesso flexível a um conjunto de informação e ao seu uso, enquanto o conhecimento procedimental é caracterizado pelo uso de procedimentos passo a passo, segundo uma determinada ordem (Carpenter, 1986). Beishuizen rebate a conotação negativa da palavra procedimento afirmando que, tanto do ponto de vista da análise dos processos em termos psicológicos, como do ponto de vista da Matemática Realista, esta designação é muito mais abrangente e inclui aspetos muito mais subtis do que apenas a aplicação de regras ou de factos memorizados.

Apesar de afirmar que faz sentido distinguir estratégia de procedimento, Beishuizen (1997) reconhece a dificuldade em o fazer: “tal classificação e discriminação [entre estratégia e procedimento] nem sempre são fáceis (e às vezes são impossíveis)” (p. 133). Ainda relativamente a essa diferenciação, o autor afirma que é muito mais acessível fazê-la quando se tem subjacente o universo numérico dos números até 20,

sendo mais complexo efetuarla com números até 100 pois, perante a produção de um aluno torna-se muito difícil identificar, nesses casos, o que é estratégia e o que é procedimento. Por isso, a sua sugestão é a categorização e descrição, cuidadosa e detalhada, das “estratégias de solução” e dos “procedimentos de cálculo”.

É importante, também, referir que Beishuizen (1997) efetua apenas a distinção entre estratégias e procedimentos e a respetiva categorização para o caso das operações adição e subtração que envolvem números até 100, não o fazendo para a multiplicação e divisão.

Threlfall (2009) usa o termo estratégia de cálculo mental para se referir, de um modo geral, às maneiras diferentes de resolver mentalmente um problema aritmético. Ainda assim, distingue estratégias de abordagem de estratégias de transformação de números ao referir-se ao cálculo mental. Para o autor, uma estratégia de abordagem é “a forma geral de cognição matemática usada para o problema – por exemplo, contar, ou recordar, ou aplicar um método aprendido, ou visualizar um procedimento, ou explorar relações numéricas conhecidas” (p. 541). Uma estratégia de transformação de números “é a maneira detalhada através da qual os números se foram transformando para chegar à solução” (Threlfall, 2009, p. 542). Além da distinção entre estes dois termos, o autor explicita a sua interligação, referindo que, enquanto cada estratégia de transformação de números reflete uma estratégia de abordagem há, contudo, estratégias de abordagem que determinam a estratégia de transformação de números mas há outras que não o fazem. Quando uma estratégia de transformação de números, que surge a partir de uma estratégia de abordagem, envolve a exploração de relações numéricas conhecidas o autor denomina-a por estratégia de cálculo.

Na revisão da literatura que efetuei, que tentei que fosse não só exaustiva mas, sobretudo, significativa no que se refere às estratégias e/ou aos procedimentos usados ou inventados pelos alunos na resolução de problemas sobre as operações multiplicação e divisão, não encontrei qualquer distinção realizada por algum investigador, do tipo da que é feita por Beishuizen (1997), para o caso da adição e subtração. Tal como já mencionei, os autores que consultei ou optam pelo uso da designação “estratégias”, ou

pela designação “procedimentos” ou, ainda, pela utilização das duas denominações com o mesmo significado, para além das designações de “métodos” e “algoritmos”.

Num relatório técnico que efetua sobre as estratégias usadas pelos alunos de 9/11 anos relativas às operações aritméticas, no âmbito do Projeto *asTTle* da Nova Zelândia, Ell (2001) realiza uma síntese da investigação sobre o tema e discute as designações usadas pelos vários autores. Problematisa, também, as questões associadas ao conhecimento conceptual e conhecimento procedimental, tal como Beishuizen (1997), relacionando-as com a distinção entre estratégia e procedimento. Refere que, geralmente, estratégia é mais usada na aceção de processo de pensamento e procedimento é utilizado com o significado de execução mecânica de passos de cálculo. Contudo, tal como expus anteriormente, também aponta o facto de haver autores que usam as duas designações com o mesmo significado e outros, como Fuson, que preferem usar (em algumas publicações) um terceiro termo – método, para não se confundir nem com estratégia nem como procedimento, no seu sentido mais estrito.

Para além da clarificação de designações e de significados de conceitos como estratégias, procedimentos, algoritmos e métodos há, ainda, a considerar os atributos que lhes são associados. Concretamente, Foxman e Beishuizen (2002) discutem esses atributos usados nos estudos de investigação sobre a temática e explicitam que, no seu caso, utilizam o termo informal associado à palavra estratégia, tal como outros recorrem ao atributo inventado ou construído “porque assumimos que elas não foram ensinadas” (p. 48). Este é um dos aspetos que é preciso ter em conta nos estudos sobre as estratégias usadas pelos alunos, perceber se, nas análises efetuadas sobre as produções dos alunos, está subjacente o ensino de determinadas estratégias de cálculo ou se, pelo contrário, essa análise assenta nas estratégias informais usadas, ou seja, inventadas ou construídas com base no seu conhecimento sobre os números, as operações e as relações entre eles.

Neste estudo tomei como ponto de partida os termos estratégias e procedimentos, na aceção de Beishuizen (1997). Contudo, a análise individualizada das estratégias usadas pelos alunos não me possibilitava caracterizar detalhadamente as suas produções, na maior parte dos casos permitia-me, apenas, ter acesso à operação que aqueles tinham selecionado perante a estrutura do problema. Considerando, somente, as estratégias

usadas pelos alunos, das suas produções emergiriam categorias bastante amplas e gerais que não contribuiriam para um aprofundamento da minha compreensão sobre os seus modos de raciocinar. Além disso, em alguns casos seria muito difícil distinguir estratégia de procedimento.

Perante as leituras efetuadas sobre os diferentes significados dos termos utilizados e de acordo com o propósito do estudo que realizei, tomei uma decisão que apresento e justifico. Optei por me centrar nos procedimentos usados pelos alunos, fazendo a sua análise fina e pormenorizada que me permitisse aceder, o mais possível, aos seus modos de raciocinar. Por isso, neste estudo, defino e caracterizo os procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas, incluindo as opções por si tomadas associadas à estrutura do problema¹⁵ e o modo como organizam e realizam os cálculos que efetuam, considerando os números envolvidos¹⁶. É de realçar que, quando me refiro aos procedimentos dos alunos, estou a reportar-me aos que eles inventam e que são sobretudo, informais. Não excluo, contudo, os que utilizam e que, por vezes, são o resultado do ensino anterior, como o recurso ao cálculo em coluna na multiplicação ou o uso do modelo retangular no caso das tarefas de divisão.

3.4.4. Cálculo mental e sentido de número: Relação de interdependência

À expressão cálculo mental associam-se-lhe, com frequência, atributos como flexibilidade, adaptabilidade, precisão e eficiência. Além disso, o seu desenvolvimento na sala de aula relaciona-se, quase sempre, com determinados aspetos do sentido de número dos alunos. Importa, assim, esclarecer que características deve ter o cálculo mental dos alunos de modo a ser eficaz perante as tarefas que é preciso resolver e como se relaciona com o desenvolvimento do sentido de número.

Nesta subsecção, quando menciono as expressões cálculo mental e estratégias de cálculo mental estou a referir-me a calcular “com a cabeça” com compreensão

¹⁵ Considerada a estratégia, na aceção de Beishuizen (1997).

¹⁶ Considerado o procedimento, na aceção de Beishuizen (1997).

(Anghileri, 2003) ou seja, recorrendo ao conhecimento sobre os números, as relações numéricas e as propriedades das operações elementares e podendo, eventualmente, usar registos escritos (Buys, 2008). Ainda assim, alguns dos autores a que me reporto, apesar de considerarem o cálculo mental com características comuns às referidas por Anghileri, (2003) e Buys (2008), excluem a possibilidade de poder haver recurso a ferramentas externas, tais como papel e lápis.

O NCTM (2000) aponta o desenvolvimento da fluência de cálculo como um grande objetivo do trabalho à volta dos números e das operações com números inteiros. Ter fluência de cálculo corresponde a “ter métodos de cálculo precisos e eficientes” (NCTM, 2000, p. 152), nos quais se incluem diferentes tipos, tais como os algoritmos escritos e o cálculo mental. Neste âmbito, um aluno mostra ter fluência de cálculo quando sabe usar diferentes métodos e sabe escolhê-los de modo flexível, preciso e com eficácia. Calcular fluentemente inclui, assim, três ideias-chave: flexibilidade, precisão e eficácia. A ideia de flexibilidade requer o conhecimento de mais do que um método de cálculo para resolver certos tipos de problemas e selecionar uma estratégia apropriada a cada um. A ideia de precisão depende de aspetos gerais do processo de resolução de problemas tais como o rever cuidadosamente o que foi feito e confirmar a solução obtida, para além do conhecer e usar, adequadamente, relações numéricas. Finalmente, a ideia de eficácia está relacionada com o recurso a estratégias que, do ponto de vista do aluno, sejam fáceis de utilizar e não incluam demasiados passos ou passos desnecessários. O NCTM (2000) aponta, também, para o equilíbrio na inter-relação que deve existir entre a fluência de cálculo e a compreensão dos conceitos, dois dos propósitos fundamentais da aprendizagem dos números e das operações.

Russell (2000), no mesmo sentido que o NCTM (2007) e concretizando as ideias preconizadas por este, sugere que a fluência de cálculo dos alunos se desenvolve na sala de aula propondo-lhes tarefas a partir das quais têm oportunidade de aprofundar a sua compreensão sobre os conceitos e de utilizar procedimentos eficientes.

As características associadas à fluência de cálculo e as ideias sobre o modo como esta se desenvolve na sala de aula, referidas, em termos gerais, também têm razão de ser quando nos reportamos a um tipo de cálculo específico – o cálculo mental. Efetivamente,

os alunos devem desenvolver um cálculo mental fluente, o que significa ser flexível, preciso e eficaz. Há, contudo, autores que, em vez de se referirem à fluência de cálculo tal como o NCTM (2007) e Russell (2000), usam o termo proficiência para caracterizarem o cálculo mental (Heirdsfield, 2003; Heirdsfield & Lamb, 2007). Estes investigadores incluem nas características do cálculo mental proficiente a sua flexibilidade e precisão (à semelhança do NCTM), relacionando depois a questão da eficácia com as estratégias usadas. De facto, a questão da eficácia pode ser difícil de qualificar, sobretudo quando se trata de cálculo mental, ainda incipiente e informal, associado às operações aritméticas, sendo uma característica a alcançar a médio ou longo prazo.

Heirdsfield desenvolveu numerosos estudos no âmbito do cálculo mental, alguns deles em colaboração com outros investigadores (Heirdsfield, 2001; 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004; Heirdsfield, Dole & Beswick, 2007; Heirdsfield & Lamb, 2007), nos quais analisa a proficiência de cálculo mental, relacionando a precisão no cálculo com a flexibilidade na escolha das estratégias a usar. Para estes autores, a flexibilidade no cálculo mental é encarada como o emprego de uma variedade de estratégias de cálculo mental eficazes, tendo em conta as combinações de números que inspiram a escolha de uma determinada estratégia. Como um dos resultados de um dos seus estudos, Heirdsfield (2001) afirma que os alunos que calculam mentalmente de modo flexível e preciso usam uma grande variedade de estratégias eficazes, onde se incluem as estratégias holísticas e de agregação (no caso da adição). Além disso, refere que os alunos que têm um cálculo mental proficiente selecionam estratégias eficazes e alternativas porque “possuem um conhecimento base extensivo e em rede para suportar essas estratégias” (Heirdsfield, 2001, p. 298). Pelo contrário, os alunos que não possuem um cálculo flexível não escolhem uma estratégia, aplicam uma ensinada pelo professor, na maior parte dos casos usam imagens mentais do algoritmo de papel e lápis associado à operação em causa. A investigadora descreve, ainda, o que considera ser um cálculo mental proficiente: baseia-se num conhecimento base bem integrado, recorre a factos básicos e, também, ao uso de estratégias eficazes de cálculo mental. O recurso a estratégias eficazes de cálculo mental inclui, por sua vez, uma boa compreensão dos

números e das operações (por exemplo, perceber a proximidade entre os números e os efeitos das operações), características consideradas essenciais para o emprego de estratégias holísticas.

A flexibilidade como característica inerente ao cálculo mental é discutida por outros autores, assim como o modo de esta ser desenvolvida, ou não, na sala de aula. Por exemplo, Threlfall (2002) considera que o cálculo mental flexível “pode ser encarado como uma reação pessoal e individual com conhecimento, manifestada de modo subjetivo, a partir do que foi apreendido sobre um problema específico” (p. 42). De acordo com este pressuposto, o autor refere que é razoável o professor auxiliar os alunos na compreensão das diferentes estratégias que podem ser usadas num mesmo problema, na perspectiva de estes perceberem que há várias abordagens para a sua resolução, e não na perspectiva de contribuir para que aqueles disponham de um conjunto de estratégias a partir do qual devem fazer uma seleção aquando da resolução de um novo problema (Threlfall, 2009). Nesta linha de raciocínio, o mesmo autor explicita que considera inadequado pressupor que a flexibilidade no cálculo mental se obtém através do ensino de estratégias holísticas. A flexibilidade desenvolve-se através de um ensino focado no conhecimento dos números e na compreensão sobre o que foi efetuado, após ter-se realizado um cálculo.

Quando colocados perante um problema novo, a criança ou o adulto que segue diferentes caminhos de resolução dependentes dos números não o faz pensando sobre as alternativas que tem e tentando decidir qual usar. Pelo contrário, ele ou ela pensam sobre os números do problema, apreendem as suas características, se os números são próximos e consideram hipóteses de efetuar partições ou de os arredondar. (Threlfall, 2002, p. 41)

De acordo com esta perspectiva, Threlfall (2002) considera que uma estratégia de cálculo mental a usar num determinado problema não é selecionada de entre outras mas “emerge” perante aquele contexto particular, apesar de ser influenciada, naturalmente, por experiências anteriores do aluno. Por isso, cada estratégia de cálculo mental é única e analítica pois corresponde a modos de pensar individuais sobre os números e as suas relações. Como realça o autor, “o que o individual apreende sobre os números leva ao que cada um faz com eles” (Threlfall, 2002, p. 41). Por estas razões, reafirma que não faz

sentido ensinar a ser flexível ou ensinar estratégias flexíveis. Em vez disso, o autor considera importante um ensino que faça emergir as diferentes estratégias de cálculo mental a partir de tentativas reais de resolver problemas, que confronte estratégias usadas e que as compare com as características dos números envolvidos, de modo a desenvolver nos alunos uma rede forte de relações numéricas ancoradas no conhecimento dos números e das operações que lhes permita ter flexibilidade no cálculo mental.

O cálculo real proporcionará exemplos de partições dos números, fatorizações, encontrar aproximações e números perto dos dobros, e mostrará, também, o que pode ser feito com eles, quais as partes dos números que devem ser usadas, como é que as aproximações podem ser compensadas e assim sucessivamente. (Threlfall, 2002, p. 45)

No mesmo sentido que Threlfall (2002, 2009) há autores como Verschaffel, Torbeyns, de Smedt, Luwel e van Dooren (2007) que se referem à flexibilidade estratégica no cálculo mental como sinónimo de adaptabilidade. Estes investigadores definem e operacionalizam a flexibilidade estratégica “em relação a determinadas características das tarefas” (p. 17). Também Torbeyns, Ghesquière e Verschaffel (2009) descrevem o que denominam por perícia adaptativa, um termo que consideram muito próximo da flexibilidade estratégica, como sendo “a capacidade para resolver tarefas matemáticas de modo eficiente, criativo e flexível através de uma diversidade de estratégias adquiridas significativas” (p. 1). Contudo, a palavra flexibilidade associada ao cálculo mental é usada com vários significados – pode estar relacionada com os números envolvidos, com as características individuais ou com variáveis de contexto (a variável mais referida é o meio sociocultural) – e envolve o uso de estratégias que pressupõem o conhecimento dos números e das operações aritméticas (Threlfall, 2009). Ainda assim, de acordo com este investigador, o tipo de flexibilidade estratégica “mais valorizada na educação matemática é a flexibilidade na estratégia de cálculo quando a estratégia é afetada pelas características da tarefa” (p. 543).

Outros autores (Anghileri, 2003; Beishuizen; 2002; Buys, 2008; Thompson, 2003c), no mesmo âmbito que Threlfall (2002, 2009), mencionam o desenvolvimento da flexibilidade no cálculo mental não em termos do ensino de estratégias flexíveis mas considerando as condições que devem ser proporcionadas, na sala de aula, para o seu

crescimento em contexto real de cálculo. Por isso, segundo Thompson (2003c), quando se pretende o desenvolvimento da flexibilidade no cálculo mental é necessário ter em conta um conjunto de atributos que lhe estão subjacentes: (i) ter um bom conhecimento dos factos numéricos (de acordo com a idade respetiva); (ii) compreender o que é possível efetuar com os números e o que não é (inclui as propriedades dos números e das operações e as relações entre as operações); (iii) ter desenvolvido capacidades de contagem e de memorização de factos básicos (de acordo com a idade respetiva) e (iv) ter atitudes positivas durante o cálculo, tais como, pensar que tem de haver um caminho e não desistir rapidamente perante dificuldades.

Há, ainda, autores como Beishuizen (2002) e Buys (2008) que sugerem determinadas práticas específicas de sala de aula que auxiliam o desenvolvimento do cálculo mental e da sua flexibilidade, tais como a verbalização dos modos de raciocinar e dos passos seguidos pelos diferentes alunos na resolução de um mesmo problema, bem como a comparação e discussão das estratégias usadas. Neste contexto, Anghileri (2003) refere-se à importância de os alunos serem capazes de estabelecer conexões entre os números que os auxiliem na simplificação dos cálculos e de o professor desempenhar o papel de os ajudar a progredir na construção e no uso de factos e relações numéricas. Tal como esta autora, também Beishuizen (2002) e Buys (2008) problematizam o papel do professor no desenvolvimento do cálculo mental, sugerindo que este deve realçar aspetos do cálculo que considera importantes, estabelecer relações entre as diferentes estratégias que surgem e ajudar os alunos nas suas explicações e nas formas de registo dos cálculos efetuados. Referindo-se a um tipo de intervenção mais específica da parte do professor na sala de aula, Baek (1998) realça que a seleção que este faz dos números a incluir nos problemas de multiplicação parece estar relacionada com o tipo de algoritmo (na aceção de estratégias) que os alunos inventam.

A propósito do cálculo associado à multiplicação e divisão com multidígitos e das suas implicações no ensino, Fuson (2003a, 2003b) realça que, propor aos alunos a resolução de problemas, desenvolve não apenas a sua própria competência na resolução de problemas mas também as suas competências de cálculo. A fluência no cálculo, a compreensão sobre os diferentes métodos de cálculo e o seu uso são, segundo esta autora,

as componentes fundamentais do poder matemático. De acordo com essa perspectiva, os alunos devem conhecer e saber usar uma diversidade de métodos, que variam com os números envolvidos, o contexto, as suas características individuais e as da sua turma.

Associada ainda ao desenvolvimento do cálculo mental e em oposição à ideia do ensino de estratégias flexíveis, surge a ideia da invenção das estratégias pelos próprios alunos. As estratégias inventadas, que vão sendo aperfeiçoadas à medida que os alunos têm uma compreensão mais profunda sobre os números, as operações e as relações numéricas, são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo mental. Por isso, as crianças devem ser encorajadas a inventar as suas próprias estratégias pois, deste modo, têm uma melhor compreensão sobre os efeitos das operações e as características do sistema de numeração decimal, tais como os aspetos associados ao valor de posição (Heirdsfield et al., 1999). Ora, o aprofundamento desta compreensão é fundamental para o desenvolvimento do cálculo mental flexível (Heirdsfield & Cooper, 2004). Por isso, Heirdsfield et al. (2007) sugerem uma reflexão sobre o equilíbrio entre o ensino explícito e o desenvolvimento das próprias estratégias dos alunos, uma vez que estas assentam sobre o conhecimento que aqueles têm sobre os números e as operações.

Também Varol e Farran (2007) apontam para a necessidade de criar um ambiente de sala de aula em que os alunos sejam capazes de inventar as suas próprias estratégias. Segundo estes autores é necessário, para isso, privilegiar a resolução de problemas, em detrimento da realização de exercícios e, deste modo, as estratégias de cálculo mental não precisam de ser ensinadas. Pelo contrário, se em vez de serem construídas pelos alunos as estratégias de cálculo mental forem ensinadas, pode haver o perigo de estes as usarem como procedimentos mecanizados. Os autores realçam a importância do cálculo mental, enunciando algumas das suas potencialidades na compreensão dos números e das operações, ao explicitarem que “o cálculo mental auxilia os alunos a compreender como funcionam os números, como tomar decisões sobre procedimentos e como criar diferentes estratégias para resolver problemas de matemática” (Varol & Farran, 2007, p. 94).

Associado ao desenvolvimento do cálculo mental surge o aprofundamento de aspetos do sentido de número, uma vez que este “se refere ao conhecimento geral que

uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis ao lidar com números e com as suas operações” (McIntosh et al., 1992, p. 3). Em particular, considerando as componentes do sentido de número identificadas e caracterizadas pelos autores referidos, aquela que se relaciona mais fortemente com o cálculo mental é a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo.

A relação cálculo mental e sentido de número é realçada por diversos autores – uns referem a necessidade de ter um bom sentido de número para ter um cálculo mental flexível (Ell, 2001) e outros realçam que o desenvolvimento do cálculo mental promove, também, o crescimento do sentido de número (Baek, 1998; Callingham, 2005; Heirdsfield & Cooper, 2004). Finalmente, há aqueles que, como Varol e Farran (2007) e Hartnett (2007), evidenciam a inter-relação e interdependência entre o cálculo mental e o sentido de número, assumindo que o desenvolvimento de um promove o desenvolvimento de outro.

Ell (2001) destaca conexões concretas entre o cálculo mental e o sentido de número, ao afirmar que a flexibilidade no uso da estratégia parece estar muito ligada ao sentido de número, assim como a sua seleção está relacionada com as quantidades envolvidas, o modo como são colocadas as questões e a operação a ser efetuada. Por sua vez, Heirdsfield e Cooper (2004) afirmam que “o cálculo mental preciso pode ser o resultado do uso bem-sucedido de estratégias de cálculo mental (precisas e flexíveis) que evidenciam sentido de número.” (p. 444). Neste âmbito, os mesmos autores referem que o cálculo mental promove o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, se estes forem encorajados a inventar as suas próprias estratégias, privilegiando a resolução de problemas na sala de aula.

À semelhança dos autores anteriores, Baek (1998) explicita a dependência do desenvolvimento do sentido de número relativamente ao cálculo mental afirmando que “dando aos alunos oportunidades para inventar algoritmos o professor pode ajudá-los a desenvolver o seu sentido de número (p. 159). Aqui, o termo algoritmo é empregue na aceção de estratégias de cálculo. Também Callingham (2005) relaciona cálculo mental

com sentido de número, afirmando que, em termos da investigação, a identificação e descrição das estratégias de cálculo usadas pelos alunos é feita, frequentemente, num quadro de “sentido de número”. A autora descreve um programa realizado com alunos do ensino primário no qual estes desenvolvem o uso de estratégias de cálculo mental na resolução de problemas e, conseqüentemente, desenvolvem o seu sentido de número.

Encarando o sentido de número na perspectiva de McIntosh et al., (1992), os investigadores Varol e Farran (2007) associam a importância do seu desenvolvimento na sala de aula à correção e flexibilidade com que os alunos devem usar estratégias de cálculo mental para resolver problemas e, nesse, sentido discutem algumas questões associadas à proficiência no cálculo mental. Do seu ponto de vista, os alunos que são flexíveis no uso de estratégias de cálculo mental são capazes de selecionar modos mais eficientes de resolver determinados problemas porque têm um conhecimento conceptual associado aos números e às operações. Realçando a interligação entre sentido de número e cálculo mental, Varol e Farran (2007) afirmam que “os alunos dos níveis elementares devem desenvolver o sentido de número para serem bem-sucedidos no cálculo mental e vice-versa” (p. 91). Também Hartnett (2007) reforça a interdependência entre cálculo mental e sentido de número, ao afirmar que, por um lado, o uso flexível de estratégias de cálculo mental exige ter sentido de número e, por outro, o trabalhar os números de modo flexível cria oportunidades para o desenvolver.

3.4.5. Cálculo algorítmico e cálculo mental: Que relação na sala de aula?

Nas secções anteriores discuti alguns aspetos associados ao desenvolvimento do cálculo mental na sala de aula – as suas vantagens, como deve ser trabalhado e a sua relação com o desenvolvimento do sentido de número. Embora as potencialidades do cálculo mental sejam quase consensuais, é importante, também, discutir o papel do cálculo algorítmico na sala de aula e a relação que deve existir entre estes dois tipos de cálculo. O termo cálculo algorítmico é usado, aqui, na aceção de algoritmo usual.

Numa síntese sobre as vantagens e desvantagens do ensino dos algoritmos na sala de aula, Clarke (2005) aponta algumas justificações para o papel preponderante assumido por este tipo de cálculo. Assim, evidencia que os algoritmos:

- têm sido um conteúdo tradicional no ensino da matemática elementar, em todo o mundo e há muitos anos;
- são poderosos na resolução de determinados tipos de problemas, sobretudo os que envolvem números com muitos algarismos;
- são sínteses de procedimentos gerais de equações envolvendo as propriedades distributiva e associativa;
- são automáticos e podem ser ensinados sem ter que se analisar o que os suporta;
- são rápidos, conduzindo diretamente a uma resposta;
- fornecem um registo escrito do cálculo, possibilitando, aos alunos e professores, localizar eventuais erros;
- podem ser ensinados;
- para o professor, são fáceis de gerir e de avaliar (Clarke, 2005).

Também Usiskin (1998) elenca um conjunto de nove razões, algumas muito semelhantes às identificadas por Clarke (2005), que justificam a importância dos algoritmos:

- são poderosos;
- são fiáveis;
- são precisos;
- são rápidos;
- fornecem um registo escrito;
- estabelecem uma imagem mental;
- são instrutivos;
- podem ser usados noutros algoritmos;
- podem ser objeto de estudo (Usiskin, 1998).

Algumas das razões justificativas da importância dos algoritmos, referidas por Clarke (2005) e Usiskin (1998), têm pontos comuns com o que Bass (2003) denomina

por qualidades dos algoritmos: precisão, generalidade, eficiência, facilidade no uso correto e transparência. As duas primeiras qualidades são inerentes a todos os algoritmos e todas as outras são desejáveis à sua utilidade. O autor mencionado chama a atenção para uma falsa dicotomia, muito frequente, que contrapõe o conhecimento dos algoritmos tradicionais à compreensão dos conceitos. Segundo ele, uma das razões para que isso aconteça está relacionada com o facto de se dizer que a aprendizagem dos algoritmos tradicionais impede que os alunos desenvolvam fluência de cálculo. Ora o investigador afirma que o isto acontecer, ou não, depende do tipo de abordagem ao seu ensino que se use na sala de aula e não da aprendizagem dos algoritmos em si. Realça, ainda, que “devemos reconhecer a riqueza e utilidade matemática dos algoritmos e encontrar maneiras de ajudar os alunos a desenvolver a proficiência matemática adequada na sua construção e na sua análise” (Bass, 2003, p. 326). A importância e utilidade dos algoritmos são reforçadas pelo autor, ao afirmar que a compreensão dos algoritmos é central no desenvolvimento da fluência de cálculo dos alunos e que, por isso, o professor deve saber combinar a sua aprendizagem com a sua compreensão.

Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) apontam, igualmente, algumas potencialidades dos algoritmos, salientando a sua generalidade e eficácia, e realçam que “a procura e utilização de procedimentos algorítmicos é uma faceta importante da Matemática” (p. 13). Numa linha de raciocínio um pouco diferente, fazendo o contraponto entre as vantagens e inconvenientes do ensino dos algoritmos, Kamii e Dominick (1998) referem que uma das razões para ensinar os algoritmos está relacionada com o facto de estes serem, tradicionalmente, considerados como o método mais eficiente de cálculo. Contudo, a partir do momento em que os alunos inventam os seus próprios métodos de cálculo, esta razão não é sempre verdadeira. Por exemplo, quando se trata de multiplicar por 25, o algoritmo pode ser um método mais lento para efetuar o cálculo 16×25 do que usar o conhecimento que $4 \times 25 = 100$ e, por isso, $16 \times 25 = 400$. Uma segunda razão para ensinar os algoritmos, é fornecer um método, aos alunos com dificuldades, para chegar aos resultados. No entanto, frequentemente, ao usar um algoritmo, estes enganam-se nos procedimentos a seguir ou esquecem-se de um dos passos, e não têm conhecimento suficiente em que se baseiem para perceber isso. Além

disso, como referem ainda as mesmas autoras, quando se ensina os algoritmos aos alunos com dificuldades é-lhes transmitida a seguinte mensagem: “a lógica deste procedimento é demais para ti; por isso segue só estes passos e terás a resposta certa” (Kamii & Dominick, 1998, p. 139).

Apesar de todas as razões apresentadas, que têm justificado, e continuam a justificar, o ensino dos algoritmos aos alunos, há autores (Brocardo et al., 2003; Clarke, 2005; Kamii & Dominick, 1998; Usiskin, 1998) que destacam alguns “perigos” ou efeitos prejudiciais do seu ensino.

Clarke (2005) aponta alguns “perigos potenciais” (p. 93) em relação aos quais é necessário ter atenção durante o ensino dos algoritmos. Neste âmbito, o autor refere que os algoritmos:

- não correspondem à maneira como as pessoas tendem a pensar sobre os números. Por exemplo, ao realizar um algoritmo com o número 235, o algarismo três é tratado como três e não como 30;
- encorajam os alunos a desistir da sua própria maneira de pensar;
- não são os mais eficazes nem os mais facilmente aprendidos, apesar de tradicionalmente ensinados;
- tendem a levar a uma aceitação “cega” do seu uso, mesmo quando desnecessário, e dos resultados obtidos.

Na mesma linha que Clarke (2005) e identificando alguns dos mesmos perigos, também Usiskin (1998) alerta para os riscos associados ao uso dos algoritmos embora refira também, naturalmente, as propriedades que justificam a sua importância.

Um primeiro perigo está associado à aceitação cega dos resultados, consequência do facto de serem fiáveis. Por isso, frequentemente, os alunos não verificam os resultados obtidos. Um segundo perigo está relacionado com a sua “aplicação muito zelosa” (Usiskin, 1998) – considerando que os melhores algoritmos são poderosos, os alunos têm tendência para os aplicar intensivamente, mesmo quando tal não se justifica, por exemplo, para resolver um determinado cálculo que deve ser feito mentalmente, tal como multiplicar um número por 1000. Um terceiro perigo está associado à crença que os

algoritmos treinam a mente. Ora, de acordo com o autor, não há evidências que suportem esta convicção e, pelo contrário, os algoritmos afastam muitos alunos da Matemática. Finalmente, um quarto perigo relaciona-se com a incapacidade de o usar se a tecnologia para o algoritmo não está disponível. Este perigo verifica-se no caso dos algoritmos de papel e lápis mas, também, dos algoritmos com calculadoras ou computadores (Usiskin, 1998).

Kamii e Dominick (1998) realizaram um estudo sobre os efeitos dos algoritmos com crianças do 1.º ao 4.º ano, comparando os procedimentos usados por três grupos de alunos durante a resolução de problemas de adição e subtração. Estes três grupos de alunos foram organizados do seguinte modo: o “grupo dos não algoritmos” (os alunos não os conheciam), o “grupo dos algoritmos” (tinham-nos aprendido na escola) e o “grupo dos que tinham aprendido alguns algoritmos em casa, mas não na escola”. Os resultados obtidos a partir da comparação realizada permitem-lhes explicitar razões pelas quais os algoritmos são prejudiciais: “(1) encorajam as crianças a desistir do seu próprio pensamento e (2) fazem-nas desaprender o que sabem sobre o valor de posição, impedindo o desenvolvimento do seu sentido de número” (p. 135). A primeira razão pode ser ilustrada com o facto de as crianças, quando inventam os seus próprios procedimentos, trabalharem da esquerda para a direita, o que é incompatível com o que fazem quando passam a usar o algoritmo e se tem de operar da direita para a esquerda. A segunda razão está relacionada com o facto de as crianças, ao empregarem o algoritmo, poderem perder a percepção que, por exemplo, o algarismo cinco pode valer 50 ou 500 ou outro valor, de acordo com a posição que ocupa num determinado número. Este foi um erro frequentemente cometido pelos alunos que, no estudo referido, pertenciam ao grupo dos algoritmos.

As dificuldades manifestadas pelos alunos quando têm de utilizar os algoritmos das operações são relatadas por diversos investigadores (Anghileri, 2003; Fuson, 1992b, 2003a, 2003b; Thompson, 2003b). Muitas vezes, essas dificuldades existem porque os alunos interpretam um número com mais do que um dígito como se fossem números com apenas um dígito, colocados ao lado uns dos outros. Anghileri (2003) refere alguns dos erros típicos cometidos por alunos quando têm de calcular com números “grandes”

usando os algoritmos da multiplicação e da divisão e que parecem ser o resultado da utilização de regras que não foram bem compreendidas. Por isso, a autora aponta para um trabalho em torno do sentido de número relacionado com a multiplicação e a divisão, do desenvolvimento de estratégias de aritmética mental e da flexibilidade da sua utilização, caminhando no sentido da eficiência, mas com compreensão. Segundo a mesma investigadora, é possível ensinar os algoritmos da multiplicação e da divisão aos alunos, após estes serem capazes de usar processos de estimação, de calcular somas e produtos parciais e de adicionar resultados parcelares do mesmo problema. Os tipos de erros cometidos pelos alunos reforçam a sua convicção sobre a aprendizagem das operações multiplicação e divisão de acordo com os pressupostos enunciados (Anghileri, 2003).

Para além das desvantagens associadas ao ensino precoce dos algoritmos e dos seus potenciais perigos, Clarke (2005) destaca, ainda, o modo como os algoritmos são trabalhados na sala de aula. O autor afirma que a forma como são ensinados desencoraja o uso do sentido de número para estimar antes de calcular ou para avaliar a razoabilidade de um resultado obtido através de um cálculo algorítmico. Referindo-se, também, ao ensino dos algoritmos e, especificamente, ao algoritmo da multiplicação, Ma (2009) comparou o modo como os professores americanos e chineses pensam sobre ele, o ensinam na sua sala de aula e trabalham com as crianças que cometem erros ao realizá-lo. De acordo com o estudo que desenvolveu, verificou que os professores chineses ensinam o algoritmo da multiplicação de modo conceptual, baseando-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e trabalhando com cada uma das subcomponentes do problema inicial, usando, para isso, a disposição retangular. Pelo contrário, os professores americanos encaram o algoritmo como um conjunto de procedimentos que obedece a determinadas regras e interpretam os erros dos alunos como um problema de transporte ou de alinhamento dos algarismos. Por isso, ajudam-nos a ultrapassar os seus erros recordando-lhes as regras a aplicar ou sugerindo-lhes o uso de papel pautado de modo a manter os algarismos bem alinhados.

McIntosh (2006) fez o paralelismo entre a percentagem do uso do cálculo mental e dos algoritmos na vida adulta de todos os dias e o tempo gasto na sala de aula com cada um destes tipos de cálculo. Nesse âmbito refere que os adultos usam o cálculo mental em

três quartos dos cálculos que precisam de fazer e apenas em cerca de 15% desses cálculos recorrem a um algoritmo. Considerando este aspeto, o tempo gasto com o cálculo mental e os algoritmos na sala de aula deve ser repensado, de modo a refletir o que acontece “fora da escola”.

Dowker (1992), indo mais longe do que McIntosh (2006), colocou diversos problemas de multiplicação e divisão a 44 matemáticos profissionais e constatou que aqueles os resolveram usando estratégias de cálculo variadas que selecionaram de acordo com os números envolvidos. Na maior parte dos casos os matemáticos olharam para os números e jogaram com as relações entre eles, selecionando estratégias eficientes e criativas, utilizando os números de forma “amigável”. Além disso, considerando o conjunto de todos os matemáticos e de todos os problemas, apenas foram usados algoritmos em 4 % das respostas.

Outros autores, como Clarke (2005), usam um argumento semelhante ao de McIntosh (2006) para reposicionar o tempo destinado ao cálculo algorítmico na sala de aula, comparando-o com o seu uso no dia-a-dia. Clarke (2005) menciona que, na vida adulta, as pessoas usam muito menos o cálculo algorítmico que os outros tipos de cálculo, uma vez que, na maior parte das situações com que se deparam, é necessário realizar, apenas, um cálculo por estimação. Este argumento, denominado de relevância do algoritmo relativamente a outros tipos de cálculo, surge também como um indicador para reduzir o peso do cálculo algorítmico no ensino da Matemática nos primeiros anos. Sobre este assunto o autor afirma mesmo que os algoritmos convencionais não devem ser introduzidos nos primeiros cinco anos da escolaridade.

Relacionando cálculo mental com cálculo algorítmico, Clarke (2005) refere que os algoritmos formais devem ser introduzidos apenas depois de os alunos terem um conhecimento sólido associado ao valor de posição e terem desenvolvido estratégias de cálculo mental com números com dois e três algarismos. Além disso, os alunos devem inventar os seus próprios algoritmos, que serão discutidos e partilhados com todos os colegas, dando a possibilidade aos que não os conseguem criar de os poderem escolher de um leque de opções. É de notar que o autor se refere a algoritmos inventados na aceção de procedimentos que são suficientemente eficientes, de modo a não haver

grandes perdas de tempo, matematicamente válidos e generalizáveis a um certo tipo de problemas (Clarke, 2005). Pensando no modo como devem ser introduzidos, o mesmo investigador sugere que sejam propostos diferentes problemas de um certo tipo, que se usem números cada vez maiores e que os alunos os resolvam como quiserem. Depois, através da partilha e discussão, os alunos vão avaliando, gradualmente, a sua validade matemática, a sua eficiência e a sua generalização. Deste modo, quando forem confrontados com os algoritmos tradicionais “estarão numa posição sólida para compararem as várias possibilidades numa base justa, sem se sentirem pressionados para se descartarem de tudo o que aprenderam” (Clarke, 2005, p. 98).

De modo a desenvolver a compreensão dos alunos sobre métodos de cálculo, Fuson (2003b) propõe que, na sala de aula, sejam trabalhados métodos acessíveis de multiplicação e de divisão (na aceção de algoritmo). No que se refere à multiplicação, esta proposta implica associá-la a um modelo poderoso, a disposição retangular, e compreender os efeitos da multiplicação por um, dez e cem. Ao representar um produto através da disposição retangular, decompondo os fatores em centenas, dezenas e unidades, o tamanho dos quadrados e retângulos associados dá indicações aos alunos sobre a grandeza dos produtos parciais, calculando em primeiro lugar o produto maior, mais fácil de alinhar e calculando naturalmente da esquerda para a direita. Em termos de trajetória de aprendizagem, Fuson sugere que, inicialmente, se use a disposição retangular indicando todos os passos, dezena a dezena, caminhando no sentido da simplificação, separando apenas as dezenas das unidades e evoluindo para o uso do algoritmo acessível. No caso de números com mais de dois dígitos todo o trabalho a desenvolver é apenas uma extensão do sugerido. Comparando com o algoritmo tradicional, em que os alunos têm, alternadamente, de multiplicar e adicionar, neste é necessário primeiro multiplicar e depois adicionar todos os produtos parciais. Desta forma evitam-se alguns erros e, mesmo que posteriormente usem um método mais simplificado, compreendem o seu significado (Fuson, 2003b).

No que diz respeito à divisão, a proposta de Fuson (2003b) para utilizar métodos acessíveis de cálculo é análoga à veiculada para a multiplicação. Estes métodos recorrem ao uso do modelo retangular e baseiam-se na compreensão sobre a multiplicação e a sua

relação como inversa da divisão. No cálculo associado é necessário usar a estimação e recorrer a produtos conhecidos e acessíveis para os alunos. Por exemplo, estes podem recorrer a produtos com dobros ou com múltiplos de dez, relacionando-os com as subtrações sucessivas do algoritmo e permitindo-lhes, mais rapidamente, encontrar a solução. Assim, à semelhança do proposto para a multiplicação, a ideia é partir do uso do modelo retangular, discriminando, inicialmente, todos os passos e caminhar no sentido da utilização do algoritmo acessível, relacionando-o diretamente com o modelo indicado.

Os métodos acessíveis de cálculo no caso da multiplicação dependem, sobretudo, da fluência com a adição e a multiplicação e, no caso da divisão, também da facilidade com as subtrações sucessivas. Por isso é realçada a importância do trabalho a realizar na sala de aula, baseado em abordagens conceptuais que facilitem a compreensão e a fluência do cálculo, associando-as ao poder matemático dos alunos e às exigências do séc. XXI (Fuson, 2003a, 2003b).

McIntosh (1998) refere que, se na sala de aula não forem enfatizadas questões associadas à rapidez e precisão nos cálculos a realizar e se for dado tempo às crianças, estas tentam, e muitas vezes conseguem-no, inventar algoritmos (na aceção de estratégias de cálculo mental). Por isso sugere que os alunos não sejam pressionados com a rapidez de resposta aos cálculos solicitados e, em vez disso, lhes seja dado tempo para os realizarem. Depois de estes terem efetuado um determinado cálculo, é fundamental, também, não focar a atenção apenas na resposta certa ou errada mas, em alternativa, pedir a três ou quatro alunos para explicitarem o seu raciocínio. Deste modo estes apercebem-se que não existe apenas uma única maneira de calcular e, ao ouvirem discutir vários algoritmos mentais, poderão seleccionar “aquele em que confiam e que compreendem melhor” (p. 47). Esta forma de abordar os algoritmos mentais, ensinando-os construtivamente, foca-se no desenvolvimento do cálculo mental, partindo dos métodos próprios das crianças, da sua explicitação e discussão, e não do ensino explícito dos melhores algoritmos de cálculo. McIntosh (1998) sintetiza as características das experiências de cálculo mental que o professor deve proporcionar às crianças e como o pode fazer – “tornar as experiências de cálculo mental agradáveis para todas as crianças através da mudança de ênfase do avaliar o seu desempenho para o apoiar e encorajar as

suas tentativas de pensar por si próprias” (p. 47). O autor avança mesmo com propostas concretas para a prática do professor na sala de aula, baseadas no trabalho desenvolvido por centenas de professores australianos, sugerindo modos de abordagem à discussão da resolução de problemas e questões que podem ser colocadas aos alunos no sentido de estes explicitarem os seus raciocínios. Referindo-se a documentos curriculares australianos, Hartnett (2007) destaca que aqueles sugerem que o professor, na sala de aula, dê uma maior ênfase ao cálculo mental e menos aos algoritmos tradicionais.

Também Brocardo et al. (2003) explicitam propostas que favorecem o desenvolvimento do cálculo mental na sala de aula, destacando que “uma alternativa ao uso quase obrigatório do algoritmo para resolver os problemas ou exercícios numéricos é a de estabelecer que os alunos podem escolher os seus próprios processos” (p. 14). Por seu lado, Kamii e Dominick (1998) contrapõem o ensino dos algoritmos a um ensino em que as crianças desenvolvem os seus próprios métodos, de modo construtivo e gradual, com confiança nas suas capacidades para resolver cada passo de um problema.

Em síntese, é incontestável a importância do cálculo algorítmico, considerando as suas características e potencialidades associadas à essência da própria Matemática. Contudo, vários autores apontam para os perigos de se privilegiar este tipo de cálculo, sobretudo quando os alunos ainda não dominam os números e as suas propriedades nem desenvolveram estratégias de cálculo mental. Estes devem começar por inventar os seus próprios métodos de cálculo, explicitá-los e discuti-los com os colegas sob a orientação do professor e, só posteriormente, depois de perceberem como funciona o sistema de numeração decimal estão em condições de compreender os algoritmos formais das operações aritméticas.

3.5. Aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número nas orientações curriculares

Esta secção está organizada em torno de aspetos-chave associados à aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de

número. São utilizados como fontes documentos distintos de natureza curricular de proveniências diversas, sendo privilegiado, no caso português, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007), atualmente em vigor, mas não à data da recolha de dados deste estudo.

3.5.1. Aprendizagem da multiplicação e desenvolvimento do sentido de número

Presentemente, as orientações curriculares gerais ou mesmo os currículos de Matemática dos primeiros anos de escolaridade de muitos países, no que respeita à temática dos Números e Operações, revelam preocupações associadas ao desenvolvimento do sentido de número. Em alguns casos, essa preocupação é tornada explícita, como acontece no caso do PMEB, em que o propósito principal de ensino do tema Números e Operações, do 1.º ciclo (e estendendo-se ao 2.º e 3.º ciclos) é:

Desenvolver nos alunos o sentido do número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. (ME, 2007, p. 13)

O desenvolvimento do sentido de número surge, assim, a par da compreensão dos números e das operações e do desenvolvimento do cálculo mental, bem como da sua aplicação em situação de resolução de problemas. Associados a um dos propósitos gerais do ensino da Matemática sobre a resolução de problemas, referido no PMEB, são mencionados objetivos específicos onde podem ser incluídos alguns dos aspetos do sentido de número. Assim, realça-se que os alunos “devem ser capazes de compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas”, “apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam” e, ainda, “monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes” (ME, 2007, p. 5). Além disso, no mesmo documento é assumida uma perspetiva que inter-relaciona o desenvolvimento do sentido de número com o desenvolvimento do cálculo mental, ao afirmar-se que “o cálculo mental tem de

ser desenvolvido desde o início do 1.º ciclo e está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número” (ME, 2007, p. 10).

Ainda no caso de Portugal, outros documentos de natureza curricular anteriores ao atual Programa, tais como as publicações Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências essenciais (ME, 2001) e A Matemática no Ensino Básico (Abrantes et al., 1999) destacavam, já, a importância do desenvolvimento do sentido de número dos alunos, embora não usassem a expressão “sentido de número” de modo explícito, tal como neste Programa em vigor.

Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), dos Estados Unidos, considera que “a compreensão dos números e das operações, o desenvolvimento do sentido de número e a aquisição do cálculo aritmético constituem o cerne da educação matemática para os primeiros anos do ensino básico” (2007, p. 34). Outros documentos de natureza curricular, holandeses, australianos e ingleses não referem especificamente o desenvolvimento do sentido de número como propósito geral da aprendizagem da Matemática nos primeiros quatro ou seis anos de escolaridades (1.º nível de escolaridade) mas a sua importância está subjacente aos objetivos que propõem para o tema Número e Operações. Por exemplo, um dos objetivos a alcançar no final do ensino primário holandês ao nível da Matemática, incluído nos *Core goals mathematics end primary school*, estabelecidos em 1998 e produzidos pelo Ministério da Educação, Cultura e Ciências, é que “os alunos devem ser capazes de realizar tarefas de aritmética mental simples, de modo eficiente usando o seu conhecimento sobre as várias operações” (van den Heuvel-Panhuizen, 2008, p. 249). Ora, a referência ao modo eficiente de calcular mentalmente, tendo subjacente o conhecimento sobre as operações, parece pressupor uma certa maneira de encarar os números e as operações que se enquadra numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

3.5.2. A operação multiplicação

De acordo com o NCTM, na sua explicitação das Normas para os Números e as Operações, todos os alunos, do pré-escolar ao 12.º ano (K-12), devem compreender o significado das operações e o modo como estas se relacionam entre si, calcular fluentemente e fazer estimativas plausíveis (NCTM, 2007). No que diz respeito, em particular, à operação multiplicação de números naturais, o NCTM preconiza para os três primeiros anos (K-2) um trabalho ao nível da sala de aula que promova a compreensão dos alunos sobre as diversas situações associadas à multiplicação, realçando as que correspondem à repetição de grupos iguais (sentido aditivo da multiplicação). Este trabalho deve ser ancorado na exploração de tarefas com contextos diversificados, de modo a contribuir para a compreensão desta operação. Do 3.º ao 5.º ano, o trabalho a realizar com os alunos deve promover a compreensão aprofundada desta operação, alargando progressivamente o universo numérico, utilizando números cada vez maiores bem como números racionais não negativos na sua representação decimal. O desenvolvimento das ideias e procedimentos associados deve permitir aos alunos a compreensão sobre os vários significados da operação (sentidos da multiplicação), a resolução de problemas que envolvam diferentes formas de calcular (usando cálculo exato ou aproximado), adequadas a cada situação, e a fazer estimativas plausíveis (NCTM, 2007).

No mesmo documento curricular (NCTM, 2007), para além dos contextos de multiplicação associados à repetição de grupos iguais, a que é dada ênfase nos três primeiros anos, é sugerida a exploração de outras situações que ampliem o conhecimento sobre esta operação, sendo referidas, explicitamente, as relacionadas com preços, comparações e combinações. O modelo de área e a sua utilização são apontados como uma forma de tornar evidentes para os alunos as propriedades da multiplicação, em particular, a propriedade comutativa e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração. A relação entre a multiplicação e a divisão deve ser realçada e os procedimentos usados pelos alunos devem ter subjacentes a compreensão e a utilização das propriedades da multiplicação (NCTM, 2007).

No âmbito da implementação da Estratégia Nacional da Numeracia vigora, desde 1999, em Inglaterra, *The National Curriculum for England*. Nele é referido, tal como nas Normas do NCTM, que a compreensão da operação multiplicação, no 1.º nível (1.º e 2.º ano) deve estar associada à adição de parcelas repetidas. Nos anos seguintes (3.º ao 5.º ano – 2.º nível), a compreensão da multiplicação inclui a sua relação com outras operações, a seleção, perante um problema, desta operação para o resolver e, ainda, o estabelecimento de analogias entre problemas cuja resolução pode ser similar (DfEE, 1999).

Tal como os documentos curriculares supramencionados, também o Currículo australiano da responsabilidade da *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* (ACARA) realça a importância da compreensão da operação multiplicação e do reconhecimento de situações a ela associadas (ACARA, 2010). Contudo, há a registar algumas diferenças. Enquanto nos currículos anteriores só a partir do 3.º ano são referidas outras situações de multiplicação diferentes das associadas à adição repetida neste, logo no 2.º ano, são mencionados o reconhecimento e a representação desta operação usando também grupos e a disposição retangular. No 3.º e 4.º anos é sugerido o aprofundamento da compreensão da multiplicação associada à resolução de problemas, através da utilização de estratégias eficazes de cálculo mental e escrito, bem como de meios tecnológicos adequados (ACARA, 2010).

As metas a atingir pelos alunos holandeses (5 aos 12 anos), no que respeita à multiplicação, não são muito diferentes do que já foi referido a propósito das orientações curriculares do NCTM e dos currículos de Matemática de Inglaterra e da Austrália. No final do ensino primário, os alunos devem conhecer e ser capazes de utilizar esta operação, tanto ao nível de procedimentos *standard* como ao nível de procedimentos alternativos. Devem, ainda, ser capazes de realizar tarefas de cálculo mental, de modo eficiente e utilizando o seu conhecimento sobre as várias operações aritméticas (van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

No caso português, é importante destacar as semelhanças e diferenças mais relevantes, no que respeita à compreensão da operação multiplicação, entre o atual PMEB (ME, 2007) e o Programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico

(PM1CEB) (Ministério da Educação. DGEBS, 1990), vigente na altura da recolha de dados da presente investigação.

O PMEB realça como aspetos fundamentais a serem desenvolvidos nos dois primeiros anos do 1.º ciclo, a compreensão da multiplicação no sentido aditivo (tal como o NCTM e o currículo nacional de Inglaterra) e no sentido combinatório. O anterior Programa refere a “descoberta” da multiplicação a partir da adição de parcelas iguais e a determinação de quantidades dispostas de forma retangular. Nos 3.º e 4.º anos, a multiplicação com números naturais era ampliada para números maiores, sendo dada ênfase à procura de estratégias diferentes para efetuar um mesmo cálculo, à valorização do cálculo mental e ao uso do algoritmo (Ministério da Educação. DGEBS, 1990). Nos mesmos anos de escolaridade, no PMEB, o conhecimento da multiplicação, tal como para as restantes operações aritméticas, aparece associado à compreensão dos seus efeitos nos números, à resolução de problemas em contextos diversos e ao uso de estratégias de cálculo mental baseadas nas suas propriedades. Além disso, a sua compreensão está, ainda, associada à resolução de problemas em que se tira partido da sua relação com a operação divisão (ME, 2007).

Associadas ao novo Programa de Matemática do Ensino Básico foram definidas Metas de Aprendizagem, no âmbito do projeto intitulado Estratégia Global de Desenvolvimento do Currículo Nacional (ME, 2010) para todas as áreas disciplinares, ou disciplinas, do Currículo do Ensino Básico. No que respeita às Metas de Aprendizagem de Matemática do 1.º ciclo foi definida uma associada à compreensão das operações com números naturais e racionais não negativos na representação decimal, onde se refere, no que concerne à multiplicação, o saber usá-la nos sentidos aditivo e combinatório, no final de 2.º ano.

Um aspeto relacionado com a aprendizagem da multiplicação e que parece ser consensual, tanto no Programa anterior como no atualmente em vigor em Portugal, é a preocupação de envolver os alunos na resolução de problemas em contextos diversos. No Programa anterior a resolução de problemas é encarada como a atividade central da disciplina de Matemática, sendo considerada um eixo orientador de todo o trabalho a

desenvolver, enquanto no PMEB o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um dos objetivos gerais do ensino desta disciplina.

A preocupação de desenvolver a compreensão da multiplicação a partir da resolução de problemas em que esta operação surge em contextos diversificados é patente, não só nos Programas portugueses mas, também, nos documentos curriculares e currículos analisados anteriormente (ACARA, 2010; DfEE, 1999; NCTM, 2007; van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

Nos vários currículos e documentos curriculares mencionados regista-se a preocupação dos autores com as diferentes formas de cálculo associadas à multiplicação. No currículo inglês, por exemplo, é referida a importância de, na resolução de problemas os alunos serem capazes de selecionar métodos de cálculo sensíveis e de relacionarem as características de um determinado problema com a escolha da estratégia a utilizar (DfEE, 1999). Por sua vez, no currículo australiano, é realçada a pertinência de desenvolver estratégias eficazes de cálculo mental e escrito, no contexto da resolução de problemas (ACARA, 2010).

No currículo australiano é sempre referido o uso de estratégias eficazes de cálculo mental e escrito, sem haver uma alusão clara à utilização de algum algoritmo, ao contrário do que acontece no currículo inglês, em que existe uma referência explícita a métodos escritos para a “multiplicação longa”, o que sugere o uso de um algoritmo (ACARA, 2010). Por seu lado, no documento curricular holandês, apesar de não se utilizar o termo algoritmo, é mencionado que os alunos, no final do ensino primário (12 anos), devem conhecer e saber usar procedimentos padronizados e alternativos, para além de serem capazes de usar estratégias de cálculo mental, de modo eficaz (van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

No documento curricular americano em análise, relativamente ao cálculo associado à multiplicação, é explicitado que os alunos devem desenvolver fluência no cálculo multiplicativo elementar e também ser capazes de selecionar métodos e ferramentas apropriados para calcular com números inteiros, de acordo com o contexto e a natureza do cálculo – cálculo mental, estimação, com calculadora e com papel e lápis.

Em articulação com o desenvolvimento da fluência no cálculo surge o conhecimento da estrutura do sistema de numeração decimal e das propriedades da multiplicação (NCTM, 2007).

Nos Programas de Matemática portugueses aqui analisados, o cálculo desempenha um papel fundamental. No PMEB, é referido que as estratégias de cálculo mental e escrito, associadas à operação multiplicação devem ter como suporte a sua representação horizontal (ME, 2007), ao contrário do que era preconizado no anterior Programa. Aí, os métodos de cálculo sugeridos, logo nos primeiros anos, eram o cálculo mental e o algoritmo tradicional. Era também mencionado o recurso às propriedades da multiplicação, ainda que de modo intuitivo, na utilização de diferentes estratégias de cálculo mas estas não eram explicitadas, de maneira a dar exemplos ao professor para as trabalhar na sala de aula. No Programa anterior português, nos 3.º e 4.º anos, a multiplicação com números naturais era ampliada para números maiores, sendo dada ênfase à procura de estratégias diferentes para efetuar um mesmo cálculo e à valorização do cálculo mental (Ministério da Educação. DGEBS, 1990). Nos mesmos anos de escolaridade, também o PMEB valoriza o cálculo mental e, contrariamente, ao Programa anterior, explicita e concretiza, através de exemplos, o modo como este deve ser trabalhado, baseado nas propriedades da operação.

Associadas ao PMEB, as Metas de Aprendizagem definidas para o final do 4.º ano de escolaridade referem-se ao uso de estratégias de cálculo mental baseadas nas propriedades das operações, bem como à compreensão e realização dos algoritmos respetivos (ME, 2010). Ainda assim, a aprendizagem dos algoritmos e, em particular, do algoritmo da multiplicação é encarada de maneira distinta, quando se compara o PMEB com o anterior Programa. Apesar de se considerar, também, pertinente no Programa atual a aprendizagem do algoritmo convencional, tal como antes, esta é realizada de modo substancialmente diferente. Nos primeiros anos valoriza-se o cálculo numérico de representação horizontal, surgindo o algoritmo convencional mais tarde do que o preconizado no Programa anterior. No PMEB sugere-se a sua aprendizagem depois de os alunos terem usado formas de cálculo informais e de terem construído os “seus próprios algoritmos”. Além disso, perspetiva-se um desenvolvimento gradual da aprendizagem

dos algoritmos, havendo lugar para “realizar os algoritmos usuais com alguns passos intermédios” (ME, 2007, p. 14), evoluindo, progressivamente, para a sua representação tradicional, mais simplificada e abstrata. Este caminho de desenvolvimento gradual dos algoritmos corresponde ao que é denominado no Programa por “aprendizagem dos algoritmos com compreensão, valorizando o sentido de número” (p. 14).

A construção e memorização das tabuadas constituem propostas significativamente diferentes nos dois Programas portugueses de Matemática do 1.º ciclo, o anterior e o presente. No Programa anterior do 1.º ciclo sugere-se a construção e memorização das tabuadas por ordem sequencial dos números e com base no sentido aditivo da multiplicação, iniciando o trabalho pela tabuada do número dois e continuando pelas tabuadas dos números três, quatro, cinco, seis e dez, nos dois primeiros anos. Por seu lado, o PMEB defende a sua construção baseada na compreensão sobre a operação e as suas propriedades, propondo inicialmente a construção da tabuada dos números dois, cinco e dez e, a partir daí, construir a do número quatro a partir da tabuada do número dois e a tabuada do número seis após a do número três. Desta forma, o trabalho que é proposto ser desenvolvido baseia-se no estabelecimento de relações entre os vários produtos, dando especial destaque às que envolvem dobros. Assim, recorrendo às propriedades da multiplicação e às relações numéricas, os alunos podem construir e reconstruir quase todas as tabuadas. Um outro aspeto sugerido, também, pelo PMEB, e que constitui uma inovação relativamente ao anterior, é a construção de tabuadas para além do número dez, de modo a proporcionar aos alunos um aprofundamento na compreensão da operação multiplicação e suas propriedades (ME, 2007). Há, inclusivamente, no final do 4.º ano, uma submeta, associada à meta sobre o saber operar com números naturais e racionais não negativos na forma decimal, que explicita a construção das tabuadas dos números 11 e do 12, justificando o processo de construção utilizado (ME, 2010).

3.5.3. Relação entre a multiplicação e a divisão

A explicitação da relação entre as operações multiplicação e divisão e o seu uso em situações de cálculo, aspetos compatíveis com a perspetiva geral de desenvolvimento do sentido de número, são referidos na maioria dos documentos de natureza curricular, quando se reportam à aprendizagem destas operações.

O NCTM refere, numa das suas normas relativas ao Número e Operações para os anos 3-5, a compreensão sobre os significados das operações e sobre o modo como se relacionam umas com as outras, apontando especificamente “identificar e usar as relações entre as operações, tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas” (NCTM, 2007, p. 148). Também nas metas a atingir no final do 3.º ano, definidas pelo currículo australiano, é detalhada a conexão entre a multiplicação e a divisão. A sua aplicação em termos dos factos básicos de divisão, relacionando-os com os da multiplicação é referida nas questões associadas ao cálculo sobre estas duas operações (ACARA, 2010). A mesma relação e a sua potenciação em situações de cálculo são, ainda, mencionadas no documento curricular inglês analisado (DfEE, 1999).

A importância do conhecimento da relação inversa entre a multiplicação e a divisão e a sua aplicação em situação de cálculo é mencionada, ainda, por Treffers e Buys (2008) num documento de natureza curricular que pretende concretizar uma trajetória de ensino e aprendizagem de modo a alcançar as metas estabelecidas (van den Heuvel-Panhuizen, 2008). Aqueles autores realçam o facto de, no início da sua aprendizagem, a divisão poder surgir informalmente, não apenas a partir de subtrações sucessivas mas, também, a partir de uma exploração geral da multiplicação em que surge como inversa desta operação. Além disso, sugerem uma abordagem da divisão através da sua relação com a multiplicação, potencializando o conhecimento que os alunos já têm sobre esta última e usando-a, também para verificar os resultados obtidos (Treffers & Buys, 2008).

No PMEB, um dos objetivos específicos do tema Números e Operações para o 3.º e 4.º ano é “Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão” (ME, 2007, p. 18), destacando a conexão entre as duas operações e a sua

utilização em situação de resolução de problemas. Foi, também, esta a posição por mim assumida no estudo que desenvolvi. Assim, na experiência de ensino que delineei, em conjunto com a professora da turma participante no estudo, assumi a importância desta relação, que foi realçada e explicitada na resolução de problemas de divisão.

Em síntese, este capítulo discute algumas perspectivas associadas à aprendizagem das operações aritméticas, focando, sobretudo a multiplicação e a divisão. Relacionados com as operações adição e subtração são analisados estudos empíricos que identificam e caracterizam as estratégias usadas pelos alunos tanto no caso de números-dígito como no que se refere a números multidígitos.

Sobre as operações multiplicação e divisão destacam-se investigações associadas a tipos semânticos ou modelos de situações e relativas a modelos intuitivos. Estas duas linhas de investigação estão interligadas, apesar de poderem ser identificadas diferenças entre elas. São discutidos, ainda, estudos empíricos associados à inventariação e caracterização das estratégias usadas pelos alunos. Identificam-se categorizações de estratégias mais específicas, associadas à multiplicação ou divisão e outras mais globais, relativas às quatro operações aritméticas. Da análise comparativa das várias categorizações apresentadas por vários investigadores, emergem aspetos comuns, apesar da diversidade, por vezes, das designações utilizadas.

Os diferentes estudos relativos ao cálculo mental, ao cálculo algorítmico e ao sentido de número usam termos e significados nem sempre coincidentes. Assim, é feita uma discussão baseada nas diferentes perspectivas e explicitado o seu entendimento neste estudo. São debatidas, ainda, as posições que diferentes investigadores assumem relativamente ao cálculo mental e ao cálculo algorítmico. Também os termos métodos, estratégias, algoritmos e procedimentos são utilizados na investigação e em documentos curriculares, umas vezes com significados distintos e, outras, como sendo sinónimos. No sentido da sua clarificação são confrontados entendimentos diferentes e é justificada a opção assumida neste estudo pelo termo procedimento.

A relação de interdependência entre cálculo mental e sentido de número sobressai das investigações analisadas. Alguns autores evidenciam a necessidade de ter um bom

sentido de número para ter um cálculo mental flexível, enquanto outros realçam que o desenvolvimento do cálculo mental promove, também, o desenvolvimento do sentido de número. As potencialidades do cálculo mental são incontestáveis e destacadas por numerosos investigadores, que justificam o papel preponderante que deve ter na sala de aula. Ainda assim, há um lugar, também, para o cálculo algorítmico considerando as suas características associadas à essência da própria Matemática.

A terminar, é feita uma discussão sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número baseada na análise comparativa de orientações curriculares de vários países. Aí é realçada a importância do desenvolvimento do sentido de número, em geral e, especificamente, associado à aprendizagem da multiplicação. Destacam-se aspetos como a aprendizagem da multiplicação com compreensão, o papel do cálculo mental e a relação que deve ser estabelecida entre esta operação e a divisão.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo descrevo e justifico as opções metodológicas do estudo que realizei, o contexto e a escolha dos seus participantes, os métodos e o processo de recolha de dados e, finalmente, o processo de análise dos dados.

Na secção sobre as opções metodológicas estas são identificadas e fundamentadas, em articulação com os propósitos do estudo e as suas principais características. Nesse âmbito optei por realizar uma experiência de ensino numa sala de aula do 3.º ano, modalidade de investigação inserida na *design research*, que discuto e justifico.

Na secção relativa ao contexto e aos participantes no estudo justifico a seleção da professora e, consequentemente, da turma, explicitando os critérios da sua escolha e caracterizo, resumidamente, a escola do 1.º ciclo do Ensino Básico e o Agrupamento de escolas a que pertence. Efetuo, ainda, uma breve caracterização da turma que se constitui como unidade de análise desta investigação. O papel desempenhado pela professora, no decurso da investigação realizada, é descrito numa das secções deste capítulo.

Uma outra secção é dedicada a apresentar e justificar os métodos de recolha de dados que incluem observação participante, complementada com gravações vídeo, recolha documental e conversas informais. Nesta secção fundamento, também, a diversidade das fontes de informação e as técnicas adotadas de modo a garantir a validade de um estudo desta natureza. Discuto, ainda, os critérios de qualidade associados a uma investigação com uma metodologia de *design research*, em particular, na modalidade de experiência de ensino.

Nas últimas secções relato o processo de recolha de dados bem como a sua análise. O processo de recolha é descrito em detalhe, explicitando o modo como este se realizou em termos temporais. Efetivamente, uma vez que uma das componentes deste estudo se relaciona com a evolução dos procedimentos dos alunos, o tempo assume, aqui, bastante importância. Na secção dedicada ao processo de análise dos dados identifico as diferentes fases de análise, explicitando e justificando, detalhadamente, as opções que foram sendo tomadas em cada uma das etapas.

4.1. Opções metodológicas

Nesta secção fundamento as principais opções metodológicas que foram tomadas, de modo a serem consistentes com as características e os objetivos do estudo que pretendia realizar. Um dos propósitos deste estudo é compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. O outro propósito do estudo consiste em descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Considerando estes propósitos, foi tomada a opção de realizar uma experiência de ensino, que foi concretizada na sala de aula através de uma trajetória de aprendizagem de acordo com um conjunto de pressupostos, explicitados em detalhe no capítulo

seguinte. De acordo com as suas características particulares a experiência de ensino realizada insere-se num tipo de investigação denominada por *design research*¹⁷.

4.1.1. Design research

O termo *design experiment* surge no início dos anos 90 do séc. XX, associado a um certo tipo de investigação educativa realizada para testar e refinar projetos educacionais baseados num conjunto de princípios teóricos, segundo Collins, Joseph e Bielaczyc (2004). De acordo com os mesmos autores, o termo evoluiu para *design research*, mais usado atualmente, apesar de alguns investigadores ainda utilizarem o primeiro. Este tipo de investigação está ancorado nas experiências de ensino desenvolvidas na Rússia, na psicologia piagetiana e no construtivismo radical (Kelly, 2003; Steffe & Thompson, 2000). Segundo Kelly (2003), há um número cada vez maior de investigadores em educação que usam este tipo de investigação e que é inspirada, também, nos métodos usados no campo das engenharias e do *design*. Ainda assim, os termos *design* e experiência ou experimentação estavam, inicialmente, associados a estudos experimentais, com características bem definidas, evoluindo depois para estudos com especificidades próprias e distintas dos primeiros.

De uma forma geral, Cobb, Zhao e Dean (2009) definem *design research* como “uma família de abordagens metodológicas nas quais o desenho do ensino e a investigação são interdependentes” (p. 169). No mesmo sentido, Cobb, Stephan, McClain e Gravemeijer (2001) caracterizam este tipo de investigação como sendo aquela que envolve desenho do ensino e investigação baseada na sala de aula. Identificando o propósito geral de uma investigação do tipo *design research*, Gravemeijer e van Eerde (2009) referem que o seu objetivo é desenvolver uma teoria acerca do processo de aprendizagem dos alunos sobre um determinado tópico matemático e do que suporta esse processo. O que sustenta este processo são, essencialmente, as atividades de ensino, “que podem promover a atividade mental e as mudanças no pensamento do aluno” (p. 511).

¹⁷ Vou usar o termo original inglês, por não haver, ainda, um termo correspondente em português que esteja estabilizado. Ainda assim, considero como alternativas de tradução investigação de desenho ou investigação de conceção, à semelhança do que fazem investigadores como Molina (2006) que usam o termo castelhano *investigación de diseño*.

Da realização de estudos do tipo *design experiment* “resulta uma compreensão profunda da *ecologia da aprendizagem*¹⁸” (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003, p. 9). Por ecologia da aprendizagem entende-se um sistema complexo e interativo que envolve múltiplos elementos de diversos aspetos, que incluem as tarefas que são propostas aos alunos, os tipos de discurso desenvolvidos, as normas de participação estabelecidas, as ferramentas e materiais usados e as práticas de orquestração do professor (Cobb et al., 2003). A inter-relação entre ecologia da aprendizagem e *design experiment* surge precisamente para dar a ideia que todos estes elementos têm de ser pensados e articulados entre si, de modo a funcionarem sistemicamente e não de forma independente.

Apesar dos termos *design research* ou *design experiment* incluírem um leque vasto de tipos de investigação, não necessariamente coincidentes, Cobb et al. (2003) identificam um conjunto de características transversais comuns a todos eles. A primeira está relacionada com o seu propósito geral, que é desenvolver um conjunto de teorias acerca do processo e dos meios que suportam uma determinada aprendizagem, seja ela individual ou de uma turma. A segunda está associada à natureza bastante intervencionista desta metodologia. Por isso, ela é usada mais frequentemente para investigar aspetos educativos associados a inovações do que para analisar formas de ensino tradicionais, para as quais não é necessária uma intervenção, basta um estudo com carácter naturalístico. A terceira característica comum está relacionada com as duas anteriores e diz respeito à sua marca prospetiva e reflexiva. Efetivamente, este tipo de estudos é implementado a partir de conjeturas sobre o processo de aprendizagem e dos meios necessários para o suportar, com carácter prospetivo. A sua marca reflexiva está associada à verificação, ou não, das conjeturas realizadas na fase prospetiva e à sua reformulação, no caso de aquelas serem refutadas. A ligação entre os aspetos prospetivo e reflexivo das *design experiments* dá origem à sua quarta característica, o seu carácter iterativo: são geradas e testadas conjeturas e, no caso de serem refutadas, novas conjeturas são realizadas. Este processo é constituído por “ciclos de invenção e revisão”

¹⁸ Em itálico no original.

(Cobb et al., 2003, p. 10). Finalmente, a quinta característica comum está relacionada com as suas “raízes pragmáticas”, ou seja, as teorias desenvolvidas durante o processo de experiência devem ser úteis a esse mesmo processo e não, meramente, teorias filosóficas não contribuindo, de facto, para a atividade de *design* (Cobb et al., 2003).

As características transversais a este tipo de investigação, apresentadas por Cobb et al. (2003), são, também, identificadas por outros autores que resumem as suas especificidades considerando que as *design experiments* são intervencionistas, iterativas, situadas, orientadas para os processos e baseadas em ideias teóricas, cujo propósito é, ao mesmo tempo, compreender e melhorar processos educativos (diSessa & Cobb, 2004; van den Akker, Gravemeijer, McKenney, & Nieveen, 2006).

Para além das características transversais a todos os estudos do tipo *design experiments*, também são comuns a todos eles as três fases que as constituem: a preparação da experiência, a experiência e a análise retrospectiva (Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006; Plomp, 2006). Uma vez que estas fases são comuns às experiências de ensino, que se incluem neste tipo de investigação, são abordadas detalhadamente na secção seguinte.

A maior parte dos investigadores quando menciona os termos *design research* ou *design experiment* refere-se a uma metodologia de investigação (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2009; Gravemeijer & Cobb, 2006; Kelly, 2003). Contudo, há autores como Molina (2006) e Molina, Castro e Castro (2007) que vão mais longe e encaram a *design research* não apenas como uma metodologia de investigação mas como um paradigma metodológico que enquadra estudos do tipo das experiências de ensino.

Inseridos na *design research* incluem-se tipos de investigação com características comuns mas que se distinguem em termos do seu alcance: experiências de ensino *one-to-one* (um professor experimentador e um aluno), experiências de sala de aula, experiências de desenvolvimento com futuros professores, experiências de desenvolvimento com professores já em serviço e experiências que envolvem a reestruturação de escolas ou agrupamentos de escolas (Cobb et al., 2003).

Um dos tipos de estudo incluído na *design research* por diversos autores (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2001; Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Thompson, 2000) são os designados por experiências na sala de aula (*classroom experiments*) ou experiências de ensino na sala de aula (*classroom teaching experiments*) ou, apenas, experiências de ensino (*teaching experiments*). Nestas, uma equipa de investigadores (ou apenas um investigador) colabora com um ou mais professores que têm a responsabilidade do ensino na sala de aula (Confrey & Lachance, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006; Kelly, 2006; Schoenfeld, 2002; van den Akker et al., 2006). Ora é precisamente nesta modalidade de *design research* que se insere o estudo que desenvolvi, razões pelas quais apresento as suas características e justifico os motivos da minha opção na secção seguinte.

4.1.2. Experiência de ensino

Uma vez que o estudo que realizei se inclui na modalidade de *design research* denominada por experiência de ensino considero pertinente clarificar tanto o seu significado como as designações a ela associadas, tal como aconteceu a propósito da metodologia de *design research*. Efetivamente, os termos experiência de ensino e experiência de ensino em sala de aula não são consensuais nem têm o mesmo significado para os diferentes autores que os referem e utilizam (Gravemeijer & Cobb, 2006; Kelly, 2006; Schoenfeld, 2002; van den Akker et al., 2006). Como exemplo da inconsistência existente, Schoenfeld (2002) refere dois textos, o de Steffe e Thompson (2000) e o de Kelly e Lesh (2000), onde o termo experiência de ensino tem significados diferentes para os seus autores. Para Schoenfeld (2002), a expressão experiência de ensino surge associada à ideia de uma intervenção complexa no contexto do mundo real, que é planeada e concretizada, e através da qual são recolhidos dados que documentam ou explicam a existência de acontecimentos relevantes. Com alguns pontos comuns ao entendimento de Schoenfeld e tentando clarificar o que entendem por experiência de ensino, Gravemeijer e Van Eerde (2009) explicitam que o seu “objetivo é explorar, provar e investigar um conjunto educacional experimental, e não comparar algo experimental pré-determinado com a educação convencional” (p. 513).

No contexto da investigação em Educação Matemática, este tipo de estudo emerge de modo a dar resposta à necessidade identificada de investigar sobre as práticas

de ensino e a aprendizagem em Matemática, inter-relacionando investigação e prática (Cobb, 2000; Kelly & Lesh, 2000; Lesh & Kelly, 2000; Schoenfeld, 2002). No mesmo sentido, Steffe e Thompson (2000) referem que as experiências de ensino começaram a ser mais usadas na Educação Matemática, nos anos 70 do século XX, por duas ordens de razões. Por um lado, havia alguma insatisfação com os modelos de desenvolvimento matemático dos alunos conhecidos à época, uma vez que aqueles não tinham em consideração as interações que existem no processo de ensino e a progressão dos alunos ao longo de períodos prolongados no tempo. Por outro lado, havia uma grande separação entre o ensino e a investigação, que se baseava, sobretudo, em metodologias de tipo experimental (Steffe & Thompson, 2000).

Há, ainda, investigadores que se referem, mais especificamente, ao termo experiência de ensino em sala de aula (*classroom teaching experiment*), em vez de, apenas, experiências de ensino (*teaching experiment*), clarificando o seu entendimento e justificando a necessidade deste tipo de estudos na atualidade (Cobb, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006). A necessidade das experiências de ensino em sala de aula surge quando a análise do ensino tradicional integrada em programas de investigação socioconstrutivistas, parece produzir apenas recomendações negativas para os professores; do tipo: “Não faça isto, não faça aquilo”. Segundo estes autores, para criar ambientes de sala de aula mais produtivos, os investigadores devem ter a responsabilidade pelo desenho do ensino na sala de aula, durante um período de tempo alargado. Deste modo, a metodologia de experiências de ensino *one-to-one* (um professor experimentador e um aluno) muito comum em determinada altura, é ampliada para experiências de ensino na sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006).

Assumindo que as experiências de ensino, de uma forma global, estão associadas à ideia de uma intervenção complexa no contexto do mundo real, planeada e concretizada, a partir da qual se recolhem dados que documentam ou explicam a existência de acontecimentos relevantes, na aceção de Kelly e Lesh (2000) e de Schoenfeld (2002), ainda assim, aquelas podem assumir contornos diferentes de acordo com as suas características mais específicas. Considerando as suas particularidades, as experiências de ensino podem incluir-se em três tipos diferentes: (i) experiências de

ensino conduzidas a partir do teste de hipóteses, (ii) experiências de ensino em multicamadas (*multitiered*) e (iii) experiências de ensino transformadoras conduzidas a partir de conjecturas (*transformative and conjecture-driven teaching experiments*).

As experiências de ensino conduzidas a partir do teste de hipóteses consistem em experiências desenvolvidas para testar uma determinada hipótese associada a um aspecto particular do ensino (Steffe & Thompson, 2000). A formulação de hipóteses pode surgir a partir da análise de episódios de ensino ou de entrevistas clínicas realizadas a alunos.

As experiências de ensino em multicamadas são orientadas pela formulação e teste de conjecturas mas são considerados três níveis ou camadas – os alunos, os professores e os investigadores. Cada nível tem tarefas distintas e os seus elementos devem refletir sobre o modo como as desempenham, testando ou corrigindo a sua maneira de pensar habitual durante o processo de modelação ou de uso de ferramentas conceptuais para alcançar determinados propósitos. Ao longo da experiência de ensino existe uma grande articulação entre estas três camadas, mas a investigação associada a cada uma pode ser vista como um estudo de desenvolvimento longitudinal num ambiente conceptualmente rico (Lesh & Kelly, 2000).

Finalmente, as experiências de ensino conduzidas a partir de conjecturas são caracterizadas por Confrey e Lachance (2000) e por Lesh e Kelly (2000) como estudos de desenvolvimento longitudinal realizados num contexto conceptualmente rico, orientados por uma conjectura. Consistem em intervenções delineadas ao nível da sala de aula, relativamente prolongadas no tempo, e que inter-relacionam as conjecturas que orientam a definição da experiência e as componentes de ensino – currículo, métodos de ensino, papel do professor e métodos de avaliação (Confrey & Lachance, 2000).

As conjecturas que orientam este tipo de experiência de ensino devem ter duas dimensões. Por um lado, devem possuir uma dimensão de conteúdo, que inclui uma componente matemática e que perspetiva o que deve ser ensinado. Por outro lado, devem incluir, também, uma dimensão pedagógica ligada à dimensão de conteúdo e que perspetiva o modo como se ensina. Esta dimensão da conjectura orienta as decisões ao

nível da organização do ensino, das tarefas a propor e dos recursos que lhes estão associados (Confrey & Lachance, 2000).

Tal como mencionam Confrey e Lachance (2000) a dimensão de conteúdo matemático deve responder à pergunta “o que deve ser ensinado?” e a dimensão pedagógica à pergunta “como é que este conteúdo deve ser ensinado?” (p. 235).

O estudo que desenvolvo, focado na aprendizagem da multiplicação, inclui-se neste último tipo de experiência de ensino, pois foi conduzido a partir de uma conjectura. A dimensão de conteúdo matemático da conjectura, formulada inicialmente, diz respeito aos aspetos considerados basilares para a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Tendo em conta o contexto curricular atual em Portugal, a componente de conteúdo da conjectura centra-se na estruturação da aprendizagem da multiplicação focando o desenvolvimento do sentido de número. A teoria permitiu identificar três aspetos essenciais que dizem respeito às “grandes ideias”; às “estratégias” e aos “modelos” associados à aprendizagem da multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001b) e que, consequentemente, integram a conjectura formulada que suporta a experiência de ensino. Assim, a dimensão matemática da conjectura explicita as grandes ideias, as estratégias e os modelos que devem ser desenvolvidos pelos alunos, considerando a sua evolução na aprendizagem da multiplicação.

Para além das questões cruciais associadas à estruturação dos conteúdos relativos à operação multiplicação foi necessário, também, pensar sobre a outra vertente da conjectura que orientou a experiência de ensino – o modo como os vários aspetos que contribuem para o desenvolvimento desta operação são trabalhados com os alunos na sala de aula. Nesse sentido, foram selecionadas tarefas, organizadas em sequências, sobre as quais, à partida, se conjecturava que permitiam o aprofundamento dos aspetos relativos à multiplicação, de modo que os alunos evoluíssem progressivamente na sua compreensão sobre esta operação. Esta vertente da conjectura incluiu, também, pensar na construção e desenvolvimento de um ambiente de sala de aula favorável tanto ao trabalho individual como em pares e que permitisse momentos de interação e de partilha entre os alunos, organizados pela professora da turma.

Os aspetos associados à dimensão de conteúdo matemático e à dimensão pedagógica da conjectura formulada no âmbito desta investigação encontram-se explicitados e justificados, detalhadamente, no capítulo seguinte. Aí são concretizadas, também, as componentes de ensino que considere no *design* desta experiência de ensino: o currículo, as interações na sala de aula, o papel do professor e a avaliação (Confrey & Lachance, 2000).

Uma vez que uma investigação na modalidade de experiência de ensino se insere numa metodologia mais ampla de *design research*, também inclui três fases: (i) a preparação da experiência, (ii) a experimentação em sala de aula, e (iii) a condução da análise retrospectiva (Gravemeijer & Cobb, 2006). A descrição detalhada do processo de preparação, experimentação na sala de aula e análise retrospectiva, tanto nos aspetos relativos à investigação como do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, é efetuada nos capítulos sobre a experiência de ensino na aula do 3.º ano e de análise dos dados. Neste capítulo específico, resumidamente, os propósitos de cada uma das fases identificadas.

Na primeira fase desta modalidade de investigação – a preparação da experiência – são identificados os aspetos teóricos relacionados com a perspectiva de aprendizagem assumida no estudo, assim como os seus objetivos – neste caso concreto, a evolução da aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Esta fase incluiu, também, a planificação de um conjunto de tarefas, organizadas em sequências, exploradas posteriormente na aula e uma antecipação (hipotética) do modo como os alunos raciocinariam a partir das tarefas propostas e as resolveriam (Gravemeijer & Cobb, 2006).

Numa segunda fase, a do processo de experimentação em sala de aula, são exploradas sequências de tarefas pelos alunos da turma do 3.º ano. Em conjunto com a professora da turma, inicia-se um processo cíclico de “redesenhar” e adaptar as tarefas à medida que estas são exploradas e vão sendo observados e analisados os procedimentos usados pelos alunos. Este processo é denominado por microciclos de *design* e análise, retomando uma ideia forte de Freudenthal (1991) (referida por Gravemeijer e Cobb (2006)) sobre processos cíclicos de experiências de pensamento e de experiências de

ensino. Estas ideias estão, também, relacionadas com o que Simon designa por “ciclo de ensino da matemática” (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004).

Finalmente, numa terceira e última fase, são analisados a globalidade dos dados recolhidos através de diversas fontes e confrontados tanto com a teoria como com os objetivos do estudo realizado (Cobb, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006). Esta fase corresponde, neste estudo, à análise dos dados e encontra-se documentada nos capítulos relativos à mesma.

Embora sejam possíveis de identificar três fases distintas numa investigação com as características de experiência de ensino, por vezes, os limites entre elas não estão muito definidos (Gravemeijer & van Eerde, 2009). Isto significa que, por exemplo, embora as tarefas possam ser planeadas e concebidas na fase de preparação, também o podem ser durante a fase de experimentação. O mesmo acontece com os limites entre a segunda e terceira fases, na medida em que a análise retrospectiva pode iniciar-se ainda antes da experiência na sala de aula terminar.

4.2. Contexto e participantes

A professora

A partir do momento em que decidi realizar um estudo focado nos alunos do 1.º ciclo relacionado com a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, colocou-se a questão da seleção do ano de escolaridade em que seria mais pertinente a sua concretização, uma vez que, desde o início da escolaridade, os alunos contactam com esta operação, ainda que de um modo informal. Tendo em consideração as orientações curriculares associadas à operação multiplicação tanto nacionais como internacionais (ME, 2007; Ministério da Educação – DGEBS, 1990; NCTM, 2007), é a partir do 3.º ano que o trabalho a desenvolver na sala de aula deve promover a compreensão aprofundada desta operação, alargando progressivamente o universo dos números trabalhados e das suas diferentes representações. Também é a partir deste ano de escolaridade, que o desenvolvimento das ideias e procedimentos associados à multiplicação deve contribuir para que os alunos

resolvam problemas que envolvam diferentes formas de cálculo adequadas a cada situação.

Concertando as orientações curriculares relativas à aprendizagem da operação multiplicação e os resultados dos estudos empíricos associados a esta operação, referidos no capítulo teórico sobre a temática, optei por realizar no 3.º ano de escolaridade a experiência de ensino que dá corpo à presente investigação. Depois de tomada esta decisão, o passo seguinte foi procurar um professor que satisfizesse os seguintes critérios: (i) lecionar no ano letivo de 2008/2009 uma turma do 3.º ano, (ii) ter pelo menos dez anos de prática de ensino, (iii) ter interesse e disponibilidade para se envolver num projeto curricular na área da Matemática (iv) e ter frequentado uma oficina de formação no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM).

O primeiro critério relaciona-se, especificamente, com o objeto do estudo que pretendo concretizar. A aplicação do segundo e do terceiro critérios permitia-me selecionar um professor com um saber profissional específico do 1.º ciclo que pudesse garantir um conhecimento prático sobre o desenvolvimento do currículo neste nível de ensino e que estivesse interessado em colaborar na planificação de tarefas ao nível da Matemática que, posteriormente, concretizaria na sua sala de aula. O último critério de seleção garantia que o professor que fosse escolhido tinha contactado com a perspectiva de ensino e aprendizagem da Matemática veiculada no PFCM e partilhada por mim no presente estudo. Garantia, assim, ter desenvolvido tarefas consistentes com essa perspectiva, para além de ter tido a experiência da presença de um outro professor (supervisor da prática letiva) na sua aula, tal como acontece no PFCM. A experiência e aceitação da presença de outro professor na turma, apesar de, na investigação, assumir uma função diferente da de supervisão, facilitariam a minha integração futura na sala de aula, tanto do ponto de vista da professora como dos seus alunos.

Depois de identificados os critérios que presidiriam à escolha do professor participante no estudo que me propunha realizar e, uma vez que exerci funções de formadora no PFCM desde que este se iniciou em 2005, pensei de imediato nos vários grupos de professores do 1.º ciclo com quem trabalhei. Considerando as especificidades

da formação referida, ao longo de um ano letivo, com momentos de trabalho no grupo de formação e momentos de supervisão em sala de aula e posterior reflexão, pude aperceber-me das características profissionais dos professores envolvidos. A intersecção dos critérios para a escolha do professor participante no estudo com o meu conhecimento, enquanto formadora, sobre os professores que frequentaram a formação referida, permitiram-me, desde logo, pensar em Isabel para o trabalho que pretendia desenvolver.

Isabel é uma professora do 1.º ciclo, com uma licenciatura em Educação em Ensino Especial, que frequentou uma oficina de formação no âmbito do PFCM no ano letivo de 2007/08, da qual fui formadora. Em 2008 tinha cerca de 29 anos de serviço, dez dos quais a trabalhar numa unidade de Ensino Especial com crianças com multideficiências. Três anos antes tinha deixado o Ensino Especial e retomado a lecionação numa escola do 1.º ciclo, tendo-lhe sido atribuída uma turma do 1.º ano de escolaridade. Consciente do seu afastamento, há já algum tempo, do ensino dito “regular” assumiu para com ela própria um investimento forte ao nível das temáticas associadas ao ensino e à aprendizagem deste nível de ensino. Assim, para além de outras formações que tem frequentado em outras áreas de ensino, inscreveu-se na formação de Matemática (PFCM).

Isabel é uma pessoa sempre disponível para aprender e refletir sobre temáticas que visem a melhoria do seu desempenho enquanto professora e a qualidade das aprendizagens dos seus alunos. Muitas vezes, durante a formação no âmbito do PFCM, de uma sessão para a outra, experimentava tarefas na sala de aula com os seus alunos, de modo a construir opiniões fundamentadas sobre assuntos que não dominava e discuti-las comigo e com os seus colegas.

Conjugando as características de Isabel, tanto pessoais como profissionais, que satisfaziam os critérios por mim identificados propus-lhe, em julho de 2008, trabalharmos em conjunto no âmbito do estudo que pretendia desenvolver, convite que aceitou prontamente.

A escolha da professora (e, consequentemente, da turma) para um estudo desta natureza não obedece a critérios de representatividade, uma vez que não se colocam questões associadas à generalização dos seus resultados. A sua seleção, no meu entender, satisfaz o critério da maximização das oportunidades de aprender e da compreensão do problema em estudo, para além dos critérios anteriormente enunciados e que se prendem diretamente com os objetivos do estudo. O critério da maximização é um dos que, segundo Stake (2007), deve presidir à escolha dos participantes numa investigação que decorre num tempo limitado.

Além disso a seleção da professora e, consequentemente, da turma está, ainda, relacionada com a experiência de ensino que pretendia desenvolver. De facto, escolher uma professora com as características supramencionadas garantia-me, potencialmente, a realização de um estudo num ambiente conceptualmente rico, explicitamente desenhado para haver uma maior possibilidade de ocorrer determinado acontecimento, passível de ser observado, característica das experiências de ensino e, em particular, das orientadas por uma conjectura (Confrey & Lachance, 2000; Lesh & Kelly, 2000).

Um outro aspeto geral que também deve ser tido em conta na seleção dos participantes numa investigação é o fácil acesso ao campo (Stake, 2007). Este corresponde, neste caso, à minha entrada no Agrupamento de escolas, na Escola da professora Isabel e, finalmente na sua turma, que foi facilitada pelo conhecimento que eu já possuía, tanto da professora como da sua Escola e Agrupamento de escolas.

As questões associadas à confidencialidade neste estudo e ao anonimato dos participantes foram discutidas com a professora (Patton, 2002), sendo, nesse sentido, colocada a possibilidade de esta adotar um pseudónimo. No entanto, a professora não considerou relevante essa adoção, decidindo manter o seu verdadeiro nome, Isabel. Esta opção não põe em causa a privacidade dos alunos, uma vez que nem a Escola nem o Agrupamento são identificados. Além disso, permite-lhe, eventualmente, algum reconhecimento profissional decorrente da sua participação no estudo.

O Agrupamento de escolas e a Escola do 1.º ciclo

A experiência de ensino que enquadra o presente estudo foi concretizada numa turma do 3.º ano de escolaridade, de uma escola do 1.º ciclo pertencente a um Agrupamento vertical de escolas de um concelho na margem sul do rio Tejo. O Agrupamento e a escola não estão desligados da escolha da professora que se disponibilizou para o efeito nem da relação profissional que fui estabelecendo, ao longo de vários anos, com alguns professores deste mesmo Agrupamento.

O Agrupamento de escolas inclui um estabelecimento de ensino do 2.º e 3.º ciclos e quatro escolas com os níveis pré-escolar e 1.º ciclo. Desde há cerca de 15 anos que venho desenvolvendo trabalho neste Agrupamento, inicialmente no âmbito da Prática Pedagógica de cursos de professores do Ensino Básico, tanto do 1º ciclo como da variante de Matemática/Ciências da Natureza. Nesse contexto, acompanhei alguns alunos da licenciatura que aí realizaram estágios incluídos nos seus cursos, desempenhando o papel de professora supervisora da Escola Superior de Educação em que trabalho. Mais recentemente, desde que se iniciou o Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM), tenho assumido o papel de formadora de professores do 1.º ciclo deste Agrupamento.

A escola do 1.º ciclo em que realizei a recolha de dados do projeto de investigação encontra-se inserida num antigo bairro operário construído nos anos 60/70 do século XX, perto de uma antiga zona industrial. O bairro é constituído por pequenas vivendas e tem vindo a ser todo remodelado, renovando-se também, gradualmente, a população que nele habita. Assim, à exceção de alguns proprietários originais, já idosos, a população atual do bairro é constituída por casais jovens, da classe média e média alta, dada a sua boa situação geográfica relativamente ao centro da cidade a que pertence. Os alunos que frequentam a escola têm proveniências diversas: uns moram muito perto da escola, no bairro, outros vêm de zonas habitacionais mais distantes, nos limites do concelho. Deslocam-se todos os dias com os pais que trabalham no centro da cidade ou em Lisboa e são, habitualmente, apoiados pelos avós que residem perto da escola.

O edifício da escola, tal como o bairro onde está inserida, foi completamente renovado a partir de um edifício original com tipologia denominada por Plano

Centenário. Para além das salas de aula, onde algumas das turmas funcionam em regime de desdobramento, tem uma sala de apoio a atividades curriculares não disciplinares, uma biblioteca e um ginásio. O espaço disponível para o funcionamento adequado das diversas atividades que são proporcionadas aos alunos, fora da sala de aula, de acordo com Isabel e outros professores, é bastante limitado.

No ano letivo de 2007/2008 desloquei-me frequentemente a esta escola, no âmbito do PFCM, onde trabalhei com três professores, assim como a propósito da recolha de dados de um estudo exploratório que desenvolvi no programa doutoral que frequentei. Nesse período conheci, igualmente, os alunos da turma da professora Isabel. As idas frequentes à escola e o trabalho desenvolvido com alguns dos seus professores permitiram-me perceber o bom ambiente que aí se vive e as relações cordiais que, de um modo geral, são estabelecidas entre todos, professores, alunos e funcionários.

Em síntese, posso afirmar que as relações profissionais previamente estabelecidas com professores do Agrupamento de escolas e da escola do 1.º ciclo em causa facilitaram o meu acesso ao campo. No início do ano letivo de 2008/2009, foram solicitadas as respetivas autorizações¹⁹ previstas para a realização do estudo aos superiores hierárquicos específicos: Direção da Escola, Conselho Executivo do Agrupamento e Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação. Por intermédio da professora da turma, foram ainda requeridas as correspondentes autorizações aos encarregados de educação das crianças, tendo havido, da parte de todos, um parecer positivo. A necessidade do pedido das autorizações aos encarregados de educação prende-se com a minha presença na sala de aula e as gravações vídeo das aulas, havendo, da minha parte, a garantia que as mesmas apenas são utilizadas no âmbito deste estudo.

A turma

O foco do trabalho de investigação centra-se nos alunos da turma do 3.º ano de Escolaridade, de que é titular a professora Isabel e onde é realizada a experiência de ensino. A turma tem 23 alunos, 15 rapazes e oito raparigas, todos com uma idade de oito

¹⁹ Ver Anexo 2.

ou nove anos. Os alunos mantêm-se juntos na mesma turma desde o 1.º ano de escolaridade, com a professora Isabel, com exceção de dois deles que foram integrados apenas no ano letivo em que ocorreu o estudo, uma vez que não transitaram de ano no ano letivo anterior. Apesar disso, estes dois alunos aparentam estar bem adaptados ao grupo turma. Os alunos são, de um modo geral, interessados e participativos, sendo incentivados constantemente a comunicar e a fundamentar as suas ideias, tanto oralmente como por escrito. Assim, na sua maioria, os alunos da turma são bons informantes e manifestam um envolvimento empenhado no trabalho realizado na sala de aula.

Na área da Matemática há a considerar níveis diferentes de desempenho. Há alunos que revelam algumas dificuldades relativamente a esta área disciplinar, sobretudo na resolução de problemas e na compreensão de alguns conceitos, mas apenas um deles tem apoio acrescido, na sequência de um plano de recuperação elaborado pela professora da turma. Na opinião da professora, a maioria dos alunos tem um desempenho bom, havendo ainda um grupo de alunos (cerca de cinco ou seis) com um desempenho muito bom nesta área disciplinar.

As experiências prévias dos alunos associadas ao tema Números e Operações, antes do início da experiência de ensino, estão relacionadas com o desenvolvimento dos conteúdos previstos no Programa de Matemática vigente (Ministério da Educação, 1990). Segundo a professora, mostravam um razoável conhecimento sobre os números e suas propriedades e resolviam problemas envolvendo as quatro operações. No que diz respeito à operação multiplicação, os alunos resolviam problemas recorrendo, sobretudo, ao raciocínio aditivo e tinham construído as primeiras tabuadas, tal como é previsto no Programa (Ministério da Educação, 1990).

Durante as aulas de Matemática e, em particular, na resolução de problemas, todos os alunos são incentivados pela professora a explicitar as diferentes estratégias utilizadas, analisando-as, comparando-as entre si e, eventualmente, identificando as mais adequadas em cada situação. Esta forma de trabalhar com os alunos na aula de Matemática, privilegiando as interações com e entre eles, vai ao encontro da cultura de sala de aula que foi importante desenvolver no âmbito da experiência de ensino e está de acordo com alguns aspetos preconizados por Smith et al. (2009) e Stein et al. (2008)

sobre práticas do professor na sala de aula. Assim, a experiência de ensino não perturbou nem alterou, substancialmente, os hábitos de trabalho dos alunos e da professora, uma vez que estavam já acostumados a fazê-lo desse modo.

Considerando que a turma é a unidade de análise da investigação que realizo, o estudo detalhado e aprofundado dos seus aspetos que se relacionam com os objetivos, as questões de investigação e os dados recolhidos, constitui o foco dos capítulos destinados à análise e interpretação dos dados.

4.3. Colaboração com a professora

Uma vez que o estudo que realizo é uma experiência de ensino numa turma de 3.º ano, é importante definir e descrever, neste âmbito, o planeamento da colaboração entre a professora Isabel, titular da turma, e eu própria. Esta colaboração é assumida na perspetiva de Boavida e Ponte (2002), não como um fim mas como um meio para atingir determinados objetivos, neste caso, o desenvolvimento de uma investigação na modalidade de experiência de ensino. De facto, para a sua concretização, tal como é explicado detalhadamente na secção sobre o processo de recolha de dados, ficou acordado entre nós reunirmos semanalmente, de modo a seleccionarmos e prepararmos as tarefas a serem exploradas na aula de Matemática por Isabel e a refletirmos, posteriormente, sobre essa exploração. O trabalho colaborativo que desenvolvemos não constitui um dos objetivos deste estudo mas foi essencial para os alcançar.

Relativamente ao processo de desenvolvimento de uma experiência de ensino em colaboração com um professor, Cobb (2000) refere a importância de ser estabelecida uma base de entendimento comum relativamente a aspetos pedagógicos. Segundo o autor, há um conjunto de pressupostos e conceções que devem ser comuns à partida, para além de deverem existir bastantes momentos de interação entre investigador e professor antes de ser iniciada a experiência na sala de aula, para que possam ser partilhados os pontos de vista de cada um sobre aspetos relevantes para o estudo. A importância de partilharmos pontos de vista sobre o ensino e a aprendizagem, em geral e, em particular, sobre a

aprendizagem da multiplicação foi considerada, tanto na seleção de Isabel para participar no estudo, como nas reuniões de preparação que realizámos antes do início do trabalho desenvolvido na sala de aula.

Boavida (2005) enumera um conjunto de ideias procurando identificar fatores favoráveis ao desenvolvimento de um trabalho de colaboração, nomeadamente entre professores e investigadores. Na minha perspetiva, alguns deles estão presentes no trabalho que realizei com a professora Isabel: (i) a importância da organização do trabalho e uma clara definição de papéis e responsabilidades; (ii) a importância do diálogo e de uma negociação transparente, igualitária e continuada; (iii) a importância de um período de conhecimento prévio à observação de aulas; (iv) a importância da diversidade e complementaridade; (v) a importância da reflexão sobre a prática e sua organização e (vi) a importância do tempo.

De facto, decorrente dos objetivos da investigação, foi fundamental a organização do trabalho em que cada uma de nós teve papéis diferenciados mas complementares, que conduziram a contributos, também distintos, no trabalho colaborativo, nomeadamente, no que se refere à planificação e reflexão sobre as aulas, mas que se traduziram em benefícios para ambas. Desde início que assumi a minha responsabilidade na elaboração de propostas relacionadas com o delinear da trajetória de aprendizagem e de tarefas a realizar com os alunos. No entanto, todas as propostas foram negociadas e discutidas com Isabel, considerando o seu conhecimento profissional e da turma, no sentido de as reformular e adaptar aos seus alunos. No desenvolvimento do trabalho de colaboração considero, também, essencial o nosso conhecimento mútuo, antes de iniciar a observação das aulas associadas à experiência de ensino. Finalmente, também encaro o tempo como um dos fatores favoráveis à concretização de um trabalho de colaboração. Desde o início percebi a sua importância e a sua duplicidade, no sentido em que pode ser entendido como um constrangimento ou como um aspeto positivo (Boavida, 2005). Assim, consciente do seu duplo papel, o meu investimento foi desenvolver um trabalho de colaboração, continuado e prolongado ao longo do ano letivo, em que o tempo propiciou a qualidade do mesmo.

4.4. Métodos de recolha de dados

A opção por uma experiência de ensino na sala de aula tem como consequência um duplo papel assumido por mim, enquanto investigadora e, simultaneamente, instrumento principal de recolha de dados. Os dados, maioritariamente de natureza qualitativa, foram recolhidos a partir de diferentes fontes, seguindo a recomendação de vários autores (Confrey & Lachance, 2000; Molina, Castro e Castro; 2007). Assim, dada a natureza e as questões deste estudo, foram métodos principais de recolha de dados a observação do tipo participante, complementada com gravações vídeo, e a recolha documental, onde se incluem as produções dos alunos e outros documentos considerados pertinentes para a investigação. Foram, ainda, realizadas conversas informais entre a professora e eu própria e, por vezes, com os alunos da turma do 3.º ano.

As fontes principais de recolha de dados são as aulas observadas, as reuniões de trabalho com a professora da turma, a própria professora e os alunos. Os elementos que são objeto de análise são as minhas notas de campo resultantes da observação em sala de aula e das conversas informais entre a professora e eu própria, os relatórios por mim elaborados logo após as aulas, os registos videogravados das aulas, as transcrições de excertos das aulas videogravadas, as produções dos alunos resultantes da resolução das tarefas propostas e documentos de natureza variada, tais como outros materiais de apoio às aulas, os memorandos produzidos por mim na preparação das reuniões semanais com a professora e os relatórios de observação elaborados logo após as mesmas.

Observação participante

A observação participante é “um modo especial de observação na qual o investigador não é meramente um observador passivo” (Yin, 2010, p. 92). De facto, na sala de aula o meu papel não foi apenas de mera espectadora do que lá se passava. Muitas vezes, no decurso do trabalho dos alunos (individual ou em grupo) resultante das propostas feitas pela professora, fui solicitada por eles para esclarecer dúvidas ou prestar alguns esclarecimentos. Nesses casos tentei gerir a minha intervenção sem interferir diretamente nas questões que dizem respeito ao papel da professora enquanto gestora das atividades e das dinâmicas da turma. Se, por um lado o meu papel mais interventivo na

sala de aula me permitiu um conhecimento aprofundado sobre os alunos, as interações entre eles e os seus modos de pensar a propósito das tarefas matemáticas, por outro lado, muitas vezes, foi difícil de desempenhar, ao mesmo tempo, o meu papel de observadora “externa” dos acontecimentos. Além disso, e como durante as aulas é impossível tirar notas detalhadas de todas as ocorrências e acontecimentos relevantes, todas foram videogravadas, permitindo o seu visionamento posterior, tantas vezes quantas as necessárias à realização da investigação.

Considerando a metodologia de experiência de ensino, o registo das atividades na sala de aula em vídeo revela-se essencial, uma vez que, posteriormente, é possível visioná-las sempre que for necessário, tanto no processo de análise preliminar ao longo da recolha dos dados como na fase de análise retrospectiva. Os registos vídeo têm, assim, como objetivo completar as notas de campo. Como referem Confrey e Lachance (2000), numa experiência de ensino orientada por uma conjectura a combinação entre as gravações vídeo e as notas resultantes da observação é a ideal para registar as interações ocorridas na sala de aula.

Ainda assim, há autores que reconhecem algumas desvantagens na utilização de gravações vídeo, associadas à presença não habitual de um aparato tecnológico na sala de aula (Merriam, 1991). De forma a minorar estas desvantagens e a habituar os alunos à permanência da câmara de vídeo na sala de aula, foram gravadas algumas aulas antes do início da recolha de dados, o que contribuiu para que esta fosse aceite com naturalidade pelos alunos. As gravações efetuadas antes do início da experiência de ensino tiveram, ainda, como objetivo decidir o melhor posicionamento da câmara de vídeo na sala de aula, uma vez que ela permanece quase sempre, fixa, assente sobre um tripé. Na maior parte do tempo a minha localização esteve associada à posição da câmara de vídeo, de modo a controlar o visionamento do ambiente da aula, das atividades desenvolvidas pelos alunos e das intervenções da professora e dos alunos. Por vezes, durante os momentos em que os alunos trabalhavam em pares, desloquei-me pelos vários grupos, de modo a filmar algumas interações entre alunos particulares, durante a resolução das tarefas. Para além da imagem, a câmara registou igualmente o som.

Para a observação das aulas e elaboração do relatório correspondente organizei um guião orientador de observação (Anexo 3), com alguns tópicos relativos a aspetos aos quais dei atenção mais detalhada, considerando os objetivos do estudo que realizo. Na elaboração desse guião, para além das questões do estudo, socorri-me da minha experiência profissional, enquanto supervisora da prática pedagógica de estagiários dos cursos de formação de professores do Ensino Básico e de professores do PFCM e, além disso, considerei como referência os pontos principais de um relatório de observação identificados por Boavida (2005). Logo após a concretização das aulas, elaborei relatórios de observação das mesmas apoiando-me nas notas de campo registadas (nos casos em que existiam), na memória recente e no primeiro visionamento da videogravação efetuada.

Uma outra fonte de recolha de dados, recorrendo à observação participante, ainda que de modo mais informal, foi a reunião semanal entre mim e a professora. Nestas reuniões o meu papel foi o de interveniente ativa. O seu propósito principal era a planificação e discussão do trabalho a realizar, primeira fase da experiência de ensino, em particular das tarefas a explorar. A partir do momento em que se passou ao processo de experimentação, a reunião com Isabel teve, também, o propósito de refletir sobre o trabalho efetuado na(s) aula(s) anterior(es) de modo a planear, a partir daí, o trabalho futuro. As reuniões com Isabel revelaram-se de grande importância e foram essenciais para o sucesso da experiência de ensino, tal como referem Confrey e Lachance (2000). Como mencionam estes autores, a análise preliminar que é realizada nas reuniões entre professores e investigadores permite refletir sobre as atividades e sobre a conjectura, adaptando-as e melhorando-as. No mesmo sentido Cobb (2000) refere a importância de, nas reuniões entre professor e investigador, se partilharem interpretações sobre o que acontece na sala de aula, se discutir a aprendizagem individual dos alunos, a natureza das normas estabelecidas e das práticas matemáticas e, ainda, de se planearem as atividades de ensino. Todos os aspetos identificados foram discutidos entre mim e a professora Isabel, no decurso das reuniões semanais que realizámos.

Nas reuniões semanais recolhi dados que contribuíram para o aprofundamento da compreensão sobre aspetos associados às questões do estudo, sobre o processo de ensino

da professora e sobre o desempenho dos alunos nas aulas da área disciplinar de Matemática, para além das que foram objeto de observação. Na preparação das reuniões semanais com a professora Isabel elaborei memorandos, anotando, essencialmente, aspetos que gostaria de discutir em conjunto e, imediatamente após a sua realização, produzi um relatório de observação, com carácter descritivo mas não obedecendo a algum guião. O seu objetivo foi o de complementar e validar informação recolhida através de outras fontes.

Recolha documental

A importância da recolha e análise de documentos é realçada por Merriam (1991), considerando que estes são produzidos de modo independente em relação aos propósitos do estudo, o que não acontece relativamente às observações realizadas pelo investigador. Segundo Yin (2010) os documentos são uma das fontes de dados usada habitualmente em estudos de natureza qualitativa permitindo confrontar evidências sugeridas por outras fontes de dados. Além disso, numa experiência de ensino, são fundamentais os documentos relacionados com as produções dos alunos que devem ser recolhidos exaustivamente (Confrey & Lachance, 2000; Molina et al., 2007). No caso do presente estudo, uma vez que pretende dar resposta a questões associadas aos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação, à sua evolução, às dificuldades manifestadas e aos aspetos do sentido de número que revelaram, as produções dos alunos no âmbito da experiência de ensino são uma fonte fundamental de recolha de dados, a par das aulas observadas e videogravadas. Na sua maioria, as tarefas propostas na sala de aula foram objeto de resoluções escritas por parte dos alunos, excetuando as tarefas de cálculo em cadeia, mesmo que, a seguir, houvesse discussões coletivas sobre as mesmas. Assim, foram recolhidos todos os documentos que incluem produções dos alunos nas aulas observadas, desde registos mais informais, que funcionaram como rascunho, até aos pósteres por estes elaborados na sequência da realização de algumas das tarefas. Todos estes registos, bem como outro tipo de documentos, tais como planificações a médio prazo elaboradas pela professora em conjunto com os colegas do Agrupamento que lecionavam o 3.º ano, fichas de avaliação feitas pelos alunos e outras produções escritas dos alunos, foram objeto de uma análise

detalhada de modo a contribuírem para produzir evidência relativa, ou seja, não decorre diretamente do estudo. A sua análise forneceu elementos que permitiram confrontar e complementar as observações realizadas durante as aulas contribuindo, assim, para caracterizar e aprofundar o conhecimento sobre os aspetos relacionados com os objetivos do presente estudo.

Conversas informais

Neste estudo recorri, ainda, a conversas informais, na aceção do que Patton (2002, p. 342) denomina por *informal conversational interview*, apesar de não ser um dos métodos principais de recolha de dados. De acordo com este autor as conversas informais baseiam-se em questões que surgem, naturalmente, da interação entre as pessoas, muitas vezes no decurso da recolha de dados, durante a observação participante. As conversas informais correspondem a um tipo de entrevista considerada não estruturada, posicionando-se no pólo oposto do que se considera uma entrevista estruturada. A pessoa em causa conversa espontaneamente, sem se sentir entrevistada, e as questões e as respostas correspondentes surgem do contexto imediato.

No decurso de todo o trabalho investigação, sobretudo, durante a preparação e concretização da experiência de ensino na sala de aula, muitos foram os momentos de conversa informal com a professora Isabel. Efetivamente, muitas foram as horas em que conversámos e trocámos impressões, mesmo fora do período de reunião combinado, sobre o trabalho da aula ou até sobre o modo como os alunos reagem a determinadas tarefas. Quando, a propósito dessas conversas, surgiram aspetos que considere relevantes para o estudo que realizo, na primeira oportunidade, apressei-me a registá-los, convicta da sua utilidade. As notas de campo daí decorrentes serviram-me, algumas vezes, para confirmar, ou não, dados provenientes de outras fontes. O mesmo aconteceu com os alunos, com quem conversei, frequentemente, informalmente. Algumas dessas conversas serviram-me para completar ou validar informação recolhida no decurso da aula.

Considerando os métodos e fontes de recolha de dados explicitados, foi essencial a diversidade na sua utilização, de modo a verificar e validar a informação recolhida e a

triangular os resultados emergentes. A triangulação de métodos e a triangulação de fontes são dois dos tipos de triangulação referidos por Patton (2002) que contribuem para dar consistência a uma investigação, tanto quantitativa como qualitativa. Neste estudo recorri a triangulação de métodos recolhendo dados através de dois métodos principais e um outro complementar, de modo a verificar a sua consistência. Também realizei triangulação de fontes, recolhendo dados provenientes de diferentes fontes através de um mesmo método.

A tabela 4.1 apresenta, de modo resumido, os métodos, as fontes principais e as formas de registo dos dados e o modo como se interligam entre si.

Tabela 4.1 – Métodos, fontes principais e formas de registo dos dados

Métodos	Fontes	Formas de registo
Observação participante	Aulas	Notas de campo/relatórios de observação Gravações vídeo/transcrições de excertos das gravações
	Reuniões com a professora da turma	Memorandos Relatórios de observação
Recolha documental	Alunos Professora da turma	Produções dos alunos Materiais de apoio às aulas Planificações da disciplina de Matemática Fichas de avaliação
Conversas informais	Alunos Professora da turma	Notas de campo

4.5. Critérios de qualidade

Os critérios de qualidade usados, habitualmente, em investigações tradicionais não se adaptam a um estudo na modalidade de experiência de ensino orientada por uma conjectura, como referem Confrey e Lachance (2000). Por isso estes investigadores propõem um conjunto de normas que avaliam os processos internos à investigação e um outro conjunto de normas relacionadas com os seus impactos potenciais.

Relativamente aos processos internos os autores referidos identificam normas de qualidade relacionadas com a conjectura, com a relação dialética entre a conjectura e os acontecimentos na sala de aula e com as “vozes dos alunos” (Confrey & Lachance, 2000). Em primeiro lugar, a qualidade da conjectura pode ser analisada em termos da sua

validade aparente e da sua revisão feita pelos pares. No final da investigação tanto investigadores como professores do nível de ensino em questão devem poder analisar a validade aparente da conjectura, avaliando tanto a sua dimensão de conteúdo como pedagógica e confrontando-a, também, com a literatura sobre o tema. Em segundo lugar, a qualidade do processo pode ser verificada através da análise da coerência da história que reconta a relação dialética entre os acontecimentos da aula e a conjectura. Finalmente, em terceiro lugar, pode ser analisada a qualidade da investigação em termos da fidelidade do estudo à sua posição ideológica, o que significa que alguém exterior deve ser capaz de verificar se os dados permitiram fazer emergir as vozes dos alunos. Isto significa analisar se as vozes dos alunos são autênticas e são razoáveis para convencer o leitor da profundidade e veracidade dos seus argumentos. Para que isto aconteça é preciso que a análise inclua excertos suficientes das interações da sala de aula que sejam representativas das diferentes vozes dos alunos (Confrey & Lachance, 2000).

No que diz respeito aos critérios de qualidade sobre os impactos potenciais, Confrey e Lachance (2000) identificam a sua viabilidade, sustentabilidade, natureza convincente, adaptabilidade e carácter gerador. A viabilidade está relacionada com o fato de poder ser realizado um trabalho semelhante ao desenvolvido na experiência de ensino em circunstâncias específicas, em qualquer escola, sem essas condições particulares associadas à investigação. A sustentabilidade refere-se aos produtos, que devem ser de qualidade, devendo resistir e suportar os impactos potenciais durante um certo período de tempo. A natureza convincente está relacionada com o fato de os resultados da investigação e os produtos daí decorrentes deverem convencer os professores a efetuar mudanças na sua prática. A adaptabilidade é uma característica que devem ter os resultados e os produtos da investigação de modo a poderem ser usados em outros contextos escolares. O carácter gerador está relacionado com o facto de a conjectura poder fornecer meios para os professores organizarem, por exemplo, atividades de sala de aula (Confrey & Lachance, 2000).

Os critérios de qualidade identificados sobre os impactos potenciais estão diretamente relacionados com o propósito geral deste tipo de estudos que é o de estabelecer conexões entre a investigação e a prática de sala de aula, de acordo com

Confrey e Lachance (2000). A realização de experiências de ensino, na perspectiva destes autores, poderá produzir mudanças ao nível da sala de aula mais rapidamente e de modo mais efetivo do que de uma outra forma.

McKenney et al. (2006) identificam, também, um conjunto de critérios de qualidade para avaliar desenhos curriculares que vão ao encontro dos identificados por Confrey e Lachance (2000) a propósito dos impactos potenciais de uma experiência de ensino. Os autores referem como critérios gerais a viabilidade, legitimidade e eficácia do produto curricular desenvolvido. A viabilidade está associada à implementação do desenho curricular e diz respeito ao facto de o mesmo produto poder ser usado na prática de ensino habitual, à sua relevância enquanto produto curricular e à sua sustentabilidade. A legitimidade está relacionada com a ligação do produto curricular a aspetos científicos contemporâneos e com a sua consistência interna, harmonia e coerência. Finalmente, a eficácia está associada ao facto de o produto curricular produzir os resultados desejados (McKenney et al., 2006).

4.6. Recolha de dados

Logo no início de setembro de 2008 contactei com a direção do Conselho Executivo do Agrupamento de escolas a que pertence a escola em cuja turma desenvolveria o meu estudo. Este contacto teve como objetivo obter as autorizações necessárias para aceder à escola e à turma e explicitar, de modo claro e breve, o estudo que me propunha realizar.

Iniciei o meu acesso ao campo, ou seja, à escola e à turma no âmbito desta investigação, ainda no início de setembro, com reuniões com a professora Isabel e visitas informais à turma. Além disso, desde meados de setembro que as reuniões com a professora Isabel tiveram como objetivo o planeamento da experiência de ensino. O processo de experimentação na sala de aula e o trabalho de campo a ela associado teve início em novembro de 2008 e decorreu ao longo de todo o ano letivo, até meados de junho de 2009.

Em julho de 2008, tal como já foi referido, fiz um convite informal à professora Isabel para participar neste estudo, que o aceitou prontamente, com a promessa de voltarmos a falar no início do ano seguinte, o que aconteceu. Combinámos uma reunião na sua escola onde lhe explicitiei, mais detalhadamente, o âmbito e os objetivos do estudo que pretendia realizar e para o qual solicitava a sua colaboração. Expliquei, de forma pormenorizada, o processo antevisto e o tipo de trabalho que, sistematicamente, seria necessário realizar, de modo a conseguir prever, da sua parte, a disponibilidade e o interesse necessários na participação num estudo desta natureza. Ainda nessa primeira reunião ficou acordado um conjunto de procedimentos que era preciso desenvolver no sentido de se obterem as autorizações, junto dos Encarregados de Educação dos alunos da turma do 3.º ano, para a realização do estudo.

A partir do primeiro encontro ficou combinado reunirmos semanalmente, à quarta-feira, pelas 14 horas e 30 minutos, visto que os alunos tinham horário letivo de manhã, e desenvolver as aulas que constituíram a experiência de ensino na sua turma todas as quintas-feiras (podendo estender-se para a sexta-feira). A professora Isabel propôs começar as atividades com os alunos sempre às oito horas, podendo prolongá-las até à hora do intervalo, pelas 10 horas e 30 minutos.

Iniciámos, assim, as reuniões todas as quartas-feiras, ainda em setembro, com o propósito inicial de discutirmos alguns textos associados à temática do estudo, por mim facultados, de modo a desenvolvermos uma dinâmica de trabalho conjunto. De facto, apesar de nos conhecermos do ano anterior, só nesse ano letivo é que nos propúnhamos trabalhar desta maneira, em que, apesar de assumirmos papéis diferentes, tínhamos um propósito comum – dar sentido a uma experiência de ensino realizada na turma de Isabel. Por isso, estas primeiras reuniões tinham, também, o objetivo de partilharmos pontos de vista sobre aspetos do ensino e da aprendizagem em geral e, em particular, da aprendizagem da multiplicação, tal como sugere Cobb (2000), a propósito do processo de condução de experiências de ensino em colaboração com um professor.

Entretanto, elaborei uma proposta de sequências de tarefas que fariam parte de uma primeira trajetória hipotética de aprendizagem da multiplicação, que discuti e

reformulei de acordo com algumas sugestões de Isabel, considerando o seu conhecimento prático sobre a Matemática do 1.º ciclo e sobre os alunos da turma.

Tal como foi relatado anteriormente, também me desloquei várias vezes à sala de aula antes do processo de experimentação propriamente dito, tendo estado na aula de Matemática no papel de observadora, não recolhendo quaisquer dados.

Desde o início da experiência de ensino, em novembro, e até fevereiro, todas as semanas se realizou uma reunião com Isabel à quarta-feira e uma aula à quinta-feira (e, por vezes, também à sexta-feira), na qual foram recolhidos dados no âmbito do estudo. A meio do 2.º período escolar, em março, por sugestão da professora e de acordo com a sua disponibilidade, alterámos o dia da reunião semanal para segunda-feira e o dia da aula para quarta-feira. Por vezes, quando houve atividades mais prolongadas, por exemplo, quando os alunos elaboraram pósteres e realizaram um congresso matemático²⁰ a propósito da resolução de uma determinada tarefa, foram lecionadas duas aulas seguidas, na quarta e na quinta-feira, de modo a não espaçar temporalmente a exploração da mesma tarefa.

A partir do momento em que foi iniciado o processo de experimentação em sala de aula, segunda fase da experiência de ensino, as reuniões semanais, com uma duração média entre uma hora e meia a duas horas, tiveram um propósito duplo: refletir sobre a aula anterior e planificar as aulas seguintes. Nessas ocasiões foram “desenvolvidas interpretações partilhadas sobre o que acontecia na sala de aula” (Cobb, 2000, p. 331), tal como sugere este autor quando são realizadas experiências de ensino em que se colabora com um professor. Nestas reuniões, para além do que esteve diretamente ligado com a experiência de ensino, também tomei conhecimento e envolvi-me em discussões acerca do trabalho que Isabel ia desenvolvendo com os alunos no âmbito de outras temáticas da Matemática.

A recolha de dados foi exaustiva, tal como sugerem alguns autores (Confrey & Lachance, 2000; Molina et al., 2007) relativamente à recolha de dados de uma

²⁰Termo usado por Fosnot e Dolk (2001b). A explicação detalhada do que se entende por congresso matemático neste estudo é feita no Capítulo 5.

experiência de ensino, de modo a descrever as interações na sala de aula, os procedimentos dos alunos e a sua evolução, e as decisões que fomos tomando ao longo de todo o processo.

A tabela 4.2 apresenta uma síntese cronológica do processo de recolha de dados, referindo os métodos utilizados, desde que foram iniciadas as reuniões para preparação da experiência de ensino, mencionando essas reuniões, as aulas observadas e a análise documental. Não considerei pertinente explicitar as conversas informais tidas tanto com a professora como com os alunos, uma vez que estas ocorriam naturalmente, quando se proporcionava, sem qualquer controlo de data ou horário.

Tabela 4.2 – Síntese cronológica do processo de recolha de dados

Fontes	Observação participante		Recolha documental
	Reuniões com a professora	Aulas observadas	Professora da turma Alunos
Dias de setembro	22, 29		22, 29
Dias de outubro	8, 22	(16, 23) ²¹	8, 22
Dias de novembro	5, 12, 19, 26	6, 13, 20, 27, 28	5, 12, 19, 26, 6, 13, 20, 27, 28
Dias de dezembro	10	11	10, 11
Dias de janeiro	7, 14, 21, 28	8, 15, 22, 29, 30	7, 14, 21, 28, 8, 15, 22, 29, 30
Dias de fevereiro	4, 9, 16	5, 11, 18,	4, 9, 16, 5, 11, 18
Dias de março	3, 9, 16, 23, 30	5, 12, 18, 25, 26	3, 9, 16, 23, 30, 5, 12, 18, 25, 26
Dias de abril	14, 20, 27	15, 22, 29	14, 20, 27, 15, 22, 29
Dias de maio	4, 11, 18, 25	6, 7, 12, 19, 27	4, 11, 18, 25, 6, 7, 12, 19, 27
Dias de junho	1, 8, 15	2, 9	1, 2, 8, 9, 15

4.7. Análise de dados

O processo de análise de dados numa investigação na modalidade de experiência de ensino orientada por uma conjectura decorre em dois momentos distintos, de acordo

²¹ Aulas observadas antes do início do processo de experimentação.

com as suas características (Confrey & Lachance, 2000). Um primeiro nível de análise deve ocorrer ao longo do processo de experimentação na sala de aula, permitindo ajustar, alterar e aprofundar questões relacionadas com a experiência de ensino (Confrey & Lachance, 2000; Molina et al., 2007). Assim, deve ser feita uma análise do material empírico, ao longo de todo o processo de recolha de dados, que corresponde a uma análise ainda pouco profunda mas essencial. Efetivamente, o seu objetivo é refletir sobre cada intervenção na sala de aula, negociar e adaptar as próximas intervenções, podendo, também, ajustar a conjectura que conduz a experiência de ensino. Esta análise concomitante com a recolha de dados evidencia a interdependência que existe entre a recolha de material empírico e a interpretação dos dados.

Atendendo às recomendações supramencionadas, de Confrey e Lachance (2000) e de Molina et al. (2007), procurei organizar todo o trabalho de modo a que o primeiro nível de análise dos dados fosse a par da sua recolha. No sentido de proceder a esta primeira análise foram identificadas dimensões prévias a partir das questões do estudo: os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação, o modo como evoluíram os procedimentos, as dificuldades manifestadas, os aspetos do sentido de número revelados na resolução dessas tarefas e as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. Deste modo, o processo de análise de dados teve início com uma leitura atenta das produções dos alunos relativas a cada tarefa, à medida que estas iam sendo realizadas, dos meus relatórios resultantes da observação das aulas e, ainda, com o visionamento das gravações vídeo das mesmas. As leituras e o visionamento referidos permitiram o ajustamento e a reformulação de dimensões de análise relacionadas com os procedimentos usados pelos alunos, tendo como ponto de partida as questões do estudo e a revisão da literatura efetuada, evidenciando outras dimensões emergentes dos próprios dados. Do ponto de vista do processo de experimentação na sala de aula, as leituras e o visionamento referidos permitiram, também, a adaptação/ajustamento das tarefas propostas, de acordo com a evolução dos procedimentos dos alunos e do seu confronto com as nossas (minhas e de Isabel) expectativas associadas ao planeamento prévio das sequências de tarefas e às aprendizagens esperadas dos alunos.

Realizar esta primeira análise a par da recolha dos dados, revelou-se, ainda assim, um pouco difícil em algumas alturas, sobretudo no início do processo. De facto, considerando a natureza do estudo e, em particular as características da experiência de ensino que é orientada por uma conjectura e se concretiza através de uma trajetória de aprendizagem, apesar de ter sido traçada, à partida, uma trajetória hipotética, esta foi sendo ajustada e alterada durante todo o processo de recolha dos dados. Assim, as tarefas e sequências de tarefas a propor aos alunos foram sendo redesenhadas, adaptadas e/ou alteradas à medida que foram sendo exploradas na aula e que foram observados e analisados os procedimentos usados pelos alunos na sua resolução, tanto por mim como pela professora da turma. Deste modo, a recolha dos dados, a construção/adaptação das sequências de tarefas e a articulação entre elas exigiu, da minha parte, um esforço e uma ocupação temporal bastante intensos, nem sempre conseguindo que a análise dos dados acompanhasse, a par e passo, a sua recolha.

Após terminar todo o trabalho de campo iniciei uma outra fase de análise dos dados, a de análise retrospectiva (Cobb et al., 2003; Confrey & Lachance, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006), no âmbito da qual tornei a observar, atentamente, as produções dos alunos relativas a cada tarefa, a visionar os vídeos produzidos na sala de aula que captaram os diferentes momentos da exploração das tarefas – a sua realização, a sua apresentação e a discussão final com toda a turma – e reli, cuidadosamente, os relatórios produzidos por mim a propósito da observação das aulas e das reuniões com a professora Isabel e as notas de campo resultantes de conversas informais. Considerando que os dados recolhidos são, na sua maioria, de natureza qualitativa, a sua análise teve um carácter cíclico, sendo revisitados ao longo de todo o processo, na busca de novos conceitos e significados (Denzin & Lincoln, 2008; Merriam, 1991).

A revisão de todo o material empírico, após finalizar a sua recolha, fez-me refletir sobre a grande quantidade de dados recolhidos, uma vez que o processo que envolveu a preparação e a intervenção na sala de aula – as duas primeiras fases de uma experiência de ensino prolongou-se durante todo o ano letivo. Esse facto, bem como a natureza qualitativa da maior parte dos dados, contribuíram para uma grande riqueza e diversidade do material empírico e para uma compreensão aprofundada sobre os alunos da turma, os

seus modos de pensar, os procedimentos que foram utilizando, a sua evolução e os aspetos do sentido de número que manifestaram. No entanto, embora reconheça o interesse específico de cada uma das sequências de tarefas e as características distintivas de cada uma das tarefas, uma vez que todas elas, em conjunto, formam a trajetória de aprendizagem da multiplicação, de facto, uma análise das resoluções dos alunos tarefa a tarefa ou mesmo sequência a sequência, tornar-se-ia, inevitavelmente, repetitiva e demasiado extensa. Assim, surgiu a ideia, que concretizei, de agrupar as sequências de tarefas para proceder à análise dos dados daí decorrentes.

Ainda assim, apesar de agrupar as sequências de tarefas segundo um critério, a sua sucessão cronológica foi mantida, considerando que os objetivos do estudo realizado incluem a descrição e a análise da evolução dos procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação. Deste modo, as tarefas foram agrupadas de acordo com algumas particularidades das sequências de tarefas evidenciadas durante a revisão inicial de todos os dados, que sugeriram critérios de agrupamento, de forma a serem analisadas as suas resoluções.

De acordo com as características gerais das tarefas propostas associadas tanto às operações aritméticas subjacentes como aos números incluídos, estas foram organizadas em quatro grupos: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no seu sentido proporcional com números racionais não negativos na sua representação decimal. Cada um destes grupos inclui, por sua vez, tarefas interligadas entre si sequencialmente, através dos números e dos contextos, que denominei por sequências de tarefas. A tabela 4.3 explicita as tarefas incluídas em cada grupo, bem como as sequências de tarefas que foram organizadas.

Na análise dos dados optei por não considerar as produções dos alunos relativas às tarefas 23 e 24, por considerar que a sua análise não iria produzir dados empíricos relevantes, considerando as questões do estudo. Contudo, a resolução das mesmas tarefas revelou-se essencial na trajetória de aprendizagem da multiplicação dos alunos da turma. Também a tarefa 32, essencial na trajetória de aprendizagem da multiplicação, não foi

considerada na análise dos dados relativos a esta investigação, por razões semelhantes às anteriores.

Na análise dos dados relativa à identificação e caracterização dos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação, optei como considerar como evidência empírica os seus registos escritos a propósito da resolução das tarefas. A opção por recorrer, apenas, aos registos escritos produzidos pelos alunos como evidência empírica, prende-se com o facto de considerar que estes permitem obter uma visão global sobre os procedimentos daí emergentes, traduzindo o seu modo de raciocinar sobre os problemas propostos.

Optei, assim, por não incluir na identificação e caracterização dos procedimentos usados pelos alunos dados emergentes da análise das transcrições associadas às intervenções dos alunos no âmbito das discussões realizadas, no final de uma tarefa ou nos congressos matemáticos. Esta opção é justificada com o facto de pretender caracterizar os procedimentos dos alunos que, naturalmente, decorrem do seu modo genuíno de pensar sobre a tarefa. Os raciocínios associados às discussões sobre as tarefas incluem, já, o resultado das interações que entretanto surgiram. Também as tarefas de cálculo em cadeia, que incluem cadeias numéricas, realizadas periodicamente com os alunos na aula, não são objeto de análise para a caracterização dos procedimentos usados pelos alunos, dadas as suas características particulares de fazerem emergir determinados procedimentos associados a propriedades da multiplicação. De facto, as cadeias numéricas têm subjacentes na sua construção e veiculam o uso, de forma intencional, de determinadas maneiras de calcular, pelo que seria redundante e pouco natural, caracterizar, a partir delas, os procedimentos dos alunos.

Muitas das tarefas construídas/selecionadas por mim e pela professora Isabel, de modo a serem propostas aos alunos, incluíram um conjunto de problemas (subtarefas) relacionados entre si. Esta interligação faz-se através do contexto e dos números com que se calcula e, outros relacionam-se, apenas, pelos números ou pelos contextos. Apesar de relacionados, os problemas eram resolvidos pelos alunos, frequentemente, de modos diversificados e, mesmo havendo uma ligação explícita entre eles, os procedimentos usados não eram, necessariamente, semelhantes ou interligados. Assim, dadas estas

razões, considere pertinente realizar a análise dos dados individualizando cada uma dessas subtarefas e caracterizando, pormenorizadamente, os procedimentos usados pelos alunos em cada uma.

Tabela 4.3 – Organização dos grupos de tarefas e sequências de tarefas

Grupos de tarefas		Tarefas e sequências de tarefas incluídas
Tarefas de multiplicação com números naturais	Sequência 1	Tarefa 1 – Mercearia da Piedade 1 Tarefa 2 – Mercearia da Piedade 2 Tarefa 3 – Calcular em cadeia I
	Sequência 2	Tarefa 4 – Carteiras de cromos Tarefa 5 – Carteiras de cromos – congresso Tarefa 6 – Calcular em cadeia II
	Sequência 3	Tarefa 7 – Cortinas Tarefa 8 – Pátio do João e do Cristóvão Tarefa 9 – Calcular em cadeia III
	Sequência 4	Tarefa 10 – Pilhas de caixas Tarefa 11 – Pilhas de caixas – congresso Tarefa 12 – Calcular em cadeia IV
Tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal	Sequência 5	Tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas Tarefa 14 – Experimentar com garrafas Tarefa 15 – Calcular em cadeia V
	Sequência 6	Tarefa 16 – Contar moedas Tarefa 17 – Contar moedas 2 Tarefa 18 – Calcular em cadeia com decimais VI
Tarefas de divisão com números naturais	Sequência 7	Tarefa 19 – Colecionar cartas Tarefa 20 – Máquinas de bebida Tarefa 21 – Máquinas de bebida – congresso Tarefa 22 – Calcular em cadeia VII
	Sequência 8	Tarefa 23 – Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e de 10 Tarefa 24 – Regularidades nas tabuadas
	Sequência 9	Tarefa 25 – Outra máquina de bebidas Tarefa 26 – Miniaturas de animais Tarefa 27 – Miniaturas de animais – congresso Tarefa 28 – Calcular em cadeia VIII
Tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na sua representação decimal	Sequência 10	Tarefa 29 – Ida ao teatro Tarefa 30 – Ida à Mercearia da Piedade Tarefa 31 – Calcular em cadeia IX
Tarefas cujo contexto está associado ao sentido combinatório da multiplicação	Sequência 11	Tarefa 32 – Organizar menus Tarefa 33 – Organizar menus – congresso

A tabela 4.4 discrimina as tarefas e subtarefas cujos procedimentos dos alunos são objeto de análise para identificar e caracterizar os procedimentos dos alunos e o seu modo de organização em cada um dos grupos de tarefas identificados.

O nível seguinte da análise dos dados centrou-se na leitura orientada do corpo de dados referente a cada grupo de sequências de tarefas e de tarefas. Reli novamente os relatórios de observação das aulas relativas a cada grupo de tarefas e acrescentei algumas notas que procuravam realçar aspetos considerados significativos para a análise. Mais uma vez visioniei os vídeos, mas agora, de modo organizado, de acordo com os grupos de tarefas constituídos. No mesmo sentido, observei repetidamente as produções dos alunos associadas a cada grupo de tarefas. O propósito desta observação repetida do corpo de dados relativo a cada grupo de tarefas foi identificar um esquema organizativo que permitisse, por um lado, relatar todo o processo, ou seja, “contar a história” e, por outro, analisar os aspetos associados às questões da investigação que realizo.

Tabela 4.4 – Organização das tarefas para análise dos procedimentos dos alunos de acordo com as suas características

Grupos de tarefas	Tarefas	Subtarefas
Tarefas de multiplicação com números naturais	Tarefa 1 – Mercearia da Piedade 1	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 2 – Mercearia da Piedade 2	Subtarefa 1
	Tarefa 4 – Carteiras de cromos	Subtarefas 1, 2 e 3
	Tarefa 7 – Cortinas	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 8 A – Pátio do João	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 8 B – Pátio do Cristóvão	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
Tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	Tarefa 10 – Pilhas de caixas	Subtarefas 1, 2 e 3
	Tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas	Subtarefas 1, 2, 3 e 4
	Tarefa 16 – Contar moedas 1	Subtarefa 1
Tarefas de divisão com números naturais	Tarefa 17 – Contar moedas 2	Subtarefas 4, 5 e 6
	Tarefa 19 – Colecionar cartas	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 20 – Máquinas de bebidas	Subtarefas 1 e 2
	Tarefa 25 – Outra máquina de bebidas	Subtarefa 1
Tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal	Tarefa 26 – Miniaturas de animais	Subtarefa 1
	Tarefa 29 – Ida ao teatro	Subtarefas 1, 2 e 3
	Tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade	Subtarefas 1, 2 e 3

Tendo sempre como pano de fundo as questões do estudo, foquei a atenção, numa primeira parte, nos procedimentos usados pelos alunos. A revisão da literatura e a análise das produções escritas dos alunos da turma do 3.º ano permitiram reconhecer grandes categorias de procedimentos usados por estes ao resolverem as tarefas propostas: procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimentos subtrativos e procedimentos multiplicativos. Em cada uma das quatro categorias identificadas foram, ainda, discriminados procedimentos específicos que organizei sob a forma de tabela. A

caracterização dos procedimentos inventariados foi efetuada detalhadamente, explicitando o que entendo por cada um deles e dando exemplos de produções dos alunos.

De modo a ter uma percepção global dos procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas e da sua evolução ao longo da experiência de ensino, a sua frequência foi quantificada em tabelas, considerando cada uma das tarefas/subtarefas realizadas. A análise global e transversal das tabelas relativas às frequências de cada procedimento e a distribuição dessas frequências em termos cronológicos, permitiu-me identificar alguns aspetos relevantes relacionados, não só com os procedimentos usados mas, também, com a sua evolução ao longo da experiência de ensino. É importante destacar que, quando neste estudo me refiro a evolução dos procedimentos dos alunos, estou a considerar o termo evolução com o significado que lhe confere o Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea da Academia das Ciências de Lisboa, ou seja, como “processo de transformação gradual que se opera ao longo de determinado período de tempo” (Volume I, 2001, p. 1622). Isso significa que, ao analisar a evolução dos procedimentos considero, não só as transformações no sentido da progressão mas, também, as transformações que correspondem a regressões ou a estabilizações.

Com o propósito de aprofundar o estudo sobre os aspetos associados à evolução dos procedimentos dos alunos analisei novamente todo o material empírico, tanto o relativo às produções escritas dos alunos como o recolhido por observação participante, complementado por gravações de vídeo, na sala de aula. Assim, e uma vez que as aulas dedicadas à exploração da multiplicação incluíram tarefas de tipos diferentes – problemas e cadeias numéricas – era importante encontrar um esquema organizativo que permitisse evidenciar a análise da evolução dos procedimentos dos alunos, ao mesmo tempo que tivesse em conta os diferentes momentos da exploração das tarefas na aula. Deste modo, organizei a análise seguindo um esquema que, para cada grupo, descreve e analisa, cronologicamente, aspetos relacionados com a evolução dos procedimentos dos alunos integrando os diferentes momentos da aula – introdução, exploração e discussão com toda a turma – associados à exploração dos vários tipos de tarefas.

A análise da evolução dos procedimentos usados pelos alunos tem subjacente as práticas matemáticas de sala de aula, ou seja, compreende as discussões dos alunos e da professora a partir das tarefas propostas e foca-se na explicitação de raciocínios feitos pelos alunos e partilhados com os colegas, nos argumentos utilizados e no uso, por vezes, de linguagem simbólica (Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Stephan & Cobb, 2003), para além da análise das suas produções escritas. No que diz respeito à aprendizagem da multiplicação, a evolução dos procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas associadas a esta operação, tem subjacente a construção das grandes ideias (*big ideas*) associadas ao raciocínio multiplicativo: o entendimento de um grupo como unidade e o uso de procedimentos associados à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, à propriedade comutativa, aos padrões de posição associados à multiplicação por dez e, finalmente, à propriedade associativa da multiplicação (Fosnot, 2007; Fosnot & Dolk, 2001b). Assim, a análise da evolução dos procedimentos usados pelos alunos tem em consideração, também, estas grandes ideias.

Após ter sido encontrado o modo de organizar a análise em cada grupo de tarefas e para cada grupo, os dados foram tratados grupo a grupo e foi elaborada uma narrativa de acordo com os tópicos identificados, incluindo, de forma integrada, as dimensões de análise relacionadas com a questão do estudo sobre a evolução dos procedimentos dos alunos. No final da análise de cada grupo de tarefas é elaborada uma síntese, destacando os aspetos que sobressaíram da narrativa realizada e que estão diretamente relacionados com as questões do estudo.

Após a análise grupo a grupo, seguiu-se um outro nível de análise, que consistiu numa análise de segunda ordem, transversal e global, orientada pela questão de investigação relacionada com as dificuldades dos alunos e enformada, também, pela teoria. Foram relidas as secções da análise relativas à caracterização e à evolução dos procedimentos dos alunos e, numa primeira fase, foram identificadas na narrativa todas as ocorrências da palavra dificuldades. Ciclicamente foram efetuadas outras leituras, com o objetivo de compreender os fatores a que estiveram associadas as dificuldades manifestadas pelos alunos e o modo como foram (se o foram) ultrapassadas. Posteriormente, e como resultado desta análise de segunda ordem, foi elaborado o

relatório sobre as dificuldades dos alunos na resolução das tarefas e o modo como foram ultrapassadas, inserido na secção correspondente deste estudo.

A análise relativa aos aspetos do sentido de número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação foi efetuada tendo como ponto de partida as categorias associadas às componentes do sentido de número propostas por McIntosh et al. (1992). Considerando este propósito, revisei, mais uma vez, todo o material empírico recolhido e voltei a ler o relatório da análise já realizada para dar resposta às questões do estudo já estudadas – sobre a caracterização dos procedimentos, a sua evolução e as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas. A partir daí elaborei o relatório associado à análise das várias componentes do sentido de número manifestadas pelos alunos. É de realçar que, relativamente às componentes mais diretamente ligadas à operação multiplicação, produzi apenas uma síntese, de modo a evitar repetições, considerando que esta operação é objeto de análise pormenorizada nos capítulos de análise anteriores a este.

A análise das potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação foi realizada tomando como referência a última sequência de tarefas de cada grupo de tarefas. Esta opção é justificada pelo facto de, ao focar-me na última sequência de tarefas, a sua análise permitir perceber, também, a evolução dos procedimentos dos alunos até esse momento da trajetória de aprendizagem. Desta opção decorre a análise das potencialidades das seguintes sequências de tarefas, resumidas na tabela 4.5.

De forma a analisar e discutir o contributo das tarefas e sequências de tarefas, foi caracterizada a última sequência de tarefas de cada grupo, relativamente ao contexto, aos números e ao modo como se articulam e sequenciam entre si. O confronto entre estas características das tarefas, a sua sequenciação e articulação e os procedimentos usados pelos alunos na sua resolução permitiu estudar o contributo destas tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Tabela 4.5 – Sequências de tarefas analisadas relativamente às suas potencialidades e grupos a que pertencem

Grupos de tarefas	Sequências de tarefas analisadas
Tarefas de multiplicação com números naturais	Sequência 4
Tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal	Sequência 6
Tarefas de divisão com números naturais	Sequência 9
Tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal	Sequência 10

Depois de realizar uma primeira versão da análise dos dados facultei-a à professora Isabel, bem como este capítulo de Metodologia do estudo. O meu propósito foi suscitar, da sua parte, reações e comentários, tanto de natureza crítica como interpretativa, bem como validar o que estava escrito e, que, de alguma forma, lhe dizia respeito ou aos seus alunos. Da sua parte encontrei sempre uma atitude de colaboração que se traduziu na leitura atenta e pormenorizada dos documentos e no pedido de algumas clarificações sobre o que estava escrito. Isabel fez, ainda, uma apreciação bastante favorável do que leu e considerou que reconhecia o trabalho por ela realizado, tecendo até o seguinte comentário sobre algumas das transcrições de episódios da sala de aula: “Esta sou mesmo eu!”.

Capítulo 5

A experiência de ensino na turma de Isabel

Este capítulo explicita a preparação da experiência de ensino que sustenta a investigação que realizei e que inclui a construção da trajetória de aprendizagem da operação multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número.

Começo por descrever, na primeira parte, as experiências numéricas anteriores realizadas pelos alunos da turma, sobre o tema curricular Números e Operações, antes do início da experiência de ensino na sala de aula de Isabel. Na segunda parte apresento a conjectura que conduziu o desenvolvimento da experiência de ensino (Confrey & Lachance, 2000; Lesh & Kelly 2000). Esta é explicitada nas suas vertentes de conteúdo e pedagógica, sendo fundamentadas as várias opções tomadas. Na terceira e quarta partes clarifico e fundamento a trajetória de aprendizagem da multiplicação, tal como foi inicialmente concebida, constituída por sequências de tarefas adequadas à sua exploração na turma do 3.º ano. São apresentadas, também, as sequências de tarefas concretizadas, sendo explicitados, para cada uma, as grandes ideias associadas à aprendizagem da multiplicação, antecipados os procedimentos que poderiam ser utilizados pelos alunos na sua resolução e especificados aspetos ligados ao contexto e aos números das tarefas.

Finalmente, numa última secção, são descritas as aulas que constituíram a experiência de ensino.

5.1. As experiências numéricas dos alunos associadas ao tema Números e Operações

As experiências numéricas dos alunos da turma do 3.º ano, associadas ao tema Números e Operações, no início da experiência de ensino estão relacionadas com o conteúdo do Programa de Matemática vigente à altura (Ministério da Educação. DGEBS, 1990) no que respeita aos dois primeiros anos de escolaridade, uma vez que o seu começo coincidiu praticamente com o princípio do ano letivo. Entre o início do ano letivo e o da experiência de ensino houve uma diferença de cerca de um mês e meio que, segundo a professora, correspondeu a um período em que foram feitas, quase exclusivamente, revisões dos conteúdos lecionados no ano anterior, o 2.º ano de escolaridade.

Tendo por referência o Programa de Matemática vigente, este foi cumprido no 2.º ano de escolaridade. A perspetiva de cumprimento do Programa alinha com o que é combinado em conjunto, em reuniões com os docentes do Agrupamento que lecionam o mesmo ano de escolaridade. Assim, no início do 3.º ano, segundo a professora e considerando, também, o meu conhecimento sobre as práticas dos alunos no ano anterior, estes tinham uma razoável compreensão sobre o sistema de numeração e as suas características enquanto sistema de numeração decimal de posição e resolviam problemas envolvendo as quatro operações com números inteiros positivos.

No que se refere às operações adição e subtração, os alunos usavam tanto o cálculo mental, escolhendo procedimentos eficientes de acordo com os números envolvidos, como o cálculo algorítmico para resolver problemas que envolviam números da ordem das centenas e milhares. O cálculo algorítmico era o privilegiado em situações de cálculo, apesar de os alunos manifestarem alguma facilidade no cálculo mental associado a estas operações, em virtude de este ter sido trabalhado com alguma regularidade na sala de aula.

No que diz respeito à operação multiplicação, os alunos resolviam problemas que envolvem esta operação, usando procedimentos diversos, recorrendo sobretudo à adição. Durante o 2.º ano aprenderam algumas tabuadas, as que constam do Programa em vigor na altura, mas por ordem diferente da que aí é recomendada. Em vez de aprenderem sequencialmente as tabuadas do “dois”, “três”, “quatro”, “cinco” e “dez”, seguindo a abordagem tradicional, ou seja, recorrendo sempre à ideia de multiplicação como uma adição de parcelas iguais, fizeram-no de modo diferente. Abordaram inicialmente as tabuadas do “dois”, “cinco” e “dez” (que surgem naturalmente recorrendo aos dobros e à própria estrutura do sistema de numeração), seguindo-se as tabuadas do “quatro” (partindo da tabuada do “dois” e recorrendo aos dobros) e do “três”. As tabuadas foram sendo construídas a partir das relações estabelecidas com as aprendidas anteriormente, privilegiando relações multiplicativas e propriedades da multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001b; Mendes & Delgado, 2008). No final do ano, os alunos aprenderam o algoritmo da multiplicação em que o multiplicador é um número com um dígito, fazendo algum paralelismo com o cálculo de expressões multiplicativas representadas na forma horizontal. Por exemplo, para efetuarem 8×15 através do algoritmo, primeiro calculavam horizontalmente fazendo $8 \times 15 = 8 \times 5 + 8 \times 10$, transpondo depois os produtos parciais para o cálculo vertical, muito próximo do algoritmo tradicional.

Relativamente à operação divisão, os alunos resolverem alguns problemas que fazem apelo a esta operação, apesar de não ter sido ensinada como tal, nem sequer os símbolos matemáticos habituais ($:$ e $/$) que a representam. Assim, nas resoluções dos problemas, os alunos recorriam a procedimentos associados à adição e subtração sucessivas ou à multiplicação.

5.2. A conjectura que orientou a experiência de ensino

Tal como referi e justifiquei no capítulo anterior, esta investigação seguiu a modalidade de uma experiência de ensino conduzida a partir de uma conjectura, na aceção de Confrey e Lachance (2000) e de Lesh e Kelly (2000). A conjectura formulada, de acordo com os autores anteriores, tem duas dimensões essenciais e interligadas entre si –

a dimensão de conteúdo e a dimensão pedagógica. A primeira diz respeito ao conteúdo matemático que vai ser ensinado e a segunda ao modo como esse conteúdo irá ser trabalhado na sala de aula.

5.2.1. Dimensão de conteúdo da conjectura

A dimensão de conteúdo matemático da conjectura centra-se na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. A pertinência desta conjectura justifica-se, entre outras razões, pelo facto de o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), generalizado no ano letivo de 2010/2011, ter como propósito principal de ensino do tema Números e Operações, no 1.º ciclo, “Desenvolver nos alunos o sentido do número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos” (ME, 2007, p. 13). É de notar que este propósito principal de ensino se mantém nos ciclos seguintes (2.º e 3.º ciclos) o que reforça a sua importância.

No ano em que foi realizada a recolha de dados associada ao estudo que realizo, apesar de o PMEB ainda não estar em vigor, estava já prevista a sua generalização para os anos seguintes, o que, por si só, justifica a pertinência desta investigação se efetuar. De facto, a sua realização pode contribuir para aprofundar a compreensão sobre o significado de assumir uma perspetiva de desenvolvimento do sentido de número como pano de fundo a todo o trabalho a desenvolver no tema Números e Operações. Contudo, assumir o desenvolvimento do sentido de número como um eixo orientador implica organizar a aprendizagem da multiplicação dando especial relevância às grandes ideias associadas a esta operação, aos modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e aos procedimentos informais dos alunos que, gradualmente, se vão transformando em procedimentos mais potentes, baseados em propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001b).

Tomando como base concepções teóricas de Fosnot (2007) e de Fosnot e Dolk (2001b) apresento as grandes ideias, as estratégias e os modelos relacionados com a multiplicação nos quais se fundamenta a dimensão de conteúdo da conjectura que orientou a experiência de ensino.

5.2.1.1. As ideias associadas à multiplicação

A construção do que autores, tais como Fosnot (2007) e Fosnot e Dolk (2001b), denominam por “grandes ideias” (*big ideas*) está na base da progressão que os alunos vão fazendo em termos do raciocínio multiplicativo. Como explicita Fosnot (2007), “as grandes ideias estão intimamente relacionadas com as estruturas da própria Matemática” (p. 14). Compreender as grandes ideias associadas à multiplicação significa compreender a estrutura multiplicativa em si e as relações entre as partes e o todo da própria estrutura. A adjetivação “grande” está relacionada com o facto de estas ideias corresponderem tanto a ideias estruturais dentro da própria Matemática como a saltos no desenvolvimento da estrutura de raciocínio das crianças (Fosnot, 2007; Fosnot & Dolk, 2001b). Assim, no caso da multiplicação, são identificadas como “grandes ideias”: o entendimento de um grupo como unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação.

O entendimento de um grupo como unidade. Inicialmente as crianças usam os números para contar objetos mas, a partir de uma certa altura, os números são também utilizados para contar grupos. Assim, quando as crianças são capazes de compreender que um saco de laranjas tem doze laranjas sem as contar uma a uma, ou que uma carteira de cromos tem oito cromos sem os contar um a um, estão a construir uma primeira etapa da compreensão da multiplicação e progridem no sentido de encontrar um modo de cálculo eficaz associado a esta operação. De facto, começam a ser capazes de entender um grupo como incluindo um determinado número de unidades e de operar partindo de grupos.

A propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração. Esta ideia, uma das mais importantes associadas à multiplicação, implica compreender

que, numa multiplicação, a decomposição dos fatores e a consequente adição ou subtração dos produtos parciais que se obtêm, não altera o resultado do produto dos fatores iniciais.

A propriedade comutativa da multiplicação. Esta ideia está relacionada com a compreensão que, na multiplicação, a alteração da ordem dos fatores não altera o produto final.

Os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez. Esta ideia está relacionada com a propriedade comutativa e com a multiplicação por dez. A constatação que multiplicar 10×6 , que corresponde a calcular dez grupos de seis, tem como resultado 60, permite que os alunos identifiquem, rapidamente, um padrão. Este é explicitado frequentemente dizendo que, para calcular 10×6 , basta acrescentar um zero ao número seis. De facto, a existência desta regularidade está relacionada com o facto de a multiplicação ser comutativa e, por isso, $10 \times 6 = 6 \times 10$, ou seja, dez grupos de seis perfazem um total igual a seis grupos de dez. Esta ideia ajuda os alunos a compreender a estrutura do sistema de numeração.

A propriedade associativa da multiplicação. Esta ideia diz respeito à compreensão que, na multiplicação, os fatores podem ser agrupados de diferentes maneiras, não alterando o produto final.

As grandes ideias aqui apresentadas, para além de suportarem a dimensão de conteúdo da experiência de ensino, tal como referi anteriormente, estiveram na base da construção da trajetória de aprendizagem da multiplicação que a concretizou.

5.2.1.2. As estratégias associadas à multiplicação

“As estratégias podem ser observadas e são esquemas organizacionais que as crianças usam para resolver um problema” (Fosnot, 2007, p. 14), assim, as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem problemas de multiplicação estão intimamente relacionadas com as ideias que estes têm sobre esta operação. A sua progressão nas estratégias que utilizam está, deste modo, subjacente à construção gradual das ideias que as suportam. Alguns exemplos de estratégias de referência utilizadas pelos alunos quando

resolvem problemas de multiplicação são: o uso de adições repetidas, a contagem por saltos, o uso de dobros, de dobros e de metades, de múltiplos de cinco e de dez, o recurso a produtos parciais, às propriedades da multiplicação e a factorizações e agrupamentos flexíveis adequados aos números envolvidos (Fosnot, 2007; Fosnot & Dolk, 2001b; Treffers & Buys, 2008). Segundo Treffers (1991) e Treffers e Buys (2008), a evolução das estratégias usadas pelos alunos corresponde a uma progressiva esquematização através de diferentes níveis de desenvolvimento da operação multiplicação.

É de notar que, apesar de me referir, nesta subsecção, ao termo estratégias associadas à multiplicação, de modo a ser fiel aos autores em que me baseei, quando concretizo, neste mesmo capítulo, o modo como os alunos podem resolver cada uma das tarefas uso o termo procedimento. A explicitação das diferenças e semelhanças entre os termos estratégias e procedimentos e a justificação da minha opção, neste estudo, por procedimento foram efetuadas, anteriormente, numa secção própria, no capítulo 3.

5.2.1.3. Os modelos associados à multiplicação

De acordo com Fosnot e Dolk (2001b), “modelos são mapas mentais usados pelos matemáticos para organizar a sua atividade, resolver problemas ou explorar relações” (p. 73). No início da aprendizagem da multiplicação os modelos construídos pelas crianças estão muito associados à sua interpretação da situação proposta e emergem da representação da ação, denominando-se por modelos de situação (Fosnot & Dolk, 2001b; Gravemeijer, 1999, 2005). Por isso, os contextos das tarefas propostas aos alunos têm tanta importância no desenvolvimento de modelos a eles associados. Não é porque se planeia uma determinada tarefa pensando num modelo que daí emerge, que todos os alunos a vão interpretar e resolver recorrendo a esses modelos, mas é um facto que os contextos sugerem e determinam o uso de determinadas estratégias e modelos. O professor pode, também, recorrer a modelos para ilustrar e representar estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de um determinado problema, são modelos de estratégias. Essas representações feitas pelo professor ilustrando o raciocínio dos alunos, podem ajudar a visualização e a discussão das estratégias de cada um. À medida que o professor utiliza modelos como uma ferramenta didática para explicitar as estratégias

usadas pelos alunos, estes também vão sendo capazes de recorrer a eles para representar o seu próprio modo de pensar. Assim, os modelos que inicialmente eram modelos de situação passam por ser modelos de estratégias e transformam-se em modelos para pensar. Deste modo vão evoluindo para modelos enquanto ferramentas para pensar, ou seja, modelos matemáticos de relações numéricas (Fosnot & Dolk, 2001b; Gravemeijer, 1999, 2005).

Inicialmente, os modelos construídos pelas crianças para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais, logo a linha vazia é um modelo que facilita as representações deste tipo de situações. No entanto, à medida que as ideias sobre a multiplicação vão evoluindo, também os modelos, construídos pelos alunos ou usados pelo professor, vão sendo diversificados, de modo a acompanhar o desenvolvimento progressivo das ideias e das estratégias relacionadas com a multiplicação. Assim, são usadas, entre outras, disposições retangulares que suportam o raciocínio multiplicativo e tabelas de razão que suportam o raciocínio proporcional. Estes modelos são incluídos, explicitamente, como representações de situações associadas a algumas das tarefas propostas nesta experiência de ensino.

A opção pela disposição retangular é justificada por autores como Barmby, Harries, Higgins e Suggate (2009) que a consideram como uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo. Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) referem mesmo que a disposição retangular é o modelo mais importante para o pensamento multiplicativo e suas aplicações. Em particular, ilustra a propriedade comutativa melhor do que qualquer outro modelo e, além disso, permite visualizar as várias partições dos números que podem ser feitas, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, o que auxilia os alunos quando passam para o cálculo em coluna (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009).

A ideia de modelo apresentada por Fosnot e Dolk (2001b) é a utilizada neste trabalho. Os tipos de modelos apresentados e o modo como evoluem, estão incluídos na conjectura que orientou a experiência de ensino, tal como foi referido anteriormente, e por

isso, estiveram na base da construção e/ou adaptação das sequências de tarefas que constituem a trajetória de aprendizagem da multiplicação desenvolvida.

É de referir que existe uma inter-relação entre as grandes ideias, as estratégias e os modelos que suportam a dimensão de conteúdo da conjectura sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, tal como resume a figura seguinte.



Figura 5.1 – Elementos da dimensão de conteúdo da conjectura sobre a aprendizagem da multiplicação

5.2.2. Dimensão pedagógica da conjectura

A dimensão pedagógica da conjectura inclui aspetos relativos ao ambiente de sala de aula e às tarefas a propor aos alunos, tendo como base uma determinada perspetiva sobre a aprendizagem da Matemática. Esta vertente da conjectura implicou pensar na construção e desenvolvimento de uma certa cultura de sala de aula que favorecesse tanto o trabalho individual como em pares e que permitia, também, momentos de interação e de partilha entre os alunos, orquestrados pela professora Isabel. Além disso, foram selecionadas tarefas e organizadas em sequências que, à partida, se conjecturava que permitiam o desenvolvimento das grandes ideias, dos modelos e dos procedimentos associados à multiplicação, de modo que os alunos evoluíssem, progressivamente na sua compreensão sobre esta operação.

5.2.2.1. Perspetivas gerais sobre a aprendizagem da Matemática

Parece ser consensual, hoje em dia, que os alunos devem aprender Matemática com compreensão (NCTM, 2007), participando ativamente, através da experiência, na construção do seu próprio conhecimento. O que já não é consensual é o que significa aprender Matemática com compreensão ou como é que se proporcionam aos alunos oportunidades para aprender Matemática desse modo. Na perspetiva de Simon (2006), quando se fala de educação e, em particular de Educação Matemática, identificam-se três grupos de teorias relativamente às quais educadores matemáticos e investigadores se posicionam: as que encaram a aprendizagem numa perspetiva social, as que a encaram numa perspetiva cognitivista e as teorias que relacionam os dois tipos de perspetivas, a social e a cognitiva. Articulado com estas surge o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem introduzido por Simon (1995), para descrever o pensamento pedagógico relacionado com o ensino da Matemática para a compreensão. Inicialmente, de acordo com Clements e Sarama (2004), o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem surge como uma ferramenta cognitiva baseada numa perspetiva construtivista. Contudo, segundo estes autores, o conceito foi sendo adaptado de modo a servir também a perspetiva social, integrando as práticas de sala de aula que emergem das interações sociais aí estabelecidas, sobretudo as associadas ao discurso na aula de Matemática.

Adotar uma perspetiva de aprendizagem que relaciona teorias sociais com teorias construtivistas cognitivas significa assumir que a compreensão da Matemática se desenvolve tanto através da aprendizagem individual como em interação social, na sala de aula. Esta é a perspetiva que enforma esta experiência de ensino e que tem consequências tanto ao nível da aprendizagem como ao nível da investigação que desenvolvo. No que respeita à aprendizagem dos alunos, para além dos momentos de trabalho individual ou em pares, privilegiaram-se, também, os momentos de interação, orquestrados pela professora, a propósito da apresentação e discussão das tarefas realizadas, tal como é preconizado por diversos autores (Smith et al., 2009; Stein et al., 2007, 2008). Relativamente à investigação, a aceitação daquela perspetiva significou que a observação na sala de aula das ocorrências associadas à partilha de ideias, à apresentação, justificação e comparação das resoluções dos alunos, deu origem a material

empírico que é descrito e analisado detalhadamente, produzindo evidência que contribuiu para a compreensão da investigadora sobre as questões do estudo.

5.2.2.2. A cultura de sala de aula

A perspectiva de aprendizagem adotada nesta experiência de ensino, integrando as interações sociais, para além de aspetos individuais da aprendizagem, implica, também, construir uma certa cultura de sala de aula onde, a par das práticas matemáticas, se investe no estabelecimento de normas sociais e normas sociomatemáticas, segundo Cobb et al. (2001). No entanto, em qualquer grupo turma existe, de modo mais ou menos assumido, um conjunto de normas sociais que regem as interações entre os alunos e o professor, e no caso da aula de Matemática, normas específicas associadas à atividade matemática dos alunos. Assim, importa clarificar o que se entende, no âmbito desta experiência de ensino, por normas sociais e por normas sociomatemáticas, considerando o seu propósito de aprofundar a aprendizagem da multiplicação, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número.

As normas sociais subjacentes a uma cultura de sala de aula que promova o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos são as identificadas por Yackel e Cobb (1996). Estes autores identificam como normas sociais a valorização da explicação, da justificação e da argumentação referente aos modos de pensar dos alunos, a tentativa de compreender as ideias dos outros e a discussão sobre alternativas a processos ou soluções. É de notar que estas normas sociais podem fazer parte da cultura de sala de aula de qualquer disciplina, e não apenas da aula de Matemática.

Quando se referem normas sociomatemáticas neste trabalho, está-se a falar do que se considera, na aula de Matemática, uma explicação ou uma justificação matematicamente aceitável, uma resolução ou uma solução matematicamente diferente ou, ainda, uma resolução matematicamente eficiente (Cobb et al., 2001; Yackel, 2001; Yackel & Cobb, 1996).

O que significavam as normas sociais e as normas sociomatemáticas no contexto da turma de 3.º ano e, em especial, nas aulas de Matemática foram questões abordadas e

discutidas nas reuniões com a professora, com um duplo objetivo. Por um lado, pretendia compreender e caracterizar a cultura de sala de aula existente e, por outro, discutir que aspetos da cultura de sala de aula poderiam ser alterados de modo a criar um ambiente propício à aprendizagem da Matemática, tal como é encarada neste estudo. De facto, considero a construção gradual de uma cultura de sala de aula onde são negociadas normas sociais e sociomatemáticas com os alunos, na perspetiva dos autores citados anteriormente, fundamental para o desenvolvimento do trabalho na aula de Matemática. Partilho da ideia expressa por Wood, Williams e McNeal (2006) ao afirmarem que “os padrões de interação social estabelecidos na sala de aula afetam especificamente o modo como as crianças constroem o seu conhecimento matemático naquela sala de aula” (p. 248).

Relativamente às normas sociais, na discussão entre Isabel e eu própria, tomámos como base as identificadas por Cobb et al. (2001) no estudo que realizaram, que foram, gradualmente, negociadas com os alunos da turma do 3.º ano. Os autores referidos explicitam um conjunto de normas, negociadas entre professor e alunos e aceites por estes últimos. Assim, os alunos aceitaram:

1. Explicar e justificar o seu raciocínio;
2. Ouvir e tentar compreender as explicações de outros;
3. Indicar quando não compreendiam e, se possível, pedir esclarecimentos;
4. Referir quando não consideravam as soluções válidas e explicar as razões para essa apreciação.

No que respeita às normas sociomatemáticas tivemos como base as identificadas pelos mesmos autores: aceitar partilhar o mesmo propósito, modos de raciocinar usando ferramentas e símbolos, e formas de argumentação matemática (Cobb et al., 2001).

Tanto as normas sociais como as normas sociomatemáticas, subjacentes à cultura de sala de aula existente na turma do 3.º ano, foram sendo ajustadas e aperfeiçoadas com os alunos ao longo da experiência de ensino, uma vez que delas dependiam, para além da construção do seu conhecimento matemático, aspetos associados à recolha dos dados para a investigação em curso. Efetivamente, o modo como os alunos interagiam entre si e com a professora, como explicitavam e justificavam os seus raciocínios foram essenciais

para a recolha e posterior análise dos dados associados à evolução dos procedimentos que usaram na resolução das tarefas propostas, bem como aos aspetos do sentido de número manifestados.

O esquema seguinte resume as perspetivas gerais sobre a aprendizagem da Matemática assumidas neste estudo e a cultura de sala de aula subjacente, tendo implícito, também, o papel desempenhado pela professora Isabel na construção e manutenção dessa cultura.

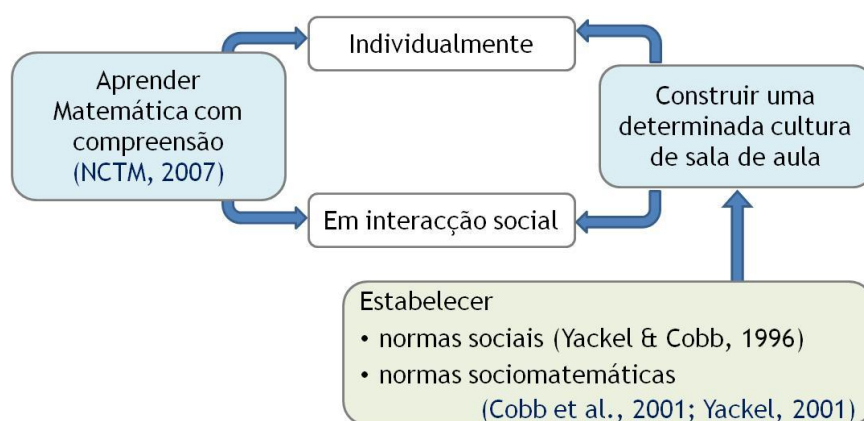


Figura 5.2 – Perspetivas sobre a aprendizagem da Matemática e a cultura de sala de aula

5.2.2.3. As tarefas e os seus contextos

A importância das tarefas matemáticas no processo de ensino e aprendizagem tem justificado, nas últimas décadas, o desenvolvimento de estudos sobre a temática (Stein et al. 2007; Walls, 2005). De facto, segundo Stein et al. (2007) “as tarefas matemáticas, nas quais os alunos se envolvem, determinam o que eles aprendem em Matemática e como o aprendem” (p. 346). Além disso, considerando que a aprendizagem se deve focar nos processos de raciocínio e de pensar matematicamente, os currículos refletem esta preocupação ao preconizarem abordagens pedagógicas baseadas, sobretudo, em tarefas matemáticas abertas e de resolução de problemas (Walls, 2005).

O entendimento de tarefa matemática é diversificado. Stein et al. (2007) assumem tarefa como “a atividade matemática na sala de aula cujo propósito é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular” (p. 346). Associadas à ideia de tarefa surgem a sua construção e seleção, de acordo com a sua intencionalidade. Alguns autores sugerem

princípios para a sua seleção, uma vez que a tarefa “precisa de ser o veículo” através do qual o professor explora a Matemática com os alunos, num ambiente de inquirição (Watson & Mason, 2007).

Um entendimento um pouco diferente de tarefa, fazendo a distinção entre tarefa e atividade, é o referido por autores como Ponte e Serrazina (2000) e Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997). De acordo com estes autores, as tarefas são quase sempre propostas pelo professor e são o ponto de partida para a atividade matemática do aluno. No entanto, uma mesma tarefa pode dar origem a atividades muito diferentes, dependendo dos alunos e da cultura de sala de aula estabelecida.

Considerando-as um “contexto” para a aprendizagem (Doyle, 1988), as tarefas podem ter exigências cognitivas diferentes, de acordo com o tipo e nível de pensamento que suscitam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática (Stein et al., 2007). Os procedimentos com conexões focam-se na aprendizagem de processos e de representações e pretendem promover a compreensão de ideias e conceitos matemáticos. As tarefas de fazer matemática não sugerem qualquer caminho e exigem a compreensão de conceitos matemáticos, de processos e de relações. Nesta experiência de ensino, de acordo com o seu propósito, as tarefas construídas inseriram-se nestes dois últimos níveis de pensamento.

Numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, Reys (1994) refere que as tarefas devem ser centradas nos processos e devem possuir determinadas características, já enunciadas no capítulo teórico sobre o sentido de número, de modo a favorecerem a sua evolução.

Tendo como pressuposto o desenvolvimento do sentido de número, há autores que veiculam a importância da exploração de contextos adequados (Fraivillig, 2001; Reys, 1994). Esta ideia-chave é retomada no caso particular da multiplicação, reforçando que a exploração de contextos apropriados faz emergir aspetos cruciais desta operação e do cálculo multiplicativo. O papel decisivo dos contextos e dos modelos subjacentes na aprendizagem da multiplicação justifica-se porque: (i) aqueles revelam aspetos basilares das estruturas multiplicativas associadas e (ii) permitem fazer uma primeira abordagem

às propriedades da multiplicação, facilitando o cálculo associado a esta operação (Fosnot & Dolk, 2001b; Mendes & Delgado, 2008; Treffers & Buys, 2008).

A seleção dos contextos apropriados, de acordo com o que foi referido, reveste-se, assim, de uma grande importância. Segundo Fosnot e Dolk (2001a, 2001b) os contextos devem integrar três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer “sentido” para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões. Permitir o uso de modelos significa que as tarefas propostas aos alunos devem incluir imagens ou situações que lhes suscitem a utilização de um determinado modelo. Fazer “sentido” para os alunos inclui dois aspetos. Por um lado, devem ser propostas situações reais ou imaginárias com as quais os alunos sejam capazes de lidar e de analisar a razoabilidade das ações que executam e dos resultados a que chegam. Por outro lado, devem fazer “sentido” para a construção de estruturas e de relações, ou seja, estas podem emergir do contexto proposto. Criar surpresa e suscitarem questões relaciona-se com o facto de serem suficientemente interessantes e desafiantes no sentido de provocar nos alunos a vontade de explicar o que está a acontecer e de encontrar respostas a questões do tipo: *Porque é assim? Será que é assim? E o que acontece se...* A surpresa e o desafio dos alunos podem permitir a exploração de problemas bastante interessantes do ponto de vista da Matemática.

Os contextos das tarefas que fazem parte da experiência de ensino sobre a multiplicação foram construídos e/ou adaptados considerando as características que devem evidenciar e a sua articulação com as grandes ideias, estratégias e modelos que podem emergir da sua exploração adequada. Assim, foram utilizados como contextos, por exemplo, imagens de produtos do dia-a-dia embalados de diversas formas, tais como imagens de caixas de fruta em que esta está organizada segundo uma disposição retangular ou de garrafas de água embaladas em grupos de seis garrafas. Contextos que envolvem dinheiro e onde se recorre a tabelas de preços são, também, usados em algumas das tarefas propostas aos alunos.

Para além das tarefas cujos contextos têm as características enunciadas, foram propostas, também, outro tipo de tarefas, com um contexto puramente matemático, caracterizadas na subsecção seguinte.

5.2.2.4. Os tipos de tarefas e a sua alternância

Na experiência de ensino realizada, as tarefas construídas e/ou selecionadas para serem exploradas pelos alunos são de natureza diferente, de acordo com a previsível atividade matemática em que estes se envolvem. De um modo geral, foram propostas aos alunos dois tipos diferentes de tarefas: problemas e cadeias numéricas.

Os problemas surgem de um determinado contexto, caracterizado anteriormente, que se pretende interessante e desafiante para os alunos, e têm como objetivo que estes se envolvam na sua resolução, utilizando determinados procedimentos de cálculo, de modo a ir construindo, progressivamente, as grandes ideias relacionadas com a multiplicação. Após a sua resolução, alguns alunos, individualmente, ou em pares, apresentam os procedimentos utilizados e é organizada uma discussão, pelo professor, onde toda a turma é desafiada a participar. O propósito desta discussão, para além da apresentação e comparação dos vários modos de resolução dos alunos, é, quase sempre, evidenciar um determinado procedimento de cálculo ou uma relação numérica que facilita a realização do problema.

Muitos dos problemas são situações abertas, próximos de investigações matemáticas e, para além dos objetivos relacionados com a emergência de determinados procedimentos de cálculo, têm, ainda, outros objetivos ligados ao saber explorar um contexto, conceber um plano, formular e testar conjecturas, inventar modos criativos de resolução e ser capaz de perante os outros, argumentar e fundamentar as suas ideias. Este tipo de tarefas ajuda os alunos a desenvolver um trabalho próximo do realizado pelos matemáticos e a transformar a sala de aula numa comunidade matemática (Fosnot & Dolk, 2001b).

Continuando o paralelismo entre a sala de aula e uma comunidade matemática, surgem os congressos matemáticos decorrentes de alguns dos problemas propostos (Fosnot, 2007; Fosnot, & Dolk, 2001b; Hersch, Fosnot & Cameron, 2005; Jensen & Fosnot, 2007). Depois de os alunos, em grupo, se terem envolvido na realização de uma tarefa, é proposto a alguns deles que comuniquem aos outros os aspetos que consideraram mais relevantes nesse processo. Para isso, cada grupo elabora um póster,

selecionando as ideias, procedimentos, soluções, conjecturas que considera pertinentes, de modo a comunicá-las aos colegas. Numa primeira fase, os pósteres produzidos são expostos na sala de aula de modo a serem visionados e interpretados por todos. Numa segunda fase, de acordo com os propósitos do professor, são escolhidos alguns grupos de alunos que apresentam o seu póster aos colegas, respondem a questões colocadas, esclarecem dúvidas, comparam as suas resoluções com outras. Nesta fase o papel do professor é essencial. Por um lado, seleciona os grupos a apresentar de acordo com um critério que pode incluir aspetos como evidenciar procedimentos poderosos, realçar o uso de um determinado modelo ou estabelecer conexões entre procedimentos aparentemente diferentes. Por outro lado, e de acordo com a cultura de sala de aula que se pretende desenvolver, encoraja os grupos a explicar o seu póster e desafia os outros alunos a colocar questões, dúvidas, incentivando o estabelecimento de interações.

Tal como referem Fosnot e Dolk (2001b) um congresso matemático é mais do que uma simples partilha com toda a turma:

O congresso continua o trabalho de ajudar as crianças a tornarem-se matemáticos numa comunidade matemática. Os matemáticos comunicam as suas ideias, soluções, problemas, provas e conjecturas uns aos outros. De facto, as ideias matemáticas são tidas como “verdade” na medida em que a comunidade matemática as aceita como verdadeiras. (Fosnot & Dolk, 2001b, p. 29)

As cadeias numéricas, com um contexto puramente matemático, têm como finalidade desenvolver nos alunos um cálculo mental eficiente, evidenciando determinadas ideias e procedimentos de cálculo associados a propriedades dos números e da multiplicação. A estrutura da cadeia, constituída por cálculos sequenciais e encadeados, influencia os procedimentos dos alunos, uma vez que o cálculo de um determinado produto se baseia no cálculo realizado na(s) linha(s) anterior(es) (Fosnot & Dolk, 2001a, 2001b; Treffers & Buys, 2008).

Na concretização da experiência de ensino, ao longo do ano letivo, as propostas de problemas foram sendo intercaladas com as de cadeias numéricas, de modo que os alunos aí identificassem e utilizassem relações numéricas que pudessem ter surgido nos seus procedimentos informais de resolução dos problemas. Num processo cíclico,

apresentado na figura 5.3, por sua vez, as relações identificadas nas cadeias numéricas anteriores, poderiam ser usadas nos problemas seguintes, caminhando, progressivamente, para o uso de procedimentos flexíveis, baseados em propriedades da multiplicação.

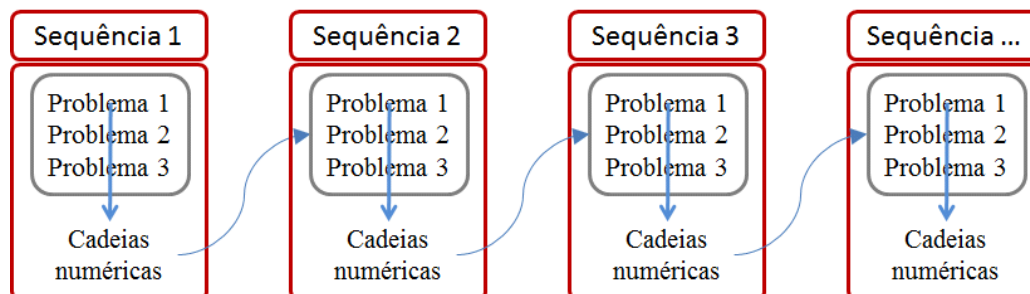


Figura 5.3 – Processo cíclico de resolução de problemas e de cadeias numéricas

Deste modo, os alunos vão construindo uma teia de relações numéricas, com significado para eles, que usam de modo flexível, nos seus procedimentos de cálculo mental, um dos aspetos apontado como manifestação de ter sentido de número (Greeno, 1991; Sowder, 1992).

5.2.2.5. A relação entre a multiplicação e a divisão

As operações multiplicação e divisão estão relacionadas entre si, enquanto operações matemáticas inversas uma da outra, num universo numérico adequado. Considerando esta associação entre as operações matemáticas, e no sentido de facilitar a compreensão entre as partes e o todo nas estruturas multiplicativas, é fundamental propor aos alunos situações que relacionem as duas operações. A partir do momento em que os alunos construíram a maior parte das grandes ideias sobre a multiplicação e usam procedimentos a ela associados, é essencial que lhes sejam propostos contextos de divisão. Naturalmente, na resolução de tarefas de divisão os alunos usam procedimentos diretamente ligados ao contexto proposto e relacionadas com o conhecimento que têm sobre as outras operações. Em particular, utilizam procedimentos e conhecimentos de multiplicação e, deste modo, identificam, gradualmente, a estreita relação entre multiplicação e divisão.

A experiência de ensino inclui, assim, pelas razões expostas, tarefas cujo contexto é de divisão mas que os alunos podem resolver usando o conhecimento que já possuem sobre a operação multiplicação ou outras. Em particular, a opção de estabelecer conexões entre a multiplicação e a divisão e de familiarizar os alunos com a ideia de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, está de acordo com o sugerido por alguns autores (Anghileri, 2003; Barmby, Bilsborough, et al., 2009; Fosnot, 2007; Fosnot & Dolk, 2001b; Natale & Fosnot, 2007; van den Heuvel-Panhuizen, 2008) e por documentos de referência, de natureza curricular (Abrantes et al., 1999; ME, 2007; NCTM, 2007). Em particular, Downton (2008) refere que, antes do trabalho formal com a divisão, é uma prioridade enfatizar a relação entre as duas operações e desenvolver a linguagem associada.

Anghileri (2006), para além de realçar as vantagens de trabalhar a multiplicação e divisão interligadas, ainda destaca o seu contributo no desenvolvimento do sentido de número. Afirmar a autora que “trabalhar factos de multiplicação e de divisão juntos e não enfatizar procedimentos de partilha ajudará a desenvolver o sentido de número dos alunos e a tomar consciência das ligações entre as operações” (p. 186). Além disso, ter consciência da relação entre as operações, especificamente, entre a multiplicação e a divisão é um dos aspetos contemplados no conhecimento e a destreza sobre as operações, uma das componentes do quadro de referência sobre o sentido de número de McIntosh et al. (1992).

5.2.2.6. O universo numérico das tarefas

A experiência de ensino tem como propósito a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número nos alunos. Considerando o entendimento, mais ou menos consensual, de que o sentido de número está associado a uma compreensão global e intuitiva sobre os números e as operações e a uma flexibilidade e compreensão sobre o cálculo com números e, em particular, os aspetos com ele relacionados, definidos por McIntosh et al. (1992), não faria sentido restringir o universo numérico das tarefas apenas aos números naturais (incluindo também o zero).

Assim sendo, e tendo, também, em consideração as orientações do Programa de Matemática do 1.º Ciclo (Ministério da Educação. DGEBS, 1990), em vigor durante o período da experiência de ensino na turma de Isabel, no que diz respeito ao tema Números e Operações do 3.º ano de escolaridade, bem como do atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), foi feita a opção de incluir nas tarefas propostas, para além dos números naturais, outros números racionais não negativos, em particular, na sua representação decimal.

Houve, também, uma escolha intencional dos números a usar nas várias tarefas, tendo em conta, por um lado, a progressão em termos da sua ordem de grandeza e, por outro, as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre alguns deles. Assim, para além de serem usados números cada vez maiores, em termos da sua ordem de grandeza, foram utilizados números de referência (McIntosh et al., 1992) tais como múltiplos de dois, de cinco e de dez, bem como números que sugerissem determinados procedimentos. Esta última opção está relacionada com “o capitalizar oportunidades para usar estratégias sensíveis aos números em situações de resolução de problemas” (Nickerson & Whitacre, 2010, p. 233). Segundo estes autores uma estratégia sensível aos números é definida como uma abordagem que cada aluno escolhe de entre as possíveis de usar e que tem significado para si próprio. O utilizar números com estas características na resolução de problemas, potenciando, assim, o recurso a procedimentos sensíveis aos números é uma das condições que, de acordo com Nickerson e Whitacre (2010), promove o desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

5.3. A trajetória de aprendizagem da multiplicação

A conjectura que conduziu a experiência de ensino sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número incluiu uma dimensão de conteúdo e outra dimensão pedagógica, apresentadas e justificadas nas secções anteriores. Estas dimensões foram basilares para a construção e concretização da trajetória de aprendizagem a ser desenvolvida na turma do 3.º ano.

A ideia de trajetória hipotética de aprendizagem é referida por alguns autores para concretizar, na sala de aula, investigações cujo *design* é o de uma experiência de ensino singular (Simon & Tzur, 2004) ou, numa perspetiva mais ampla, de *design research*, que inclui múltiplas experiências de ensino, num processo cíclico (Cobb et al., 2001; Gravemeijer & van Eerde, 2009).

Como referem Simon e Tzur (2004) e Steffe e Thompson (2000), a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem pode ser útil quando se usa uma metodologia de experiência de ensino. Segundo estes autores esta metodologia de investigação tem sido utilizada para compreender o conhecimento dos alunos sobre determinados conceitos matemáticos, e o seu sucesso depende da competência dos investigadores em criar “tarefas de aprendizagem efetiva”. Ora, é precisamente neste aspeto, que a elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem pode auxiliar, fornecendo um enquadramento para a construção e alteração das tarefas de aprendizagem efetiva (Simon & Tzur, 2004).

O constructo de trajetória hipotética de aprendizagem, preconizado por Simon (1995), está associado a um caminho de aprendizagem, antecipado à partida, norteado por objetivos de aprendizagem e orientado por um conjunto de tarefas concebidas pelo professor, considerando as ideias e os procedimentos que quer que o aluno desenvolva, neste caso, relacionados com a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. A trajetória hipotética de aprendizagem inclui, assim, as tarefas a propor aos alunos tendo em conta as hipóteses do professor sobre processos de aprendizagem, numa determinada cultura de sala de aula. A caracterização da trajetória usando a palavra “hipotética” pretende realçar, na perspetiva de Simon (1995) que, à partida, o professor coloca apenas hipóteses e que, a trajetória efetiva só é conhecida depois de realizada.

De acordo com Gravemeijer e Van Eerde (2009) a ideia de trajetória hipotética de aprendizagem de Simon (1995) veio conciliar “a postura construtivista que assume que o aluno constrói o seu próprio conhecimento com a obrigação da educação formal de se esforçar para atingir objetivos educacionais pré-determinados” (p. 511). De facto, de acordo com este constructo, o professor seleciona tarefas de ensino tendo como

pressuposto as suas expectativas sobre o modo como os alunos agem e raciocinam sobre elas. Daí a importância de antecipar o tipo de atividade mental que cada tarefa proporciona aos alunos e de a comparar com os objetivos de ensino que é necessário atingir (Gravemeijer & van Eerde, 2009).

A ideia de trajetória hipotética de aprendizagem, cunhada inicialmente por Simon (1995), ou apenas de trajetória de aprendizagem tem sofrido alguma evolução e, também, algumas críticas. Em termos evolutivos passou-se de uma perspectiva do individual para uma perspectiva do coletivo, ou seja, passou-se do pensar a trajetória de um aluno para o pensar a trajetória de um grupo (turma) (Cobb, Gravemeijer & Yackel, 2011). Esta reconceptualização não alterou a noção geral de trajetória de aprendizagem e dos aspetos a ela associados, mas encara-a como “uma sequência de práticas matemáticas coletivas ou comuns, cada uma das quais emergindo como uma reorganização de práticas anteriores” (Cobb et al., 2011; p. 80).

Autores como Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004), referindo-se a exemplos de trajetórias de aprendizagem, consideram-nas demasiado “prescritivas” e incompatíveis com a abordagem de investigação baseada na inquirição, apesar da nota positiva de serem orientadas por objetivos que se querem atingir dando determinados passos. Estes são aspetos que devem ser tomados em consideração quando se delineiam trajetórias de aprendizagem. Outros autores, como Doerr (2006), referem que, pensar em trajetórias de aprendizagem, na perspectiva de processos de aprendizagem individual, acarreta para o professor o ter de lidar com um conjunto de trajetórias de aprendizagem naturalmente diferentes e difíceis de gerir na sala de aula. Contudo, muitos outros investigadores (Clements & Sarama, 2004; 2009; Cobb et al., 2011; Nickerson & Whitacre, 2010; Simon & Tzur, 2004) preconizam a construção de trajetórias de aprendizagem, usando o termo hipotético ou não, como um modo de pensar a aprendizagem de um determinado tema, interrelacionando os múltiplos aspetos que as constituem.

Uma das abordagens que considero mais promissora é encarar uma trajetória de aprendizagem pensando em termos do coletivo da turma, tal como sugerem Cobb et al. (2011). Contudo, pensar no grupo turma não significa que todos os alunos progridam de modo uniforme ou que todos resolvam as tarefas da mesma maneira, uma das críticas que

pode ser apontada. Significa, pelo contrário, que se deve ter em consideração a diversidade dos modos de pensar matematicamente dos alunos. De facto, pensar numa trajetória de aprendizagem em termos do grupo turma não significa que todos os alunos tenham de seguir o mesmo caminho fechado e pré-determinado, mas que se tem em conta as participações de todos os alunos, necessariamente diferenciadas, nas práticas de sala de aula estabelecidas (Cobb et al., 2011).

Assumindo a perspetiva inicial de Simon (1995) sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem e a dimensão do coletivo, de acordo com Cobb et al. (2011) e pensando na turma do 3.º ano, foi delineada a trajetória hipotética de aprendizagem da multiplicação, concebida no âmbito desta experiência de ensino. Esta baseou-se, naturalmente, nas ideias que enformam as dimensões da conjectura formulada, já explicitadas e justificadas, considerando, também, os objetivos de ensino associados à multiplicação, preconizados pelas orientações curriculares atuais.

As tarefas e sequências de tarefas incluídas na trajetória de aprendizagem foram pensadas de acordo com as opções já fundamentadas. Uma primeira versão foi discutida com a professora Isabel, e com ela foram feitas algumas alterações. No Anexo 4 apresento a planificação que resultou das primeiras reuniões de trabalho com a professora. Esta primeira planificação era, ainda, pouco detalhada e concretizada, tentando evidenciar um fio condutor entre as várias tarefas, tendo como pano de fundo as ideias teóricas anteriormente apresentadas e alguma experiência profissional tanto ao nível da formação e supervisão de professores e futuros professores do 1.º ciclo, como ao nível da investigação desenvolvida no Projeto DSN.

Nessa primeira versão as tarefas não estavam construídas totalmente nem agrupadas em sequências de tarefas, havendo algumas ideias de adaptar tarefas já realizadas ou de construir outras de novo, de acordo com os pressupostos teóricos anteriormente enunciados, associados à aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Este aspeto é, aliás uma característica de qualquer trajetória de aprendizagem, na perspetiva de Simon (1995) – é, inicialmente, hipotética e vai sendo adaptada ao longo e de acordo com a sua exploração na sala de aula. Como referem Gravemeijer e van Eerde (2009), “as tarefas serão adaptadas aos

objetivos do professor e ao estilo de ensino, e à sua turma num dado momento” (p. 512). Contudo, apesar do seu carácter hipotético, é essencial a construção das tarefas que são exploradas na sala de aula, de modo a promover a aprendizagem dos alunos sobre um determinado conceito, considerando as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos mesmos (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004).

5.4. A construção da trajetória de aprendizagem

Tal como foi referido, só através, e durante, a exploração das tarefas na sala de aula é possível a construção e adaptação da trajetória de aprendizagem. Assim, na aula, o professor organiza a realização das tarefas propostas e consequente discussão e reflexão a partir das resoluções dos alunos. Para além disso, naturalmente, tem de ir adaptando, continuamente, a trajetória de aprendizagem inicialmente construída. Esta adaptação corresponde a um processo constante, dada a natureza hipotética da trajetória e os aspetos imprevisíveis que surgem a propósito dos procedimentos usados pelos alunos e de outros fatores associados ao contexto de sala de aula (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004).

De acordo com o enunciado, e a partir do momento em que as tarefas começaram a ser exploradas na aula de Matemática, as reuniões entre mim e a professora Isabel, constituíram um lugar privilegiado para refletir, de modo retrospectivo e prospetivo, sobre as tarefas e a própria trajetória de aprendizagem, numa perspetiva dinâmica, no sentido de a adaptar às práticas reais de sala de aula, considerando as múltiplas variáveis envolvidas. Assim, fomos alterando a primeira planificação realizada (Anexo 4) de modo a melhorá-la e a adaptá-la, de acordo com decisões decorrentes da própria exploração das tarefas e inerentes à trajetória, ou com necessidades e/ou constrangimentos que considero exteriores à própria trajetória. Estes últimos relacionam-se com a necessidade de melhorar a articulação entre os conteúdos programáticos da área da Matemática e a gestão do Programa feita em conjunto com outros professores do Agrupamento.

Antes do início da experiência de ensino foi feito, em colaboração com Isabel, um ponto da situação sobre o nível de conhecimentos dos alunos relativos à operação

multiplicação, tal como descrevi anteriormente. Ao longo da experiência de ensino a avaliação dos alunos relativa às aprendizagens associadas a esta operação foi efetuada de modo permanente e continuado, através da análise das resoluções escritas das tarefas realizadas pelos alunos, individualmente e em pares, bem como pelas suas intervenções orais nos momentos de discussão coletiva.

A figura seguinte resume o processo dinâmico que foi sendo estabelecido ao longo da experiência de ensino, inter-relacionando o conjecturado e antecipado com o que ia acontecendo na sala de aula e evidenciando os aspetos que contribuíram para a construção da trajetória de aprendizagem.

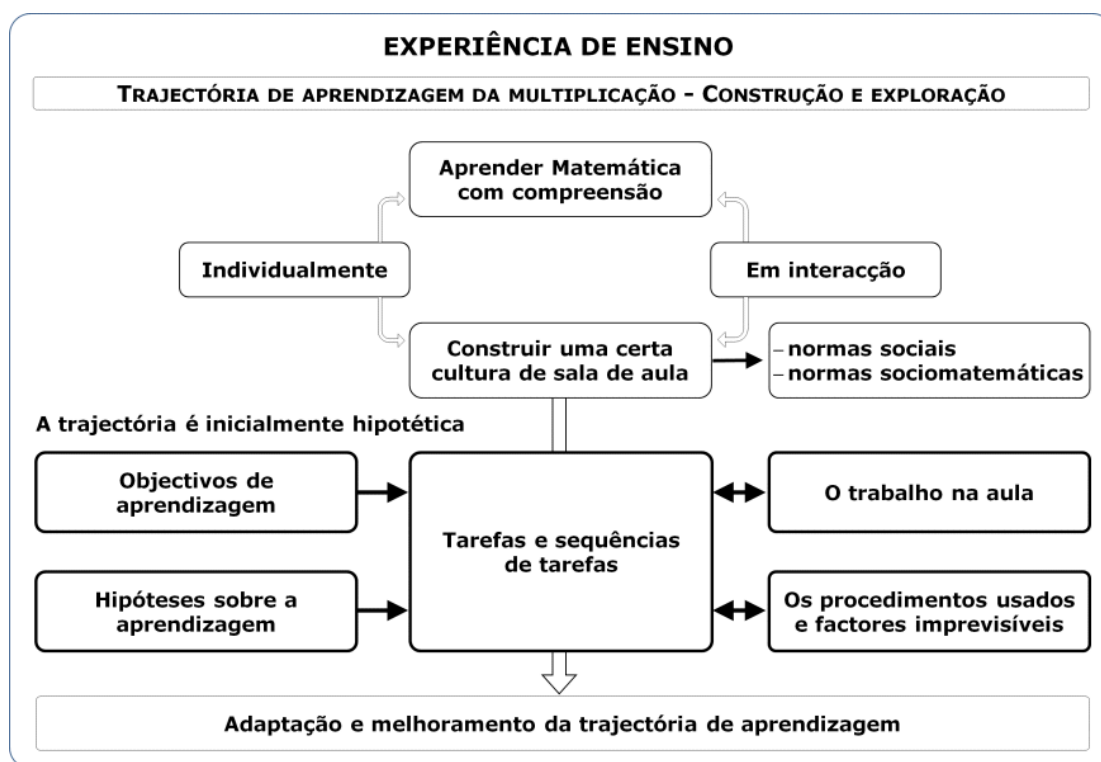


Figura 5.4 – Aspetos que contribuíram para a construção da trajetória de aprendizagem

O papel assumido pela professora Isabel está subentendido nas secções anteriores, em particular, quando me referi à cultura de sala de aula que fez parte da dimensão pedagógica da conjectura formulada. Está, também, implícito, na secção relativa às aulas da experiência de ensino, nas descrições associadas às interações e às normas estabelecidas na sala com os alunos. Efetivamente, o seu papel foi o de facilitar e encorajar os diferentes tipos de interações, de promover diferentes organizações do

trabalho na aula – individual, em pares ou em grupo-turma – de acordo com o tipo de tarefas a realizar e de realçar, em cada momento, o que era importante em termos da aprendizagem dos alunos. Neste último aspeto a sua intervenção foi essencial, dando voz aos alunos, para que, através deles, fossem destacados procedimentos e relações numéricas essenciais para a evolução da sua compreensão sobre a multiplicação.

5.4.1. As sequências de tarefas concretizadas

Foram construídas e exploradas na sala de aula onze sequências de tarefas, num total de trinta aulas. A sua construção foi consequência do trabalho permanente de adaptação, alteração e melhoramento da trajetória de aprendizagem, realizado por mim e Isabel nas reuniões semanais efetuadas.

De modo a tornar claras as finalidades de cada sequência, passo a descrevê-las uma a uma, identificando alguns pressupostos da sua construção. Por uma questão de facilidade de organização e de modo a perceber a sequência temporal pela qual foram propostas, as tarefas são numeradas de 1 a 33. Os congressos matemáticos foram numerados como tarefas, por uma questão de facilidade, também, de organização.

Explicito, ainda, sob a forma de tabela e de modo sucinto, as tarefas que constituem cada sequência e, para cada uma, identifico as grandes ideias associadas à multiplicação (ou da divisão) subjacentes, antecipo os procedimentos de resolução dos alunos e refiro alguns dos contextos e números aí incluídos. Cada tabela inclui, ainda, as datas de realização de cada tarefa, de modo a dar ideia da dimensão temporal da trajetória de aprendizagem.

Os enunciados de todas as tarefas constam do Anexo 5. Por uma questão de economia do número de páginas que constituem o referido Anexo, são apresentados os enunciados das tarefas em formato reduzido e sem o espaço dedicado à sua resolução, quando comparados com os fornecidos aos alunos.

Sequência 1

A primeira sequência de tarefas (Anexo 5) teve, essencialmente, uma função de diagnóstico dos conhecimentos dos alunos relacionados com a multiplicação. Parte de uma primeira tarefa bastante aberta, em que é sugerida a observação de um cartaz que representa uma mercearia onde existem diversos produtos embalados de modos diferentes.

Sequência 1			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 1 Mercearia da Piedade 1 6 novembro	A ideia de grupo como unidade A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Contar um a um Usar adições repetidas Contar por saltos Usar produtos parciais Usar dobros Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar a disposição retangular	Contextos e números sugestivos do uso de determinadas estratégias Múltiplos de 5, 3 e 6
Tarefa 2 Mercearia Piedade 2 13 novembro	A ideia de grupo como unidade A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar adições repetidas Usar dobros Usar produtos parciais	Alguns produtos do cartaz Múltiplos de 5, 3 e 6
Tarefa 3 Calcular em cadeia I 20 novembro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração	Usar produtos da tabuada Usar dobros Usar produtos parciais	Múltiplos de 5, 6, 4 e 8 Partir dos números usados nas tarefas 1 e 2

A proposta consiste em desafiar os alunos a calcular as diferentes quantidades de frutos, rolos de papel de cozinha, garrafas de água, etc., e a registar os seus procedimentos numa folha de papel. O cartaz utilizado foi adaptado dos materiais do projeto *Contexts for Learning Mathematics* (van Galen & Fosnot, 2007). A segunda tarefa foca-se em alguns produtos seleccionados do cartaz e é pedido o cálculo de outras quantidades dos mesmos produtos que não estão no cartaz. Na terceira tarefa – Calcular em cadeia I usam-se os mesmos números envolvidos nas tarefas anteriores mas agora num contexto apenas matemático e pretende-se que os alunos resolvam as diferentes cadeias numéricas propostas pela professora.

Sequência 2

A sequência 2 (Anexo 5) é constituída por tarefas onde a ideia do grupo enquanto unidade está presente e pode ser aprofundada. Parte de uma situação sobre carteiras de cromos e nas imagens associadas é apenas visível o número de cromos de cada carteira e

não os cromos em si, pelo que não podem ser contados um a um. São lançados alguns desafios que pretendem incentivar os alunos a encontrar produtos equivalentes.

Sequência 2			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 4 Carteiras de cromos 27 novembro	A ideia de grupo como unidade A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar produtos parciais Usar dobros Fazer decomposições	Carteiras com 4, 6 e 12 cromos
Tarefa 5 Carteiras de cromos - congresso 28 novembro			Observar os pôsteres todos. Discussão a partir de 2 ou 3 pôsteres selecionados
Tarefa 6 Calcular em cadeia II 11 dezembro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar produtos parciais Usar dobros Usar dobros e metades	Os mesmos números das tarefas anteriores mas também cadeias com números maiores

Na sequência da resolução da tarefa é proposto um congresso (Tarefa 5). Assim os alunos constroem pôsteres, selecionando aspetos do processo de resolução que consideram relevantes. Esses pôsteres são expostos na sala de aula, de modo a serem visionados por todos. São escolhidos dois ou três dos pôsteres, de acordo com os procedimentos usados e os seus autores apresentam as suas produções e respondem a questões colocadas pelos colegas. A última tarefa pretende evidenciar relações multiplicativas que surgiram nas tarefas anteriores, através do cálculo em cadeia, agora num contexto apenas matemático. Os números usados são os mesmos das restantes tarefas desta sequência, um pouco maiores que os da sequência anterior.

Sequência 3

A sequência 3 (Anexo 5) inclui um conjunto de tarefas cujo contexto recorre à disposição retangular, tarefa 7 – Cortinas, tarefa 8A – Pátio do João e tarefa 8B – Pátio do Cristóvão. Os objetos, exceto os da primeira situação, não podem ser contados um a um e a ideia é realçar as vantagens do cálculo por linhas e/ou por colunas. As tarefas 7 e 8A foram adaptadas dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007). A tarefa 8B é muito semelhante à anterior mas inclui números maiores, múltiplos de cinco e de dez. À semelhança das sequências anteriores, a última tarefa pretende evidenciar as relações multiplicativas que surgiram nas tarefas anteriores, através do cálculo em cadeia.

Os números usados são os envolvidos nesta sequência e, pela primeira vez, nesta trajetória, os produtos ultrapassam a centena.

Sequência 3			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 7 Cortinas 8 janeiro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Adicionar 2 a 2 Usar dobros Usar a disposição retangular Usar produtos parciais	Disposição retangular Múltiplos de 5
Tarefa 8A Pátio do João Tarefa 8B – Pátio do Cristóvão 15 janeiro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Recorrer, ou não, à figura da tarefa que sugere a disposição retangular; Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar produtos parciais Usar a decomposição decimal	Figuras que sugerem a disposição retangular Múltiplos de 5 e 10, maiores que os usados na tarefa anterior
Tarefa 9 Calcular em cadeia III 22 janeiro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração	Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar produtos parciais	Múltiplos de 5 e 10 e números próximos de múltiplos de 10 Produtos maiores que 100

Sequência 4

As tarefas que constituem a sequência 4 (Anexo 5) foram construídas de modo a realçar, com números cada vez maiores, as vantagens do uso de procedimentos multiplicativos quando comparados com outros aditivos associados, sobretudo, às propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. As três situações propostas na primeira tarefa estão articuladas entre si, através dos números envolvidos e permitem identificar relações de dobro e de metade. O contexto das duas primeiras situações recorre à disposição retangular. Na sequência da tarefa 10 é proposto um congresso, onde os alunos elaboram pósteres e são apresentados e discutidos dois deles. A última tarefa evidencia relações multiplicativas associadas às propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, em particular, dobros e metades, através do cálculo em cadeia. Os números são os envolvidos nesta sequência e os produtos resultantes correspondem a centenas e milhares “redondos”, ou seja, múltiplos de 100 (500, 600, 1200, 2400).

Sequência 4			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 10 Pilhas de caixas 29 janeiro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição As propriedades comutativa e associativa da multiplicação	Recorrer, ou não, à figura da tarefa Recorrer, ou não, à disposição retangular Usar uma decomposição de um dos fatores Usar números de referência Recorrer a relações de dobro Recorrer a relações de dobro/metade Recorrer ao algoritmo da multiplicação Relacionar os diferentes produtos usados nas várias tarefas	Figuras que sugerem a disposição retangular Múltiplos de 5 e 10 Produtos da ordem das centenas e dos milhares
Tarefa 11 Pilhas de caixas - congresso 30 janeiro			Preparar um congresso com a tarefa anterior Observar os pôsteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos
Tarefa 12 Cadeias numéricas IV 5 fevereiro	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração As propriedades comutativa e associativa da multiplicação	Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar produtos parciais Usar dobros e metades	Usar os números e algumas das relações das tarefas anteriores

Sequência 5

Esta é a primeira sequência de tarefas (Anexo 5) que inclui números racionais não negativos na sua representação decimal, habitualmente denominados por números decimais. Assim, para além das suas finalidades relacionadas com a multiplicação, o seu propósito é, também, dar sentido aos números racionais não negativos na sua representação decimal, associando-os a capacidades de diferentes garrafas de água, de acordo com a perspetiva de Kraemer (2007). A tarefa 13 foi adaptada dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007). A primeira tarefa parte da observação das capacidades de várias garrafas de água e a segunda tem subjacente um contexto de experimentação, em que se propõe encher e despejar garrafas de água com diferentes capacidades, de modo a relacioná-las entre si.

Nesta tarefa espera-se que os procedimentos dos alunos sejam menos formais do que aqueles que já utilizam com números naturais (e incluindo o zero), dada a complexidade dos novos números envolvidos. No cálculo numérico em cadeia a intenção é representar e realçar as relações identificadas nas tarefas anteriores, usando a

simbologia matemática. Esta é escrita no quadro, pela professora, à medida que os alunos verbalizam os seus raciocínios.

Sequência 5			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 13 Garrafas e mais garrafas 11 fevereiro	Dar sentido aos números racionais não negativos na representação decimal Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	Usar adições repetidas Usar produtos parciais Usar relações de dobro e de metade	Garrafas de água com diferentes capacidades Números de referência na representação decimal
Tarefa 14 Experimentar com garrafas 18 fevereiro	Dar sentido aos decimais Multiplicação com decimais A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	Usar adições repetidas Usar produtos parciais Usar dobros	Encher e despejar garrafas de água com diferentes capacidades Números de referência na representação decimal associados a capacidades de garrafas
Tarefa 15 Calcular em cadeia V 18 fevereiro	Multiplicação com decimais A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	Usar adições repetidas Usar produtos parciais Usar dobros	Usar os números das tarefas anteriores

Sequência 6

Esta sequência (Anexo 5) tem finalidades comuns com a sequência anterior. Pretende, por um lado, contribuir para dar sentido aos números racionais não negativos na representação decimal e, por outro, continuar a construir relações multiplicativas com os números neste tipo de representação. Através da sua resolução espera-se que os alunos estabeleçam algum paralelismo entre as ideias, estratégias e modelos relacionados com a multiplicação e utilizados a propósito dos números inteiros positivos e os procedimentos usados na resolução de tarefas que envolvem outro tipo de números. O contexto do dinheiro, familiar para muitos alunos, considera-se desafiante e o valor das várias moedas e as relações que podem ser estabelecidas entre elas, é propício à emergência de relações multiplicativas com números racionais não negativos na representação decimal. As relações multiplicativas que podem ser identificadas são organizadas em tabelas, modelo que as torna mais evidentes. A primeira parte da tarefa 16 foi adaptada dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007).

Sequência 6			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 16 Contar moedas 1 5 março	Dar sentido aos números racionais não negativos na sua representação decimal, usando as relações entre as diferentes moedas para resolver os problemas	Contar por saltos Usar adições repetidas Usar dobros Usar produtos parciais Recorrer a relações entre moedas registradas numa tabela	Usar, se necessário, modelos das diferentes moedas
Tarefa 17 Contar moedas 2 12 março	Multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição Fazer analogias entre relações com números naturais e relações com números racionais não negativos na sua representação decimal	Usar produtos parciais Relacionar os problemas com as relações numéricas, identificadas na aula anterior, entre as várias moedas Usar relações entre números inteiros que funcionam também com números racionais não negativos na sua representação decimal	Usar números racionais não negativos na sua representação decimal, de referência, associados ao valor das diferentes moedas
Tarefa 18 Calcular em cadeia com decimais VI 17 março	Multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração	Usar dobros e metades Usar produtos parciais Usar múltiplos de 10 e a décima parte Usar produtos equivalentes	Usar números racionais não negativos na sua representação decimal, de referência, associados ao valor das diferentes moedas

Sequência 7

Esta sequência inclui um conjunto de tarefas (Anexo 5) associadas à operação divisão, encarando-a como inversa da multiplicação. A primeira tarefa inclui duas situações, uma que envolve a divisão com o sentido de partilha e, outra a divisão com o sentido de medida. Espera-se que, na sua resolução, os alunos recorram a procedimentos associados às outras operações, em particular à multiplicação, uma vez que não conhecem o algoritmo da divisão nem outra forma de cálculo relacionada com esta operação.

A segunda tarefa desta sequência, tarefa 20, inclui também dois contextos de divisão, um por medida e outro por partilha, em que os números usados são exatamente os mesmos. O objetivo é tentar perceber se os alunos as resolvem independentemente uma da outra, ligando-se ao contexto, ou se se apercebem da relação entre elas e resolvem apenas uma, usando o mesmo resultado. A sequência inclui um congresso, decorrente desta tarefa, e uma cadeia numérica, com objetivos semelhantes aos já explicitados para este tipo de tarefas. A tarefa 20 foi adaptada de Fosnot e Dolk (2001b) e de Natale e Fosnot (2007).

Sequência 7			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 19 Colecionar cartas 17 março	Divisão por medida e divisão por partilha Recorrer às outras operações para resolver problemas de divisão Relacionar a multiplicação com a divisão	Usar adições repetidas Usar subtrações sucessivas Usar a multiplicação e as suas propriedades para resolver problemas de divisão Usar produtos conhecidos Usar a disposição retangular para modelar a divisão	Contextos de medida e de partilha Números naturais de referência menores que 100 Usar números inteiros de referência e as relações entre eles via multiplicação
Tarefa 20 Máquinas de bebidas 25 março	Relacionar a multiplicação com a divisão Divisão por medida e divisão por partilha Recorrer às outras operações para resolver problemas de divisão e, em particular, relacionar a multiplicação com a divisão Relacionar problemas entre si apesar de partirem de contextos diferentes	Usar adições repetidas Usar subtrações sucessivas Usar a multiplicação e as suas propriedades para resolver um problema de divisão Identificar os mesmos números em contextos diferentes Usar a disposição retangular para modelar a divisão	Usar os mesmos números em contextos diferentes Números maiores que 100 Números de referência
Tarefa 21 Máquinas de bebidas - congresso 26 março	Relacionar a multiplicação com a divisão Divisão por medida e divisão por partilha Relacionar problemas entre si apesar de partirem de contextos diferentes		Preparar um congresso com a tarefa anterior Observar os pôsteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos
Férias da Páscoa			
Tarefa 22 Calcular em cadeia VII 15 abril	Relacionar a multiplicação com a divisão	Efetuar cálculos de divisão recorrendo à multiplicação e suas propriedades	Usar os mesmos números ou relacionados com as tarefas anteriores

Sequência 8

A sequência 8 (Anexo 5) inclui duas tarefas relacionadas com as tabuadas e, mais globalmente, com a identificação dos múltiplos de um número e as suas propriedades. A primeira tarefa é adaptada dos materiais de apoio ao novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Mendes, Brocardo, Delgado & Gonçalves, 2010) e o seu objetivo é identificar múltiplos de dois, cinco e dez e as suas características, a partir de uma tabela com os números de um a 50, dispostos em cinco colunas. Pretende-se que os alunos reconheçam regularidades na tabela numérica que têm por base as propriedades dos múltiplos de dois, cinco e dez.

A segunda tarefa desta sequência tem como propósito a identificação de regularidades nas diferentes tabuadas associadas aos produtos calculados e espera-se que

os alunos compreendam, de modo informal, que o conjunto dos múltiplos de um número é infinito, para além de incluir o zero. As duas tarefas têm um objetivo mais amplo, que se prende com a compreensão das características do nosso sistema de numeração, decimal e posicional.

Sequência 8			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Notas Contextos/Números
Tarefa 23 Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e de 10 21 de abril	Compreender o sistema de numeração decimal Compreender as tabuadas da multiplicação Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural, em particular de 2, 5 e 10 Identificar regularidades em tabelas numéricas Identificar as propriedades dos múltiplos de 2, 5 e 10	Usar produtos conhecidos Identificar regularidades nos múltiplos de 2, 5 e 10	Tabela com os números de 1 a 50, organizados em 5 colunas
Tarefa 24 Regularidades nas tabuadas 22 de abril	Compreender o sistema de numeração decimal Compreender as tabuadas da multiplicação Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural Identificar regularidades nas tabuadas Identificar as propriedades dos múltiplos de um número	Usar produtos conhecidos Identificar regularidades nos múltiplos de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 11	Tabuadas de diferentes números, organizadas em coluna, para completar. Iniciam-se em $0 \times n$ e vão até, pelo menos, ao produto $21 \times n$

Sequência 9

Esta sequência inclui três tarefas (Anexo 5) que pretendem continuar o trabalho em torno da divisão, encarando esta operação como inversa da multiplicação. A primeira tarefa parte de uma situação conhecida e já trabalhada pelos alunos, a das máquinas de bebidas. A tarefa 25 foi adaptada de Fosnot e Dolk (2001b) e de Natale e Fosnot (2007). Espera-se que, na sua resolução, os alunos recorram a procedimentos associados à multiplicação. Uma das diferenças relativamente às situações anteriores é que, neste caso, as garrafas para encher a máquina estão organizadas em embalagens de seis, que por sua vez, estão guardadas numa caixa com dez embalagens de seis garrafas. Um dos objetivos que se pretende alcançar com a tarefa é que os alunos percebam que é mais potente trabalhar com múltiplos de dez, no caso dos números envolvidos serem suficientemente “grandes”, do que usar números bastante mais pequenos e que não sejam múltiplos de dez.

A segunda tarefa desta sequência, tarefa 26, envolve duas situações de divisão por medida e o seu objetivo é investigar se uma determinada partilha de miniaturas de animais por um certo número de crianças é justa. Espera-se que os alunos usem múltiplos de dez para, mais rapidamente, calcular os produtos mais próximos dos números que correspondem ao total de miniaturas (em termos de divisão será o dividendo e em termos de multiplicação é o produto). Esta tarefa dá origem a um congresso.

Sequência 9			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 25 Outra máquina de bebidas 29 abril	Relacionar a multiplicação com a divisão Divisão por medida Recorrer às outras operações para resolver problemas de divisão e, em particular, à multiplicação Relacionar os contextos com as estratégias usadas Usar múltiplos de 10	Usar adições repetidas Usar subtrações sucessivas Usar a multiplicação e as suas propriedades para resolver um problema de divisão Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 10 Usar a disposição retangular para modelar a divisão	Contexto de divisão por medida Usar números inteiros da ordem das centenas
Tarefa 26 Miniaturas de animais 6 maio	Relacionar a multiplicação com a divisão Divisão por partilha Recorrer à multiplicação para resolver problemas de divisão Relacionar problemas entre si	Usar adições repetidas Usar subtrações sucessivas Usar a multiplicação e as suas propriedades Usar a disposição retangular para modelar a divisão	Contexto de divisão por partilha Números envolvidos da ordem das centenas
Tarefa 27 Miniaturas de animais - congresso 7 maio			Preparar um congresso com a tarefa anterior Observar os pósteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos, de acordo com os objetivos da aula
Tarefa 28 Calcular em cadeia VIII 12 maio	Relacionar a multiplicação com a divisão Dividir usando a multiplicação Identificar propriedades da divisão a partir da multiplicação	Efetuar cálculos de divisão recorrendo à multiplicação e suas propriedades	Usar os mesmos números das tarefas anteriores Usar divisores maiores que 10

A sequência inclui ainda, à semelhança de todas as outras, uma tarefa de cálculo de cadeias numéricas, com objetivos semelhantes aos já explicitados para este tipo de tarefas.

Sequência 10

A sequência 10 (Anexo 5) inclui tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal e um dos seus objetivos é recorrer à interpretação e utilização de tabelas de razões. Por isso utilizam-se diferentes contextos associados a

preços. Na primeira tarefa, tarefa 29, os preços são representados por números racionais não negativos na representação decimal, de referência. Na segunda tarefa desta sequência, tarefa 30, os preços são números racionais não negativos na representação decimal “próximos” de números naturais ou do zero. Neste último caso pretende-se desenvolver o uso de estratégias de cálculo por compensação e, também, o cálculo por estimação. Qualquer uma das tarefas pretende, também, ainda que de modo informal, desenvolver o raciocínio proporcional.

Sequência 10			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 29 Ida ao teatro 19 maio	Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração Calcular usando números de referência Usar o raciocínio proporcional	Usar produtos parciais Usar produtos de referência Identificar regularidades Interpretar e usar tabelas de razões	Completar e usar preços em tabela Preço de 1, 2, 5, 6, 10, 9 e 20 Usar números racionais não negativos na representação decimal de referência
Tarefa 30 Ida à Merceria da Piedade 27 maio	Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração Usar o raciocínio proporcional	Usar números <i>redondos</i> e compensar Estimar resultados Interpretar e usar tabelas de razões	Números racionais não negativos na representação decimal “próximos” de números inteiros Tabelas de razão para completar e utilizar
Tarefa 31 Calcular em cadeia IX 2 junho	Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração	Usar números <i>redondos</i> e compensar Estimar resultados Usar dobros e metades Usar produtos parciais	Números racionais não negativos na representação decimal de referência e/ou “próximos” de números inteiros

A tarefa de cálculo em cadeia incluída pretende evidenciar relações multiplicativas com números de referência associadas às tarefas anteriores.

Sequência 11

Esta sequência de tarefas (Anexo 5) parte de um contexto de multiplicação no sentido combinatório, associado a um problema de menus. A tarefa 32 é adaptada dos materiais de apoio ao novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Mendes et al., 2010). Inicialmente, a situação é pouco complicada, trata-se de fazer tipos de sandes, tendo duas qualidades de pão e três ingredientes diferentes, ou seja, há duas condições em jogo – a qualidade de pão e os tipos de ingredientes. Na segunda parte, a situação

complica-se pois os alunos têm de organizar menus com três tipos de produtos diferentes e devem ter em conta algumas condições restritivas. Neste problema, para além dos alunos terem de trabalhar com algumas condições que estão expressas no problema, espera-se, também, que organizem representações eficazes das várias hipóteses encontradas, tais como tabelas ou esquemas em árvore. É importante também, perceber como garantir que foram identificadas todas as hipóteses possíveis. Na continuidade desta tarefa é realizado um congresso matemático. O seu objetivo é a análise e discussão dos diferentes processos de resolução, realçando o recurso a representações eficazes e que garantem a descoberta de todos os casos possíveis, tais como tabelas e esquemas em árvore.

Sequência 11			
Tarefas e datas em que foram exploradas	Grandes ideias	Procedimentos que podem ser usados	Contextos/Números
Tarefa 32 Organizar menus 9 junho	Sentido combinatório da multiplicação Reconhecer a multiplicação na situação proposta	Usar tabelas ou esquemas em árvore para identificar todas as hipóteses possíveis Usar produtos conhecidos	Tabelas Esquemas em árvore
Tarefa 33 Organizar menus - congresso 9 junho			Preparar o congresso Observar os pósteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos

5.4.2. A preparação das aulas da experiência de ensino

As aulas da experiência de ensino na turma do 3.º ano são pensadas e discutidas previamente, semanalmente, nas reuniões realizadas em conjunto com a professora Isabel. Por um lado, temos como eixos orientadores a trajetória de aprendizagem da multiplicação que se pretende concretizar e, por outro, é desejável que estas aulas não alterem profundamente o trabalho que Isabel desenvolve quotidianamente com os seus alunos. A finalidade das reuniões é, de um modo geral, discutir e refletir sobre o trabalho realizado na aula e preparar e adaptar o trabalho futuro, tendo como pano de fundo a conjectura formulada e a trajetória de aprendizagem que a concretizou. Frequentemente, as reflexões ocorridas durante estas reuniões têm como resultado a alteração de tarefas pensadas anteriormente e do modo como são exploradas pelos alunos, numa análise

constante da trajetória de aprendizagem, melhorando-a e adaptando-a de acordo com os alunos daquela turma do 3.º ano.

A concretização da trajetória de aprendizagem, tal como foi explicitado anteriormente, inclui a exploração de diferentes tipos de tarefas, com propósitos distintos. A alternância entre estes diferentes tipos foi pensada de modo a suportar uma compreensão aprofundada da multiplicação e das relações que lhes estão associadas. A exploração de problemas (conduzindo ou não a um congresso matemático) é alternada com a realização de cadeias numéricas. Nestas são utilizados, geralmente, os mesmos números incluídos nos problemas anteriores e realçadas as relações numéricas baseadas nas propriedades da multiplicação que têm vindo a ser trabalhadas. Deste modo são evidenciados procedimentos matemáticos poderosos e, simultaneamente, estabelecidas conexões com resoluções de problemas anteriores nas quais podem ter sido usados ou não, os mesmos procedimentos.

5.4.3. As aulas da experiência de ensino

A diversidade de tipos de tarefas exploradas com os alunos implica, naturalmente, modos de organização da aula com algumas especificidades distintas. Apresento nas subsecções seguintes, de forma sucinta, o modo de organização de cada tipo de aulas – as aulas de resolução de problemas, as aulas que incluem um congresso matemático e as aulas de exploração de cadeias numéricas.

Aulas de resolução de problemas

Estas aulas são organizadas considerando três fases distintas: (i) introdução, (ii) exploração e (iii) discussão.

Frequentemente, e de acordo com o tempo previsto para a sua resolução, a tarefa que os alunos realizam numa mesma aula não corresponde apenas a um problema mas a um conjunto de problemas interligados entre si e com crescente complexidade. Por exemplo, a tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas, é constituída por quatro problemas, que

denominei, na análise dos dados, por subtarefa 1, subtarefa 2, subtarefa 3 e subtarefa 4, que foram explorados, pelos alunos, na mesma aula.

A maior parte dos problemas é realizada durante a primeira parte da manhã, até ao intervalo. Quando as fases de exploração e discussão têm uma duração maior do que o tempo previsto (em média, cerca de uma hora e meia), o que acontece em alguns casos, prolongam-se para depois do intervalo, havendo sempre disponibilidade de Isabel nesse sentido.

Introdução. Numa primeira fase da aula a professora informa os alunos, de modo breve, sobre o que se vai passar nessa aula e explica como se vai organizar o trabalho, se individualmente se a pares. Quando se trata de problemas menos complexos os alunos resolvem-nos individualmente e, no caso de serem problemas mais abertos, de natureza investigativa, são realizados em grupo²² (dez pares e um trio, uma vez que a turma tem 23 alunos). No caso de o trabalho ser a pares, Isabel organiza a sua constituição que, geralmente, coincide com a disposição dos alunos na sala, ou seja, constituem um par os que estão sentados ao lado um do outro. Por isso, como por sugestão de Isabel, os alunos mudam frequentemente de lugar, a constituição dos pares vai variando. Numa das primeiras reuniões com Isabel discutimos esse facto e decidimos não o alterar. Assim, ao longo da experiência de ensino manteve-se a prática usual da professora de modificar a composição dos pares.

Ainda na fase de introdução, Isabel chama a atenção dos alunos para a necessidade de fazerem registos na folha respetiva, incluindo não só os cálculos necessários à resolução do problema mas também uma justificação do modo como pensaram. A professora explica-lhes que, para além de esses registos serem importantes para, mais tarde, conseguirem explicar como pensaram aos colegas, são fundamentais para o meu trabalho. Este aspeto é sempre lembrado em todas as tarefas e os alunos vão-se habituando a fazê-lo de forma cada vez mais completa.

²² Quando, a partir daqui, me referir a trabalho a pares incluo, também, um grupo formado por três alunos.

As figuras seguintes mostram os registos de Enzo e de Guilherme a propósito da subtarefa 3 da tarefa 8B – Pátio do Cristóvão, que são, ainda, muito sucintos, sem explicar como resolveram o cálculo que efetuam $5 \times 19 = 95$.

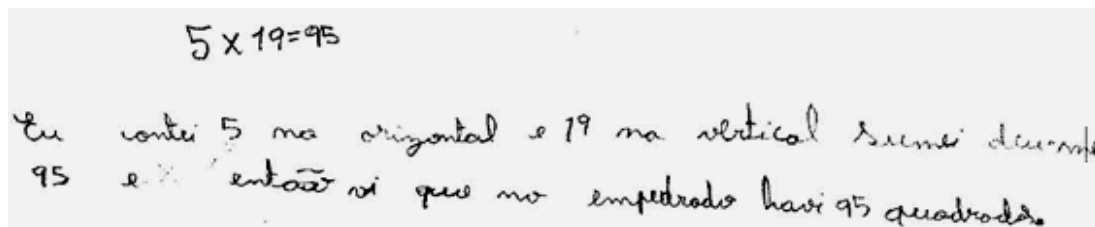


Figura 5.5 – Registo de Enzo, a propósito da subtarefa 3 – tarefa 8B

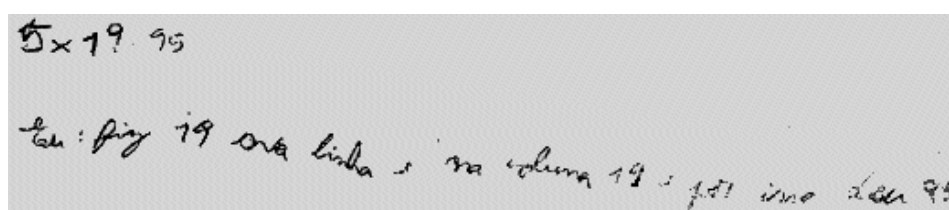


Figura 5.6 – Registo de Guilherme, a propósito da subtarefa 3 – tarefa 8B

A figura seguinte mostra os registos dos mesmos alunos, Enzo e Guilherme, a propósito da resolução da tarefa 26 – Miniaturas de animais, agora muito mais completos.

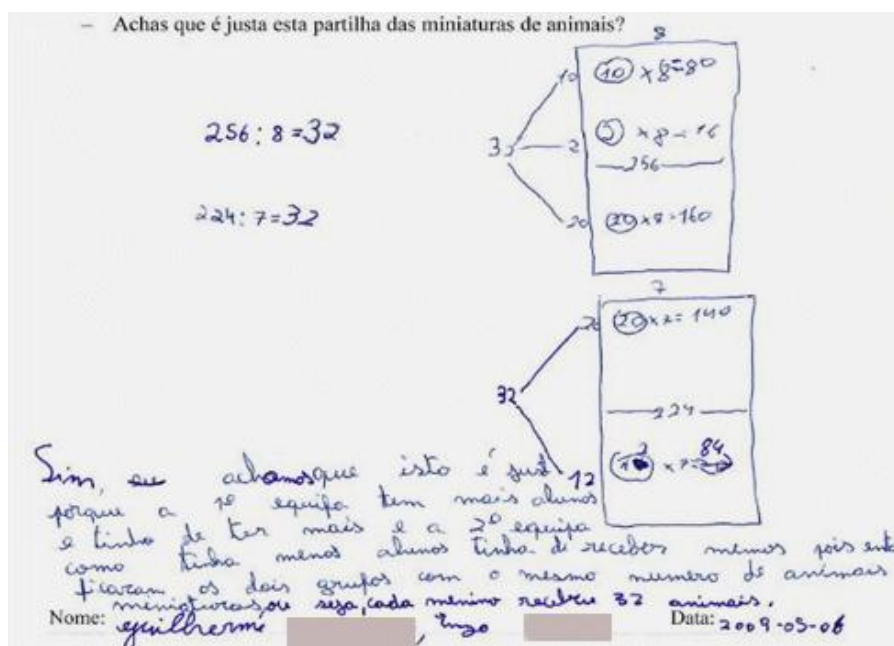


Figura 5.7 – Registo de Enzo e Guilherme a propósito da tarefa 26

Depois de Isabel explicar como se vai desenrolar o trabalho, é distribuída a folha ou folhas da tarefa que incluem o seu enunciado por escrito e, muitas vezes, imagens que o acompanham. Além disso, a folha da tarefa inclui sempre um espaço destinado às resoluções dos alunos. No início, a professora costuma solicitar a um aluno para ler o enunciado escrito em voz alta, para toda a turma, e esclarece as dúvidas que vão surgindo a propósito da sua interpretação. Com o decorrer da experiência de ensino, os alunos habituem-se a ler, individual e silenciosamente, os enunciados propostos e a colocar, em voz alta e perante toda a turma, as dúvidas que, eventualmente, surgem. Estas, por sugestão da professora, são esclarecidas sempre que possível pelos colegas. Só depois de não haver mais dúvidas se inicia a resolução do problema.

Nos primeiros problemas esta fase tem uma duração de cerca de vinte minutos mas, progressivamente, vai sendo encurtada, à medida que os alunos se sentem mais à vontade na leitura e interpretação dos enunciados.

Exploração. Os alunos resolvem os problemas propostos, individualmente ou a pares, de forma autónoma. Se sentem necessidade, solicitam esclarecimentos sobre aspetos gerais do problema. Estes são prestados por Isabel, desde que não influenciem diretamente a sua resolução. Se colocam questões específicas relativamente à resolução que elaboram ou pretendem elaborar, são-lhes dirigidas outras questões, no sentido de os ajudar a raciocinar mas não os orientando para uma determinada resolução.

Nesta fase, tanto Isabel como eu própria, circulamos por entre os alunos, de modo a monitorizar o seu trabalho. O nosso objetivo é ter atenção ao que dizem e fazem, tentando identificar o seu potencial matemático tendo em vista a fase de discussão da tarefa (Stein et al., 2008). Durante a reunião preparatória realizada previamente, a propósito da exploração de cada tarefa, são antecipados com Isabel os possíveis procedimentos a usar pelos alunos e as eventuais dificuldades que possam surgir. Deste modo, torna-se mais fácil, nesta fase do trabalho na aula, conseguir reconhecê-los nos registos produzidos pelos alunos ou no seu discurso, e compará-los com os previstos. Tal como refere Kraemer (2008), verificámos que “algumas soluções são difíceis de interpretar porque não as esperamos e porque não as olhamos com os mesmos olhos, não

pensamos com os mesmos objetos matemáticos e não falamos com as mesmas palavras do aluno” (p. 21).

Nesta fase de exploração, a ação de Isabel tem subjacente, também, um conjunto de questões, discutidas nas nossas reuniões de preparação e reflexão sobre as aulas da experiência de ensino, tais como: (i) A generalidade dos alunos está a compreender o problema? Há dificuldades? (ii) Os procedimentos que utilizam estão de acordo com os previstos? (iii) Há procedimentos que não foram antecipados?

Além de se aperceber dos procedimentos que os alunos vão utilizando e de os tentar interpretar, Isabel vai-lhes colocando, também, questões com o propósito de os ajudar a explicitar o seu modo de pensar e a construir argumentos que o fundamentem, aumentando a sua compreensão sobre as ideias matemáticas em causa em cada tarefa (Smith, Bill, & Hughes, 2008). Nesta sua prática, e focando-se nos procedimentos dos alunos, a professora é norteadada pelos objetivos da tarefa, pela trajetória de aprendizagem que delineámos e pela que vai sendo concretizada.

Ainda durante a fase de exploração do problema, Isabel seleciona os alunos ou pares de alunos que vão partilhar com o resto da turma as suas resoluções. Esta escolha é orientada por um aspeto particular dos seus procedimentos que considera importante ser partilhado com todos. Podem ser selecionados procedimentos potentes, procedimentos diferentes com vista à sua comparação, procedimentos que realçam uma ideia matemática importante, uma dificuldade sentida por alguns alunos ou outros aspetos que a professora considere serem de destacar para toda a turma. Tal como é referido por Cobb et al. (2001) “o seu objetivo é capitalizar a diversidade dos raciocínios dos alunos identificando interpretações e soluções que, quando comparadas e contrastadas, podem levar a discussões matemáticas substantivas” (p. 117).

A seleção dos procedimentos a partilhar é pensada e discutida na reunião preparatória mas a sua concretização na sala de aula revela-se bastante complexa. Para além dos fatores imprevisíveis que surgem, naturalmente, associados ao trabalho na sala de aula, há ainda outros aspetos que tornam difícil esta prática de seleção dos procedimentos dos alunos. Por um lado, tal como foi anteriormente referido, é

complicado interpretar os procedimentos reais dos alunos e compará-los com os procedimentos que, antecipadamente, previmos que devem ser partilhados. Por outro lado, esta é uma prática nova para Isabel, que tem de realizar num intervalo de tempo relativamente curto, enquanto os alunos trabalham, obrigando-a a tomar decisões rápidas e a gerir os imprevistos que sempre acontecem. Além disso, por vezes, os procedimentos que antecipámos deverem ser partilhados com todos, não são usados por nenhum aluno, exigindo uma alteração de planos no momento em que a ação decorre.

Esta fase de exploração tem uma duração variável, decorrente da maior ou menor complexidade dos problemas propostos. Apesar de haver um tempo de duração da tarefa previsto antecipadamente, muitas vezes, os alunos demoram mais ou menos tempo. Quando todos, ou quase todos, parecem ter terminado, Isabel dá início à fase de discussão coletiva.

Discussão. No início da experiência de ensino, Isabel tem tendência a solicitar a todos os alunos que, na fase de discussão coletiva, verbalizem o que fizeram e como o fizeram. Contudo, na sequência das nossas discussões e reflexões, no âmbito das reuniões que partilhámos, compreende que essa sua prática contribui, frequentemente, apenas para que a fase de discussão se prolongue por muito tempo. A sua duração excessiva tem como consequência que alguns dos alunos se desviem da finalidade da tarefa, o que não parece melhorar a compreensão de todos sobre o assunto que está a ser explorado.

Decorrente do entendimento de Isabel sobre as mais-valias de selecionar apenas alguns de acordo com os nossos (seus) objetivos, e depois de algumas experiências com um número diferente de alunos a apresentar, esta fase de discussão começa a demorar menos tempo. Passam a ser escolhidos não mais de quatro/cinco alunos ou pares de alunos para apresentarem a sua resolução, e a discussão da tarefa incide, geralmente, sobre os aspetos que considerámos mais importantes em cada uma delas.

Habitualmente, os alunos apresentam os seus raciocínios sobre o problema em causa de acordo com uma ordenação sugerida por Isabel. Esta pode ser da resolução mais informal para a mais formal, evidenciando em último lugar procedimentos mais potentes,

ou realçando um determinado procedimento associado a uma propriedade da multiplicação, ou começando por discutir dificuldades ou procedimentos incorretos de alguns alunos.

O modo de apresentação das resoluções dos alunos também não é realizado sempre da mesma forma. Por vezes, registam no quadro o que fizeram na sua folha e explicam aos colegas como pensaram para efetuar os cálculos. Outras vezes, verbalizam apenas o que realizaram na sua folha e Isabel vai escrevendo no quadro as expressões ou outros registos que correspondem ao raciocínio dos alunos.

À medida que decorre a experiência de ensino, os alunos aprendem a verbalizar e a justificar melhor os seus raciocínios, de modo que todos os compreendam. Habitua-se, também, a ouvir os colegas explicar os seus procedimentos, para além de se acostumarem a observar os seus registos escritos, de modo a questioná-los e a solicitar-lhes justificações. Isabel e todos os alunos da turma contribuem para esta melhoria, uma vez que é instituída a norma que, cada vez que alguém não percebe o que outro diz ou faz, deve sempre solicitar-lhe explicações.

Apesar de serem selecionados apenas alguns procedimentos para serem apresentados pelos seus autores, todos os alunos são convidados a intervir nesta fase, solicitando esclarecimentos, colocando dúvidas ou comparando o seu procedimento com o do colega.

Esta fase de discussão coletiva é fundamental em todo o trabalho associado à experiência de ensino. No que respeita às aprendizagens dos alunos é nesta fase que, de acordo com a orquestração de Isabel, se podem interligar as diferentes resoluções, se podem estabelecer pontes entre representações distintas e entre os procedimentos e as ideias matemáticas que se pretendem realçar (Smith et al., 2009).

Depois de cada discussão, Isabel, conjuntamente com os alunos, faz uma síntese do que considera importante realçar após o trabalho realizado. Por vezes, os alunos efetuam registos no caderno alusivos ao que é considerado essencial destacarem. Esses registos são consultados em situações posteriores, por iniciativa dos alunos ou incentivados pela professora, de modo a estabelecer conexões com outras tarefas.

A discussão coletiva à volta dos procedimentos utilizados na resolução de um problema é sempre realizada no mesmo dia em que os alunos a efetuam, individualmente ou a pares.

Aulas que incluem um congresso matemático

As aulas que incluem um congresso matemático na aceção de Fosnot e Dolk (2001b) organizam-se considerando quatro fases distintas: (i) apresentação, (ii) exploração e construção dos pósteres (iii) exposição dos pósteres e (iv) congresso matemático.

A tarefa a partir da qual se vai realizar um congresso matemático é, por vezes, constituída por mais do que um problema. Estes são, de um modo geral, mais abertos do que os referidos anteriormente e que dão origem apenas a uma discussão coletiva.

O tempo destinado às quatro fases do trabalho realizado durante as aulas que incluem um congresso matemático prolonga-se sempre por dois dias consecutivos. Inicialmente, estes dois dias eram a quinta-feira e a sexta-feira e, a partir do segundo período escolar, a quarta-feira e a quinta-feira. No primeiro dos dias, para além de Isabel apresentar a tarefa, aos alunos resolvem-na, elaboram os pósteres correspondentes, afixam-nos na sala de aula e visionam-nos. No segundo dia, logo no início do período escolar, os alunos visitam novamente a exposição dos pósteres e realiza-se o congresso matemático.

Apresentação. A primeira fase destas aulas é muito idêntica à descrita anteriormente a propósito das aulas de resolução de problemas. Para além disso, Isabel anuncia aos alunos que a tarefa que irão explorar dará origem a um congresso matemático. Apenas na apresentação da tarefa 4 – Carteiras de cromos, a partir da qual se realizou o primeiro congresso, Isabel explica detalhadamente o que significa organizar um congresso matemático.

Isabel – Depois de resolverem os desafios nas diferentes folhas vou entregar-vos uma folha branca grande e uma caneta mais grossa e vão ter de escolher a melhor forma, porque podem ter resolvido de várias maneiras, para apresentarem aos companheiros como resolveram cada uma das tarefas. Depois vamos expor todas as resoluções, devem ser 11 ou 12, porque estão aos pares. A seguir vão todos ter oportunidade para observarem as resoluções

de todos com muita atenção. Desta vez vêm três pares apresentar aos colegas o seu trabalho. Das próximas vezes escolherei outros pares para também apresentarem os seus trabalhos. Percebem que não há tempo nem necessidade de todos apresentarem sempre, senão a semana não chegava. Ainda há dúvidas?

As dúvidas que surgem depois estão relacionadas com questões de operacionalização e são esclarecidas rapidamente. Isabel acrescenta ainda que, apesar de não apresentarem todos o seu póster, todos terão oportunidade de intervir na discussão final.

Habitualmente, é distribuída de imediato a folha da tarefa, que os alunos leem e começam logo a resolver. Se a tarefa é constituída por mais do que uma folha, como acontece na tarefa 4 – Carteiras de cromos, estas são distribuídas faseadamente por Isabel. Quando percebe que a maior parte já resolveu as tarefas de uma, distribui a seguinte, de modo a não dispersar os alunos por vários problemas ao mesmo tempo.

Exploração e construção dos pósteres. A exploração da tarefa realiza-se de modo muito semelhante ao que descrevi anteriormente, a propósito da resolução de problemas. Isabel e eu própria, circulamos entre os grupos, tentando perceber através dos diálogos entre os pares, como estão a pensar os alunos e quais os procedimentos que utilizam.

À medida que vão terminando as suas resoluções na folha ou folhas da tarefa, Isabel distribui uma folha branca A3 e marcadores de feltro com ponta grossa. Os vários pares elaboram os seus pósteres, passando para a folha as resoluções do problema ou de cada um dos problemas. A professora reforça o que disse no início, que devem passar para o seu póster apenas o que considerem importante comunicar e apresentar aos colegas.

No primeiro congresso matemático, alguns pares não conseguem usar apenas uma folha para todos os problemas, tendo dificuldade em organizar toda a informação numa folha com tamanho A3, na qual não estão habituados a trabalhar. Além disso, têm, naturalmente, dificuldade em distribuir os registos que fazem pelo espaço disponível. Este aspeto melhora consideravelmente ao longo da experiência de ensino.

Exposição dos pôsteres. Da primeira vez é Isabel que afixa os vários pôsteres numa parede da sala de aula. Contudo, vem a verificar-se que aqueles não têm a melhor localização, pois são de difícil acesso aos alunos. Estes ficam impedidos de se aproximarem dos pôsteres, uma vez que têm uma fila de mesas e cadeiras encostadas à parede onde aqueles estão afixados. Assim, a partir do segundo congresso matemático, e depois de Isabel ter negociado a sua localização com o professor da outra turma que partilha a mesma sala, os pôsteres começam a ser afixados, pelos alunos, nas portas dos armários.

A figura seguinte mostra uma parte dos pôsteres, associados à tarefa 10 – Pilhas de caixas, afixados num dos armários da sala e um grupo de alunos a observá-los atentamente.



Figura 5.8 – Alguns pôsteres afixados, a propósito da tarefa 10

Depois de afixados os pôsteres, todos os alunos, antes do intervalo da manhã, têm oportunidade de os observar com atenção, tentando compreender as produções dos seus colegas. Alguns deles tiram notas, no seu caderno, sobre aspetos que não compreendem ou sobre questões que pretendem colocar aos colegas, durante a discussão coletiva. Esta atitude é incentivada por Isabel, fundamentando-a com o facto de que, se conhecerem bem os pôsteres, poderão intervir mais ativamente na discussão que se irá seguir, tornando-a mais participada por todos.

No dia seguinte ao da conceção dos pósteres, logo no início da atividade escolar e imediatamente antes do congresso, os alunos têm tempo para, mais uma vez, observarem detalhadamente todos os pósteres. Os objetivos deste visionamento são os mesmos do dia anterior. Este momento de trabalho na aula foi denominado, por Isabel e eu própria, de “visita à exposição”. Esta é organizada em três subgrupos de alunos de cada vez, determinados de acordo com a fila de mesas que ocupam na sala de aula, com o propósito de possibilitar uma boa visibilidade dos pósteres a todos e de não gerar muita confusão.

Congresso matemático. Isabel começa por solicitar a um aluno que faça uma pequena síntese do trabalho realizado no dia anterior e anuncia quais os pares que irão apresentar o seu póster. Estes são sempre dois ou três pares, não mais. Também é a professora que determina a ordem pela qual os pósteres são apresentados. Os pares escolhidos vão buscar os seus pósteres à exposição e fixam-nos no quadro, para auxiliar a sua apresentação.

A sequenciação das apresentações dos alunos obedece a critérios definidos, nem sempre os mesmos, tal como acontece nas discussões dos problemas. Contudo, em cada situação, e independentemente do critério de seleção, Isabel e eu própria, tentámos que essa escolha “maximizasse as hipóteses de atingir os objetivos previstos para a discussão” (Stein et al., 2008, p. 329).

A seleção dos pósteres e a sua ordem de apresentação é discutida por nós (Isabel e eu própria) depois de os observar cuidadosamente. Esta, tal como acontece a propósito das discussões dos problemas, é baseada em critérios relacionados com os objetivos da tarefa explorada pelos alunos, em articulação com o que consideramos ser importante destacar e discutir com toda a turma. Tal como referem Smith, Bill e Hughes (2008), se tivermos claro o que os alunos podem aprender com cada tarefa “estaremos melhor posicionados para capitalizar as oportunidades para avançar na matemática em cada aula e tomar decisões sobre o que se deve enfatizar e não enfatizar” (p. 135).

Por exemplo, no segundo congresso matemático, a propósito da tarefa 4 – Carteiras de cromos, são selecionados dois pares – Eva e Guilherme e Cristóvão e Hugo.

O póster de Eva e Guilherme é escolhido por realçar, predominantemente, procedimentos multiplicativos, apresentar mais do que uma hipótese de solução e não incluir incorreções. Além disso, é um dos dois pares que, na resolução do terceiro problema (subtarefa 3 – tarefa 4), para perfazer um total de 48 cromos, tendo disponíveis carteiras de 4 e de 6, considera mais do que uma solução. O póster de Cristóvão e de Hugo, pelo contrário, é escolhido por incluir uma incorreção ($8 \times 6 = 50$), não detetada durante a sua conceção e por apresentar apenas uma ou duas hipóteses de solução, sempre com um só tipo de carteiras de cromos, em cada um dos problemas (subtarefas 1, 2 e 3 – tarefa 4).

Neste exemplo de congresso a propósito da tarefa 4, os primeiros a apresentar o seu póster são Eva e Guilherme. Logo após a sua intervenção há questões colocadas por alguns alunos da turma, seguindo-se a apresentação de Cristóvão e Hugo e mais um momento de discussão coletiva. Os alunos que não apresentam fazem intervenções sobre o trabalho dos colegas, pedindo explicações ou clarificando alguns aspetos que não compreenderam durante a exposição dos pósteres e, muitas vezes, comparam o trabalho dos colegas com o seu.

Na orquestração das discussões coletivas, Isabel tenta ter a preocupação de não perder de vista os objetivos específicos da tarefa e, globalmente, as ideias associadas à trajetória de aprendizagem construída. No exemplo apresentado da tarefa 4, estes estão focados no uso de procedimentos multiplicativos baseados nas propriedades da operação. Além disso, a professora gere e tenta facilitar as interações entre os alunos. Esta gestão é feita de modo a garantir tanto uma participação equilibrada dos alunos da turma, como o estabelecimento de “pontes” entre procedimentos com diferentes graus de sofisticação. Deste modo, possibilita que alunos que recorreram a procedimentos pouco potentes consigam compreender as resoluções mais eficazes de outros colegas e que progridam na sua aprendizagem. Também nesta altura são estabelecidas conexões entre os procedimentos usados e os objetivos da aula, relacionados com um aspeto da multiplicação.

No final de cada congresso Isabel desafia os alunos a pronunciarem-se sobre o que aprenderam ou querem destacar, para além de os questionar sobre o trabalho desenvolvido. A síntese final incide, assim, não apenas nos aspetos mais ligados à

aprendizagem da multiplicação mas, também, no trabalho realizado por cada grupo, na participação de cada elemento no seu grupo e na construção dos pósteres. Em particular, sobre a construção dos pósteres são apontados aspetos como a organização da informação no espaço disponível, a insuficiência de informação de alguns, a dificuldade de alguns em serem compreensíveis para quem os visiona, etc. Todos estes aspetos são referidos na perspetiva de serem melhorados em situações futuras.

No final do primeiro congresso matemático, associado à tarefa 4, os alunos fazem diferentes apreciações e sugestões:

Duarte – A apresentação deve ser mais explicada para nós podermos perceber como calcularam para chegar aos números.

Luís – Há pósteres mais bem organizados que outros.

Gustavo – As respostas nos pósteres têm de estar bem explicadas para todos perceberem.

José – Organizar bem o espaço do póster é importante.

Isabel – Também é muito importante saber trabalhar em grupo. Há alguns grupos que tiveram muitas dificuldades. O Hugo e o Cristóvão foram um dos pares que melhor se organizaram em grupo. Expliquem lá aos companheiros como fizeram!

Cristóvão – Lemos os dois os enunciados.

Isabel – E como discutiam?

Hugo – Eu às vezes tinha ideias e dizia-as ao Cristóvão e ele não achava que eram boas. Depois eu expliquei-lhe e ele concordou comigo. E outras vezes era ao contrário.

De um modo geral, os aspetos relacionados com o saber trabalhar em grupo e organizar a informação num póster de maneira que outros a compreendam foram sendo melhorados ao longo da experiência de ensino.

Aulas de exploração de cadeias numéricas

As aulas de exploração de cadeias numéricas são organizadas de modo muito diferente das descritas anteriormente e de acordo com as orientações preconizadas por Fosnot e Dolk (2001b).

As características específicas do trabalho com cadeias numéricas – manter um ritmo vivo na sua exploração, privilegiar a oralidade (e não o registo escrito) e não despendar muito tempo com cada uma – foram discutidas com Isabel nas nossas reuniões, que as tentava por em prática na sala de aula. Ainda assim, e sobretudo no

princípio do ano, é-lhe difícil concretizar alguns destes aspetos pois, apesar de conhecer este tipo de atividade e o modo de a explorar, nunca a tinha realizado com os seus alunos.

No início, Isabel tem a tendência para perguntar a muitos alunos como pensaram para efetuar um determinado cálculo, mesmo que as respostas se repitam e evidenciem as mesmas relações numéricas. Esta sua tendência provoca, por vezes, uma quebra no ritmo neste tipo de trabalho e aumenta o tempo despendido. Além disso, revela-se complexo, na aula e perante raciocínios muito diversos, não perder o objetivo que se pretende atingir. Por isso, em alguns casos, é difícil realçar a relação ou relações numéricas que, efetivamente, estão subjacentes à construção de cada cadeia, no meio de muitas outras que surgem. Estes aspetos são discutidos nas nossas reuniões e melhorados na sala de aula ao longo da experiência de ensino.

Ilustro o modo como Isabel orienta a exploração de uma cadeia numérica a partir de um episódio associado a uma das incluídas na tarefa 12 (50×10 ; 25×20 ; 25×4 ; 25×24 ; 50×12). Esta cadeia é explorada depois de os alunos terem realizado o congresso matemático associado à tarefa 10 – Pilhas de caixas. O seu propósito é realçar o uso de relações de dobro e de metade, as quais os alunos tinham mostrado dificuldades em utilizar na tarefa anterior, num contexto de problema associado a pilhas de caixas (tarefa 10). Além disso, consolidam o uso de relações associadas ao uso do fator dez e de decomposições de um dos fatores.

Isabel escreve no quadro uma expressão de cada vez e dá algum tempo aos alunos para pensarem. Começa por registar no quadro 50×10 . Só depois de vários alunos levantarem o dedo no ar, indicando que já sabem qual é o valor de 50×10 , é que solicita a um deles a sua resposta. Depois passa para a seguinte, registando no quadro 25×20 .

Isabel – E agora?

Mariana – É 500 porque é 20 vezes cinco e mais 20 vezes 20.

Cristóvão – 20 vezes cinco é 100.

Mariana – E 20 vezes 20 é 400.

A professora regista no quadro a expressão correspondente à verbalização dos dois alunos. O raciocínio conjunto de Mariana e Cristóvão, baseia-se na decomposição

do fator 25 e na propriedade comutativa mas, apesar de correto, não faz apelo à relação com o cálculo anterior e Isabel desafia novamente os alunos.

Isabel – E alguém calculou 25×20 de outra maneira?

José – Pode ser também 25 vezes dez, duas vezes.

Hugo – E é o mesmo que 50 vezes dez. Porque 50 é o dobro de 25 e dez é metade de 20.

José – Ou 25 vezes dois vezes dez. 25 vezes dois são 50 e vezes o dez são 500.

José baseia o seu modo de pensar no uso do fator dez e na propriedade comutativa da multiplicação e Hugo recorre a uma relação de dobro e metade, associando o cálculo que efetua com o anterior. Isabel prossegue, então, com o cálculo de 25×4 .

Isabel – E agora?

Enzo – É 100, porque cinco vezes quatro são 20 mais 20 vezes quatro é 20 e mais 80.

Luís – Também é o mesmo que 50 vezes dois. Porque 50 é o dobro de 25 e dois é metade de quatro.

Enzo recorre a um procedimento de decomposição do 25 e Luís usa a mesma relação de dobro e metade verbalizada anteriormente por Hugo. Isabel prossegue até ao final da cadeia, solicitando sempre aos alunos que expliquem como pensaram. Nesta altura, o quadro, onde Isabel vai registando os vários raciocínios dos alunos, apresenta o seguinte aspeto:

The image shows a green chalkboard with handwritten mathematical calculations. The calculations are as follows:

$$50 \times 10 = 500$$

$$25 \times 20 = 20 \times 5 + 20 \times 20$$

$$100 + 400$$

$$500$$

$$\text{ou } 25 \times (10 \times 2) \text{ ou } 50 \times 10$$

$$\text{ou } 25 \times 2 \times 1 \times 10$$

$$25 \times 4 = 5 \times 4 + 20 \times 4$$

$$20 + 80$$

$$100$$

$$50 \times 2 = 100 \text{ ou } 10 \times 2$$

Figura 5.9 – Parte do quadro com os registos dos cálculos iniciais da primeira cadeia da tarefa 12

Depois de os alunos terem explicitado os vários raciocínios em que se basearam para realizar 25×24 , que surgira também no problema da tarefa 10 – Pilhas de caixas, Isabel pergunta aos alunos apontando a expressão $25 \times 24 = 600$:

Isabel – Então e esta expressão não vos faz lembrar nada?

Bernardo – Era a da Mercearia!

De acordo com os objetivos relacionados com a trajetória de aprendizagem pensada, Isabel tenta, sempre que possível, que os alunos identifiquem alguns cálculos com outros realizados anteriormente. Deste modo ajuda a consolidar as relações numéricas em que se baseiam os cálculos e espera que, em situações posteriores, os alunos também consigam mobilizar essas relações em novos cálculos.

No final da exploração da cadeia numérica exemplificada, o quadro tem, também, os últimos registos correspondentes aos cálculos 25×24 e 50×12 .

de Janeiro de 2009

$$25 \times 24 = 24 \times 5 + 24 \times 20 \text{ ou } 25 \times 20 + 25 \times 4 \text{ ou}$$

$$\text{ou } 50 \times 12$$

$$50 \times 10 + 50 \times 2$$

$$500 + 100$$

$$600$$

$$(25 \times 10) \times 2 + (25 \times 4) \times 2$$

$$250 \times 2 + 100 \times 2$$

$$500 + 200$$

$$700$$

$$50 \times 12 = 600 \text{ ou } 50 \times 10 + 50 \times 2$$

Figura 5.10 – Parte do quadro com os últimos cálculos da primeira cadeia da tarefa 12

Em cada cadeia, considerando os seus propósitos e o modo como os alunos reagem, Isabel vai decidindo o tempo que dá para se analisarem justificações de diferentes procedimentos e o que é importante realçar. Uma vez que uma cadeia numérica deve ser iniciada por um cálculo que os alunos sabem de cor, no episódio anterior, Isabel não pede justificação de 50×10 . Em relação aos cálculos seguintes, já dá tempo aos alunos para a explicação de formas de pensar que traduzem o uso de diferentes propriedades da multiplicação. Todos os cálculos verbalizados pelos alunos são

registados no quadro por Isabel, tal como ilustro nas figuras 5.9 e 5.10, usando uma linguagem matemática adequada.

Em síntese, este capítulo apresentou e fundamentou a experiência de ensino na turma de Isabel. Foram explicitadas e justificadas as dimensões de conteúdo matemático e pedagógica da conjectura que orientou a experiência de ensino, tendo sido clarificadas as várias opções tomadas. Considerando a conjectura formulada, foi construída a trajetória de aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número que concretizou, na sala de aula, a experiência de ensino. A trajetória incluiu as tarefas propostas aos alunos, norteadas pelos objetivos de aprendizagem e organizadas em onze sequências. As tarefas foram apresentadas e justificadas, sendo identificadas, para cada uma, as grandes ideias associadas à multiplicação, antecipados os procedimentos que podiam ser usados e os contextos e os números envolvidos.

A terminar, foram descritas as aulas que constituem a experiência de ensino, bem como a sua preparação. Nesse âmbito, foram relatados e fundamentados os vários tipos de aula que ocorreram, de acordo com o tipo de atividade em que os alunos se envolveram.

Capítulo 6

-

Os procedimentos usados pelos alunos e a sua evolução

Este estudo foca-se na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um dos seus propósitos é compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação e, por isso, inclui a caracterização dos seus procedimentos na resolução de tarefas de multiplicação, e a sua evolução ao longo da trajetória de aprendizagem. Este capítulo contém, assim, a análise dos procedimentos usados pelos alunos, da sua evolução e das dificuldades manifestadas na resolução das tarefas propostas.

Começo por identificar e caracterizar os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação²³, a partir dos seus registos escritos. A opção por recorrer, na caracterização dos procedimentos dos alunos, apenas aos seus registos escritos como evidência empírica, prende-se com o facto de considerar que estes permitem obter uma visão global sobre os procedimentos daí emergentes, traduzindo o seu modo de raciocinar sobre os problemas. Ainda na mesma secção são quantificados

²³ Tal como referi no capítulo anterior, a experiência de ensino inclui, também, tarefas com contexto de divisão.

todos os procedimentos usados pelos alunos em cada tarefa e subtarefa da experiência de ensino. Esta quantificação é apresentada sob a forma de tabelas, para cada um dos quatro grupos de tarefas e subtarefas: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal. A observação e interpretação dessas quatro tabelas fizeram sobressair aspetos particulares da frequência, preferência e evolução dos procedimentos dos alunos, que são analisados e discutidos posteriormente.

Segue-se uma segunda secção onde é descrita e analisada a evolução dos procedimentos dos alunos da turma do 3.º ano na resolução das tarefas que constituíram a experiência de ensino. Para aprofundar a compreensão sobre esta evolução, em parte já evidenciada a partir da análise das tabelas realizadas na secção anterior, ela é analisada no contexto do trabalho realizado na sala de aula, considerando momentos de resolução de tarefas e de discussão associada à sua exploração. Nessas discussões são incluídos, também, os congressos matemáticos realizados e, nas tarefas propostas, são consideradas as de cálculo em cadeia. Assim, são estabelecidas interligações entre os registos escritos dos alunos e a sua participação nas discussões coletivas a propósito das tarefas, em geral, e no caso particular dos congressos matemáticos e das cadeias numéricas. Esta opção significa que considero como evidências empíricas para a análise da evolução dos procedimentos dos alunos não apenas as suas produções escritas aquando da resolução das tarefas mas, também, excertos de episódios de sala de aula.

Nas últimas secções deste capítulo analiso as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas incluídas na experiência de ensino, e o modo como aquelas foram geridas e ultrapassadas. Esta análise é transversal e de segunda ordem, uma vez que foi realizada a partir da análise das secções relativas à caracterização e evolução dos procedimentos dos alunos, em articulação com mais uma incursão nos dados empíricos.

6.1. Os procedimentos usados pelos alunos

Nas subsecções seguintes descrevo e caracterizo os procedimentos usados pelos alunos da turma do 3.º ano quando resolveram tarefas de multiplicação. Para este efeito foram objeto de análise os registos escritos efetuados pelos alunos, quando, individualmente ou em pares, realizaram as tarefas propostas pela professora. Optei por, nesta secção, não descrever nem analisar as intervenções dos alunos no âmbito das discussões realizadas, no final de uma tarefa ou nos congressos matemáticos. Também as cadeias numéricas, realizadas periodicamente com os alunos na sala de aula, com o objetivo de desenvolver procedimentos de cálculo mental, não são aqui objeto de análise, dadas as suas características particulares.

6.1.1. Caracterização dos procedimentos

A revisão da literatura e a análise das produções escritas dos alunos da turma do 3.º ano permitiram identificar grandes categorias de procedimentos usados por estes ao resolverem as tarefas propostas pela professora Isabel: procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimentos subtrativos e procedimentos multiplicativos. Para cada uma das categorias identificadas foram, ainda, discriminados procedimentos específicos organizados na tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas

Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

Nos pontos seguintes caracterizo cada um dos procedimentos identificados e apresento exemplos de produções dos alunos que os ilustram.

Procedimentos de contagem

Contar por saltos. Este procedimento corresponde a uma contagem sistemática, partindo de um determinado número e “saltando” invariavelmente um mesmo valor, o que corresponde a adicionar sucessivamente esse valor, nomeando ou registrando apenas o resultado da adição. Concretizando, contar um conjunto de 35 objetos organizados em grupos de cinco, dando saltos de cinco, corresponde a enumerar 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.

Gustavo, na resolução da tarefa 8B – Pátio do Cristóvão, para calcular o número total de pedras da zona do chapéu-de-sol, parece ter usado este procedimento. Nesta tarefa era necessário calcular o número total de pedras de um empedrado com cinco pedras “em coluna” e dezanove “em linha”.

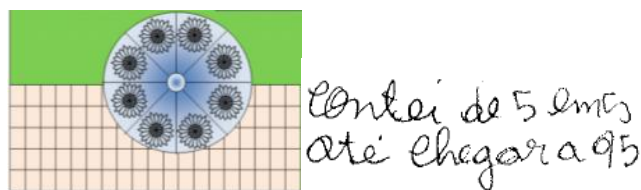


Figura 6.1 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3 – tarefa 8B

Gustavo escreve que contou de cinco em cinco, parecendo tê-lo feito desde a primeira coluna do empedrado até à décima nona, perfazendo um total de 95 pedras, apesar de não ter representado os “saltos” intermédios.

Os casos incluídos nesta categoria correspondem, maioritariamente, a “saltar” grupos de cinco e de dez, grupos esses que foram os que surgiram, mais vezes e com intencionalidade, nos contextos explorados pelos alunos, sobretudo nas tarefas 8A e 8B, tal como o exemplo apresentado.

O contexto e a grandeza dos números envolvidos parecem estar relacionados com o “comprimento” escolhido para os saltos. Talvez por isso, não há evidências nas produções escritas dos alunos de que tenham recorrido à contagem um a um, pelo que não inventariei este procedimento. No entanto, durante as aulas, pude observar alguns

casos, poucos, em que os alunos o adotaram, apesar de não o terem registrado, posteriormente, por escrito.

Procedimentos aditivos

Adicionar sucessivamente. Este procedimento corresponde a adicionar sucessivamente um mesmo número, apresentando os cálculos horizontalmente, sob a forma de uma adição de parcelas iguais.

Gustavo e Leandra usam este procedimento na subtarefa 2 da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas.

Figura 6.2 – Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 2 – Tarefa 13

Os alunos adicionam repetidamente dois litros e vão efetuando as adições sucessivas, escrevendo por cima das parcelas os respectivos totais parciais até 18. O número de garrafas de dois litros, necessário para se obter 30 litros, é obtido através do número de vezes que se adicionou a parcela dois. Note-se que esta resolução está incompleta, pois os alunos não dão a resposta ao problema proposto.

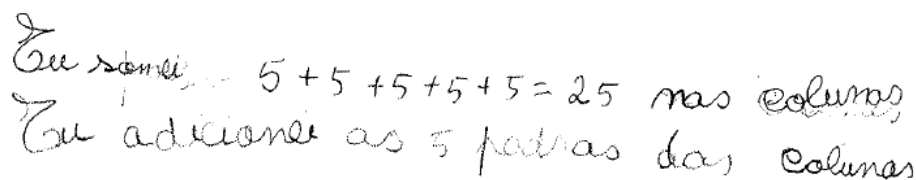
Também a resolução de Bernardo, da tarefa 25 – Outra máquina de bebidas, evidencia um procedimento de adição sucessiva. A tarefa referida inclui um contexto de divisão por medida, considerando que o cálculo é relativo ao número de embalagens de seis garrafas de água necessárias para encher uma máquina com capacidade para 132 garrafas.

Figura 6.3 – Resolução de Bernardo da tarefa 25

Na sua resolução, Bernardo representa uma adição de parcelas iguais e vai controlando o resultado, pois sabe que tem de parar em 132, através das adições sucessivas da parcela igual a seis. Uma vez que a situação é de divisão, Bernardo obtém a resposta através da contagem do número de vezes que adicionou o número seis, ou seja, 22 vezes.

Nesta categoria são incluídas, também, resoluções em que, embora não sendo totalmente claro o uso deste procedimento, a minha interpretação do que é registado por escrito pelos alunos me leva a considerá-las aqui.

Um destes casos diz respeito à resolução de Mariana na subtarefa 1 da tarefa 8A – Pátio do João. A aluna representa o cálculo através de uma adição de parcelas iguais, correspondentes às cinco pedras existentes em cada “coluna” do empedrado.



Eu somei $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ nas colunas
Eu adicionei as 5 pedras das colunas

Figura 6.4 – Resolução de Mariana da subtarefa 1 – tarefa 8A

Embora não explicitando o modo como realiza a adição, Mariana refere “Eu adicionei as 5 pedras das colunas”, o que me leva a considerar que adicionou sucessivamente o número cinco.

Os outros casos, em que o registo escrito dos alunos não traduz o uso claro deste procedimento, dizem respeito a situações em que os alunos realizam primeiro um registo multiplicativo, o que acontece, sobretudo, nas tarefas iniciais. Apesar de usarem um registo do tipo multiplicativo, como ainda não conseguem calcular o produto que indicam, usam a adição sucessiva para determinar o resultado. Raquel é uma das crianças que, em algumas das tarefas, representa primeiro os cálculos através da multiplicação e calcula depois usando uma adição de parcelas iguais:

Eu pensei
 $18 \times 5 = 90$
 ou
 $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
 $5 + 5 + 5 + 5 = 90$

Figura 6.5 – Resolução de Raquel da subtarefa 4 – tarefa 7

Adicionar dois a dois. Este procedimento corresponde à realização de uma adição de parcelas iguais mas, em vez de estas serem adicionadas sucessivamente, são agrupadas duas a duas, de modo a progredir mais rapidamente na procura do resultado.

Alguns alunos usam a adição de parcelas iguais para resolverem problemas de multiplicação e agrupam as parcelas duas a duas, de modo a efetuarem os cálculos mais depressa. Para esse efeito socorrem-se, na maior parte das vezes, de um esquema em árvore. Apresento, em seguida, a resolução de Gustavo de parte da tarefa 2, onde era necessário calcular o preço de oito caixas de morangos a três euros cada.

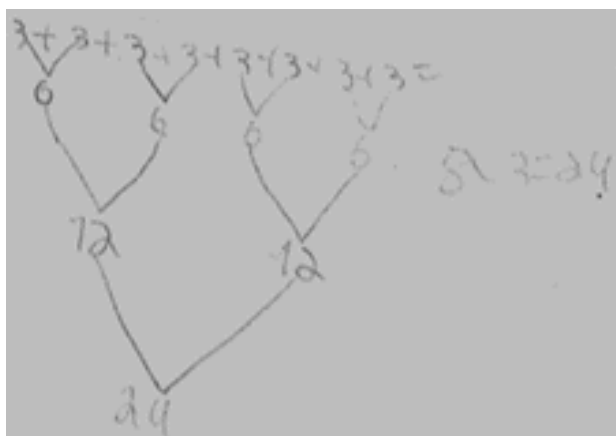


Figura 6.6 – Resolução de Gustavo de parte da tarefa 2

Considere, também, que os alunos recorrem a um procedimento aditivo deste tipo quando adicionam parcelas duas as duas como, por exemplo, na tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade. Apresento a resolução de Luís e Raquel, um dos pares que, na tarefa referida, recorre a esse procedimento.

$$\begin{array}{l|l}
 4 \text{ sacos de laranjas} & 12 \text{ sacos de laranja} \\
 \hline
 3,20\text{€} + 3,20\text{€} = 6,4\text{€} & 9,60\text{€} + 9,60\text{€} = 19,2\text{€}
 \end{array}$$

Figura 6.7 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 2 – Tarefa 30

Estes alunos, para saberem o preço de quatro sacos de laranjas adicionam o preço de dois sacos duas vezes e, para calcularem o preço de doze sacos, adicionam o preço de seis duas vezes.

Procedimentos subtrativos

Subtrair sucessivamente. Este procedimento corresponde a realizar subtrações sucessivas, partindo do aditivo e subtraindo repetidamente um mesmo número, o subtrativo. O aditivo vai-se alterando ao longo dos cálculos mas o subtrativo é sempre o mesmo em todas as subtrações. Os cálculos são apresentados tanto horizontalmente como verticalmente e estão associados à resolução de problemas com um contexto de divisão.

Joana e Patrícia usam esta forma de resolução num dos problemas da tarefa 20 – Máquinas de bebidas.

$$\begin{array}{l}
 156 : 6 = 26 \\
 \begin{array}{l}
 156 - 6 = 150 \\
 150 - 6 = 144 \\
 144 - 6 = 138 \\
 138 - 6 = 132 \\
 132 - 6 = 126 \\
 126 - 6 = 120 \\
 120 - 6 = 114 \\
 114 - 6 = 108 \\
 108 - 6 = 102 \\
 102 - 6 = 96 \\
 96 - 6 = 90 \\
 90 - 6 = 84 \\
 84 - 6 = 78 \\
 78 - 6 = 72 \\
 72 - 6 = 66 \\
 66 - 6 = 60
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 60 - 6 = 54 \\
 54 - 6 = 48 \\
 48 - 6 = 42 \\
 42 - 6 = 36 \\
 36 - 6 = 30 \\
 30 - 6 = 24 \\
 24 - 6 = 18 \\
 18 - 6 = 12 \\
 12 - 6 = 6 \\
 6 - 6 = 0
 \end{array}$$

R. Formos teradom 6 ao resultado

Figura 6.8 – Resolução de Joana e Patrícia da subtarefa 1 – tarefa 20

Ao resolverem o problema cujo contexto é de divisão, partem de 156, número total de garrafas que leva a máquina de bebidas e vão subtraindo consecutivamente o

número seis, que corresponde ao número de garrafas de água de cada embalagem, uma vez que o objetivo era calcular o número de embalagens de garrafas de água necessárias para encher a máquina. Apesar de se terem equivocado, o número de vezes que subtraíram o número seis corresponde, efetivamente, ao número de embalagens necessárias, uma vez que detetam e corrigem o engano inicial.

Procedimentos multiplicativos

Usar produtos conhecidos. Este procedimento corresponde à utilização de produtos ou factos conhecidos dos alunos para efetuar os cálculos necessários à resolução de um determinado problema. Entende-se por produtos conhecidos os que correspondem às tabuadas já trabalhadas por estes alunos.

Os alunos já conheciam, do ano anterior, as tabuadas dos números dois, cinco, dez, quatro e três e as tabuadas restantes, até à do número dez, foram sendo trabalhadas ao longo do 1.º período do ano da recolha de dados. Assim, frequentemente, na resolução de um problema, alguns alunos escrevem apenas a igualdade multiplicativa, sem efetuarem quaisquer cálculos, uma vez que já automatizaram muitos produtos a partir do trabalho realizado em torno da construção e memorização das tabuadas.

Luís é um dos alunos que usa produtos conhecidos sempre que os números envolvidos são do domínio das tabuadas. Na figura seguinte está representado o modo como resolve um dos problemas da tarefa 7 – Cortinas.

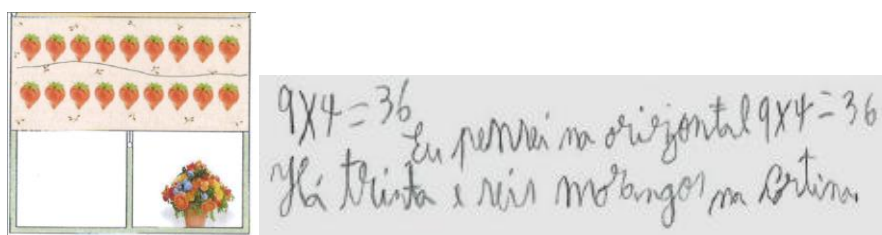


Figura 6.9 – Resolução de Luís da subtarefa 3 – tarefa 7

Para resolver o problema Luís individualiza um grupo de nove morangos, colocando um traço horizontal na figura, contudo, usa o produto 9×4 em vez de 4×9 , que traduz o raciocínio que efetua. Provavelmente porque aquele pertence à tabuada do número quatro, que já automatizou.

Usar relações de dobro. Este procedimento consiste, tal como o nome indica, na utilização, de modo explícito, do dobro de um número na realização de um cálculo multiplicativo.

Um dos alunos que usa este procedimento é Gustavo:

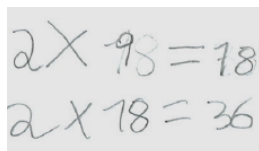

$$\begin{array}{l} 2 \times 9 = 18 \\ 2 \times 18 = 36 \end{array}$$

Figura 6.10 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3 – tarefa 7

Para calcular o número total de morangos da cortina que figura na subtarefa 3 da tarefa 7, Gustavo determina primeiro o número de morangos visíveis, efetuando o dobro do número de uma fila. Depois volta a calcular o dobro, para obter a totalidade do número de morangos.

Em algumas tarefas, tais como as tarefas 7, 10, 29 e 30 o recurso a este procedimento de resolução é muito evidente. Esta opção, por parte dos alunos, parece estar fortemente relacionada com o contexto dos problemas propostos que fazem emergir, precisamente, o uso de relações de dobro.

Usar múltiplos de cinco e de dez. Este procedimento consiste no uso explícito de múltiplos de cinco e/ou de dez no cálculo de produtos.

Ele é usado, por exemplo, na tarefa 29 – Ida ao teatro, onde é necessário preencher uma tabela com preços de diferentes quantidades de bilhetes. Para calcular o preço de 10 bilhetes, conhecido o preço de um bilhete (1,25€), Ana Rita e Miguel optam por recorrer ao preço de dois bilhetes, calculado anteriormente, e multiplicam-no por cinco, de modo a obter o preço de dez bilhetes. Utilizam, ainda, a propriedade comutativa da multiplicação, representando $2,50 \times 5$ em vez de $5 \times 2,50$.

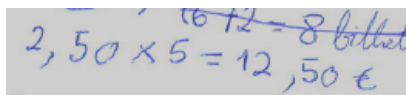

$$2,50 \times 5 = 12,50 \text{ €}$$

Figura 6.11 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 1 – tarefa 29

Usar a decomposição não decimal de um dos fatores. Este procedimento consiste, tal como o nome sugere, no uso de uma decomposição não decimal de um dos fatores do produto, transformando-o em produtos parciais, e tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A decomposição não decimal de um dos fatores corresponde, muitas vezes, à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais ou de parcelas que, de alguma forma, facilitam o cálculo que é necessário realizar.

Uma das tarefas em que os alunos usam este procedimento é a tarefa 10 – Pilhas de caixas, onde a imagem da pilha de caixas pode sugerir uma decomposição diferente da decimal. Cristóvão e Hugo recorrem a este procedimento para calcular o número total de maçãs acondicionadas nas caixas, parecendo usar o que é sugerido pela disposição das caixas, na figura que acompanha o respetivo problema. Assim, para calcular o número total de maçãs, estes alunos usam três produtos parciais, que correspondem à decomposição de 25 em $12+10+3$. O produto 12×48 corresponde ao total de maçãs das duas filas de caixas inferiores, 10×48 equivale ao total de maçãs das duas filas seguintes e, finalmente, 3×48 corresponde ao total de maçãs existentes na fila de caixas superior.

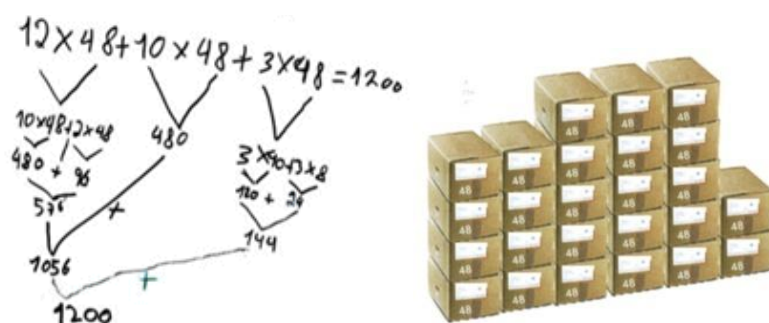


Figura 6.12 – Resolução de Cristóvão e Hugo da sub tarefa 2 – tarefa 10

Note-se que, no cálculo dos produtos parciais 12×48 e 3×48 , Cristóvão e Hugo usam a decomposição decimal de um dos fatores. Contudo, uma vez que a primeira expressão que os alunos registam tem subjacente a decomposição não decimal do fator 25, o seu procedimento é incluído nesta categoria.

São, igualmente, inseridas nesta categoria de procedimentos as resoluções, como a de Francisco, em que os alunos recorrem a produtos parciais iguais.

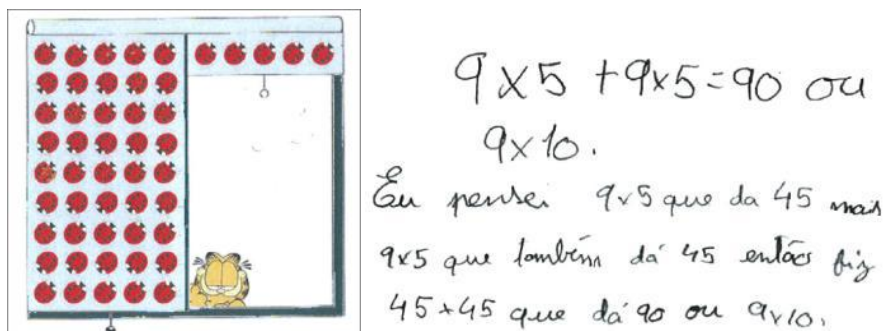


Figura 6.13 – Resolução de Francisco da subtarefa 4 – tarefa 7

Francisco representa o número de joaninhas de metade da cortina através do produto 9×5 e, como percebe que a outra metade, apesar de não estar visível, tem o mesmo número, calcula o total repetindo o produto parcial.

Usar a decomposição decimal de um dos fatores. Este procedimento consiste no uso de produtos parciais, baseados na decomposição decimal, para calcular um produto. Os produtos parciais surgem ao efetuar a decomposição decimal (separando centenas, dezenas e unidades, no caso dos números naturais, e décimas e centésimas no caso de números na representação decimal) de um dos fatores do produto. Este procedimento de cálculo tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Na tarefa 10 – Pilhas de caixas, vários alunos recorrem a este procedimento. Ainda assim, para efetuar o mesmo produto, 25×48 , alguns alunos optam por decompor 25 e outros por decompor 48.

Enzo e Francisco decompõem o número 48 em dezenas e unidades:

$$\begin{array}{rcl}
 25 \times 48 & = & 25 \times 8 + 25 \times 40 = 1200 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & 200 & + (25 \times 10) \times 4 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & & 250 \times 4 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & 200 & + 1000 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & 1200 &
 \end{array}$$

Figura 6.14 – Resolução de Enzo e Francisco da subtarefa 2 – Tarefa 10

David e Diogo usam também, na mesma tarefa, uma decomposição decimal, mas do número 25 em 20+5.

$$48 \times 25 = 48 \times 20 + 48 \times 5 = 1200$$

Figura 6.15 – Resolução de David e Diogo da subtarefa 2 – tarefa 10

Para além da decomposição do número 25, David e Diogo trocam a ordem dos fatores na multiplicação, efetuando o cálculo 48×25 , em vez de 25×48 , que corresponde ao cálculo do total de maçãs existentes em 25 caixas, cada uma com 48 maçãs. No entanto, este aspeto parece não lhes ter causado qualquer obstáculo para a compreensão e resolução do problema. No papel, os alunos não registam como efetuam os cálculos intermédios.

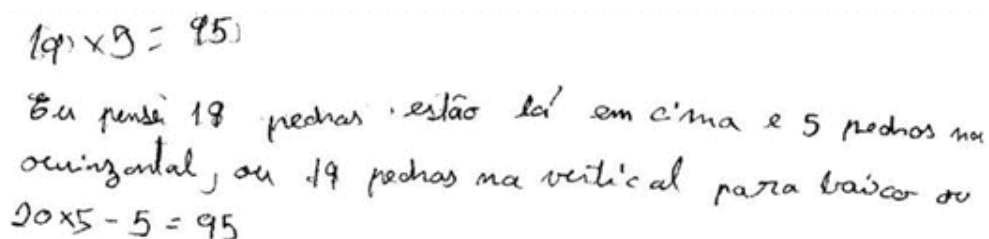
A troca da ordem dos fatores numa multiplicação foi identificada em diversas resoluções de alunos, sem que parecesse evidenciar falta de compreensão do problema em si. A partir de uma certa altura, parece mesmo ter deixado de ser relevante, para alguns alunos, que a ordem pelos quais escrevem os fatores para efetuar um cálculo corresponda, efetivamente, à tradução, em linguagem simbólica, do problema que é necessário resolver. Este aspeto pode estar relacionado, por um lado, com o conhecimento e uso da propriedade comutativa da multiplicação, muito enfatizado durante o trabalho de construção das tabuadas. Por outro lado, parece, também, estar associado com a tendência para decompor o segundo fator numa multiplicação, o que leva os alunos a colocar em segundo lugar o número que, para eles, é mais fácil de decompor.

O recurso à decomposição decimal de um dos fatores para efetuar um cálculo multiplicativo é um procedimento muito frequente, sobretudo quando um dos fatores envolvidos é um número maior que vinte.

Ajustar e compensar. Este procedimento consiste na substituição de um produto por outro, que envolve um fator que é “próximo” de um dos números do produto que é preciso calcular, mas mais fácil de efetuar. Depois é feita a compensação necessária através de uma subtração. Subjacente a este procedimento está a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

No caso dos números naturais, na maior parte das vezes, o produto inicial é substituído por um outro que inclui um fator múltiplo de 10, ou que seja um número de referência. No caso do cálculo com números racionais não negativos na sua representação decimal o produto inicial, que envolve um número decimal, é substituído por um número natural “próximo” ou, também, por um número de referência.

Francisco, na resolução da subtarefa 3 da tarefa 8 B – Pátio do Cristóvão, usa este procedimento para calcular 19×5 .



$19 \times 5 = 95$
 Eu pensei 18 pedras estão lá em cima e 5 pedras na horizontal, ou 19 pedras na vertical para brincar ou
 $20 \times 5 - 5 = 95$

Figura 6.16 – Resolução de Francisco da subtarefa 3 – tarefa 8B

De facto, na justificação que apresenta sobre o modo como pensou, Francisco, além de associar cada um dos fatores ao número de pedras na horizontal e na vertical, escreve uma expressão onde se percebe que calcula primeiro 20×5 e compensa a seguir, subtraindo cinco.

Usar relações de dobro e de metade. Este procedimento baseia-se no estabelecimento de relações de dobro e de metade entre os fatores de um mesmo produto. Consiste no uso da propriedade associativa da multiplicação, usando sempre a relação dobro/metade.

Por exemplo, para realizar o cálculo 25×8 usando este procedimento, pensa-se que efetuar este produto é equivalente a efetuar 50×4 , uma vez que 50 é o dobro de 25 e

quatro é metade de oito. Ou seja, subjacente a este procedimento está o recurso à propriedade associativa da multiplicação:

$$25 \times 8 = 25 \times (2 \times 4) = (25 \times 2) \times 4 = 50 \times 4.$$

David, Enzo e Francisco usam uma relação de dobro e de metade na resolução do segundo problema da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas. Como anteriormente tinham verificado que eram necessárias 30 garrafas de um litro de água para perfazer 30 litros, identificam que, no caso de garrafas de dois litros, são necessárias apenas 15 para se obter a mesma quantidade de água. Na sua justificação explicitam a relação dobro/metade, referindo que 15 é metade de 30 e dois é o dobro de um (apesar de não terem escrito o número um).

Handwritten student work for Figure 6.17. It shows the calculation $15 \times 2 = 30 \text{ l}$. Below it, a sentence in Portuguese: "nós pensamos que 15 é metade de 30 e 2 é o dobro de 1 e daí são 30 litros."

Figura 6.17 – Resolução de David, Enzo e Francisco da subtarefa 2 – tarefa 13

Na mesma tarefa, mas no problema seguinte, Duarte e Tiago identificam, também, uma relação de dobro e de metade, quando se pretende saber o número total de garrafas de meio litro necessário para perfazer 30 litros. O produto $60 \times 0,5 = 30$ parece ter sido relacionado, neste caso, com o produto $30 \times 1 = 30$, uma vez que 60 é o dobro de 30 e 0,5 é metade de 1. Esta relação parece estar implícita na resposta que os alunos escrevem “Nós pensámos no dobro de 30 e na metade de 1 litro”.

Handwritten student work for Figure 6.18. It shows the calculation $60 \times 0,5 \text{ l} = 30 \text{ l}$. Below it, a sentence in Portuguese: "Nós pensamos no dobro de 30 e na metade de 1 litro".

Figura 6.18 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 – tarefa 13

O procedimento em si, de usar uma relação de dobro e de metade, pode ser generalizado e ser utilizado para qualquer número e o seu inverso (usar o triplo e a terça parte, usar o quádruplo e a quarta parte, etc.). No entanto, uma vez que o uso de relações

diferentes das de dobro/metade não é evidente, não é considerado na caracterização dos procedimentos usados pelos alunos.

Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência. Este procedimento corresponde a realizar, como ponto de partida, um produto de referência e, tal como o seu nome indica, a multiplicar sucessivamente a partir dele, mantendo um dos fatores e aumentando em uma unidade o outro fator. Subjacente a este procedimento está o uso de múltiplos de dez ou de produtos conhecidos.

Ana Rita e Miguel usam este procedimento numa parte da tarefa 26 – Miniaturas de animais.

$10 \times 7 = 70$	$26 \times 7 = 182$	$224 : 7 = 32$
$11 \times 7 = 77$	$27 \times 7 = 189$	
$12 \times 7 = 84$	$28 \times 7 = 196$	
$13 \times 7 = 91$	$29 \times 7 = 203$	
$14 \times 7 = 98$	$30 \times 7 = 210$	
$15 \times 7 = 105$	$31 \times 7 = 217$	
$16 \times 7 = 112$	$32 \times 7 = 224$	
$17 \times 7 = 119$	~~$33 \times 7 = 231$~~	
$18 \times 7 = 126$	~~$34 \times 7 = 238$~~	
$19 \times 7 = 133$		
$20 \times 7 = 140$		
$21 \times 7 = 147$		
$22 \times 7 = 154$		
$23 \times 7 = 161$		
$24 \times 7 = 168$		
$25 \times 7 = 175$		

Figura 6.19 – Resolução de Ana Rita e Miguel de uma parte da tarefa 26

Nesta parte do problema referido, é necessário calcular o número de miniaturas de animais que são repartidas, igualmente, por um grupo de sete alunos, havendo um total de 224 miniaturas. Na sua resolução, Ana Rita e Miguel começam com o produto 10×7 (sete é o divisor na divisão correspondente) e vão realizando, sucessivamente, todos os produtos, 11×7 , 12×7 , 13×7 , ..., calculando todos os múltiplos de sete até encontrarem o número que, multiplicado por sete, é igual a 224. Deste modo, efetuam uma “procura” sistemática do número que multiplicado por sete é igual a 224.

Note-se que este procedimento multiplicativo é usado por alguns alunos na resolução de problemas cujo contexto é de divisão, tal como no exemplo apresentado. Partem de um produto de referência onde um dos fatores é o número com função de

divisor (na divisão correspondente) e o outro fator é, por exemplo, um múltiplo de 10. Depois vão realizando, sistematicamente, todas as multiplicações, mantendo o fator que corresponde ao divisor e aumentando em uma unidade o outro fator, até o produto obtido ser igual ao número que corresponde ao dividendo (na divisão correspondente).

Multiplicar em coluna. Este procedimento corresponde à realização de cálculos na forma vertical e atendendo à decomposição decimal dos números envolvidos. Os cálculos parciais são efetuados da esquerda para a direita e trabalha-se com números e não com dígitos, ao contrário do que acontece no cálculo algorítmico.

Enzo e Francisco usam este procedimento para realizar o cálculo 25×24 . No entanto, ao transporem o cálculo horizontal para vertical, ou em coluna, trocam a ordem dos fatores calculando, efetivamente, 24×25 .

Figura 6.20 – Resolução de Enzo e Francisco da subtarefa 1 – tarefa 10

Repare-se que os alunos recorrem aos números e não a dígitos, pois registam os produtos parciais 100 e 500 correspondentes a 4×25 e 20×25 , respetivamente.

Não são incluídas nesta categoria as produções dos alunos onde o registo usando o cálculo em coluna parece corresponder, apenas, a um modo de representação da situação multiplicativa em si. Apresento, como exemplo, a resolução de Duarte, na subtarefa 4 – tarefa 8A.

Figura 6.21 – Resolução de Duarte da subtarefa 4 – tarefa 8A

Ao calcular o número de pedras de uma zona de empedrado, Duarte regista a sua resolução representando o cálculo tanto na horizontal como na vertical. O recurso a esta forma de representação não parece corresponder a um modo de calcular, pois nesta altura o aluno já tem automatizadas as tabuadas, sabendo de imediato o valor de 5×9 . Assim, este tipo de resoluções está incluído na categoria Usar produtos conhecidos.

A existência de resoluções de alunos como a descrita anteriormente pode estar relacionada com o facto de o cálculo em coluna ter sido trabalhado pela professora Isabel, no que se refere à multiplicação em que um dos fatores tem apenas um algarismo, no final do 2.º ano de escolaridade. Foi, igualmente, usado ao longo do 3.º ano, para efetuar cálculos em que os fatores têm dois ou mais algarismos, uma vez que a professora o considerou adequado para caminhar progressivamente para o algoritmo da multiplicação.

6.1.2. Os procedimentos em cada tarefa e subtarefa

Nesta subsecção sintetizo, sob a forma de tabela, os procedimentos que os alunos usam em cada tarefa e subtarefa da experiência de ensino. Organizo a síntese em quatro tabelas e cada uma delas diz respeito a um dos conjuntos de tarefas agrupadas: tarefas de multiplicação com números naturais, tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na sua representação decimal, tarefas de divisão com números naturais e tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na sua representação decimal. Esta organização, em quatro grupos de tarefas, está descrita e fundamentada na secção sobre a análise de dados do capítulo da Metodologia.

Em cada tarefa e subtarefa são contabilizados os diferentes procedimentos de cálculo a que os alunos recorrem e são, igualmente, registados os casos em que os alunos não resolvem a tarefa/subtarefa ou em que a resolvem incorretamente.

Inclui-se, também, o registo dos casos em que não é possível perceber, através das produções escritas dos alunos, qual o procedimento que usam para efetuar um determinado cálculo. Identifiquei situações em que os alunos se limitam a escrever a

igualdade que traduz a resolução de um determinado problema mas, uma vez que não existe alguma evidência ou explicação do modo como pensaram para realizar o cálculo, estas produções não são incluídas em categorias de procedimentos

Um exemplo de um caso destes verifica-se na subtarefa 3 da tarefa 8B – Pátio do Cristóvão, onde Eva apresenta uma igualdade multiplicativa sem, no entanto, dar alguma justificação sobre o procedimento de cálculo utilizado, tal como se ilustra na Figura 6.22.

Zona da toalha

$$22 \times 5 = 110$$

Figura 6.22 – Resolução de Eva da subtarefa 4 – tarefa 8B

Através da observação da igualdade $22 \times 5 = 110$, apenas é possível entender que foi utilizado um procedimento multiplicativo, sem se perceber, no entanto, como Eva efetuou o cálculo associado. Uma vez que expressões como esta não correspondem a produtos conhecidos através do domínio da tabuada, como por exemplo $9 \times 5 = 45$, não são contabilizadas no procedimento Usar produtos conhecidos e casos como o da figura anterior incluem-se numa categoria denominada Representa apenas o produto.

Seguem-se as quatro tabelas, nas quais apresento, subtarefa a subtarefa, a frequência de cada procedimento usado pelos alunos, nas produções escritas associadas às tarefas propostas pela professora Isabel, durante a experiência de ensino.

A quantificação dos procedimentos usados pelos alunos, organizada nas tabelas seguintes a partir da análise detalhada das suas produções, permite evidenciar alguns aspetos que identifique e discuto nos pontos seguintes: (i) o uso de vários procedimentos, pelo mesmo aluno, para realizar um cálculo, (ii) a frequência na utilização de determinados procedimentos e (iii) a preferência de alguns alunos por determinados procedimentos.

Tabela 6.2 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação com números naturais

Tarefas		Tarefa 1		Tarefa 2	Tarefa 4			Tarefa 7				Tarefa 8A				Tarefa 8B				Tarefa 10		
		Subtarefa 1	Subtarefa 2		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4	Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4	Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4	Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3
	Contar por “saltos”							1		1				2	2	1	2	1				
Aditivas	Adicionar sucessivamente	19	11	7		4		8	10	10	5	3	3	1	2	2	1	1	1			
	Adicionar dois a dois			1		2		5					1	1								
	Adicionar em coluna																					
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	12	12	21	21	21	13	16	14	5	11	22	21	23	19	2	7	3	3			
	Usar dobros	13	4	10	2		2	3	6	14	7											12
	Usar múltiplos de 5 e 10	14	6	4					1		18		1	2		16	2			2	2	
	Usar uma decomposição não decimal	12	8	22	2		13		3	7	8	3	2		2	4	4	1	3		4	
	Usar uma decomposição decimal			8													11	5	6	18	16	
	Ajustar e compensar	2		1	2			2						1				1		2		
	Usar dobros e metades																				2	
	Multiplicar sucessivamente																				2	
	Multiplicar em coluna																					
	Representar apenas produto																	11	9			
Não resolveu ou fez incorretamente							2	1	2				1	1			2	1	1			6

Tabela 6.3 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal

Tarefas Procedimentos		Tarefa 13 Garrafas e mais garrafas				Tarefa 16 Contar moedas 1	Tarefa 17 Contar moedas 2		
		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 4	Subtarefa 1	Subtarefa 4	Subtarefa 5	Subtarefa 6
	Contar por “saltos”					3			
Aditivas	Adicionar sucessivamente	10	8	6	2	7	4	4	
	Adicionar 2 a 2				2	3			
	Adicionar em coluna								
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	5	10						4
	Usar dobros		6						11
	Usar múltiplos de 5 e 10	8							2
	Usar uma decomposição não decimal	11	4			10	14	14	19
	Usar uma decomposição decimal	2							
	Ajustar e compensar								
	Usar dobros e metades		7	11	11				
	Multiplicar sucessivamente								
	Multiplicar em coluna								
	Representar apenas o produto			2	4				
	Não resolveu ou fê-lo incorretamente			11	4		4	4	13

Tabela 6.4 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de divisão com números naturais

Tarefas Procedimentos		Tarefa 19 Colecionar cartas		Tarefa 20 Máquinas de bebidas		Tarefa 25 Outra máquina de bebidas		Tarefa 26 Miniaturas de animais
		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 1	Subtarefa 2	
	Contar por “saltos”							
Aditivas	Adicionar sucessivamente		2	2	2	1		
	Adicionar 2 a 2	2	4	5	5			
	Adicionar em coluna			2	2			
	Subtrair sucessivamente	1	5	6	6	2		
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos	19						
	Usar dobros							
	Usar múltiplos de 5 e 10							
	Usar uma decomposição não decimal			4	4		2	4
	Usar uma decomposição decimal		4			3		13
	Ajustar e compensar							
	Usar dobros e metades							
	Multiplicar sucessivamente		4	6	6	9	3	4
	Multiplicar em coluna							2
Representar apenas a divisão		3	4			2		
Não resolveu ou fê-lo incorretamente		1	1			6	18	2

Tabela 6.5 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números racionais não negativos na representação decimal

Tarefas Procedimentos		Tarefa 29 Ida ao teatro			Tarefa 30 Ida à mercearia da Piedade					
		Subtarefa 1	Subtarefa 2	Subtarefa 3	Subtarefa 11	Subtarefa 12	Subtarefa 21	Subtarefa 22	Subtarefa 31	Subtarefa 32
	Contar por “saltos”									
Aditivas.	Adicionar sucessivamente									
	Adicionar 2 a 2	18	16	6	6	13	4	13	6	6
	Adicionar em coluna				2					2
	Subtrair									
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos		2							
	Usar dobros (e triplos)	12		8	2	10	2	10		4
	Usar múltiplos de 5 e 10	2		8						
	Usar uma decomposição não decimal				7		2			
	Usar uma decomposição decimal		2	2						
	Ajustar e compensar				10				8	10
	Usar dobros e metades									
	Multiplicar sucessivamente									
	Multiplicar em coluna				2				2	
Escrever apenas o resultado					4		15		2	
Não resolveu ou fê-lo incorretamente		4	10	9					5	1

(i) O uso de vários procedimentos, pelo mesmo aluno, para realizar um cálculo

A análise aprofundada das tabelas anteriores permite destacar que, em algumas tarefas, o número total de procedimentos utilizados pelos alunos é superior a 23, número dos alunos da turma de 3.º ano. Este facto verifica-se, sobretudo, nas primeiras tarefas, como se pode observar na Tabela 6.2. Em muitos casos, e sobretudo numa fase inicial da experiência de ensino, os alunos apresentaram mais do que um modo de resolução numa mesma tarefa. Este aspeto parece estar fortemente ligado, por um lado, à sua falta de segurança inicial no uso de procedimentos multiplicativos, optando por, frequentemente, apresentar um procedimento multiplicativo seguido da sua concretização em termos aditivos. Por outro lado, tal como se exemplifica na Figura 6.23, a propósito de uma parte da tarefa 7 – Cortinas, os alunos parecem ter gosto em mostrar que conseguem efetuar o mesmo cálculo de várias maneiras, apesar da professora Isabel realçar que bastava que eles resolvessem as tarefas da maneira que considerassem mais “fácil e rápida” e adequada ao problema em si.

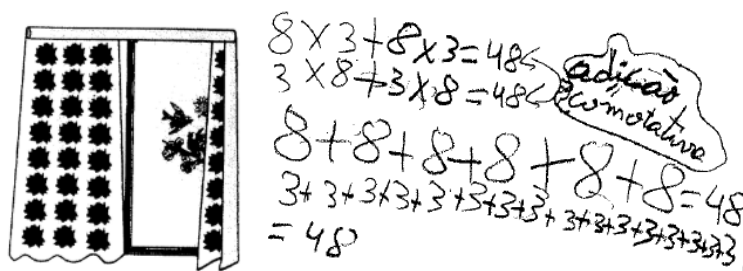


Figura 6.23 – Resolução de Cristóvão da sub tarefa 2 – tarefa 7

A resolução de Cristóvão inclui dois tipos diferentes de procedimentos, o recurso a decomposições não decimais de um dos fatores da multiplicação a efetuar (8×6 ou 6×8 , consoante se contabiliza primeiro o número de flores em coluna ou em linha) e procedimentos do tipo aditivo, alterando a parcela que se repete. Assim, são contabilizados, na síntese da tabela 6.2, os dois procedimentos na sub tarefa respetiva.

Em algumas das situações, nas quais os alunos registam mais do que um procedimento, primeiro um registo multiplicativo e depois a sua concretização em termos aditivos, a segunda representação pode significar que ainda não conseguem efetuar cálculos multiplicativos e recorrem à adição para calcular. No entanto, não há evidência

que, nos casos em que são registados mais do que um procedimento, os alunos recorram, efetivamente, a mais do que um para resolver o mesmo cálculo. Em alguns casos, provavelmente, o segundo registo corresponde a uma confirmação da solução.

Em outras situações, parece ser mais plausível que efetuassem um determinado cálculo usando o procedimento sugerido pela primeira representação e que as representações seguintes sejam apenas uma forma de mostrar que sabem que o mesmo problema pode ser resolvido de outras maneiras. Ou seja, a primeira expressão representada parece traduzir, efetivamente, o modo de raciocinar do aluno. Apresento o exemplo de Mariana a propósito de parte da tarefa 2 – Mercearia da Piedade 2, na qual é necessário saber quanto custam 10 sacos de maçãs, a 5€ cada.

Quanto custam 10 sacos
 $10 \times 5 = 50$. ou $5 \times 5 + 5 \times 5$ ou $5 \times 5 + 4 \times 5 + 1 \times 5$ ou $2 \times 5 \times 5$

Figura 6.24 – Resolução de Mariana de parte da tarefa 2

Ao calcular quanto custam os 10 sacos de maçãs, Mariana começa por escrever a expressão 10×5 , que parece corresponder à sua forma de pensar. A seguir, apresenta outras expressões que sabe corresponderem ao mesmo produto, tal como já tinha visto a professora fazer no quadro, a propósito das discussões com toda a turma.

A partir da análise das tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 verifica-se que a opção por apresentar mais do que um procedimento para um mesmo cálculo vai rareando ao longo da experiência de ensino. No entanto, a observação da tabela 6.5 evidencia, novamente, um número total de procedimentos por subtarefa, muito superior ao número de alunos da turma. Esta constatação deve-se ao facto de haver subtarefas em que é necessário efetuar mais do que um cálculo. Ora, frequentemente, o mesmo aluno ou par de alunos usa diferentes procedimentos para realizar cada um dos cálculos. Assim, em termos de contabilização, este facto aumenta o número total de procedimentos usados numa mesma tarefa, tal como se pode verificar nas tarefas 29 e 30.

Apresento a resolução de Hugo e José da primeira parte da tarefa 29 – Ida ao teatro, em que se solicita o preenchimento de uma tabela, no qual estes usam tanto procedimentos aditivos como multiplicativos.

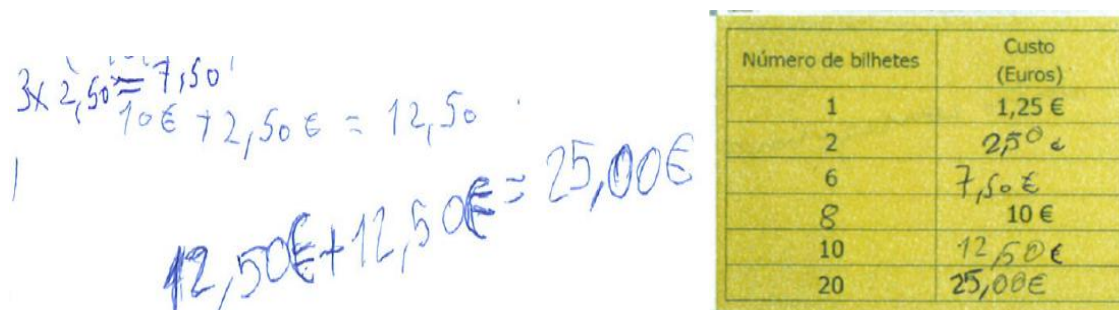


Figura 6.25 – Resolução de Hugo e José da sub tarefa 1 – tarefa 29

Para saberem o preço de seis bilhetes os alunos calculam o triplo do preço de dois e para determinarem o preço de 20, adicionam duas vezes o preço de dez.

Casos como o apresentado são contabilizados nos dois tipos de procedimentos, provocando o aumento do número total de procedimentos por tarefa. Uma das razões que pode justificar a ocorrência deste tipo de resoluções pode estar relacionada com o facto de os dados do problema sugerirem, eventualmente, a realização de cálculos de determinada maneira. Esta justificação parece estar na base da resolução de Bernardo e Duarte da sub tarefa 3 da tarefa 29, onde se pedia para calcular o montante da venda de 250 bilhetes de teatro (lotação esgotada) e que apresento em seguida.

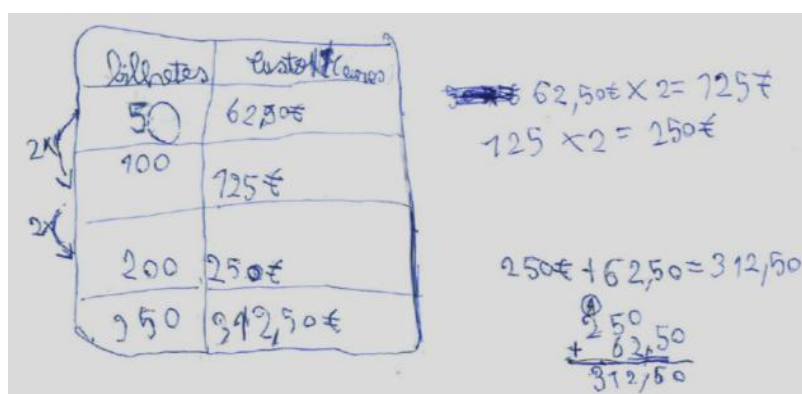


Figura 6.26 – Resolução de Bernardo e Duarte da sub tarefa 3 – tarefa 29

Para calcular o preço de 250 bilhetes, os alunos elaboram uma tabela onde vão registando o preço de 50, 100, 200, e finalmente 250 bilhetes. Não registam como

calculam o preço de 50 mas, a partir dele, calculam o preço de 100 e de 200 bilhetes, usando uma relação de dobro. Contudo, para calcular o preço de 250 adicionam o preço de 200 com o preço de 50, já determinados, tal como se observa na tabela. Esta alternância entre resoluções de tipo multiplicativo e aditivo parece ser provocada pelos números envolvidos. De facto, usar dobros parece ser um procedimento adequado e rápido nos dois primeiros casos e, no último, uma vez que já é conhecido o preço de 200 e de 50 bilhetes, adicioná-los parece ser uma decisão eficaz.

(ii) A frequência na utilização de determinados procedimentos

Através da análise detalhada das tabelas 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 verifica-se que há procedimentos que são usados, sistematicamente, pelos alunos e outros que o são muito raramente. Destacam-se, pela sua elevada frequência, os procedimentos aditivos, o recurso a produtos conhecidos e os procedimentos multiplicativos que recorrem a decomposições, decimais ou outras, de um dos fatores. Pela sua baixa frequência, sobressai o uso de relações de dobro e de metade, procedimento utilizado raramente pelos alunos.

A elevada frequência dos procedimentos de tipo aditivo. Nas tarefas que correspondem ao início da experiência de ensino (tabela 6.2), predomina o uso de procedimentos aditivos, que escasseiam nas tarefas das tabelas seguintes para surgirem, novamente, nas últimas tarefas (tabela 6.5). Uma das razões para a elevada frequência destes procedimentos nas primeiras tarefas pode estar relacionada com o facto de os alunos manifestarem bastante confiança no seu uso, embora representem, igualmente, os cálculos que são necessários fazer usando expressões multiplicativas. Também a (pouca) grandeza dos números envolvidos não revela, em muitos casos, a ineficácia deste tipo de procedimentos, pelo que prevalecem durante bastante tempo.

As tarefas incluídas na tabela 6.5 evidenciam o retorno aos procedimentos de tipo aditivo, com bastante frequência. Apresento a resolução de Hugo e José de uma parte da tarefa 29 – Ida ao teatro, um dos pares que recorre a esse tipo de procedimentos.

$$\begin{array}{l}
 25,00€ + 3,00€ = 28,00€ \\
 2,50€ + 1,25€ = 3,75€ \\
 25€ + 3,75€ = 28,75€
 \end{array}$$

R: O preço total dos bilhetes é ~~28,75~~ 28,75 euros.

Figura 6.27 – Resolução de Hugo e José da sub tarefa 2 – tarefa 29

Estes alunos, para saberem o preço de 23 bilhetes adicionam o preço de 20 bilhetes com o preço de dois e de um bilhete. Este cálculo parece ter sido difícil para os alunos, pois pode observar-se que se enganam, numa primeira tentativa, e voltam a realizá-lo corretamente. O facto de haver diversos preços numa tabela, anteriormente preenchida, parece ter sugerido aos alunos a composição do preço de 23 a partir de outros já calculados. É de notar que o enunciado do problema desafia os alunos a determinar o montante necessário para todos os alunos da turma e a professora irem ao teatro, no entanto, Hugo e José não incluem o valor do bilhete da professora nos seus cálculos, como, aliás, a maior parte dos seus colegas.

Apresento, também, a justificação de Gustavo e Leandra para o cálculo dos preços de seis, oito e 40 sacos de fruta, após terem completado a respetiva tabela, na tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade.

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,10€
2	2,20€
10	(10€) 11€
5	5,50€
3	3,30€
4	4,40€
20	22,00€

Nós para chegarmos aos seis euros e repente fizemos três euros e trinta cêntimos mais três euros e trinta cêntimos.

Nós para chegarmos aos oito euros e oitenta cêntimos fizemos quatro euros e quarenta cêntimos mais quatro euros e quarenta cêntimos.

Nós para chegarmos aos quarenta quatro euros fizemos 22€ mais 22€.

Figura 6.28 – Resolução de Gustavo e Leandra das subtarefas 1 e 2 – tarefa 30

Estes alunos usam procedimentos aditivos e calculam o preço de seis sacos adicionando o preço de três mais três, de oito adicionando o preço de quatro mais quatro e o preço de 40 a partir do preço de 20 mais 20, determinados previamente.

O retorno aos procedimentos aditivos parece estar relacionado, por um lado, com o facto de os dados disponíveis estarem organizados em tabelas, que sugerem

composições e decomposições através da adição. Por outro lado, os números envolvidos nos cálculos deixam de ser apenas números naturais e passam a ser, também, números na representação decimal²⁴, o que parece ter constituído uma dificuldade para os alunos, tal como se observa nas figuras 6.26 e 6.27, onde alguns cálculos estão rasurados. De facto, na resolução destas tarefas, já no 3.º período escolar, os alunos parecem revelar, ainda, pouco à-vontade no cálculo com estes “novos” números, introduzidos no 2.º período.

A elevada frequência do uso de produtos conhecidos. A análise transversal de todas as tabelas permite, ainda, destacar o recurso a produtos conhecidos no início da experiência de ensino. Em muitos dos problemas (tabelas 6.2 e 6.3), os produtos envolvidos são do domínio das tabuadas e os alunos já os automatizaram, pelo que não evidenciam necessidade de justificar como os realizam.

A elevada frequência do uso de decomposições, decimais ou outras, de um dos fatores. Para além do uso de produtos conhecidos, os procedimentos multiplicativos a que os alunos mais recorrem, ao longo de toda a experiência de ensino, são a utilização de decomposições, decimais ou outras, de um dos fatores. Apresento o exemplo da sub tarefa 2 da tarefa 19 – Colecionar cartas, onde Leandra regista os cálculos que realizou para resolver o problema de divisão por medida, recorrendo à decomposição de um dos fatores do produto associado.

$$\begin{array}{l} 96 : 8 = 12 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 8 \times 2 = 16 \\ 96 - 80 = 16 \end{array}$$

Figura 6.29 – Resolução de Leandra da sub tarefa 2 – tarefa 19

A aluna representa a situação através da divisão $96 \div 8$ e pensa em termos da multiplicação, procurando o número que multiplicado por oito é igual a 96. Assim, começa por calcular 8×10 e verifica, através da subtração, que ao número 80, ainda faltam 16, que tem de adicionar para obter o número 96. Calcula, então, 8×2 , cujo

²⁴ Denominação usual para números racionais não negativos na sua representação decimal.

resultado é igual a 16. Uma vez que a adição dos dois produtos parciais é igual a 96, determina o número 12 a partir de $10+2$, circundando, nos cálculos efetuados, os números dez e dois. Finalmente, completa a divisão $96 \div 8$, registrando, em cima, o resultado final 12.

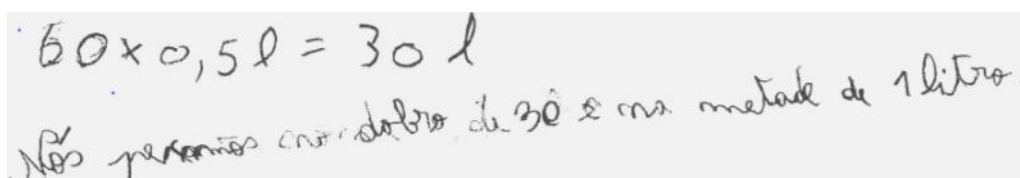
Apresento a resolução de Enzo e Guilherme de parte da tarefa 26 – Miniaturas de animais, uma tarefa também com contexto de divisão. O procedimento multiplicativo a que recorrem é um outro exemplo do uso de uma decomposição, agora não decimal, de um dos fatores.

Figura 6.30 – Resolução de Enzo e Guilherme de parte da tarefa 26

Para calcular o quociente da divisão $256 \div 8$, os alunos usam um procedimento multiplicativo, tendo subjacente o modelo retangular, procurando o número que, multiplicado por 8, é igual a 256. Para isso, efetuam três produtos parciais cuja soma é igual a 256. Assim, o número 32 (fator na multiplicação e quociente na divisão correspondente) é obtido através da adição $10+2+20$ e o cálculo de 32×8 é realizado via $10 \times 8 + 2 \times 8 + 20 \times 8$.

Os contextos de divisão, associado às tarefas incluídas na tabela 6.4, sugeriram procedimentos multiplicativos como os exemplificados, onde se encontra subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ao resolverem esse tipo de problemas através de procedimentos multiplicativos, os alunos raciocinam pensando sempre no número que multiplicado pelo divisor se aproxima, o mais possível, do número que corresponde ao dividendo, na divisão. Assim, vão efetuando produtos parciais cuja soma corresponde ao dividendo, tirando partido dos procedimentos multiplicativos baseados na decomposição de um dos fatores.

A baixa frequência do uso de relações de dobro e de metade. Se observarmos atentamente todas as tabelas, verificamos que há procedimentos que são usados raramente. O procedimento Usar relações de dobro e de metade é um dos menos usados pelos alunos, como se pode constatar nas tabelas 4 e 5, não há evidências da sua utilização. Na tabela 6.2 há apenas a identificação de dois alunos que, na subtarefa 3 da tarefa 10 – Pilhas de caixas, recorre a esse procedimento para a resolver. Reportando-me à tabela 6.3, relativa aos procedimentos dos alunos nas tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, identifico, apenas, o uso de relações de dobro e de metade nos problemas associados à tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas. Apresento a resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 da tarefa referida.



Handwritten work by Duarte and Tiago. The first line shows the calculation $60 \times 0,5 l = 30 l$. The second line is a note in Portuguese: "Não precisamos usar dobro de 30 e na metade de 1 litro." (We don't need to use double of 30 and half of 1 liter.)

Figura 6.31 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 – tarefa 13

A opção por este procedimento parece estar relacionada com o contexto dos problemas propostos e com os números envolvidos. No entanto, para além desta, também a tarefa 17 – Contar moedas 2 (tabela 6.3), foi pensada de modo a incluir problemas que pudessem sugerir o uso de relações de dobro e de metade. É pedido, por exemplo, o cálculo do número de moedas de 0,10€ necessário para perfazer 4€, depois de os alunos terem realizado o mesmo cálculo para moedas de 0,20€ e, logo a seguir, o número de moedas de 0,05€ necessário, logo após o cálculo equivalente para moedas de 0,10€. Contudo, apesar de haver bastantes alunos a resolver corretamente o problema usando procedimentos do tipo multiplicativo, não houve nenhum que, nos seus registos escritos, referisse explicitamente que dez cêntimos são metade de vinte cêntimos e que cinco cêntimos são metade de dez cêntimos e, por isso, são necessárias 40 e 80 moedas, respetivamente, ou seja, o dobro das anteriores.

Também a subtarefa 3 da tarefa 10 – Pilhas de caixas, já referida, foi pensada de maneira a que um dos procedimentos que os alunos pudessem usar fosse o uso de relações de dobro e de metade, ligando-a à subtarefa 2 da mesma tarefa. Contudo, uma

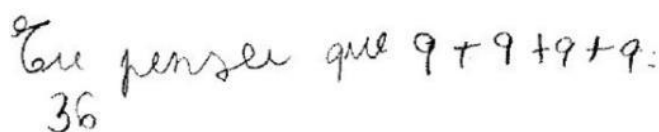
vez que havia, também a hipótese de associar os números envolvidos à subtarefa 1 do mesmo problema, através de uma relação de dobro, metade dos alunos que a resolve opta por estabelecer este tipo de relação, aparentemente, mais fácil de identificar.

(iii) A preferência de alguns alunos por determinados procedimentos

Através da análise das tabelas 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 pode constatar-se que os alunos da turma do 3.º ano recorrem a procedimentos muito diversificados para resolverem as tarefas que lhes são propostas e que constituem a experiência de ensino. Ainda assim, apesar da diversidade evidenciada, há alunos que manifestam preferência pelo uso de alguns deles.

Ilustro a opção de alguns alunos pelo uso de determinado procedimento, persistindo na sua utilização, mesmo quando, perante um dado problema, o mesmo não se revele o mais adequado. Assim, realço a preferência de duas alunas, uma por procedimentos aditivos e outra por multiplicações sucessivas.

A preferência pelo uso de procedimentos aditivos. Analisando, detalhadamente, as produções dos alunos que optam por procedimentos aditivos, destaco as resoluções de Mariana. Esta é uma das alunas do 3.º ano que decide, muitas vezes, pela utilização de procedimentos aditivos, nos quais persiste durante bastante tempo. Apresento evidências de algumas das suas produções escritas, elaboradas individualmente ou com outra colega, começando pela resolução da subtarefa 3 da tarefa 7 – Cortinas, onde a aluna recorre a um procedimento aditivo.



The image shows a handwritten note in cursive script. The text reads: 'Eu pensei que $9 + 9 + 9 + 9 =$ ' followed by '36' on a new line.

Figura 6.32 – Resolução de Mariana da subtarefa 3 – tarefa 7

Também nas tarefas que exigiam o cálculo com números na representação decimal, Mariana recorre a procedimentos aditivos. No caso da subtarefa 1 da tarefa 16 – Contar moedas 1, onde é preciso calcular o valor total das moedas representadas numa figura que acompanha a tarefa, a aluna, apesar de não apresentar todos os cálculos que lhe permitem encontrar a respetiva quantia, justifica-os através da adição.

evidenciando, deste modo, a sua preferência por ele. A figura seguinte mostra um excerto da resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 da tarefa 20, em que está subjacente o cálculo $156 \div 6$.

~~$6 \times 1 = 6$~~

$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$
$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$
$6 \times 10 = 60$
$6 \times 11 = 66$
$20 \times 6 = 120$
$21 \times 6 = 126$
$22 \times 6 = 132$
$23 \times 6 = 138$
$24 \times 6 = 144$
$25 \times 6 = 150$
$26 \times 6 = 156$

R: A máquina leva 26

Figura 6.35 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 20

Nesta parte da tarefa 20 – Máquinas de bebidas, é preciso calcular o número de garrafas de cada tipo de sumo para encher uma máquina, sabendo que há seis tipos de sumo diferentes e que, no total, a máquina leva 156 garrafas. O par usa um procedimento multiplicativo, começando no produto de referência 6×6 (ainda tenta iniciar por 6×1 mas rasura) até ao 6×11 , saltando depois para 20×6 e fazendo cálculos sucessivos até 26×6 , onde obtém 156. Consegue interpretar a sua resolução e dá uma resposta correta ao problema.

Mais de um mês depois, e após a realização de outras tarefas, é proposto um outro problema à turma, a tarefa 25 – Outra máquina de bebidas. Na sua resolução, agora individual, Ana Rita usa o mesmo procedimento, tal como se observa na figura seguinte.

$10 \times 6 = 60$
 $11 \times 6 = 66$
 $12 \times 6 = 72$
 $13 \times 6 = 78$
 $14 \times 6 = 84$
 $15 \times 6 = 90$
 $16 \times 6 = 96$
 $17 \times 6 = 102$
 $18 \times 6 = 108$
 $19 \times 6 = 114$
 $20 \times 6 = 120$
 $21 \times 6 = 126$
 $22 \times 6 = 132$

$132 : 6 = 22$

(Signature) necessária

Figura 6.36 – Resolução de Ana Rita da tarefa 25

Na sua resolução, Ana Rita começa por registar um produto conhecido $10 \times 6 = 60$ e calcula todos os seguintes, um a um, até $22 \times 6 = 132$, sendo 22 a solução pretendida. Tal como anteriormente, a aluna interpreta corretamente o seu procedimento e associa-lhe a expressão $132 \div 6 = 22$.

Também na tarefa seguinte da experiência de ensino, tarefa 26 – Miniaturas de animais, Ana Rita, agora com Miguel, volta a utilizar o mesmo procedimento, do qual mostrei uma parte anteriormente, na Figura 6.19 da secção anterior. Apresento, em seguida, os restantes cálculos relativos à mesma tarefa, onde é preciso saber como repartir, igualmente, 256 miniaturas de animais por oito crianças. Ana Rita e Miguel interpretam a situação como sendo de divisão, tendo seguido um procedimento multiplicativo semelhante aos anteriores.

$256 : 8 = 32$

$10 \times 8 = 80$	$18 \times 8 = 144$	$26 \times 8 = 208$
$11 \times 8 = 88$	$19 \times 8 = 152$	$27 \times 8 = 216$
$12 \times 8 = 96$	$20 \times 8 = 160$	$28 \times 8 = 224$
$13 \times 8 = 104$	$21 \times 8 = 168$	$29 \times 8 = 232$
$14 \times 8 = 112$	$22 \times 8 = 176$	$30 \times 8 = 240$
$15 \times 8 = 120$	$23 \times 8 = 184$	$31 \times 8 = 248$
$16 \times 8 = 128$	$24 \times 8 = 192$	$32 \times 8 = 256$
$17 \times 8 = 136$	$25 \times 8 = 200$	

Figura 6.37 – Resolução de Ana Rita e Miguel de uma parte da tarefa 26

Desta vez começam pelo produto de referência $10 \times 8 = 80$ e calculam sistematicamente todos os múltiplos de 8 até 32×8 , para obterem o número 256. Deste modo encontram o quociente 32 da divisão $256 \div 8$.

Este par, e sobretudo Ana Rita, parece revelar uma apetência para selecionar um mesmo procedimento, à semelhança do que referi a propósito da preferência de Mariana por procedimentos aditivos. Uma das razões para este acontecimento parece ser a confiança que a aluna sente no seu uso, uma vez que o mesmo se revelou eficaz na resolução deste tipo de problemas. Deste modo, a aluna não sente necessidade de o alterar, refinar ou substituir por outro.

Ainda assim, posteriormente, na resolução da tarefa 29 – Ida ao teatro, em que é preciso calcular o preço total de 250 bilhetes com o custo unitário de 1,25€ e onde se poderia recorrer a um procedimento de multiplicação sucessiva desde um produto de referência, os mesmos alunos evidenciam alguma evolução no uso desse procedimento.

Número de bilhetes	Custo (Euros)
1	1,25 €
2	2,50 €
6	7,50 €
8	10,00 €
10	12,50 €
20	25,00 €

1	1,25 €
2	2,50 €
6	7,50 €
8	10 €
10	12,50 €
20	25,00 €
50	62,50 €
100	125,00 €
200	250,00 €
250	312,50 €

Figura 6.38 – Resolução de Ana Rita e Miguel da tarefa 29

Ana Rita e Miguel tinham disponível a tabela que apresento à esquerda e optam por a “ampliar”, calculando apenas alguns produtos de referência e não todos sistematicamente, tal como nas resoluções anteriores. Alguns dos motivos para esta alteração podem estar relacionados, por um lado, com a grandeza e especificidade dos números, pois seria muito moroso e mais difícil efetuar todos os cálculos, sucessivamente, até $250 \times 1,25$. Por outro lado, a representação dos dados em tabela pode ter sugerido o cálculo de apenas alguns dos valores e não de todos.

6.1.3. Síntese

Os registos escritos dos alunos relativos à resolução das tarefas que lhes foram propostas no âmbito da experiência de ensino realizada revelam que estes utilizaram procedimentos muito diversificados. Estes foram organizados em categorias mais gerais, associadas à operação subjacente (adição, multiplicação e subtração) e especificados em catorze procedimentos diferentes, que caracterizei e exemplifiquei com registos dos alunos.

A quantificação dos procedimentos usados pelos alunos, subtarefa a subtarefa, permitiram evidenciar alguns aspetos que analisei e discuti: o uso de vários procedimentos, pelo mesmo aluno, para realizar um cálculo; a frequência na utilização de certos procedimentos e a preferência de alguns alunos por determinados procedimentos.

Relativamente ao uso de vários procedimentos, pelo mesmo aluno, para realizar um cálculo, este facto verifica-se, sobretudo, nas primeiras tarefas. Nesta altura da experiência de ensino alguns alunos revelam, ainda, falta de segurança nos cálculos multiplicativos e alguns optam por apresentar uma expressão que inclui a multiplicação mas concretizam em termos da adição. Outros alunos realizam vários cálculos alternativos numa mesma tarefa, aparentemente, pelo prazer de mostrar que sabem resolver de várias maneiras. Outros, ainda, parecem realizar um cálculo, após o inicial, para verificar a veracidade da solução. Contudo, a opção por apresentar mais do que um procedimento para o mesmo cálculo vai rareando ao longo da experiência de ensino.

No que diz respeito à frequência na utilização de determinados procedimentos, há os que se destacam pela sua elevada frequência e os que são usados raramente. Pela sua elevada frequência há a realçar os procedimentos aditivos (sobretudo nas primeiras tarefas), o recurso a produtos conhecidos e os procedimentos associados a decomposições, decimais ou não, de um dos fatores do produto a calcular. Pela sua baixa frequência sobressaem os procedimentos associados a relações de dobro e de metade.

Relativamente à preferência de alguns alunos por determinados procedimentos há a realçar a preferência de duas alunas, uma por procedimentos aditivos e outra por

procedimentos de multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência, ao longo da experiência de ensino. Estes procedimentos permanecem, mesmo quando os colegas optam por outro tipo de procedimentos menos morosos e mais poderosos.

6.2. A evolução dos procedimentos usados pelos alunos

A análise dos registos escritos dos alunos na resolução das tarefas propostas e a sua posterior quantificação, subtarefa a subtarefa, permitiram não só caracterizar os procedimentos usados mas, também, destacar alguns aspetos relacionados com a sua evolução. Assim, são realçados aspetos associados ao uso de mais do que um procedimento para realizar um mesmo cálculo, à frequência do uso de certos procedimentos dos alunos e à preferência de certos alunos por determinados procedimentos. Contudo, uma vez que, para além da caracterização dos procedimentos usados pelos alunos, um dos propósitos deste estudo é compreender como é que aqueles evoluem, interessa compreender em profundidade as razões dessa evolução.

Uma vez que se pretende aprofundar a compreensão sobre a evolução dos procedimentos dos alunos é fundamental ter em conta, para além dos seus registos escritos, outras evidências empíricas que possam complementar e triangular os dados obtidos. Considero, também, que a evolução dos procedimentos não é independente das discussões realizadas com toda a turma a propósito das tarefas, dos congressos e do cálculo em cadeia efetuado. Assim, de modo a compreender a evolução dos procedimentos utilizados e as suas razões, aprofundo a sua análise, documentando-a com registos escritos dos alunos e episódios que considero relevantes, relativos a diferentes momentos da aula.

Tal como é justificado no capítulo da Metodologia, na secção sobre a análise dos dados, de modo a proceder uma análise mais profunda, as tarefas e subtarefas estão organizadas em quatro grupos, de acordo com as suas características. São estes quatro grupos que orientam a análise relativa à evolução dos procedimentos dos alunos, não

perdendo de vista, ainda assim, a dimensão temporal, essencial para caracterizar qualquer processo de evolução.

6.2.1. Multiplicação com números naturais

No início da experiência de ensino a ideia que muitos alunos têm de multiplicação não está, ainda, consolidada. É-lhes difícil, muitas vezes, pensar e calcular considerando um grupo como uma unidade e, por isso, privilegiam as contagens um a um. Contudo, raciocinar em termos multiplicativos envolve pensar num grupo enquanto unidade e calcular a partir daí.

As tarefas iniciais propostas aos alunos têm como objetivo desenvolver a sua compreensão sobre a multiplicação no universo dos números naturais e, mais especificamente, focam-se no entendimento de um grupo enquanto unidade.

As tarefas cujo contexto recorre à disposição retangular, dadas as características específicas do modelo em causa e da sua relação particular com a multiplicação, têm como propósito continuar a aprofundar a compreensão da operação e a consolidar os procedimentos baseados nas suas propriedades. Alguns destes são já usados por muitos dos alunos, ainda que de um modo intuitivo e pouco formalizado. Nos problemas associados às tarefas 7, 8A, 8B e 10, os contextos usados têm como intenção fazer apelo ao uso da disposição retangular. Nas primeiras – tarefas 7, 8A e 8B – a disposição retangular é simples, uma vez que cada “célula” do retângulo corresponde a um objeto “singular”. Nas subtarefas que constituem a tarefa 10, cada “célula” corresponde a um conjunto de objetos.

6.2.1.1. As primeiras tarefas

Nas tarefas 1 e 2 – Mercearia da Piedade 1 e 2 cerca de metade dos alunos da turma ainda recorre a procedimentos aditivos. De modo a auxiliar os alunos a progredir na compreensão relativa a este marco fundamental da aprendizagem da multiplicação, nas discussões com toda a turma, Isabel foca o entendimento de um grupo como unidade.

Assim, a propósito da questão “Quantas laranjas?” da tarefa 1, propõe a análise das diferentes resoluções registadas no quadro.

Isabel – Como é que acham que é mais fácil contar as laranjas? (Alguns alunos colocam o dedo no ar) Eva?

Eva – Por exemplo, nós podemos contar primeiro ou na vertical ou na horizontal...

Isabel – Mas é que, até agora, ainda ninguém me disse que contou dez laranjas na vertical (e desliza o seu dedo sobre a imagem das caixas de laranjas afixada no quadro), uma vez, duas vezes, três vezes e quatro vezes. Não acham que é mais fácil? Houve meninos a fazer grupos de dez juntando duas filas de laranjas e mais duas laranjas, mas assim é mais fácil, não acham?

Turma (em coro) – Sim!

Alguns alunos – Nós fizemos assim!

Isabel – Então não se esqueçam desta forma de contar no próximo desafio.

No quadro há diferentes registos realizados pelos alunos, uns aditivos e outros multiplicativos, explicitando o seu modo de calcular o número de laranjas. Isabel incentiva os alunos a compará-los entre si e opta por realçar os raciocínios multiplicativos. Nesse sentido, estimula-os a verbalizar o seu modo de pensar.

Ainda na mesma aula, a professora procura aliar o considerar um grupo como uma unidade com a sua tradução escrita usando a representação simbólica da multiplicação. A propósito do cálculo do número de ameixas na tarefa 1, incentiva o par Cristóvão/Hugo a explicar aos colegas como pensaram.

Isabel – E como é que chegaram à conclusão que cada caixa tem 24 ameixas?

Cristóvão – Nós fizemos (e vai deslizando o dedo sobre a figura) quatro mais quatro mais quatro mais quatro mais quatro mais quatro.

Isabel – Foi pena não terem posto isso. E eram quantas vezes o quatro?

Cristóvão – Seis vezes

Isabel – Então era quatro mais quatro ... (Vai escrevendo no quadro $4+4+4+...$) Quantas vezes?

Cristóvão – Seis vezes.

(Isabel escreve 6×4).

À medida que solicita a Cristóvão que explicita como o par pensou, Isabel escreve no quadro a expressão aditiva correspondente $4+4+4+4+4+4$ e, socorrendo-se do que vai sendo dito, transforma-a em 6×4 . Regista, a seguir, a igualdade $4+4+4+4+4+4=6 \times 4$.

A insistência na progressão dos alunos em termos do raciocínio multiplicativo continua na aula seguinte. Tendo, ainda, como contexto a gravura da Mercearia da

Piedade (tarefa 2), Isabel coloca outras questões aos alunos, com o objetivo de evidenciar o uso preferencial da operação multiplicação em detrimento de procedimentos do tipo aditivo.

Isabel – Cada saco de maçãs custa cinco euros. E cinco sacos, quanto custam?

Resolvam individualmente e ponham o braço no ar quando acabarem.

Isabel (quando a maioria tem o dedo no ar) – Patrícia, vem cá [ao quadro] explicar aos colegas como fizeste.

Patrícia – Eu fiz cinco vezes cinco (escreve $5 \times 5 = 25$)

Gustavo – Professora, eu não fiz assim.

Isabel – Então como fizeste?

Gustavo – Fiz cinco mais cinco mais cinco mais cinco mais cinco. E depois fiz uma árvore, cinco mais cinco, dez, cinco mais cinco, dez, dez e dez são vinte e mais cinco são vinte e cinco.

Isabel – E cinco mais cinco mais cinco mais cinco mais cinco, são quantas vezes o cinco?

Gustavo – São cinco vezes.

Isabel – Então é o mesmo que cinco vezes cinco. E qual é a forma mais rápida, mais eficaz de resolver o problema? O que é que achas?

Gustavo – É fazer cinco vezes cinco.

Isabel – Nós agora o que pretendemos é resolver os problemas de uma forma rápida e eficaz. Vamos fazer o próximo: qual o preço de oito sacos de maçãs?

Bernardo – Então agora é oito vezes cinco. (Isabel escreve no quadro 8×5).

Uma vez que o seu objetivo é salientar o uso da multiplicação, Isabel solicita a Patrícia que apresente a sua resolução, pois tinha verificado previamente que a aluna havia recorrido a um facto multiplicativo conhecido. Quando Gustavo, após comparar a resolução da colega com a sua, verbaliza que fez de outra maneira, incentiva-o a explicar como fez. Perante o procedimento aditivo de Gustavo, Isabel tenta que este relacione a sua resolução com a de Patrícia, de modo a perceber que, embora “equivalentes”, a da colega conduz mais rapidamente ao resultado. Finalmente, coloca uma outra questão para toda a turma, de modo a tentar perceber se os alunos compreendem a essência da discussão anterior. Através da intervenção de Bernardo, há evidências que alguns compreendem e Isabel escreve no quadro o respetivo registo multiplicativo.

Em suma, uma vez que no princípio da experiência de ensino muitos dos alunos ainda usam procedimentos aditivos para resolver tarefas de multiplicação, é dada alguma atenção inicial ao uso de procedimentos multiplicativos. Nas discussões coletivas são comparados os procedimentos aditivos e multiplicativos e os alunos apercebem-se a

vantagem de usar estes últimos. Começam, também, a pensar em termos de grupo e a usar a representação simbólica associada à operação multiplicação. Esta evolução é claramente influenciada pela ação de Isabel que foca as discussões com a turma no entendimento de um grupo como unidade e que regista os procedimentos usando a representação simbólica da operação multiplicação.

6.2.1.2. As primeiras cadeias numéricas

As cadeias numéricas que constituem a tarefa 3 – Calcular em cadeia I (Anexo 5) têm o propósito de consolidar procedimentos e relações multiplicativas. Depois de explicar como se organiza a aula e o que é esperado dos alunos neste tipo de trabalho, pois é a primeira vez que este se realiza, a professora escreve no quadro a primeira expressão a calcular, 4×5 .

Em seguida, dá algum tempo aos alunos para pensar. Quando quase todos já têm o braço no ar, dá a palavra a Leandra.

Leandra – Quatro vezes cinco são 20.

Isabel – E como pensaste?

Leandra – Sei que quatro vezes cinco são 20.

Isabel – Pois claro, já sabes (Regista no quadro a expressão $4 \times 5 = 20$). Alguém pensou de outra maneira?

Enzo – Eu fiz três vezes cinco e acrescentei mais o cinco.

Isabel (Repete o que diz Enzo e regista no quadro $3 \times 5 + 1 \times 5$) – E mais alguém fez de maneira diferente?

Gustavo – Eu fiz cinco vezes quatro porque quatro vezes cinco e cinco vezes quatro é a mesma coisa.

Isabel – Porquê?

Gustavo – Porque a multiplicação é comutativa.

Isabel – Pois é. E quem pensou de outra maneira?

David – Eu fiz cinco vezes cinco e tirei cinco e deu-me vinte.

(Isabel escreve no quadro a expressão correspondente repetindo, ao mesmo tempo e em voz alta, o que David acaba de explicar).

Ana Rita – Eu juntei cinco com cinco, dez e cinco com cinco, dez, e deu-me vinte.

Isabel – Pois é, somaste.

Francisco – Eu pensei em duas vezes cinco e outra vez duas vezes cinco.

À medida que os alunos vão explicando como pensaram, Isabel vai escrevendo no quadro, usando a simbologia matemática. Após as intervenções dos alunos, fica registada no quadro a sua tradução em linguagem simbólica:

Handwritten mathematical expressions on a green chalkboard:

$$4 \times 5 = 20$$

$$3 \times 5 + 1 \times 5 = 15 + 5 = 20$$

$$5 \times 5 - 1 \times 5 = 25 - 5 = 20$$

$$5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

$$2 \times 5 + 2 \times 5 = 10 + 10 = 20$$

Figura 6.39 – Registos efetuados por Isabel no quadro a propósito do cálculo 4×5

Cada uma das expressões, agora registada no quadro, corresponde a um modo de pensar verbalizado por Leandra, Enzo, David, Ana Rita e Francisco. Perante a diversidade de formas de pensar, Isabel lança a questão sobre qual consideram ser mais rápida e eficaz. As escolhas não são unânimes mas incidem sobre modos de pensar que são traduzidos por procedimentos multiplicativos. As opções recaem sobre o conhecimento do facto $4 \times 5 = 20$ (no caso de saberem a tabuada de cor) e a decomposição de 4×5 no produto parcial 2×5 duas vezes. Por fim, aproveitando o facto de ninguém ter escolhido o procedimento aditivo, Isabel acrescenta:

Isabel – E a maneira menos eficaz é esta, não acham? (e aponta para o procedimento aditivo, que ninguém tinha escolhido como sendo o mais rápido ou o mais eficaz).

Na segunda cadeia numérica, incluída na mesma tarefa 3, o cálculo 40×7 origina bastante burburinho e comentários sobre a sua dificuldade. No início, quando Isabel regista a expressão no quadro, poucos braços se erguem. Gustavo é o primeiro a explicar como pensou:

Gustavo – Ah...dez vezes o sete é setenta, mais dez vezes o sete é setenta e mais dez vezes o sete é setenta e dez vezes o sete é setenta.

Isabel – Claro! Fizeste quatro vezes dez vezes sete. No fundo, o que tu fizeste foi decompor o quarenta em grupos de dez. (Escreve no quadro a expressão $10 \times 7 + 10 \times 7 + 10 \times 7 + 10 \times 7$)

Gustavo – Tudo dá 228.

Isabel – Vê lá bem. 10×7 ?

Gustavo – 70 e mais 70, 140. (Agrupa no quadro $10 \times 7 + 10 \times 7$)

Isabel – E 140 mais 140?

Gustavo – 280.

A maior parte dos alunos manifesta muitas dificuldades em perceber o cálculo de Gustavo. Para além de este não estar relacionado diretamente com os cálculos anteriores, a grandeza dos números envolvidos, cujo produto é maior que 100, e o facto de um dos fatores ser sete parecem ter constituído obstáculos para os alunos. Até esta altura, estes tinham realizado, sobretudo, cálculos cujo resultado não ultrapassava a centena e relacionados com as tabuadas dos números dois, cinco, dez, quatro, oito e seis.

Procurando superar a dificuldade da maioria dos alunos para calcular 40×7 , Isabel tenta conduzi-los a pensar a partir do cálculo 2×7 .

Isabel – Olhem lá, a partir de 2×7 não podemos calcular 20×7 ?

David – 20 vezes sete são duas vezes dez vezes sete, são 140.

Isabel – Então e nós queremos saber 40×7 , o que podemos fazer?

Bernardo – 20 vezes sete duas vezes.

(Isabel repete o que os alunos dizem, à medida que escreve no quadro a expressão $2 \times (2 \times 10 \times 7) = 2 \times 20 \times 7 = 2 \times 140 = 280$)

Hugo – Também pode ser 20 vezes sete mais 20 vezes sete.

Isabel – Pois claro! (Escreve $20 \times 7 + 20 \times 7 = 140 + 140 = 280$ e repete em voz alta o raciocínio de Hugo).

Isabel parte do cálculo 2×7 e relaciona-o com 20×7 , fazendo apelo ao conhecimento dos alunos sobre múltiplos de dez. David calcula primeiro 10×7 e explicita uma relação de dobro. Bernardo, por sua vez, recorre também a uma relação de dobro mas entre 40×7 e 20×7 . Isabel regista os raciocínios no quadro, associando o modo de pensar dos dois alunos. Quando Hugo verbaliza uma outra maneira de calcular, regista-a também, traduzindo-a em linguagem matemática.

Tal como era esperado, no cálculo seguinte, 42×7 , a maior parte dos alunos associa-o a 40×7 e a 2×7 , usando de modo intuitivo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Situações como a ilustrada a propósito do cálculo de 40×7 , na qual os alunos manifestam dificuldades, em virtude de os números envolvidos serem “maiores” e da relação com cálculos anteriores não ser direta vão, progressivamente, rareando tanto

nesta aula como nas seguintes em que realizam as restantes cadeias numéricas incluídas na tarefa 3 (Anexo 5).

Em síntese, no contexto da exploração das cadeias numéricas os alunos utilizam procedimentos multiplicativos e começam a conseguir basear os cálculos no uso das propriedades da multiplicação. As dificuldades que têm em realizar determinados cálculos estão, aparentemente, ligadas a particularidades dos números envolvidos. Estas são ultrapassadas quando os alunos, orientados por Isabel, partem de cálculos conhecidos e os interligam com outros mais complexos, através de relações numéricas que estabelecem.

6.2.1.3. Os primeiros pósteres e o respetivo congresso matemático

Os primeiros pósteres que os alunos constroem e o congresso matemático organizado a partir daí, decorrem da resolução dos problemas incluídos na tarefa 4 – Carteiras de cromos.

Na tarefa anterior a esta, tarefa 3 – Calcular em cadeia I, aparentemente, todos os alunos usam com facilidade procedimentos multiplicativos nos cálculos cujo produto não ultrapassa a centena. Contudo, no primeiro problema da tarefa 4 – Carteiras de cromos, há alguns que evidenciam ter dificuldades. Parecem ter, ainda, um entendimento pouco profundo da operação multiplicação e do seu efeito sobre os números naturais. Efetivamente, a comparação entre 12×4 , 8×6 e 10×4 , necessária de realizar na tarefa em causa, revela-se complicada para alguns deles.

Patrícia – Eu acho que 12×4 é mais que 8×6 , porque 12 é um número maior.

Isabel – Mas é melhor pensarem também no número total de cromos que cada uma tem, a Eva e a Leandra, a que corresponde 12×4 e 8×6 , para perceberem quem tem mais.

Esta aluna é uma das que parece regredir na compreensão da operação e nas suas consequências quando se multiplicam dois números, centrando-se, apenas, na comparação entre dois dos fatores e não no produto associado a cada um dos cálculos.

Nos registos efetuados nos pósteres a propósito da tarefa 4 é visível, na sua maior parte, o recurso a procedimentos multiplicativos. Apenas dois pares de alunos, Joana/Patrícia e Eva/Guilherme, recorrem uma vez a um procedimento aditivo.

No primeiro problema, subtarefa 1, em quase todos os pósteres, há indicação direta dos produtos sem recurso a cálculos intermédios, o que sugere que os alunos os têm automatizado ou os realizam facilmente, sem necessidade de se apoiarem em algum registo.

No segundo problema, subtarefa 2, em que há três tipos de carteiras, de quatro, seis e doze cromos e é necessário perfazer um total de 24, todos os alunos apresentam, pelo menos, duas hipóteses de solução mas consideram, apenas, um tipo de carteira de cromos. Apesar de ser possível perfazer o total de 24 comprando mais do que um tipo de carteira, nenhum dos pares pondera essa situação. Muitos deles registam um dos cálculos $4 \times 6 = 24$ ou $6 \times 4 = 24$ mas não explicitam se se refere a quatro carteiras de seis cromos ou a seis carteiras de quatro cromos. Apenas três pares de alunos registam as duas possibilidades 4×6 e 6×4 e traduzem o seu significado em termos do número e tipo de carteira de cromos. Os outros parecem não compreender que, tendo em conta o contexto, as expressões 4×6 e 6×4 , apesar de corresponderem ambas a um total de 24 cromos, correspondem a duas soluções diferentes do problema.

Há, ainda, dois grupos de alunos que efetuam produtos cujo resultado é igual a 24 mas que não têm em conta o enunciado do problema ou seja, o número de cromos por carteira. Por exemplo, Mariana e José calculam 3×8 e referem como solução três carteiras de oito cromos, apesar de a possibilidade de haver carteiras com oito cromos não estar incluída no enunciado do problema.

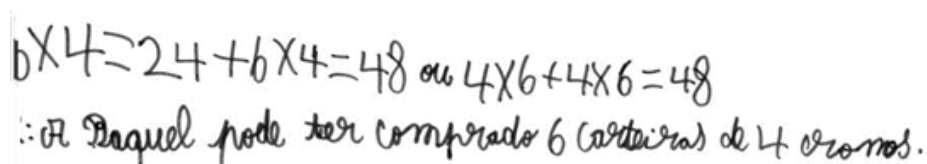
No terceiro problema, subtarefa 3, o número total de cromos aumenta para o dobro e há apenas a considerar carteiras de quatro e seis cromos. Os números usados permitem, assim, evidenciar relações associadas a dobros entre algumas das soluções encontradas no problema anterior e as deste.

O facto de a subtarefa 3 incluir números maiores que os anteriores parece trazer dificuldades a alguns alunos. Aumentam de dois para três os pares de alunos que não têm

em conta os dados do enunciado, ou seja, usam procedimentos multiplicativos cujo resultado é igual a 48, mas não traduzem as condições expressas inicialmente.

Os pósteres dos restantes pares de alunos, no que se refere à subtarefa 3, mostram procedimentos corretos que envolvem a multiplicação, sendo os cálculos realizados diretamente, sem necessidade de registos intermédios. Este aspeto parece estar relacionado com os números envolvidos, associados a tabuadas conhecidas. Há alguns alunos que também calculam do mesmo modo, diretamente, mas em vez de realizarem os registos horizontalmente, efetuam-nos em coluna. No entanto, na sua maior parte, as resoluções apresentam apenas uma ou duas hipóteses de solução e consideram unicamente um tipo de carteira de cromos de cada vez. Só dois dos pósteres, o de Duarte e Tiago e o de Eva e Guilherme, apresentam uma outra solução considerando, ao mesmo tempo, dois tipos de carteiras diferentes.

Há alguns pósteres que mostram que os alunos que os construíram partem de relações encontradas no problema anterior e as usam nos procedimentos de cálculo associados ao total de 48 cromos. David e Diogo constituem um dos pares que utiliza um procedimento no qual está subjacente o recurso ao problema anterior.



$$6 \times 4 = 24 + 6 \times 4 = 48 \text{ ou } 4 \times 6 + 4 \times 6 = 48$$

$\therefore$ Aquele pode ter comprado 6 (carteiras) de 4 cromos.

Figura 6.40 – Excerto do póster de David e Diogo da subtarefa 3 – tarefa 4

Os alunos registam o cálculo $6 \times 4 = 24$, uma das soluções anteriores, adicionam novamente 6×4 e igualam a 48. Apesar de a expressão resultante estar incorreta do ponto de vista matemático, percebe-se que identificam que 48 é o dobro de 24 e, por isso, adicionam duas vezes a expressão 6×4 . Na segunda igualdade, que apresentam como uma hipótese alternativa, já registam corretamente os produtos parciais iguais cuja soma é 48, evidenciando, também, que recorrem a uma outra das soluções do problema anterior. Ainda assim, a resposta final que escrevem não corresponde aos cálculos que efetuam previamente, referindo, apenas, metade do número de cromos da primeira hipótese.

Depois de todos os alunos observarem detalhadamente a exposição dos pôsteres, Eva e Guilherme, o primeiro dos pares escolhidos para apresentar o seu trabalho, explicam o raciocínio que fizeram a propósito do primeiro problema.

Guilherme – Eu e a Eva pensámos que duas vezes 12 mais duas vezes 12 dava 48 (lê o que está no póster).

Isabel – E o que é que isso significa?

Guilherme – Quer dizer que fica com 48 cromos.

Isabel – E os cálculos dos cromos dos outros meninos?

Eva – Já sabemos que 10 vezes quatro é 40 e que oito vezes seis é 48 e por isso não escrevemos.

Isabel – Mas para a próxima têm de registar também.

Eva e Guilherme registam no póster apenas os cálculos que lhes permitem calcular 4×12 . Relativamente aos outros dois cálculos necessários não os representam por já “os saberem”. A resposta de Eva evidencia um conhecimento já automatizado de produtos associados às tabuadas dos números quatro e seis. No que se refere ao cálculo 4×12 , explicam que, para o efetuar, o desdobraram em $2 \times 12 + 2 \times 12$. Usam, assim, um procedimento de decomposição que recorre a produtos parciais associados ao dobro de um número, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

O póster destes alunos evidencia um outro procedimento adicional associado ao cálculo 6×8 , para além dos explicitados no diálogo anterior, difícil de compreender pelos colegas.

1: Nós Eva e Guilherme
 $2 \times 12 + 2 \times 12 = 48$
 Nós pensamos para ser
 mais fácil $60 - 6 = 54$ e de-
 pois $54 - 6 = 48$. Quem tem
 mais cromos é a Leandra e
 a Eva.

Figura 6.41 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da subtarefa 1 – tarefa 4

Muitos alunos colocam dúvidas pois não compreendem a frase “Nós pensamos para ser mais fácil $60 - 6 = 54$ e depois $54 - 6 = 48$ ”, que Eva e Guilherme escrevem no

póster. Apercebendo-se dessas dificuldades de compreensão, Isabel solicita a um dos elementos do par que explique como pensaram.

Eva – Depois, para ser mais fácil, fizemos 60 menos seis que deu 54 e depois tirámos seis e chegámos a 48.

Duarte – Mas eu não estou a perceber porque fizeram isso!

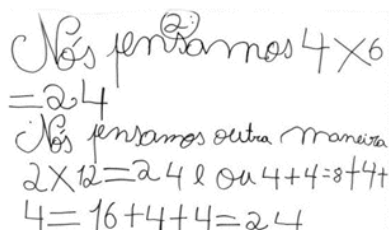
Isabel – Querem explicar? Na verdade eu também não percebi donde vem o 60.

Eva – Nós fomos arranjar outra maneira de chegar ao 48. Era para chegar ao 48 de uma maneira mais fácil.

Apesar de não conseguirem explicitar oralmente, de forma clara, o seu raciocínio, o registo destes alunos parece evidenciar o uso de um procedimento de compensação, anteriormente trabalhado nas cadeias numéricas. Para calcular 6×8 , uma vez que o objetivo é determinar o produto, pensam na expressão 8×6 e começam por recorrer ao cálculo $10 \times 6 = 60$, que não registam. A partir daí, como querem apenas calcular 8×6 subtraem duas vezes o número seis ao 60. O procedimento utilizado tem subjacente as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à subtração, tal como se clarifica na expressão seguinte:

$$6 \times 8 = 8 \times 6 = (10 - 2) \times 6 = 10 \times 6 - 2 \times 6 = 60 - 12 = 60 - 6 - 6 = 54 - 6 = 48$$

No segundo problema, no que se refere a carteiras de seis e doze cromos, Eva explica como usaram um raciocínio multiplicativo, tal como traduz o registo efetuado no póster. No caso das carteiras de quatro cromos, ambos, Eva e Guilherme, conseguem apenas explicitar oralmente o seu raciocínio através de um procedimento aditivo, muito semelhante ao registo que realizam no póster.



Nós pensamos 4×6
 $= 24$
 Nós pensamos outra maneira
 $2 \times 12 = 24$ e ou $4 + 4 = 8 + 4 +$
 $4 = 16 + 4 + 4 = 24$

Figura 6.42 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 4

Os alunos adicionam sucessivamente duas parcelas iguais a quatro, escrevendo a expressão $4 + 4 = 8 + 4 + 4 = 16 + 4 + 4 = 24$. Esta é uma tentativa de traduzir o modo como pensam, apesar de estar incorreta do ponto de vista matemático. Quando desafiados por

Isabel a colocar questões sobre o problema, nenhum dos outros alunos da turma contesta esta última resolução ou apresenta alternativas e, por isso, Isabel faz a sua ligação com a expressão multiplicativa correspondente, 6×4 , que escreve no quadro.

Nem na resolução escrita nem na apresentação oral, este par de alunos considera hipóteses de obter o total de cromos combinando dois tipos diferentes de carteiras. Procurando que este aspeto seja analisado, uma vez que também os colegas não ponderam possibilidades desse tipo, Isabel questiona a turma sobre outras soluções mas os alunos não reagem à sua solicitação. Como os colegas não acrescentam mais nada sobre a resolução apresentada, Eva e Guilherme passam a explicar como resolveram a terceira parte da tarefa.

Guilherme – Nós pensámos em quatro vezes seis mais quatro vezes seis.

Isabel – E o que é isso, 4×6 ?

Guilherme – São quatro carteiras com seis cromos.

Isabel – Então têm de dizer isso, senão não percebemos. E assim, quantas carteiras de seis têm?

Guilherme – São oito.

Isabel escreve no quadro:

4 carteiras de 6 $\rightarrow$ 24 }

4 carteiras de 6 $\rightarrow$ 24

Ou $4 \times 6 + 4 \times 6 = 8 \times 6 = 48$

Eva – Ainda fizemos quatro vezes o dois mais quatro vezes o dois mais quatro vezes o dois mais ... (seis vezes)

Isabel – E quantas carteiras de quatro cromos é que comprou a Raquel?

Guilherme – (Aponta e conta) 2, 4, 6, 8, 10, 12. Doze carteiras.

Isabel – Então foram doze carteiras de quatro (Escreve 12 carteiras de 4 ou $12 \times 4 = 48$).

Guilherme – A Raquel podia também comprar seis carteiras de quatro e quatro carteiras de seis.

Isabel – Ah! Essa é diferente! (Escreve no quadro 4 carteiras de 6 e 6 carteiras de 4 ou $4 \times 6 + 6 \times 4$).

Estes alunos começam por seguir de perto os registos que realizaram no póster, lendo em voz alta as respostas que escreveram, mas depois Guilherme acrescenta uma outra maneira que não está lá registada.

Nós pensamos $4 \times 6 + 4 \times 6 = 48$
 Também pensamos ~~$4 \times 6 + 4 \times 6$~~
 $4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2$
 $+ 4 \times 2 + 4 \times 2 = 48$
 João comprou 8 cartas
 de 6 cêntimos que dá 48.
 Também podia comprar 4 cartas
 de 6 (24) mais 6 cartas de 4 (24).

Figura 6.43 – Excerto do póster de Eva e Guilherme da sub tarefa 3 – tarefa 4

Isabel coloca questões que auxiliam Eva e Guilherme a clarificar aspetos da sua resolução, baseados em ideias associadas à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No mesmo sentido a professora regista no quadro a igualdade $4 \times 6 + 4 \times 6 = 8 \times 6 = 48$. Este cálculo, utilizando o produto parcial 4×6 duas vezes, evidencia que os alunos recorrem ao conhecimento, ainda que informal, que 48 é o dobro de 24 e usam soluções do problema anterior.

Uma vez que no póster não há indicação do que significa a expressão $4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 = 48$ e que Eva, na sua apresentação, se limita a repeti-la oralmente, Isabel interpela o par diretamente, colocando a tónica nas carteiras de quatro cêntimos. Guilherme compreende que a expressão referida lhe permite calcular o número total de carteiras de quatro cêntimos que perfazem um total de 48. Acrescenta, assim, mais uma hipótese de solução, uma vez que, no póster o par só tem como resposta as hipóteses de oito carteiras de seis cêntimos e de quatro carteiras de seis mais seis carteiras de quatro cêntimos. Esta última solução é apresentada, apenas, através de um registo textual “Também podia comprar 4 carteiras de 6 (24) mais 6 carteiras de 4 (24)” e, por isso, Isabel escreve-a no quadro em linguagem matemática. Realça, ainda, a diferença entre a solução traduzida pela expressão $4 \times 6 + 6 \times 4$, apresentada por Guilherme, e a anterior $4 \times 6 + 4 \times 6$, registada no póster.

Cristóvão e Hugo foram os alunos selecionados para fazer a segunda apresentação. Começam por clarificar o modo como pensaram para resolver o primeiro

problema. Ao verbalizarem o cálculo 8×6 que, no póster, registam como igual a 50, detetam imediatamente o engano e corrigem-no.

Cristóvão – Nos cromos da Leandra enganámo-nos, pusemos 50 mas são 48, porque oito vezes seis são 48.

Isabel – Enganaram-se mas já corrigiram, muito bem!

No que se refere aos outros cálculos associados ao mesmo problema, os alunos apenas registam no póster o valor de cada produto, sem terem necessidade de cálculos adicionais. De acordo com o cálculo incorreto que realizam no póster, respondem que é Leandra quem tem mais cromos.

12 x 4 = 48

10 x 4 = 40

8 x 6 = 50

Q.1: Quem tinha mais cromos a Leandra?

Figura 6.44 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da sub tarefa 1 – tarefa 4

No segundo problema, Cristóvão e Hugo apresentam apenas uma solução: duas carteiras de 12 para obter 24 cromos.

12 x 2 = 24

12 x 4 = 48

Q.2: 6 Tiago comprou 2 carteiras?

Q.3: A Raquel comprou 12 carteiras?

Figura 6.45 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da sub tarefa 2 – tarefa 4

Como não há qualquer questão colocada pelos colegas sobre esse facto, Isabel intervém e desafia toda a turma, que responde com várias participações.

Isabel – Agora pergunto eu: Será que só havia estas soluções apresentadas por estes dois grupos? Parece-me que a maior parte dos pares fez como a Eva e o Guilherme e eu torno a perguntar: Não há outra forma de ter 24 cromos, com as carteirinhas que é possível comprar?

Luís – Ele podia comprar duas carteiras de seis e uma carteira de doze.

Isabel – Ora bem! (Escreve no quadro:

2 carteiras de 6 $\rightarrow$ 12
 1 carteira de 12 $\rightarrow$ 12
 ou $2 \times 6 + 1 \times 12 = 12 + 12 = 24$)

Isabel – Alguém encontrou uma outra hipótese? (Ana Rita levanta o braço)

Isabel – Ana Rita, diz lá!

Ana Rita – Duas carteiras de seis mais duas carteiras de seis.

Isabel – Pois é, mas isso é o mesmo que quatro carteiras de seis, que já temos.

Hugo – Três carteiras de quatro mais três carteiras de quatro.

Isabel – Mas são quantas carteiras de quatro?

Hugo – São seis, essa hipótese já temos.

Isabel – Outras maneiras! (Vários alunos fazem outras tentativas mas sempre equivalentes às hipóteses já identificadas).

Duarte – Pode-se comprar três carteiras de quatro mais duas carteiras de seis.

(Isabel escreve no quadro à medida que Duarte explica:

3 carteiras de 4 $\rightarrow$ 12
2 carteiras de 6 $\rightarrow$ 12



Ou então $3 \times 4 + 2 \times 6 = 12 + 12 = 24$)

Luís – Duas de cinco e mais ... (fica a pensar)

Isabel interrompe – Mas não há carteiras de cinco! Têm de atender ao problema, não se trata de jogar com os números de modo a obter 24.

Isabel incentiva os alunos, em conjunto, a encontrar outras soluções uma vez que revelaram dificuldade em as identificar no trabalho a pares. Estes indicam algumas hipóteses, combinando tipos diferentes de carteiras de cromos. As expressões correspondentes são registadas no quadro, de modo a realçar os procedimentos multiplicativos. Hugo refere a possibilidade de ter três carteiras de quatro mais três carteiras de quatro e Isabel interpela-o para que ele clarifique a quantas carteiras de quatro corresponde a sua maneira de pensar. A verbalização de Hugo é aproveitada para destacar as expressões $3 \times 4 + 3 \times 4$ e 6×4 , permitindo que o próprio aluno identifique a sua igualdade, baseada na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Apesar de este ter compreendido a relação entre as duas expressões e, consequentemente, que correspondem à mesma solução há, ainda, colegas que insistem em apresentar soluções do mesmo tipo. Assim, referem-se a adições de dois produtos parciais iguais, não reconhecendo a sua igualdade com o dobro do produto parcial, repetindo soluções já apresentadas. Na tentativa de procura de soluções diferentes há, também, alunos, tal como Luís, que realizam cálculos cujo valor é 24 mas sem atender ao contexto da tarefa. Reconhecendo esta dificuldade Isabel chama a atenção para a importância de relacionar os cálculos com o contexto da tarefa.

No terceiro problema, Cristóvão e Hugo apresentam apenas duas hipóteses e, novamente, Isabel desafia todos os alunos a identificarem outras soluções possíveis.

Isabel – Agora o outro par, como fez?

Cristóvão – Nós fizemos também doze carteiras de quatro, fizemos 6×4 mais 6×4 (Isabel escreve no quadro). Depois fizemos “a multiplicação comutativa” e trocámos as parcelas ...

Isabel – Os fatores!

Cristóvão – ... e fizemos quatro vezes seis mais quatro vezes seis.

Isabel – Fizeram quatro carteiras de seis mais quatro carteiras de seis. E mais hipóteses? Esta pergunta também é para os meninos que não estão a apresentar os pósteres.

Joana – Seis vezes dois mais seis vezes dois...

Isabel – E o que é isso? Não há carteiras de dois!

Francisco – Dez carteiras de quatro mais duas carteiras de quatro (Isabel escreve as expressões correspondentes).

Isabel – E dez carteiras com mais duas carteiras são quantas carteiras de quatro? Não são doze? Então já temos essa hipótese.

Na sua apresentação, Cristóvão e Hugo recorrem a procedimentos multiplicativos associados à decomposição de um dos fatores, tendo subjacentes os cálculos já efetuados no problema anterior, quando o total dos cromos era 24. Assim, tal como outros colegas, repetem o cálculo adicionando, uma vez que 48 é o dobro de 24. Explicitam o uso da propriedade comutativa para “trocarem” a ordem dos fatores, apesar de estes terem significados diferentes no problema. No entanto, como há carteiras de quatro e de seis cromos, o procedimento usado funciona no contexto deste problema.

Handwritten poster content:

$12 \times 4 = 48$ $= 48$	$6 \times 4 + 6 \times 4$ $= 48$	$4 \times 6 + 4 \times 6$ $= 48$

R. 3: A Raquel comprou 6+6 carteiras com 2 cromos

Figura 6.46 – Excerto do póster de Cristóvão e Hugo da subtarefa 3 – tarefa 4

No póster que constroem, tal como apresento na figura anterior, estes alunos parecem considerar diferentes as soluções representadas pelas igualdades $12 \times 4 = 48$ e $6 \times 4 + 6 \times 4 = 48$, pois apresentam-nas separadas uma da outra. Ainda no póster, a resposta que dão do problema não contempla todas as hipóteses que calculam e, aparentemente, enganam-se e escrevem “6+6 carteiras de 2 cromos” em vez de 6+6 carteiras de quatro cromos. Também na apresentação oral não explicitam o número total e o tipo de carteiras de cromos necessárias.

Tal como no segundo problema, alguns alunos têm dificuldade em relacionar e adequar os cálculos que realizam ao contexto, como evidencia a intervenção de Joana no episódio anterior. Continua a haver alunos, como Francisco, que não identificam de imediato a igualdade entre algumas expressões que correspondem a soluções idênticas do problema. De modo a facilitar essa identificação, uma vez que traduz uma situação diferente das anteriores, apesar de se basear, também, na propriedade distributiva, Isabel destaca no quadro a igualdade $10 \times 4 + 2 \times 4 = 12 \times 4$.

Em síntese, os pósteres construídos e as discussões realizadas no âmbito do congresso matemático permitem evidenciar que os alunos, de um modo geral, usam com mais confiança procedimentos multiplicativos, progredindo em termos das relações numéricas que lhes estão subjacentes, de modo ainda informal e recorrendo a representações simbólicas nem sempre adequadas. A maior parte usa com relativa facilidade procedimentos multiplicativos do domínio das principais tabuadas, parecendo ter automatizado alguns produtos.

Há alunos como Patrícia que, no entanto, não consolidaram ainda aspetos fundamentais da compreensão da multiplicação e dos seus efeitos sobre os números, parecendo retroceder relativamente ao modo de pensar evidenciado no cálculo em cadeia. Há, também, casos de alunos que parecem já usar procedimentos multiplicativos com alguma facilidade e que voltam a recorrer a resoluções que fazem apelo à adição de parcelas iguais. Este voltar a procedimentos menos potentes, como acontece no caso de Eva e Guilherme, parece estar associado ao facto de se sentirem seguros no uso de procedimentos aditivos, aos quais recorrem quando se confrontam com uma dificuldade ou complexidade.

Ao explicar como pensam, muitos alunos usam, implicitamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, socorrendo-se de determinados produtos parciais para calcular. Nestes casos e com o objetivo de os fazer progredir nos seus procedimentos, Isabel escreve no quadro as expressões matemáticas correspondentes. A observação e apresentação dos pósteres evidenciam, também, o uso de um procedimento de ajustar e compensar por um par de alunos, realçado, anteriormente, na exploração de cadeias numéricas.

A explicitação, por parte dos alunos, dos registos escritos que efetuaram nos pósteres, aliada a um constante questionamento da professora, permite que alguns deles clarifiquem o seu raciocínio e evoluam para procedimentos mais potentes. Um exemplo é o modo como Guilherme progride no seu raciocínio quando clarifica o significado da expressão $4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4 \times 2$ e identifica que corresponde a 12×4 (doze carteiras de quatro cromos). A explicitação dos registos escritos possibilita, também, que outros tomem consciência de incorreções que cometeram e as corrijam, tal como acontece com Cristóvão.

A tarefa proposta, tarefa 4 – Carteiras de cromos, exige lidar, simultaneamente, com conjuntos com cardinal diferente, o que acontece pela primeira vez. Perante este facto, a maior parte dos alunos, no trabalho a pares, não consegue usar procedimentos multiplicativos adequados que combinem os diversos tipos de carteiras de cromos. A discussão realizada no âmbito do congresso matemático favorece o aparecimento, embora não de forma exaustiva, de procedimentos associados à diversidade de combinações possíveis.

O uso de procedimentos multiplicativos relacionados com um determinado contexto parece constituir uma dificuldade acrescida para alguns alunos, em comparação com a sua utilização nos cálculos em cadeia. Alguns não têm em consideração as condições inerentes ao contexto e procuram, apenas, realizar um cálculo, de modo a perfazer um determinado total. Explicitar o seu modo de pensar, parece tê-los auxiliado a tomar consciência da sua inadequação face ao problema proposto e da necessidade de ter em atenção o contexto apresentado.

6.2.1.4. As tarefas que incluem a disposição retangular

As tarefas 7, 8A e 8B. Muitos alunos começam a utilizar, mais frequentemente, procedimentos baseados nas propriedades da multiplicação na resolução da tarefa 7 – Cortinas. São usados com alguma frequência procedimentos associados a produtos parciais iguais, sugeridos pelo contexto da tarefa, tal como havia acontecido anteriormente, a propósito da tarefa 4. Agora, no entanto, em alguns dos casos são os próprios alunos a identificar a sua igualdade com outros produtos, baseada na

propriedade distributiva da multiplicação, em vez de ser Isabel a realçá-la. David é um dos alunos que, na subtarefa 4 da tarefa referida, parece reconhecer uma igualdade desse tipo.

$$5 \times 9 + 5 \times 9 = 90 \text{ ou } 10 \times 9 = 90$$

Figura 6.47 – Resolução de David da subtarefa 4 – tarefa 7

Ao apresentar as duas expressões separadas pela disjunção, David parece identificar que adicionar duas vezes 5×9 é o mesmo que calcular 10×9 , considerando que ambas as expressões são iguais a 90. Há, também, alunos que, a propósito dos mesmos problemas, usam relações de dobro, calculando primeiro o número de figuras de metade da cortina. Patrícia é uma das alunas que recorre a este procedimento.

$$9 \times 5 \times 2$$

Eu pensei que 9 vezes 5 era 45 depois dobro 90.

Figura 6.48 – Resolução de Patrícia da subtarefa 4 – tarefa 7

A aluna explica como pensou:

Patrícia – Eu contei cinco joaninhas (desliza com um dedo sobre uma linha de joaninhas). E eram nove vezes cinco.

Isabel – Mas isso é só metade da cortina.

Patrícia – Depois pensei em nove vezes cinco duas vezes. Fiz nove vezes cinco, quarenta e cinco, vezes dois dá 90.

Isabel – E o que é o 90 em relação ao 45?

Patrícia – É o dobro.

Patrícia calcula primeiro o número total de joaninhas de metade da cortina, contando as joaninhas numa linha e numa coluna. Associa esta contagem ao cálculo 9×5 cujo valor parece ter já automatizado e, finalmente, multiplica por dois, tal como escreve também na sua resposta. A sua representação traduz o procedimento multiplicativo sequencial que usa e, por isso, o fator dois é escrito à direita do cálculo anterior. Na justificação do seu modo de pensar está subentendida a relação de dobro entre 90 e 45, que explicita quando questionada e que facilita o cálculo do número total de joaninhas.

A explicação de Patrícia evidencia, ainda, o facto de ter contado o número de joaninhas em linha e em coluna para efetuar o seu produto. O uso de procedimentos multiplicativos associados à disposição retangular de objetos começa a verificar-se nas subtarefas da tarefa 7. Na discussão desta tarefa, Isabel desafia os alunos a identificar os procedimentos que consideram mais rápidos e eficazes, depois de terem sido apresentados modos diferentes de resolução.

Isabel – Então qual é a forma mais eficaz de fazer os cálculos?

Duarte – Contar em linha e em coluna ou na horizontal e na vertical.

A frequência do uso de procedimentos multiplicativos veiculados pela organização de objetos, segundo uma disposição retangular, aumenta gradualmente nas tarefas seguintes. O facto de não ser possível visualizar todas as linhas e colunas de elementos, de modo a adicioná-los repetidamente e de estar envolvida uma quantidade cada vez maior de objetos, parece contribuir para o aumento desta frequência.

Quando os produtos são do domínio da tabuada, que muitos dos alunos já automatizaram, registam apenas o seu valor, sem necessidade de cálculos adicionais. Duarte usa este procedimento na resolução de um dos problemas da tarefa 8A, depois de identificar o número total de pedras em coluna e em linha.

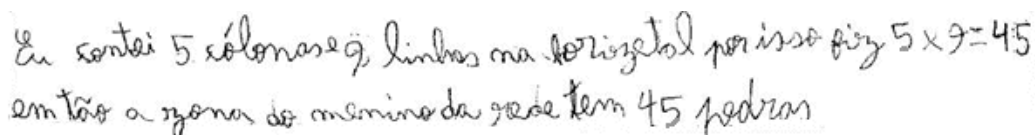


Figura 6.49 – Resolução de Duarte da subtarefa 4 – tarefa 8A

A explicação oral sobre como pensou para calcular segue de muito perto o que havia escrito na sua folha de resolução.

Duarte – Eu contei cinco pedras em cada coluna e contei nove pedras na linha horizontal.

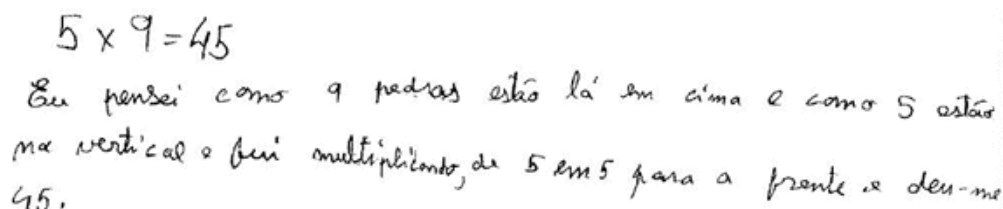
Isabel esclarece – Se falas na linha é na horizontal, basta dizer de uma maneira.

Duarte – E fiz cinco vezes nove igual a 45.

A linguagem que Duarte utiliza é tornada mais precisa por Isabel, de modo a realçar o uso dos “pares” de palavras linha/coluna e horizontal/vertical, associados ao cálculo. A maior parte dos alunos usa procedimentos semelhantes aos de Duarte desde

que o contexto da tarefa sugira a disposição retangular e os números sejam do domínio das tabuadas conhecidas.

Ainda assim, há alguns que, aparentemente, retrocedem nos procedimentos que utilizam, voltando aos de tipo aditivo ou de contagem por saltos. É o caso de Francisco que parece ter contado por saltos na subtarefa 4 da tarefa 8A.



$5 \times 9 = 45$
 Eu pensei como 9 pedras estão lá em cima e como 5 estão na vertical e fui multiplicando de 5 em 5 para a frente e deu-me 45.

Figura 6.50 – Resolução de Francisco da subtarefa 4 – tarefa 8A

Este aluno identifica o número de pedras na horizontal e na vertical, reconhecendo a disposição retangular do empedrado e regista a respetiva expressão multiplicativa. Contudo, talvez por não saber de modo automático o valor de 5×9 , conta usando saltos de cinco, pensando em termos de 9×5 . O número cinco pode ter sugerido, também, este procedimento, uma vez que é bastante fácil, para estes alunos, contar de cinco em cinco e o número de saltos é, também, relativamente pequeno.

As tarefas 7, 8A e 8B incluem, ainda, alguns problemas onde os números com os quais é necessário calcular são maiores que os exemplificados e o seu produto não corresponde a valores das tabuadas conhecidas dos alunos. Nestes casos usam procedimentos multiplicativos, que parecem ser sugeridos pela disposição retangular e que diferem entre si apenas na ordem pela qual aparecem os fatores. Este aspeto decorre diretamente da visualização dos elementos que se repetem e de quantas vezes se repetem ou da identificação, em primeiro lugar, do número de elementos em linha ou em coluna. Nas discussões sobre estas tarefas, a propriedade comutativa surge associada à comparação entre resoluções que identificam em primeiro lugar o número de elementos em linha ou em coluna e à percepção de que o produto não se altera. Nas tarefas 8A – Pátio do João e 8B – Pátio do Cristóvão um dos fatores do produto é sempre cinco e, a maior parte dos alunos, coloca-o sempre em primeiro lugar. No entanto, não levantam objeções quando, na discussão coletiva, percebem que outro colega usa os fatores por

uma outra ordem diferente da sua. Há, também, alunos que, nas suas resoluções escritas, evidenciam que compreendem que, na multiplicação, o produto não é afetado pela ordem dos fatores.

David, na resolução escrita de um dos problemas da tarefa 8B, regista as duas expressões seguintes:

$$5 \times 10 + 2 \times 5 = 60 \text{ ou } 10 \times 5 + 5 \times 2 = 60$$

Figura 6.51 – Resolução de David da subtarefa 2 – tarefa 8B

Este aluno apresenta duas igualdades que só diferem entre si na ordem dos fatores de cada produto parcial. Apesar de, em termos da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, as expressões não corresponderem precisamente a 5×12 ou a 12×5 , parecem revelar a sua compreensão, ainda que informal, sobre a propriedade comutativa da multiplicação.

A compreensão e o uso apropriado desta propriedade parecem estar, também, subjacentes a procedimentos multiplicativos onde os próprios alunos trocam a ordem dos fatores para, aparentemente, lhes facilitar os cálculos.

Miguel usa o seguinte procedimento num dos problemas da tarefa 8B:

$$5 \times 22 = 20 \times 5 + 2 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 20 \times 5 \\ 2 \times 5 \\ \hline 100 + 10 \\ \hline 110 \end{array}$$

Figura 6.52 – Resolução de Miguel da subtarefa 4 – tarefa 8B

Este aluno representa o produto a calcular através da expressão 5×22 , provavelmente decorrente da contagem de cinco linhas, cada uma com 22 pedras ou de pensar em cinco linhas e em 22 colunas. No entanto, para realizar o cálculo, troca a ordem dos fatores ao decompor o 22, efetuando, de facto, 22×5 . Este aspeto parece estar relacionado com o fator cinco e com a facilidade no cálculo dos seus múltiplos. Deste

modo Miguel obtém dois produtos de referência 20×5 e 2×5 que, presumivelmente, já automatizou.

A decomposição de um dos fatores para realizar um produto, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tal como Miguel faz, está na base da maior parte dos procedimentos multiplicativos de resolução das tarefas cujo contexto recorre à disposição retangular e em que, pelo menos um dos fatores, é maior que dez.

Guilherme é um dos alunos que usa a decomposição decimal de 19 para calcular 5×19 e que explicita o seu modo de pensar na discussão final com toda a turma.

Guilherme – Eu fiz cinco vezes o dez mais cinco vezes o nove e deu-me 50 mais 45 que são 95.

Isabel – Pois claro, nós sabemos que 19 é igual a dez mais nove.

Uma vez que nas subtarefas das tarefas 8A e 8B são propostos cálculos que podem ser relacionados com outros efetuados anteriormente na mesma tarefa, há alunos que reconhecem e utilizam essas relações. Assim, observam o retângulo associado ao cálculo a realizar e identificam partições ligadas a produtos já calculados.

Na discussão do problema associado ao cálculo 22×5 , Gustavo fundamenta o seu modo de pensar na adição de dois produtos parciais, já calculados em problemas anteriores.

Isabel – Como se resolvia este produto de outra forma?

Gustavo – Eu fiz 19×5 ...

Isabel interrompe – Porquê 19×5 ?

Gustavo – Fui buscar ao anterior, ao do chapéu-de-sol.

Isabel – Sim.

Gustavo – E fiz $19 \times 5 + 3 \times 5$. E 19×5 é 95, já sei e mais 3×5 .

Isabel – Podia ser porque já tínhamos calculado 19×5 , senão não era fácil de fazer (escrevendo no quadro o que diz Gustavo).

No cálculo que efetua, Gustavo decompõe 22 em $19 + 3$, justificando que já tinha calculado tanto 19×5 como 3×5 . No entanto, Isabel chama a atenção para o facto de este procedimento, com os números usados, só facilitar o cálculo do produto em causa por já serem conhecidos os produtos parciais, uma vez que 19×5 não é um cálculo imediato.

Também Luís, na discussão final do mesmo problema, quando Isabel solicita outros modos mais fáceis de calcular 22×5 , apresenta um procedimento de decomposição com base em cálculos anteriores.

Isabel – E outras maneiras de calcular mais fáceis?

Luís – Podia ser 10×5 que é 50 e é a zona do empedrado vazio e depois somávamos 12×5 que é 60 e já sabemos pois é da zona das boias.

Isabel – Pois é. Repete lá para eu escrever. Perceberam?

Alguns alunos em coro – Sim.

Luís, tal como Gustavo, recorre a produtos parciais já calculados mas usa uma decomposição de 22 mais acessível, recorrendo a dois números de referência, 10 e 12. Isabel realça este modo de pensar e preocupa-se em perceber se todos o compreendem. Este aspeto facilitador do cálculo, mesmo que os produtos parciais não tivessem sido anteriormente calculados, parece ser reconhecido por outros alunos e, por isso, a maior parte responde afirmativamente à pergunta da professora.

Comparando as explicações de Gustavo e de Luís na discussão final, com as suas resoluções escritas da mesma tarefa, parece notar-se alguma evolução nos procedimentos que usam. Por exemplo, na sua folha da tarefa, Gustavo justifica o cálculo 22×5 através de um procedimento de contagem, tal como mostra a figura seguinte.

Handwritten student work for the problem 22×5 . The work includes the equation $22 \times 5 = 110$, a multiplication layout with 22 on top and 5 on the bottom, and the result 110. To the right, there is a note: "Conte de 5 em 5 até chegar a 110". Below the multiplication, there is another note: "Eu fiz 22×5 porque havia 22 colunas de 5."

Figura 6.53 – Resolução de Gustavo da subtarefa 4 – tarefa 8B

Este aluno representa o cálculo através da operação multiplicação e fundamenta a escolha desta operação escrevendo que “havia 22 colunas de 5”. No entanto, justifica o cálculo que efetua explicitando um procedimento de contagem de cinco em cinco as pedras do empedrado da figura.

Também Luís, na explicitação do seu modo de pensar durante a discussão coletiva, parece ter evoluído relativamente à sua resolução escrita. Aí regista, apenas, a expressão $22 \times 5 = 110$ e justifica que contou 22 pedras na linha e cinco pedras na coluna.

Na resolução das tarefas que partem de um contexto de disposição retangular são identificados, também, procedimentos de ajustamento e compensação baseados na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Considerando que estes são usados por poucos alunos, apesar de serem bastante eficazes em determinadas situações, Isabel solicita-lhes que os expliquem aos colegas. Francisco clarifica o seu modo de pensar para calcular 19×5 através de um procedimento de ajustar e compensar.

Francisco – Fiz vinte vezes cinco.

Isabel – O que quer dizer vinte?

Francisco – São vinte pedras na linha.

Outros alunos – Mas são só dezanove pedras na linha! (e voltam a contar as pedras da figura).

Isabel – Mas se calhar o vinte não é por acaso ...

Francisco – Na coluna há cinco pedras e na linha há dezanove.

Isabel – Mas para facilitar podíamos usar o vinte porque 19×5 não é fácil.

Francisco – Sim. E fui ao vinte e fiz 20×5 e tirei um cinco.

Isabel – Tiraste uma vez cinco (Escreve no quadro a expressão $19 \times 5 = 20 \times 5 - 1 \times 5 = 100 - 5 = 95$).

O aluno recorre a um produto de referência 20×5 para calcular um outro produto “próximo” daquele. O procedimento que utiliza parece indicar que o contexto da tarefa não é necessário para apoiar o cálculo que efetua, evidenciando que se encontra já num nível formal de cálculo, operando apenas com números. Talvez por isso, no início da sua explicação, os colegas parecem não compreender o porquê do uso do número vinte, dando até a entender que Francisco se enganou a contar as pedras do empedrado correspondente. Isabel chama a atenção da utilização deliberada do número vinte, pela facilidade do cálculo associado, e regista no quadro a expressão matemática que corresponde à verbalização do aluno.

A tarefa 10. A disposição retangular é usada, também, no contexto dos problemas que constituem a tarefa 10 – Pilhas de caixas, onde cada “célula” do “retângulo”, ao contrário das tarefas anteriores, corresponde, não a um objeto mas a um conjunto de objetos – neste caso a uma caixa com um determinado número de maçãs. Apesar desta complexificação, muitos dos alunos associam, igualmente, o número total de linhas e de colunas ao número total de caixas e exploram diferentes agrupamentos de caixas, realizando cálculos baseados nas propriedades da multiplicação.

Nesta tarefa, os números com os quais é preciso calcular são de outra ordem de grandeza, quando comparados com os das tarefas anteriores, uma vez que os fatores que é necessário multiplicar são números com dois algarismos. Apesar disso, todos os pares de alunos usam, nesta altura, procedimentos multiplicativos, uns baseados no contexto associado à disposição retangular das caixas das figuras que acompanham as tarefas, outros recorrendo apenas à multiplicação em termos mais formais e abstratos.

Na subtarefa 1 da tarefa 10, Duarte/Tiago e Eva/Guilherme são os únicos dois pares que recorrem à observação da figura da pilha de caixas e que usam procedimentos multiplicativos a partir daí. Isabel, como tem como propósito fazer sobressair relações multiplicativas que podem ser estabelecidas a partir da disposição retangular, opta por solicitar-lhes que expliquem aos colegas como raciocinaram, uma vez que os procedimentos em causa, apesar de adequados, se revestem de alguma complexidade.

Duarte e Tiago determinam o número total de maçãs no conjunto das caixas a partir da observação da figura, não partindo do número 25, número total de caixas, incluído no enunciado escrito.

$$(5 \times 24) \times 5 = 600$$

Handwritten work showing the calculation: $(5 \times 24) \times 5 = 600$. The work includes intermediate steps: $5 \times 24 = 120$ and $120 \times 5 = 600$.

Figura 6.54 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 1 – tarefa 10

No seu registo escrito, destacam o cálculo que realizam em primeiro lugar, do número total de maçãs que existe em cinco caixas, através do uso de parêntesis, evidenciando a sua prioridade. Sentindo alguma dificuldade dos outros alunos na compreensão desta resolução, Isabel interpela Duarte e Tiago na discussão coletiva. Duarte clarifica:

Duarte – Nós fizemos cinco vezes 24.

Isabel – Explica lá aos colegas onde foram buscar o 5×24 .

Duarte – Posso ir aí [ao quadro]?

Isabel – Podes.

Duarte – Nós contamos 1, 2, 3, 4, 5 caixas aqui (aponta para a primeira coluna).

Isabel – E depois viram o quê?

Duarte – Que se repetia quatro vezes, não, cinco vezes.

Tiago confirma – Cinco vezes.

Isabel – Então vocês fizeram ...

Duarte – Cinco vezes 24, vezes cinco.

Isabel escreve no quadro $(5 \times 24) \times 5$ – E agora como fizeram 5×24 ?

Duarte – Fizemos primeiro 5×14 , não, fizemos 5×4 e depois 5×20 . Cinco vezes quatro é igual a 20 e cinco vezes 20 é 100, e 20 mais 100 é 120. (Isabel escreve no quadro o que Duarte diz).

Isabel – E depois? O que fizeram depois?

Duarte - Multiplicámos por cinco.

Isabel – E como fizeram 120×5 ?

Duarte – Fomos primeiro ao 20 vezes cinco e depois 100 vezes cinco. Como não sabíamos de cor 20×5 , fomos ao 10×5 e fizemos 10×5 duas vezes.

Isabel – E dava...

Duarte – Dava 100 e 100 vezes cinco é 500. E 100 mais 500 é 600 (Isabel escreve no quadro).

Duarte explica que contaram primeiro o número de caixas numa coluna e, uma vez que são cinco colunas, multiplicam por cinco. Como representam os cálculos à medida que raciocinam, o segundo fator cinco, correspondente a cinco colunas, é registado à direita, visto que escrevem sequencialmente, da esquerda para a direita. O cálculo entre parêntesis é efetuado através da decomposição decimal do número 24, tal como o seguinte, 120×5 , no qual decompõem 120 em $100 + 20$. Os cálculos intermédios, explicados por Duarte, realçam, ainda, o recurso a procedimentos associados a dobros e a múltiplos de 10 e de 100.

Eva e Guilherme são o outro par que, na mesma tarefa, recorre explicitamente à figura das caixas empilhadas para calcular o número total de maçãs.

Handwritten work showing the calculation of 50×24 . The student uses the distributive property: $50 \times 24 = 50 \times (20 + 4) = 50 \times 20 + 50 \times 4$. They calculate $50 \times 20 = 1000$ and $50 \times 4 = 200$, then add them to get 1200. There are some corrections and additional notes in Portuguese.

Figura 6.55 – Resolução de Eva e Guilherme da sub tarefa 1 – tarefa 10

Estes alunos utilizam um procedimento de ajustar e compensar, baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, começando por calcular 30×24 , um produto múltiplo de dez.

Quando, na discussão coletiva, Isabel sugere a apresentação de outros modos de resolução diferentes dos baseados na decomposição decimal de um dos fatores, Eva e Guilherme tomam a palavra:

Guilherme – Posso ir aí ao quadro? (Isabel acena afirmativamente). Primeiro, juntámos grupos de 10 caixas (aponta na figura respetiva e faz o gesto de juntar duas colunas de caixas de modo a perfazer um grupo de 10 caixas).

Eva – Para ser mais fácil calculámos 30×24 e tirámos 5×24 .

Isabel – Ah! Vocês acrescentaram mais uma coluna de cinco caixas para terem grupos de 10 e depois retiraram-na! (escreve no quadro $30 \times 24 - 5 \times 24$).

E como fizeram 30×24 ?

Guilherme – Fizemos três vezes 10×24 ...

Eva (interrompendo-o e continuando o seu raciocínio) – Que é 720 e 5×24 é 120.

Isabel – E então, $720 - 120$ é ...

Eva – 600.

A clarificação do modo de pensar deste par, para além de evidenciar um procedimento de compensação realça, também, o recurso a múltiplos de dez. Os alunos começam por imaginar três grupos de dez caixas, acrescentando à figura (mentalmente) uma coluna de cinco caixas, de modo facilitar o cálculo. Calculam primeiro 10×24 e depois o seu triplo, não especificando como o efetuam. No entanto, parecem sentir-se bastante à vontade nos cálculos parciais, apesar de os números envolvidos serem da ordem das centenas.

Com exceção dos pares referidos anteriormente, no primeiro problema da tarefa 10, os outros alunos representam o produto 25×24 e realizam os cálculos utilizando a decomposição decimal de 24. Um par de alunos troca os fatores e calcula 24×25 , decompondo o número 25. Tanto os alunos que representam o cálculo através da expressão 25×24 como o par que calcula a partir de 24×25 , não referem, à partida, como identificam o número total de caixas, se através da figura ou do enunciado escrito.

Gustavo e Leandra são um dos pares que recorre à decomposição decimal de 24 para realizar o cálculo 25×24 .

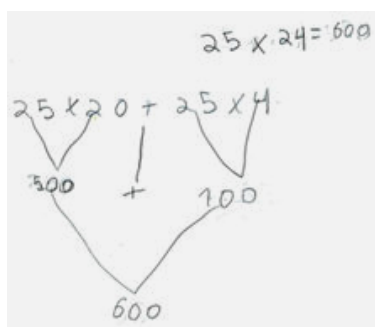


Figura 6.56 – Resolução de Gustavo e Leandra da subtarefa 1 – tarefa 10

Na folha da tarefa, os alunos representam apenas os produtos parciais através de um esquema em árvore mas, na fase de discussão, Gustavo clarifica os cálculos intermédios:

Gustavo – Fizemos 25 vezes 20 mais 25 vezes quatro, 25×4 é 500 ...

Isabel – E como é que sabem que 25×20 é 500?

Gustavo – Primeiro fizemos 25 vezes 10 que é 250.

Isabel – E depois?

Gustavo – Depois fizemos 25 vezes 10, duas vezes, que é 500.

Isabel – E como fizeram depois?

Gustavo – Fizemos 25 vezes quatro que é 100.

Isabel – E como é que sabem? Como fizeram?

Gustavo – Fizemos primeiro 25 vezes dois, que é 50 e depois mais duas vezes 25 e deu-nos 100.

Isabel – Fizeram então o dobro de 25×2 . Muito bem!

Na explicitação do seu modo de pensar, para além do uso da decomposição decimal do número 24, os alunos recorrem a dobros de produtos conhecidos e a múltiplos de dez. À medida que Gustavo explica, Isabel coloca questões de modo a tornar perceptível, a todos os alunos, o seu raciocínio.

Estes alunos, bem como todos os que realizam 25×24 através da decomposição do número 24, parecem não ter sentido necessidade de se apoiar na figura da pilha de caixas para calcular. Este facto, provavelmente, evidencia que já raciocinam a um nível formal e calculam estabelecendo relações baseadas em propriedades da multiplicação. Assim, usam os números com um sentido matemático sem lhes atribuir um significado relacionado com o contexto apresentado. De facto, o número 24 corresponde ao total de maçãs existente em cada caixa e relacionar a sua decomposição com o contexto significa pensar em outras caixas com diferentes totais de maçãs. Ora, não há evidências que

algum aluno tenha pensado assim, nem este modo de pensar parece ser natural, se o associarmos ao contexto das pilhas de caixas.

A figura da segunda tarefa da mesma sequência (subtarefa 2), apesar de não representar uma pilha de caixas dispostas retangularmente, pretende sugerir e apoiar, também, o uso de procedimentos multiplicativos associados a essa disposição. Mas, tal como anteriormente, há alunos que, na resolução da tarefa, recorrem à observação da disposição das caixas e outros que parecem não ter essa necessidade e calculam logo a partir dos dados incluídos no enunciado escrito.

Os três pares de alunos, que observam a figura e recorrem à disposição das caixas para realizar o cálculo, não usam todos o mesmo procedimento. Cristóvão e Hugo calculam o total de maçãs adicionando os produtos parciais resultantes dos vários agrupamentos que visualizam em linha.

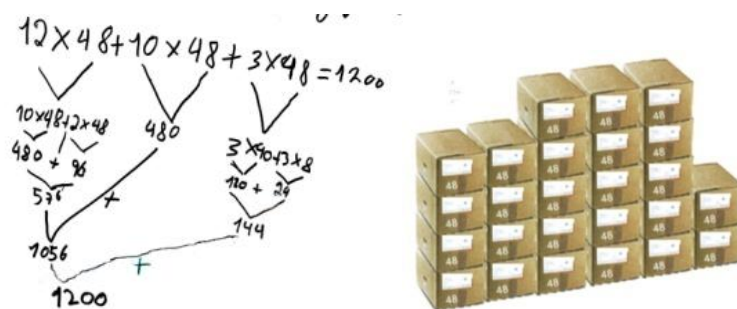


Figura 6.57 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10

Uma análise detalhada da sua resolução, relacionando-a com as caixas empilhadas, evidencia que 12×48 corresponde ao total de maçãs das duas camadas inferiores, em linha, cada uma com seis caixas de 48 maçãs. O produto 10×48 corresponde ao total de maçãs das duas camadas seguintes, cada uma com cinco caixas de 48 maçãs e, finalmente, 3×48 equivale ao total de maçãs das três últimas caixas da camada superior. Para calcular os três produtos parciais, Cristóvão e Hugo recorrem sempre à decomposição decimal de um dos fatores e usam o seu conhecimento sobre múltiplos de dez.

Eva e Guilherme também observam a figura da tarefa, a partir da qual elaboram e apresentam um esquema que suporta o seu modo de pensar.

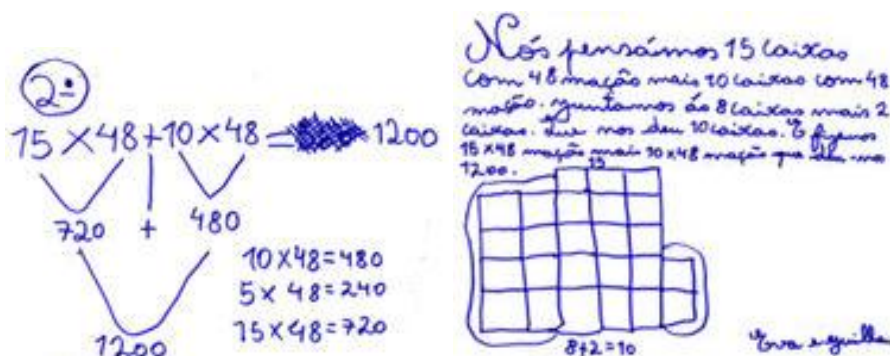


Figura 6.58 – Resolução de Eva e Guilherme da sub tarefa 2 – tarefa 10

Isabel interpela o par para explicar como pensaram e Eva faz uma apresentação oral muito próxima dos registos escritos que havia realizado com o seu colega.

Eva – Nós pensámos em quinze caixas com 48 maçãs mais dez caixas com 48 maçãs. Juntámos às oito caixas mais duas caixas (e aponta para o esquema que fizeram), o que nos deu dez caixas. E fizemos $15 \times 48 + 10 \times 48$.

Estes alunos tiram partido da disposição retangular, transformando a “pilha de caixas” em dois “retângulos”, com 15 e 10 caixas e calculam, a partir daí, os produtos parciais correspondentes, 15×48 e 10×48 , considerando que cada caixa tem 48 maçãs. Os seus registos escritos evidenciam, ainda, algumas relações que parecem ter estabelecido para efetuar os cálculos intermédios.

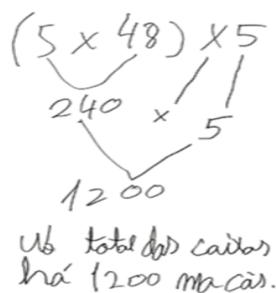
$$\begin{aligned} 10 \times 48 &= 480 \\ 5 \times 48 &= 240 \\ 15 \times 48 &= 720 \end{aligned}$$

Figura 6.59 – Cálculos intermédios realizados por Eva e Guilherme na sub tarefa 2 – tarefa 10

Eva e Guilherme começam por recorrer ao seu conhecimento sobre múltiplos de dez e calculam mentalmente 10×48 . No segundo cálculo consideram que cinco é metade de dez e, por isso, o produto correspondente também é metade do anterior. Finalmente, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, determinam 15×48 adicionando os produtos parciais anteriores.

O modo como Eva e Guilherme se apoiam na disposição retangular para determinar o total de maçãs, auxilia Isabel a destacar, perante todos os alunos da turma, que calcular a soma dos dois produtos 15×48 e 10×48 é o mesmo que calcular 25×48 .

Duarte e Tiago também observam a figura que acompanha a tarefa e recorrem à disposição retangular para resolver o mesmo problema, usando um esquema mental muito próximo do utilizado por Eva e Guilherme. Mas, ao contrário destes colegas, nos seus registos escritos não apresentam explicitamente algo que fundamente o seu modo de pensar, que se traduz pela expressão $(5 \times 48) \times 5$.



$(5 \times 48) \times 5$
 240×5
 1200
 O total das caixas há 1200 maçãs.

Figura 6.60 – Resolução de Duarte e Tiago da sub tarefa 2 – tarefa 10

Apesar da semelhança com o procedimento usado pelos mesmos alunos na tarefa anterior e também apresentado oralmente, os outros colegas da turma mostram não compreender a sua resolução quando observam o póster elaborado por eles. No âmbito do congresso matemático realizado a propósito desta tarefa, Isabel opta por seleccionar este par para apresentação e discussão da sua resolução, de modo a facilitar a sua clarificação perante toda a turma.

O grau de abstracção do procedimento seguido, visível em termos dos registos escritos, e o modo como, inicialmente, o explicam, leva os colegas a solicitar mais esclarecimentos. Perante a dificuldade dos restantes colegas em compreender a resolução de Duarte e Tiago, Isabel orienta o par no sentido de tornar a explicar por outras palavras, considerando que a primeira tentativa não tinha sido entendida.

Gustavo – Não estou a perceber! Podes explicar melhor?

Isabel – Um dos dois tente explicar de outra maneira aos colegas, para que eles percebam.

Duarte – Nós pegámos nestas duas caixas (e aponta, na figura, para as duas últimas caixas da direita) e pusemo-las aqui (aponta para a camada superior à esquerda). E elas desapareceram daqui (aponta para as duas últimas caixas da direita). Depois fizemos 5×48 porque eram as caixas de uma coluna. Como eram cinco colunas fizemos depois vezes cinco (Duarte escreve no quadro $(5 \times 48) \times 5$).



O seu raciocínio é baseado na transformação, mental, da pilha de caixas em um retângulo e, a partir daí, calculam o número de maçãs por coluna, efetuando 5×48 . Como identificam cinco colunas, calculam posteriormente cinco vezes o número de maçãs de cada uma. No entanto, tal como no problema anterior, representam os cálculos pela ordem pela qual pensam. Ainda que de modo informal e intuitivo, estes alunos usam um procedimento baseado na propriedade associativa da multiplicação, efetuando $(5 \times 48) \times 5$ na aceção de $5 \times (5 \times 48)$ em vez de $(5 \times 5) \times 48$.

Enzo, correspondendo ao apelo de Isabel para pedirem esclarecimentos sobre o que os colegas apresentam no quadro, interroga-os:

Enzo – Gostava de saber como é que o Duarte e o Tiago fizeram rapidamente 240×5 .

Duarte – (responde pensando em 5×240) Nós sabemos que 5×4 é 20 então 5×40 é 200. E como sabemos que 5×2 é dez sabemos que 5×200 é 1000. E por isso pusemos 1200.

A explicação de Duarte, para além de ter subentendida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, está relacionada com uma outra ideia fundamental da aprendizagem da multiplicação, o uso de fatores múltiplos de dez. O questionamento sobre procedimentos de cálculo potentes e a sua explicitação parece contribuir para que os alunos evoluam na sua compreensão sobre a multiplicação.

Nos procedimentos utilizados pelos pares Cristóvão/Hugo, Eva/Guilherme e Duarte/Tiago, que partem da disposição retangular das caixas, os alunos “manipulam” o número 25, o que, em termos do contexto apresentado, significa pensar e representar (esquemáticamente ou não) diferentes arranjos das caixas, mantendo intacto o conteúdo de cada uma – 48 maçãs.

Ao contrário dos pares anteriormente referidos, todos os outros alunos traduzem o problema através da expressão multiplicativa 48×25 ou 25×48 , que parecem ter identificado apenas a partir do enunciado escrito, uma vez não é necessário observar a figura para resolver o problema. Há dois pares de alunos que calculam a partir da expressão 48×25 , decompondo o número 25, não evidenciando ter-se apoiado na figura que acompanha o problema. Os restantes seis pares calculam a partir da expressão 25×48 , tal como Maria Rita e Patrícia.

$$\begin{array}{c}
 25 \times 48 = 25 \times 40 + 25 \times 8 \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 1000 \quad + \quad 200 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 1200
 \end{array}$$

Figura 6.61 – Resolução de Maria Rita e Patrícia da subtarefa 2 – tarefa 10

Nos cálculos que realizam, estas alunas recorrem a procedimentos baseados na decomposição decimal do número 48 e no uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Não explicam, no seu registo escrito, como efetuam os cálculos intermédios mas, provavelmente, recorrem ao conhecimento sobre produtos com números de referência tais como múltiplos de dez e os números oito e 25.

O tipo de procedimento anterior, formal e abstrato, apoia-se na “manipulação” do número 48 mas a sua decomposição não está associada ao seu significado no contexto do problema – número de maçãs de uma caixa. Assim, estas resoluções, que não se socorrem da disposição retangular nem do significado dos números neste contexto específico, situam-se já num nível formal da aprendizagem da multiplicação, pois baseiam-se no estabelecimento de relações numéricas e no uso de propriedades desta operação.

Ainda assim, apesar das diferenças manifestadas em termos dos procedimentos utilizados na resolução da subtarefa 2 da tarefa 10, as respostas finais dos alunos evidenciam que todos conseguem atribuir significado ao número obtido, 1200, que, no contexto apresentado, corresponde ao número total de maçãs.

Nos dois problemas referidos estão em causa os produtos 25×24 e 25×48 , interligados entre si, intencionalmente, por uma relação de dobro no total de maçãs em cada caixa. No entanto, na resolução do segundo, não há alunos a identificar e a usar esta relação. Todos os pares de alunos resolvem o segundo problema sem recorrer ao primeiro, apesar de as suas resoluções estarem disponíveis na mesa de trabalho de cada um e de Isabel ter lembrado que “ao resolver um problema novo é importante lembrar outros já resolvidos e estabelecer relações”. Nas tarefas apresentadas, para além de os

contextos serem muito semelhantes, as relações de dobro que interligam os cálculos a efetuar são conhecidas dos alunos do cálculo em cadeia. Todavia, apesar de nesses cálculos, aparentemente, as terem aprendido e usado com relativa facilidade, no contexto dos problemas da tarefa 10, não há evidências que as tenham reconhecido e utilizado de um para o outro problema.

O contexto do terceiro problema da tarefa 10 incide, igualmente, sobre pilhas de caixas de maçãs mas é um problema de divisão. Este facto parece ter criado dificuldades aos alunos logo na compreensão do enunciado – pela própria situação de divisão e porque faz apelo a um dado do problema anterior, o número total de maçãs em cada caixa.

Há três pares de alunos que não conseguem fazer o problema ou o fazem incorretamente, apesar de ter sido dado mais tempo para a sua resolução do que o previsto.

Um dos pares representa o cálculo através da expressão 1200×48 , evidenciando que não compreende a tarefa. Um outro, formado por David e Diogo, desenha um esquema na sua folha de registo baseado num procedimento aditivo.

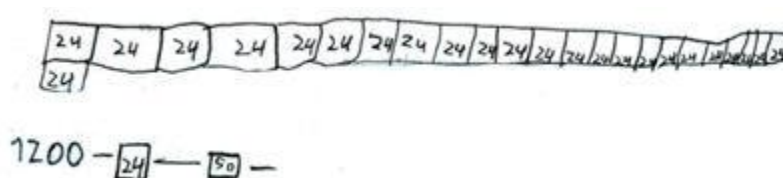
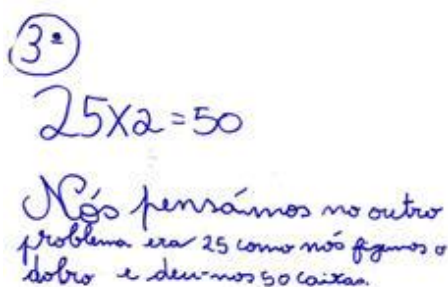


Figura 6.62 – Resolução de David e Diogo da sub tarefa 3 – tarefa 10

Estes alunos representam, umas a seguir às outras, 25 caixas de 24 maçãs, mas não continuam esta resolução. Em seguida, fazem uma outra tentativa, partem de 1200, número total de maçãs, e iniciam um procedimento subtrativo tirando 24 a 1200, do qual também desistem. Posteriormente, no póster que elaboram, já registam apenas o procedimento subtrativo incompleto e optam depois por um procedimento multiplicativo. Ainda assim, não há evidência que este último seja representativo da sua maneira de pensar.

Os pares que interpretam corretamente o contexto deste terceiro problema da tarefa 10, resolvem-no de modo adequado mas uns associam-no ao primeiro problema enquanto outros o relacionam com o segundo. Há, ainda, a registar um par que resolve corretamente a subtarefa 3, através de um procedimento de multiplicação sucessiva.

Eva e Guilherme estabelecem uma relação entre o terceiro e o primeiro problema.



3°

$$25 \times 2 = 50$$

Nós pensámos no outro problema era 25 como nós fizemos o dobro e deu-nos 50 caixas.

Figura 6.63 – Parte do póster de Eva e Guilherme com a resolução da subtarefa 3 – tarefa 10

Na sua resolução escrita estes alunos referem uma relação de dobro entre o número total de caixas dos dois problemas, tendo subjacente, embora não explicitamente, a relação de dobro entre o número total de maçãs num e noutro problema.

As dificuldades manifestadas por muitos alunos nesta tarefa levam Isabel a solicitar a Eva e Guilherme que expliquem como pensaram.

Isabel – Como é que o primeiro par pensou para resolver o terceiro problema?

Eva – Fomos ao primeiro problema onde também havia 25 caixas mas fizemos o dobro.

Isabel – Quem é que fez de maneira diferente?

Gustavo – Nós fizemos 25 vezes 24 vezes dois.

Isabel – De facto, no primeiro problema havia quantas maçãs? E como estavam embaladas? Diogo?

Diogo – Tínhamos 600 maçãs.

Isabel – E foram necessárias para as embalar quantas caixas de 24 maçãs?

Diogo – 25.

Isabel – Exatamente. Então, se agora temos 1200... O que é o 1200 em relação ao 600?

Gustavo – É o dobro e por isso multiplicámos por dois o 25 vezes 24. E posso dizer outra coisa? Já que seis mais seis é 12 então 600 mais 600 é 1200!

Isabel – Exatamente. E por isso precisámos do dobro das caixas.

Depois de Eva e Gustavo clarificarem o seu raciocínio Isabel identifica, ainda, colegas que parecem ter dificuldade em perceber. Assim, coloca questões de modo a

tornar explícita a relação de dobro entre o número total de maçãs nos dois problemas (600 e 1200) e a consequente relação entre o número de caixas (25 e 50). Um dos alunos, Gustavo, fundamenta o seu modo de pensar através do cálculo do dobro de 25×24 , que é igual a 1200, justificando assim o dobro das caixas. Este modo de raciocinar, relacionando o terceiro com o primeiro problema, baseia-se no facto de, numa multiplicação, se o produto duplica e um dos fatores se mantém, então o outro fator também duplica.

Há também um par de alunos que, na resolução do terceiro problema, o relaciona com o segundo. Duarte e Tiago são os alunos que estabelecem essa ligação e Isabel solicita-lhes, durante a discussão coletiva, que verbalizem o modo como pensaram, uma vez que o seu raciocínio faz apelo a relações multiplicativas diferentes das anteriores.

Duarte – Nós fomos buscar o 25 ao segundo problema, pois nesse eram 25 caixas de maçãs.

Isabel – E quantas maçãs tinha cada caixa nesse problema?

Duarte – 48. E nós fizemos o dobro de 25.

Isabel – Porquê?

Duarte – Porque 48 é o dobro de 24 e no supermercado Girassol as caixas têm 24 maçãs. E nós fizemos 25 vezes dois porque 25 eram as caixas do outro problema.

Isabel – Então, agora era necessário o dobro das caixas?

Duarte – Porque eram metade das maçãs em cada caixa.

Na sua explicação, Duarte refere a relação entre o número de maçãs de cada caixa nos dois problemas e associa-a à ligação entre o número de caixas necessário no terceiro problema. Não é indicado pelo aluno, explicitamente, que o total de maçãs é o mesmo em ambos os problemas mas parece estar subjacente ao seu raciocínio, baseado numa relação de dobro e de metade.

Os alunos que não estabelecem qualquer relação entre este terceiro problema e algum dos anteriores têm muitas dificuldades na sua compreensão e, na sua maioria, não o conseguem resolver corretamente. Apenas Luís e Raquel, sem invocar os problemas anteriores, o realizam corretamente. Estes alunos parecem usar, sem efetuar registos auxiliares, um procedimento de multiplicação sucessiva, até encontrar o número que, multiplicado por 24 é igual a 1200, tal como justificam no póster que constroem e explicitam, oralmente, no congresso associado à tarefa 10.

24 x 50 = 1200

R: Nós primeiro pensamos de muitas maneiras e chegamos a uma conclusão que era 24 x 50 que dá 1200 maçãs, nós pensamos que 50 caixas e na o resultado, porque só podia ser esse resultado se não estava errado.

Figura 6.64 – Parte do póster de Luís e Raquel com a resolução da subtarefa 3 – tarefa 10

O procedimento de Luís e Raquel parece estar relacionado com os números envolvidos e com a facilidade que têm nos cálculos multiplicativos com o fator 24.

No âmbito do trabalho com cadeias numéricas, apesar das dificuldades manifestadas na tarefa anterior, a maior parte dos alunos identifica e utiliza com alguma facilidade, tanto relações de dobro como relações de dobro e metade entre expressões multiplicativas. Aparentemente, identificar relações de dobro e de dobro e metade e utilizá-las para calcular de modo flexível reveste-se de bastante complexidade quando os números envolvidos têm um significado, do qual os alunos ainda não se conseguem abstrair. Este aspeto pode ser uma explicação possível para o facto de todos resolverem o segundo problema sem estabelecer relações com o primeiro e apenas alguns resolverem corretamente o terceiro problema – os que conseguem estabelecer relações com um dos problemas anteriores. Mais uma vez, o facto de os números estarem em contexto e associados a um determinado significado, parece criar dificuldades aos alunos no estabelecimento de relações numéricas para calcular. Além disso, a facilidade com que os alunos estabelecem relações, mesmo as mais complexas, no trabalho com cadeias numéricas, está também associada ao facto de eles saberem que, nesse âmbito, devem procurar relações, o que não acontece na resolução de um problema.

Nas tarefas de cálculo em cadeia seguintes, considerando as dificuldades manifestadas pelos alunos e no sentido de as ultrapassar, Isabel propõe a realização de cálculos recorrendo aos mesmos números da tarefa 10 e onde estão subjacentes relações de dobro e de dobro/metade. Tal como aconteceu nos cálculos em cadeia anteriores, os alunos envolvem-se bastante e identificam, com agilidade e naturalidade, relações que facilitam os cálculos que precisam realizar. São eles próprios a optar por procedimentos

potentes e adequados aos números envolvidos baseados na identificação de relações numéricas tais como relações de dobro e de dobro/metade. Este facto possibilita que, na discussão coletiva, os alunos estabeleçam pontes com procedimentos menos potentes que usaram em tarefas anteriores, na realização do mesmo cálculo mas ligado a um determinado contexto.

Em síntese, ainda que, de início sejam pouco formalizados, os procedimentos baseados na operação multiplicação e nas suas propriedades parecem emergir na resolução de tarefas que incluem um contexto de disposição retangular. Os alunos utilizam cada vez mais procedimentos multiplicativos, havendo evidência da sua progressão em termos do recurso a relações numéricas adequadas aos números com os quais calculam. Há, pelo contrário, cada vez menos alunos a recorrer a procedimentos aditivos ou de contagem, sobretudo quando se podem apoiar num contexto de disposição retangular. Para além de estar associado à própria disposição retangular, o privilegiar mais frequentemente procedimentos multiplicativos parece estar, também, relacionado com a grandeza dos números envolvidos, que dificulta o recurso à adição de um grande número de parcelas.

De entre os procedimentos multiplicativos destacam-se, pela frequência com que são utilizados, os que se baseiam na decomposição, decimal ou não, de um dos fatores. Uma das razões para esse facto parece ser o modelo retangular subjacente ao contexto das tarefas propostas que facilita o recurso a produtos parciais apoiados na decomposição de um dos fatores. Deste modo os alunos usam, ainda que implicitamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Um exemplo do uso frequente deste tipo de procedimentos verifica-se tanto nas tarefas 8A e 8B – Pátio do João e Pátio do Cristóvão, como na tarefa 10 – Pilhas de Caixas.

Os procedimentos de decomposição são usados com o apoio do modelo retangular mas há já, também, muitos alunos que manifestam alguma evolução, ao utilizá-los a um nível quase exclusivamente formal, manipulando os números tendo em conta as suas características e não o seu significado ligado ao contexto.

Nesta altura da experiência de ensino, os alunos parecem usar com compreensão a propriedade comutativa da multiplicação, efetuando a troca de fatores sempre que esta lhes facilita os cálculos que necessitam realizar.

A utilização de procedimentos de ajustamento e compensação, baseados na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração e tendo subjacente, também, o cálculo com múltiplos de dez, é uma opção apropriada em algumas das situações propostas mas tomada apenas por alguns dos alunos. A explicitação do modo de pensar associado a este procedimento parece contribuir para que os alunos que não o utilizam o compreendam e percebam as suas vantagens em determinados cálculos.

A identificação de relações de dobro e de relações de dobro/metade e a utilização de procedimentos correspondentes revelam-se complexas no âmbito da resolução de problemas. Contudo, a explicitação oral dos registos escritos parece clarificar e tornar evidentes, para a maior parte dos alunos, as relações numéricas em que se baseiam estes procedimentos e quando podem ser utilizados de modo a facilitar os cálculos.

Apesar de se poder afirmar que existe uma evolução nos procedimentos dos alunos e na opção clara por procedimentos multiplicativos há, no entanto, alunos que, perante situações novas e/ou mais complexas voltam a procedimentos aditivos, subtrativos ou de contagem, nas quais, aparentemente, se sentem mais seguros.

O estabelecimento de relações numéricas baseadas em propriedades da multiplicação é realizado, progressivamente, com relativa facilidade no cálculo em cadeia, mesmo com números da ordem das centenas e milhares. Contudo, a identificação e uso das mesmas relações numéricas de modo a facilitar determinados cálculos, nem sempre são efetuados no âmbito de um problema apesar de, aparentemente, os alunos as compreenderem. Quando a resolução de um problema depende, essencialmente, das relações que podem ser estabelecidas com outros em termos dos números envolvidos, há alunos que não o conseguem fazer e, por isso, não o resolvem. Este aspeto parece estar associado a um conhecimento pouco profundo, por parte de alguns alunos, das características dos números e das relações numéricas bem como da operação multiplicação e das suas propriedades. Ainda assim, a explicitação dos modos de pensar

de outros e as discussões que realçam relações numéricas fundamentais parecem ter um papel essencial na evolução dos procedimentos dos alunos.

6.2.1.5. Síntese

Nas primeiras tarefas a utilização consciente da operação multiplicação e de procedimentos a ela associados é pouco frequente e pouco segura na resolução de tarefas baseadas nesta operação. Pensar e calcular em termos de grupo, ou seja, recorrendo à multiplicação, é uma mudança que não é realizada por todos os alunos ao mesmo tempo. De facto, alguns persistem durante bastante mais tempo que outros nos procedimentos de contagem e/ou nos aditivos.

O ponto de viragem da maior parte dos alunos, na opção consciente por procedimentos multiplicativos, parece ter acontecido durante a resolução de tarefas que incluem a disposição retangular. A eficácia deste tipo de procedimentos, relativamente a outros, foi realçada, também, pela exigência do cálculo com números cada vez maiores.

A compreensão e o uso das propriedades da multiplicação são marcos em termos da aprendizagem desta operação que os alunos vão alcançando, primeiro de modo muito incipiente e pouco preciso e, gradualmente, de modo flexível e adequado aos números em causa. As características dos contextos e dos números utilizados parecem contribuir para o emergir de procedimentos baseados nas propriedades da operação e para a sua evolução.

Para além do desenvolvimento do modo de pensar em termos da multiplicação, evidencia-se, também, uma progressão ao nível dos registos escritos que os alunos utilizam e da verbalização e fundamentação dos raciocínios que efetuam.

A evolução manifestada nos procedimentos usados pelos alunos não é linear, havendo evidências de alguns deles em determinadas tarefas, terem regressado a procedimentos que já pareciam ter ultrapassado.

Os procedimentos ligados a propriedades da multiplicação e adequados aos números envolvidos são frequentemente utilizados por todos os alunos nos cálculos em cadeia. Neste âmbito, identificam, cada vez com maior facilidade e adequação, relações

que aplicam nos cálculos sequenciais que efetuam. Todavia, quando é necessário realizar cálculos, por vezes até com os mesmos números, onde é possível estabelecer o mesmo tipo de relações num contexto não apenas matemático, os procedimentos dos alunos nem sempre as potencializam.

A progressão dos alunos relativamente à compreensão da multiplicação e ao uso de procedimentos relacionados com as suas propriedades parece não estar dissociada da cultura de sala de aula que se vai construindo onde, a par de um trabalho prévio realizado individualmente ou em pares, a apresentação, discussão e reflexão coletivas sobre as diferentes resoluções desempenham um papel fundamental. Além disso, a evolução dos alunos parece ser, também, influenciada pelo modo como são orquestradas as discussões coletivas, mantendo o foco nas relações e propriedades da multiplicação e realçando os procedimentos mais potentes em cada situação.

6.2.2. Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal

No âmbito da experiência de ensino na turma de Isabel, durante o 2.º período escolar, são propostas tarefas aos alunos que fazem parte da trajetória de aprendizagem da multiplicação e cujo universo numérico é ampliado, ao integrar os números racionais não negativos na sua representação decimal, que permitam a evolução dos seus procedimentos multiplicativos.

A introdução dos números racionais não negativos na sua representação decimal²⁵ a partir de situações onde os alunos lhes possam dar sentido é efetuada também no mesmo período escolar, de acordo com o Programa de Matemática do 3.º ano, vigente no ano letivo da recolha de dados. De acordo com informações recolhidas junto de Isabel durante as reuniões semanais, além da preocupação de propor contextos que permitam dar sentido aos números racionais na sua forma decimal, são privilegiadas também desde o início, situações que possibilitem aos alunos estabelecer relações entre os “novos”

²⁵A partir de agora os números racionais não negativos representados na sua forma decimal podem ser designados, também, por números na sua representação decimal ou números decimais, denominação utilizada usualmente.

números e entre estes e os números naturais. Assim, o trabalho realizado na sala de aula assenta, sobretudo, na exploração de contextos relacionados com a medição de diferentes grandezas, em particular, relacionadas com o sistema monetário e com as medidas de comprimento e de capacidade. O trabalho desenvolvido tem, também, como objetivo possibilitar a construção de sistemas de referência e de relações numéricas a partir das quais os alunos possam calcular com números na sua representação decimal.

As tarefas de multiplicação que incluem números na sua representação decimal assentam também na exploração de contextos associados a diferentes grandezas, em particular, relacionadas com as medidas de capacidade e com o sistema monetário. Os problemas incluídos na tarefa 13 têm um contexto associado a medidas de capacidade e os incluídos nas tarefas 16 e 17 partem de um contexto de dinheiro.

6.2.2.1. As primeiras tarefas

Com o propósito de facilitar o estabelecimento de relações multiplicativas com números de referência na forma decimal, com significado para os alunos, são-lhes propostas tarefas que partem de contextos associados a diferentes capacidades de garrafas de água. Nesse âmbito são colocadas por Isabel perguntas do tipo: “Como posso obter um litro de água?”, “Como posso obter um litro e meio de água?”, “Como posso obter dois litros de água?”, tendo os alunos disponíveis garrafas com diferentes capacidades tais como 2; 1,5; 1; 0,5; 0,25 e 0,20 litros.

No início, algumas das respostas às questões colocadas não incluem explicitamente expressões associadas à multiplicação, uma vez que o seu objetivo é dar sentido aos números na sua representação decimal. Por exemplo, à questão “Como posso obter um litro e meio de água?” surgem respostas tais como:

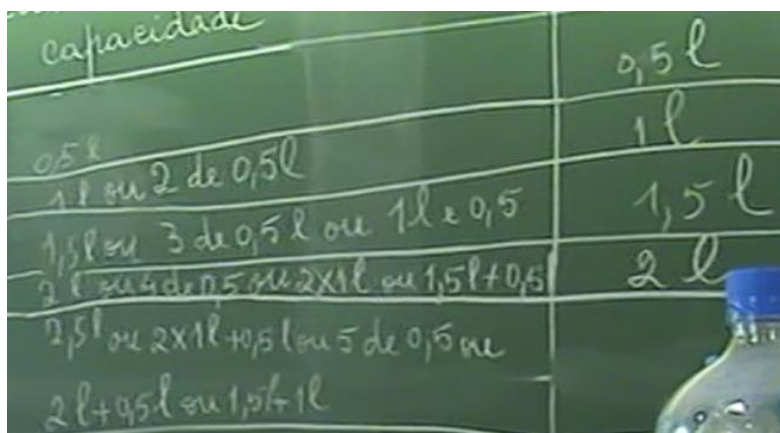
David – Com três garrafas de meio litro.

Hugo – Com uma garrafa de um litro e outra de meio litro.

Diogo – Com três vezes meio litro.

À medida que os alunos respondem às suas questões, Isabel escreve as respostas correspondentes numa tabela, de modo a facilitar, através da sua visualização, o

estabelecimento de relações entre as diferentes capacidades, tornando explícitas algumas de tipo multiplicativo. Depois da discussão inicial o quadro apresenta o seguinte aspeto:



capacidade	
0,5 l	0,5 l
1 l ou 2 de 0,5 l	1 l
1,5 l ou 3 de 0,5 l ou 1 l e 0,5	1,5 l
2 l ou 4 de 0,5 ou 2 x 1 l ou 1,5 l + 0,5 l	2 l
2,5 l ou 2 x 1 l + 0,5 l ou 5 de 0,5 ou	
2 l + 0,5 l ou 1,5 l + 1 l	

Figura 6.65 – Aspeto de parte do quadro após a discussão sobre capacidades de garrafas de água

O quadro mostra o registo das diferentes respostas dos alunos às questões colocadas. Alguns deles correspondem a modos informais de traduzir as respostas dadas, tal como “2 de 0,5 l” enquanto outros correspondem a expressões simbólicas que incluem a multiplicação, como “ $2 \times 1 \text{ l} + 0,5 \text{ l}$ ”. A preocupação central é dar sentido aos números racionais não negativos na sua representação decimal, além de estabelecer relações, entre diferentes capacidades que correspondem a números de referência, tais como 0,5; 1,5 e 2,5.

Na tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas, os dois primeiros problemas implicam calcular apenas com números naturais. No entanto, enquanto o primeiro é um problema de multiplicação, o segundo é um problema com um contexto de divisão. No terceiro problema, apesar do contexto e da relação subjacente ser a mesma do anterior, é preciso calcular com números na representação decimal.

O primeiro problema não coloca quaisquer dificuldades por parte dos alunos. Alguns usam procedimentos de adição sucessiva mas, a maior parte, utiliza procedimentos de tipo multiplicativo. O recurso a procedimentos aditivos parece ser sugerido pela figura que acompanha o problema, constituída por um conjunto de garrafas de água. Alguns dos alunos apresentam vários modos de calcular o número de garrafas e todos chegam à conclusão que na figura há 30 garrafas de um litro, ou seja, um total de 30 litros de água.

Ana Rita e Miguel são um dos pares que, na resolução do segundo problema, utiliza um procedimento aditivo.

[illegible]

Estes alunos registam uma adição de parcelas iguais a dois litros que parecem completar até perfazer o total de 30 litros, tal como explicita Ana Rita na discussão final.

Na sua verbalização esta aluna evidencia que calculam o número de garrafas contando de dois em dois até 30. O número de vezes que adicionam dois litros corresponde ao número de garrafas necessário.

321

voltam a usar procedimentos baseados na adição, nos quais, provavelmente, se sentem mais seguros para resolver o problema.

Na resolução do mesmo problema há outros alunos que recorrem ao uso de produtos conhecidos tais como 15×2 , de procedimentos de decomposição e, alguns deles identificam a relação de dobro/metade entre este problema e o anterior. Isabel realça este último procedimento na discussão coletiva e faz apelo ao estabelecimento de “pontes” com outros problemas e com o cálculo em cadeia.

O terceiro problema parte de uma situação semelhante à anterior, mas envolve o cálculo com números decimais, uma vez que é necessário saber quantas garrafas de meio litro perfazem um total de 30 litros de água. À semelhança do anterior, muitos dos alunos têm dificuldade na sua compreensão e além disso, quase metade da turma não o consegue resolver ou fá-lo incorretamente. Também há vários pares de alunos que recorrem a procedimentos aditivos, adicionando sucessivamente 0,5 ou adicionando as parcelas duas a duas, até perfazer o total de 30 litros.

Bernardo e João são um dos pares que utiliza um procedimento aditivo na resolução deste problema.

Handwritten mathematical work showing the addition of 0,5 repeatedly to reach 30. The work is written in Portuguese and includes the final result: 60 garrafas de água.

Figura 6.67 – Resolução de Bernardo e João da subtarefa 3 – tarefa 13

Estes alunos usam um procedimento moroso e suscetível de enganos, pois corresponde à adição de um grande número de parcelas – 60. Apesar disso, conseguem resolver corretamente o problema e chegar à sua solução. Na discussão coletiva, Bernardo clarifica o modo como pensaram.

Bernardo – Nós fomos sempre fazendo 0,5 mais 0,5 mais 0,5 mais 0,5 ... até fazer 30 litros. E depois contamos as garrafas.

Isabel – É verdade, mas pensa lá de outra maneira. Quanto é duas vezes meio litro?

Bernardo – É um litro.

Isabel – Então e não podiam ter usado também essa relação? Um litro é o dobro de meio litro (escreve no quadro $2 \times 0,5 = 1$) e meio litro é metade de um litro. Se eu queria ter 30 litros precisava de quantas garrafas?

Bernardo – De 60.

Isabel – Pois claro, precisava do dobro.

Bernardo verbaliza que adicionam sucessivamente meio litro e é questionado por Isabel de modo a evidenciar a relação de dobro entre meio litro e um litro.

Quase metade dos alunos identifica, todavia, que meio litro é metade de um litro e utiliza um procedimento de dobro/metade, relacionando este problema com o primeiro. Alguns deles, embora não apresentem a expressão multiplicativa correspondente, fazem um esquema que fundamenta a relação entre os números dos dois problemas e no qual se baseia o seu raciocínio.

Gustavo e Leandra são dois alunos que se socorrem de um esquema para resolver esta tarefa.

$30L - 0,5L = 60$
 $30L - 1,0L = 30$
 R: Não fizemos 0,5 L porque é metade de 1,0 L e não 60 L.

Figura 6.68 – Resolução de Gustavo e Leandra da sub tarefa 3 – tarefa 13

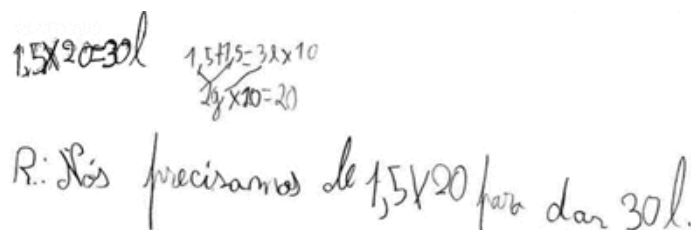
Estes alunos elaboram um esquema que clarifica a relação entre a capacidade das garrafas e a quantidade necessária para ter um total de 30 litros de água. A sua resposta final evidencia que, subjacente ao registo escrito, está um modo de raciocinar que associa o facto da capacidade de cada garrafa ter passado para metade com o dobro do número de garrafas necessário, quando se comparam os dados deste problema com os do primeiro.

Há ainda outros alunos que registam apenas uma das expressões $60 \times 0,5$ ou $0,5 \times 60$, sem apresentar qualquer justificação mas, provavelmente, têm por base um raciocínio semelhante ao de Gustavo e Leandra, assente na relação entre meio litro e um litro e na consequente duplicação do número total de garrafas.

Na discussão coletiva, considerando as dificuldades manifestadas pelos alunos neste problema, Isabel reforça a relação de dobro/metade que pode ser estabelecida com o primeiro e apela, mais uma vez, ao trabalho que os alunos vêm desenvolvendo no cálculo em cadeia e que deve ser potencializado na resolução de problemas. Realça ainda que, no cálculo com números decimais se mantêm muitas das relações que são estabelecidas com números naturais e que os alunos já conhecem do trabalho que têm vindo a realizar.

O último problema da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas tem subjacente o mesmo contexto que os anteriores, mudando apenas, novamente, a capacidade das garrafas disponíveis para 1,5 litros. Na sua resolução, quando comparados os procedimentos dos alunos com os usados nas tarefas anteriores, verifica-se que há um menor número que opta por procedimentos aditivos, assim como há menos alunos que não a conseguem resolver.

Luís e Raquel são dois dos alunos que utilizam um procedimento multiplicativo baseado no estabelecimento de relações numéricas adequadas aos números envolvidos.



$$1,5 \times 20 = 30l$$

$$1,5 + 1,5 = 3l \times 10$$

$$3l \times 10 = 30l$$

R: Nós precisamos de $1,5 \times 20$ para dar 30l.

Figura 6.69 – Resolução de Luís e Raquel da sub tarefa 4 – tarefa 13

Estes alunos começam por usar o conhecimento que 1,5 mais 1,5 é igual a três e, a partir daí, relacionam as capacidades três e 30 litros o que lhes permite estabelecer a relação correspondente entre duas e 20 garrafas. Este procedimento multiplicativo baseia-se num raciocínio do tipo proporcional, ainda que de modo muito informal, uma vez que associa duas grandezas entre si, número de litros e número de garrafas que “crescem” do mesmo modo.

Luís e Raquel verbalizam o seu raciocínio durante a discussão coletiva.

Raquel – Tínhamos garrafas de litro e meio e precisávamos de 20 garrafas.

Isabel – É verdade, mas explica lá aos teus colegas como fizeram.

Luís – Contámos duas garrafas de cada vez.

Isabel – Explica lá melhor.

Luís – Pensámos que 1,5 mais 1,5 dá três litros. Duas garrafas têm três litros.

Isabel – E nós queríamos ter quantos litros?

Luís – 30 litros.

Isabel – E então?

Luís – Nós fomos fazendo a contagem.

Isabel – Mas pensem lá agora, se duas garrafas têm três litros e nós queremos ter 30 litros como podemos fazer? Quantas vezes temos de ter três litros para termos 30 litros?

Raquel – Dez vezes três.

Isabel – E as garrafas, quantas são?

Raquel – São dez vezes dois, são 20.

Luís, ao ser interpelado para explicar detalhadamente como pensaram, começa por justificar que agrupam 1,5 com 1,5 e obtêm um total de três litros. A partir daí, o aluno parece verbalizar um procedimento aditivo – efetuando uma adição de parcelas iguais a três. No entanto, Isabel coloca questões ao par de forma a tornar evidentes as relações numéricas nas quais estes se tinham apoiado para realizar os cálculos nos seus registos escritos, no sentido de fazer progredir todos os alunos, e não só aqueles, para procedimentos multiplicativos mais potentes.

Nos cálculos em cadeia seguintes, os alunos usam números na representação decimal tais como 0,5 e 1,5 utilizados nestes problemas, com o propósito de consolidar o seu conhecimento sobre relações multiplicativas que podem ser estabelecidas entre eles. Considerando que nos cálculos iniciais um dos fatores é sempre um número natural, os alunos identificam relações potentes e adequadas aos números envolvidos, que transpõem do trabalho desenvolvido anteriormente com números naturais. Assim são realizados, com alguma facilidade, cálculos baseados em procedimentos de decomposição de um dos fatores, em relações de dobro e de dobro/metade e no uso de múltiplos de dez. No decurso dos cálculos em cadeia, sempre que há alguma dificuldade associada aos “novos” números, Isabel faz apelo ao seu significado no contexto das capacidades das garrafas de água, dando sentido aos números e às relações entre eles de modo a facilitar o cálculo.

Em síntese, os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das primeiras tarefas com números na representação decimal são, inicialmente, aditivos. Os alunos têm

bastantes dificuldades em calcular com números na forma decimal e identificar relações que aprenderam no âmbito dos números naturais. Nos casos em que o contexto das tarefas faz apelo à divisão esta parece constituir um obstáculo acrescido. Há bastantes alunos, praticamente metade da turma, que não consegue resolver o terceiro problema ou resolve-o incorretamente. Este aspeto parece estar relacionado, para além da situação proposta ser de divisão, com a necessidade de efetuar cálculos com o número 1,5. Aparentemente, o conhecimento de muitos dos alunos sobre números na representação decimal não lhes permite, ainda, estabelecer as relações adequadas, como por exemplo, pensar que um litro e meio é o triplo de meio litro, de modo a facilitar a realização dos cálculos.

Os alunos que já utilizam procedimentos multiplicativos fazem apelo a relações de dobro, de dobro/metade e ao cálculo com múltiplos de dez. No cálculo em cadeia com números na forma decimal, tal como acontece na trabalho com números naturais, identificam e usam com maior destreza do que no âmbito dos problemas, procedimentos multiplicativos que têm subjacentes as propriedades da multiplicação. Mas, tal como anteriormente é referido, este aspeto parece estar associado tanto com a natureza do próprio cálculo em cadeia, onde se pressupõe o encontrar de relações, como com a dificuldade de as estabelecer no âmbito da resolução de problemas.

6.2.2.2. As tarefas com contexto de dinheiro

Na tarefa 16 – Contar moedas 1, cujo contexto é o dinheiro, muitos dos alunos usam procedimentos do tipo multiplicativo e calculam com números naturais, uma vez que raciocinam em cêntimos e não em euros.

Francisco é um dos alunos que, na tarefa 16, utiliza procedimentos multiplicativos e realiza alguns dos cálculos em cêntimos.

Este aluno no seu registo escrito evidencia que agrupa as moedas com o mesmo valor e calcula os produtos parciais correspondentes a 24 moedas de cinco cêntimos, a sete moedas de dois cêntimos e a 65 moedas de um cêntimo. Enquanto os fatores são representados em cêntimos o valor de cada produto é registado logo em euros. Em

seguida adiciona sucessivamente os produtos parciais. Contudo, enquanto para multiplicar usa os valores das moedas em cêntimos, ao adicionar os produtos parciais parece utilizar os números decimais que correspondem a realizar o cálculo em euros.

*Sim o Bernardo pode comprar a caixa de cromos,
Eu fiz 24×5 que me deu $1,20\text{€}$ + 782 que me deu $1,34\text{€}$
 65×1 que me deu $1,99\text{€}$*

Figura 6.70 – Resolução de Francisco da tarefa 16

A maior parte dos alunos que usa procedimentos multiplicativos fá-lo de modo semelhante a Francisco. No entanto, há alguns que realizam todos os cálculos em cêntimos e só o resultado final é registado em euros. Este facto parece estar relacionado com as experiências do dia-a-dia dos alunos onde, de facto, se pensa e se calcula em cêntimos quando se trata de quantias “próximas” de um euro. As próprias moedas com valor inferior a um euro têm cunhado o seu valor em cêntimos: 50, 20, dez, cinco, dois e um. Além disso os alunos têm facilidade, neste momento, em realizar cálculos com este tipo de números, de referência, enquanto têm ainda dificuldades na representação decimal das diferentes quantidades de dinheiro inferiores a um euro e no cálculo associado.

Nos problemas com contexto de dinheiro há, também, alunos que voltam a recorrer a procedimentos aditivos e outros que explicitam oralmente procedimentos de contagem por saltos. Os que optam por este tipo de procedimentos parecem ser os que representam os valores das moedas ou outra quantidade de dinheiro em euros. Deste modo, têm de representar e de calcular, quase sempre, com números com duas casas decimais, com os quais têm ainda algumas dificuldades. Essa parece ser a razão pela qual usam procedimentos nos quais se sentem mais seguros. Além disso, há muitos alunos que representam a adição com números decimais, realizam os cálculos associados com números naturais e apresentam o resultado na forma de número decimal. As dificuldades que revelam parecem, de facto, estar associadas aos números na representação decimal com os quais não são capazes de realizar cálculos com destreza e confiança.

Considerando as dificuldades manifestadas pelos alunos na representação e no cálculo com números decimais no contexto do sistema monetário, Isabel propõe o preenchimento de uma tabela (ver Anexo 5, subtarefa 2 – tarefa 16) que permite aos alunos estabelecer relações multiplicativas com facilidade entre os valores das diferentes moedas e desenvolver destrezas associadas à representação e cálculo com números na forma decimal. O seu preenchimento é realizado em grande grupo e orientado por Isabel a partir de questões que coloca aos alunos. Estas têm como propósito que os alunos identifiquem e destaquem relações numéricas que conhecem e utilizam no cálculo multiplicativo com números naturais, de modo a progredir no seu uso, agora com outro tipo de números. Isabel solicita a participação dos alunos no preenchimento da tabela mas é ela que realiza os registos no quadro, de modo a garantir o uso adequado da representação decimal do valor das moedas. Após a discussão, o quadro apresenta o seguinte aspeto:

Conceito da Unidade, 16 de Março de 2009

Moedas	Nº de moedas necessárias para 1€	Total igual a 1€	Nº de moedas necessárias para 5€	Total igual a 5€
50 cêntimos ou 0,50€	2	$2 \times 0,50$	4	$4 \times 0,50$
20 cêntimos ou 0,20€	5	$5 \times 0,20$	10	$10 \times 0,20$
10 cêntimos ou 0,10€	10	$10 \times 0,10$	20	$20 \times 0,10$
5 cêntimos ou 0,05€	20	$20 \times 0,05$	40	$40 \times 0,05$
2 cêntimos ou 0,02€	50	$50 \times 0,02$	100	$100 \times 0,02$
1 cêntimo ou 0,01€	100	$100 \times 0,01$	200	$200 \times 0,01$

Handwritten notes on the right side of the board:

- 50 — 4
- 5 — 40
- 10 —
- 1 —
- 20 —
- 2 —

Figura 6.71 – Aspeto do quadro depois da discussão sobre relações entre os valores das moedas

Depois de preenchidas as duas primeiras colunas da tabela, relativas à obtenção de um euro com os diferentes tipos de moedas, a partir das intervenções dos alunos, estes são desafiados a observá-las e a identificar relações.

Cristóvão – Se olharmos para as moedas de 50 cêntimos vemos que precisamos de duas para ter um euro. E precisamos de vinte moedas de cinco cêntimos para ter também um euro.

Isabel – Exatamente. E porquê, consegues explicar?

Cristóvão – Porque retiro 10 aos 50 cêntimos e acrescento 10 às duas moedas.

Isabel – Vamos lá a ver. O que é o 50 em relação ao cinco?

Cristóvão – É 10 vezes mais.

Isabel – E o que é o cinco em relação ao 50?

Cristóvão – É 10 vezes menos.

Isabel – Exatamente. E o 20 em relação ao dois?

Cristóvão – É 10 vezes mais.

Isabel – Exatamente! O que o Cristóvão quer dizer é que dois vezes 50 cêntimos são um euro e 20 vezes cinco cêntimos também são um euro.

Gustavo – Ah! Já percebi o que quer dizer o Cristóvão. Ali (aponta para a expressão que inclui 0,05€) é preciso 10 vezes mais porque as moedas valem 10 vezes menos!

Isabel – Exatamente!

Cristóvão identifica a relação entre as expressões $2 \times 0,50$ e $20 \times 0,05$, mas de início não a consegue verbalizar corretamente, falando em retirar e acrescentar. Isabel repete o raciocínio de Cristóvão usando os termos corretos mas sem se referir logo a 10 vezes mais e 10 vezes menos. É Gustavo que, ao compreender a relação multiplicativa em jogo, a verbaliza corretamente. Assim, os alunos para além de identificarem regularidades em expressões com números na forma decimal baseadas nas propriedades da multiplicação, neste caso particular na propriedade associativa, também parecem evoluir na utilização adequada do vocabulário específico. Para esta evolução parece contribuir a verbalização dos seus modos de pensar nas discussões coletivas.

A partir da relação identificada por Cristóvão e Gustavo são reconhecidas outras regularidades que se baseiam no mesmo tipo de relações – entre o número de moedas de 20 cêntimos e de dois cêntimos necessário para ter um euro e a sua relação com 0,20 e 0,02 e entre o número de moedas de dez cêntimos e um cêntimo necessário para ter um euro e a sua relação com 0,10 e 0,01.

No preenchimento da segunda parte da tabela, correspondente às colunas associadas ao total de dois euros é identificada, de imediato, a relação de dobro com o número de moedas correspondente no caso da quantia de um euro.

Nos problemas seguintes, incluídos na tarefa 17 – Contar moedas 2, os alunos parecem ter mais confiança na representação dos números decimais e no cálculo baseado em procedimentos de tipo multiplicativo. Contudo, alguns deles continuam a raciocinar em cêntimos e a realizar os cálculos com números naturais. Além disso, há alunos que se enganam e não conseguem resolver corretamente as tarefas propostas.

Os problemas 4 e 5 exigem lidar com dois tipos de moedas ao mesmo tempo para perfazer dois euros e três euros, respetivamente. Logo no início, os alunos evidenciam dificuldades em perceber, através do enunciado escrito, se é possível haver só um tipo de moedas ou não. A pergunta do enunciado “Quantas moedas pode ter?” parece ter, também, contribuído para essas dificuldades e induzido alguns alunos a procurar uma solução possível e não todas as soluções possíveis. Assim, os alunos, com exceção de um par, identificam apenas uma das soluções possíveis e não inventariam todas as hipóteses. A solução que quase todos os alunos encontram parece estar relacionada com a separação de dois euros em um euro mais um euro. Assim, a maioria pensa em uma maneira de ter um euro com moedas de dez centimos e outra com moedas de 50 centimos.

Apesar de se evidenciar alguma evolução na frequência do uso de procedimentos multiplicativos, ainda há dois pares de alunos que recorrem a um procedimento de adição sucessiva. Os alunos representam a adição usando números representados em centimos, ou seja, não usando números na forma decimal.

Enzo e Raquel são os únicos alunos que encontram duas das soluções possíveis do problema 4, que corresponde a encontrar maneiras de ter dois euros com moedas de dez e 50 centimos.


$$2 \times 0,50 + 10 \times 0,10 = 2\text{€} \quad \text{ou} \quad 3 \times 0,50 + 5 \times 0,10 = 2\text{€}$$

Figura 6.72 – Resolução de Enzo e Raquel da subtarefa 4 – tarefa 17

Estes alunos, nos seus registos escritos, representam duas expressões que lhes permitem calcular o número de moedas de 50 centimos e de dez centimos necessário para perfazer dois euros. A primeira das soluções encontrada coincide com a que os restantes colegas também identificam e, a segunda, nenhum dos colegas a inventaria. Enzo e Raquel não identificam a outra hipótese possível, com apenas com uma moeda de 50 centimos e 15 moedas de dez centimos, provavelmente porque iniciam o seu raciocínio a partir de duas moedas de 50 centimos.

Na discussão coletiva os alunos são questionados no sentido de identificarem todas as soluções possíveis do problema. Duarte verbaliza a solução que falta encontrar e que é diferente da que registou na sua folha de tarefa:

Isabel – E uma outra hipótese para além das já encontradas?

Duarte – Já sei. Pode ser só com uma moeda de 50 cêntimos.

Isabel – Então diz lá que eu escrevo no quadro.

Duarte – Pode ser 50 mais 10, mais 10, mais 10, mais 10, mais 10, ...

Isabel – (interrompe) E quantas vezes o 10?

Duarte – (pensativo) Quinze.

Duarte identifica uma outra hipótese de solução a partir do questionamento de Isabel. O aluno explicita um modo de raciocinar de tipo aditivo, diferente da solução que havia registado na sua folha de tarefa. Isabel interrompe-o, no sentido de o fazer evoluir para um procedimento multiplicativo. Esta discussão permite, não só que os alunos compreendam outras hipóteses de solução, em que não tinham pensado, mas também os incentiva a pensar em termos multiplicativos. À semelhança de tarefas anteriores, as respetivas expressões são escritas no quadro, contribuindo, assim, para o aperfeiçoamento dos registos escritos dos alunos associados a números na representação decimal.

Na tarefa seguinte, o número de alunos que utiliza procedimentos aditivos mantém-se, continuando a ser dois pares. Estes pares persistem no seu uso, uma vez que são os mesmos alunos que, na tarefa anterior, também recorrem a eles. Todos os outros usam procedimentos multiplicativos, com exceção de também dois pares, os mesmos que anteriormente, não resolvem a tarefa ou o fazem de modo incorreto. Mais uma vez e à semelhança da anterior, todos os alunos, exceto um par, identificam apenas uma hipótese de resposta. Alguns deles, num total de seis alunos, tal como nas tarefas anteriores, calculam e representam a solução em cêntimos, não usando números na representação decimal.

Na discussão final os alunos são desafiados a identificar as várias maneiras de obter três euros com moedas de 20 e 50 cêntimos e são registadas no quadro as várias hipóteses, usando números na representação decimal e procedimentos multiplicativos. João explicita como pensou para ter três euros:

João – Pode ser 50 mais 50 mais 50 mais 50 e mais 20 mais 20 mais 20 mais 20 e mais 20 (observando a sua folha de registo).

Isabel – (escreve a expressão aditiva de João) Vamos contar agora, João. Quantas vezes 50?

João – Quatro vezes.

Isabel – E quantas vezes 20?

João – Cinco vezes.

Isabel – Então são quatro vezes cinquenta mais cinco vezes vinte (escreve a expressão).

Gustavo – Já está lá essa!

João – Pois é, já está aí esta solução.

Gustavo – Então porque é que foste fazer outra vez?

Isabel – Porque o João tem alguma dificuldade em transpor da adição para a multiplicação. E assim pode ser que perceba melhor.

Gustavo – E é muito mais fácil de fazer com multiplicações.

João verbaliza um raciocínio aditivo, que corresponde ao registo escrito realizado em conjunto com Tiago. As questões colocadas por Isabel têm como objetivo fazê-lo compreender a relação entre aquele e o correspondente procedimento multiplicativo, de modo a fazê-lo pensar em termos de multiplicação. Gustavo, depois de perceber a intenção do diálogo entre João e Isabel, realça, ele próprio, a facilidade de calcular através da multiplicação.

Finalmente, no último problema, constituído por três questões onde, em cada uma só está em jogo um único tipo de moedas para perfazer um total de quatro euros, os alunos que o resolvem optam todos por procedimentos multiplicativos, embora diferentes. Contudo, há também um grande conjunto de alunos que não consegue resolver as três questões no tempo estipulado pela professora ou que o faz incorretamente.

Os procedimentos multiplicativos utilizados organizam-se, maioritariamente, em dois grupos, os que recorrem à decomposição decimal porque pensam na quantia quatro euros como $1\text{€}+1\text{€}+1\text{€}+1\text{€}$ ou $2\text{€}+2\text{€}$ e os que pensam em quatro euros como sendo o dobro de dois euros e calculam a partir daí. Ainda há alunos que, apesar de recorrerem a procedimentos multiplicativos, o fazem calculando em cêntimos e não em euros.

Joana e Patrícia são um dos pares que se apoia no seu conhecimento sobre o número de moedas necessário para perfazer euros.

$$5 \times 0,20 + 5 \times 0,20 + 5 \times 0,20 + 5 \times 0,20 = 4 \text{€}$$

Figura 6.73 – Resolução de Joana e Patrícia de parte da subtarefa 6 – tarefa 17

Estas alunas usam um procedimento multiplicativo de decomposição, adicionando quatro produtos parciais iguais, todos correspondentes ao valor de um euro. Usam os números na sua representação decimal.

Na discussão coletiva, Joana apresenta o modo como pensaram.

Joana – Fizemos cinco vezes 20 cêntimos, mais cinco vezes 20, mais cinco vezes 20 e mais cinco vezes 20.

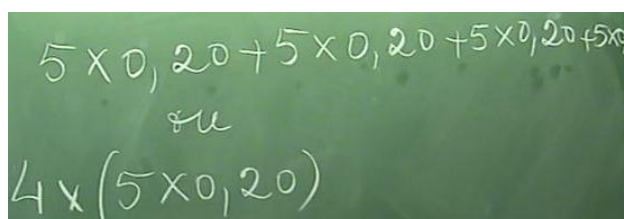
Isabel – (escreve no quadro) É verdade, está certo como pensaram, mas não podíamos fazer de outra maneira mais rápida?

Eva – Podíamos fazer quatro vezes cinco vezes 20.

Isabel – Exatamente.

Ana Rita – Essa é a maneira como nós fizemos.

Joana explica a sua maneira de raciocinar e é questionada no sentido de encontrar uma outra forma de resolução, correta mas mais rápida. Deste modo os alunos, a partir dos seus próprios procedimentos, são levados a progredir nos seus raciocínios. Eva, na sua afirmação, parece fazer a passagem da adição de produtos parciais iguais para um procedimento multiplicativo. Perante a expressão escrita no quadro, que traduz o modo de pensar de Eva, uma outra colega, Ana Rita reconhece o procedimento que usou.



$$5 \times 0,20 + 5 \times 0,20 + 5 \times 0,20 + 5 \times 0,20$$

4€

$$4 \times (5 \times 0,20)$$

Figura 6.74 – Aspeto do quadro depois da discussão sobre a resolução de Joana e Patrícia

O quadro apresenta duas expressões equivalentes que traduzem, da uma para a outra, alguma progressão em termos dos procedimentos multiplicativos e das propriedades da multiplicação. De facto, o realçar da repetição do produto $5 \times 0,20$ permite fazer a passagem para a expressão seguinte, onde o uso de parêntesis evidencia, perante os alunos, o produto que se repete na expressão anterior. Para além de poder

facilitar a evolução de Joana e Patrícia no uso de procedimentos multiplicativos mais eficazes, o registo da primeira expressão no quadro permite que Eva consiga transformar o primeiro modo de pensar no segundo e também que, outra aluna, Ana Rita, reconheça neste o procedimento que tinha usado.

Ana Rita e Miguel usam, no entanto, o seguinte procedimento na resolução do mesmo problema.

$$(20 \times 5) \times 4 = 4 \text{ €}$$

$$1 \text{ €} \times 4 = 4 \text{ €}$$

Figura 6.75 – Resolução de Ana Rita e Miguel de parte da subtarefa 6 – tarefa 17

Estes alunos, que calculam em cêntimos e não em euros, pensam no número de moedas de 20 cêntimos que perfazem um euro e multiplicam-no por quatro, considerando que se trata de quatro euros. Apesar das diferenças evidentes em termos do registo - o cálculo com números naturais, a troca de fatores e o factor quatro à direita, Ana Rita reconhece o seu modo de raciocinar na expressão verbalizada por Eva e registada por Isabel.

Há também alunos que partem do número de moedas de 20 cêntimos necessário para ter dois euros e fazem raciocínios semelhantes aos anteriores - adicionam os dois produtos parciais iguais ou efetuam o dobro. Neste último caso, muitos utilizam adequadamente o parêntesis para realçar o que duplica.

Nas questões seguintes, considerando um total de quatro euros mas com moedas de dez ou de cinco cêntimos, a maior parte dos alunos continua a usar procedimentos multiplicativos semelhantes aos descritos.

Na discussão final, no que respeita ao cálculo com moedas de dez cêntimos, Gustavo explicita como pensou de maneira diferente, relativamente aos procedimentos através de $1+1+1+1$ euros ou $2+2$ euros.

Gustavo – Eu fiz 40 vezes 10 cêntimos, que é igual a 4 euros.

Isabel – E como chegaste a essa conclusão?

Gustavo – Porque sei que 20 vezes 10 cêntimos é dois euros e quatro euros é o dobro. Então fiz logo 40 vezes 10 cêntimos.

O raciocínio de Gustavo baseia-se na relação de dobro que estabelece entre dois e quatro euros e que transpõe para o número de moedas cujo valor total é igual a quatro euros. Esta explicação ajuda também a fundamentar a expressão que regista na sua folha da tarefa.



$$40 \times 0,10 = 4€ \quad \text{A Joana tem 40 moedas de 0,10€}.$$

Figura 6.76 – Resolução de Gustavo de parte da sub tarefa 6 – tarefa 17

A propósito do número de moedas de cinco cêntimos necessário para ter um total de quatro euros, alguns alunos clarificam os seus modos de pensar, durante a discussão coletiva.

Raquel é uma das alunas que verbaliza o modo como pensou ao resolver a tarefa com Enzo.

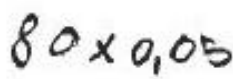
Isabel – Com quantas moedas de cinco cêntimos podemos obter quatro euros?

Raquel – Nós fizemos 80 vezes cinco cêntimos, são 80 moedas.

Isabel – Porquê?

Raquel – Porque são 40 moedas para fazer dois euros.

Esta aluna fundamenta a sua explicação num raciocínio que faz apelo ao uso de dobros, ainda que não o explicita tão claramente como Gustavo, a propósito da resolução anterior. Na sua folha de tarefa, Enzo e Raquel escrevem apenas a expressão:



$$80 \times 0,05$$

Figura 6.77 – Resolução de Enzo e Raquel de parte da sub tarefa 6 - tarefa 17

Os alunos não igualam a expressão a quatro euros mas está subentendido, na sua explicação verbal e na resposta correta que apresentam, que compreendem o seu significado.

Guilherme é outro dos alunos que apresenta aos colegas o modo como ele e Eva pensaram para resolver o mesmo problema.

Isabel – Quem pensou de outra maneira?

Guilherme – Nós fizemos 50 vezes cinco mais 20 vezes cinco mais 10 vezes cinco.

Isabel – Vamos verificar. 50 vezes cinco?

Eva – 50 vezes cinco são dois euros e meio, 20 vezes cinco é um euro e 10 vezes cinco são 50 centimos.

Isabel – É verdade. Vocês fizeram 50 mais 20 mais 10, ou seja 80 moedas, que corresponde ao que disse a Raquel.

Guilherme – Então pode fazer-se logo 80 vezes cinco centimos.

Este aluno explicita um procedimento de decomposição, adicionando três produtos parciais. A sua verbalização parece evidenciar que Eva e Guilherme começam com o produto 50×5 , que provavelmente, consideram próximo de quatro euros e adicionam sucessivamente outros, até perfazerem um total de quatro euros. A sua explicação está de acordo com o registo que efetuam na sua folha de tarefa.

$$\begin{array}{l} 50 \times 5 = 2,50 \text{ €} \\ 20 \times 5 + 10 \times 5 = 1,50 \text{ €} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 50 \times 5 = 2,50 \text{ €} \\ 20 \times 5 + 10 \times 5 = 1,50 \text{ €} \end{array}} \right\} 4 \text{ €}$$

Figura 6.78 – Resolução de Eva e Guilherme de parte da subtarefa 6 – tarefa 17

Eva e Guilherme calculam os produtos usando números naturais como fatores, que correspondem a centimos, mas apresentam os resultados parciais, que adicionam, na forma de número decimal, ou seja, em euros.

Há ainda um par, David e Francisco que, neste último problema, refere explicitamente que recorre a uma das relações da tabela preenchida anteriormente.

P: Se tiverdes moedas de 5 centimos fogia $80 \times 0,05 = 4 \text{ €}$
 Nome: *David Pereira e Francisco Silveira* Data: *201-03-12*
Fui ver a tabela e tirei dela $40 \times 0,05 \times 2$ que me $80 \times 0,05 = 4 \text{ €}$

Figura 6.79 – Resolução de David e Francisco de parte da subtarefa 6 – tarefa 17

Estes alunos usam um procedimento de dobro e calculam, a partir da tabela, o número de moedas de cinco centimos necessários para ter um total de quatro euros. Na sua resolução, apesar de registarem o fator dois à direita da expressão, usam implicitamente as propriedades comutativa e associativa da multiplicação para calcular.

Em suma, os procedimentos usados pelos alunos nas tarefas 16 e 17, cujo contexto é o dinheiro, evoluem lentamente de procedimentos aditivos para procedimentos multiplicativos, quando comparados com os usados em tarefas anteriores. Apesar de esta progressão poder ser identificada em alguns dos alunos, como é o caso de Gustavo, há também os que persistem no uso de procedimentos aditivos e outros ainda que não conseguem resolver tarefas com números decimais. Alguns nem sequer o tentam fazer, deixando o espaço destinado à resolução da tarefa em branco. Este facto parece estar relacionado ao pouco conhecimento que os alunos têm, ainda, sobre os números na representação decimal e com as dificuldades de cálculo associado. A acrescentar a estas dificuldades há também as associadas às diferentes representações de um mesmo número, ao seu reconhecimento e à passagem de umas para outras.

A prevalência do uso de procedimentos aditivos parece dever-se, sobretudo, ao conhecimento, ainda recente, sobre os números na representação decimal e as suas características. No caso dos primeiros problemas, o facto de se ter de lidar com dois tipos de moedas ao mesmo tempo também parece ter contribuído para que os alunos utilizem procedimentos aditivos, nos quais se sentem mais confiantes, apesar de, mesmo assim só terem identificado uma das várias soluções possíveis. A formulação do enunciado de alguns problemas parece, também, não ter incentivado a procura das várias soluções possíveis. A acrescentar a estes aspetos há, ainda, a ligação que é preciso fazer entre as diferentes representações dos números, o que complexificou os problemas.

Nos procedimentos usados, sobretudo nos de tipo multiplicativo, muitos dos alunos utilizam o valor do dinheiro em cêntimos, efetuando os cálculos com os números naturais correspondentes e não com os números na representação decimal. Este aspeto parece estar associado por um lado, ao contexto particular do dinheiro, sobretudo quando associado a moedas com um valor inferior a um euro que têm inscrito o seu valor em cêntimos. Além disso, o enunciado escrito dos problemas apresenta sempre o valor das moedas em cêntimos e não em euros. Por outro lado, também o conhecimento, ainda recente, que os alunos têm sobre os números na representação decimal e o cálculo associado parece contribuir para que privilegiem o cálculo com números naturais.

O uso de procedimentos multiplicativos, nos últimos problemas, associados aos dobros parece ter sido suportado por algumas das relações numéricas estabelecidas a partir de uma tabela, na qual foram registados modos de obter um total de um e de dois euros, a partir de moedas de cinquenta, vinte, dez, cinco e dois cêntimos.

Os procedimentos multiplicativos que se baseiam no estabelecimento de relações de dobro/metade, implícitos nos contextos dos problemas da tarefa 17, não são utilizados pelos alunos. Uma explicação para este facto pode estar associada à representação decimal do valor das moedas, pois os alunos que resolvem corretamente estes problemas calculam com números na representação decimal. Assim, talvez não tenham conseguido identificar, nessa representação, a relação de metade entre 0,10 e 0,20 e entre 0,05 e 0,10.

A evolução de procedimentos aditivos para multiplicativos bem como a identificação de procedimentos diferentes dos que realizam nos seus registos escritos parece ser facilitada pelas discussões coletivas, nas quais os alunos explicitam o modo como raciocinam. A par das discussões coletivas, o registo sistemático no quadro dos raciocínios verbalizados pelos alunos, recorrendo a expressões matemáticas corretas que incluem números na representação decimal parece, igualmente, auxiliar não só a sua progressão em termos dos procedimentos que usam mas, também, do modo como os representam nas suas folhas de tarefa e como interligam as várias representações.

6.2.2.3. Síntese

A utilização de procedimentos multiplicativos nas tarefas com números racionais na sua representação decimal revela-se difícil inicialmente, o que parece refletir o ainda pouco conhecimento dos alunos sobre estes “novos” números. A sua introdução realiza-se quase a par da resolução das tarefas de multiplicação e de divisão. Assim, apesar de os números na forma decimal emergirem de contextos que lhes dão sentido, alguns alunos evidenciam ter, ainda, uma compreensão pouco profunda sobre eles, o que parece constituir um obstáculo para o cálculo multiplicativo.

Muitos dos alunos recorrem a procedimentos menos potentes, quando comparados com os já utilizados nos problemas com números naturais, voltando a

procedimentos aditivos ou de contagem. Ainda assim, os contextos dos problemas propostos no âmbito da multiplicação relacionados com o tema Medida, em particular, com as medidas de capacidade e o sistema monetário, são os mesmos contextos a partir dos quais os alunos dão sentido aos números na representação decimal.

O retorno a procedimentos menos potentes manifestado por alguns alunos em determinadas tarefas parece, também, estar associado aos contextos propostos. Assim, parece manifestar-se em contextos onde é preciso lidar com diferentes números na forma decimal ou onde a divisão está subjacente.

A não resolução ou a resolução incorreta de certas tarefas por parte de alguns alunos parece, também, estar relacionada por um lado, com os contextos de divisão propostos e, por outro, com as dificuldades associadas à representação, à conexão entre representações e ao cálculo com números na forma decimal. Nestas situações, alguns dos alunos parecem desconhecer qualquer procedimento de resolução do problema em causa.

A evolução de alguns procedimentos multiplicativos na resolução de tarefas parece realizar-se mais lentamente quando é preciso calcular com números racionais na representação decimal do que quando se calcula com números naturais. Os alunos parecem não estabelecer, com facilidade e frequentemente, paralelismos entre relações que já conhecem do trabalho anterior com outras que surgem no trabalho com números na forma decimal. Ainda assim, alguns alunos reconhecem cada vez mais relações baseadas em propriedades da multiplicação e associam-nas, sobretudo, a procedimentos de decomposição e do uso de dobros. Tal como já se verificava no cálculo multiplicativo com números naturais, os procedimentos baseados em relações de dobro/metade são os mais difíceis de identificar e de utilizar pelos alunos na resolução de um problema, mesmo quando o próprio contexto é baseado numa relação desse tipo e o parece sugerir.

Os procedimentos baseados em propriedades da multiplicação são usados com relativa facilidade nas cadeias numéricas, quando comparados com os utilizados em contexto de problema.

Os registos iniciais dos alunos relativos a números na representação decimal são muito informais e pouco corretos do ponto de vista matemático coexistindo, por

exemplo, na mesma expressão, números representados em euros e em cêntimos. O registo sistemático no quadro dos raciocínios verbalizados pelos alunos parece auxiliá-los a evoluir nos seus registos escritos e, especificamente, na representação correta de números na forma decimal.

A progressão dos alunos no uso de procedimentos com números na representação decimal baseados nas propriedades da multiplicação, ainda que demorada, parece, também, e tal como se verificou com os números naturais, estar associada à cultura de sala de aula que vai sendo construída, onde coexistem momentos de trabalho individual ou a pares com momentos de discussão coletiva. Esta é orquestrada por Isabel, que centra as discussões nas relações e nas propriedades da multiplicação e estabelece pontes com o trabalho realizado anteriormente, tanto ao nível dos problemas como das cadeias numéricas. A explicitação e justificação dos procedimentos dos alunos durante as discussões com toda a turma e a sua comparação com os de outros colegas parecem continuar a desempenhar um papel fundamental na sua evolução para procedimentos mais potentes, baseados nas propriedades da multiplicação.

6.2.3. Divisão com números naturais

Os alunos da turma do 3.º ano resolvem problemas cujo contexto é de divisão desde o 1.º ano de escolaridade. De acordo com o Programa de Matemática do 1.º ciclo, em vigor na altura da recolha de dados deste estudo, a operação divisão e a resolução de problemas associados a esta operação são trabalhadas sistematicamente no 3.º ano.

No âmbito da experiência de ensino, os alunos têm vindo a realizar, esporadicamente, problemas de divisão mas, no final do 2.º período escolar, são propostas aos alunos, regularmente, tarefas cujo contexto é de divisão, nos seus sentidos de partilha e medida. Este tipo de trabalho, tal como referido no capítulo sobre a experiência de ensino, tem como finalidade explorar a operação divisão e os problemas a ela associados, tirando partido da sua relação com a multiplicação.

Na altura em que os problemas com contexto de divisão são colocados aos alunos estes manifestam já um conhecimento relativamente profundo sobre a multiplicação de números naturais e são capazes de realizar cálculos com facilidade, relacionando os números entre si e usando as propriedades da multiplicação.

As primeiras tarefas, tarefa 19 – Colecionar cartas e tarefa 20 – Máquinas de bebidas têm como propósito explorar contextos, tanto de medida como de partilha, potencializando o conhecimento dos alunos sobre a multiplicação. Os trabalhos de sala de aula relacionados com a resolução da tarefa 20 incluem um congresso matemático. As tarefas seguintes, tarefa 25 – Outra máquina de bebidas e tarefa 26 – Miniaturas de animais, perseguem os mesmos objetivos que as mencionadas anteriormente e promovem o uso do modelo retangular para calcular, agora no âmbito da divisão. Tal como acontece com a tarefa 20, também os trabalhos de sala de aula relacionados com a resolução da tarefa 26 incluem um congresso matemático.

6.2.3.1. As primeiras tarefas

A tarefa 19 – Colecionar cartas inclui dois problemas de divisão, o primeiro num contexto de partilha e o segundo de medida. Os números envolvidos são números naturais e múltiplos de seis e de oito, com os quais os alunos estão habituados a calcular no âmbito da multiplicação.

A resolução do primeiro problema não constitui dificuldade para a maior parte dos alunos, que o resolvem através do conhecimento que têm sobre a tabuada “do seis”. Dois dos alunos da turma registam um procedimento aditivo e, somente um, não consegue resolver o problema corretamente, aparentemente, por não o compreender.

Os registos dos alunos que usam um procedimento aditivo evidenciam raciocínios substancialmente diferentes um do outro. Enquanto um deles parece ter utilizado esse procedimento para encontrar a solução, uma vez que adiciona repetidamente o número de amigos (seis), até esgotar o número total de cartas, o outro parece tê-lo usado apenas para verificação, adicionando repetidamente oito, o número de cartas com que fica cada amigo.

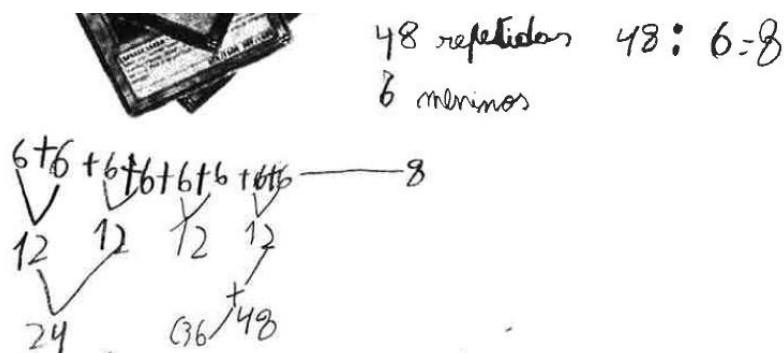


Figura 6.80 – Resolução de Diogo da subtarefa 1 – tarefa 19

Diogo adiciona repetidamente o número seis, calculando o valor das parcelas duas a duas, até perfazer um total de 48 cartas. Depois conta o número de parcelas e reconhece que oito é o número de cartas com que fica cada um dos amigos. É de notar que, apesar de utilizar a adição na resolução do problema, Diogo representa a situação através de uma expressão onde inclui a divisão, parecendo associar o problema a esta operação.

David é o outro aluno que recorre a um procedimento aditivo, usando o número oito como parcela repetida.

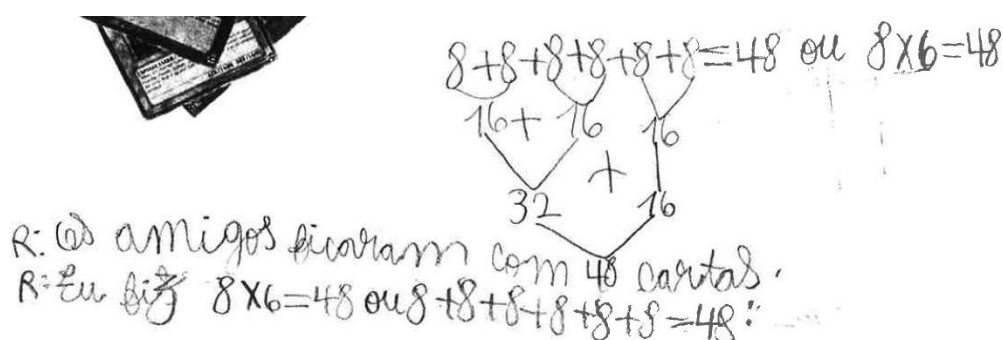


Figura 6.81 – Resolução de David da subtarefa 1 – tarefa 19

Uma análise detalhada da sua resolução evidencia que este aluno parece usar a adição para verificar ou fundamentar o número de cartas com que fica cada amigo, uma vez que adiciona o número oito e não o número seis, como Diogo. De facto, oito é já a solução do problema e, provavelmente, David calcula-a através de 8×6 , que deve ter já automatizado. No entanto, como no enunciado é pedido que os alunos expliquem como pensaram, este parece utilizar a adição para o fazer. Acrescenta, também, a correspondente expressão multiplicativa que sabe ser equivalente à anterior. Ainda assim,

a resposta que dá no final da resolução do problema não está totalmente correta, pois refere o número total de cartas e não o número de cartas com que fica cada amigo.

A maior parte dos alunos que utiliza procedimentos de tipo multiplicativo, ou não refere como pensou ou justifica o seu modo de pensar através do conhecimento da tabuada do número seis. Francisco, que nos seus registos escritos escreve apenas a expressão $8 \times 6 = 48$ e o nome de cada amigo com o número oito à frente, verbaliza o modo como pensou, na discussão final.

Francisco – Eu sei que é 48 cartas a dividir pelos amigos e pensei primeiro em 10 cartas para cada um. Depois reparei que era demais pois só tinha 48. Depois pensei que tinham seis cartas, mas não chegava e depois tentei para o oito e vi que era, porque oito vezes seis são 48.

Isabel – Foste fazendo tentativas sucessivas com multiplicações até perceberes qual o número que multiplicado por seis era igual a 48.

Francisco – E depois somei as cartas. As oito cartas do Tiago, do Guilherme, do Enzo, do Miguel, do Hugo e do David e vi que davam 48. Por isso, quando somei e multipliquei as cartas de cada um deu-me sempre.

Francisco recorre à multiplicação para determinar o número de cartas com que fica cada um, fazendo várias tentativas até encontrar o número oito, provavelmente, porque não tem, ainda, a tabuada totalmente automatizada. Para confirmar se oito é o número correto, adiciona mentalmente o número de cartas de cada amigo, recorrendo a um procedimento menos formal mas evidenciando a sua compreensão sobre a relação entre a multiplicação e a adição.

Uma análise dos registos escritos associados a este problema permite constatar que há muitos alunos, tal como Diogo (Figura 6.80), que usam já o símbolo da operação divisão de modo adequado, dando indicação que identificam a operação em causa e a associam ao problema a resolver. Provavelmente relacionam o símbolo de divisão com situações em que, na linguagem corrente, se utilizam termos como dividir, partilhar ou distribuir objetos, neste caso de cartas.

Para além do uso do símbolo da divisão para representar a situação em causa, também há muitos alunos que, nesta tarefa, parecem relacionar a divisão com a multiplicação pois escrevem expressões incluindo a divisão e apresentam as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos.

No segundo problema de divisão, associado a um contexto de medida, alguns dos alunos que tinham resolvido o anterior através de um procedimento multiplicativo e que tinham representado o problema através de uma expressão que inclui a divisão, privilegiam, na sua maioria, procedimentos aditivos ou subtrativos.

Mariana é uma das alunas que resolve este segundo problema recorrendo a um procedimento subtrativo, apesar de, no problema anterior, ter usado a multiplicação e registado uma expressão onde inclui o símbolo de divisão.

Handwritten work of Mariana showing a sequence of subtractions from 96 down to 24, with a note "exercício de ocupar 12 folhas".

$$\begin{array}{l}
 96 - 8 = 88 \\
 88 - 8 = 80 \\
 80 - 8 = 72 \\
 72 - 8 = 64 \\
 64 - 8 = 56 \\
 56 - 8 = 48 \\
 48 - 8 = 40 \\
 40 - 8 = 32 \\
 32 - 8 = 24 \\
 24 - 8 = 16
 \end{array}$$

exercício de ocupar 12 folhas.

Figura 6.82 – Resolução de Mariana da sub tarefa 2 – tarefa 19

Esta aluna parte de 96 e subtrai sucessivamente oito, o número de cartas que cabe em cada folha da caderneta, até o resultado ser zero. Mariana utiliza este procedimento muito próximo da ação de colocar cartas numa caderneta e associa o número de vezes que subtrai ao número de folhas necessárias da caderneta, apesar de se ter enganado numas das subtrações.

Há outros alunos, tal como Gustavo, que recorrem a um procedimento semelhante ao de Mariana mas representam de forma incorreta o seu modo de pensar.

Handwritten work of Gustavo showing a sequence of subtractions from 96 down to 0, with a note "exercício de ocupar 12 folhas".

$$\begin{array}{l}
 96 - 8 = 88 - 8 = 80 - 8 = 72 - 8 = 64 - 8 = 56 - 8 = 48 - 8 = 40 - 8 = 32 - 8 = 24 - 8 = 16 - 8 = 8 - 8 = 0
 \end{array}$$

exercício de ocupar 12 folhas

Figura 6.83 – Resolução de Gustavo da sub tarefa 2 – tarefa 19

A resolução de Gustavo evidencia que raciocina de modo adequado, mas não o regista corretamente do ponto de vista matemático. Na discussão com toda a turma, quando Isabel solicita a explicitação das resoluções dos alunos, Joana refere o seu procedimento subtrativo, semelhante ao de Mariana (Figura 6.82) e Gustavo intervém.

Joana – Eu fiz 96 menos oito, são 82 e fiquei com uma folha da caderneta cheia. Depois fiz 82 menos oito e fiquei com 74, ... (Isabel escreve no quadro as subtrações sucessivas que Joana vai dizendo).

Gustavo – Oh professora, eu também fiz assim mas não escrevi assim!

Isabel – Então como escreveste?

Gustavo – Fiz tudo a seguir. 96 menos oito igual a 82 menos oito igual a 72 menos oito, ...

Gustavo, ao observar os cálculos no quadro que traduzem o raciocínio de Joana, identifica um modo de pensar idêntico ao seu mas nota, também, que o registo é diferente (Figura 6.83). Isabel aproveita para esclarecer e fundamentar a razão de tais registos serem incorretos.

Com o propósito de realçar procedimentos de tipo multiplicativo, Isabel suscita as intervenções dos alunos na discussão final.

Isabel – Todas estas maneiras de resolver (aponta para os procedimentos aditivos e subtrativos escritos no quadro) estão corretas mas quanto a mim têm um problema. Sabem qual é?

Duarte – É que se podia resolver por “vezes”.

Isabel – É verdade, mas qual é o problema destas resoluções?

Duarte – É que são muitos cálculos e eles podem-se enganar.

Isabel – Exatamente. Há muitas hipóteses de nos enganarmos e demoramos muito tempo. E como poderíamos fazer de uma outra forma?

O diálogo anterior destaca a perceção dos alunos, tornada explícita por Duarte, sobre o risco de haver enganos quando se recorre a adições ou a subtrações sucessivas, considerando a grande quantidade de cálculos a efetuar, para além de serem procedimentos morosos.

O contraponto entre procedimentos multiplicativos e os anteriores é suscitado por Isabel que solicita a apresentação de outras formas de pensar. Luís e Duarte tomam a palavra.

Luís – Primeiro olhei para as cartas da figura e eram oito. Pensei que tinha de ir à tabuada dos oito. E só está lá 10×8 que dá 80. Por isso juntei mais oito e dava 88 e mais outra folha de oito e dava 96.

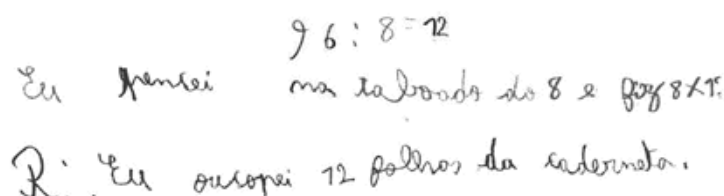
Isabel – Então precisavas de quantas folhas?

Luís – De 12.

Isabel – Então são 12×8 .

Duarte – E eu fiz 96 a dividir por 8. E pensei também na tabuada dos oito e fiz oito vezes dez e oito vezes dois.

Luís verbaliza o modo como pensou, através da tabuada do oito e, a partir de 80, adiciona sucessivamente oito até perfazer 96. Isabel confirma que o raciocínio de Luís corresponde ao produto 12×8 . Duarte vai mais longe que os colegas, pois nomeia a operação divisão, não referida ainda, para resolver este problema, fazendo a ligação com a multiplicação. A sua explicação oral está de acordo com os seus registos escritos na folha da tarefa.



Handwritten text from Duarte's work:

$$96 : 8 = 12$$

Eu pensei na tabuada do 8 e fiz 8×12 .

R.: Eu usei 12 folhas da caderneta.

Figura 6.84 – Resolução de Duarte da subtarefa 2 – tarefa 19

Duarte é o único aluno da turma que, na resolução escrita desta tarefa, utiliza uma expressão onde recorre à operação divisão e usa um procedimento multiplicativo associado. Os outros colegas que identificam o problema como de divisão, ou a representam apenas ou a associam à adição ou à subtração.

Comparando com as resoluções do problema anterior, onde bastantes alunos identificam a operação divisão e a relacionam com procedimentos multiplicativos, os alunos parecem retroceder nos seus procedimentos. Provavelmente, o facto de o número 96 não ser do domínio da tabuada do 8 (no seu entendimento restrito até 10×8) e de o problema em causa ser de divisão no seu sentido de medida, podem contribuir para que muitos alunos optem por procedimentos aditivos ou subtrativos. Além disso, mesmo os que optam por procedimentos de tipo multiplicativo, não identificam o problema como sendo de divisão, ao contrário do que aconteceu anteriormente.

Com o objetivo de identificar a divisão e de a relacionar com a multiplicação os alunos resolvem outros problemas de divisão em conjunto, lançados verbalmente por Isabel. De modo a fazer emergir procedimentos multiplicativos e a não incentivar procedimentos aditivos ou subtrativos são utilizados números tais como 256 e 4, com grande diferença entre eles. Deste modo, o eventual recurso a procedimentos aditivos ou subtrativos revela-se um processo muito moroso e suscetível ao erro. Assim, são utilizados procedimentos multiplicativos onde os alunos recorrem sucessivamente a múltiplos de dez de maneira que, como no exemplo apresentado, a soma dos produtos parciais perfaça 256 e aos quais é associado o registo da expressão $256 \div 4$.

A tarefa 20 contém dois problemas com contextos semelhantes e os mesmos números envolvidos, 156 e seis, mas as situações apresentadas apelam à divisão de modo diferente, uma no seu sentido de partilha e outra no sentido de medida. São propostos os dois problemas em simultâneo e, apesar de estarem numerados, é dito aos alunos que podem começar por ler os dois e resolver primeiro o que quiserem.

A maior parte dos grupos (oito em onze), depois de ler os dois problemas, opta por resolver em primeiro lugar o que está numerado com o número um, que inclui uma situação de divisão por medida. Depois de resolvido um dos problemas, muitos dos alunos iniciam a resolução do segundo e rapidamente reconhecem que os números nele incluídos são os mesmos, apesar da situação proposta ser diferente. A partir daí e apesar de estarem em grupo, esta constatação espalha-se pela sala, não sendo possível contabilizar quantos alunos a reconhecem por si próprios e quantos o fazem por ouvir os colegas identificar os números iguais nos dois problemas.

Nos registos realizados verifica-se que, na maior parte dos casos, os alunos registam a expressão $156 \div 6$ duas vezes, uma em cada problema, e facilmente relacionam os dois problemas, escrevendo apenas no segundo a expressão $156 \div 6 = 26$, uma vez que o valor do quociente foi calculado no problema anterior. Assim, nos pósteres que elaboram para o congresso matemático, é visível em todos eles a resolução de um dos problemas e apenas um registo da solução do outro, evidenciando a associação dos dois resultados, nuns casos mais explícita, noutros menos.

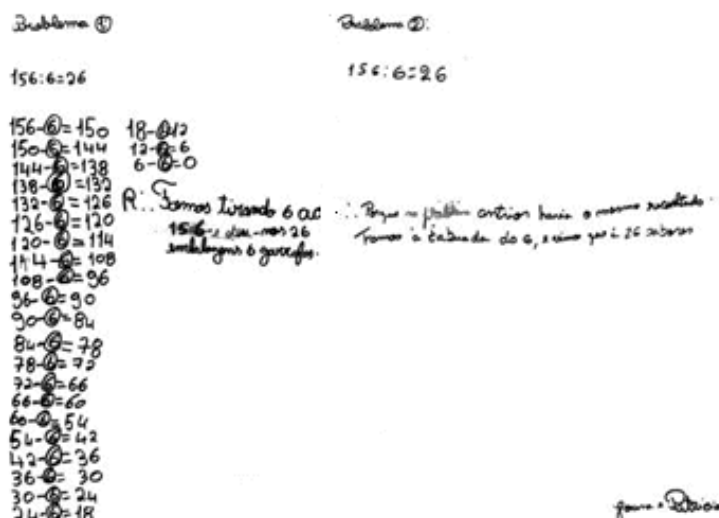


Figura 6.85 – Póster de Joana e Patrícia da tarefa 20

Joana e Patrícia usam um procedimento subtrativo no problema 1 da tarefa 20, que resolvem em primeiro lugar e, no outro problema, registam apenas a divisão com indicação do quociente. Na sua justificação escrevem: “Porque no problema anterior havia o mesmo resultado. Fomos à tabuada do 6 e vimos que é 26 sabores”. Quando interpeladas no congresso matemático as alunas explicam:

Joana – Como eram os mesmos números pensámos que eram 26 garrafas de cada sabor mas fomos verificar com a tabuada do 6.

Apesar de terem usado um procedimento de tipo subtrativo no problema anterior e terem identificado em ambos a divisão, as alunas recorrem à multiplicação para confirmar se 26 é de facto o valor a que corresponde o quociente $156 \div 6$. A sua maneira de pensar indica que reconhecem a relação entre estas duas operações, apesar de não a terem conseguido utilizar no cálculo inicial. É de notar que as alunas escrevem “26 sabores” em vez de “26 garrafas de cada sabor”, aspeto que é apontado por outra colega durante a fase de observação dos pósteres de toda a turma, mas que parece não ter interferido na compreensão e resolução do problema.

Nesta altura, os alunos usam com relativa facilidade procedimentos multiplicativos quando se trata de tarefas que envolvem diretamente a operação multiplicação. Ainda assim, apesar da discussão à volta da resolução da tarefa anterior

(tarefa 19), onde é destacada a utilização de procedimentos de tipo multiplicativo, as dificuldades no seu uso parecem persistir quando se trata de problemas de divisão. Com efeito, na tarefa Máquinas de bebidas, mais de metade dos alunos continua a optar por procedimentos aparentemente mais “seguros” e nos quais se sentem confiantes, apesar de morosos, ou seja, procedimentos relacionados com a adição ou a subtração. No entanto, começam a identificar, mais frequentemente, os problemas como sendo de divisão, uma vez que, neste caso quase todos registam por escrito a expressão $156 \div 6$.

Dos três grupos que usam a adição no primeiro problema há um par que adiciona sucessivamente seis, correspondente a uma embalagem de garrafas de água, até perfazerem 156 garrafas de água e os outros adicionam sucessivamente as parcelas duas as duas, tal como nos problemas anteriores.

Guilherme, Gustavo e Leandra optam, inicialmente, por um procedimento de adição agrupando as parcelas duas a duas mas, ainda na mesma resolução, parecem evoluir para outro, de modo a encontrar mais rapidamente a solução.

Handwritten student work showing a calculation for 156 divided by 6. The student starts with a circled '2' and a series of additions of 6, grouped into pairs of 12, then 24, then 48, and finally 96. The final result is 156, and the student writes 'R: 26 garrafas de água'.

Figura 6.86 – Resolução de Guilherme, Gustavo e Leandra da subtarefa 2 – tarefa 20

Estes alunos começam por representar uma adição de parcelas iguais a 6 que, por sua vez, adicionam duas a duas e assim sucessivamente, até ao número 96. Nessa altura registam o número 16 à esquerda do 96, para simbolizar 16 garrafas de cada sabor e dão “um salto” para um procedimento mais potente e menos moroso, adicionando de uma vez

só o número 60, que corresponde a dez garrafas de cada sabor. Depois, fazem a correspondência entre $96+60$ e $16+10$, chegando à solução do problema, ou seja, 26 garrafas.

No decurso do congresso matemático, a última parte da resolução de Guilherme, Gustavo e Leandra suscita alguma discussão entre os colegas e alguns interpelam-nos a pedir explicações, pois não a compreendem.

David – Não percebo que risco é este aqui e o que quer dizer (apontando para o póster dos colegas).

Guilherme – Quer dizer que 60 são dez grupos de garrafas.

Eva – Eu não percebo porque é que puseram menos (–) aqui (entre 96 e 16 e entre 60 e 10).

Guilherme – Não é menos, é para dizer que 96 é o mesmo que 16 grupos de seis e 60 é o mesmo que 10 grupos de seis garrafas.

Gustavo – Isto quer dizer 10 vezes seis. O Guilherme acertou logo no 60 muito depressa e por isso pôs assim.

Guilherme – Porque nós sabemos que 60 são 10 grupos de seis e por isso pusemos logo 60, em vez de continuar a fazer seis mais seis.

Os elementos do grupo explicam que o traço que registam não é o sinal de subtração mas indica a correspondência entre 96 ou 60 (número total de garrafas) e 16 ou 10 (número de grupos de garrafas). De uma forma muito intuitiva e informal, estes alunos evoluem, na mesma resolução, de um procedimento aditivo para um procedimento que tem subjacente a ideia de multiplicação. Este progresso parece ter sido provocado pelo grande número de parcelas que a adicionar, ainda que agrupando-as duas a duas. A sua resolução, com uma grande quantidade de cálculos, suscita a interpelação de Duarte.

Duarte - E porque fizeram em árvore?

Gustavo – Porque achámos que era mais fácil pois foi como pensámos.

Guilherme – Nós sabemos tudo muito bem até ao 96. seis mais seis são 12, 12 mais 12 são 24, 24 mais 24 são 48 e 48 são 96 (diz rapidamente tudo de seguida). Sabemos muito bem somar até 96. E depois somámos 60 e chegámos muito depressa ao fim.

Isabel – Mas não acham que havia maneiras mais eficazes de resolver o problema?

Guilherme – Mas foi muito rápido assim, pois sabemos fazer tudo muito depressa. Porque sabemos que 12 é o dobro de seis, 24 é o dobro de 12, 48 é o dobro de 24 e 96 é o dobro de 48.

Interrogados diretamente sobre a razão para terem optado por um procedimento aditivo os alunos fundamentam a sua escolha na facilidade com que adicionam, de modo quase automático, com os números envolvidos até 96. Este facto parece estar relacionado com as características dos próprios números, múltiplos de seis e, por isso, pares, e com a frequência com que têm sido utilizados em cálculos anteriores. Mesmo depois da intervenção da professora Isabel e após terem sido apresentados outros modos de resolução estes alunos não reconhecem outras mais fáceis e mais rápidas do que a sua. Acrescentam, como reforço da sua justificação, que os números envolvidos nos cálculos estão todos relacionados entre si por uma relação de dobro.

Os alunos que recorrem a procedimentos multiplicativos na resolução da tarefa 20 fazem-no de diferentes modos. Ana Rita e Miguel são um dos pares que usa a multiplicação para resolver a tarefa, que começam pelo problema 2.

2. $156 : 6 = 26$

$6 \times 6 = 36$	$20 \times 6 = 120$	$26 \times 6 = 156$
$6 \times 7 = 42$	$21 \times 6 = 126$	$\rightarrow$ 20 garrafas de Cada Sabon?
$6 \times 8 = 48$	$22 \times 6 = 132$	
$6 \times 9 = 54$	$23 \times 6 = 138$	
$6 \times 10 = 60$	$24 \times 6 = 144$	
$6 \times 11 = 66$	$25 \times 6 = 150$	

Figura 6.87 – Resolução de Ana Rita e Miguel da sub tarefa 2 – tarefa 20

Estes alunos reconhecem o problema como sendo de divisão e, para calcular $156 \div 6$, efetuam uma procura sistemática do número que multiplicado por seis é igual a 156. Para isso iniciam os cálculos em 6×6 , cujo valor sabem automaticamente, e realizam todos os produtos até 6×11 , saltando depois para 20×6 até ao produto 26×6 . A sua resolução parece evidenciar que, após terem calculado 6×11 se apercebem que o múltiplo de seis pretendido ainda está muito “longe” e, por isso, recorrem ao conhecimento que têm sobre cálculo com múltiplos de dez, para mais rapidamente “chegarem” ao número 26.

Luís e Raquel também identificam a divisão e, para determinar o quociente pretendido, utilizam procedimentos multiplicativos no problema 1.

① $60 \times 2 = 120$ e $12 \times 3 = 36$
 $156 : 6 = 26$

60 | 10 88
 120 | 20 88
 6 x 6 = 36 88

R. É preciso 26 embalagens para obter 156 garrafas. Nós pensamos que 60 era 10 em embalagens e 120 era 20 embalagens e 6 x 6 era 36 por isso era 6 então juntamos 6 + 20 e deu-nos 26 embalagens.

Figura 6.88 – Resolução de Luís e Raquel da sub tarefa 1 – tarefa 20

Estes alunos fazem uma primeira tentativa (que corresponde a um registo incorreto do ponto de vista matemático) de compor o número 156, usando a multiplicação e iniciando o cálculo pelo número 60, um múltiplo de seis. Depois realizam um conjunto de cálculos que lhes permite encontrar produtos parciais cuja soma é igual a 156. Voltam a usar o 60, que reconhecem como sendo igual a 10 embalagens de seis garrafas, progridem para 120, que identificam como 20 embalagens e, finalmente, calculam 6×6 , perfazendo 26 embalagens de seis garrafas. A sua resolução suscita algumas questões da parte dos colegas, durante a fase de apresentação e discussão do congresso matemático.

Bernardo – Não percebo como é que o Luís e a Raquel descobriram e começaram logo com 60.

Luís – Pensámos assim porque é um número muito fácil!

Bernardo – Mas porquê?

Luís – Porque depois pensámos no 120.

Isabel – Luís e Raquel, o Bernardo quer saber como é que começaram logo por 60 e não por 50, por exemplo. O 50 também é um número fácil!

Luís – Mas aqui não é. O 60 é que é 10 vezes 6.

Isabel – Pois é, porque estamos com embalagens de 6 garrafas.

Guilherme – Eu já percebi, mas eles enganaram-se porque têm 60, 120 e 6 e dizem que é 26 e assim é 36.

Luís – Mas isso é como pensamos, depois do 60 passámos para o 120.

Os alunos que usam procedimentos menos potentes nos problemas de divisão revelam algumas dificuldades na compreensão dos modos de pensar dos colegas. Bernardo, que resolve a mesma tarefa usando um procedimento aditivo, não consegue

perceber o raciocínio dos colegas, uma vez que ele e o seu par foram adicionando sistematicamente seis. Luís e Raquel manifestam dificuldade na verbalização do seu modo de pensar e a professora Isabel intervém, tentando que eles clarifiquem a importância do número 60, por ser um múltiplo de 10 e de seis. Logo a seguir, Guilherme identifica um “engano”, suscitado pelo esquema realizado pelos colegas, que é esclarecido pelo seu autor.

Diogo e Maria Rita usam um procedimento multiplicativo um pouco diferente do dos colegas.

$$\begin{array}{r}
 6 \times 20 = 120 \quad 6 \times 23 = 138 \quad \textcircled{23} \\
 \begin{array}{r}
 20 \\
 \times 6 \\
 \hline
 120
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 23 \\
 \times 6 \\
 \hline
 138
 \end{array} \\
 6 \times 26 = 156 \\
 \begin{array}{r}
 26 \\
 \times 6 \\
 \hline
 156
 \end{array}
 \quad
 156 : 6 = 26
 \end{array}$$

Figura 6.89 – Resolução de Diogo e Maria Rita da subtarefa 1 – tarefa 20

Estes alunos iniciam a sua resolução pelo produto 6×20 , revelando que reconhecem ser este um produto que lhes permite, muito rapidamente, chegar ao número 156. Posteriormente, fazem duas tentativas, tentando 23×6 antes do produto correto 26×6 . Diogo e Maria Rita usam uma representação em coluna bastante próxima do algoritmo da multiplicação, senão já o próprio algoritmo, apesar de nunca perderem a noção da grandeza dos números envolvidos. Tal como os colegas que recorrem a procedimentos multiplicativos, também estes alunos parecem relacionar a divisão e a multiplicação, registando a expressão $156 \div 6 = 26$.

Em suma, na passagem de problemas de multiplicação para problemas de divisão os alunos parecem voltar atrás no uso de procedimentos multiplicativos baseados em propriedades da multiplicação, aparentemente já consolidados. Este aspeto pode estar relacionado com o grau de complexidade maior que este tipo de problemas introduz, o que conduz a um retorno a procedimentos nos quais se sentem mais seguros. Ainda assim, da tarefa 19 para a tarefa 20, verifica-se alguma progressão nos procedimentos

utilizados. De facto, os alunos recorrem, em maior número, a procedimentos multiplicativos e parecem relacionar entre si a multiplicação e a divisão. Os registos que incluem a divisão são cada vez mais frequentes, não só nos alunos que optam por procedimentos multiplicativos, mas também, nos que recorrem, ainda, a procedimentos aditivos ou subtrativos.

O facto de muitos dos alunos terem, aparentemente, identificado que os cálculos a efetuar, nos dois problemas da tarefa 20, são os mesmos em termos matemáticos, apesar de as situações serem distintas e de os números envolvidos terem também significados diferentes, parece ser um indicador de que caminham progressivamente para a abstração, conseguindo “olhar” para os números e as operações de um ponto de vista matemático, formal, distanciando-se do contexto em que estão inseridos.

6.2.3.2. As tarefas cuja resolução se pode apoiar no modelo retangular

A tarefa 25 – Outra máquina de bebidas inclui dois problemas de divisão, num contexto de medida. A tarefa 26 – Miniaturas de animais é constituída por um problema de divisão no seu sentido de partilha e, na aula, deu origem a um congresso matemático.

Depois das propostas associadas à tarefa 20, os alunos resolvem outros problemas de divisão com o auxílio da disposição retangular. O modelo retangular é introduzido pela professora Isabel, inicialmente, a propósito da resolução de problemas de multiplicação e, posteriormente, é feita a sua articulação com problemas de divisão.

Alguns dos alunos da turma usam o modelo retangular na resolução de problemas de multiplicação (na Figura 6.90 inclui-se um exemplo), mas muitos outros não sentem necessidade de o utilizar para calcular. De facto, considerando o seu grau de compreensão sobre a multiplicação com números naturais, há alunos que parecem não precisar de se apoiar neste modelo para calcular.

Eva é uma das alunas que usa a disposição retangular para calcular 48×5 .

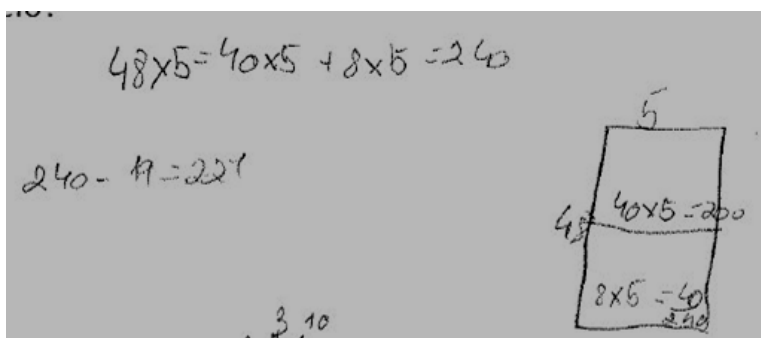


Figura 6.90 – Cálculo, efetuado por Eva, de 48×5 utilizando a disposição retangular

Depois de realizados alguns problemas de multiplicação, a propósito dos quais os alunos podem usar o modelo retangular, é feita a passagem para a sua utilização em problemas de divisão. Assim, os alunos têm a possibilidade de se apoiar neste modelo de cálculo para resolver problemas de divisão, sendo incentivados por Isabel a recorrer à disposição retangular, sempre que esta facilite o cálculo que necessitam realizar, de modo a ultrapassar as dificuldades manifestadas neste tipo de problemas.

Na resolução do primeiro problema da tarefa 25 há menos alunos que optam por procedimentos aditivos ou subtrativos, quando comparados com os que usam o mesmo tipo de procedimentos nas tarefas de divisão anteriores. Ainda assim, há um aluno que recorre à adição e dois alunos que utilizam procedimentos de subtração sucessiva. Além destes, há seis alunos que resolvem a tarefa de modo incorreto, havendo um deles que ainda faz uma tentativa de usar o modelo retangular, mas sem sucesso.

Bernardo é o único aluno que recorre à adição, tanto no primeiro como no segundo problema da tarefa 25. No primeiro problema adiciona sucessivamente o número de garrafas (seis) de cada embalagem, até chegar ao total de 132 garrafas.

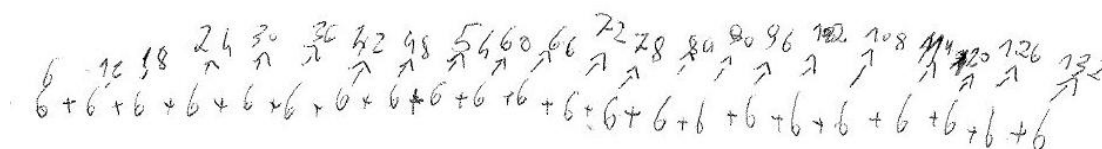


Figura 6.91 – Resolução de Bernardo da subtarefa 1 – tarefa 25

No segundo problema persiste num procedimento aditivo mas não o consegue resolver totalmente.

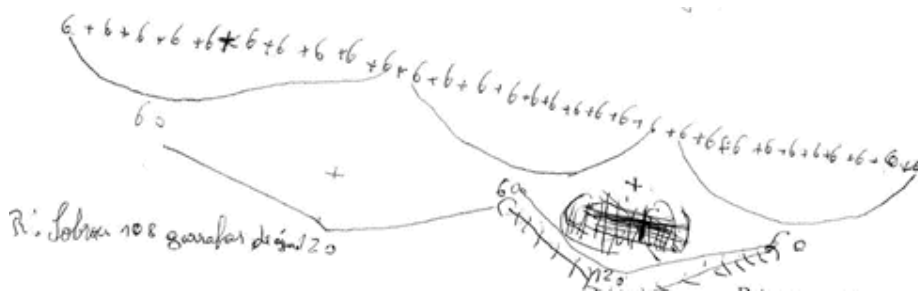


Figura 6.92 – Resolução de Bernardo da subtarefa 2 – tarefa 25

Bernardo identifica que uma caixa leva dez embalagens de seis garrafas, ou seja, um total de 60 garrafas e parece calcular o total de garrafas existente em quatro caixas mas não consegue, a partir daí, responder corretamente à questão colocada.

Relativamente aos procedimentos subtrativos usados na resolução da subtarefa 1 da tarefa 25 apenas por dois alunos, um deles é representado corretamente, outro persiste numa representação incorreta, semelhante à utilizada por Gustavo na resolução da subtarefa 2 da tarefa 19 (Figura 6.83).

De entre os procedimentos que recorrem à multiplicação destacam-se os que utilizam produtos sucessivos em que um dos fatores é seis e o outro é calculado de modo a que o produto final seja igual a 132 (num total de nove alunos), e os que se apoiam na disposição retangular, de forma a encontrar os produtos parciais cuja soma seja, também, igual a 132 (apenas três alunos).

Guilherme é um dos alunos que usa a multiplicação para resolver o problema, realizando produtos sucessivos.

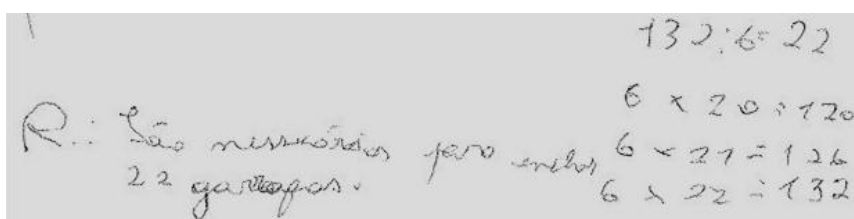


Figura 6.93 – Resolução de Guilherme da subtarefa 1 – tarefa 25

Este aluno reconhece o problema como sendo de divisão e, fazendo a ligação com a multiplicação, procura um número que multiplicado por seis tenha um valor o mais

próximo possível de 132. Para isso, recorre a um múltiplo de dez e, em seguida, calcula dois produtos sucessivos até perfazer o total necessário.

Gustavo faz um raciocínio semelhante ao de Guilherme, mas apoia-se na disposição retangular.

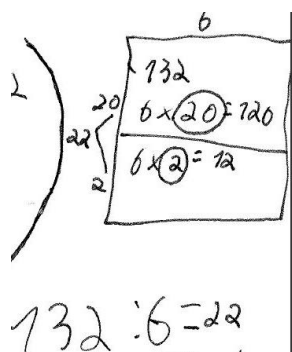


Figura 6.94 – Resolução de Gustavo da subtarefa 1 – tarefa 25

Tal como Guilherme, Gustavo procura o número que multiplicado por seis é igual a 132 ou fica próximo de 132 e, considerando o conhecimento que tem dos múltiplos de dez, inicia o cálculo, também, com o produto 6×20 . Depois calcula 6×2 , de modo que a soma dos produtos parciais seja igual ao número pretendido. Os registos escritos deste aluno evidenciam ainda que, para além de ter o modelo retangular como suporte para calcular, reconhece o problema como sendo de divisão.

Ao contrário de Gustavo, que se apoia no modelo retangular para calcular e consegue fazê-lo corretamente, há um aluno, dos seis que não conseguem resolver esta tarefa, que faz também a tentativa de utilizar este modelo ensinado por Isabel, mas esta revela-se infrutífera.

Os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução do segundo problema da tarefa 25, em que o contexto de divisão por medida se mantém o mesmo do anterior mas se coloca a questão em termos do número de caixas necessário e não do número de embalagens (cada caixa contém dez embalagens de seis garrafas), são, na sua maior parte, incorretos. De facto 18 alunos, num total de 23, não conseguem resolver o problema ou fazem-no incorretamente. Alguns alunos efetuam várias tentativas de resolução, que deixam incompletas ou que estão incorretas, outros não realizam quaisquer registos e apenas cinco conseguem resolver o problema corretamente.

Os procedimentos dos alunos evidenciam alguma dificuldade na compreensão do problema e confusão na sua resolução. A questão colocada “Quantas caixas cheias são necessárias?” não foi entendida por todos da mesma maneira e parece ter constituído uma dificuldade acrescida o facto de não ser preciso a totalidade das garrafas de três caixas, ou seja, a divisão não ser exata.

Guilherme é um dos alunos que parece começar por raciocinar corretamente, mas que se confunde na resposta que elabora.

The image shows handwritten work on a piece of paper. At the top left, there is a small box containing the number 12. To the right, there are calculations: $5 \times (6 \times 2) = 60$ 1 caixa, $+ 5 \times (6 \times 2) = 60$ 2 caixas, and $5 \times 6 \times 2 = 60$ 3 caixas. Below these, there is a calculation: $60 - 12 = 48$. To the right of this, it says "garrafas que sobram". At the bottom, there is a sentence: "Res. Se houver 48 garrafas sobram 12 garrafas." and another sentence: "(Dado) 16 garrafas sobram 12 garrafas de 12 garrafas".

Figura 6.95 – Resolução de Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 25

A análise dos seus registos permite perceber que calcula o número total de garrafas de uma, duas e três caixas e subtrai a este último o número de garrafas que enchem a máquina. Mostra reconhecer que sobram 48 garrafas da terceira caixa e que só são precisas, daí, 12 garrafas. Contudo, ao mesmo tempo, escreve também que o número de caixas cheias é igual a 48.

Os procedimentos dos alunos que resolvem corretamente este segundo problema, ainda que bastante informais, evidenciam que todos reconhecem 60 como o número total de garrafas de cada caixa mas não mostram qualquer relação explícita entre esta resolução e a do problema anterior.

Duarte é um dos poucos alunos que resolve corretamente este problema, embora use registos pouco formalizados.

Handwritten student work for a math problem. It shows a box with "1, 2, 3" and a note "1 caixa = 60 1/2". Below is a small table with "A" and "B" in the first column and "1" and "2" in the second. To the right, calculations show "70 + 12 = 82", "1 caixa + 1 caixa + 2 embalagens", "2 caixas = 120", and "132 - 120 = 12". At the bottom, the answer is written: "R.: Não precisam 2 caixas e 2 embalagens".

Figura 6.96 – Resolução de Duarte da subtarefa 2 – tarefa 25

Estes registos evidenciam que o aluno pensa em termos de grupos de 60 e que, no caso do número de garrafas da terceira caixa, dá a resposta em termos de embalagens “São “precisas” 2 caixas e 2 embalagens”.

Além de Duarte, todos os alunos que resolvem corretamente este segundo problema raciocinam sempre considerando o número total de garrafas (132) e relacionando-o com o número de garrafas por caixa (60). Não há, pois, alunos a pensar partindo do número de embalagens (22) e associando-as ao número de embalagens por caixa (10).

Na tarefa 26 – Miniaturas de animais, os alunos mostram compreender a situação proposta e, antes de passarem aos cálculos propriamente ditos, são desafiados por Isabel a responder à pergunta final “Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais?”. A sua resposta implica comparar um total de 256 miniaturas repartidas por oito crianças com 224 miniaturas repartidas por sete crianças. Na sua maioria, os alunos respondem que não é justa a partilha das miniaturas, justificando que os dois sacos não têm o mesmo número e esquecendo que os grupos também não têm o mesmo número de alunos. Os que afirmam que a partilha parece ser justa fundamentam a sua resposta no facto de haver mais miniaturas para o grupo que também tem mais crianças.

A análise das produções escritas dos alunos permite perceber que todos identificam a situação como sendo de divisão, pois registam a expressão correspondente e associam esta operação à multiplicação. Todos utilizam procedimentos de tipo multiplicativo e todos, exceto dois pares, apoiam-se no modelo retangular. Há ainda um par de alunas, Eva e Mariana, que se apoia no modelo retangular apenas para a primeira parte da tarefa e, a seguir, optam por multiplicar sucessivamente, na segunda parte. Há,

também, a registar que um par de alunos faz uma primeira tentativa de usar um procedimento aditivo, que abandona e substitui por outro de tipo multiplicativo.

Ana Rita e Miguel são um dos pares de alunos que não recorre ao uso do modelo retangular, optando por realizar produtos sucessivos.

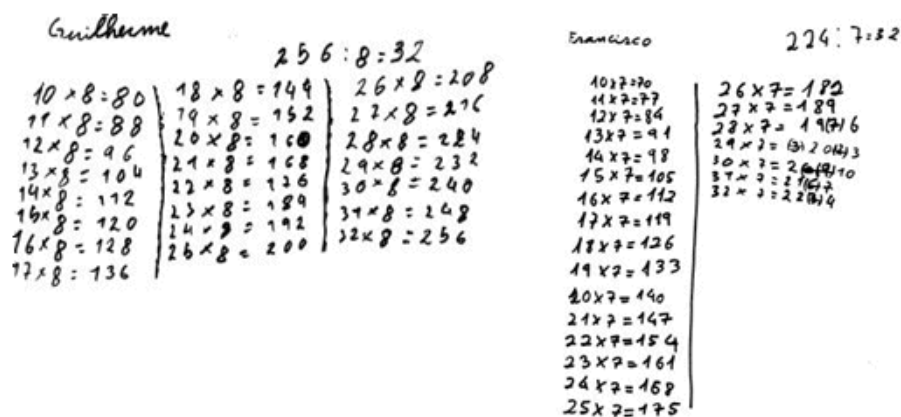


Figura 6.97 – Excerto do póster de Ana Rita e Miguel relativo à tarefa 26

O excerto do póster mostra que, nas duas situações, os alunos calculam exaustivamente todos os produtos desde 10×8 e 10×7 , até encontrarem um cujo resultado seja igual a 256 e a 224, respetivamente. Nos seus registos iniciais, na folha de tarefa, nota-se que tentam usar o modelo retangular, que abandonam.

Durante a discussão final, Ana Rita e Miguel são desafiados por Isabel para explicarem o seu modo de pensar.

Ana Rita – Nós vimos que tínhamos de fazer 256 a dividir por oito e 224 a dividir por sete. Como ainda não sabíamos o resultado, fizemos por multiplicações.

Isabel – Os outros grupos também pensaram assim mas fizeram de maneira diferente. Ora, continuem a explicar.

Ana Rita – Nós também tentámos fazer com o retângulo mas não conseguimos perceber como se faz.

Isabel – Mas expliquem lá a vossa maneira.

Ana Rita – Nós fomos fazendo a tabuada toda até ao 32.

Guilherme – Mas como é que sabiam que parava aí? Quantas vezes fizeram a tabuada?

Ana Rita – Sabíamos porque 32×8 é 256, o número das miniaturas.

Isabel – E é fácil fazer desta maneira?

Ana Rita – Mais ou menos.

Isabel – E porquê mais ou menos?

Ana Rita – Por causa de demorar algum tempo e quem não sabe a tabuada pode enganar-se.

Isabel – Mesmo quem sabe também se pode enganar, pois são muitos cálculos.

Ana Rita – A nós aconteceu-nos isso.

Isabel – E como podiam fazer de maneira mais rápida e sem se enganarem?

Ana Rita – Passar logo de 10 vezes para 20 e depois para 30 vezes.

Ana Rita fundamenta o seu modo de pensar evidenciando que reconhece ser um problema de divisão e explicitando a sua opção por um procedimento de multiplicação, uma vez que ainda não conhece procedimentos associados à divisão. Um outro aluno, Guilherme, coloca-lhe uma questão associada ao “saber quando parar” à qual a aluna responde adequadamente, dando evidência da sua compreensão sobre o procedimento que usa. Quando interpelada por Isabel, consegue destacar os riscos do uso deste procedimento e, além disso, parece avançar para um procedimento mais eficaz, explicitando o recurso a fatores múltiplos de dez.

Ainda na tarefa 26, Hugo e José, o outro par que não se apoia no modelo retangular, utiliza um procedimento multiplicativo bastante formal, baseado no seu conhecimento sobre as características do sistema de numeração decimal.

$256:8=32$
 $224:7=32$
 $32 \times 8 = 256$
 $32 \times 7 = 224$
 $\begin{array}{r} 32 \\ \times 8 \\ \hline 256 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array}$
 R: Sim. Porque dá o mesmo resultado.
 E: eles fizeram 32×8 e 32×7 para saber o resultado da multiplicação. Nós pensamos no 2 nas unidades para dar 16 e 14 e nas dezenas pensamos por o três [...].

Figura 6.98 – Excerto do póster de Hugo e José relativo à tarefa 26

Os alunos justificam, por escrito, a razão de terem registado apenas os produtos 32×8 e 32×7 “[...] nós pensamos no dois nas unidades para dar 16 e 14 e nas dezenas pensamos por o três [...]”. Contudo, esta sua explanação não é compreendida pelos colegas que, na apresentação e discussão final, lhes solicitam esclarecimentos sobre o modo como pensaram.

José – Nós pensamos primeiro só nas unidades, para saber.

Outros alunos – Mas como sabiam que era o 32?

José – Nós pensámos só nas unidades e pensámos primeiro no sete.

Isabel – Tentem lá explicar bem aos colegas, pois é complicado.

José – Mas pensámos só nas unidades, no sete. E fizemos sete vezes oito e sete vezes sete. Mas o produto tinha de acabar em seis e em quatro e não dava.

Isabel – Ah! Pensaram só nas unidades e fizeram os produtos mentalmente.

Guilherme – Mas continuo sem perceber.

José – Fomos procurar o número que, multiplicado por oito e por sete, dá seis e quatro nas unidades. E pensámos no sete, mas não pode ser. Não dá porque 7×7 é 49, não acaba em quatro.

Isabel – Muito bem, continuem. E depois?

José – Então tinha de ser o dois porque 2×8 acaba em seis e 2×7 acaba em quatro.

Isabel – E como pensaram a seguir?

José – Eu e o Hugo pensámos que com um nas dezenas ficava muito longe de 256 então experimentámos com três nas dezenas e já dava. E fizemos o mesmo para o 224 e dava também.

Isabel – Exatamente. E porque sabem fazer tudo isto?

Eva – Sabem fazer muito bem a tabuada mentalmente.

Bernardo – Eu ontem li o que eles escreveram e não percebi. Mas agora parece que percebi.

José explicita as tentativas que realizaram mentalmente à procura dos números que, multiplicados por oito e por sete, fossem iguais a 256 e a 224, respetivamente. O seu modo de pensar traduz uma manipulação mental dos números considerando as suas características estruturais, destacando isoladamente o algarismo das unidades e o das dezenas, o que parece revelar um conhecimento profundo dos números e das suas propriedades. Assim, o cálculo é realizado formalmente e sem estar focado no contexto do problema.

De entre os alunos que se apoiam na disposição retangular há algumas diferenças a destacar. Enzo e Guilherme utilizam a disposição retangular, não exatamente da mesma maneira, no cálculo de $256 \div 8$ e de $224 \div 7$.

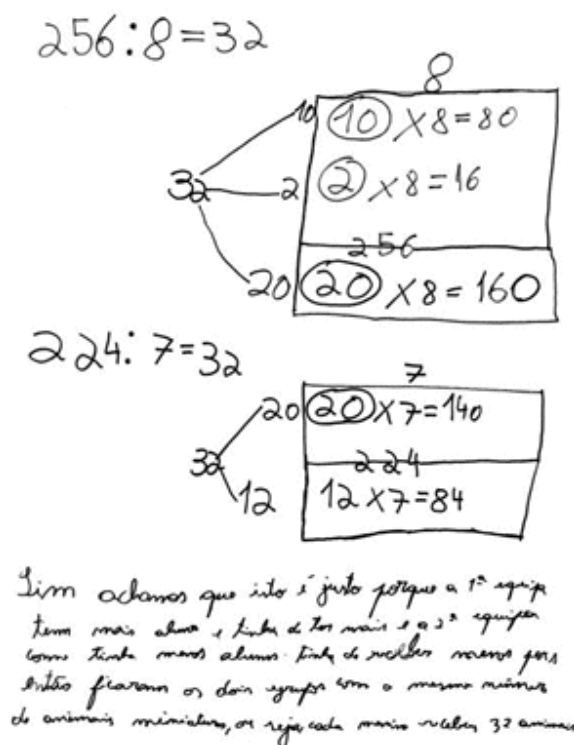


Figura 6.99 – Excerto do póster de Enzo e Guilherme relativo à tarefa 26

Para calcular $256 \div 8$ recorrem a três produtos parciais, os dois iniciais correspondentes a um total menor que a centena. No cálculo relativo ao quociente de $224 \div 7$, progridem mais rapidamente, utilizando logo o fator 20 e depois o fator 12.

Cristóvão e Francisco, tal como os colegas, baseiam-se na disposição retangular mas recorrem a produtos parciais associados à decomposição decimal de 32, registando os cálculos 30×8 e 2×8 .

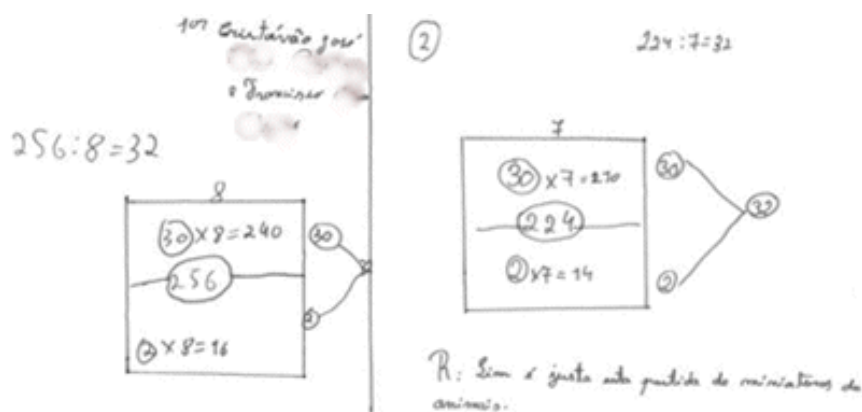


Figura 6.100 – Excerto do póster de Cristóvão e Francisco relativo à tarefa 26

Durante o congresso matemático, estes alunos clarificam como pensaram para encontrar o fator 30, que lhes facilitou o cálculo a realizar.

Cristóvão – Nós fizemos 256 a dividir por oito. E depois fizemos 224 a dividir por sete. Para ver com quanto é que cada menino ficava.

Isabel – Muito bem. Continuem.

Cristóvão – Depois pensámos em dez vezes oito, era muito baixo.

Isabel – Mas era muito baixo porquê?

Cristóvão – Dez vezes oito era 80 e nós queríamos 256.

Francisco – E depois nós pensamos no 20 mas também estava muito longe.

Isabel – Porquê? (escreve no quadro os diferentes produtos).

Francisco – Porque 20 vezes oito é igual a 160.

Cristóvão – E então pensamos no 40. Mas já era demais.

Isabel – Porquê? Quanto é 40 vezes oito?

Francisco – 240, não 320. Já era muito grande, era maior que 256. Então pensámos num número que estava no meio dos dois, o 30.

Isabel – Exatamente! E quanto é 30 vezes 8?

Francisco – É 240. E para 256 faltavam 16. Então pensámos no dois. E oito vezes dois dava 16. E cada menino ficava com 32 miniaturas.

Cristóvão e Francisco explicam como usam os múltiplos de dez para calcular rapidamente, destacando, ao mesmo tempo, o recurso a dobros de produtos já calculados. Evidenciam, também, a sua perceção sobre a grandeza dos números que obtêm, ao compará-los com o número 256.

Os mesmos alunos ainda referem na sua apresentação oral que, depois de resolverem o problema, foram verificar se o resultado obtido estava correto. Para isso usam um procedimento aditivo, agrupando, duas a duas, oito parcelas iguais a 32. Mencionam também que calcularam a diferença entre 256 e 224, os números totais de miniaturas em cada caso, e chegaram à seguinte conclusão:

Cristóvão – A diferença de 224 até 256 é igual a 32. Quer dizer que eram as miniaturas de um menino.

Isabel – E o que queres dizer com isso?

Cristóvão – Porque um grupo tem sete e outro tem oito meninos, tem mais um menino. Por isso o total de miniaturas é de mais 32.

Cristóvão tenta explicar que a diferença encontrada entre os totais corresponde à diferença entre 7×32 e 8×32 .

Subjacente a todas as explicitações anteriores de Cristóvão e Francisco parece estar um raciocínio que assenta no estabelecimento de relações entre as diferentes operações aritméticas, baseadas num conhecimento já bastante consolidado sobre estas.

Diogo e Maria Rita são o único par que não compreende integralmente o problema colocado. Estes alunos não percebem a pergunta final e resolvem o problema como se a proposta fosse encontrar uma situação justa para todas as crianças e não comparar as duas situações apresentadas. Assim, pensam numa situação próxima da realidade – juntar todas as miniaturas num único saco e reparti-las por todas as crianças, que traduzem matematicamente por $480 \div 15$.

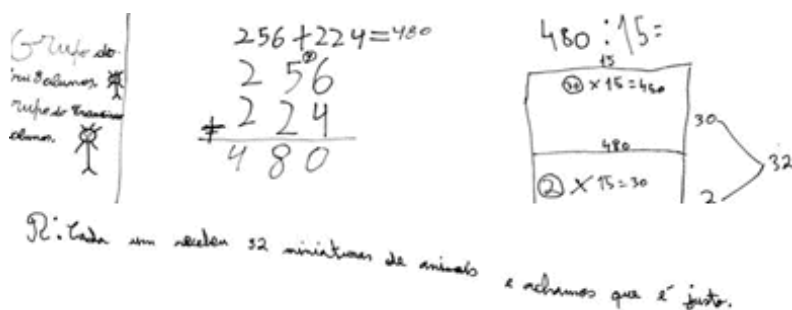


Figura 6.101 – Excerto do póster de Diogo e Maria Rita relativo à tarefa 26

Apesar de não corresponderem ao problema proposto, os registos efetuados por Diogo e Maria Rita mostram que, aparentemente, estes realizam o cálculo associado a $480 \div 15$ com bastante facilidade, apesar da grandeza dos números envolvidos, apoiando-se no modelo retangular. Quando explicam o seu modo de pensar, os alunos referem que calculam primeiro 10×15 mas ainda está “longe” de 480, depois experimentam 20×15 e, finalmente, 30×15 . Como já está “perto”, é esse o produto que registam, identificando depois 2×15 , de modo a perfazer o total de 480.

A resolução destes alunos é apresentada e discutida com toda a turma, durante o congresso matemático. Isabel promove a discussão no sentido de esclarecer o contexto do problema e de modo que eles consigam perceber a diferença entre a sua interpretação e a dos outros colegas. No debate associado, há alunos que se admiram como é que Diogo e Maria Rita obtêm também 32 miniaturas para cada criança, efetuando uma divisão diferente e Isabel intervém, explicando a razão e dando um exemplo em que tal não acontece.

Nas cadeias numéricas propostas nas aulas seguintes, os alunos identificam com bastante facilidade as relações que podem ser estabelecidas de uns cálculos para outros. Apesar da ordem de grandeza de alguns dos números envolvidos conseguem justificar através de raciocínios baseados nas propriedades da multiplicação. Há também alunos que fundamentam o seu modo de pensar explicitando relações associadas à divisão, evidenciando segurança nos termos que utilizam e alguma evolução no conhecimento sobre esta operação.

Duarte justifica o quociente $260 \div 13$, depois de ter sido calculado $130 \div 13$, da seguinte maneira:

Duarte – 260 a dividir por 13 é 20. Porque 260 é o dobro de 130. E 130 a dividir por 13 é 10. Por isso 260 a dividir por 13 é igual ao dobro de 10, que é 20.

Apesar da relação identificada poder ser sugerida pelas próprias características deste tipo de cálculo, é de realçar a linguagem adequada usada por Duarte na sua explicitação, que parece evidenciar algum domínio das propriedades da divisão associadas, particularmente, às da multiplicação.

A realização das cadeias numéricas, incluídas nas tarefas 22 e 28, contribuem, também, para consolidar a relação entre divisão e multiplicação e o seu uso em situações de cálculo. No primeiro conjunto de cadeias numéricas (tarefa 22) são propostos, alternadamente, cálculos de multiplicação e de divisão, sugerindo, explicitamente, a sua interligação. No segundo conjunto de cadeias numéricas (tarefa 28) os cálculos a realizar incluem todos a operação divisão e os alunos determinam o quociente respetivo através do uso da operação multiplicação. Além disso, são capazes de utilizar propriedades da divisão para calcular, relacionando-as com as correspondentes da multiplicação.

Em suma, os alunos parecem reconhecer, frequentemente, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação, uma vez que optam, na maioria das vezes, por procedimentos multiplicativos para resolver problemas de divisão. Os alunos parecem progredir no uso desses procedimentos, considerando que se baseiam, cada vez mais, nas propriedades da multiplicação e no conhecimento que têm sobre os números. Alguns persistem, ainda, no uso de procedimentos baseados em produtos sucessivos,

enquanto outros tiram partido da utilização de fatores múltiplos de dez, de modo a prosseguir mais rapidamente nos cálculos a realizar.

A introdução da disposição retangular como modelo de suporte ao cálculo parece ter facilitado os cálculos associados aos problemas propostos. Verifica-se que o número de alunos que se apoia neste modelo aumenta significativamente, da tarefa 25 para a tarefa 26. Ao mesmo tempo, diminui o número de alunos que recorrem a procedimentos não multiplicativos. Para este aspeto, aparentemente, pode ter contribuído, não só a introdução da disposição retangular como modelo de cálculo em problemas de divisão mas, também, a grandeza dos números envolvidos.

O contexto de um dos problemas (subtarefa 2 – tarefa 25), onde está subjacente uma situação de divisão não exata, parece ter constituído uma dificuldade para os alunos. Consequentemente, voltam a tentar usar procedimentos de tipo aditivo e subtrativo, nem sempre bem-sucedidos. Além disso há a registar, neste problema, um grande número de alunos que não o resolve ou o faz incorretamente.

6.2.3.3. Síntese

Muitos dos alunos parecem retroceder nos procedimentos que usam na mudança de problemas de multiplicação para problemas de divisão com números naturais. Aparentemente, a facilidade manifestada na utilização de procedimentos baseados nas propriedades da multiplicação não é a mesma quando se trata de problemas de divisão. O maior grau de complexidade associado às situações propostas parece ter provocado, sobretudo nos primeiros problemas, o “regresso” a procedimentos aditivos e subtrativos.

A identificação de um problema como sendo de divisão e o registo de expressões matemáticas que incluem o símbolo adequado ($\div$), vão sendo cada vez mais frequentes, à medida que os alunos resolvem mais problemas e que vão consolidando o seu conhecimento sobre esta operação. No início, a perceção de que estão perante um problema de divisão parece ser maior nos problemas com sentido de partilha, talvez por ser mais fácil a sua associação com expressões da linguagem corrente tais como repartir, dividir, partilhar, conhecidas dos alunos. O reconhecimento progressivo de situações de

divisão e o correspondente registo de expressões que incluem o símbolo de divisão verifica-se tanto nas resoluções que envolvem procedimentos aditivos e subtrativos, como nas que são constituídas por procedimentos multiplicativos.

Na resolução de problemas de divisão, progressivamente, os alunos optam cada vez mais por procedimentos baseados nas propriedades da multiplicação, relacionando muito frequentemente a divisão com a multiplicação. Para este facto parecem ter contribuído os contextos dos problemas e os números envolvidos. O cálculo com números da ordem das centenas, por um lado, e com números de referência por outro, parece ter influenciado as opções dos alunos por procedimentos multiplicativos, mais rápidos e eficazes. Contudo, a evolução dos procedimentos multiplicativos não se faz da mesma maneira nem ao mesmo tempo para todos os alunos da turma.

A introdução do modelo retangular, primeiro associado à multiplicação e depois à divisão, parece ser um contributo para que os alunos usem procedimentos multiplicativos mais potentes, relacionados com o uso eficaz das propriedades da multiplicação. Inicialmente, há alunos que têm algumas dificuldades no seu uso mas esse aspeto melhora progressivamente, uma vez que, nos últimos problemas propostos a maioria opta pela utilização do modelo retangular. A esta evolução não é alheia a facilidade com que se usa este modelo, aliada aos números envolvidos nos cálculos.

No cálculo em cadeia, tal como se verificou anteriormente em outras cadeias numéricas, os alunos usam procedimentos multiplicativos, com relativa facilidade, para resolver situações que envolvem a divisão. São capazes de associar a divisão à multiplicação, potenciando essa ligação nos procedimentos que usam, bem como nas propriedades da divisão articuladas com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A cultura de sala de aula que vai sendo construída, assente numa organização que inclui momentos de trabalho individual, a pares ou de discussão com toda a turma, onde os alunos aprendem a explicitar e justificar os raciocínios que fazem perante os colegas, parece contribuir para a evolução dos alunos na aprendizagem da multiplicação em particular, nos procedimentos que usam na resolução das tarefas propostas. O modo

como os alunos são capazes de interpretar o trabalho dos colegas e de os interpelar sobre ele, pedindo justificações ou esclarecendo dúvidas, denota uma progressão na sua compreensão sobre a multiplicação, a que não parecem ser alheias as normas sociais e sociomatemáticas que vão sendo negociadas com Isabel.

6.2.4. Multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal

As tarefas de multiplicação no seu sentido proporcional têm como propósito continuar a aprofundar o conhecimento dos alunos sobre esta operação, em particular, nos aspetos relacionados com o raciocínio proporcional e, ao mesmo tempo, consolidar o cálculo multiplicativo com números racionais não negativos na sua representação decimal. As tarefas propostas aos alunos implicam a interpretação e a utilização de tabelas de razões inseridas em contextos associados a preços.

A tarefa 29 – Ida ao teatro é constituída por três problemas, o primeiro inclui o preenchimento de uma tabela de preços de bilhetes e o segundo e o terceiro envolvem saber o preço de um total de bilhetes, 24 e 250, respetivamente. Pretende-se que os alunos, depois de preencherem a tabela recorram a ela para, a partir daí, efetuarem os cálculos necessários à resolução dos problemas. O preço unitário do bilhete de cinema é 1,25€, um número de referência, de modo a fazer emergir procedimentos flexíveis e adequados aos cálculos a realizar.

A tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade tem objetivos semelhantes aos da tarefa anterior e é, também, constituída por três problemas, subtarefas 1, 2 e 3, cada uma com várias questões a resolver. Os alunos devem começar por completar uma tabela e recorrer a ela nos cálculos posteriores. É, ainda, objetivo de dois problemas desta tarefa, em consequência dos números utilizados, 1,10€ e 0,99€, a identificação de regularidades, tanto nos cálculos a realizar como nos produtos obtidos.

6.2.4.1. A primeira tarefa

Os procedimentos dos alunos relacionados com o preenchimento da tabela associada à tarefa 29 são bastante diversificados. Muitos dos alunos decompõem o número 1,25 – preço de um bilhete de teatro – em $1+0,25$ e realizam os cálculos necessários a partir daí, usando, tanto procedimentos aditivos como multiplicativos. Alguns cometem incorreções nos cálculos necessários ao preenchimento da tabela, provavelmente decorrentes do preço unitário dos bilhetes ser um número racional representado na sua forma decimal e ter, nomeadamente, duas casas decimais. Contudo, o número utilizado (1,25) é um número de referência com o qual os alunos já lidaram várias vezes, tanto associado ao sistema monetário como a medidas de capacidade e de massa.

Uma vez que as quantidades de bilhetes incluídas na tabela podem ser relacionadas entre si, há mais alunos que usam esse facto para calcular do que aqueles que partem sempre do preço de um bilhete para saber o preço de vários.

Duarte e Tiago usam um procedimento aditivo para calcular o número de bilhetes possível de comprar com 10€, estabelecendo uma relação com o preço de outras quantidades de bilhetes. Apercebem-se, através da observação da tabela, que a soma de 2,50€ com 7,50€, valores anteriormente calculados, é igual a 10€ e explicitam o seguinte raciocínio:

Duarte – Nós pensámos em oito bilhetes.

Isabel – Está bem, mas como pensaram?

Duarte – Nós pensámos em dois bilhetes que são dois euros e meio e mais seis bilhetes que são sete euros e meio e deu-nos os dez euros. Por isso são oito bilhetes.

Os alunos estabelecem uma relação entre a soma de 2,50 com 7,50, o preço de dois mais seis bilhetes com o respetivo número de bilhetes, para calcular quantos se podem comprar com 10€. Tal como estes alunos, muitos outros compõem o preço de um determinado número de bilhetes a partir de outros preços já calculados e incluídos na tabela, estabelecendo uma relação entre preços e número de bilhetes e recorrendo a um procedimento aditivo.

Uma análise detalhada dos registos dos alunos e dos episódios de sala de aula permite inferir que muitos alunos optam, ora por procedimentos aditivos ora por multiplicativos, consoante lhes parece ser mais fácil calcular de acordo com os números envolvidos.

Luís e Raquel são um dos pares que, no preenchimento da tabela inicial, utiliza tanto procedimentos de tipo aditivo como multiplicativo, conforme os números incluídos nos cálculos a realizar.

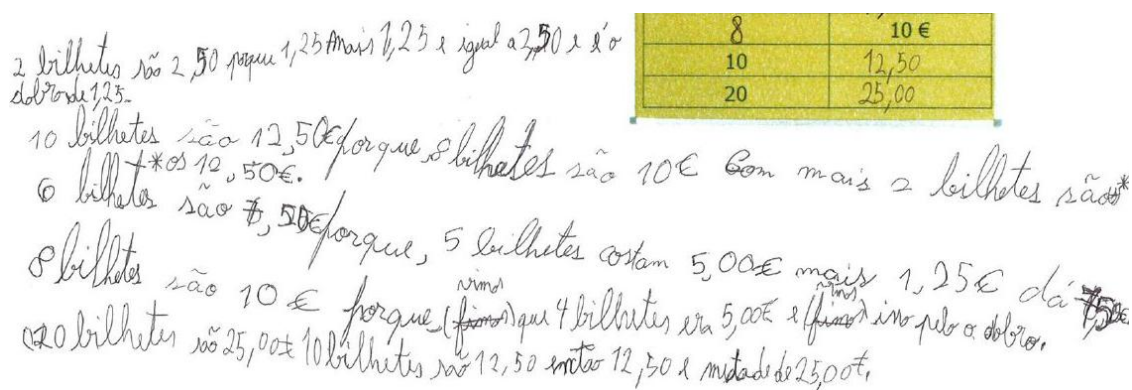


Figura 6.102 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 1 – tarefa 29

Estes alunos usam procedimentos aditivos para saber o preço de, por exemplo, dez bilhetes, adicionando o preço de oito ao preço de dois, calculados previamente. Contudo, os mesmos alunos referem que recorrem ao dobro do preço de um e de quatro bilhetes para calcular o preço de dois e de oito bilhetes, respetivamente. Também parece ser um procedimento de dobro que usam para calcular o preço de 20 bilhetes, relativamente ao preço de dez, apesar de terem mencionado, na justificação por escrito, a relação de metade entre 12,50 e 25. A opção por procedimentos aditivos ou multiplicativos parece corresponder, não a um retrocesso em termos de procedimentos usados, mas a um conhecimento profundo dos números utilizados e a uma maior facilidade nos cálculos que é necessário realizar.

Na resolução do segundo problema, no qual é necessário saber o preço de uma ida ao teatro de toda a turma com a professora Isabel, num total de 24 pessoas, todos os pares de alunos, com exceção de um, realizam os cálculos para 23 bilhetes, não incluindo Isabel. Este aspeto parece ter sido provocado pela leitura pouco atenta do enunciado ou

pela sua experiência em situações análogas – muitas vezes os professores não pagam quando acompanham a sua turma ao cinema ou ao teatro, referiu-me Isabel em conversa informal, nas nossas reuniões semanais.

Os procedimentos utilizados pelos alunos no cálculo do preço de 23 bilhetes recorrem, na sua maioria, ao preço de 20 bilhetes, calculados no problema anterior. A partir daí, são usados procedimentos aditivos, ou adicionando três vezes o preço de cada bilhete, ou adicionando de uma só vez o preço de três bilhetes, que calculam através do preço de um e de dois bilhetes, incluídos na tabela. O facto de os alunos não terem calculado o preço de 24 mas de 23 bilhetes, pode não ter facilitado o emergir de procedimentos multiplicativos associados a múltiplos.

Há apenas um par de alunos, Enzo e Guilherme, que considera o preço unitário 1,25€ e tenta utilizar um procedimento multiplicativo para calcular $23 \times 1,25$.

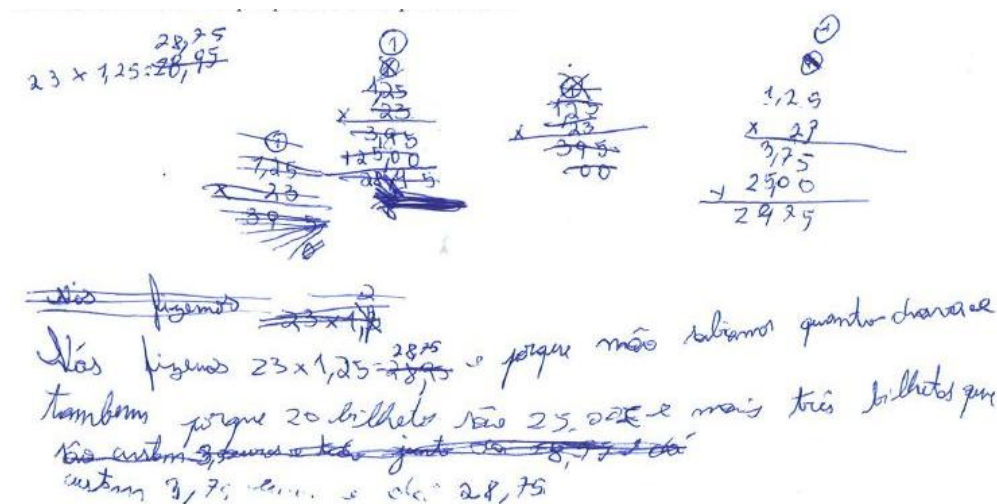


Figura 6.103 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 2 – tarefa 29

O aspeto dos seus registos escritos evidencia as dúvidas que parecem ter surgido e as várias tentativas que fazem para resolver o problema. As primeiras tentativas de usar o cálculo em coluna não são bem-sucedidas, tendo sido rasuradas. Como parecem não ter segurança no procedimento em coluna que realizam corretamente (no extremo superior direito do seu registo), recorrem também à adição do preço de 20 com o preço de três bilhetes, provavelmente para confirmar o resultado obtido anteriormente.

Há, ainda, alguns alunos que não conseguem resolver este problema ou o fazem incorretamente, revelando bastantes dificuldades no cálculo com números na representação decimal.

No terceiro problema da tarefa 29 é necessário saber o montante total da venda de 250 bilhetes, correspondentes à lotação do teatro. Tal como nos problemas anteriores, os alunos recorrem tanto a procedimentos aditivos como multiplicativos, nos quais usam alguns dos valores da tabela anteriormente preenchida.

Os alunos que usam procedimentos aditivos fazem-no de modos diferentes, recorrendo a quantidades diferentes de bilhetes cujos preços adicionam.

Gustavo e Leandra utilizam o valor de 40 bilhetes, que adicionam repetidamente, sem sucesso, provavelmente, porque confundem o preço de 40 bilhetes (50€) com o número de bilhetes.

Luís e Raquel adicionam repetidamente 62,50€, o preço de 50 bilhetes, que calculam previamente através dos valores incluídos na tabela.

$$62,50\text{€} + 62,50\text{€} + 62,50\text{€} + 62,50\text{€} + 62,50\text{€} = 312,50$$

Handwritten calculation showing the addition of 62,50€ five times to find the total for 250 tickets. The calculation is: 62,50€ + 62,50€ + 62,50€ + 62,50€ + 62,50€ = 312,50€. There are some corrections and intermediate steps shown, such as 125,00€ and 250,00€.

Figura 6.104 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 3 – tarefa 29

Estes alunos adicionam as cinco parcelas iguais a 62,50, duas a duas, de modo a calcular o montante correspondente a 250 bilhetes. Apesar de não o registarem, as cinco parcelas identificadas correspondem a 5×50 , ou seja, ao preço de 250 bilhetes, estando implícita a relação entre o número de bilhetes e o seu custo.

Há três pares de alunos que organizam sob a forma de tabela, semelhante à proposta na tarefa, os montantes necessários para perfazer o preço total dos 250 bilhetes,

recorrendo a procedimentos aditivos e multiplicativos para preencher a nova tabela construída.

Eva e Mariana são um dos pares que constrói uma nova tabela para resolver o problema.

N. B	Custo
50	62,50€
100	125€
200	250€
250	312,50€

$= 2 \times 62,50€ = 125€$
 $= 2 \times 125 = 250€$
 $= 250 + 62,50 = 312,50$

$\begin{array}{r} 62,50 \\ \times 2 \\ \hline 125,00 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 125,00 \\ \times 2 \\ \hline 250,00 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 250,00 \\ + 62,50 \\ \hline 312,50 \end{array}$

R: O montante total de venda dos bilhetes é de ~~312,50 euros~~ 312,50 euros.

Figura 6.105 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 3 – tarefa 29

As alunas partem do preço de 50 bilhetes e, a partir daí, utilizam um procedimento multiplicativo de cálculo de dobros, para determinar o preço de 100 e de 200 bilhetes. Para preencher a última linha, correspondente ao custo de 250 bilhetes, adicionam o preço de 200 com o preço de 50. A sua opção por procedimentos multiplicativos ou aditivos parece relacionar-se com a facilidade na realização dos cálculos necessários.

Tal como nos problemas anteriores, há alguns alunos que fazem tentativas de resolução que não são bem-sucedidas. Algumas das que os alunos deixam incompletas estão relacionadas com o cálculo a partir do valor unitário do bilhete, que parece revelar-se difícil para os alunos. Por um lado, parecem não se sentir, ainda, à vontade no cálculo mental com números na representação decimal, por outro, não parecem dispor de destreza suficiente no cálculo em coluna ou mesmo no algorítmico.

Enzo e Guilherme são um dos pares que tenta, como anteriormente, resolver o problema recorrendo ao preço de um bilhete, agora sem sucesso.

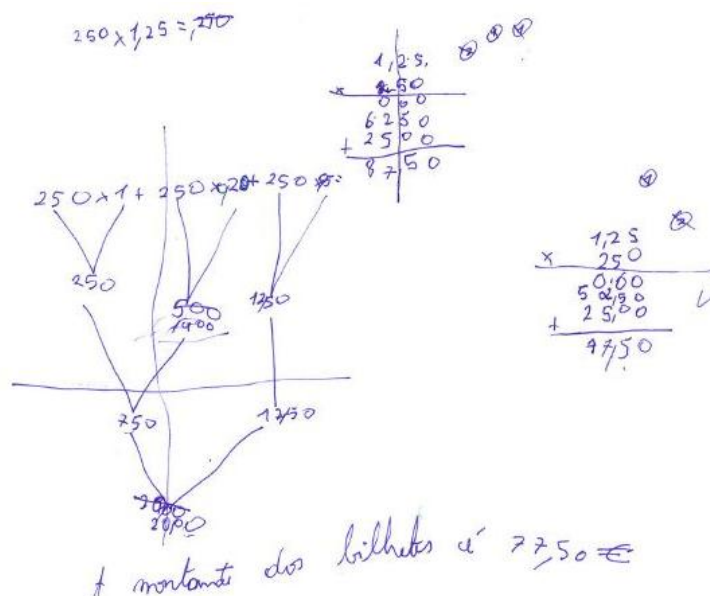


Figura 6.106 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29

Tal como havia acontecido no problema anterior, os alunos tentam calcular $250 \times 1,25$ para saber o preço total dos bilhetes. Realizam várias tentativas, usando o algoritmo ou tentando decompor 1,25 em $1 + 0,20 + 0,05$, mas chegam a um resultado incorreto. No caso do algoritmo, parecem revelar não ter, ainda, segurança no seu uso quando estão envolvidos números na representação decimal. No que diz respeito à decomposição de 1,25 e à utilização correspondente da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, também parece ser o cálculo com números na representação decimal que os leva a enganar-se e os impede de chegar à solução correta.

Em suma, os alunos parecem compreender com facilidade as tarefas que lhes são propostas, às quais atribuem um significado próximo de situações da sua realidade. O contexto de dinheiro parece, também, ter facilitado essa compreensão.

Os procedimentos usados pelos alunos são ora aditivos ora multiplicativos, de acordo com o que no seu entender lhes parece facilitar os cálculos. Muitos dos procedimentos recorrem à decomposição dos números na representação decimal, em parte inteira e parte decimal. Há alguns alunos que recorrem a procedimentos multiplicativos baseados no preço unitário do bilhete e outros que constroem tabelas de modo a organizar cálculos intermédios.

Alguns dos alunos revelam dificuldades nos cálculos, aparentemente associadas aos números na representação decimal, sobretudo quando se trata de cálculos mais complexos. Assim, este aspeto é mais evidente quando é necessário calcular o preço de 23 ou de 250 bilhetes e os alunos recorrem ao preço unitário e não utilizam valores da tabela, anteriormente preenchida.

6.2.4.2. A tarefa que inclui a identificação de regularidades

Os alunos da turma mostram compreender a situação associada à tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade e identificam algumas semelhanças com a tarefa anterior, em particular, o facto de haver uma tabela de preços incompleta.

A primeira proposta feita aos alunos (que corresponde à subtarefa 2 – Tarefa 30, Anexo 5) consiste no preenchimento de uma tabela de preços de sacos de maçãs com um custo unitário de 1,10€. Os alunos revelam bastante facilidade no seu preenchimento e a maior parte regista apenas o resultado nas várias celas da tabela. Quando Isabel lhes solicita que explicitem o modo como pensaram, muitos fundamentam o seu cálculo através de relações de dobro entre as diferentes quantidades e, consequentemente, entre os preços correspondentes. Há, contudo, muitos alunos que explicitam o uso de procedimentos aditivos, adicionando o número de sacos e fazendo a correspondência com o seu custo.

No cálculo do preço de seis, oito e 40 sacos de maçãs sobressaem os procedimentos multiplicativos usando relações de dobro mas persistem, também, procedimentos de adição. Estes consistem, quase todos, na adição de duas parcelas iguais, ou seja, para saber o preço de oito sacos adicionam o preço de quatro mais quatro sacos.

Nos seus registos escritos, há alguns alunos que identificam a regularidade da utilização da relação de dobro. Na discussão oral acerca desta tarefa, Duarte explicita a relação, realçando que esta pode suportar os procedimentos utilizados.

Duarte – Todos estes problemas se fazem com o dobro.

A sua afirmação está de acordo com os registos escritos que efetua com Bernardo, onde todos os cálculos são realizados através da relação de dobro.

$$\begin{aligned} 2 \times 3,30 &= 6,60 \\ 2 \times 4,40 &= 8,80 \\ 2 \times 22 &= 44 \end{aligned}$$

Figura 6.107 – Resolução de Bernardo e Duarte da subtarefa 2 – tarefa 30

A facilidade com que todos os alunos resolvem esta primeira subtarefa parece estar associada ao número 1,10 que faz emergir regularidades nos cálculos que lhes estão associados, apesar de este aspeto não ter sido explicitado pelos alunos, apenas foi realçado por Isabel durante a discussão final.

Os alunos parecem compreender o segundo problema (subtarefas 1.1 e 1.2. – tarefa 30, anexo 5) e resolvem-na também com facilidade. Alguns preenchem apenas a tabela sem justificar como calculam e, os que fundamentam os seus cálculos fazem-no, quase sempre, através de procedimentos multiplicativos. Os que privilegiam este tipo de procedimentos recorrem, sobretudo, a relações de dobro e à decomposição não decimal.

Enzo e Guilherme são um dos pares de alunos que usa procedimentos multiplicativos para efetuar os cálculos associados ao preenchimento da tabela. O par recorre ao preço de um saco, persistindo no procedimento multiplicativo associado ao preço unitário utilizado nos problemas anteriores.

$$\begin{aligned} 2 \times 1,60 &= 1,00 + 1,00 + 60 + 60 = 3,20 \\ \cancel{5 \times 1,60} &= \cancel{1,00 + 1,00 + 1,00 + 1,00 + 1,00} \\ 5 \times 1,60 &= 8,00 \\ 6 \times 1,60 &= 9,60 \\ 2 \times 8,00 &= 16,00 \\ 16,00 - 1,60 &= 14,40 \end{aligned}$$

Figura 6.108 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 1.1 – tarefa 30

Para determinarem os preços das diferentes quantidades de sacos, apesar de não registarem o modo como efetuaram todos os cálculos, parecem ter decomposto 1,60 em

1+0,60, tal como explicitam no primeiro cálculo. Na discussão final, Enzo clarifica como pensaram para calcular o preço de 2 sacos.

Enzo – Para saber o preço de dois sacos fizemos o dobro de um saco. E depois separámos um euro e sessenta e fizemos as contas. E fizemos: duas vezes um euro são dois e duas vezes 60 cêntimos são um euro e vinte.

Apesar de o registo escrito correspondente evidenciar o recurso à adição, a explicação de Enzo tem subjacente o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Este parece ser o procedimento que, muito provavelmente, está na base do cálculo do preço de cinco e de seis sacos. Para calcular o preço de dez sacos, os mesmos alunos usam um procedimento multiplicativo efetuando o dobro do preço de cinco sacos. Para determinar o preço de nove sacos recorrem ao preço de dez sacos e subtraem o preço de um, baseando-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, apesar de apresentarem apenas o registo $16,00 - 1,60 = 14,40$.

Na discussão final, Mariana apresenta o seu modo de pensar, semelhante ao de Enzo e de Guilherme, para calcular o preço de nove sacos:

Mariana – Pegámos no preço de dez sacos e tirámos o preço de um saco e deu 14 euros e 40 cêntimos.

O procedimento de compensação usado pelos pares Enzo/Guilherme e Eva/Mariana parece ser sugerido pela tabela, uma vez que primeiro surge para completar o preço de dez sacos e, logo na linha seguinte, o preço de nove sacos. Contudo, apesar de este procedimento ser usado por dez dos alunos da turma, ainda há os que, como Diogo e João, calculam o preço de nove sacos a partir da composição de outros já calculados.

Diogo – Nós fizemos seis sacos mais o preço de dois sacos mais um saco. E deu-nos 14 euros e 40 cêntimos.

Eva e Mariana, ao contrário de Enzo e Guilherme que seguem a ordem das linhas da tabela apresentada e calculam primeiro o preço de cinco sacos e só depois o preço de dez (Figura 6.108), começam por calcular o preço de dez sacos, apesar de, na tabela, este valor se encontrar depois do valor de cinco sacos. Eva explicita como pensaram:

Eva – Nós fizemos logo o preço de dez sacos pois sabemos o preço de um saco e deu-nos 16 euros.

Isabel – Exatamente! E depois?

Eva – E depois fizemos metade de 16 euros e deu-nos oito euros. E era o preço de cinco sacos.

As alunas recorrem ao seu conhecimento sobre a multiplicação com múltiplos de dez para saber o preço de dez sacos e, a partir daí, calculam o preço de cinco sacos, efetuando metade de 16€. Os seus registos escritos evidenciam que, em seguida, determinam o preço de 20 sacos, provavelmente, também a partir do preço de dez sacos, através de um procedimento de dobro

$$\begin{array}{l} 10 \times 1,60 = 16€ \\ 5 \times 1,60 = 8€ \\ 20 \times 1,60 = 32€ \\ 6 \times 1,60 = 9,60€ \end{array}$$

Figura 6.109 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 1.1 – tarefa 30

Eva e Mariana não explicam como calculam o preço de seis sacos mas Cristóvão, durante a discussão com toda a turma, clarifica como pensou com Tiago:

Cristóvão – Para sabermos o preço de seis sacos, fomos ao preço de dois e fizemos três vezes o preço de dois sacos.

Isabel – Muito bem! E depois?

Cristóvão – Depois fizemos três vezes três euros mais três vezes vinte cêntimos. E deu-nos nove euros e sessenta cêntimos.

Cristóvão explicita que calculou o preço de seis sacos multiplicando por três o custo de dois sacos. Contudo, apesar de ter raciocinado através de um procedimento multiplicativo e de, aparentemente, ter efetuado corretamente os cálculos através da decomposição de 3,20 em 3+0,20, os seus registos escritos evidenciam alguma dificuldade na realização dos mesmos, mostrando algumas hesitações. No que se refere, concretamente, ao preço de seis sacos os alunos escrevem primeiro 10,00€ e só depois 9,60€. Além disso, não apresentam quaisquer registos que apoiem os cálculos realizados.

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,60 €
2	3,20 €
5	8,00 €
6	9,60 €
10	16,00 €
9	14,40 €
20	32,00 €

Figura 6.110 – Resolução de Cristóvão e Tiago da subtarefa 1.1 – tarefa 30

Tal como em tarefas anteriores, muitos dos alunos parecem optar ora por procedimentos multiplicativos ora por procedimentos aditivos, contudo, Ana Rita e Miguel são um dos poucos pares que, nesta tarefa, recorre, quase sempre, a raciocínio aditivos. O procedimento que privilegiam é o uso da adição de duas parcelas iguais, que tem subjacente uma relação de dobro, ainda que não formalizada através da multiplicação. Para justificar o cálculo do custo de 20 sacos Ana Rita explica como pensaram.

Ana Rita – Fomos ao preço de dez sacos e juntámos outros dez sacos e deu-nos 32 euros.

Utilizando uma linguagem pouco rigorosa, em que confunde o número de sacos com o seu preço, a aluna explicita o seu raciocínio aditivo. O mesmo modo de pensar parece estar na base dos cálculos realizados por Ana Rita e Miguel para determinar o preço de quatro, 12 e 24 sacos, tal como evidenciam os seus registos escritos.

Nós fizemos $3,20 + 3,20$ que nos deu 6,40€.
 Nós fizemos $9,60 + 9,60$ que nos deu 19,20€.
~~Nós fizemos $19,60 + 38,40$ que nos deu~~ Nós fizemos
 $19,20 + 19,20$ que nos deu 38,40€.

Figura 6.111 – Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 1.2 – tarefa 30

Nesta subtarefa 1.2. muitos dos colegas (num total de treze alunos) procedem como Ana Rita e Miguel – calculam o preço de quatro sacos adicionando duas vezes o preço de dois, o preço de 12 sacos adicionando duas vezes o preço de seis e o preço de 24 sacos adicionando o preço de 20 com o preço de quatro sacos, recorrendo aos valores da

tabela. Ainda assim, há também alunos que usam procedimentos multiplicativos, associados a dobros ou a outros múltiplos de valores já calculados (num total de dez).

Na discussão coletiva associada a esta tarefa, Hugo e José explicam como pensaram para determinar o preço de 12 sacos de laranjas.

Isabel – E o preço de 12 sacos, como calcularam?

José – Pegámos no preço de seis sacos e multiplicámos por dois.

Isabel – Pois, porque 12 é o dobro de seis.

José – Fizemos duas vezes nove mais duas vezes 60.

Isabel – E o preço de 24 sacos?

José – Nós fizemos 19 euros e 20 cêntimos, o preço de 12 sacos, duas vezes.

Hugo e José calculam o preço de 12 sacos a partir do preço de seis sacos e o preço de 24 a partir do preço de 12, recorrendo a procedimentos multiplicativos associados a dobros. A sua explicitação oral está de acordo com os seus registos escritos.

Eu pensei em fazer 2 vezes 2. A seguir, fizemos 6 sacos vezes 2 da última, fizemos 12 sacos vezes 2.

$$\begin{array}{l}
 2 \text{ sacos} \times 2 = 6,40 \text{ €} \\
 6 \text{ sacos} \times 2 = 12,80 \text{ €} \\
 12 \text{ sacos} \times 2 = 25,60 \text{ €}
 \end{array}$$

2 x 3,20 = 6,40 €

2 x 9,60 = 19,20 €

2 x 19,20 = 38,40 €

Figura 6.112 – Resolução de Hugo e José da subtarefa 1.2 – tarefa 30

Na sua folha da tarefa os alunos explicam que multiplicam sempre por dois um valor já determinado antes. Os seus registos evidenciam que escrevem o fator dois à direita mas riscam essas expressões para voltarem a escrever outras em que o colocam à esquerda, parecendo desempenhar a função de multiplicador.

Há alunos que, na mesma tarefa, explicitam claramente que recorrem ao dobro para efetuar os cálculos propostos, tanto na discussão final como nos seus registos escritos. Bernardo e Duarte são um dos pares que explica que pensou “nos dobros”.

1.2. Quanto gastamos se comprarmos:

~~6,40€~~ 4 sacos de laranjas? *Pensámos no dobro de $\frac{5}{2} = 3,20€$*

~~19,20€~~ 12 sacos de laranjas? *Pensámos no dobro de $\frac{8}{6} = 10,60€$*

~~38,40€~~ 24 sacos de laranjas? *Pensámos no dobro de $\frac{5}{12} = 42,40€$*

Expliquem como pensaram.

~~19,20€~~ $2 \times 3,20€ = 6,40€$ $2 \times 10,60€ = 21,20€$

$2 \times 42,40€ = 84,80€$

Figura 6.113 – Resolução de Bernardo e Duarte da subtarefa 1.2 – tarefa 30

Nas aulas seguintes Isabel propõe o cálculo em cadeia, usando expressões multiplicativas em que o segundo fator é um número na representação decimal e onde são realçados, tanto procedimentos associados a dobros, como procedimentos que recorrem à compensação. Os números na forma decimal que são utilizados nos cálculos, tais como 0,25, 0,50, e 1,25 são números de referência e apelam ao contexto de dinheiro, apesar de Isabel não escrever no quadro o símbolo do Euro. Talvez por isso, os alunos resolvem os cálculos com bastante facilidade, usando procedimentos multiplicativos adequados às situações propostas.

Os procedimentos usados por muitos dos alunos na resolução das subtarefas 3.1. e 3.2. continuam a ser aditivos. De facto, cerca de metade dos alunos recorre a composições de preços já calculados para determinar outros preços. Contudo, uma vez que o preço de uma embalagem de sumo de pêssago é 0,99€, os vários cálculos associados revelam-se bastante complicados e há cinco alunos que preenchem a tabela incorretamente (subtarefa 3.1.).

Há, também, alunos que usam procedimentos multiplicativos associados ao preço unitário, tal como havia acontecido em tarefas anteriores. Alguns dos alunos, após terem efetuado os primeiros cálculos, tanto aditivos como multiplicativos, identificam a regularidade associada ao uso de um procedimento multiplicativo de compensação.

Enzo e Guilherme são um dos pares que começa a preencher a tabela recorrendo a um procedimento aditivo. Contudo, após identificar a regularidade que lhe permite calcular mais rapidamente, muda de procedimento e usa-a nos restantes cálculos.

1	0,99 €	
2	1,98 €	$0,99 + 0,99 = 1,98 €$
3	2,97 €	$3 € - 0,03 = 2,97 €$
5	4,95 €	$5 € - 0,05 = 4,95 €$
10	9,90 €	$10 € - 0,10 = 9,90 €$
9	8,91 €	$9 € - 0,09 = 8,91 €$
20	19,80 €	$20 € - 0,20 = 19,80 €$

Figura 6.114 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3.1 – tarefa 30

Estes alunos reconhecem que 0,99€ é muito próximo de um euro, mais concretamente, identificam que $0,99 = 1,00 - 0,01$ e, a partir do cálculo de três embalagens, recorrem sempre a um procedimento de compensação, pois multiplicam primeiro por um euro e efetuam depois a subtração, retirando os centimos “a mais”.

Na discussão final, uma vez que há grandes dificuldades na resolução desta tarefa e que alguns alunos não a resolvem corretamente e outros envolvem-se numa grande quantidade de cálculos que se revelam difíceis e morosos, Isabel desafia-os a explicar como pensaram, de modo a tornar evidente a regularidade que pode ser associada aos cálculos a realizar.

Gustavo – Para calcular duas vezes 99 centimos fiz 90 mais 90 e nove mais nove. E deu-me um euro e sessenta centimos e ...

Isabel – Não dá não, 90 mais 90 não é um euro e sessenta centimos. Vê na folha, se calhar enganaste-te.

Gustavo – Pois é, dá um euro e oitenta. E nove mais nove dá 18 centimos, deu 1,98€.

Isabel – Alguém pensou de outra maneira neste cálculo?

Guilherme – Podíamos pensar em dois euros menos dois centimos. Dá 1,98€. Porque 99 centimos é quase um euro.

Isabel – E três embalagens? Gustavo consegues pensar desta maneira?

Gustavo – Então pode ser três euros menos três centimos. São 2,97€.

Isabel – E cinco embalagens?

Diogo – Cinco euros menos cinco centimos, que são quatro euros e 95 centimos.

Raquel – E 20 embalagens são 19 euros e 80 centimos.

A discussão em torno dos vários modos de pensar mostra que os alunos identificam a regularidade associada ao procedimento multiplicativo de compensação.

Contudo, a análise dos seus registos escritos de Gustavo, Diogo e Raquel, evidencia que tiveram algumas dificuldades nos cálculos que realizaram.

Na explicitação oral, Gustavo começa por explicitar um procedimento aditivo, de acordo com que havia realizado na folha de tarefa. Contudo, parece compreender o modo de pensar de Guilherme, uma vez que, quando Isabel pergunta o preço de três embalagens, o aluno responde seguindo um raciocínio semelhante ao do colega e distante do usado nos seus registos escritos. Nestes recorre a procedimentos maioritariamente aditivos, que o conduzem a resultados incorretos.

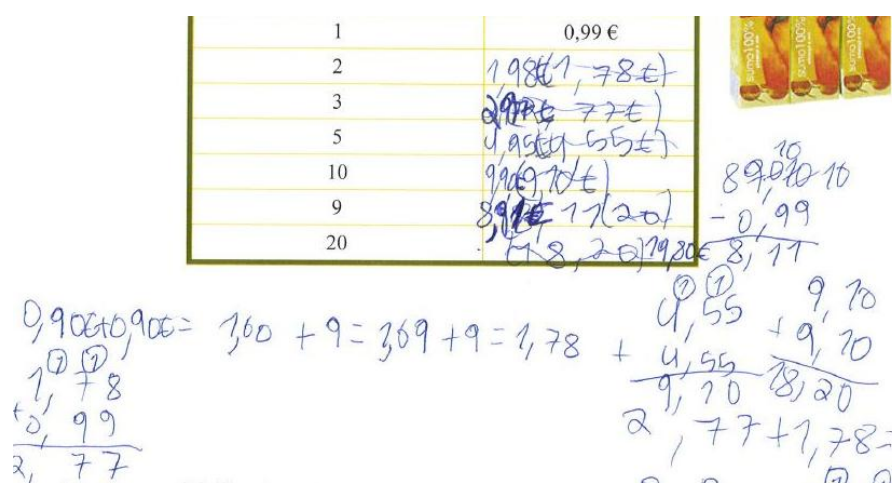


Figura 6.115 – Resolução de Gustavo da subtarefa 3.1 – tarefa 30

Os cálculos elaborados por Gustavo evidenciam as suas dificuldades. Começa por calcular $0,99 + 0,99$, decompondo $0,99$ em $0,90 + 0,09$, mas engana-se na adição que efetua, apesar de, mais tarde na discussão, conseguir corrigi-lo e verbalizá-lo corretamente. A partir daí, usa o algoritmo da adição e o da subtração (no cálculo do preço de nove embalagens a partir do preço de dez) mas chega a resultados incorretos, uma vez que utiliza o preço errado de duas embalagens.

Ainda na discussão final, depois de alguns alunos verbalizarem os seus raciocínios, tanto aditivos como multiplicativos, recorrendo ao preço unitário ou a procedimentos de compensação, Isabel tenta realçar as vantagens do uso do procedimento de compensação, neste caso particular, e pergunta aos alunos:

Isabel – Já vimos como pensaram de várias formas. Como acham que é melhor pensar?

Duarte – Será melhor pensar em um euro e tirar um cêntimo.

Isabel – E porquê?

Duarte – Porque assim não nos enganamos nos cálculos e é mais fácil.

Duarte sintetiza a facilidade do procedimento, associando-a ao facto de haver menos enganos. Com o objetivo de evidenciar a utilização deste tipo de procedimentos, Isabel propõe nas aulas seguintes a realização de cadeias numéricas nas quais são privilegiados cálculos baseados em procedimentos de compensação. As cadeias propostas são realizadas facilmente considerando que, por um lado, os alunos associam o número 0,99 a 99 cêntimos ou a um euro menos um cêntimo, apesar de o símbolo do Euro não ser escrito por Isabel no quadro. Por outro lado, é feita também, de imediato, a ligação com o procedimento de compensação usado na tarefa 30.

Em suma, os alunos continuam a usar procedimentos de tipo aditivo ou multiplicativo, de acordo com o que lhes parece ser mais adequado nas várias situações propostas. Os raciocínios de tipo multiplicativo fazem apelo, frequentemente, a relações do dobro ou a procedimentos de decomposição. Há, ainda, alunos que recorrem quase sempre a um procedimento multiplicativo associado ao custo unitário do bilhete, revelando indícios de raciocinarem proporcionalmente. Ainda assim, por vezes, os cálculos relacionados revelam-se complexos e com algumas incorreções.

No caso particular das tarefas que usam quantias monetárias próximas de números “redondos”, como 0,99€, há alunos que identificam a regularidade subjacente ao uso de um procedimento de compensação e o passam a usar em situações semelhantes. Os alunos que não identificam à partida este procedimento manifestam muitas dificuldades na resolução das tarefas associadas, uma vez que efetuam cálculos com 0,99 e com números da ordem das dezenas e centenas.

6.2.4.3. Síntese

Na compreensão dos problemas que incluem a multiplicação no seu sentido proporcional e que, no seu contexto, incluem os dados sob a forma de tabela, os alunos não revelam grandes dificuldades. O facto de o contexto das várias tarefas fazer apelo a preços parece, também, ter auxiliado a sua compreensão, uma vez que os alunos lhes

atribuem significados próximos de situações da vida real associadas a dinheiro e com as quais parecem lidar facilmente.

Na resolução das tarefas relacionadas com a multiplicação no seu sentido proporcional identificam-se, de um modo geral, três tipos de procedimentos usados pelos alunos – os que recorrem à tabela e efetuam a composição de preços usando, sobretudo, a adição; os que recorrem à tabela, mas usam ora a adição ora a multiplicação, de acordo com o que lhes parece ser mais fácil de acordo com os números envolvidos; e os que realizam os cálculos através do preço unitário que é dado.

Poucos são os alunos que utilizam sempre procedimentos de tipo aditivo e que parecem revelar pouca flexibilidade nos cálculos que precisam de realizar. O facto de muitos dos alunos umas vezes optarem por usar a adição e outras utilizarem a multiplicação, parece evidenciar o conhecimento que têm sobre esta duas operações e a relação entre elas, recorrendo àquela que, no seu entender, lhes facilita os cálculos a realizar em cada situação.

Os alunos que utilizam procedimentos multiplicativos tiram partido, principalmente, de relações associadas a dobros e a outros múltiplos, tais como múltiplos de dez, que parecem usar com bastante segurança, quando comparados com tarefas anteriores. Frequentemente, seleccionam os valores das tabelas que, no seu entender, melhor se adequam aos cálculos que necessitam realizar e recorrem a um procedimento que se baseia na multiplicação mas tem também subjacente um raciocínio proporcional, ainda que incipiente e informal.

O cálculo de diferentes preços a partir do preço unitário, usado por alguns alunos, parece basear-se no raciocínio proporcional, ainda que de uma forma pouco segura e formal. Nos procedimentos associados a este tipo de resolução, quando o cálculo se torna mais complicado por envolver fatores com dois algarismos e na representação decimal, os alunos evidenciam algumas dificuldades. Parecem não dispor de maneiras de calcular que considerem fiáveis e usem com confiança, recorrendo, por vezes, a procedimentos algorítmicos que ainda não dominam completamente. Em outras situações menos

complicadas recorrem a procedimentos de decomposição para efetuar os cálculos necessários.

Há ainda a realçar determinados procedimentos multiplicativos que alguns alunos registam, de modo organizado, sob a forma de tabela, provavelmente, sugerido pelas próprias tabelas dos enunciados propostos. Os números inseridos nessas tabelas são adequados aos cálculos a efetuar, o que denota um conhecimento aprofundado sobre os números e uma flexibilidade bastante grande no uso da multiplicação, tendo por base, também, um modo de raciocinar proporcionalmente.

Os procedimentos de ajustar e compensar, evidenciados no cálculo com preços cujos valores são representados na forma decimal e são muito próximos de números “redondos”, são usados pelos alunos com facilidade, sobretudo, depois de identificarem a regularidade associada. Alguns dos alunos identificam e utilizam este tipo de procedimento por sua iniciativa e desde os primeiros cálculos, enquanto outros o fazem, apenas, depois de constatar a sua adequação aos números envolvidos.

Seja nos procedimentos baseados na adição, seja nos que têm subjacente a multiplicação, os alunos usam frequentemente a decomposição dos números nos cálculos que realizam, separando a parte inteira dos números da parte decimal. Este aspeto parece decorrer do conhecimento que têm sobre o sistema monetário adquirido em contexto escolar e, sobretudo, na vida de todos os dias em que na linguagem oral se demarcam os euros dos cêntimos, reforçando o seu carácter aditivo.

As incorreções e as dificuldades que surgem na resolução das várias tarefas parecem estar ligadas, muitas vezes, não a questões relacionadas com a operação multiplicação mas a aspetos decorrentes das características dos números representados na forma decimal, do cálculo a eles associado e das ligações que é preciso fazer entre as suas várias representações. Esta ocorrência verifica-se, também, na resolução das tarefas do grupo – Multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal (secção 6.2.2.).

A progressão dos procedimentos dos alunos, tal como se verifica, também, a propósito da resolução de anteriores grupos de tarefas, não parece ser alheia à cultura de

sala de aula que tem vindo, progressivamente, a ser construída. As explicações e justificações dos alunos parecem ser cada vez mais rigorosas e completas, verificando-se uma maior precisão no modo como fundamentam os seus raciocínios, tanto no que se refere às suas intervenções orais como aos seus registos escritos.

No que diz respeito aos registos de alguns alunos, apesar de se verificar uma melhoria relativamente a outros realizados no âmbito de tarefas anteriores, identificam-se, ainda, pequenas imprecisões associadas à representação dos números na sua forma decimal e à articulação entre representações diferentes do mesmo número. Ainda assim, o registo sistemático no quadro dos raciocínios verbalizados nas discussões coletivas, usando simbologia matemática adequada, parece auxiliar os alunos a melhorar os seus próprios registos.

Frequentemente, o aspeto geral dos registos realizados pelos alunos na folha da tarefa parece ser bastante confuso e desorganizado. Para este facto contribui a regra, discutida entre mim e Isabel, e posteriormente discutida e aceite pelos alunos depois da sua sugestão, de escreverem a caneta e não apagarem os registos que correspondem a tentativas de resolução, ainda que mal sucedidas e, eventualmente, substituídas por outras.

As cadeias numéricas parecem contribuir para a evolução dos alunos em termos do recurso a procedimentos de cálculo baseados em relações que se estabelecem a partir das propriedades da multiplicação. Mas, tal como já foi afirmado a propósito de outros grupos de tarefas, a procura de relações é uma característica do trabalho com cadeias numéricas que os alunos já identificaram e que facilita os cálculos que realizam.

6.3. As dificuldades dos alunos

As dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução das tarefas que lhes são propostas e que fazem parte da experiência de ensino são de natureza e complexidade de várias ordens. Apresento, em seguida, as dificuldades que os alunos manifestaram e a interpretação da sua origem, organizadas em quatro grupos: associadas ao contexto das

tarefas, relativas aos números utilizados nas tarefas, na realização dos registos escritos e na compreensão dos raciocínios de outros. Descrevo, ainda, o modo como essas dificuldades foram geridas por Isabel, tentando que os alunos as ultrapassassem.

6.3.1. Associadas ao contexto das tarefas

Compreensão semântica. O contexto das tarefas parece, em alguns casos, ter-se revelado de difícil compreensão para os alunos, como consequência do seu desconhecimento sobre o significado de algumas palavras ou expressões utilizadas. Além disso, em algumas tarefas são efetuadas algumas afirmações e perguntas que parecem ter provocado, também, dificuldades nos procedimentos dos alunos.

Nas primeiras tarefas com números naturais, em particular, na tarefa 1 – Mercearia da Piedade, há alguns alunos que não conhecem o significado da palavra mercearia. Uma das razões para esse facto, apontada por Isabel em conversa informal numa das nossas reuniões semanais, está relacionada com o desaparecimento gradual deste tipo de estabelecimento no centro urbano onde se insere a escola, dando lugar a hipermercados onde os alunos vão, habitualmente, com os pais.

O enunciado da tarefa 7 – Cortinas parte de um pressuposto não explícito: habitualmente, quando se fala em uma cortina de uma janela, com duas partes, cada uma das partes corresponde a metade da cortina. Esta característica é adotada nas cortinas representadas nas várias imagens que compõem a tarefa. No entanto, esta especificidade, que assumi fazer parte do conhecimento comum sobre cortinas, é desconhecida, de início, da maior parte dos alunos da turma.

Na tarefa 17 – Contar moedas, a pergunta final do enunciado “Quantas moedas pode ter?” parece ter induzido os alunos a procurar uma única solução, uma vez que a palavra “quantas” sugere uma resposta de número singular e quantitativa. Este aspeto, aliado à dificuldade de lidar com mais do que um tipo de moedas, tem como consequência que apenas um par de alunos considera mais do que uma hipótese de solução.

Na tarefa 29 – Ida ao teatro (subtarefa 2) referem-se, no enunciado, os 23 alunos e a professora Isabel e solicita-se “o preço total dos bilhetes”. Contudo, apesar de se referir que a professora vai ao teatro com a turma, não é explicitado que o preço total inclui também o preço do bilhete da professora. Por isso, a grande maioria dos alunos efetua o cálculo apenas para 23 bilhetes e daí decorre a não utilização de procedimentos de cálculo adequados ao número 24, um número de referência selecionado expressamente para o problema em causa.

Compreensão associada à visualização espacial. Nas tarefas 8A e 8B, pátios do João e do Cristóvão, a figura que acompanha cada tarefa pretende ser uma imagem vista de cima de cada um dos pátios. Esta imagem a duas dimensões constitui um constrangimento para alguns alunos que não conseguem visualizar e interpretar a figura facilmente. Além disso, o facto de nem todas as pedras dos empedrados apresentados estarem visíveis, um requisito associado aos procedimentos de cálculo que, eventualmente, podem daí emergir, provoca algumas dificuldades, verbalizadas pelos alunos no início da resolução da tarefa e logo ultrapassadas. Questões muito semelhantes a esta última são colocadas por alguns alunos aquando da proposta de resolução da tarefa 16 – Contar moedas 1. No caso desta tarefa, são manifestadas algumas dificuldades no cálculo associado às moedas que estão tapadas, pois, de início, alguns alunos não contam com elas. Contudo, tal como acontece no caso anterior, a não visibilidade total das moedas é um requisito essencial e construído deliberadamente para esta tarefa.

Lidar com várias características em simultâneo. Questões de natureza diferente das supramencionadas surgem associadas às tarefas Carteiras de cromos (tarefa 4, subtarefas 2 e 3) e Contar moedas 2 (tarefa 17, subtarefas 4 e 5). O facto de, na tarefa 4, os alunos terem de lidar em simultâneo com conjuntos com cardinais diferentes, provoca alguns constrangimentos nos procedimentos que usam. Esta é uma das tarefas iniciais da experiência de ensino e o conhecimento ainda pouco profundo de alguns alunos sobre a multiplicação não lhes permite ultrapassar, sozinhos, esta situação. Por isso, nas suas resoluções escritas, a maior parte dos alunos apresenta apenas uma hipótese de solução. Apenas durante o congresso matemático, na discussão coletiva associada à tarefa referida, surgem outras soluções.

Na tarefa 17 – Contar moedas 2 surgem, também, dificuldades associadas ao facto de os alunos terem de lidar, ao mesmo tempo, com mais do que um tipo de moedas, para além de terem de pensar em mais do que uma alternativa de solução. Por isso, em alguns casos, nas suas resoluções escritas, os alunos apenas calculam considerando um tipo de moedas e, em outros, apresentam só uma das hipóteses possíveis.

Compreensão de contextos relativos à divisão. Ao longo de toda a experiência de ensino os alunos resolvem problemas cujo contexto faz apelo à operação divisão. No caso destes problemas e comparando com outros cujo contexto é de multiplicação, os alunos parecem revelar mais dificuldades na sua resolução, tendo sido evidente, em algumas situações, alguns retrocessos nos seus procedimentos.

Na subtarefa 3 da tarefa10 – Pilhas de caixas são identificados alguns obstáculos que parecem estar associados ao contexto de divisão. Os alunos têm grandes dificuldades na resolução deste problema, apesar de ser o terceiro de uma sequência de três e de terem resolvido os anteriores sem grandes constrangimentos. Para além disso, e aumentando as dificuldades que surgem, os alunos têm de usar, necessariamente, dados que não estão disponíveis no enunciado desse problema mas no do anterior.

Outros problemas de divisão que causam algumas dificuldades aos alunos são os incluídos na tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas (subtarefas 2 e 3). Estes são propostos numa altura em que, aparentemente, já dominam um conjunto de relações numéricas associadas à multiplicação que lhes permite resolvê-los sem grandes obstáculos. Contudo, o facto de envolverem a operação de divisão parece dificultar a sua resolução. Alguns dos alunos não os compreendem e, por isso não os resolvem e, outros voltam a recorrer a procedimentos menos potentes, relativamente aos que já utilizam em outras situações. Assim, há alunos que voltam a usar a adição de parcelas iguais, tanto no caso em que a parcela a repetir é igual a dois (subtarefa 2) como no caso em que a parcela é igual a 0,5 (subtarefa 3). No que se refere a este último caso, o facto de os números envolvidos estarem representados na forma decimal provoca dificuldades acrescidas na sua resolução.

6.3.2. Relativas aos números utilizados nas tarefas

Lidar com números “grandes”. Durante a resolução das primeiras tarefas, no início da experiência de ensino, os alunos revelam algumas dificuldades associadas ao cálculo com números “grandes”, com os quais não estão, ainda, habituados a lidar através da operação multiplicação. Por isso, quando tal acontece, como na primeira tarefa de cadeias numéricas (tarefa 3) e na tarefa 4 – Carteiras de cromos (subtarefa 3), verifica-se uma prevalência de procedimentos aditivos relativamente aos de tipo multiplicativo. Porém, na continuação do trabalho sobre a multiplicação observa-se um maior à vontade na utilização de procedimentos baseados nas propriedades desta operação, mesmo quando os números com os quais é preciso calcular são “grandes”.

Lidar com números racionais não negativos na representação decimal. Mais tarde, quando os alunos resolvem tarefas com números racionais não negativos, na representação decimal, o seu conhecimento, ainda pouco aprofundado, sobre estes números provoca-lhes dificuldades que têm como consequências, tanto o retorno a procedimentos pouco potentes, como o uso incorreto de alguns. Em certos casos, a pouca destreza no cálculo com números na representação decimal acarreta, para além de incorreções, a não resolução de algumas das tarefas, tal como acontece na tarefa 17 – Contar moedas 2 (subtarefa 6).

As dificuldades de alguns alunos, associadas ao conhecimento e cálculo com números na forma decimal, são evidentes em quase todas as tarefas que incluem números nesta representação. Assim, nas resoluções da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas e das tarefas com contexto de dinheiro – tarefa 13, 16 e 17, são identificadas algumas que dão origem a incorreções nos procedimentos de certos alunos e que parecem relacionar-se com o facto de os números envolvidos estarem na representação decimal. Concretamente, nas subtarefas 2 e 3 da tarefa 13, quase metade dos alunos não as consegue resolver ou resolve-as de modo incorreto.

Números em contexto versus números nas cadeias numéricas. No decorrer da experiência de ensino, de acordo com as opções tomadas, os alunos são confrontados com diferentes tipos de tarefas: problemas e cálculo numérico em cadeia.

Frequentemente, e também por opção, os números inseridos no contexto de um problema e com os quais é preciso efetuar cálculos, são os mesmos que são utilizados nos cálculos em cadeia. No entanto, a facilidade com que os alunos realizam os cálculos em cadeia, utilizando relações numéricas baseadas em propriedades da multiplicação, contrasta, muitas vezes, com a dificuldade que manifestam na realização do mesmo cálculo, quando inserido num contexto de problema. Apesar de a diferença referida parecer estar relacionada com as características das cadeias numéricas, visto que estas são um contexto no qual os alunos sabem que têm de reconhecer relações e estabelecer associações entre os vários cálculos, ela parece estar associada, também, ao facto de os alunos trabalharem primeiro os números em contexto de problema e, depois, os mesmos números no cálculo em cadeia. Por isso, muitas vezes, os alunos têm dificuldades em usar procedimentos potentes baseados em relações numéricas no contexto de problema, embora, posteriormente, no cálculo em cadeia seguinte, com os mesmos números, estes os reconheçam e usem as relações que, muitos deles, não conseguiram utilizar previamente. Ou seja, neste processo alternado de resolução de problemas e de cálculo em cadeia, o reconhecimento de relações já utilizadas parece fazer-se mais no sentido do problema para a cadeia do que em sentido inverso, uma vez que os números utilizados são, frequentemente, os mesmos.

6.3.3. Na realização dos registos escritos

Utilização de simbologia matemática. O uso adequado e rigoroso da simbologia matemática nos registos escritos parece ter constituído, por vezes, uma dificuldade para alguns alunos. No início, essa dificuldade parece estar relacionada com o próprio processo de aprendizagem da multiplicação e com a consequente introdução da simbologia apropriada, com a qual não estão habituados a trabalhar. O uso adequado do símbolo de multiplicação e o registo de expressões que traduzem o raciocínio dos alunos é uma aprendizagem gradual e que parece acompanhar a sua evolução em termos da própria operação e dos conhecimentos a ela associados. Assim, à medida que os alunos vão aprofundando os seus conhecimentos, vão também melhorando os seus registos

escritos. A esta evolução não parece ser alheia a ação de Isabel que, durante as discussões coletivas, regista no quadro, sistematicamente, os diferentes modos de pensar verbalizados pelos alunos, usando linguagem simbólica apropriada. Porém, uma dificuldade que, naturalmente, persiste durante mais tempo é a utilização desadequada do sinal de igual (=) por parte dos alunos. Uma vez que escrevem à medida que pensam, muitas vezes, usam sucessivos sinais de igual entre expressões, apesar de os membros da igualdade não serem, de facto, expressões iguais. Este tipo de incorreção manifesta-se, sobretudo, nos procedimentos de adição e subtração sucessivas. Assim, é mais evidente nas primeiras tarefas, em que muitos alunos optam, frequentemente, por procedimentos aditivos e na tarefa 19 – Coleccionar cromos, em que, por ser de divisão, alguns recorrem a procedimentos subtrativos.

A análise dos procedimentos dos alunos evidencia, também, algumas dificuldades relativas ao registo escrito de números na representação decimal, sobretudo nos relacionados com a grandeza dinheiro. O modo como na linguagem oral se diz, por exemplo, 1,5€ – um euro e cinquenta cêntimos, recorrendo à unidade principal, o euro, e a uma subunidade, o cêntimo, tendo subjacente um sistema de numeração oral aditivo, parece dificultar o seu registo escrito no começo do trabalho com números na forma decimal. Tal como se faz na oralidade, e decorrente da sua experiência com dinheiro fora do contexto escolar, os alunos realizam cálculos que envolvem quantias monetárias separando euros de cêntimos. Esse facto, apesar de inicialmente poder facilitar o cálculo mental dos alunos que, deste modo, calculam com números naturais, parece dificultar o registo escrito na forma decimal, onde a unidade de referência é o euro e os cêntimos são referidos e representados como “partes” do euro.

Apresentação e organização dos registos. A apresentação e organização dos registos escritos pelos alunos constituem, para alguns deles, e em determinados momentos, uma dificuldade. Frequentemente, apresentam só o resultado final, apesar de, nas diferentes tarefas, estar explícito que devem explicar como pensaram. Contudo, a explicitação do modo de pensar usando um registo escrito nem sempre é fácil para os alunos. Para este facto parece contribuir a falta de hábito que manifestam, tanto na explicitação por escrito como na verbalização do modo como pensam.

Uma vez que um dos objetivos de os alunos registarem por escrito os cálculos que realizam, para além do propósito principal de resolver uma tarefa é, também, o de os poder partilhar e debater com os colegas, as discussões coletivas e, sobretudo, os congressos matemáticos, parecem ter contribuído para uma melhoria no que diz respeito à sua apresentação e organização. De facto, os alunos tomam consciência da função essencial que os registos escritos desempenham na comunicação dos seus raciocínios, sobretudo quando é necessário ser compreendido e compreender os procedimentos dos seus colegas através da análise dos seus pósteres. Deste modo, apesar de os alunos terem tido dificuldades na elaboração dos primeiros pósteres, a propósito da tarefa 4 – Carteiras de cromos, vão tentando ultrapassá-las na construção dos pósteres posteriores. De facto, no primeiro congresso matemático os alunos dão-se conta que têm bastante dificuldade em compreender tanto os seus próprios registos como os dos seus colegas, em consequência do modo desorganizado como aqueles se localizam na folha de papel.

As mesmas dificuldades de apresentar e organizar os registos escritos são constatadas na resolução de outras tarefas que não implicaram a realização de pósteres num congresso matemático. Em algumas resoluções, por vezes, nem os seus autores conseguem perceber posteriormente os próprios registos. Especificamente na tarefa 30, alguns alunos apresentam dificuldades na organização dos seus registos, uma vez que têm de efetuar vários cálculos associados ao preenchimento das tabelas propostas.

6.3.4. Na compreensão dos raciocínios de outros

Compreender a explicitação oral do raciocínio de outros. A experiência de ensino baseia-se, entre outros aspetos, numa cultura de sala de aula na qual são valorizadas as discussões coletivas em que os alunos explicitam e fundamentam os seus raciocínios e modos de resolução das tarefas propostas. Todavia, frequentemente, alguns alunos revelam dificuldades na compreensão dos modos de pensar e dos procedimentos utilizados pelos seus colegas. Estas dificuldades parecem estar associadas a alunos que utilizam procedimentos mais informais e menos potentes na resolução de uma

determinada tarefa e não são capazes de compreender raciocínios mais elaborados que parecem constituem modos de pensar de um nível superior ao seu.

Dificuldades na compreensão de modos de pensar e de procedimentos diferentes dos seus são evidenciadas por alguns alunos durante as discussões coletivas e, em particular, durante os congressos matemáticos realizados a propósito de algumas tarefas. Este aspeto parece ser mais evidente quando as tarefas se revestem de alguma complexidade e, na sua resolução, alguns alunos utilizam procedimentos potentes e flexíveis, de acordo com os números em uso, enquanto outros, retornam a procedimentos menos potentes, mas mais seguros para eles.

Compreender os registos escritos de outros. No congresso matemático associado à tarefa 4 – Carteiras de cromos há alunos que não compreendem o procedimento de compensação, usado por um par de colegas, para calcular 6×8 . De facto a maior parte dos alunos ou já sabe automaticamente o valor de 6×8 , ou calcula-o através de procedimentos mais fáceis para eles, aditivos ou associados a decomposições parciais de um dos fatores, pelo que o procedimento referido se revela muito complexo e de difícil entendimento.

A propósito da tarefa 10 – Pilhas de caixas é realizado, também, um congresso matemático, no qual os alunos têm oportunidade de se aperceber dos procedimentos dos colegas através do visionamento dos pósteres na exposição. Nesse âmbito, são identificadas as dificuldades de alguns alunos na compreensão de um registo escrito, em particular, que consiste numa igualdade que inclui a multiplicação e o uso de parêntesis, que pretende traduzir um determinado modo de pensar. Muitos dos alunos não compreendem esse registo, apesar de os seus autores o terem justificado oralmente.

No congresso matemático associado à tarefa 20 – Máquinas de bebidas há alunos que utilizam procedimentos multiplicativos baseados nos múltiplos de 10, que não são entendidos por alguns colegas. Os que não os conseguem compreender são os que recorrem, na resolução do mesmo problema, a procedimentos aditivos e não são capazes de estabelecer a relação entre uns e outros.

6.3.5. A gestão das dificuldades dos alunos

No decurso da apresentação e exploração das tarefas, sempre que surgem dificuldades associadas à sua interpretação e/ou resolução, a professora tenta que os alunos as superem. De acordo com a natureza dessas dificuldades, Isabel gere o processo através do qual cria condições, sempre que possível, para que os alunos as ultrapassem.

No que se refere a dificuldades relacionadas com a compreensão do enunciado das tarefas propostas, Isabel tenta sempre que os esclarecimentos sejam dados por outros alunos. Por exemplo, no caso do significado da palavra mercearia, a propósito das primeiras tarefas, Isabel afixa no quadro a figura que acompanha a tarefa ampliada e, com a ajuda de alguns alunos que conhecem o significado da palavra, este é clarificado e é dado o exemplo concreto de uma mercearia, próxima da escola. Um comportamento semelhante é assumido a propósito do significado da palavra cortinas. A partir do momento em que é identificado o desconhecimento do seu significado, por parte de alguns alunos, o que poderia impedir a resolução do problema tal como foi pensado, Isabel esclarece-o com toda a turma, recorrendo ao conhecimento de alguns sobre cortinas.

Quando, sobretudo em tarefas que implicam lidar com várias condições ao mesmo tempo ou que têm mais do que uma solução, os alunos manifestam dificuldades na identificação dessas condições ou da existência de várias soluções, a professora desafia-os a encontrar outras soluções, ou propõe aos alunos que o fizeram que explicitem os seus raciocínios aos colegas. Por exemplo, na tarefa 4, considerando que a maior parte dos alunos apresenta apenas uma hipótese de resultado, durante o congresso matemático, Isabel incentiva-os a identificar outras soluções e estes recorrem a procedimentos multiplicativos que favorecem o surgimento de hipóteses diversas, embora não de modo exaustivo. Na discussão coletiva, os alunos são incentivados a explicitarem e fundamentarem as soluções encontradas e a pensarem nas hipóteses que não foram inventariadas anteriormente.

De forma a tentar minorar as fragilidades relacionadas com os números racionais não negativos na representação decimal, a professora propõe tarefas aos alunos cujo

contexto os auxilia a dar sentido a estes números, de modo a que estes adquiram significado. Nesse âmbito, organiza problemas cujo contexto reporta a garrafas de água de diferentes capacidades e a moedas com diferentes valores, associados a números de referência. Tanto no caso dos números relacionados com medidas de capacidade como nos relativos a quantias monetárias, Isabel constrói tabelas no quadro, com o auxílio dos alunos, de modo a evidenciar relações multiplicativas entre os vários números, procurando que aqueles estabeleçam sistemas de referência e relações numéricas que lhes sirvam de suporte aos cálculos. Também o apelo constante a situações familiares dos alunos em que recorrem a dinheiro e em que são capazes de estabelecer relações multiplicativas entre os diferentes valores monetários parece contribuir para minorar as suas dificuldades e permitir que evoluam em termos do cálculo multiplicativo.

O registo sistemático no quadro dos cálculos explicitados oralmente, recorrendo a linguagem simbólica rigorosa e apropriada, parece contribuir para facilitar a progressão dos alunos e permitir que ultrapassem as suas dificuldades nesse aspeto. Além disso, há a preocupação de estes estabelecerem ligações entre os registos do quadro e os que realizam nas suas folhas de tarefa, eventualmente menos rigorosos e precisos. A apresentação e organização dos registos associados à resolução de uma tarefa, bem como a explicitação dos raciocínios efetuados vai melhorando ao longo do tempo, uma vez que são sempre incentivados a fazê-lo, quer no próprio enunciado, quer oralmente, pela professora.

Quando as dificuldades manifestadas por alguns alunos estão associadas à não compreensão dos procedimentos usados por colegas, diferentes dos seus, quase sempre durante o momento de discussão coletiva, Isabel coloca questões que orientam a explicitação dos raciocínios dos alunos, de maneira a serem percebidos pelos colegas. Nessas ocasiões, os seus autores justificam oralmente o seu modo de pensar, clarificando-o perante os restantes colegas. Além disso, a professora tenta que os alunos estabeleçam pontes entre os diferentes raciocínios, tanto na sua explicitação oral como nos seus registos escritos. Para isso, coloca questões que orientam os alunos nas suas fundamentações e que os auxiliam a relacionar os diferentes registos entre si. Desafia, também, os próprios alunos a verbalizarem os seus raciocínios e a relacionarem-nos com

o modo como os registam no papel. Deste modo, os outros colegas conseguem entendê-los melhor e compará-los com os seus, estabelecendo pontos de contacto.

Em suma, as discussões coletivas são momentos privilegiados para que os alunos ultrapassem algumas das suas dificuldades associadas à compreensão da tarefa ou de procedimentos diferentes dos seus. Estas são orientadas pela professora, de maneira que esses obstáculos sejam ultrapassados, dando voz aos alunos e facilitando o estabelecimento de conexões entre modos diferentes de pensar.

6.3.6. Síntese

Os alunos manifestaram dificuldades de vária ordem quando resolveram as tarefas propostas por Isabel no âmbito da experiência de ensino – dificuldades associadas ao contexto, relativas aos números incluídos nas tarefas, na realização de registos escritos e na compreensão dos raciocínios dos colegas.

No que se refere às dificuldades associadas ao contexto, foram identificadas dificuldades de naturezas diferentes: associadas à compreensão semântica do enunciado, à visualização espacial, ao ter de lidar com várias características ao mesmo tempo e aos contextos relativos à divisão.

No que respeita às dificuldades relativas aos números utilizados nas tarefas, foram identificadas dificuldades dos alunos ao ter de lidar com números “grandes”, com números racionais não negativos na representação decimal e com os mesmos números em contexto *versus* nas cadeias numéricas.

Relativamente às dificuldades manifestadas pelos alunos na realização dos registos escritos estas estão ligadas à utilização da simbologia matemática e à apresentação e organização dos registos que efetuam.

Finalmente, as dificuldades dos alunos na compreensão dos raciocínios de outros estão associadas tanto à compreensão da explicitação oral do raciocínio de outros como dos registos escritos dos colegas.,

As dificuldades identificadas foram analisadas e interpretadas, sendo dadas evidências dos momentos e das tarefas em que aquelas se manifestaram. A sua gestão é efetuada por Isabel que, sempre que se apercebe dessas dificuldades, tenta criar condições na sala de aula de modo a criar condições para que sejam ultrapassadas. As discussões coletivas são momentos privilegiados onde isso acontece.

Capítulo 7

-

O sentido de número dos alunos

A caracterização dos aspetos do sentido de número revelados pelos alunos na resolução das tarefas propostas é um dos propósitos deste estudo, uma vez que permite compreender como este progride no âmbito de uma trajetória de aprendizagem da multiplicação construída, precisamente, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Esta progressão não é independente das tarefas propostas, em particular, dos seus contextos e dos números neles envolvidos e das discussões coletivas realizadas a propósito da sua resolução, dos congressos matemáticos e das cadeias numéricas. Assim, analiso o sentido de número manifestado pelos alunos da turma do 3.º ano, dando evidências a partir das suas produções e de episódios que considero relevantes, relativos a diferentes momentos de sala de aula. Nos casos em que me reporto a evidências já apresentadas anteriormente, faço referência às secções e capítulos em que estas foram analisadas.

Caracterizo o sentido de número dos alunos usando o quadro teórico elaborado por McIntosh et al. (1992) que inclui três componentes globais: o conhecimento e a destreza com os números, o conhecimento e a destreza com as operações e a aplicação do

conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo. Cada uma destas componentes, por sua vez, desdobra-se em componentes mais específicas (Ver o modelo global no Anexo 1), que funcionam como organizadores de secção deste capítulo. Ainda assim, neste capítulo, apenas realizo uma síntese dos aspetos do sentido de número associados à multiplicação, não os analisando detalhadamente, uma vez que esta operação é objeto de análise aprofundada nos capítulos anteriores. Esta opção tem como objetivo a não repetição de aspetos associados à análise da aprendizagem da multiplicação uma vez que esta se enquadra numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

7.1. O conhecimento e a destreza com os números

No início da experiência de ensino os alunos têm, de um modo geral, um conhecimento e uma destreza com os números naturais até 100 bastante aprofundada, que se vai desenvolvendo à medida que o universo numérico vai sendo ampliado com números da ordem de grandeza dos milhares. No que respeita aos números racionais não negativos na representação decimal, o conhecimento dos alunos vai-se construindo a par da experiência de ensino, uma vez que são introduzidos no 2.º período escolar do mesmo ano letivo.

7.1.1. Sentido da ordenação dos números

Os aspetos relacionados com o valor de posição, as relações entre os números e a ordenação de números do mesmo tipo, parecem estar consolidados para os números naturais até 100. De facto, os alunos revelam, na resolução das primeiras tarefas, compreender aspetos associados ao valor de posição e à ordenação dos números quando usam procedimentos de cálculo por contagem ou aditivos. Embora relativamente à compreensão da multiplicação estes procedimentos sejam pouco potentes, do ponto de vista do sentido de número, os alunos mostram que têm o sentido da regularidade dos números, pelo menos até 100, já desenvolvido. Em particular, os procedimentos de

contagem sistemática, de adição repetida e alguns já baseados na multiplicação, que utilizam na resolução das primeiras tarefas, evidenciam o conhecimento dos alunos sobre as regularidades associadas ao valor de posição.

À medida que os números incluídos nos problemas são cada vez maiores, os alunos vão-se apercebendo das suas regularidades e aplicam-nas nos cálculos que realizam. Gustavo constata uma característica do sistema de numeração decimal e expressa-a a propósito do cálculo $600+600$ na subtarefa 3 da tarefa 10 – Pilhas de caixas.

Gustavo – Professora, posso dizer uma coisa que descobri? Já que seis mais seis é 12, então 600 mais 600 é 1200 !

O sentido da ordenação dos números racionais não negativos na representação decimal, uma vez que estes são introduzidos no 2.º período escolar do ano letivo a que me reporto, vai sendo construído a par da resolução de tarefas de multiplicação incluídas na experiência de ensino, e de outras propostas pela professora, no âmbito do seu trabalho com estes números. A sua representação e construção são concretizadas através de exemplos, apoiados em contextos de medição de grandezas – capacidade, comprimento e sistema monetário. Nas primeiras tarefas os alunos comparam diferentes capacidades de garrafas de água e representam e ordenam os números associados por ordem crescente de grandeza. O mesmo acontece nas tarefas com contexto de dinheiro – os alunos representam, comparam e ordenam os diferentes valores das moedas existentes, relacionando-as entre si e com outros valores de referência (dez e vinte euros). Ainda assim, o sentido da ordenação dos números racionais não negativos na representação decimal é algo incipiente, dado o seu conhecimento muito recente e a sua pouca experiência no trabalho com este tipo de números.

7.1.2. Múltiplas representações dos números

No início da experiência de ensino, os aspetos associados às múltiplas representações dos números naturais parecem estar desenvolvidos, considerando as experiências numéricas anteriores dos alunos sobre as operações que têm vindo a

aprofundar. Assim, são capazes de representar um número, associado a uma quantidade, recorrendo às operações adição, subtração e, mais raramente, à multiplicação.

Luís e Raquel, numa das subtarefas da tarefa 1 – Mercearia da Piedade 1, onde é necessário calcular o número total de limões organizados em caixas segundo uma disposição retangular, identificam que cada fila tem três limões e determinam o total a partir daí. Nos seus registos apresentam um conjunto de cálculos:

The image shows a piece of paper with handwritten mathematical expressions in black ink. The expressions are arranged vertically and include:

1. $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$

2. $6 \times 3 = 18$

3. $9 + 9 = 18$

4. $2 \times 9 = 18$

5. $32 : 2 = 18 \frac{32}{2}$

Figura 7.1 – Resolução de Luís e Raquel da subtarefa 2 – tarefa 1

Os alunos começam por escrever uma expressão aditiva que lhes permite determinar o número de limões, num total de 18. Contudo, não ficam por aí, registam seis expressões diferentes cujo resultado pensam ser igual a 18. As quatro primeiras igualdades correspondem, efetivamente, a um modo diferentes de calcular o número de limões, pensando em filas de três limões ou em duas caixas com nove limões cada. Os dois últimos registos correspondem a outras tentativas, já não focadas no problema em si, de representar o mesmo número (ainda que incorretas). Os registos de Luís e Raquel evidenciam o seu conhecimento sobre algumas representações do número 18 – umas ligadas ao contexto da tarefa e outras usando apenas o conhecimento que têm sobre os números e as operações aritméticas. Talvez porque ainda não têm experiência suficiente sobre a multiplicação, a divisão e a relação inversa entre as duas, calculam incorretamente o dobro de 18, obtendo 32.

No início do trabalho com números racionais não negativos na representação decimal, a propósito da identificação de grandezas associadas a capacidades (tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas), Bernardo verbaliza uma “descoberta” sua sobre a representação dos números na forma decimal e o uso de diferentes representações do mesmo número.

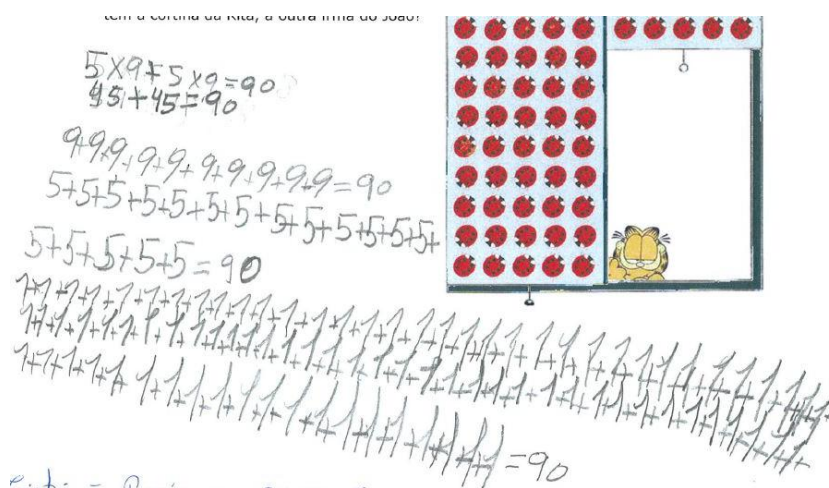


Figura 7.2 – Resolução de Cristóvão da subtarefa 4 – tarefa 7

corresponder, apenas, a modos diferentes de representar o número 90, suportados pela imagem, e não a cálculos efetuados. O conhecimento de Cristóvão sobre os números permite-lhe, no entanto, escrever todas as igualdades, que sabe serem equivalentes entre si.

O mesmo acontece com Diogo, na resolução de parte da tarefa 7, quando necessita determinar o número de flores de uma cortina, num total de 48.

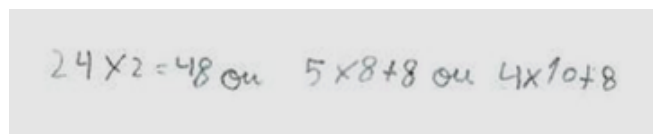

$$24 \times 2 = 48 \text{ ou } 5 \times 8 + 8 \text{ ou } 4 \times 10 + 8$$

Figura 7.3 – Resolução de Diogo da subtarefa 2 – tarefa 7

O aluno parece calcular o número total de flores da cortina contando as existentes na metade visível, provavelmente, uma a uma e multiplicando por dois. A seguir apresenta duas expressões cujo resultado é igual a 48, recorrendo a dois produtos conhecidos, ambos iguais a 40, usando o fator cinco e o fator dez. A resolução de Diogo mostra o seu conhecimento sobre os diferentes modos de representar 48 e 40, recorrendo a decomposições e a produtos equivalentes.

De um modo geral, as produções dos alunos evidenciam o seu conhecimento sobre os números naturais e as suas representações, recorrendo, sobretudo às operações adição e multiplicação. Em particular, o uso de procedimentos multiplicativos baseados em decomposições e composições de um dos fatores realçam o seu conhecimento sobre múltiplas representações dos números. Este seu conhecimento sobre as múltiplas representações dos números estende-se aos números maiores que 100, à medida que vão aprofundando o seu entendimento sobre a multiplicação. Nesse âmbito, nos seus procedimentos, privilegiam as decomposições decimais e as associadas a dobros.

No que se refere aos números representados na forma decimal, os alunos usam procedimentos associados a decomposições destes números, tanto nas tarefas associadas a medidas de capacidades como nas com contexto de dinheiro. Concretamente, efetuam em separado os cálculos parciais relativos às partes inteiras e partes decimais dos números envolvidos. A sua preferência por este tipo de procedimento é bastante evidente

nas tarefas 16 – Contar moedas 1 e 17 – Contar moedas 2, em cujas resoluções este é o mais usado pelos alunos.

A consciência das múltiplas representações dos números e da sua relação com o cálculo que é necessário efetuar em cada situação permite aos alunos, em algumas tarefas com contexto de dinheiro, efetuar os cálculos mais facilmente recorrendo a números expressos em cêntimos e apresentar, no final, o resultado em euros, ou seja, na forma decimal. Em alguns casos, embora não sendo tão frequente, o contrário também se verifica, apesar da maior dificuldade nos cálculos associados.

Leandra, numa parte da tarefa 16 – Contar moedas 1, quando é necessário perceber se é possível comprar uma carteira de cromos que custa 2,5€ com apenas 1,99€ e, em caso negativo, quanto dinheiro falta, revela algum conhecimento sobre as múltiplas representações dos números. Efetivamente, na resolução do problema utiliza as representações adequadas que lhe facilitam o cálculo. Começa por escrever 2,5 como 2,50 de modo a evidenciar os 50 cêntimos da parte decimal e compara 1,99 com o número dois, número de referência, que regista como 2,00, com duas casas decimais, compatibilizando-o com as outras representações. A passagem de umas representações para outras parece ter auxiliado Leandro na resolução da tarefa, cujo resultado escreve usando duas representações equivalentes, apesar de se enganar e escrever 199€ em vez de 1,99€.

2,5 ou 2,50
 199€ 2,00 faltava 0,50
 ? faltava 0,01€ + 0,50 = 0,51€ ou 51 cêntimos.

Figura 7.4 – Resolução de Leandro da sub tarefa 1 – tarefa 16

Tal como Leandro, a maior parte dos alunos da turma alterna entre representações em cêntimos e em euros, de acordo com o que, em cada situação, lhes facilita os cálculos a realizar. Além disso são capazes, progressivamente, de recorrer a decomposições e composições de números na representação decimal, de forma a agilizar o cálculo que é necessário efetuar em cada tarefa. Ainda assim, o conhecimento sobre estes números e as

suas múltiplas representações não parece estar ainda consolidado, dado o seu contacto recente com eles, tanto ao nível das suas experiências na vida real como do trabalho em sala de aula.

O uso de números de referência tais como múltiplos de cinco e de dez é evidente em alguns cálculos efetuados pelos alunos e está relacionado com as tarefas propostas. De facto há tarefas, tais como as tarefas 8A e 8B, que foram construídas de modo a privilegiar múltiplos de cinco e de dez.

Há, no entanto, situações em que os alunos recorrem ao uso de números de referência, sem que isso esteja diretamente ligado ao contexto da tarefa proposta. Por exemplo, Eva e Guilherme recorrem a um procedimento desse tipo para determinar 25×24 (ver Figura 6.55) na resolução da subtarefa 1 da tarefa 10 – Pilhas de caixas. Os alunos calculam primeiro 30×24 e subtraem 5×24 . Este seu modo de raciocinar evidencia, não só o seu conhecimento sobre uma representação do número 25 ($30 - 5$) mas também, o recurso ao fator 30, um múltiplo de dez, que lhes facilita o cálculo a realizar, como referem na apresentação da sua resolução durante a discussão coletiva.

7.1.3. Sentido das grandezas, absoluta e relativa, dos números

Os alunos manifestam algum sentido da grandeza dos números naturais, efetuando cálculos com números cada vez maiores, no seu sentido absoluto. Este aspeto é realçado na resolução adequada das tarefas propostas, sobretudo a partir da tarefa 10 – Pilhas de caixas, na qual é ultrapassado o “marco” dos milhares e em cuja resolução os alunos, no geral, não sentem grandes dificuldades com a grandeza dos números.

Na tarefa referida anteriormente, apesar de serem uma minoria, é evidente, também, a dificuldade de Maria Rita e Patrícia na análise da grandeza relativa do número correspondente à solução encontrada (14300), comparando-o com um dos dados do problema, 1200. Na subtarefa 3 dessa tarefa, é preciso determinar o número de caixas necessário para embalar 1200 maçãs em caixas com 48 maçãs cada. Maria Rita e Patrícia

interpretam incorretamente o problema, que inclui uma situação de divisão, e multiplicam o número total de maçãs pelo número de maçãs de cada caixa.

$$\begin{array}{r}
 1200 \times 48 + 1200 \times 40 + 1200 \times 8 \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 4800 \quad + \quad 9600 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 14300
 \end{array}$$

Figura 7.5 – Resolução de Maria Rita e Patrícia da subtarefa 3 – tarefa 10

No cálculo que realizam cometem alguns erros que não detetam, manifestando pouca sensibilidade para interpretar a grandeza relativa dos resultados encontrados. Calculam incorretamente 1200×40 e não identificam que 4800 é demasiado pequeno para ser o produto correspondente. Além disso, não conseguem interpretar o resultado 14300, em termos da sua grandeza relativa, comparando-o com o total de maçãs, 1200. Por isso, não descobrem a sua impossibilidade como solução do problema proposto.

Nas tarefas de divisão, em que muitos dos alunos constroem procedimentos multiplicativos, tirando partido da relação entre estas duas operações, é evidente que a maior parte manifesta o sentido da grandeza relativa dos números envolvidos. Efetivamente, os alunos têm de pensar num número que multiplicado pelo número com função de divisor (na divisão) é igual ou está próximo do número que tem a função de dividendo. Este modo de pensar implica comparar sistematicamente o número que se usa como fator com o número que tem funções de dividendo, de maneira a perceber quando se obtém o quociente. Este processo sucessivo de comparação é verbalizado por Cristóvão e Francisco quando, no congresso matemático justificam perante toda a turma o seu procedimento de resolução da tarefa 26 – Miniaturas de animais (ver transcrição a seguir à Figura 6.100, no capítulo 6).

No que se refere aos números racionais não negativos na representação decimal e à compreensão da sua grandeza absoluta e relativa, esta vai sendo consolidada à medida que os alunos vão realizando problemas com este tipo de números. Apesar de haver algumas evidências que, em situações relacionadas com as tarefas propostas, os alunos

são capazes de fazer comparações entre números representados na forma decimal e entre estes e números naturais, efetivamente, estes aspetos ainda não estão, ainda, muito consolidados, dada a sua pouca experiência com este tipo de números.

Na subtarefa 3.1. da tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade, cerca de metade dos alunos da turma é capaz de comparar os números na representação decimal aí apresentados com números de referência próximos. De facto, os alunos identificam que números tais como 0,99; 1,98; 2,97 estão próximos, respetivamente, dos números um, dois e três (que nesta situação significam quantias em euros), tirando partido dessa relação de proximidade e usando um procedimento de compensação. A perceção, ou não, desta proximidade condiciona bastante os procedimentos utilizados, uma vez que os alunos que não a identificam manifestam grandes dificuldades nos cálculos que realizam, quase sempre de forma incorreta.

7.1.4. Sistemas de referência

Os procedimentos usados pelos alunos da turma na resolução de tarefas de multiplicação com números naturais evidenciam que recorrem com facilidade a números de referência nos cálculos que efetuam. Esta facilidade está interligada, frequentemente, com os números incluídos nos contextos, também eles de referência. Assim, os alunos usam inicialmente múltiplos de cinco e de dez e, à medida que os números com os quais calculam são maiores, incluem outros números tais como múltiplos de 100 e de 1000. O uso destes números parece estar associado a uma maior facilidade e rapidez nos cálculos a realizar e, por vezes, à confirmação se um determinado resultado é adequado ao problema proposto.

No decurso do trabalho com números racionais não negativos na representação decimal, a propósito da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas, os alunos constroem uma tabela onde registam os números de referência 1; 1,5; 2; 2,5 (neste caso associados a medidas de capacidade) e representam-nos recorrendo uns aos outros e também ao número 0,5.

Quantidade de moedas (Capacidade)	quantidade de grupos moedas	quantidade de água (Total Capacidade)
0,5 l	$2 \times 0,5$ ou $0,5 + 0,5$	1,0 ml
0,5 l	$3 \times 0,5$ ou $1 + 0,5$	1,5 l
1,5 l / 0,5 l / 1 l	$1,5 + 0,5$ ou $4 \times 0,5$ ou $2 \times 1 l$	2 l
2 l / 0,5 l / 1 l / 1,5 l	$2 l + 0,5 l$ ou $5 \times 0,5$ ou $1 l + 1 l + 0,5 l$ ou $1,5 l + 0,5 l$ ou $1,5 l + 0,5 l$ ou $1,5 l + 0,5 l$ ou $1 l + 0,5 l + 0,5 l$	2,5 l

Figura 7.6 – Tabela construída por Cristóvão relacionando as capacidades 1l; 1,5l; 2l e 2,5l

Na sequência da construção da tabela anterior, todos os alunos ficam com o registo de um sistema de referências que apoia a resolução de outras tarefas com números na representação decimal. Nesse âmbito, evocam e usam, frequentemente, nos cálculos que realizam algumas das relações aí expressas.

O mesmo acontece para os números de referência associados ao contexto de dinheiro. Os alunos constroem uma tabela com relações importantes a propósito da tarefa 16 – Contar moedas 1, e, a partir daí, muitos deles apoiam-se nesse sistema de referências na resolução de outras tarefas.

Para além da preferência e do uso de números de referência, na sua aceção matemática, numa determinada fase, alguns alunos evidenciam uma predileção pessoal por múltiplos de 11, utilizando-os nos cálculos que efetuam. Este facto parece estar relacionado, provavelmente, com uma tarefa que realizam e cujo propósito é identificar regularidades nas várias tabuadas, até ao número 12 (Tarefa 24 – Regularidades nas tabuadas). A partir daí, alguns alunos usam múltiplos de 11 em certos cálculos, mesmo que não sejam os mais apropriados, porque constituem uma referência, ainda que pessoal.

Francisco recorre à sua referência pessoal sobre os múltiplos de 11 quando, no quadro, efetua uma divisão através de um cálculo em coluna, em que relaciona esta operação com a multiplicação. Ao obter o número 33 na subtração que realiza, identifica-

o como um múltiplo de 11, reconhecendo a regularidade associada aos algarismos iguais, e utiliza esse conhecimento para continuar o cálculo.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 93} \\ \underline{-60} \\ 33 \\ \underline{-33} \\ 00 \end{array}$$

$$20 \times 3 = 60$$

$$11 \times 3 = 33$$

Figura 7.7 – Resolução de Francisco de $93 \div 3$

Enquanto Francisco reconhece 33 como múltiplo de 11 e usa adequadamente esse facto, também Bernardo recorre à mesma referência pessoal, mas de outro modo. Este aluno, ao realizar a divisão $84 \div 7$, usa o número 11 para obter o múltiplo de sete (e de 11) mais próximo de 84, que é 77, e utiliza-o para determinar o quociente pretendido.

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 84} \\ \underline{-77} \\ 07 \\ \underline{-07} \\ 0 \end{array}$$

$$11 \times 7 = 77$$

$$12 \times 7 = 84$$

Figura 7.8 – Resolução de Bernardo de $84 \div 7$

7.1.5. Síntese

Relativamente ao conhecimento e à destreza com os números os alunos da turma do 3.º ano revelam conhecê-los e usá-los bastante bem, sobretudo quando se trata de números até 100. O conhecimento e a destreza com números racionais não negativos na representação decimal vão sendo construídos à medida que se desenvolve a experiência de ensino, e a par dela. Assim, evidenciam ter sentido da regularidade dos números naturais, mesmo com números superiores a uma centena mas, no que respeita aos números racionais não negativos na forma decimal, o sentido da regularidade a eles associado é ainda algo incipiente e pouco consolidado.

O mesmo acontece com as múltiplas representações dos números. No que se refere aos números naturais, os alunos mostram conhecer várias representações de um mesmo número, evidenciando, por vezes, o gosto em as registar e, sempre que necessário, utilizam a que consideram mais adequada em relação a determinado contexto. No que respeita aos números racionais não negativos na forma decimal os alunos vão evoluindo e vão sendo capazes de realizar composições e decomposições a propósito de tarefas que envolvem medidas de capacidade e os diferentes valores das moedas.

O sentido das grandezas, absoluta e relativa, dos números manifesta-se na maior parte dos alunos no que se refere aos números naturais. Nas tarefas de divisão este aspeto é particularmente evidente quando os alunos as resolvem através da multiplicação e têm de calcular o número que multiplicado por outro dado é igual ao que funciona como dividendo. Este modo de raciocinar exige a comparação sucessiva e sistemática entre dois números, que os alunos, de um modo geral, efetuam com bastante correção. Relativamente aos números racionais não negativos na forma decimal, há alguma evidência que os alunos são capazes de os comparar entre si e com números naturais mas esta é associada apenas a alguns números, quase todos de referência.

No que se refere ao recurso a números de referência, há tarefas que, explicitamente, os utilizam, o que tem como consequência que os alunos, naturalmente, lidem com eles. Além disso, a propósito dos números racionais não negativos na forma decimal, por sugestão da professora, foram construídas tabelas que relacionaram entre si números de referência associados a medidas de capacidade e a medidas do sistema monetário, a que os alunos recorriam sempre que necessário. Há a realçar, ainda, o uso de números de referência pessoal, tal como o número 11.

7.2. O conhecimento e a destreza com as operações

No início da experiência de ensino os alunos têm, de um modo geral, um conhecimento e uma destreza com as operações adição e subtração bastante consolidados no que se refere a números naturais e usam, de modo adequado, as suas propriedades nos

cálculos que realizam. Relativamente aos números na representação decimal, o seu conhecimento e destreza com a adição e subtração vão-se desenvolvendo, também, exterior e paralelamente à experiência de ensino, suportados por tarefas propostas pela professora Isabel.

No que se refere às operações multiplicação e divisão esse seu conhecimento, no início, é ainda algo incipiente e informal, uma vez que o seu desenvolvimento e aprofundamento constituem um dos propósitos da trajetória de aprendizagem que suporta esta experiência de ensino.

A observação da compreensão dos efeitos da divisão está circunscrita aos números naturais, uma vez que os alunos, no âmbito da experiência de ensino só resolvem tarefas de divisão com este tipo de números.

7.2.1. Compreensão do efeito das operações

Através da análise dos procedimentos dos alunos relacionados com as operações adição e subtração é possível perceber que estes compreendem os seus efeitos, sobretudo quando se trata de números naturais. Efetivamente, os alunos recorrem essencialmente à adição quando sentem dificuldades na resolução de tarefas de multiplicação. Quando resolvem problemas de divisão, e não relacionando esta operação com a multiplicação, utilizam tanto procedimentos aditivos como subtrativos, manifestando compreender os seus efeitos.

A compreensão dos efeitos da adição e da subtração com números na representação decimal não parece ser tão profunda como com os números naturais, considerando as experiências numéricas dos alunos neste âmbito, bastante recentes. Ainda assim, e provavelmente por analogia com o que sucede com os números naturais, os alunos parecem sentir-se seguros no seu uso.

A propósito da resolução da tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade, quando é preciso determinar o preço de oito pacotes de sumo, a partir do preço de um pacote (0,99€), Enzo e Guilherme recorrem à subtração. No seu procedimento revelam

compreensão sobre os efeitos desta operação, uma vez que identificam a regularidade que se obtém a partir do preço de um pacote e usam um procedimento de compensação. Ao efetuarem esta subtração, a percepção da regularidade através dos números que constituem o aditivo e o subtrativo permite-lhes escrever o valor do resto sem realizar quaisquer cálculos, ao contrário de outros colegas.

Handwritten calculations showing a pattern of subtraction from a decreasing price to find a constant remainder:

$$\begin{aligned} 3\text{€} - 0,3 &= 2,97\text{€} \\ 5\text{€} - 0,5 &= 4,95\text{€} \\ 10\text{€} - 0,10 &= 9,90\text{€} \\ 9\text{€} - 0,9 &= 8,91\text{€} \\ 20\text{€} - 0,20 &= 19,80\text{€} \end{aligned}$$

Figura 7.9 – Resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3.1 – tarefa 30

No início da multiplicação com números naturais há alunos que não compreendem os efeitos desta operação e, comparando dois produtos, associam o produto maior ao que tem como fator um número maior, sem ter a noção do efeito do produto em termos globais. Esta dificuldade é manifestada por Patrícia que, ao comparar 12×4 com 8×6 , antes de efetuar os cálculos, afirma que 12×4 é maior porque 12 é o número maior (ver subsecção 6.2.1 no que se refere à tarefa 4 – Carteiras de cromos).

Considerando o propósito do estudo que realizo, ao longo da experiência de ensino os alunos têm diversas oportunidades de aprofundar a sua compreensão sobre os efeitos da multiplicação e, conseqüentemente, este aspeto é analisado, com bastante detalhe, nos capítulos anteriores. A operação multiplicação é-lhes apresentada a partir de uma variedade de contextos e de números cada vez maiores, permitindo-lhes perceber a grandeza do produto em função dos fatores associados.

A compreensão sobre o efeito da multiplicação é evidenciada, concretamente, nos cálculos em cadeia, quando se altera um dos fatores, duplicando-o e, naturalmente, o produto também duplica. Por exemplo, no cálculo em cadeia (tarefa 12) realizado após a tarefa 10 – Pilhas de caixas, os alunos mostram compreender o efeito da multiplicação

quando calculam 20×60 a partir do produto $10 \times 60 = 600$, determinado anteriormente. Guilherme justifica o modo como pensou:

Guilherme – É 1200. Porque sei que 60×10 são 600. Como 20×60 é o mesmo que 60×10 duas vezes, então 20×60 é o dobro de 600.

Para justificar o mesmo cálculo, Duarte não recorre ao produto $10 \times 60 = 600$ e explicita:

Duarte – É 1200. Porque sei quanto é 2×60 , é 120. Por isso é só multiplicar por 10, porque 20 é 2×10 .

A compreensão do efeito da multiplicação de números na representação decimal só é possível de realçar quando apenas um dos fatores envolvidos é um número nesta forma. Nestes casos, esta operação é entendida pelos alunos como uma ampliação da multiplicação com números naturais. Efetivamente, aspetos relacionados com os efeitos da multiplicação com números racionais que contrariam a percepção que multiplicar significa obter sempre um número maior, não foram trabalhados no âmbito da experiência de ensino realizada.

A observação da compreensão dos efeitos da divisão, tal como referi no início desta secção, está limitada aos números naturais, uma vez que os alunos, no âmbito da experiência de ensino, resolvem apenas tarefas de divisão inteira e quase sempre exata, cujo resto é igual a zero.

Na resolução das tarefas de divisão, apesar de identificarem a divisão como a operação em causa e escreverem expressões usando a simbologia matemática apropriada, os alunos recorrem a procedimentos que privilegiam, sobretudo, a multiplicação. Em alguns casos, evidenciam dificuldades no uso da multiplicação e recorrem tanto à adição como à subtração. Ainda assim, quer recorrendo à multiplicação quer à adição e subtração, os alunos manifestam alguma compreensão sobre os efeitos desta operação, que parecem aprofundar à medida que resolvem mais tarefas e que, consequentemente, a sua experiência com a divisão aumenta. No cálculo em cadeia associado a esta operação é favorecida a sua relação com a multiplicação, considerando que este é um dos propósitos da experiência de ensino, fazendo assim depender a sua compreensão da desta operação.

Maria Rita, no cálculo em cadeia (tarefa 28) após a tarefa 26 – Miniaturas de animais, evidencia a sua compreensão sobre o efeito da divisão através da relação que estabelece com cálculos anteriores ($130 \div 13 = 10$), ao explicitar como calcula $143 \div 13$.

Maria Rita – É 11. Porque 130 a dividir por 13 dava 10. E vi que, de 130 para 143 faltam 13. Por isso é mais uma vez 13, logo 143 a dividir por 13 dá 11.

A explicação da Maria Rita mostra que a aluna parece compreender os efeitos da alteração do dividendo em termos do quociente a obter, fazendo a comparação com uma outra divisão calculada anteriormente.

Ainda na mesma tarefa de cálculo em cadeia, mas no âmbito de outra sequência de cálculos ($140 \div 14$; $154 \div 14$; $280 \div 14$; $294 \div 14$ e $266 \div 14$), há alunos que manifestam algumas dificuldades. Eva calcula mentalmente $266 \div 14$ e responde que é igual a 26. Imediatamente Bernardo exclama:

Bernardo – Como é que pode ser 26? Então se 294 a dividir por 14 é 21, como é que 266 a dividir por 14 pode ser 26? Então 266 é mais pequeno que 294! Não pode ser!

A justificação de Bernardo evidencia o seu conhecimento sobre o efeito da divisão, em particular, através da comparação dos dividendos e percebendo as suas consequências ao nível dos quocientes respetivos.

A compreensão dos alunos sobre o efeito da divisão parece estar ancorada no seu entendimento sobre os efeitos da multiplicação, nomeadamente, quando se altera um dos fatores. Por isso, muitos dos alunos que manifestam mais dificuldades na divisão são os mesmos que também revelam algumas dificuldades na multiplicação.

7.2.2. Compreensão das propriedades matemáticas

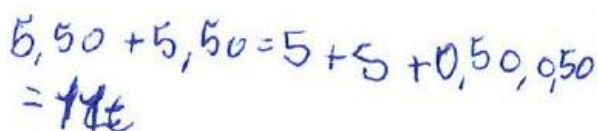
As propriedades da operação adição com números naturais parecem estar interiorizadas pelos alunos, que as utilizam nos cálculos sempre que consideram adequado, de modo a torná-los mais fáceis. Este facto é comprovado nos procedimentos aditivos que usam, nos quais não parecem ter dificuldades e em que recorrem, sobretudo, às propriedades comutativa e associativa, de acordo com os cálculos que são necessários

realizar. Uma evidência do uso da propriedade associativa da adição, tanto com números naturais como com números na representação decimal, é o recurso a procedimentos aditivos em que os alunos adicionam as parcelas duas a duas e, que representam, muitas vezes, através de um esquema em árvore.

Além das propriedades comutativa e associativa, a noção de que o número 0 (zero) é o elemento neutro da adição, ainda que não saibam a sua designação matemática, parece estar, também, perfeitamente interiorizado por parte dos alunos.

As propriedades da adição, compreendidas numa fase inicial em N_0 , são rapidamente integradas quando o universo numérico é ampliado para os números racionais não negativos na forma decimal. Esta integração é realçada nos procedimentos aditivos usados pelos alunos a propósito das tarefas com números nesta representação.

O conhecimento sobre as propriedades da adição é evidenciado, por exemplo, pelo par Eva e Mariana, quando precisam de calcular o preço de dez sacos de maçãs e o fazem a partir do preço de cinco sacos, usando a adição. Além disso, as alunas mostram, ainda, a sua compreensão sobre a decomposição de números na forma decimal.



$$5,50 + 5,50 = 5 + 5 + 0,50 + 0,50 = 11$$

Figura 7.10 – Resolução de Eva e Mariana da subtarefa 2.1 – tarefa 30

As alunas decompõem 5,50 separando a parte inteira da parte decimal e agrupando-as de modo a realizar os cálculos mais facilmente. Este seu procedimento evidencia o uso, ainda que não formalizado, das propriedades associativa e comutativa, uma vez que é equivalente a efetuar os cálculos seguintes:

$$5,50 + 5,50 = 5 + 0,50 + 5 + 0,50 = 5 + (0,50 + 5) + 0,50 = (5 + 5) + (0,50 + 0,50) = 10 + 1 = 11$$

No que diz respeito à multiplicação, os alunos rapidamente compreendem que esta operação, tal como a adição, goza da propriedade comutativa. Como sabem o nome da propriedade no caso da adição, são os próprios alunos a nomeá-la quando percebem que na multiplicação esta também “funciona”. Alguns deles fazem até questão, no início,

de a referir oralmente ou de a registar por escrito quando a usam, tal como acontece com Cristóvão em parte da tarefa 7 – Cortinas. O aluno escreve “adição com[u]tativa” referindo-se à propriedade comutativa da multiplicação, uma vez que representa 8×3 e 3×8 e sabe que o produto não se altera.

Handwritten mathematical work by Cristóvão. It shows several multiplication and addition problems. At the top, $8 \times 3 + 8 \times 3 = 48$ and $3 \times 8 + 3 \times 8 = 48$. Below these, there is a cloud-shaped bubble containing the text "adição comutativa". Further down, there are two rows of addition problems: $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$ and $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 48$.

Figura 7.11 – Resolução de Cristóvão da subtarefa 2.1 – tarefa 3

A exploração de tarefas que incluem a disposição retangular parece reforçar nos alunos o uso desta propriedade. Desde a sua resolução esta parece ser clara para todos, que trocam os fatores num produto sempre que consideram adequado.

À medida que vão aprofundando o seu conhecimento sobre a operação multiplicação a partir de situações diversificadas, os alunos têm a noção das particularidades do cálculo com o número zero (0) e com o número um (1), evidenciando alguma intuição associada à existência do zero (0) como elemento absorvente e do um (1) como elemento neutro e usam-nas sempre que é necessário. Uma das tarefas que contribui para tomar consciência das funções especiais que estes números desempenham na multiplicação é a tarefa 24 – Regularidades nas tabuadas, uma vez que os dois primeiros produtos de cada uma das tabuadas exploradas são $0 \times n$ e $1 \times n$ (com $n = 2, 3, 4, 5, 6, 9$ e 11). Apesar de não terem sido exploradas, explicitamente, as “tabuadas do zero e do um”, os alunos identificam as características particulares destes números a partir das restantes tabuadas analisadas. Na discussão coletiva, em que cada par apresenta as regularidades identificadas numa das tabuadas, Mariana verbaliza o que a maior parte dos alunos havia descoberto.

Mariana – Qualquer número multiplicado por zero dá sempre zero. E qualquer número multiplicado por um dá sempre esse número.

Também a propriedade associativa da multiplicação começa a ser usada pelos alunos, ainda que de modo informal, em situações em que a mesma parece auxiliar nos

cálculos que necessitam realizar. Estas situações estão relacionadas com o uso de múltiplos de 10 e com o recurso a relações de dobro e de metade.

Enzo e Francisco determinam 25×40 recorrendo ao uso de múltiplos de 10, nos cálculos intermédios da subtarefa 2 da tarefa 10 – Pilhas de caixas, tendo subjacente a propriedade associativa da multiplicação.

$$\begin{array}{c}
 25 \times 48 = 25 \times 8 + 25 \times 40 = 1200 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 200 \quad + \quad (25 \times 10) \times 4 \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad 250 \times 4 \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 200 \quad + \quad 1000 \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad 1200
 \end{array}$$

Figura 7.12 – Resolução de Enzo e Francisco de parte da subtarefa 2 – tarefa 10

Para realizar 25×40 , os alunos decompõem 40 em 10×4 e associam o número 10 ao fator 25. Calculam então 25×10 , tirando partido do fator 10, e multiplicam o produto encontrado por 4 (no póster enganam-se e escrevem 24). O uso de parêntesis, realçando a prioridade dos cálculos a realizar, muitas vezes relacionado com a propriedade associativa, é efetuado progressivamente, de modo rigoroso, pelos alunos da turma, tal como o fazem Enzo e Francisco no registo apresentado.

David e Diogo utilizam também a propriedade associativa, na mesma tarefa, para realizar um outro cálculo intermédio, 48×20 , tirando partido dos múltiplos de 10.

$$\begin{array}{c}
 48 \times 25 = 48 \times 20 + 48 \times 5 = 1200 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 960 \quad + \quad 240 \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad 1200
 \end{array}$$

R: É eu fiz $(48 \times 10) \times 2$ e deu-me 960 e (48×5) deu-me 240 e $960 + 240$ é 1200.

Figura 7.13 – Resolução de David e Diogo de parte da subtarefa 2 – tarefa 10

Estes alunos efetuam 48×20 transformando-a em $(48 \times 10) \times 2$, tal como explicam na resposta que escrevem. Deste modo recorrem também ao fator 10 e, em seguida, ao fator dois, realizando o cálculo de forma rápida e flexível, baseando-se na propriedade associativa da multiplicação.

A compreensão sobre a propriedade associativa está subjacente, também, a procedimentos que se baseiam em relações de dobro e de metade. O uso deste tipo de relação está bastante ligado a características particulares dos números envolvidos, uma vez que é mais fácil de identificar a possibilidade da sua utilização se, pelo menos, um dos fatores é um número par. Nesses casos concretos há alunos que conseguem reconhecer a relação e dela tiram partido nos cálculos que realizam, apesar de haver outros que manifestam alguma dificuldade no seu reconhecimento e utilização.

Na subtarefa 3 da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas, por exemplo, em que é preciso calcular o número de garrafas de meio litro necessário para perfazer um total de dois litros, cerca de metade dos alunos não recorre a uma relação do tipo dobro/metade, considerando que, a subtarefa 1 resolvida anteriormente, incluía uma situação idêntica, mas para o caso de garrafas de um litro. Provavelmente, o facto de, neste caso, a relação envolver um número na representação decimal dificulta a sua identificação e utilização.

Na subtarefa 3 da tarefa 10 – Pilhas de caixas, contudo, Duarte e Tiago conseguem estabelecer uma relação de dobro/metade, associando-a à subtarefa 2 e identificando que é necessário o dobro das caixas (50) para embalar o mesmo número de maçãs, visto que cada caixa leva metade das maçãs da caixa do problema anterior. Apesar de não registarem as igualdades em que se baseiam, os alunos explicitam um raciocínio (ver diálogo anterior à Figura 6.64) que tem subjacente a equivalência entre as igualdades seguintes, baseada na propriedade associativa da multiplicação:

$$25 \times 48 = 1200 \Leftrightarrow 25 \times (2 \times 24) = 1200 \Leftrightarrow (25 \times 2) \times 24 = 1200 \Leftrightarrow 50 \times 24 = 1200$$

No cálculo em cadeia, mesmo que um dos fatores da multiplicação esteja na representação decimal (tarefas 18 e 31) os alunos identificam este tipo de relação dobro/metade com mais facilidade do que em contexto de problema. Aparentemente, esta relação é bastante complexa, exigindo um domínio profundo dos números e das suas

propriedades, no entanto, em situação de cálculo em cadeia os alunos sabem que devem procurar relações e, por isso, identificam-na e utilizam-na para calcular.

As propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e à subtração são compreendidas pelos alunos à medida que resolvem tarefas de multiplicação, em particular, as que incluem nos seus contextos situações de disposição retangular, como as tarefas 7, 8A e 8B. O modo como estas são construídas sugere procedimentos baseados nas propriedades referidas e os alunos, de modo intuitivo e informal, começam a recorrer a elas nas suas resoluções.

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição surge associada a decomposições decimais e não decimais e parece ser, a propriedade da multiplicação a que os alunos mais recorrem nos cálculos que efetuam.

No início, e com fatores cujos produtos são inferiores a uma centena, alguns alunos recorrem a decomposições não decimais baseadas em dobros. Este facto aparece muito ligado a tarefas como a tarefa 7 – Cortinas, pois o contexto assim o sugere, uma vez que apenas metade de cada cortina é visível nas figuras que a acompanham. Mais tarde, a propósito das tarefas 8A e 8B, os alunos revelam compreender e usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição associada a decomposições decimais de um dos fatores.

Nos cálculos em que recorrem à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição os alunos trocam, frequentemente, os fatores usando a propriedade comutativa, e além disso, efetuam a distributiva à direita ou à esquerda, conforme lhes parece ser mais fácil.

Cristóvão e Hugo são dois dos alunos que usam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de modo flexível, de acordo com a facilidade dos cálculos que necessitam realizar. Este aspeto é evidente na sua resolução da subtarefa 2 da tarefa 10 – Pilhas de caixas, em que recorrem várias vezes a esta propriedade, decompondo o fator à direita ou à esquerda. Começam por apresentar três produtos parciais sugeridos pela figura que acompanha a tarefa e, em seguida, decompõem um dos

seus fatores. Para calcular 12×48 , decompõem o número 12, tirando partido da multiplicação por 10, enquanto para calcular 3×48 , decompõem o número 48.

$$12 \times 48 + 10 \times 48 + 3 \times 48 = 1200$$

$$10 \times 48 = 480$$

$$2 \times 48 = 96$$

$$480 + 96 = 576$$

$$3 \times 48 = 144$$

$$576 + 144 = 720$$

Figura 7.14 – Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10

Nos cálculos em cadeia foram construídas sequências que incentivam, através de relações suscetíveis de serem identificadas, o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo fatores à esquerda ou à direita. Aparentemente, os alunos, parecem ter mais dificuldade em identificar esta propriedade e recorrer a ela para calcular quando o fator “distribuído” está à direita, como na cadeia 14×5 ; 14×10 ; 14×9 ; 14×19 (tarefa 9).

Nas tarefas de multiplicação com números na representação decimal os alunos também recorrem à utilização da propriedade distributiva, tanto associada a decomposições decimais como não decimais de um dos fatores, mostrando algum entendimento sobre o seu uso. Por exemplo, Gustavo calcula o número de moedas de 20 centimos necessário para obter um total de 4€, numa parte da tarefa 17 – Contar moedas 2, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$10 \times 0,20 = 2€$$

$$10 \times 0,20 = 2€$$

$$2€ + 2€ = 4€$$

A Joana tem 20 moedas de 20 centimos

Figura 7.15 – Resolução de Gustavo de parte da subtarefa 6 – tarefa 17

O aluno recorre a dois produtos parciais iguais, que correspondem ao número de moedas necessário para perfazer 2€ e, a partir daí, infere o número de moedas necessário para obter 4€, baseando-se, ainda que intuitivamente, na propriedade referida.

Nos cálculos multiplicativos que envolvem números na representação decimal, alguns dos alunos tentam recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição separando a parte inteira da parte decimal de um dos fatores. Contudo, este cálculo parece ser difícil para os alunos, pois a multiplicação com números nesta representação e o uso desta propriedade não parece estar ainda tão consolidada como com os números naturais.

Enzo e Guilherme constituem um dos pares que faz a tentativa, sem sucesso, de usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para calcular $250 \times 1,25$, que corresponde ao preço de 250 bilhetes de teatro a 1,25€ cada, numa parte da tarefa 29 – Ida ao teatro. Decompõem 1,25 em $1 + 0,20 + 0,05$ para calcularem os produtos parciais mas não o conseguem fazer, provavelmente, pela presença dos números na representação decimal.

$$250 \times 1,25 = 210$$

$$250 \times 1 + 250 \times 0,20 + 250 \times 0,05$$

$$250 + 500 + 1250$$

$$2000$$

Figura 7.16 – Parte da resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29

Alguns alunos da turma revelam alguma compreensão, ainda pouco consolidada, sobre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Esta manifesta-se, sobretudo, na resolução de tarefas através de procedimentos de compensação associados a cálculos com números próximos de múltiplos de 10, no caso dos números naturais, e de números inteiros no caso de números na representação decimal.

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração não é frequentemente utilizada pelos alunos. Contudo, quando os números envolvidos nos cálculos a efetuar, fazem apelo ao seu uso há alguns que recorrem a ela. Por exemplo, nas tarefas 8A e 8B, há alunos que a utilizam para calcular 9×5 e 19×5 . Também na sub tarefa 1 da tarefa 17 há um par de alunos, Eva e Guilherme, que recorre a esta propriedade da multiplicação para calcular 25×24 , realizando primeiro 30×24 e subtraindo 4×24 .

A mesma propriedade está, também, subjacente aos procedimentos usados por alguns alunos no cálculo de preços relativos à sub tarefa 3.1 da tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade. Efetivamente, o preço unitário de 0,99€ e a necessidade de calcular o preço de várias quantidades de pacotes de sumo, fazem apelo ao seu uso. Nesse sentido, alguns alunos recorrem ao preço de 1€ e subtraem os cêntimos “a mais”, depois de identificarem a regularidade desse tipo de procedimento. Ainda assim, há muitos alunos que manifestam dificuldades no seu uso, mesmo quando os números assim o sugerem.

Relativamente a propriedades da divisão, os alunos revelam compreensão sobre o facto de o quociente da divisão por uma unidade corresponder ao dividendo e alguma perceção sobre ser possível decompor o dividendo e efetuar a divisão por “partes”. No que diz respeito a outras propriedades da divisão, tal como seria de esperar, dada a sua pouca experiência com esta operação, parecem ter ainda um domínio pouco profundo. Recorrem, sobretudo, a propriedades da multiplicação para justificar determinados cálculos no âmbito daquela operação, de acordo com um dos propósitos da experiência de ensino.

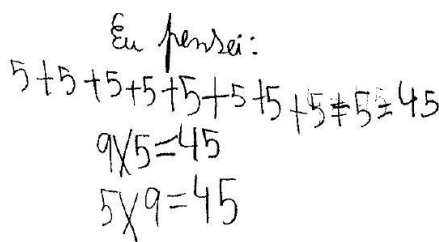
7.2.3. Compreensão das relações entre as operações

A experiência de ensino também incidiu sobre a relação da multiplicação com as outras operações aritméticas. Deste modo, a compreensão das relações entre as operações está subjacente a todo o trabalho desenvolvido, exceto no que se refere à interligação entre a adição e a subtração. Por isso, esta característica do sentido de número, associado ao conhecimento e a destreza com as operações, está intrinsecamente presente em toda a

experiência de ensino, tendo sido analisada, de modo exaustivo, no capítulo sobre os procedimentos dos alunos e a sua evolução. Refiro apenas, nesta subsecção, alguns aspetos que evidenciam a relação entre a multiplicação (e a divisão) e as outras operações.

No início da experiência de ensino os alunos realizam as tarefas de multiplicação privilegiando, naturalmente, procedimentos aditivos e, frequentemente, registam na mesma resolução procedimentos aditivos e multiplicativos, mostrando perceber a interligação entre as duas operações.

Raquel, na resolução da subtarefa 4 da tarefa 8A – Pátio do João regista na sua folha procedimentos aditivos e multiplicativos equivalentes, evidenciando a relação entre a adição e a multiplicação.



Eu pensei:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 45$$

$$9 \times 5 = 45$$

$$5 \times 9 = 45$$

Figura 7.17 – Resolução de Raquel da subtarefa 4 – tarefa 8A

A relação entre a multiplicação e a divisão é visível em quase todos os registos dos alunos associados a tarefas de divisão, uma vez que o realçar desta relação é parte integrante da experiência de ensino. Ainda assim, há alunos que não compreendem com facilidade a relação entre estas duas operações e, por isso, não tiram partido dela nas suas resoluções, sobretudo nas primeiras tarefas que realizam. Nesses casos recorrem a procedimentos de adição e subtração, relacionando estas duas operações com a divisão. Contudo, à medida que os números incluídos vão sendo maiores, os procedimentos aditivos e subtrativos revelam-se pouco potentes, muito morosos e suscetíveis de enganos. Assim são substituídos, progressivamente, por procedimentos multiplicativos a partir do momento, não coincidente para todos os alunos, em que estes se apercebem das suas potencialidades. Para esta evolução parece ter contribuído a introdução do modelo retangular para apoiar a divisão.

7.2.4. Síntese

Quando se inicia a experiência de ensino, os alunos da turma de 3.º ano têm conhecimento e destreza relativamente à adição e subtração de números naturais. Já no que respeita aos números racionais não negativos na forma decimal o conhecimento e a destreza com as operações adição e subtração não parecem tão desenvolvidos e vão sendo consolidados na experiência de ensino e a par dela, na resolução de tarefas propostas pela professora.

A compreensão dos efeitos da multiplicação com números naturais e das suas propriedades vai sendo aprofundada ao longo da experiência de ensino. Há evidências, também, que os alunos mostram compreender as propriedades da multiplicação, aplicando-as sempre que necessário. Esta compreensão foi evoluindo e, se no início, usavam esporadicamente e de modo intuitivo, a propriedade comutativa ou a propriedade distributiva, com o avançar da experiência de ensino, esse uso parece ser mais sistemático e de cada vez que, do ponto de vista dos alunos, lhes facilita os cálculos a realizar. Para além de utilizarem as propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, mostram saber usar o elemento neutro e o elemento absorvente.

No que respeita ao conhecimento e destreza com a operação multiplicação no universo dos números racionais não negativos na representação decimal, estes restringiram-se ao caso em que um dos fatores é sempre um número natural e, por isso, os alunos encaram-na como uma ampliação da multiplicação com números naturais.

O conhecimento e a destreza associados à operação divisão foram limitados aos números naturais e à divisão inteira, quase sempre exata. Nesse âmbito os alunos aprofundam a compreensão sobre a divisão sempre interligada à compreensão sobre a multiplicação. Deste modo evidenciam compreender, ao longo do tempo, os efeitos desta operação e recorrem às suas propriedades, apoiados, quase sempre, no conhecimento que têm da multiplicação e das suas propriedades.

No que respeita à compreensão das relações entre as operações é visível, sobretudo, e considerando os propósitos da experiência de ensino, o conhecimento dos alunos sobre a relação entre a adição e a multiplicação e entre esta operação e a divisão.

7.3. A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

No início da experiência de ensino, os alunos da turma do 3.º ano têm algum conhecimento sobre os números e as operações (adição, subtração) e usam-no em situações de cálculo. O seu conhecimento, ainda pouco formalizado, relativamente às operações multiplicação e divisão é aprofundado ao longo de toda a experiência de ensino.

O desenvolvimento da compreensão dos alunos para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários, no sentido de reconhecer a necessidade de usar ou não dados e soluções aproximados, segundo a perspetiva McIntosh et al. (1992), não constituiu uma das finalidades da experiência de ensino, pelo que não me parece fazer sentido analisar este aspeto nesta secção. Apenas na subtarefa 3 da tarefa 30, referida numa subsecção anterior, os alunos poderiam efetuar primeiro os cálculos com dados aproximados, usando um procedimento de ajuste e compensação para chegar à solução que se pretendia exata.

A análise relativa à subcategoria do sentido de número denominada por inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes, também não é realizada no que se prende com a seleção, ou não, da calculadora para realizar determinados cálculos, uma vez que os alunos, no âmbito da experiência de ensino que realizei, não a utilizaram como meio de cálculo.

O reconhecimento da razoabilidade dos dados, incluída na categoria sensibilidade para rever os dados e os resultados também não é analisado no contexto da experiência de ensino realizada, uma vez que este aspeto não fez parte do seu propósito. Assim

sendo, considerando o quadro de análise, analiso as outras subcategorias associadas à sensibilidade para rever os dados.

7.3.1. Consciencialização da existência de múltiplas estratégias

Os alunos da turma do 3.º ano parecem ter consciência da existência de variadas estratégias de resolução das tarefas que lhes são propostas. Nesta secção uso o termo estratégias, referido por McIntosh et al. (1992) e o termo procedimentos, utilizado neste estudo, considerando-os sinónimos.

A capacidade para criar e/ou inventar estratégias é visível na contabilização do número de procedimentos em cada tarefa e subtarefa incluída na experiência de ensino (ver tabelas 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 no capítulo 6, sobre a caracterização e evolução dos procedimentos usados pelos alunos). Efetivamente, há tarefas que são resolvidas através do uso de cinco tipos de procedimentos diferentes, como por exemplo a subtarefa 4 da tarefa 7 – Cortinas. Além disso, há alunos que, perante um determinado contexto, concebem um procedimento que se revela improdutivo e são capazes de voltar a pensar num outro, de modo a prosseguir na procura de uma solução. Cristóvão e Mariana, por exemplo, na resolução da subtarefa 2 da tarefa 20 – Máquina de bebida, uma situação de divisão, começam por usar um determinado procedimento mas percebem que não é o adequado.

Figura 7.18 – Parte 1 da resolução de Cristóvão e Mariana da subtarefa 2 – tarefa 20

Os alunos tentam um procedimento aditivo, que abandonam, optando depois por dois procedimentos multiplicativos, usando a decomposição decimal e o algoritmo. Finalmente, ao perceberem que os procedimentos utilizados se revelam improdutivos, Cristóvão e Mariana são capazes de construir um outro procedimento, de tipo subtrativo, mais eficaz na sua perspectiva, que os conduz à solução correta da tarefa proposta.

Figura 7.19 – Parte 2 da resolução de Cristóvão e Mariana da subtarefa 2 – tarefa 20

Para além de situações como a anterior, em que os alunos usam diferentes procedimentos para resolver o mesmo problema e são capazes de os avaliar para perceber

se são os adequados para encontrar a solução, há outras evidências que mostram que os alunos têm capacidade de inventar procedimentos distintos em tarefas diferentes. Com efeito, o mesmo aluno ou par de alunos, de acordo com a tarefa proposta, o seu contexto e os números aí incluídos, é capaz de utilizar procedimentos adequados e distintos de outros que já usou anteriormente.

Os alunos da turma são capazes, de um modo geral, de reconhecer estratégias diferentes das suas, tanto através de registos escritos dos colegas como quando ouvem explicitações orais do seu modo de pensar. Para esta compreensão parecem ter contribuído, por um lado, as tarefas propostas, que são suficientemente abertas para poderem ser resolvidas através de uma diversidade de procedimentos, de acordo com os diferentes modos de pensar de cada aluno ou de cada par de alunos. Por outro lado, a cultura de sala de aula construída, onde as discussões coletivas têm um papel fundamental na apresentação e justificação das resoluções dos alunos também parece ter auxiliado a sua capacidade para reconhecer estratégias diferentes. Nessas discussões os alunos têm contacto com as resoluções dos seus colegas, tentam compreendê-las e, muitas vezes, compará-las com as suas, em termos de eficácia, morosidade e suscetibilidade a enganos e incorreções.

Na discussão final da tarefa 19 – Colecionar cartas, por exemplo, os alunos apresentam os seus modos de resolver a subtarefa 2, bastante diferentes uns dos outros, uma vez que, sendo a primeira do grupo de tarefas de divisão (apesar de já terem sido propostas outras, integradas em tarefas de multiplicação), há os que recorrem a procedimentos aditivos, subtrativos e multiplicativos. De modo a dar a conhecer e a discutir a diversidade de procedimentos utilizados, Isabel, auxiliada pelos respetivos autores, regista um de cada tipo no quadro. Assim, ficam registados os procedimentos de Joana (de tipo subtrativo), de Tiago (de tipo aditivo), de Luís (de tipo multiplicativo) e de Duarte (de tipo multiplicativo, relacionando explicitamente com a divisão).

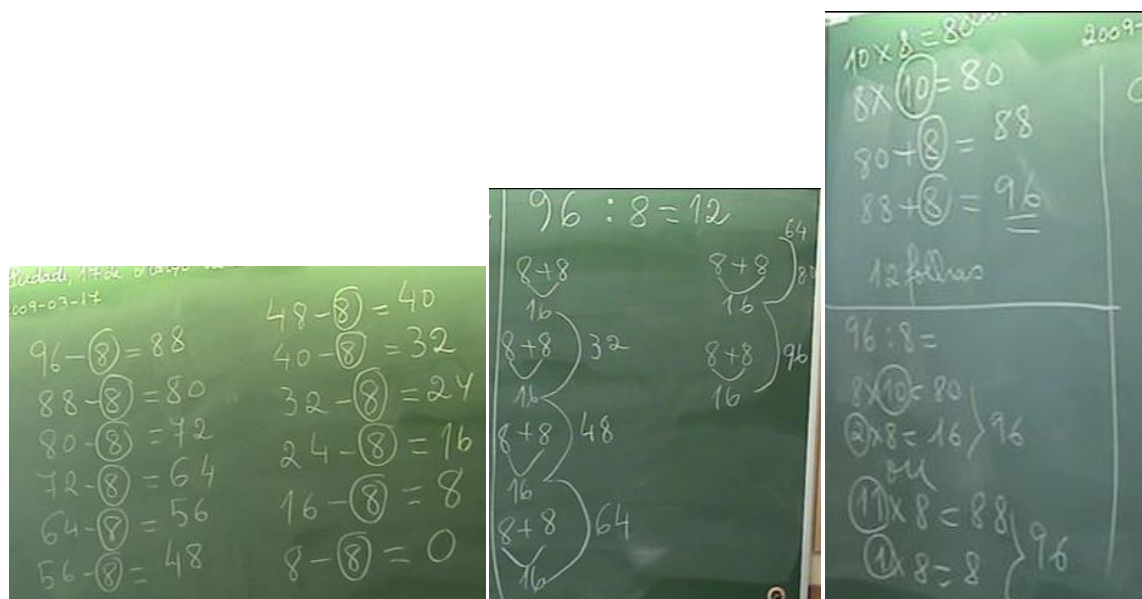


Figura 7.20 – Excertos dos registos no quadro relativos às resoluções de Joana, Tiago, Luís e Duarte da sub tarefa 2 – tarefa 19

A partir da observação dos registos do quadro, que têm subjacentes diferentes modos de pensar, os alunos tomam consciência da diversidade de procedimentos que são usados na turma para resolver a mesma tarefa. Além disso, são capazes de os comparar, identificando os mais morosos e mais suscetíveis de enganos. Efetivamente, Duarte, referindo-se aos procedimentos aditivos e subtrativos, explica: “É que são muitos cálculos e eles podem-se enganar”. Esta tomada de consciência é também assumida por outros alunos da turma que evidenciam compreender que os procedimentos multiplicativos e a sua relação com a operação divisão facilitam os cálculos a realizar. Os alunos da turma mostram compreender que as resoluções de Luís e de Duarte, que começam pelo produto 10×8 (Luís escreve 8×10), tirando partido do fator 10, baseiam-se em cálculos mais eficazes do que os anteriores. Durante a discussão destas resoluções ainda surge um outro procedimento, recorrendo ao produto 11×8 , que alguns alunos também consideram fácil e rápido (registado no canto inferior direito da figura 21), dado o conhecimento e a experiência que têm com múltiplos de 11 e o gosto em os usar nos cálculos.

A diversidade de procedimentos usados pelos alunos da turma, associados à sub tarefa 1.2. da tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade, com números na representação decimal, é evidenciada na tabela relativa à frequência dos procedimentos dos alunos

subtarefa a subtarefa (tabela 6.5 no capítulo 6, sobre a caracterização e evolução dos procedimentos usados pelos alunos). Alguns deles são apresentados na discussão coletiva à volta da tarefa, em que os alunos são capazes de comparar e reconhecer resoluções diferentes das suas. Assim, quando a professora lhes solicita que apresentem resoluções para calcular o preço de 12 e de 24 sacos de laranjas com um preço unitário de 1,60€, surgem justificações diferentes.

José – Fizemos o preço de seis sacos e multiplicámos por dois. E deu-nos 19 euros e 20 cêntimos.

Guilherme – Nós fizemos 16 euros mais três euros e 20 cêntimos, o preço de dez sacos com dois sacos de laranjas.

Francisco – Para saber o preço de 24 sacos, fizemos o preço de 20 sacos, 32 euros e somámos o preço de quatro, seis euros e 40 cêntimos e deu-nos 38 euros e 40 cêntimos.

José – Para saber o preço de 24, nós fizemos 19 euros e 20 duas vezes, que é o preço de 12 sacos.

Enquanto José usa procedimentos baseados numa relação de dobro para calcular o preço de 12 e de 24 sacos de laranjas, Guilherme recorre a um procedimento aditivo, calculando o preço de 12 sacos a partir dos preços de dez e dois sacos. Também Francisco utiliza um procedimento aditivo, determinando o preço de 24 sacos através dos preços de 20 e de quatro sacos.

Ao longo da experiência de ensino os alunos vão aperfeiçoando a sua capacidade para seleccionar um procedimento eficaz, tendo em conta a multiplicidade de tarefas que lhes são propostas e a diversidade, também, de procedimentos dos colegas com que vão contactando, para além dos que constroem por si próprios. Este aspeto está, naturalmente, relacionado com as finalidades da experiência de ensino.

7.3.2. Inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes

Tal como referi na subsecção anterior, os propósitos da experiência de ensino e, consequentemente, a multiplicidade de tarefas que são propostas aos alunos e as discussões coletivas baseadas nas suas diversas resoluções, parecem ter contribuído para os alunos compreenderem que há procedimentos mais eficazes do que outros.

Efetivamente, de acordo com as finalidades da trajetória de aprendizagem prevista e concretizada, a compreensão da operação multiplicação (incluindo a sua relação com a divisão) passa por utilizar, nas resoluções das tarefas propostas, procedimentos baseados nas propriedades desta operação, mais potentes e eficazes. Assim, tarefa a tarefa, cada aluno ou par de alunos constrói a sua resolução e, muitas vezes, compara-a com a dos colegas, sendo identificada (ou não) a sua eficácia.

Considerando a evolução natural dos procedimentos, decorrentes da trajetória de aprendizagem da multiplicação concretizada, há muitos alunos que desenvolvem também a sua apetência para utilizar procedimentos mais rápidos e eficazes. Estes estão relacionados com o uso adequado de relações numéricas, baseadas nas propriedades das operações, em particular da multiplicação e decorrentes, frequentemente das características particulares dos números envolvidos nos cálculos. Além disso, todo o trabalho realizado à volta das cadeias numéricas parece contribuir, também, dadas as suas características particulares, para que os alunos consigam usar, cada vez mais, procedimentos eficazes. Contudo, ao passarem de um trabalho com cadeias numéricas para a resolução de uma tarefa cuja resolução, muitas vezes, faz apelo às mesmas relações numéricas, muitos dos alunos não as identificam, usando, por isso, procedimentos menos eficazes. Este facto verifica-se por exemplo, na subtarefa 6 da tarefa 17 – Contar moedas 2, em que os alunos poderiam usar procedimentos associados a dobros e a metades, trabalhados nas cadeias numéricas anteriores, nas três alíneas que a constituem. Contudo, não o fazem, optando, sobretudo, por procedimentos associados a decomposições de um dos fatores. A análise dos procedimentos dos alunos mostra que o procedimento baseado numa relação de dobro/metade é usado raramente pelos alunos, mesmo que os números o sugiram, provavelmente, pela complexidade desta relação.

A análise da evolução dos procedimentos dos alunos permite evidenciar que, de um modo geral, os alunos optam frequentemente por procedimentos baseados na decomposição (decimal ou outra) de um dos fatores, bastante eficaz na resolução de problemas de multiplicação.

Embora todas as resoluções das tarefas sejam analisadas na sala de aula, através de uma discussão coletiva ou por meio de um congresso matemático, permitindo a

identificação dos procedimentos mais eficazes, há alunos que, ainda assim, permanecem mais tempo que outros no uso de estratégias menos potentes. De facto, alguns dos alunos persistem bastante tempo na utilização de um determinado procedimento, embora os colegas já usem outros mais potentes e os apresentem e justifiquem nas discussões coletivas. Esta constatação é evidenciada na análise, por exemplo, das resoluções de Ana Rita e Miguel das tarefas de divisão, que mostra que estes se mantêm bastante tempo no uso de procedimentos de multiplicação sucessiva a partir de um produto de referência (ver síntese dos procedimentos tarefa a tarefa, na Tabela 6.4). Este procedimento é considerado eficaz para os seus autores, que parecem sentir-se confiantes no seu uso, embora os colegas, durante as discussões coletivas, lhes chamem a atenção para a sua morosidade e suscetibilidade ao erro. Ana Rita, na discussão associada à resolução da tarefa 26, reconhece, no entanto, que seria mais rápido se calculasse apenas usando múltiplos de dez em vez de utilizar todos os múltiplos sucessivos de um determinado número, até um certo valor (ver transcrição a seguir à Figura 6.97, no capítulo 6).

Muitos dos problemas incluídos na experiência de ensino estão relacionados, sobretudo os que pertencem à mesma sequência de tarefas, tanto pelo contexto, que é comum, como pelos números a que recorrem. É o que acontece, por exemplo, nos problemas da tarefa 10 – Pilhas de caixas e nos problemas da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas. Tanto num caso como noutro, alguns alunos têm dificuldade em identificar relações entre os números envolvidos nas várias subtarefas e utilizá-las nos cálculos que realizam. Assim, não utilizam relações de dobro e de dobro e metade subjacentes aos cálculos a efetuar, mas privilegiam, sobretudo, decomposições de um dos fatores do produto a realizar, o que se revela, também, bastante eficaz.

Na tarefa 20 – Máquina de bebidas, que envolve a divisão $156 \div 6$, é uma das tarefas em que é visível a utilização de procedimentos eficazes por alguns alunos, contrabalançando com os procedimentos de outros colegas. Por exemplo, Luís e Raquel (Figura 6.88) optam por usar procedimentos multiplicativos, privilegiando o cálculo com o número 60, um múltiplo de seis e de dez e, a partir daí recorrem a produtos parciais cuja soma seja igual a 156. O seu procedimento bastante eficaz não é acompanhado por todos os seus colegas mas, ainda assim, e comparando com a tarefa anterior, tarefa 19 –

Colecionar cartas, verifica-se que há um maior número de alunos que optam pela operação multiplicação na resolução destes problemas de divisão. Decorrendo dessa opção há um uso mais frequente das propriedades da multiplicação, o que dá origem a procedimentos mais eficazes. Este aspeto parece consolidar-se na subtarefa 1 da tarefa 25 – Outra máquina de bebidas, onde a opção pela operação multiplicação nas resoluções de mais de metade dos alunos evidencia a sua inclinação pelo uso de procedimentos potentes, baseados nas propriedades desta operação e no conhecimento de múltiplos de seis e de dez.

Na tarefa 30, em particular, nas subtarefas 3.1 e 3.2, tal como foi referido na subsecção sobre a compreensão das propriedades matemáticas, a propósito da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, a não perceção que o número 0,99 está próximo de um número inteiro não permite a alguns alunos resolver o problema de forma eficaz. Por isso, há os que não o resolvem ou usam cálculos com algumas incorreções. Ainda assim, há alunos que, na mesma resolução, se apercebem das características do número 0,99 e usam procedimentos eficazes.

Ao longo da experiência de ensino os alunos vão aumentando a sua facilidade no uso de procedimentos que são baseados, na sua maior parte em cálculo mental, tal como é definido neste estudo, adaptando-os aos números envolvidos. Há alunos que, por vezes, recorrem a cálculo em coluna e até a algoritmos (muito raramente), para realizar alguns cálculos intermédios. Contudo, apesar de poderem usar qualquer método de cálculo, rapidamente verificam que os procedimentos de cálculo baseados nas propriedades das operações são mais rápidos e eficazes.

7.3.3. Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado

Considerando os propósitos da experiência de ensino, os alunos vão desenvolvendo a sua sensibilidade para rever os dados e o resultado correspondente. Para este desenvolvimento parecem contribuir as discussões coletivas, em que os alunos apresentam e justificam o modo como pensaram e como calcularam.

Há alunos que no seu trabalho individual ou a pares, revêm o resultado que obtiveram, usando outro procedimento alternativo ou controlando a solução através dos dados e das condições expressas no enunciado. Alguns deles, contudo, apenas se apercebem durante as discussões coletivas que o resultado que obtiveram na realização de uma determinada tarefa não está de acordo com os dados ou está simplesmente incorreto. Tal acontece a Cristóvão e Hugo quando apresentam os procedimentos que realizaram para resolver a subtarefa 1 da tarefa 4 – Carteiras de cromos. Quando efetuam os cálculos determinam 8×6 que registam como sendo igual a 50 e, consequentemente, dão uma resposta incorreta ao problema. Apenas na verbalização do seu procedimento, durante o congresso matemático associado, dão conta do seu engano, que corrigem de imediato.

No decurso da experiência de ensino, à medida que os alunos revelam um maior domínio sobre os números e as operações, em particular sobre a multiplicação, parecem mostrar, também, uma maior sensibilidade para, após resolverem uma tarefa, reverem o resultado obtido, de modo a validá-lo.

Cristóvão e Francisco, por exemplo, após terem resolvido a tarefa 26 – Miniaturas de animais, um contexto de divisão, através do modelo retangular e recorrendo à relação inversa entre esta operação e a multiplicação (ver figura 61), validam a solução encontrada. Depois de encontrarem os quocientes de $256 \div 8$ e $224 \div 7$, ambos iguais a 32, averigam se este número é mesmo solução do problema. Para isso, usam um outro procedimento para verificação, que explicitam aos colegas durante o congresso matemático associado à tarefa referida.

Cristóvão – Depois para ver se estava correto, para confirmar se a operação estava correta pegámos no 32 e fizemos $32+32+32+32+32+32+32$ (escreve no quadro), somamos 32 oito vezes.

Isabel – E quanto é que tem de dar essa soma?

Francisco – Tem de dar 256.

Cristóvão – Então 32 mais 32 faz 64, 64 mais 64 faz 128 e 128 mais 128 faz 256.

Cristóvão e Francisco escrevem no quadro o seu procedimento de verificação, que apresenta o seguinte aspeto:

$$32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 = 256$$

Figura 7.21 – Procedimento de verificação de $256:8=32$ de Cristóvão e Francisco da tarefa 26

Ao observar os cálculos dos colegas no quadro, Guilherme intervém exclamando: “Mas não se podia fazer 32 vezes oito? Podiam ter feito esta multiplicação para verificar”. Além do procedimento aditivo, Cristóvão e Francisco referem ainda um procedimento subtrativo, em que calculam a diferença entre 256 e 224, que identificam como sendo a diferença entre 7×32 e 8×32 .

Os procedimentos explicitados por Cristóvão e Francisco e registados no quadro, bem como a intervenção de Guilherme, parecem contribuir para que os alunos da turma percebam o que significa verificar um resultado, para além de evidenciar a sua compreensão sobre as relações, de natureza diferente, entre as várias operações.

Nas tarefas com números na representação decimal os alunos manifestam mais dificuldades na verificação dos resultados que encontram. Enzo e Guilherme têm bastantes dificuldades na resolução da subtarefa 3 da tarefa 29 – Ida ao teatro. Depois de fazerem várias tentativas (Figura 6.103) fazem uma última tentativa a partir da qual escrevem a resposta final.

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 250 \\ \hline 62,50 \\ 312,50 \\ \hline 312,50 \\ + 312,50 \\ \hline 625,00 \end{array}$$

+ montante dos bilhetes a 77,50 €

Figura 7.22 – Parte final da resolução de Enzo e Guilherme da subtarefa 3 – tarefa 29

Na resolução dos cálculos finais os alunos colocam um sinal que é usado, tradicionalmente, para assinalar que um dado cálculo está correto. De facto é esse cálculo que lhes permite escrever que o “montante dos bilhetes é igual a 77,50€”. No enunciado da tarefa os alunos têm à sua disposição uma tabela que inclui o preço de 20 bilhetes, como sendo 25,00€, no entanto não recorrem a esse valor para perceber que 250 bilhetes, um número de bilhetes superior a dez vezes 20, não poderá custar apenas 77,50€. Só durante a discussão coletiva e perante a apresentação dos raciocínios dos colegas, Enzo e Guilherme se apercebem da sua incorreção. Provavelmente, a dificuldade destes alunos associada à sensibilidade para rever os resultados está relacionada com o tipo de números envolvidos, com os quais não têm ainda muita experiência de cálculo.

7.3.4. Síntese

Enquanto no princípio da experiência de ensino os alunos têm algum conhecimento sobre as operações adição e subtração, que utilizam em situações de cálculo, no que se refere às operações multiplicação e divisão, este vai sendo aprofundado e consolidado ao longo daquela, considerando as suas finalidades.

No que respeita à consciencialização da existência de múltiplas estratégias os registos escritos e as intervenções orais dos alunos da turma do 3.º ano mostram que estes, por vezes, são capazes de inventar mais do que uma na realização de um mesmo cálculo. Além disso, mesmo que tenham construído apenas uma, nas discussões coletivas apercebem-se que, a mesma tarefa pode ser resolvida usando procedimentos diferentes. A tomada de consciência da existência de uma diversidade de procedimentos é, ainda, incentivada por Isabel que, frequentemente, nas discussões coletivas inventaria e propõe aos alunos que comparem os diferentes procedimentos usados numa mesma tarefa. As tabelas de frequência, elaboradas subtarefa a subtarefa e apresentadas no capítulo anterior são, também, uma evidência da diversidade de procedimentos usados pelos alunos, que têm a noção disso.

Associada à noção da existência de diversas estratégias para resolver uma mesma tarefa está a inclinação para usar representações e procedimentos eficazes. Estes aspectos foram trabalhados com os alunos ao longo da experiência e ensino, considerando as suas finalidades. Além disso, o trabalho realizados em torno das cadeias numéricas teve como propósito concreto evidenciar procedimentos eficazes baseados em propriedades dos números e da operação multiplicação, estendendo-se, também à operação divisão. Há a destacar o recurso a procedimentos de decomposição, decimal ou outras, na resolução das tarefas. Ainda assim, há alunos que persistem durante mais tempo do que outros no uso de procedimentos menos eficazes e mais morosos na resolução das tarefas propostas. Além disso há alunos que em determinados contextos, parecem voltar a procedimentos menos eficazes. Este aspecto é particularmente evidente em contextos de divisão e quando os números envolvidos estão representados na forma decimal.

A sensibilidade dos alunos para rever os dados e o resultado de um problema vai sendo desenvolvida ao longo da experiência de ensino, à medida que os alunos vão realizando as tarefas que a constituem. As normas construídas que instituíram que os alunos devem apresentar e justificar as suas resoluções, durante as discussões coletivas, para além da realização de muitos dos trabalhos a pares, parecem ter contribuído para este desenvolvimento.

Capítulo 8

As potencialidades das tarefas e sequências de tarefas

O estudo que realizo procura compreender como os alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. No seu âmbito foi realizada uma experiência de ensino, orientada por uma conjectura, que foi concretizada na sala de aula por uma trajetória de aprendizagem da multiplicação. A sua concretização implicou a construção de sequências de tarefas a propor aos alunos, enformadas pelas dimensões matemática e pedagógica dessa conjectura.

As tarefas foram construídas ou adaptadas de outras já existentes considerando, também, a intencionalidade da trajetória de aprendizagem delineada e progressivamente aperfeiçoada ao longo de toda a experiência de ensino, de acordo com os procedimentos que os alunos foram apresentando na resolução das tarefas e as reflexões sobre todo o trabalho que Isabel e eu própria íamos fazendo nas nossas reuniões semanais.

Considerando o forte investimento na construção e adaptação das tarefas e sequências de tarefas, interessa, assim, compreender qual o seu contributo na aprendizagem dos alunos, em particular, no que respeita à aprendizagem da multiplicação

numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. Assim, neste capítulo são analisadas as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas aos alunos na aprendizagem da multiplicação, tomando como referência a última sequência de tarefas de cada grupo de tarefas que orientou a análise dos dados.

O capítulo está organizado em quatro seções. Cada uma delas é destinada à análise da última sequência de tarefas de cada grupo de tarefas: de multiplicação com números naturais, de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal, de divisão com números naturais e, finalmente, de multiplicação no sentido proporcional, com números racionais não negativos na representação decimal. Em cada uma destas seções analiso os contributos dos contextos e dos números incluídos nas tarefas e da articulação entre as tarefas da sequência, inter-relacionando estes aspetos com os procedimentos usados pelos alunos na sua resolução.

8.1. A sequência 4 de tarefas de multiplicação com números naturais

A sequência 4, a última do conjunto de tarefas de multiplicação com números naturais, é constituída pelas subtarefas 1, 2 e 3, incluídas na tarefa 10 – Pilhas de caixas, a partir das quais foi realizado um congresso matemático a que, por facilidade de organização, denominei por tarefa 11, e a tarefa 12 – Cadeias numéricas IV. O seu propósito principal é consolidar o uso de procedimentos multiplicativos, baseados nas propriedades da multiplicação e apoiados no modelo retangular sugerido nos contextos da tarefa 10. No capítulo 5, sobre a experiência de ensino na turma de Isabel, são descritos em detalhe estes contextos construídos e as suas características particulares. A tarefa 12 é constituída por três cadeias numéricas, construídas com intencionalidade, de modo a reforçar o uso das relações multiplicativas que podem emergir a partir da tarefa 10. Uma vez que a tarefa 11 não é uma nova tarefa, mas é referente ao congresso matemático decorrente da tarefa 10, analiso, em seguida, as tarefas 10 e 12, que foram propostas aos alunos sequencialmente.

8.1.1. Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 10 e os procedimentos dos alunos

Na tabela seguinte apresento as características dos contextos e os números das subtarefas da tarefa 10, os procedimentos dos alunos na sua resolução e a frequência de cada um.

Tabela 8.1 – A tarefa 10, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos

Tarefas	Contextos e números	Procedimentos dos alunos		N.º alunos ²⁶
Subtarefa 1 Tarefa 10	Multiplicação (disposição retangular) Inclui uma figura Números 25 e 24	Com recurso à figura	Uso de múltiplos de cinco	2
			Ajustar e compensar	2
		Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	18
Subtarefa 2 Tarefa 10	Multiplicação (disposição retangular) (inclui figura) Números 25 e 48	Com recurso à figura	Uso de múltiplos de cinco	4
			Uso da decomposição não decimal	2
		Sem recurso à figura	Uso da decomposição decimal	16
Subtarefa 3 Tarefa 10	Divisão (sentido de medida) Números 1200 e 24	Com recurso à subtarefa 1	Uso da relação do dobro	12
		Com recurso à subtarefa 2	Uso da relação dobro/metade	2
		Sem recorrer às subtarefas anteriores	Multiplicar sucessivamente	2
		Incorretos ou inexistentes	Tentativa de adicionar, mal sucedida	6

Em seguida, interpreto e justifico os resultados apresentados na tabela 8.1 relacionando os procedimentos dos alunos com as características particulares dos contextos das subtarefas e dos números aí envolvidos.

Nas subtarefas 1 e 2, que incluem um contexto de multiplicação associado ao modelo retangular, todos os alunos recorrem a procedimentos multiplicativos. Na resolução da subtarefa 3, cujo contexto é de divisão, estes utilizam, também, procedimentos multiplicativos, embora seis não a tenham conseguido realizar.

Na subtarefa 1 há quatro alunos que recorrem à figura que a acompanha para calcular o número total de maçãs – os pares Duarte e Tiago e Eva e Guilherme. Os primeiros tiram partido do uso dos múltiplos de cinco – contam o número de caixas de uma coluna e representam o número de maçãs de uma coluna através da expressão 5×24 .

²⁶ Nesta tarefa só participaram 22 alunos, apesar de a turma ter um total de 23.

Como são cinco colunas multiplicam a expressão anterior por cinco, colocando o segundo fator cinco à sua direita (ver figura 6.54). Eva e Guilherme observam a figura com a pilha de caixas e pensam em grupos de dez caixas (duas colunas de cinco). Uma vez que a figura apresenta dois grupos de dez e um grupo de cinco caixas, acrescentam, mentalmente, mais uma coluna de cinco e recorrem a um procedimento de ajuste e compensação, calculando primeiro 30×24 e subtraindo depois 5×24 (ver figura 6.55).

Os restantes 18 alunos, aparentemente, não recorrem à figura para calcular 25×24 (um par calcula 24×25), usando procedimentos de decomposição do fator 24. O facto de terem decomposto o número 24 reforça a plausibilidade de não se terem apoiado na figura para calcular e de se terem afastado da situação concreta. Com efeito, 24 representa o número de maçãs de cada caixa e a sua decomposição, associada ao contexto, significa que se altera o número de maçãs de cada caixa, o que não é natural. Estes alunos parecem ter usado a disposição retangular apenas para identificar os termos 25 e 24 do produto a calcular. O mesmo parece ter-se passado com os que calculam a partir da expressão 24×25 e que decompõem o número 25.

Saliento que, nesta altura, os 18 alunos referidos anteriormente estão já numa fase em que não necessitam de se apoiar no contexto de disposição retangular para realizar os cálculos. Contudo, em tarefas anteriores a esta, tais como as tarefas 7, 8 e 9 – Cortinas, Pátio do João e Pátio do Cristóvão, o modelo retangular sugerido pelas figuras que acompanham as tarefas foi fundamental para suportar o uso dos procedimentos multiplicativos da maior parte destes alunos e facilitar a sua evolução.

Na subtarefa 2 há seis alunos que recorrem à figura para calcular o número total de maçãs – os pares Cristóvão e Hugo, Eva e Guilherme e Duarte e Tiago. Os primeiros calculam o total de maçãs adicionando três produtos parciais associados a agrupamentos de caixas que visualizam na figura, optando por um procedimento de decomposição não decimal do fator 25 (ver figura 6.57). Eva e Guilherme usam, também, um procedimento de decomposição não decimal, recorrendo a dois produtos parciais que visualizam a partir de uma alteração que efetuam (e fazem o esquema dessa alteração) na organização das caixas (ver figura 6.58). Finalmente, Duarte e Tiago usam um procedimento semelhante ao que utilizam na subtarefa anterior, privilegiando o uso de múltiplos de

cinco – mentalmente, transformam a pilha de caixas de modo a ter uma disposição retangular, calculam o número total de maçãs numa coluna e multiplicam por cinco (ver figura 6.60).

Todos os 16 alunos que, aparentemente, não recorrem à figura da subtarefa 2 para calcular usam procedimentos de decomposição decimal. Dois pares calculam a partir da expressão 48×25 (afastando-se do significado dos números ligado ao contexto) e decompõem o número 25. Os restantes seis pares efetuam os cálculos a partir da expressão 25×48 e decompõem o número 48 (ver um exemplo na figura 6.61). Não há evidência que, para identificar o produto a calcular, os alunos tenham recorrido à figura da tarefa. Provavelmente, usam os números 25 e 48 incluídos no enunciado da subtarefa.

Os 16 alunos referidos no parágrafo anterior, apesar de não recorrerem à figura, utilizam, no entanto, procedimentos multiplicativos adequados baseados na decomposição decimal de um dos fatores. Para a consolidação do seu uso, contribuíram significativamente os contextos das tarefas realizadas previamente suportados por disposições retangulares, uma vez que a sequência de tarefas em análise nesta secção é a última do grupo de tarefas a que pertence – grupo das tarefas de multiplicação com números naturais.

Na subtarefa 3, com um contexto de divisão por medida, há 12 alunos que a resolvem, ligando-a à subtarefa 1, recorrendo a uma relação de dobro entre os números incluídos nas duas subtarefas. Apenas um par, Duarte e Tiago, associa esta subtarefa à subtarefa 2, usando a relação de dobro/metade entre os números envolvidos nas duas (ver diálogo a seguir à figura 6.60). Um outro par, Luís e Raquel, parece usar, sem efetuar quaisquer registos de cálculos auxiliares, um procedimento de multiplicação sucessiva, até encontrar o número que, multiplicado por 24, é igual a 1200. O procedimento destes alunos parece estar relacionado com os números envolvidos e, em particular, com a facilidade que têm nos cálculos multiplicativos que incluem o fator 24, proveniente da sua experiência em tarefas anteriores.

Ao contrário das subtarefas 1 e 2, que todos os alunos resolvem corretamente, na subtarefa 3 há seis alunos que o fazem de modo incorreto ou que não a tentam resolver.

Nas resoluções incorretas regista-se a tentativa de David e Diogo no uso de um procedimento de adição sucessiva da parcela 24, que abandonam, deixando-o incompleto (ver Figura 6.62).

Os números usados na tarefa 10, em particular nas subtarefas 1 e 2, parecem ter auxiliado os alunos nos cálculos a efetuar. Estes revelam facilidade nos cálculos intermédios que realizam, associados a decomposições de um dos fatores, tais como 25×4 e 5×24 , e nos relacionados com múltiplos de dez, tais como 20×24 ou 25×20 . Realço que os alunos utilizam as decomposições que consideram mais adequadas em cada cálculo e não cometem incorreções. Para este facto parece ter contribuído a sua experiência prévia em cálculos associados a tarefas anteriores, incluídas nesta experiência de ensino, onde números como 24, 25 e 48, aparecem frequentemente. Além disso, sendo estes números de referência, há uma maior facilidade em calcular com eles, dadas as suas características particulares. A única subtarefa em que alguns alunos não são capazes de usar os números e o seu conhecimento sobre eles para calcular é a subtarefa 3 mas, esse facto parece dever-se, não aos números em si, mas ao contexto de divisão.

Em síntese, os contextos das subtarefas 1 e 2 parecem ter contribuído para que os alunos já só usem, neste momento, procedimentos multiplicativos, não havendo nenhum que recorra a procedimentos aditivos. Há procedimentos dos alunos suportados pelas figuras nelas incluídas, que fazem apelo ao modelo retangular e outros que, aparentemente, não estão dependentes das figuras. Os procedimentos suportados pela disposição das caixas na figura são diversificados, de acordo com os “diferentes” olhares dos alunos – decomposição não decimal de um dos fatores, compensação e o uso de múltiplos de cinco. Pelo contrário, os procedimentos usados pelos alunos não apoiados nas figuras das tarefas são todos de decomposição decimal.

Saliento, também, a facilidade com que todos os alunos efetuam os cálculos inerentes à resolução das subtarefas 1 e 2, independentemente dos procedimentos que utilizam. Este facto parece estar associado aos números usados – números de referência e com os quais já efetuaram outros cálculos a propósito de tarefas anteriores.

O contexto da subtarefa 3 parece ter-se revelado mais complexo para alguns alunos, apesar de os números envolvidos serem os mesmos das subtarefas anteriores. O facto de o contexto ser de divisão (por medida) dificulta a resolução da subtarefa, sobretudo quando os alunos não identificam nem estabelecem qualquer relação com as subtarefas anteriores. Destes, apenas um par a resolve, usando um procedimento de multiplicação sucessiva, que não regista, mas que está implícito na sua justificação por escrito (ver figura 6.64) e que é explicado no congresso matemático associado à tarefa 10.

8.1.2. A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos

A articulação entre as subtarefas da tarefa 10, pensada na fase de construção da sequência 4, inclui dois aspetos principais: os associados à situação inicial e os relacionados com os valores numéricos aí incluídos. A tabela 8.2 apresenta, de modo resumido, o confronto entre o planeado na fase de construção das tarefas sobre a articulação e a sequenciação das subtarefas e a análise dos procedimentos dos alunos. Inclui, também, quando é possível e evidente, a sua articulação e sequenciação com outras tarefas, anteriores à tarefa 10. A tabela inclui, também, as relações que poderiam ser estabelecidas entre as cadeias numéricas da tarefa 12 e as subtarefas da tarefa 10.

No que diz respeito aos contextos e à sua articulação com outros, nomeadamente, às situações propostas nas subtarefas 1 e 2 da tarefa 10, todos os alunos os compreendem e apercebem-se que são muito semelhantes entre si. Além disso, logo na subtarefa 1 recordam outras tarefas que também se referem a um contexto semelhante, incluindo a mercearia da Piedade e o cálculo de quantidades de produtos aí existentes. Relativamente à subtarefa 3, todos os alunos reconhecem, também, uma situação análoga às anteriores, em termos do assunto a que se referem – mercearias ou supermercados, caixas de maçãs e número total de maçãs em cada estabelecimento. Contudo, alguns manifestam logo uma dificuldade inicial em interpretar o problema, muito provavelmente, em consequência do contexto de divisão por medida. Decorrente disso, a pergunta final

solicita o número de caixas de maçãs enquanto as subtarefas anteriores se referem ao número total de maçãs, o que parece constituir uma dificuldade acrescida.

No que se refere à articulação e sequenciação dos números usados nos contextos, apesar de todos os alunos terem interligado a situação da subtarefa 2 com a da anterior, não efetuam o mesmo tipo de ligação em termos dos valores numéricos. Assim, não há alunos que, no procedimento de resolução da subtarefa 2, façam apelo à subtarefa 1 e usem a relação entre o número de maçãs de cada caixa, uma vez que 48 é o dobro de 24. Somente depois de ambas as subtarefas resolvidas, e quando desafiados pela professora, alguns dos alunos reconhecem que o total de maçãs da subtarefa 2 é o dobro do total de maçãs da subtarefa 1 e que o número de maçãs em cada caixa também é o dobro. É de salientar, no entanto, que os alunos resolvem as tarefas corretamente, usando procedimentos multiplicativos adequados.

Relativamente à subtarefa 3 e à articulação e sequenciação dos números aí incluídos com os das duas anteriores, há procedimentos de resolução que evidenciam diferentes relações identificadas. Doze alunos, que corresponde a mais de metade, identificam que o total de maçãs, 1200, é o dobro do total de maçãs da subtarefa 1, potenciando essa relação no procedimento de resolução que utilizam. Dois alunos reconhecem que os totais de maçãs das subtarefas 3 e 2 são iguais e que o número de maçãs em cada caixa passa, da subtarefa 2 para a 3, para metade, recorrendo a uma relação de dobro/metade. Os restantes oito alunos da turma, não relacionam a subtarefa 3 com alguma das anteriores. Desses, apenas dois deles conseguem resolvê-la corretamente, através de tentativas de multiplicação sucessiva, para encontrar o número que multiplicado por 24 é igual a 1200.

Uma das explicações para o facto de os alunos da turma não identificarem a relação entre os números das subtarefas 1 e 2 e, conseqüentemente, não a potenciarem nos procedimentos usados, pode estar relacionada com as figuras incluídas em cada uma das subtarefas. Com efeito, a figura da subtarefa 2 pode ter dificultado o estabelecimento das relações numéricas pois é diferente da que consta na subtarefa 1. Por isso pode ter funcionado como distractor, sobretudo no caso dos alunos que apoiam os seus cálculos na figura.

Tabela 8.2 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos nas tarefas 10 e 12 da sequência 4

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números		Procedimentos dos alunos	
Tarefa 10 Subtarefa 1	Situação semelhante à das tarefas 1 e 2.	Números 25 (caixas) e 24 (maças de cada caixa). Obtém-se um produto igual a 600.	Todos identificam o mesmo contexto das tarefas 1 e 2.	Todos reconhecem os números de tarefas anteriores e calculam facilmente, usando procedimentos multiplicativos, recorrendo, ou não à figura.
Tarefa 10 Subtarefa 2	Situação análoga à da subtarefa 1	Números 25 (caixas) e 48 (maças de cada caixa). 48 é o dobro de 24. O produto obtido é igual a 1200, o dobro do anterior.	Todos estabelecem a analogia com o contexto da subtarefa 1.	Todos usam procedimentos multiplicativos, embora não potenciem a relação de dobro com a subtarefa anterior.
Tarefa 10 Subtarefa 3	Situação análoga à da subtarefa 1, em termos da situação mas apela à divisão (por medida).	Números 24 e 1200. 24 é usado na subtarefa 1 e é metade de 48. 1200 é a solução da subtarefa 2 e é o dobro de 600, o produto obtido na subtarefa 1.	Todos identificam a analogia com as situações anteriores mas alguns não reconhecem que se trata de uma outra operação. 6 alunos têm dificuldade em interpretar a situação.	12 alunos relacionam com a subtarefa 1. Reconhecem a relação de dobro entre 1200 e 600 e calculam o dobro de um dos fatores.
				2 alunos relacionam com a subtarefa 2. Reconhecem a relação de metade entre 24 e 48 e calculam o dobro do outro fator, visto que o produto se mantém.
				8 alunos não relacionam com as subtarefas anteriores
				2 alunos calculam a partir do seu conhecimento sobre os números envolvidos.
				6 alunos não resolvem ou fazem-no de forma incorreta.
Tarefa 12 Calcular em cadeia IV	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores	Números 25, 50, 24, 48, das subtarefas anteriores e outros cujo produto é igual a 600 ou 1200 (soluções das subtarefas anteriores)	Todos identificam o contexto particular de cadeias numéricas	Todos reconhecem relações multiplicativas a que recorrem para calcular e números das subtarefas anteriores.

Parece haver um outro aspeto que contribui para que os alunos não articulem os procedimentos que usam nas subtarefas 1 e 2, tanto no caso dos que apoiam os seus cálculos na figura associada como dos que calculam apenas de modo formal – o ter duplicado o número de maçãs por caixa e não o número de caixas. Uma vez que os alunos ainda estão muito ligados ao contexto das tarefas propostas, parece ser mais difícil identificar uma relação numérica de dobro quando o que duplica é o número de maçãs em cada caixa e não o número de caixas. Provavelmente, a relação de dobro existente seria reconhecida por alguns alunos, se se tivesse duplicado o número de caixas, uma vez que os números envolvidos, no contexto em que se inserem, têm, naturalmente, significados diferentes. Por exemplo, em tarefas anteriores, como a tarefa 7 – Cortinas, muitos dos alunos não manifestaram qualquer dificuldade em identificar relações de dobro, bem como em tarefas de cadeias numéricas.

Em consequência desta não articulação entre as subtarefas 1 e 2, os alunos encaram cada uma delas individualmente e resolvem-nas adequadamente, baseando-se nas propriedades da multiplicação. Para alguns alunos a dificuldade de articulação entre a subtarefa 3 e as anteriores, em termos das relações numéricas subjacentes, parece dever-se à complexidade do contexto de divisão, tal como já referi, e não aos números aí incluídos.

A tarefa 10 culmina num congresso matemático (tarefa 11) onde são apresentados e discutidos os procedimentos utilizados pelos alunos na sua resolução. São, também, em situação de congresso, identificadas as relações numéricas que poderiam ter sido estabelecidas de umas subtarefas para outras.

Nas cadeias numéricas da tarefa 12, considerando as características específicas deste tipo de tarefas, os alunos recorrem com facilidade a cálculos anteriores e identificam as relações entre eles. Na sua construção foram utilizados, intencionalmente, os mesmos números e algumas das relações numéricas que podem ser estabelecidas na resolução das subtarefas da tarefa 10. Depois de serem desafiados pela professora, os alunos reconhecem alguns dos cálculos que tinham efetuado na tarefa 10 e identificam outros que poderiam ter usado, realçando outras relações numéricas.

8.1.3. Síntese

Os contextos das subtarefas 1 e 2 da tarefa 10, suportados pela disposição retangular, parecem ter contribuído para que todos os alunos optem, neste momento, por procedimentos de tipo multiplicativo. Há alunos que recorrem às figuras incluídas no contexto das tarefas para calcular, usando explicitamente a disposição retangular, e outros que parecem já não necessitar do apoio da figura. Estes últimos usam, todos, um procedimento de decomposição decimal para a resolução das tarefas. Os que se apoiam nas figuras para calcular utilizam procedimentos multiplicativos diversificados: uso de múltiplos de cinco, de decomposição decimal de um dos fatores e de ajustar e compensar, veiculados pelo contexto. A facilidade com que todos os alunos calculam, independentemente, dos procedimentos multiplicativos que usam, parece dever-se, também aos números incluídos, de referência e com os quais já tinham lidado antes.

Apesar de resolverem adequadamente as subtarefas 1 e 2 através de procedimentos multiplicativos, os alunos não potenciaram, na resolução da segunda tarefa, as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas com a primeira. Há duas razões que podem justificar este facto: a figura da subtarefa 2 ser diferente da primeira e funcionar como distractor, sugerindo que os alunos as encarem individualmente, e o ter duplicado o número de maçãs por caixa e não o número de caixas.

O contexto da subtarefa 3 da tarefa 10, apelando ao sentido de medida da divisão, provocou algumas dificuldades aos alunos que não a relacionaram com as subtarefas anteriores, havendo seis que não a conseguem resolver corretamente. Pelo contrário, os alunos que estabeleceram conexões, ou com a subtarefa 1 ou com a subtarefa 2, resolvem-na com facilidade, recorrendo, respetivamente, a procedimentos associados a dobros e a relações de dobro e de metade.

Na tarefa 12, de resolução de cadeias numéricas, os alunos apoiam-se, com destreza, em cálculos anteriores da mesma cadeia e identificam relações entre eles, particularidades do cálculo em cadeia reconhecendo, também, os números e alguns dos cálculos das subtarefas anteriores.

8.2. A sequência 6 de tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal

A sequência 6 é a última do conjunto de sequências de tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal²⁷ e é constituída pelas tarefas 16, 17 e 18. A tarefa 16 – Contar moedas 1 e a tarefa 17 – Contar moedas 2 baseiam-se em contextos associado ao sistema monetário, uma vez que exigem lidar com os valores dos diferentes tipos de moedas. A tarefa 18 – Cadeias numéricas V inclui três cadeias numéricas, cujos produtos têm a particularidade de um dos fatores, o segundo, ser um número na representação decimal, associado ao valor de uma determinada moeda. O propósito principal da tarefa 16 é aprofundar o uso de números na representação decimal, embora tenha, também, algumas ligações com a operação multiplicação. A tarefa 17 inclui problemas de multiplicação com o objetivo de consolidar o cálculo com esta operação, usando números na representação decimal. A tarefa 18 tem, também, o propósito de consolidar e aprofundar relações numéricas de tipo multiplicativo, já trabalhadas nas tarefas anteriores. As características de todas estas tarefas da sequência 6 e a sua intencionalidade estão descritas, em detalhe, no capítulo 5.

De modo a evitar repetições, uma vez que os contextos das tarefas 16 e 17 são muito semelhantes, opto por analisar, nas subsecções seguintes, apenas as tarefas 17 (subtarefas 4, 5 e 6) e 18 da sequência 6.

8.2.1. Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 17 e os procedimentos dos alunos

Nas tabelas seguintes, apresento as características dos contextos das subtarefas da tarefa 17, os procedimentos usados pelos alunos na sua resolução e a sua frequência. Considerando a diversidade de características dos contextos das subtarefas 4, 5 e 6 e dos procedimentos associados, apresento três tabelas, uma para cada subtarefa, em vez de

²⁷ Para facilitar a escrita e a respetiva leitura, à semelhança de opções tomadas em outros capítulos, uso frequentemente a expressão números na representação decimal para me referir a números racionais não negativos na representação decimal.

uma única, de modo a facilitar a sua leitura e interpretação (ao contrário do que fiz na secção anterior).

A tabela 8.3 relaciona o contexto e os números da subtarefa 4 da tarefa 17 com os procedimentos dos alunos na sua resolução e a respetiva frequência.

Tabela 8.3 – A subtarefa 4 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos

Tarefas	Contexto e números	Procedimentos dos alunos		N.º alunos 28	
Tarefa 17 Subtarefa 4	Multiplicação (contexto de dinheiro, enunciado c/representações em cêntimos) Exige lidar com dois valores de moedas ao mesmo tempo e com várias soluções 10 e 50 cêntimos 2 euros	Cálculo com números decimais ²⁹	Uma solução	Uso de decomposição não decimal	10
			Várias soluções	Uso de decomposição não decimal (2 soluções)	2
		Cálculo sem números decimais	Uma solução	Uso de adições sucessivas	4
				Uso de decomposição não decimal	2
			Várias soluções	Inexistentes	0
				Incorretos (Só usam um tipo de moedas)	Uma solução
Duas soluções	Uso de produtos conhecidos	2			

Na subtarefa 4 da tarefa 17, que tem subjacente um contexto de multiplicação associado ao sistema monetário e que inclui lidar com dois valores de moedas ao mesmo tempo, nem todos os alunos efetuam os cálculos usando os números na forma decimal. Com efeito, apenas doze, dos 22 alunos que resolvem a tarefa, calculam com os valores das moedas na sua representação decimal. Desses, somente Enzo e Raquel apresentam duas das três soluções da tarefa, tendo os restantes alunos encontrado uma única solução. Há, também, quatro alunos que efetuam resoluções incorretas uma vez que, nos cálculos que realizam, consideram apenas um dos tipos de moedas indicado no enunciado.

A maior parte dos alunos que resolve a subtarefa 4 opta por procedimentos multiplicativos havendo, no entanto, a registar o caso de quatro alunos que recorrem à adição sucessiva dos valores das moedas, não os usando na sua representação decimal.

²⁸ Nesta tarefa só participaram 22 alunos, apesar de a turma ter um total de 23.

²⁹ De modo a facilitar a escrita nas tabelas da sequência 6 uso, em linguagem simplificada, a expressão “números decimais” para me referir a números racionais não negativos na sua representação decimal.

Os alunos que apresentam apenas uma solução utilizam, maioritariamente, um procedimento de decomposição não decimal, compondo o valor de dois euros através de duas moedas de 50 cêntimos e de dez moedas de dez cêntimos, perfazendo um euro com cada tipo de moedas.

A tabela 8.4, apresentada em seguida, relaciona o contexto e os números da subtarefa 5 da tarefa 17 com os procedimentos dos alunos e a sua frequência.

Tabela 8.4 – A subtarefa 5 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos

Tarefa	Contexto e números	Procedimentos dos alunos			N.º alunos ³⁰	
Tarefa 17 Subtarefa 5	Multiplicação (contexto de dinheiro, enunciado c/representações em cêntimos) Exige lidar com dois valores de moedas ao mesmo tempo e com várias soluções 20 e 50 cêntimos e 3 euros	Cálculo com números decimais	Uma solução	Uso de adições sucessivas	2	
				Uso de decomposição não decimal	8	
			Duas soluções	Uso de decomposição não decimal	2	
		Cálculo sem números decimais	Uma solução	Adicionar sucessivamente	2	
				Uso de decomposição não decimal	4	
			Duas soluções	Inexistentes	0	
			Incorretos (Só usam um tipo de moedas)	Duas soluções	Uso de produtos conhecidos	2
			Inexistentes			2

Na subtarefa 5 da tarefa 17, que tem subjacente um contexto de multiplicação, muito semelhante ao da subtarefa anterior, variando apenas no total a perfazer (3€) e nas moedas disponíveis (de 20 e 50 cêntimos) verifica-se, também, que nem todos os alunos efetuam os cálculos usando os números na representação decimal, mantendo-se o mesmo número de alunos que o fazem (um total de 12). Apenas dois alunos apresentam as duas hipóteses de solução do problema proposto e efetuam, também, os cálculos com os valores monetários na sua representação decimal. Dois outros alunos realizam cálculos incorretos (usam apenas um tipo de moedas) e outros dois não apresentam qualquer registo escrito.

A análise da tabela 8.4 evidencia, ainda, que alguns dos alunos, num total de quatro, que apresentam uma hipótese de solução, recorrem a procedimentos aditivos. Os que utilizam procedimentos de decomposição não decimal fazem-no, na sua maioria,

³⁰ Nesta tarefa só participaram 22 alunos, apesar de a turma ter um total de 23.

usando produtos parciais que correspondem a compor um euro em moedas de 20 cêntimos e dois euros em moedas de 50 cêntimos.

A utilização do valor das moedas em cêntimos e não em euros, nas resoluções das subtarefas 4 e 5 de alguns alunos, parece estar relacionada, por um lado, com a maior dificuldade que estes sentem na representação de números na forma decimal. Por outro lado, tanto no enunciado escrito da subtarefa 4 como no da subtarefa 5, os valores das moedas estão registados da seguinte forma: “moedas de 10 e 50 cêntimos” e “moedas de 20 e 50 cêntimos”, expressões que correspondem, igualmente, à linguagem oral usual utilizada na vida real, e que podem, também, ter influenciado os registos e os cálculos dos alunos. De facto, a passagem de uma representação para outra inclui saber que ambas são equivalentes e que correspondem a uma mudança de unidade de referência, o que parece revelar-se complexo para alguns alunos.

O facto de haver bastantes alunos a apresentar apenas uma das soluções possíveis, tanto na subtarefa 4 como na 5, pode estar relacionado com a pergunta final de ambos os enunciados “Que moedas pode ter?”, que, de certa forma, parece induzir a procura de uma solução única. Ou então, alguns alunos ao encontrar uma solução possível concluíram que tinham terminado o problema e não persistiram na procura de outras soluções.

A tabela 8.5 sintetiza as características do contexto e dos números da subtarefa 6 da tarefa 17, a sua relação com os procedimentos dos alunos e a respetiva frequência.

A análise da tabela 8.5 evidencia que todos os alunos que resolvem corretamente as subtarefas 6a, 6b e 6c, fazem-no através de procedimentos multiplicativos. Tal como nas subtarefas anteriores, apesar de privilegiarem procedimentos multiplicativos, nem todos efetuam, ainda, os cálculos com os números na representação decimal. Se compararmos este aspeto com o correspondente nas subtarefas anteriores 4 e 5, verificamos que há um decréscimo do número de alunos que recorre à representação decimal nos seus cálculos (passa de doze para dez ou oito alunos). Contudo, e focando o olhar apenas nas tarefas 6a, 6b e 6c, os alunos que as resolvem corretamente fazem-no, na sua maioria, optando por representações decimais dos valores monetários em causa.

Tabela 8.5 – A subtarefa 6 da tarefa 17, o seu contexto e números e os procedimentos dos alunos

Tarefas	Contexto e números	Procedimentos dos alunos		N.º alunos ³
Tarefa 17 Subtarefa 6a		Cálculo com números decimais	Uso de relações de dobro	2
			Uso de decomposição não decimal	8
		Cálculo sem números decimais	Uso de produtos conhecidos	2
			Uso de decomposição não decimal	2
		Incorretos	Uso de decomposição não decimal	4
		Inexistentes		4
Tarefa 17 Subtarefa 6b	Divisão por medida (contexto de dinheiro, enunciado com representações em cêntimos) Exige lidar com um valor de moeda de cada vez (tem três alíneas interdependentes). Números 20, 10 e 5 cêntimos e 4 euros.	Cálculo com números decimais	Uso de relações de dobro	8
		Cálculo sem números decimais	Uso de decomposição não decimal	6
		Incorretos		2
		Inexistentes		6
		Cálculo com números decimais	Uso de relações de dobro	8
		Cálculo sem números decimais	Uso de decomposição não decimal	2
Tarefa 17 Subtarefa 6c			Uso de relações de dobro	2
		Incorretos	Uso de decomposição não decimal	4
		Inexistentes		6

Há, ainda, a realçar o número de alunos que não resolve as subtarefas 6a, 6b e 6c, que aumenta de quatro para seis, da subtarefa 6a para as subtarefas 6b e 6c. Estes alunos, sempre os mesmos, não tentam efetuar qualquer registo de cálculo e deixam o espaço para o efeito, em branco. Tal como nas subtarefas anteriores, as dificuldades associadas ao cálculo com números na representação decimal parece ter complicado a sua resolução e, em alguns casos, impedido qualquer tentativa de cálculo. Além disso, a grande diferença entre os valores monetários, sobretudo, entre 4€ e 0,10€ e 4€ e 0,05€, parece não ter contribuído para que mais alunos resolvessem estas subtarefas e o fizessem de modo correto. Efetivamente, apesar da ligação à vida real através do valor de moedas concretas, mostrou-se difícil, para os alunos, relacionar os valores das moedas entre si. A acrescentar a estes aspetos há, também, o facto de estas três situações terem subjacente a operação divisão, o que parece tê-las tornado ainda mais complexas aos olhos dos alunos.

Saliento, mais uma vez, que as tarefas com contexto de divisão, tal como as subtarefas 6a, 6b e 6c, propostas ao longo da experiência de ensino antes do trabalho explícito com esta operação (nas sequências 7 e 9), se revelaram mais difíceis de interpretar e resolver para alguns alunos, quando comparadas com problemas de multiplicação que incluem números semelhantes ou até os mesmos.

8.2.2. A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos

A tabela 8.6 resume o confronto entre a intencionalidade dos contextos e dos números das subtarefas 4, 5 e 6 da tarefa 17 e da tarefa 18, no que respeita à sua articulação e sequenciação, e os procedimentos dos alunos na sua resolução.

No que respeita à articulação entre a situação inicial proposta e os procedimentos dos alunos, estes parecem compreendê-la e associam-na a outras anteriores, nomeadamente, à tarefa 16, que tem, igualmente, um contexto de dinheiro. Ainda assim, a exigência de lidar com dois tipos de moedas ao mesmo tempo e o facto de haver mais do que uma solução possível, parece ter complexificado a sua resolução. Na subtarefa 4 nenhum aluno encontra as três hipóteses de solução para o problema e, na subtarefa 5, apenas um par de alunos apresenta as duas soluções possíveis.

As subtarefas 4 e 5 da tarefa 17 não são, no entanto, as primeiras tarefas da experiência de ensino em que é preciso lidar com mais do que um valor ao mesmo tempo e que têm mais do que uma hipótese de solução. Por exemplo, a tarefa 4 – Carteiras de cromos, resolvida anteriormente pelos alunos, apresenta um contexto com o mesmo tipo de características, embora inclua apenas números naturais. Também na sua realização alguns dos alunos manifestam uma certa tendência para a terminar quando encontram uma solução, não persistindo na procura sistemática de outras soluções. Contudo, as discussões coletivas acerca dos procedimentos utilizados nas tarefas parecem ter contribuído para que os alunos tomem consciência de que existem problemas com mais do que uma solução e que é necessário garantir que, em cada caso, são todas encontradas. Ainda assim, nem sempre o fazem na resolução das tarefas.

Relativamente às situações apresentadas nas subtarefas 6a, 6b e 6c e à sua relação com os procedimentos de resolução dos alunos, apesar de, quando comparadas com as situações anteriores, passar a lidar-se apenas com um valor de moedas de cada vez, estas não se revelam simples para os alunos. Com efeito, embora, aparentemente, este aspeto facilitar a resolução, a situação passa a ser de divisão, o que a torna mais difícil para muitos dos alunos.

Os alunos privilegiam, nos seus procedimentos, a articulação e o estabelecimento de relações numéricas associadas à subtarefa 3 da tarefa 16 e, por isso, não potenciam as relações numéricas subjacentes à articulação e sequenciação dos números utilizados nas subtarefas 4, 5, 6a, 6b e 6c da tarefa 17.

Nas subtarefas 4 e 5, os alunos que apresentam pelo menos uma hipótese de solução, estabelecem relações numéricas com os números da subtarefa 3 da tarefa 16. De facto, na subtarefa 4, oito alunos compõem o valor 2€ representando 1€ com moedas de 0,50€ e 1€ com moedas de 0,10€, recorrendo, aparentemente, à tabela preenchida anteriormente na subtarefa 3. Uma situação muito parecida acontece na resolução da subtarefa 5, na qual os alunos também usam os dados numéricos da tabela preenchida anteriormente. Parece ser mais fácil, para os alunos, relacionar quantidades de moedas do que relacionar os diferentes valores das moedas, daí estabelecerem associações com a subtarefa 3 da tarefa 16 e não com a subtarefa 4 da tarefa 17. Ainda assim, há a registar quatro alunos que, ou a resolvem incorretamente ou não a resolvem de todo, parecendo não estabelecer qualquer relação com tarefas anteriores, em que estão incluídos os mesmos números com significados análogos (associados a valores de moedas).

No que respeita aos números incluídos nas subtarefas 6a, 6b e 6c, à sua articulação e sequencialidade, os alunos parecem ter dificuldade em reconhecer semelhanças com outras situações, apesar de o terem feito a propósito dos contextos. Além disso, há oito alunos, dos 22 alunos que realizam estas subtarefas, que, no caso das subtarefas 6a e 6b, não as tentam resolver ou fazem-no de modo incorreto. No caso particular da subtarefa 6c, este número aumenta para dez. É de registar que o total de oito alunos (quatro pares) nesta situação se refere sempre aos mesmos alunos.

Tabela 8.6 – A articulação e a sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 6

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números		Procedimentos dos alunos	
Tarefa 17 Subtarefa 4	Situação semelhante à da tarefa 16 mas envolve lidar com dois tipos de moedas de cada vez. Tem três soluções.	Números 2€ e 10 e 50 centimos, já usados na subtarefa 3 da tarefa 16, mas um tipo de moedas de cada vez.	Identificam a semelhança das situações. Não reconhecem a existência de 3 soluções – apenas dois alunos identificam 2. Alguns usam a unidade centimo.	Todos reconhecem os números de tarefas anteriores. 8 dos alunos que apresentam uma solução compõem 1€ com cada tipo de moeda, relacionando com a tarefa 16.
Tarefa 17 Subtarefa 5	Situação análoga à da subtarefa 4. Tem duas soluções.	Números 3€ e 20 e 50 centimos. Há soluções anteriores que podem ser potencializadas. Também pode fazer-se a articulação com a tarefa 16.	Identificam a semelhança das situações. Apenas dois reconhecem a existência de duas soluções e calculam-nas. Alguns usam a unidade centimo.	Todos os que apresentam pelo menos uma solução reconhecem os números de tarefas anteriores, em particular da subtarefa 3 da tarefa 16. Há 2 alunos que não a resolvem.
Tarefa 17 Subtarefa 6a	Situação semelhante às anteriores em termos da ‘história’ mas é de divisão (por medida) e lida apenas com um tipo de moedas de cada vez.	Números 4€ e 20 centimos (enunciado). 4€ é o dobro de 2€, da tarefa 16.	Identificam a analogia com as situações anteriores e com a tarefa 16 mas não reconhecem a mudança na operação. Alguns usam a unidade centimo.	Todos, com exceção de 8, reconhecem os números de tarefas anteriores. 14 alunos relacionam com a subtarefa 3 da tarefa 16.
Tarefa 17 Subtarefa 6b	Situação análoga à anterior.	Números 4€ e 10 centimos (enunciado). 0,10€ é metade de 0,20€, da subtarefa 6a. 4€ é o dobro de 2€, da tarefa 16.	Identificam a analogia com as situações anteriores e com a tarefa 16 mas não reconhecem a mudança na operação. Alguns usam a unidade centimo.	14 alunos relacionam com a subtarefa 3 da tarefa 16. Desses, 8 estabelecem uma relação de dobro, em termos do número de moedas. Nenhum relaciona com a subtarefa 6a, nem usa a relação de dobro/metade.
Tarefa 17 Subtarefa 6c	Situação análoga à anterior.	Números 4€ e 5 centimos (enunciado). 0,05€ é metade de 0,10€ da subtarefa 6b. 0,05€ é um quarto de 0,20€ da subtarefa 6a. 4€ é o dobro de 2€ da tarefa 16.	Identificam a analogia com as situações anteriores e com a tarefa 16, mas não reconhecem a diferença na operação. Alguns usam a unidade centimo.	10 alunos estabelecem uma relação de dobro, em termos do número de moedas, relacionando com a tarefa 16. Nenhum relaciona com as subtarefas 6a ou 6b, nem usa a relação de dobro/metade.
Tarefa 18 Calcular em cadeia VI	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores	Números decimais 0,5; 0,20; 0,10 e 0,05 das subtarefas anteriores. Expressões cujo produto é igual a 1; 2; 1,5; 2,5; 3; e 4.	Todos identificam o contexto particular de cadeias numéricas	Todos reconhecem os números e relações multiplicativas subjacentes, a que recorrem para calcular.

A totalidade dos 14 alunos que resolve corretamente a tarefa 6a relaciona-a, tal como anteriormente, com a subtarefa 3 da tarefa 16, recorrendo, ainda assim, a procedimentos um pouco diferentes uns dos outros. Alguns utilizam relações de dobro e, outros decomposições não decimais, compondo quatro euros a partir do número de moedas necessário para perfazer dois euros, calculando depois o seu dobro ou dois produtos parciais.

Os mesmos 14 alunos que resolvem, também, corretamente a subtarefa 6b, apesar de identificarem a analogia da situação proposta com a anterior, não estabelecem relação com os números aí incluídos, mas com os números da subtarefa 3 da tarefa 16. Nesse sentido, estabelecem relações de dobro com alguns números da tabela aí incluída, ou recorrem a decomposições não decimais. Uma vez que não identificam, nas subtarefas 6a e 6b, que 0,10 é metade de 0,20 e que o total de dinheiro se mantém, não potenciam, a relação de dobro/metade que poderia ser utilizada nos cálculos a efetuar.

Na resolução da subtarefa 6c verifica-se uma situação semelhante à descrita anteriormente. Tal como antes, os alunos recorrem à tabela da subtarefa 3 da tarefa 16 e usam, sobretudo, relações de dobro, encontrando o número total de moedas a partir do número necessário para perfazer dois euros. Por isso, não parecem sentir necessidade de articular os números da subtarefa 6c com os das subtarefas anteriores, 6a e 6b, não identificando a relação de metade entre 0,05 e 0,10 ou a relação de um quarto entre 0,05 e 0,20, nem que o total de dinheiro se mantém em todas elas. Assim, não há alunos que refiram, por exemplo, que se o valor da moeda passa para metade tem de haver o dobro do número de moedas, uma vez que a quantia total é a mesma.

As justificações para os alunos não identificarem as relações entre os números incluídos nas subtarefas 6a, 6b e 6c e, conseqüentemente, não articularem os procedimentos possíveis de usar, podem estar relacionadas com as várias características dos seus contextos e, particularmente, dos números utilizados. Com efeito, o facto de as situações propostas serem de divisão e de as relações de metade que podem ser estabelecidas entre uma subtarefa e a anterior, serem relativas aos valores das moedas, correspondentes a números na representação decimal, parece dificultar a identificação de relações numéricas. Além disso, os alunos que resolvem as subtarefas 6a, 6b e 6c

socorrem-se da tabela previamente preenchida na subtarefa 3 da tarefa 16, estabelecendo relações mais simples que as de dobro/metade, o que lhes facilita bastante a realização das subtarefas em análise.

Tal como tem vindo a ser referido em outras secções e capítulos da análise dos dados, os contextos que apelam à operação de divisão revestem-se de uma complexidade maior e, por isso, criam dificuldades a alguns alunos na resolução das tarefas. Além disso, se a relação de metade entre os valores das moedas, a ser identificada de umas subtarefas para as seguintes, fosse entre a quantidade de moedas e não entre o seu valor, talvez tivesse sido mais facilmente reconhecida e usada pelos alunos nos seus procedimentos, uma vez que estes estão no início do seu trabalho com os números na representação decimal. De facto, para os alunos, além da dificuldade associada a este tipo de representação, os números 0,20; 0,10 e 0,05 estão, ainda, muito ligados ao seu significado no contexto em que se inserem. Assim, parece ser mais complexo identificar as relações numéricas de dobro ou de metade entre os valores das moedas, uma vez que, para os alunos, o significado destes números está muito ligado ao contexto de dinheiro, e correspondem, naturalmente, a objetos físicos distintos – moedas diferentes. Na fase em que os alunos se encontram, relativamente ao domínio dos números na representação decimal, é-lhes difícil pensar ou visualizar mentalmente duas moedas, por exemplo de 0,10€ e 0,05€ e, para além do seu aspeto físico, reconhecer ainda uma relação de dobro (ou de metade) entre os seus valores. A acrescentar a este facto, têm disponível uma tabela a partir da qual podem estabelecer relações mais fáceis de identificar – entre quantidades de tipos de moedas e o valor total que representam.

Nas cadeias numéricas da tarefa 18 – Calcular em cadeia VI os alunos identificam, sem dificuldades e bastante rapidamente, relações numéricas entre os vários cálculos que lhes são propostos sequencialmente. De modo a facilitar o estabelecimento de relações baseadas em propriedades da multiplicação que os alunos já utilizavam com números naturais, a professora faz apelo ao valor das diferentes moedas já usado na resolução de outros problemas. Além disso, para que os alunos deem sentido aos números na representação decimal, associando-os aos diferentes valores das moedas em vigor, os números são escritos com duas casas decimais, mesmo que a última seja

dispensável, tal como acontece com 0,20 e 0,10. A única exceção é com o número 0,5 ao qual os alunos já associam o conceito de metade, sem precisarem de o ligar a um contexto específico e que, por isso, é representado como 0,5 e 0,50.

A última cadeia numérica da tarefa 18 inclui cálculos que podem ser realizados estabelecendo as relações que poderiam ter sido identificadas e mobilizadas pelos alunos na resolução das subtarefas 6a, 6b e 6c, mas evidencia a operação multiplicação e não a divisão. São dados dois fatores e é-lhes solicitado o seu produto, por exemplo, $20 \times 0,20$. A seguir é-lhes proposto calcular $40 \times 0,10$ e, quase todos os alunos reconhecem rapidamente que o seu produto é igual ao anterior, justificando, alguns deles, através de uma relação de dobro/metade com os números do cálculo precedente. Reconhecem, ainda, que os números e as relações a que podem recorrer são as mesmas que poderiam ser valorizadas nas subtarefas anteriores. O contexto de cadeia numérica, com as suas características especiais de identificar relações, que os alunos realizam sem dificuldades, e o facto de se estar claramente no âmbito da multiplicação, e não da divisão, auxiliam todo o trabalho realizado neste âmbito e tornam-no mais fácil do que em contexto de problema.

Saliento, ainda, que as resoluções das subtarefas da tarefa 17 são discutidas coletivamente pelos alunos e pela professora, sendo realçados modos de as realizar articulando as tarefas entre si. Este aspeto contribui, também, para o consolidar das relações numéricas subjacentes aos cálculos associados e para a sua utilização nas cadeias numéricas da tarefa 18.

8.2.3. Síntese

Os contextos das subtarefas da tarefa 17, da sequência 6, parecem ter contribuído para suportar os cálculos multiplicativos que envolvem números racionais não negativos na representação decimal, para além de darem significado aos números envolvidos, associado ao sistema monetário. O facto de, na resolução das subtarefas 4 e 5 se ter de lidar com dois valores de moedas ao mesmo tempo e com várias soluções, tornou-se

complexo para alguns alunos, que identificaram apenas uma solução. Ainda assim, a maior parte dos alunos opta por procedimentos multiplicativos, embora haja alguns que recorrem a adições sucessivas. Há, também, alunos que calculam em cêntimos usando números naturais, e outros que o fazem em euros, realizando os cálculos com os números na representação decimal.

Os alunos que resolvem corretamente as subtarefas 6a, 6b e 6c, fazem-no através de procedimentos multiplicativos mas nem todos usam os números na representação decimal, apesar de serem a maioria. Contudo, comparando com as subtarefas anteriores, 4 e 5, há um decréscimo do total de alunos que trabalha com os números na representação decimal, passa de doze para dez ou oito alunos.

Considerando, ainda, as subtarefas 6a, 6b e 6c, há quatro alunos que não resolvem a subtarefa 6a, e seis que não resolvem as subtarefas 6b e 6c, não efetuando qualquer registo escrito. Os obstáculos que impediram a resolução destas tarefas parecem dever-se a três ordens de razão. Uma primeira parece estar relacionada com as dificuldades, também evidenciadas em tarefas anteriores, que envolvem o cálculo com números na representação decimal, para alguns alunos. Uma segunda razão parece dever-se aos contextos destas três situações, associados à operação divisão, o que complexificou, perante os alunos, e à semelhança do que aconteceu em tarefas anteriores, as propostas a resolver. Finalmente, uma terceira razão, parece relacionar-se com a grande diferença entre os valores monetários incluídos em cada uma delas – quatro euros e vinte cêntimos, quatro euros e dez cêntimos e quatro euros e cinco cêntimos, que também parece ter contribuído para aumentar as dificuldades em estabelecer relações entre os valores dados.

Os alunos que resolvem adequadamente as subtarefas 6a, 6b e 6c, privilegiam a sua articulação com uma tarefa anterior, a subtarefa 3 da tarefa 16, em vez de identificarem e utilizarem as relações que poderiam ser estabelecidas entre as subtarefas 6b e 6a e entre a subtarefa 6c e as antecedentes. Este facto parece estar associado à facilidade no uso de relações sobre quantidades de moedas quando comparadas com relações entre os diferentes valores das moedas. Assim, ao recorrerem à subtarefa 3 da tarefa 16, os alunos utilizam, sobretudo, relações de dobro entre o número de moedas, não sentindo necessidade, ou não identificando, as relações de metade que poderiam ser

rentabilizadas entre, por exemplo, 0,05 e 0,10, valores das moedas incluídos nos contextos das tarefas 6c e 6b.

Na resolução das cadeias numéricas da tarefa 18 os alunos calculam com facilidade, identificando os números e as relações numéricas e articulando-os com as subtarefas anteriores, tal como acontece neste tipo de cálculos em cadeia. Além disso, os cálculos que têm de realizar são todos do tipo multiplicativo, não estando envolvida a operação divisão.

8.3. A sequência 9 de tarefas de divisão com números naturais

A sequência 9, do conjunto de tarefas de divisão com números naturais, é constituída pelas tarefas 25 – Outra máquina de bebidas, pela tarefa 26 – Miniaturas de animais e pela tarefa 28 – Calcular em cadeia VIII. A tarefa 27 corresponde ao congresso matemático que decorre da tarefa 26.

A tarefa 25 é organizada em duas subtarefas, a tarefa 26 corresponde a um único problema e a tarefa 28 é constituída por 4 cadeias numéricas. O propósito da sequência 9 é consolidar o uso de procedimentos multiplicativos na resolução de tarefas de divisão, interligando esta operação com a multiplicação. Relacionado com este propósito pretende-se, também, que os alunos recorram ao uso do modelo retangular para apoiar os cálculos que realizam. De modo a analisar as características dos contextos e dos números, e a articulação e sequenciação entre tarefas, opto por analisar, conjuntamente, as tarefas 25 e 26, uma vez que a tarefa 26 é constituída por, apenas, um problema.

8.3.1. Os contextos e os números das tarefas 25 e 26 e os procedimentos dos alunos

Na tabela 8.7 apresento, resumidamente, as características dos contextos e dos números das tarefas 25 e 26, os respetivos procedimentos dos alunos e a sua frequência.

Na resolução das subtarefas 1 e 2 da tarefa 25 e da tarefa 26 os alunos recorrem, sobretudo, a procedimentos multiplicativos, auxiliados, ou não, pelo modelo retangular. Apenas na subtarefa 1 da tarefa 25, três alunos utilizam procedimentos aditivos e subtrativos. Nas subtarefas da tarefa 25 regista-se um número significativo de alunos que as resolve de modo incorreto, ou não as resolve, sendo de realçar o caso específico da subtarefa 2. Aqui, apenas cinco alunos, de um total de 23, a conseguem realizar corretamente.

Tabela 8.7 – As tarefas 25 e 26, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos

Tarefas	Contextos e números		Procedimentos dos alunos	N.º alunos
Tarefa 25 Subtarefa 1	Divisão (sentido de medida) Figura com embalagens de 6 garrafas e caixas de 10 embalagens. Números 132, 10 e 6.	Sem usar o modelo retangular	Adicionar sucessivamente	1
			Subtrair sucessivamente	2
			Multiplicar sucessivamente	9
			Representar apenas a divisão	2
			Incorretos	5
		Com recurso ao modelo retangular	Uso de decomposição decimal	3
			Incorretos (tentativa de uso do modelo retangular)	1
Tarefa 25 Subtarefa 2	Divisão não exata (sentido de medida) Figura com embalagens de 6 garrafas e caixas de 10 embalagens. Números 132, 10 e 6.	Sem usar o modelo retangular	Uso de decomposição não decimal	2
			Multiplicar sucessivamente	3
			Incorretos	14
			Inexistentes	4
		Com recurso ao modelo retangular	Inexistentes	0
Tarefa 26 ³¹	Divisão (sentido de partilha) Números 256, 224, 8 e 7.	Com uso do modelo retangular	Uso de decomposição não decimal	4
			Uso de decomposição decimal	13(11+2 ³²)
			Incorretos	2
		Sem usar o modelo retangular	Multiplicar sucessivamente	4(2+2 ³³)
			Multiplicar em coluna	2

Na subtarefa 1 da tarefa 25, há três alunos que usam o modelo retangular como suporte do cálculo e fazem-no com sucesso. Um outro aluno também tenta utilizar o mesmo modelo para apoiar os cálculos que necessita efetuar, mas não consegue fazê-lo adequadamente. Os alunos que recorrem a este modelo usam um procedimento de decomposição decimal para encontrar o número que, multiplicado por 6, é igual a 132. Começam por representar numa das “células do retângulo” o produto $20 \times 6 = 120$ (ou $6 \times 20 = 120$) e, na outra “célula” $2 \times 6 = 12$ (ver figura 6.94, com a resolução de Gustavo).

³¹ Na tarefa 26, o total de procedimentos dos alunos é 25, apesar de o total de alunos ser 23, porque Eva e Mariana usam dois procedimentos diferentes na sua resolução.

³² Corresponde a uma parte do procedimento usado por Eva e de Mariana.

³³ Corresponde a uma outra parte do procedimento usado por Eva e de Mariana.

Aparentemente, reconhecem a relação entre as operações divisão e multiplicação e usam, com facilidade, o modelo retangular para calcular.

É de registrar que o modelo retangular como auxiliar no cálculo é introduzido e trabalhado pela professora, no âmbito desta experiência de ensino, a propósito de tarefas de multiplicação. Mais tarde, concretamente, na semana anterior à realização desta tarefa 25, a professora Isabel introduz o modelo retangular para apoiar o cálculo associado a problemas de divisão, baseando-se na relação inversa entre as duas operações que a maior parte dos alunos já reconhece.

Provavelmente porque, aquando da realização da tarefa 25, o trabalho associado ao uso do modelo retangular como apoio ao cálculo em problemas de divisão é escasso, muitos dos alunos não o utilizam – ou porque não sentem, ainda, à vontade no seu uso ou porque, eventualmente, não sentem necessidade de o fazer. Por isso, na resolução da subtarefa 1 da tarefa 25 há 14 alunos que a resolvem adequadamente, mas sem se apoiarem neste modelo.

Dos 14 alunos que resolvem corretamente a subtarefa 1 da tarefa 25 e que não recorrem ao modelo retangular há nove que usam procedimentos multiplicativos. Efetuam o produto recorrendo a um fator múltiplo de 10, até alcançar o número que, multiplicado por seis é igual a 132, parecendo pensar nesta subtarefa a um nível mais formal. Uns começam pelo produto $10 \times 6 = 60$, passando depois para $20 \times 6 = 120$ e, outros iniciam logo os cálculos por $20 \times 6 = 120$. Estes produtos associados a múltiplos de 10 parecem ter sido sugeridos pelos números incluídos no enunciado e pela figura que acompanha esta subtarefa, que destaca grupos de seis garrafas e de dez embalagens.

Presumivelmente, os dois alunos que registam na sua folha de resolução apenas a expressão $132:6=22$ utilizam, também, o mesmo tipo de cálculo apresentado anteriormente mas, uma vez que não efetuam quaisquer registos adicionais, não há evidências empíricas que o confirmem.

Três alunos utilizam procedimentos aditivos e subtrativos na resolução da subtarefa 1, pouco potentes, que se revelam demorados e suscetíveis a enganos, parecendo não identificar, ainda, a relação entre a multiplicação e a divisão.

Uma explicação possível para que cinco alunos não consigam resolver esta subtarefa pode estar relacionada com o facto de o contexto ser de divisão no sentido de medida, mais complexo para estes e, além disso, porque ainda não reconhecem a relação inversa entre multiplicação e divisão, não potenciando, assim, os procedimentos multiplicativos que já usaram noutros problemas. Há, também, um outro aspeto que pode ter contribuído para o elevado número de alunos que não consegue resolver esta subtarefa – o facto de o terem feito individualmente – ao contrário de muitas outras realizadas a pares. Deste modo, não tiveram a possibilidade de discutir com outros hipóteses de resolução que, eventualmente, poderiam vir a ser bem-sucedidas.

A tarefa 25 (subtarefas 1 e 2) foi resolvida individualmente, o que também pode ter contribuído para que, na subtarefa 2, se registasse um elevado número de alunos que não a resolve corretamente – 14 efetuam alguns registos e quatro deixam o espaço de resolução em branco. Além disso, o contexto da tarefa, relativamente ao anterior, complexificou-se e os alunos parecem não ter percebido o que se pretendia, apesar da figura que acompanha a tarefa poder auxiliar na compreensão do enunciado apresentado.

O contexto da subtarefa 2 da tarefa 25 exige pensar no mesmo total de garrafas que anteriormente, 132, e num grupo (uma caixa) de dez embalagens de seis garrafas. Ou seja, o grupo a considerar como referência, “a medida”, é uma caixa que pode ser encarada como 60 garrafas (uma caixa) ou, como dez embalagens (uma caixa). Efetivamente, apesar de a questão final do enunciado estar formulada em termos de caixas “Quantas caixas cheias são necessárias?” os alunos poderiam pensar nas caixas como um grupo de embalagens ou um grupo de garrafas. Além disso, a solução do problema não corresponde apenas ao quociente da divisão, uma vez que esta não é exata.

Todos os aspetos apresentados relativamente à complexidade do contexto proposto e ao facto de os alunos trabalharem individualmente na resolução da subtarefa 2, parecem justificar, assim, que apenas cinco alunos a consigam realizar adequadamente. Desses, dois optam por procedimentos de decomposição não decimal identificando primeiro o número de garrafas por caixa e três outros multiplicam sucessivamente a partir de $10 \times 6 = 60$. Estes cinco alunos registam também que, da terceira caixa, são necessárias apenas 12 garrafas ou duas embalagens de seis garrafas.

Na tarefa 26, cujo contexto apela ao sentido da divisão por partilha e tem subjacente a ideia de uma partilha justa de brinquedos, todos os alunos usam procedimentos multiplicativos. Seguindo a ordem do enunciado da tarefa, começam por calcular com quantas miniaturas (num total de 256) fica cada amigo do grupo de oito e realizam depois o cálculo equivalente para o total de 224 miniaturas e o grupo de sete amigos. Uma grande parte dos alunos (19, num total de 23) apoia-se no modelo retangular para calcular, utilizando procedimentos multiplicativos para encontrar o resultado de cada uma das partilhas propostas e decidir sobre a sua justiça (ver, por exemplo, a Figura 6.99, com a resolução de Enzo e Guilherme). Mesmo os alunos que interpretam de modo incorreto o problema, Diogo e Maria Rita, uma vez que não atendem ao desafio colocado “Achas que é justa esta partilha das miniaturas dos animais?” e resolvem a tarefa como se a questão fosse “Encontra uma maneira de tornar justa a partilha das miniaturas de animais”, apoiam-se no modelo retangular.

A maior parte dos alunos que recorre ao modelo retangular utiliza um procedimento de decomposição decimal, num total de treze. Começam por calcular $30 \times 8 = 240$ e depois $2 \times 8 = 16$, usando o seu conhecimento sobre múltiplos de dez e de oito. Os alunos que usam uma decomposição não decimal calculam primeiro 10×8 ou 20×8 , efetuando, depois, mais dois cálculos 20×8 e 2×8 ou apenas 12×8 . Os dois alunos que não interpretam bem a situação proposta começam por adicionar o total de miniaturas de cada grupo e pensam em termos de um grupo de 480 miniaturas a serem partilhadas por 15 alunos. Na sua resolução começam por realizar 30×15 e depois 2×15 , obtendo 32 miniaturas para cada aluno, tal como os seus colegas.

Há um par de alunas, Eva e Mariana, que, tal como muitos colegas, resolve $256 \div 8$ usando o modelo retangular e a decomposição decimal de 32 em $30 + 2$. Contudo, para calcular o quociente seguinte – $224 \div 7$ – abandona o modelo e opta por produtos sucessivos recorrendo, sobretudo, a múltiplos de dez: 10×7 , 20×7 , 30×7 e 32×7 . Esta mudança parece ter sido provocada pela menor facilidade no cálculo com múltiplos de sete, ao invés do que acontece com os múltiplos de oito.

Ana Rita e Miguel, tal como as alunas referidas anteriormente, também usam produtos sucessivos para calcular os quocientes de $256 \div 8$ e $224 \div 7$ mas optam por um

procedimento menos potente que as colegas, uma vez que realizam, exaustivamente, todos os produtos de 10×8 a 32×8 e de 10×7 a 32×7 .

Os alunos Hugo e José utilizam um procedimento sistemático, baseando-se no conhecimento que têm sobre o sistema decimal e pensando isoladamente nos algarismos das unidades de 256 e 224 e nas consequências do seu produto por oito e por sete, respetivamente.

Em suma, o contexto da tarefa 26, incluindo uma situação desafiante para os alunos, que são muito sensíveis a este tipo de questões de justiça baseada na partilha equitativa de miniaturas de animais, não lhes suscita dúvidas de relevo e todos reconhecem que estão perante a operação divisão. No cálculo do quociente da divisão subjacente, todos usam procedimentos multiplicativos, fazendo apelo à relação entre as duas operações, multiplicação e divisão. Na sua realização, a maior parte apoia-se no modelo retangular e usa a (de)composição decimal do número 32. Ainda assim, há a registar outros procedimentos multiplicativos, como o utilizado por Ana Rita e Miguel, muito exaustivo, moroso e pouco potente.

Para além do contexto de partilha equitativa, que parece ter facilitado o uso do modelo retangular para apoiar procedimentos multiplicativos, também o facto de os números em causa serem “distantes uns dos outros” (256 de 8 e 224 de 7) parece ter incentivado a utilização deste tipo de procedimentos, em detrimento de outros. Além disso, nesta altura, os alunos já parecem reconhecer vantagens no uso do modelo retangular e fazem-no com maior segurança. Para isso contribuíram, também, as discussões coletivas, orquestradas pela professora Isabel, decorrentes das resoluções das subtarefas da tarefa 25, em que a utilização deste modelo foi realçada.

8.3.2. A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos

A tabela 8.8 sintetiza a relação entre a articulação e a sequenciação das tarefas pensadas e os procedimentos usados pelos alunos na sua resolução.

No que respeita à situação inicial da tarefa 25, todos os alunos a associam à tarefa 20 – Máquinas de bebidas e parecem compreendê-la. Ainda assim, há quase um terço dos alunos que resolve a subtarefa 1 incorretamente e três alunos que usam procedimentos que não são baseados na operação multiplicação. No caso da subtarefa 2, a frequência dos alunos que a resolve com correção diminui, aumentando o número de alunos que, ou não a realiza, ou o faz de modo desadequado.

Comparando os procedimentos utilizados nesta tarefa 25 com os usados na tarefa 20, parece haver uma progressão no uso dos de tipo multiplicativo. Entre as duas tarefas foi introduzido, pela professora, no âmbito da experiência de ensino, o modelo retangular de apoio à resolução de problemas de divisão, potenciando a relação entre a multiplicação e esta operação. Contudo, na altura da proposta da tarefa 25, muitos dos alunos ainda não estão seguros no seu uso, pelo que se registam algumas tentativas de o utilizar, não muito bem-sucedidas.

A situação e os números usados nas subtarefas 1 e 2 da tarefa 25 são os mesmos, havendo diferença no que é preciso calcular – na subtarefa 1 quer saber-se o número necessário de embalagens de seis garrafas e, na subtarefa 2, quer saber-se o número de caixas, mantendo-se as condições de partida, um total de 132 garrafas de água. Ainda assim, há muitas dificuldades na interpretação da subtarefa 2, havendo um grande número de alunos que não a realiza. Além disso, há poucos alunos que potenciam as relações entre caixas e embalagens e entre caixas e garrafas – cada caixa tem 10 embalagens e cada caixa tem 60 garrafas. Não há nenhum que parta da resposta anterior “São necessárias 22 embalagens” para calcular o número de caixas necessário, relacionando caixas com embalagens. Resumindo, não há alunos que, nos seus procedimentos, tenham relacionado as duas subtarefas, realizando-as de modo quase independente.

Também no que respeita aos números utilizados, os alunos reconhecem que são os mesmos nas duas subtarefas mas, o facto de, nos seus enunciados, o total ser expresso em número de garrafas e cada uma das perguntas se referir a outro tipo de grupo, embalagens e caixas, dificulta bastante a sua interpretação sobre a segunda situação e o

estabelecimento de relações entre os números, cada um com significado próprio associado ao contexto.

Apesar das relações supramencionadas, entre caixas, embalagens e garrafas, que pareciam evidentes durante a construção da tarefa 25, que articulavam a subtarefa 1 com a subtarefa 2, esta revela-se muito complexa para os alunos. Com efeito, nesta última estão em causa três tipos de grupos (de unidades, se pensarmos na situação de divisão por medida), contidos uns nos outros, com os quais os alunos precisam de lidar: garrafas, embalagens e caixas. Este facto dificulta, também, a resolução do problema com apoio no modelo retangular. Os aspetos anteriores, a acrescentar ao facto de a situação ser de divisão não exata, e de os alunos resolverem as tarefas individualmente e não a pares, parecem ter como consequência o diminuto número de alunos que realiza a subtarefa 2 de modo adequado. No entanto, a discussão organizada em torno da tarefa 25 permite realçar os procedimentos multiplicativos utilizados por alguns alunos e destacar o uso do modelo retangular para apoiar o cálculo.

Na tarefa 26, o contexto de divisão por partilha é semelhante ao da subtarefa 1 da tarefa 19 mas, neste caso, para além da simples partilha de miniaturas de animais trata-se de comparar os resultados de duas partilhas e ajuizar da sua justiça. A situação é compreendida pelos alunos que a identificam como sendo de divisão. Confrontando com a tarefa 25, há um maior número de alunos que se apoia no modelo retangular para calcular, enquanto outros realizam os cálculos de modo mais formal, através de produtos com múltiplos de dez. Embora utilizando procedimentos diferentes, todos os alunos recorrem aos de tipo multiplicativo. Sendo os números de uma outra ordem de grandeza, quando comparados com os da tarefa anterior, os alunos realizam os cálculos com bastante facilidade. Para este facto parecem ter contribuído a experiência na realização de tarefas de divisão, o seu maior conhecimento sobre a sua relação com a multiplicação e a maior segurança de alguns no uso do modelo retangular.

Tabela 8.8 – A articulação e sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 9

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números		Procedimentos dos alunos	
Tarefa 25 Subtarefa 1	Situação semelhante à da tarefa 20. Divisão (sentido de medida). É preciso saber o número de embalagens de 6 garrafas.	Números 132, 6 e 10. Exige lidar com múltiplos de 6, usados em tarefas anteriores, como na 20. Pode recorrer-se ao modelo retangular.	Identificam a semelhança entre esta situação e a da tarefa 20.	Todos reconhecem os números de tarefas anteriores mas, mesmo assim, há três alunos que não usam procedimentos multiplicativos e sete que resolvem incorretamente. Apenas dois usam o modelo retangular de modo adequado.
Tarefa 25 Subtarefa 2	Situação análoga à da subtarefa 1. Divisão não exata (sentido de medida) É preciso saber o número de caixas com 10 embalagens ou com 60 garrafas.	Os números são os mesmos da subtarefa anterior. É preciso lidar com caixas, grupo de 60 garrafas ou de 10 embalagens. Pode partir-se do resultado anterior. Pode recorrer-se ao modelo retangular.	Todos identificam o mesmo contexto da subtarefa 1. Mas muitos não reconhecem que anteriormente se pedia o número de embalagens e agora o número de caixas. Há muita dificuldade na interpretação da situação.	Todos reconhecem os números da subtarefa anterior mas não associam o número de embalagens encontrado com o número de caixas a identificar. Não relacionam que uma caixa tem dez embalagens, por isso não partem das 22 embalagens, a solução anterior. Apenas cinco resolvem corretamente a tarefa, mas nenhum recorre ao modelo retangular.
Tarefa 26	Situação semelhante com subtarefa 1 da tarefa 19, mas mais complexa. Lida com dois conjuntos diferentes a serem partilhados por um número diferente de alunos. Divisão (sentido de partilha).	Números 256, 224, 8 e 7. Exige lidar com múltiplos de 8 e de 7. Pode recorrer-se ao modelo retangular. Exige calcular dois quocientes e compará-los.	Identificam a semelhança entre esta situação e a da subtarefa 1 da tarefa 19. Têm facilidade em interpretar a situação, apenas dois têm mais dificuldade.	Todos os alunos (exceto quatro) recorrem ao modelo retangular, incluindo os que interpretam a situação de forma diferente da proposta. Todos lidam com facilidade com múltiplos de 8 e de 7.
Tarefa 28 Calcular em cadeia VIII	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores	Cálculos envolvendo divisões em que é alterado a dividendo e se mantém o divisor. Números usados nos quocientes 3, 4, 13 e 14	Todos identificam o contexto particular de cadeias numéricas.	Todos reconhecem relações multiplicativas associadas às divisões correspondentes, a que recorrem para calcular.

A situação proposta, com a qual muitos dos alunos se identificam, de partilha equitativa de pequenos brinquedos, também parece ter ajudado a sua resolução. O facto de, no enunciado da tarefa 26, se referir primeiro a partilha pelo grupo de oito colegas, parece permitir que os alunos potenciem o seu conhecimento sobre o cálculo com múltiplos de oito e, em seguida, possam utilizar um procedimento análogo para o cálculo com múltiplos de sete, número menos usual. Apenas um par, Eva e Mariana, não usa o mesmo procedimento nos dois casos. Os seus registos evidenciam que as alunas tentam usar o modelo retangular para calcular $224 \div 7$, tal como efetuaram para o cálculo de $256 \div 8$, mas riscam a sua tentativa inacabada e optam depois por realizar multiplicações sucessivas.

O facto da tarefa 26 dar origem a um congresso matemático (tarefa 27) permite que sejam apresentadas e discutidas diferentes resoluções dos alunos, que seja destacada, mais uma vez, a relação entre as operações multiplicação e divisão e que seja realçado o uso do modelo retangular como apoio ao cálculo. Deste modo, os alunos têm oportunidade de consolidar aspetos importantes da compreensão da multiplicação, tais como a relação inversa entre as duas operações e o uso de procedimentos multiplicativos potentes, com o auxílio, sempre que necessitem, do modelo retangular.

Na tarefa seguinte, tarefa 28 – Cadeias numéricas VIII, os alunos realizam os cálculos propostos sem manifestarem grandes dificuldades. Em cada cadeia os cálculos têm uma característica semelhante: o número que tem a função de divisor em cada expressão de divisão é o mesmo, variando o número que corresponde ao dividendo. Os alunos percebem rapidamente que podem recorrer a produtos parciais usando decomposições adequadas do dividendo e potenciando os cálculos com múltiplos de 10. Neste âmbito, aprofundam e consolidam o uso de procedimentos multiplicativos na resolução de expressões que envolvem a divisão.

8.3.3. Síntese

Os contextos das tarefas 25 e 26 envolvem situações de divisão, por medida e por partilha equitativa, com números naturais. Na tarefa 25 há alguns alunos que a resolvem incorretamente, sobretudo, na subtarefa 2. Nos registos dos alunos que a resolvem com correção há a evidenciar procedimentos diversificados envolvendo a adição, a subtração e a divisão. Apesar de a professora já ter introduzido o modelo retangular como auxiliar do cálculo multiplicativo são poucos os alunos que, na tarefa 25, optam por ele.

O contexto da subtarefa 2 da tarefa 25 exige pensar num total de 132 garrafas e em caixas de dez embalagens, cada uma com seis garrafas, ou seja, em termos multiplicativos, significa pensar em grupos de grupos. Além disso, a divisão envolvida não é exata. Estes dois aspetos, associados ao contexto e aos números envolvidos, parecem ter dificultado a sua resolução por parte de bastantes alunos, que, também, não estabelecem ligações entre as duas subtarefas 1 e 2.

Ao contrário do contexto da subtarefa 2 da tarefa 25, o contexto da tarefa 26, fazendo apelo a uma partilha equitativa de um conjunto de brinquedos, parece ter contribuído para que os alunos a resolvessem adequadamente e recorrendo apenas a procedimentos multiplicativos. Além disso, a maioria recorre ao modelo retangular para suportar os cálculos que realizam. Esta progressão, relativamente aos procedimentos usados na tarefa anterior parece dever-se, também, à introdução do modelo retangular para apoiar a resolução de problemas de divisão, potenciando, assim, a relação entre esta operação e a multiplicação. Os números envolvidos, múltiplos de sete e de oito, e o recurso a múltiplos de dez, com os quais os alunos estão bastante familiarizados, parecem, também, ter concorrido para a utilização de procedimentos multiplicativos baseados, sobretudo, em decomposições decimais ou outras.

Os cálculos em cadeia da tarefa 28 parecem auxiliar, também, a consolidação do uso de procedimentos multiplicativos nos cálculos que incluem a operação divisão. São realçadas, em particular, relações que podem ser estabelecidas entre divisões cujos dividendos estão relacionados entre si e que mantêm o mesmo divisor, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

8.4. A sequência 10 de tarefas de multiplicação no sentido proporcional com números racionais não negativos na representação decimal

A sequência 10 inclui tarefas com números racionais não negativos na representação decimal, cujo contexto está ligado ao sentido proporcional da operação multiplicação. É constituída pelas tarefas 29 – Ida ao teatro, 30 – Ida à mercearia da Piedade e 31 – Calcular em cadeia IX. O seu propósito principal é partir de situações relacionadas com preços, representados em tabelas incompletas, e trabalhar alguns aspetos iniciais do raciocínio proporcional. A tarefa 30, considerando os números aí incluídos, tem ainda o objetivo de mobilizar a identificação de regularidades nos cálculos a efetuar, destacando o uso de procedimentos de compensação. No capítulo da experiência de ensino na turma de Isabel são descritas, em detalhe, a intencionalidade das tarefas desta sequência e as características dos contextos propostos.

Nesta subsecção opto por selecionar para análise apenas as tarefas 30 e 31, de modo a evitar repetições. A tarefa 30 é constituída pelas subtarefas 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1 e 3.2.

8.4.1. Os contextos e os números das subtarefas da tarefa 30 e os procedimentos dos alunos

Na tabela 8.9 apresento as características dos contextos e os números das subtarefas da tarefa 30, os procedimentos dos alunos e a frequência de cada um. Uma vez que, no início da aula relativa a esta tarefa, a professora Isabel decide trocar a ordem das quatro primeiras subtarefas, de modo que os alunos resolvam primeiro as que considera mais fáceis, são propostas, em primeiro lugar, as subtarefas 2.1 e 2.2 e, conseqüentemente, a análise relativa a estas subtarefas é feita, também, em primeiro lugar.

Na subtarefa 2.1, quinze dos vinte e três alunos da turma preenchem a tabela sem apresentar quaisquer cálculos adicionais, provavelmente porque não sentem necessidade de os realizar. Os que apresentam, alguns fazem-no através de procedimentos aditivos,

compondo os valores a calcular a partir de outros da tabela, já efetuados, ou usam relações de dobro. Há ainda dois alunos que não recorrem a valores já preenchidos da tabela, a não ser ao preço de um saco de maçãs. Com este preço unitário realizam cálculos multiplicativos, decompondo o fator na representação decimal (preço de um saco), em unidades e décimas.

Na subtarefa 2.2 todos os alunos recorrem à tabela para calcular o preço das várias quantidades de sacos de maçãs. Uma vez que se pretende determinar o preço de 6, 8 e 40 sacos (sempre um número par de sacos), os alunos utilizam o preço, já preenchido na tabela anterior, de três, quatro e 20 usando, ou a adição de duas parcelas iguais, ou efetuando o dobro. Nesta subtarefa não se registam casos de alunos que recorrem ao preço unitário.

No preenchimento da tabela associada à subtarefa 1.1, há oito alunos que usam procedimentos aditivos no cálculo dos diferentes valores, enquanto outros quatro recorrem, sobretudo, à multiplicação para determinar os valores necessários.

Na resolução da subtarefa 1.1 há a registar, ainda, os procedimentos dos alunos que não se socorrem dos diferentes valores que vão colocando na tabela para calcular outros. Estes apenas retiram da tabela o preço de um saco de laranjas e, a partir daí, calculam todos os outros preços. O modo como o fazem varia – cinco recorrem à decomposição do número 1,60 em dezenas e unidades e dois calculam em coluna. Tal como na subtarefa 2.1, há quatro alunos que apenas preenchem a tabela, sem registarem quaisquer cálculos adicionais, provavelmente porque não precisam de o fazer.

Na subtarefa 1.2 sobressai o uso, por dez alunos, de procedimentos de ajustar e compensar para calcular o preço de nove sacos de laranjas, depois de terem determinado o preço de dez. Este procedimento parece ter sido sugerido pela disposição intencional das linhas na tabela – primeiro está representada a linha para completar com o preço de dez sacos e, só depois, a linha correspondente ao preço de nove sacos. Contudo, nem todos os alunos usam este procedimento, alguns calculam primeiro o preço de nove sacos e, só depois, o preço de dez, alterando a ordem sugerida pelos valores da tabela.

Tabela 8.9 – A tarefa 30, os seus contextos e números e os procedimentos dos alunos

Tarefas	Contextos e números	Procedimentos dos alunos		N.º alunos
Tarefa 30 Subtarefa 2.1	Multiplicação (sentido proporcional) Tabela com o preço de um saco de maçãs – 1,10€ Calcular preço de 2, 10, 5, 3, 4 e 20 sacos.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	4
			Uso de dobros	2
		Sem usar outros valores da tabela a não ser o unitário	Uso de decomposições não decimais	2
			Regista apenas o resultado	15
Tarefa 30 Subtarefa 2.2	Multiplicação (sentido proporcional) Calcular preço de 6, 8 e 40 sacos (1,10€ cada). Está disponível a tabela anterior preenchida.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	13
			Uso de dobros	10
		Sem usar valores da tabela a não ser o unitário	Inexistentes	0
Tarefa 30 Subtarefa 1.1	Multiplicação (sentido proporcional) Tabela com o preço de um saco de laranjas – 1,60€ Calcular preço de 2, 5, 6, 10, 9 e 20 sacos.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	6
			Adicionar em coluna	2
			Uso de dobros	2
			Uso de decomposição não decimal	2
			Ajustar e compensar	10
		Sem usar valores da tabela a não ser o unitário	Uso de decomposição não decimal	5
			Multiplicar em coluna	2
			Regista apenas o resultado	4
Tarefa 30 Subtarefa 1.2	Multiplicação (sentido proporcional) Calcular preço de 4,12 e 24 sacos (1,60€ cada). Está disponível a tabela anterior preenchida.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	13
			Uso de dobros	10
		Sem usar valores da tabela a não ser o unitário	Inexistentes	0
Tarefa 30 Subtarefa 3.1	Multiplicação (sentido proporcional) Tabela com o preço de uma embalagem de sumo – 0,99€ Calcular preço de 2, 3, 5, 10, 9 e 20 embalagens.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	6
			Multiplicar em coluna	2
		Sem usar valores da tabela a não ser o unitário	Ajustar e compensar	8
			Regista apenas o resultado	2
		Incorretos		5
Tarefa 30 Subtarefa 3.2	Multiplicação (sentido proporcional) Calcular preço de 6 e 8 embalagens (0,99€ cada). Está disponível a tabela anterior preenchida.	Com recurso a valores da tabela	Adicionar dois a dois	6
			Adicionar em coluna	2
			Usar dobros	4
		Sem usar valores da tabela a não ser o unitário	Ajustar e compensar	10
		Incorretos		1

Enquanto na subtarefa 1.1 há alunos que recorrem sempre ao preço unitário para completar a tabela, na subtarefa 1.2 tal não se verifica. Com efeito, todos os alunos usam dados da tabela anterior, representada na mesma folha de registo, para realizar os cálculos pedidos. À semelhança do que acontece na subtarefa 2.2, como todos os números relativos às quantidades de sacos pedidas são pares, todos os alunos retiram da tabela os preços correspondentes a metade dessa quantidade e, ou efetuam o seu dobro, ou adicionam duas parcelas iguais. No caso do preço de 24 sacos de laranjas usam procedimentos análogos, uma vez que, apesar do preço de 12 sacos não estar na tabela, é calculado imediatamente antes.

A resolução das subtarefas 3.1 e 3.2 coloca bastantes dificuldades a alguns alunos, muito mais do que as anteriores. Estas parecem ser causadas pelo número que corresponde ao preço de uma embalagem de sumo – 0,99€. A maior parte tenta utilizar procedimentos do mesmo tipo que usou nas subtarefas anteriores, aditivos ou multiplicativos, socorrendo-se, ou não, de valores da tabela. Contudo, tanto os procedimentos aditivos como os multiplicativos a que tentam recorrer dão origem a cálculos um pouco complexos e suscetíveis de enganos. Por isso, há alunos que os realizam de modo incorreto (cinco na subtarefa 3.1 e um na subtarefa 3.2). Ainda assim, há oito alunos que identificam que 0,99€ é uma quantia muito próxima de um euro e conseguem, a partir daí, realizar os cálculos associados ao preenchimento da tabela através de procedimentos de ajuste e compensação.

A identificação da regularidade na subtarefa 3.1, associada ao procedimento de compensação, acarreta o aumento de número de alunos que usa este procedimento na subtarefa 3.2 seguinte, de oito para dez. Apesar de ser um procedimento baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, o reconhecimento da regularidade associada aos números obtidos, permite que os alunos não precisem sequer de efetuar a subtração correspondente, mas que identifiquem, de imediato, o seu resto.

Na resolução das subtarefas associadas à tarefa 30, os registos dos alunos apresentam-se muito desorganizados e bastante rasurados, quando comparados com os relativos a tarefas anteriores. Este facto parece dever-se a dois tipos de razões. Por um lado, foi-lhes sugerido que realizassem os cálculos a esferográfica, de modo a perceber-

se todas as suas tentativas de resolução, mesmo as incorretas e/ou incompletas. Por outro lado, alguns dos alunos manifestam, ainda, uma certa insegurança nas representações e nos cálculos com números racionais na representação decimal. Este último aspeto intensifica-se nas tarefas 1.1 e 3.1, considerando os números com os quais é preciso calcular – 1,60 e 0,99.

8.4.2. A articulação e a sequenciação entre as subtarefas da sequência e os procedimentos dos alunos

A tabela 8.10 resume a articulação e sequenciação entre as subtarefas da tarefa 30 e os procedimentos dos alunos, no que diz respeito aos contextos das tarefas e aos números aí incluídos.

Relativamente à articulação entre a situação inicial e os procedimentos dos alunos, todos mostram que parecem compreendê-la com facilidade e que a associam a outras tarefas onde, o contexto também se refere a preços, tal como nas tarefas 2 e 29. Relativamente a esta última identificam ainda outras semelhanças, uma vez que, em ambas, é pedido o preenchimento de uma tabela de preços.

A articulação e a sequenciação dos números utilizados parecem ser potenciadas por muitos dos alunos. Assim, da subtarefa 2.1 para 2.2, da subtarefa 1.1 para a 1.2 e da subtarefa 3.1 para a 3.2, quase todos os alunos recorrem aos valores inseridos na tabela, preenchida nas subtarefas anteriores. Como nas segundas subtarefas respetivas se pede o cálculo de preços que correspondem a uma quantidade par (oito sacos, 40 sacos, 24 sacos, oito embalagens de sumo, por exemplo) todos os alunos recorrem aos preços que correspondem a metade dessas quantidades e que já foram calculados previamente. Provavelmente a forma de representação dos registos, em tabela, contribui para este tipo de procedimentos dos alunos. Contudo, enquanto alguns usam adições de parcelas iguais outros recorrem a relações de dobro, sendo ambos os procedimentos sugeridos pelos números utilizados nos enunciados. Mesmo os alunos que, em outras subtarefas, efetuam os cálculos a partir do preço unitário, reconhecem a facilidade do uso de procedimentos de dobro ou de parcelas iguais nesta situação, de acordo com os números envolvidos.

Tabela 8.10 – A articulação e sequenciação entre os contextos e os números e os procedimentos dos alunos em tarefas da sequência 10

Tarefas	Articulação e sequenciação entre os contextos e os números		Procedimentos dos alunos	
Tarefa 30 Subtarefa 2.1	Situação semelhante às das tarefas 2 e 29 (preços). Inclui preencher uma tabela como na tarefa 29.	Calcular preços a partir de 1,10€. Pode recorrer-se a valores da tabela para calcular outros ou usar sempre o valor unitário 1,10.	Identificam a semelhança entre esta situação e as das tarefas 2 e 29.	Todos calculam com facilidade, considerando o número 1,10. Há quatro que recorrem a procedimentos aditivos e os restantes ou usam a multiplicação ou colocam apenas o resultado.
Tarefa 30 Subtarefa 2.2	Situação análoga à da subtarefa 2.1. É preciso saber o preço de 6, 8 e 40 sacos de maçãs.	O preço unitário é igual ao da subtarefa anterior, 1,10€. É preciso saber o preço de 6, 8 e 40 sacos de maçãs	Todos identificam o mesmo contexto da subtarefa 2.1.	Todos reconhecem os números anteriores. Como os valores a calcular são o dobro de outros da tabela, todos recorrem a eles, ou efetuando o dobro ou adicionando duas parcelas iguais.
Subtarefa 1.1 Tarefa 30	Situação análoga à da subtarefa 2.1. Inclui o preenchimento de uma tabela.	Calcular preços a partir de 1,60€. Pode recorrer-se a valores da tabela para calcular outros ou usar o valor unitário. O cálculo do preço de 10 sacos aparece antes do preço de 9.	Identificam a semelhança entre esta situação e a da subtarefa 2.1.	Doze alunos recorrem a valores da tabela para calcular outros, usando procedimentos tanto aditivos como multiplicativos. Sete alunos recorrem sempre ao preço unitário para calcular. Dez usam um procedimento de compensação para calcular o preço de nove sacos a partir do preço de dez.
Tarefa 30 Subtarefa 1.2	Situação análoga à da subtarefa 2.2.	O preço unitário é igual ao da subtarefa anterior, 1,60€. É preciso saber o preço de 4, 12 e 24 sacos de laranjas.	Todos identificam o mesmo contexto da subtarefa 1.1.	Todos reconhecem os números anteriores. Como os valores a calcular são o dobro de outros já calculados, todos recorrem a dobros ou à adição de duas parcelas iguais. Nenhum recorre ao preço unitário.
Tarefa 30 Subtarefa 3.1	Situação análoga à das subtarefas 2.1 e 1.1. Inclui o preenchimento de uma tabela.	Calcular preços a partir de 0,99€. Pode recorrer-se a valores da tabela para calcular outros ou compensar, usando 1€.	Todos identificam a semelhança entre esta situação e as das subtarefas 2.1 e 1.1.	Oito alunos usam os valores da tabela para calcular outros, tal como haviam feito em tarefas anteriores. Cinco alunos efectuam alguns cálculos, mas incorretos. Oito alunos (eventualmente dez) identificam o procedimento de compensação associado ao facto de 0,99 ser 1–0,01 e usam-no.
Tarefa 30 Subtarefa 3.2	Situação análoga à da subtarefa 2.2 e 1.2.	O preço unitário é igual ao da subtarefa anterior, 0,99€. É preciso saber o preço de 6 e 8 embalagens de sumos.	Todos identificam o mesmo contexto da subtarefa 3.1.	Doze alunos recorrem a valores da tabela, e usam, sobretudo, procedimentos aditivos. Dez, mais dois que anteriormente, recorrem à compensação. Apenas um aluno calcula incorretamente.
Tarefa 31 Calcular em cadeia IX	Situação análoga à de outras cadeias numéricas anteriores	Cálculos envolvendo produtos com fatores iguais aos das tarefas anteriores 0,99; 1,25 e 1,60. Números 0,25 e 0,50 como fatores.	Todos identificam o contexto particular de cadeias numéricas.	Todos reconhecem os números 0,99; 1,25 e 1,60 das tarefas anteriores e usam relações multiplicativas adequadas para calcular. O mesmo acontece com os números 0,25 e 0,50 usados em cálculos anteriores a esta sequência.

Nas várias subtarefas da tarefa 30, alguns alunos usam procedimentos aditivos, recorrendo à tabela para compor valores que necessitam calcular. Esta utilização de procedimentos aditivos não é interpretada como um “voltar atrás” nos procedimentos, mas parece corresponder, apenas, à opção por utilizar valores disponíveis nas tabelas para calcular outros, eventualmente, mais fácil para alguns dos alunos.

Há, também, a destacar os alunos que, nas resoluções das subtarefas da tarefa 30, manifestam alguma tendência para recorrer frequentemente ao preço unitário e efetuar todos os cálculos necessários desse modo. Em alguns casos, esse procedimento revela-se mais complexo, em consequência dos números usados para calcular, tais como 1,60€.

O facto de, na tabela que acompanha a subtarefa 2.1 estar representada a linha correspondente ao preço de dez sacos antes do preço de nove sacos, parece ter sugerido, a dez alunos, o uso de um procedimento de ajustar e compensar. Este mesmo procedimento é bastante utilizado pelos alunos na resolução das tarefas 3.1 e 3.2. Estes percebem que podem realizar primeiro os cálculos relativos ao preço de um euro e fazer depois os ajustamentos necessários para o preço 0,99€. Os alunos que não identificam esta particularidade nos cálculos que envolvem o número 0,99 não tiram partido dela. Por isso, tentam utilizar procedimentos semelhantes aos das tarefas anteriores, através do preço unitário ou compondo preços a partir de outros já existentes, manifestando algumas dificuldades na sua realização.

Numa das cadeias numéricas que constituem a tarefa 31, os alunos têm oportunidade de consolidar os procedimentos de cálculo multiplicativo associado ao fator 0,99. Nesta altura, os que já compreenderam a forma mais fácil de calcular quando um dos fatores é “próximo” do número um, explicitam oralmente o seu modo de pensar, contribuindo para que os colegas se apercebam do raciocínio utilizado. Na tarefa 31 foram também propostas: uma cadeia numérica com expressões que incluem o fator 1,60 (usado na tarefa 30) e uma outra que associa o cálculo multiplicativo com múltiplos de 10 e de 100 ao cálculo em que um dos fatores é nove e 99, respetivamente. Os alunos realizam com facilidade os cálculos que a professora lhes apresenta, identificando os procedimentos mais adequados à sua resolução, em cada situação. Além disso, reconhecem cálculos que efetuaram a propósito da tarefa 30, apercebendo-se alguns que,

anteriormente, em certos casos, não usaram o procedimento mais fácil e com menos suscetibilidade a enganos.

8.4.3. Síntese

Os contextos das subtarefas que constituem a tarefa 30, associados a preços de produtos de mercearia e apresentados sob a forma de tabela, parecem auxiliar os alunos nos cálculos que efetuam. Há os que preenchem os valores em falta nas várias tabelas recorrendo ao preço unitário e os que recorrem a relações entre os vários valores para calcular outros, que são a maioria. Nas subtarefas 1.1, 1.2, 2.1 e 2.2 há a registar procedimentos muito diversificados e não apenas do tipo multiplicativo. Contudo, esse facto parece dever-se, não a um retorno nos procedimentos usados mas a uma adequação do procedimento ao cálculo a realizar. No caso das subtarefas 1.2 e 2.2, a maior parte dos alunos adiciona os valores dois a dois ou recorre a uma relação de dobro, procedimentos veiculados pelo contexto, uma vez que se pretende calcular sempre um número par de sacos de fruta, associado a valores incluídos nas tabelas previamente preenchidas.

Os números envolvidos nas subtarefas 3.1 e 3.2, associados a um preço unitário de 0,99 causam algumas dificuldades no cálculo a certos alunos, que tendem a usar procedimentos semelhantes aos que usaram nas tarefas anteriores, aditivos ou multiplicativos. Assim sendo, os números envolvidos dão origem a cálculos complexos e suscetíveis de enganos. No entanto, há alunos que percebem que 0,99 é uma quantia muito próxima de um euro e potenciam essa relação nos cálculos que realizam, ajustando e compensando. A identificação deste procedimento na subtarefa 3.1 por alguns alunos, e a sua explicitação na discussão coletiva associada, tem como consequências a sua utilização por um número maior de alunos na tarefa seguinte, 3.2.

Há alunos que manifestam a tendência de usar sempre o preço unitário, em todas as subtarefas da tarefa 30, o que acarreta, em algumas situações, cálculos complexos e, por vezes, incorretos, tal como acontece no caso em que um dos fatores é igual a 1,60.

Nas cadeias numéricas da tarefa 31 os alunos calculam com os mesmos números incluídos nas tarefas anteriores, sendo realçadas as relações que potenciam procedimentos multiplicativos adequados aos números envolvidos. Os cálculos são realizados com facilidade e os alunos reconhecem os números e cálculos que fizeram, ou poderiam ter feito, a propósito das tarefas anteriores. No caso particular dos cálculos em que um dos fatores é igual a 0,99 todos os alunos optam por procedimentos de ajustar e compensar.

Capítulo 9

Conclusão

O presente estudo tem dois objetivos: (i) compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem e (ii) descrever e analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número.

No sentido de perceber como os alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação realizei uma experiência de ensino numa turma, desse ano de escolaridade, com 23 alunos. Foi orientada por uma conjectura sobre a aprendizagem da multiplicação e, a partir daí, foram construídas e seleccionadas sequências de tarefas que foram sendo propostas aos alunos, pela sua professora. Esta, num ambiente de sala de aula organizado de acordo com determinadas normas, orquestrou discussões coletivas a partir das resoluções dos alunos, centradas em aspetos-chave associados à aprendizagem da multiplicação.

Do primeiro objetivo decorrem quatro questões, uma primeira associada à inventariação e caracterização dos procedimentos usados pelos alunos quando resolvem

tarefas de multiplicação, uma segunda relacionada com a evolução desses procedimentos, uma terceira relativa às dificuldades manifestadas pelos alunos e, uma quarta, relacionada com os aspetos do sentido de número revelados na resolução dessas tarefas.

A opção metodológica de realizar uma experiência de ensino traduziu-se, na sala de aula, no desenvolvimento de uma trajetória de aprendizagem, organizada em torno de sequências de tarefas, construídas e selecionadas de acordo com os pressupostos que nortearam a conjectura elaborada. Por isso, considerei pertinente, também, analisar as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, dando resposta a uma outra questão, resultante do segundo objetivo do estudo.

Este capítulo inclui as conclusões do estudo realizado e, a concluir, uma reflexão decorrente do trabalho desenvolvido. As conclusões que apresento estão organizadas nas seguintes secções: os procedimentos dos alunos, a sua evolução, as dificuldades manifestadas, os aspetos do sentido de número revelados e as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. A encerrar este capítulo de conclusão elaboro uma reflexão sobre a realização deste trabalho, partilhando algumas questões que me foram surgindo ao longo de todo o processo e, em particular, sobre o modelo de caracterização do sentido de número de McIntosh et al. (1992).

9.1. Conclusões do estudo

Este estudo foi orientado por uma conjectura sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Esta inclui uma dimensão de conteúdo matemático e uma dimensão pedagógica. A dimensão de conteúdo matemático assume o desenvolvimento do sentido de número como eixo orientador da aprendizagem da multiplicação e tem em consideração as grandes ideias relacionadas com esta operação, os modelos que suportam o raciocínio multiplicativo e os procedimentos informais dos alunos que vão evoluindo para procedimentos baseados nas propriedades da operação (Fosnot & Dolk, 2001b). A dimensão pedagógica da

conjetura inclui aspetos relativos ao ambiente de sala de aula e às tarefas propostas aos alunos, tendo como base uma perspectiva de aprendizagem da Matemática com compreensão. Os resultados que a seguir sistematizo indicam que a conjetura foi validada no contexto deste estudo.

9.1.1. Procedimentos usados pelos alunos: diversidade, frequência e preferência

A análise das produções escritas dos alunos em associação com a análise da frequência dos procedimentos, tarefa a tarefa, permite concluir sobre aspetos ligados à diversidade dos procedimentos, à utilização de vários procedimentos numa mesma resolução, à sua maior ou menor frequência e, ainda, à preferência de alguns alunos por alguns dos procedimentos.

9.1.1.1. Diversidade dos procedimentos

A diversidade dos procedimentos usados pelos alunos é evidente na tabela seguinte, que resume os que os alunos usam nas tarefas que lhes foram propostas ao longo da experiência de ensino.

Tabela 9.1 – Os procedimentos usados pelos alunos

Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

Esta variedade de procedimentos está muito associada à experiência de ensino e, em particular, às tarefas que foram propostas aos alunos, aos seus contextos e números e, até, ao ambiente de sala de aula. Efetivamente, o emergir de procedimentos diversificados está relacionado, por um lado, com os contextos e os números propostos e, por outro lado, com a evolução dos alunos ao longo da experiência de ensino.

A diversidade de procedimentos encontrada está de acordo com o mencionado por alguns autores como Ambrose et al. (2003). Estes referem que, embora a diversidade de procedimentos possa ser influenciada pelo contexto de aprendizagem e pelo ensino, a investigação mostra que existem muitos pontos comuns entre os procedimentos usados pelos alunos, de estudo para estudo, apesar das diferenças entre eles. De facto, o conjunto de procedimentos que os alunos constroem e usam nesta experiência de ensino tendem a organizar-se em categorias mais ou menos definidas e semelhantes às identificadas por outros investigadores (Ambrose et al., 2003; Baek, 1998, 2006; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; Heirdsfield et al., 1999, Verschaffel et al., 2006, 2007).

Nas tarefas de multiplicação e divisão, os procedimentos usados pelos alunos variam de acordo com os seus conhecimentos sobre os números, as operações aritméticas e as suas propriedades. Por isso vão evoluindo, passando de procedimentos de contagem, a procedimentos aditivos e, finalmente, a procedimentos multiplicativos baseados em relações numéricas e propriedades desta operação. Esta evolução é consistente com o referido por Ambrose et al. (2003) que explicitam que os procedimentos usados pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação com números multidígitos se alteram de acordo com o seu conhecimento sobre a adição, o grupo como unidade, os agrupamentos de dez, o valor de posição e as propriedades das quatro operações.

A inclusão de procedimentos subtrativos no conjunto dos procedimentos identificados nas produções dos alunos está associado à resolução de tarefas de divisão, tendo evoluído, posteriormente, para procedimentos baseados na multiplicação e suas propriedades. Os alunos resolveram problemas de divisão, potenciando, na sua resolução, a ligação entre esta operação e a multiplicação, tal como muitos autores preconizam (Ambrose et al., 2003; Anghileri, 2003; Barmby, Bilsborough, et al., 2009; Fosnot & Dolk, 2001b).

A diversidade dos procedimentos usados pelos alunos parece ter sido encorajada não apenas pelas características das tarefas propostas, os seus contextos e números mas, também, pelo ambiente de sala de aula construído, em que os alunos eram estimulados a apresentar as suas resoluções e a discuti-las com os colegas. Tal como referem Torbeyns, de Smedt, Ghesquière e Verschaffel (2009), os alunos integrados num ambiente sociomatemático que os encoraja a usar diversos procedimentos tendem, espontaneamente, a inventar e a utilizar um leque de procedimentos variados.

9.1.1.2. Mais do que um procedimento na mesma resolução

No início da experiência de ensino há alunos que, na resolução de uma mesma tarefa, usam vários procedimentos. Este facto parece estar relacionado com a falta de segurança inicial no uso de procedimentos multiplicativos, o gosto que parecem ter em mostrar que conseguem efetuar o mesmo cálculo de maneiras diferentes, o querer seguir a professora que, por vezes, realça as várias maneiras usadas pelos alunos de realizar um mesmo cálculo e o recurso a um procedimento de confirmação.

Esta conclusão de os alunos registarem mais do que um procedimento para uma dada tarefa, vai no sentido do que Siegler (2000) apresenta na sua teoria das ondas sobrepostas sobre a aprendizagem, em que refere que para resolver um problema as crianças usam, geralmente, uma variedade de procedimentos³⁴ e de modos de pensar.

A tendência para usar mais do que um procedimento numa mesma tarefa vai-se diluindo ao longo da experiência de ensino. Os alunos percebem que o que se pretende é resolver cada tarefa da maneira que consideram mais fácil, rápida e adequada ao problema em si e não mostrar que sabem realizar cálculos alternativos.

9.1.1.3. Frequência dos procedimentos

A análise dos procedimentos usados pelos alunos e, em particular a sua síntese, realizada sob a forma de tabelas de frequência, subtarefa a subtarefa (ver tabelas 6.2, 6.3,

³⁴ Siegler (2000) usa o termo estratégia e não procedimento.

6.4 e 6.5 no capítulo 6), revela que a frequência do uso de procedimentos varia de procedimento para procedimento.

Procedimentos muito frequentes

Os alunos manifestam ter confiança, no início da experiência de ensino, no uso de procedimentos associados à adição e, por isso, recorrem frequentemente a eles. Esta é uma operação com a qual realizam, de maneira geral, cálculos de modo flexível e seguro, revelando conhecer as suas propriedades. Ainda assim, esta confiança no uso de certos procedimentos aliada a alguma insegurança no uso de outros é mais evidente em alguns alunos do que noutros. Por isso, há alunos que, mesmo depois de já usarem procedimentos de tipo multiplicativo, voltam a recorrer aos procedimentos aditivos, sempre que são confrontados com algumas dificuldades, tal como aconteceu quando lhes são propostas tarefas com números racionais não negativos na sua representação decimal. O recurso muito frequente a procedimentos de tipo aditivo, sobretudo no início da aprendizagem da multiplicação, é identificado em diversos estudos relacionados com a caracterização dos procedimentos usados pelos alunos (Ambrose et al., 2003; Baek, 1998, 2006).

Nas primeiras tarefas muitos dos produtos a realizar são do domínio das tabuadas, pelo que os alunos já os automatizaram, não precisando de efetuar quaisquer cálculos. À medida que os números envolvidos vão aumentando, o recurso a produtos conhecidos deixa de ser o procedimento utilizado para realizar um cálculo, embora os alunos os continuem a usar para efetuar os cálculos intermédios dos problemas que resolvem.

Enquanto o recurso muito frequente a procedimentos aditivos e a produtos conhecidos tem uma dimensão temporal mais ou menos bem definida, uma vez que acontece, sobretudo, nas resoluções das tarefas associadas ao início da experiência de ensino, o uso de decomposições, decimais ou outras, de um dos fatores verifica-se ao longo de todo o trabalho desenvolvido. Este facto parece estar associado, em particular, aos contextos das tarefas propostas que, frequentemente, faziam apelo à disposição retangular.

É de realçar que nas primeiras tarefas da experiência de ensino destacavam-se, pela sua elevada frequência, os procedimentos de decomposição não decimal e, quando os números foram sendo maiores e os alunos dominavam melhor o sistema de numeração decimal, foram surgindo as decomposições decimais de um dos fatores. Nas tarefas que envolviam números racionais não negativos na representação decimal voltaram a surgir, com bastante frequência, o uso de procedimentos de decomposição não decimal. Estes estão associados, por exemplo, à composição de quatro euros em dois mais dois euros, apoiando o cálculo no conhecimento sobre diferentes maneiras de ter dois euros em moedas de vinte, dez e cinquenta cêntimos. Também nas tarefas de divisão o recurso a procedimentos de decomposição de um dos fatores foi bastante frequente, sobretudo quando os alunos recorriam à multiplicação para as realizar, apoiando-se, ou não, no modelo retangular. A importância da utilização de procedimentos de partição envolvendo a decomposição decimal, considerados muito poderosos, é destacada por Ambrose et al. (2003).

Procedimentos pouco frequentes

O uso de relações de dobro e de metade é um dos procedimentos a que os alunos menos recorrem ao longo da experiência de ensino. Uma das razões para este facto está relacionada com a forte dependência deste procedimento relativamente ao contexto e aos números envolvidos, pelo menos antes de ser desenvolvido um conhecimento profundo sobre os números e as relações numéricas. Além disso, subjacente a este tipo de procedimento está a propriedade associativa da multiplicação, cujo conhecimento, ainda que intuitivo e informal, não é imediato para alunos que se encontram numa fase de aprendizagem desta operação.

A utilização de relações de dobro e de metade foi detetada nas produções de dois alunos relativas a subtarefas cujos números e contextos envolvidos o poderiam, eventualmente, sugerir. No entanto, foram construídos intencionalmente outros contextos que não inspiraram, por parte dos alunos, o uso de relações de dobro e de metade. Embora cerca de metade dos alunos da turma tenha resolvido corretamente as tarefas associadas a esses contextos, os alunos estabeleceram, não as relações de dobro e de metade previamente pensadas durante a sua construção, mas relações de dobro, que

podiam ser criadas com outros números de tarefas anteriores. O estabelecimento de relações de dobro parece ser mais acessível, uma vez que é um dos primeiros procedimentos que surge naturalmente para os alunos (Ambrose et al., 2003). De facto, inicialmente, nos procedimentos aditivos com parcelas iguais, os alunos percebem rapidamente a vantagem de as adicionar duas a duas e, a partir daí, constroem procedimentos baseados em dobros mais complexos, eficientes e quase automáticos (Ambrose et al., 2003).

9.1.1.4. Preferência por certos procedimentos

A preferência de alguns alunos por procedimentos de tipo aditivo persiste durante bastante tempo, ao contrário do que acontece com a maioria dos colegas, que vão diversificando os seus procedimentos. O caso mais evidente é o de Mariana que opta muitas vezes por este tipo de procedimento, mesmo quando tal não se revele muito adequado e os seus colegas já recorram a procedimentos mais potentes relacionados com a multiplicação. As razões para que isto aconteça parecem dever-se à sua confiança no uso de procedimentos aditivos e à sua menor segurança na utilização de procedimentos associados à multiplicação. De acordo com Verschaffel et al. (2006), a dependência de procedimentos mais imaturos e menos eficazes e um menor recurso a procedimentos potentes de cálculo mental está associada, frequentemente, a alunos com baixas competências em Matemática, tal como Mariana.

Ana Rita é a única aluna, com exceção de uma situação com outro par de alunos, que usa o procedimento de multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência, mostrando a sua preferência por este na resolução das tarefas da experiência de ensino, tanto individualmente como no trabalho com outro colega. Na resolução das tarefas de divisão, a aluna interpreta-as como tal e começa por representar um produto de referência que sabe automaticamente e, a partir daí, calcula sistematicamente todos os múltiplos do número que funciona como divisor na divisão correspondente. Este processo termina quando é encontrado o número que multiplicado pelo divisor é igual ao dividendo e a aluna sabe, a seguir, interpretar corretamente a situação e dar a resposta ao

problema proposto. Em alguns casos, de modo a realizar os cálculos mais rapidamente, Ana Rita (aqui com o seu par), dá alguns “saltos” nos cálculos que realiza.

Apesar da morosidade deste tipo de procedimento e da sua suscetibilidade ao engano, aspetos de que tem consciência, Ana Rita (sozinha ou com o seu par) continua a usá-lo durante bastante tempo. Uma das razões para que isto aconteça parece ser a confiança na sua utilização, mesmo conhecendo os seus riscos.

Apesar de os contextos das tarefas terem sido selecionados antevendo os procedimentos que poderiam emergir a partir daí, em alguns casos como os de Mariana e Ana Rita, os alunos recorrem a procedimentos que lhes são familiares e nos quais sentem confiança e não os alteram de acordo com o que poderá estar subjacente à tarefa proposta. Tal como referem Fosnot e Dolk (2001b) os contextos devem convidar os alunos a resolver os problemas usando os seus próprios procedimentos mas, algumas sugestões e constrangimentos associados aos contextos devem suportar o desenvolvimento de outros procedimentos. É exatamente no confronto entre o uso de procedimentos familiares dos alunos e a constatação da sua dificuldade ou inadequação num certo contexto que surge o desequilíbrio que provoca o desenvolvimento de um novo procedimento (Fosnot & Dolk, 2001b). Ora, nos casos aqui evidenciados, de Mariana e Ana Rita, em certas tarefas, este desequilíbrio não favoreceu o recurso a novos procedimentos, ao contrário do que se verificou com os outros colegas da turma.

A existência de alunos que preferem usar sistematicamente um determinado tipo de procedimento é, igualmente, identificada por Gilmore e Papadatou-Pastou (2009) na meta análise que realizaram, na qual mencionam um grupo de crianças que se foca num certo procedimento e não o altera perante diferentes situações. A preferência por determinado tipo de procedimentos é evidenciada, também, na investigação produzida por Gray (1991) que a associa às competências de cálculo dos alunos. Nesse sentido, relaciona a preferência dos alunos mais competentes por procedimentos mais potentes e baseados no seu conhecimento sobre os números e as operações e a preferência de alunos menos competentes no cálculo por procedimentos menos potentes, tal como aconteceu com os alunos referidos anteriormente.

Sintetizando o apresentado nesta secção sobre os procedimentos dos alunos dou resposta à primeira questão apresentada no início do estudo – Quais os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?

1. Os procedimentos usados pelos alunos são muito diversificados, tendo sido identificados os seguintes: contar por saltos, adicionar sucessivamente, adicionar dois a dois, adicionar em coluna, subtrair sucessivamente, usar produtos conhecidos, usar relações de dobro, usar múltiplos de cinco e de dez, usar uma decomposição não decimal de um dos fatores, usar a decomposição decimal de um dos fatores, ajustar e compensar, usar relações de dobro e de metade, multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência e multiplicar em coluna.
2. A diversidade de procedimentos identificados está associada, por um lado, às tarefas propostas, ao seu contexto e números envolvidos e, por outro, ao ambiente de sala de aula, propício ao surgimento de modos de resolução variados.
3. No início há alunos que usam vários procedimentos para realizar o mesmo cálculo, esbatendo-se esta tendência ao longo da experiência de ensino, quando percebem que o objetivo é resolver as tarefas propostas da maneira mais adequada, fácil e rápida.
4. A frequência dos procedimentos usados pelos alunos varia, havendo uns mais frequentes do que outros.
5. Os alunos recorrem, frequentemente, a procedimentos de tipo aditivo. No início da experiência de ensino muitos revelam ter confiança no uso deste tipo de procedimentos e alguns deles voltam a utilizá-los, mesmo depois de já terem recorrido a procedimentos multiplicativos. Isto acontece quando são confrontados com algumas dificuldades associadas aos números envolvidos ou ao contexto das tarefas propostas.
6. No início da experiência de ensino os alunos recorrem, frequentemente, a produtos conhecidos, uma vez que os cálculos a realizar são do domínio das tabuadas, que já automatizaram.
7. Ao longo da experiência de ensino os alunos recorrem, frequentemente a procedimentos baseados em decomposições, decimais ou outras. Este recurso

está bastante associado aos contextos das tarefas que apelam à disposição retangular, suportando diferentes partições dos números envolvidos.

8. O procedimento menos usado pelos alunos na resolução das tarefas foi o recurso a relações de dobro e de metade. Este facto parece dever-se à forte dependência deste procedimento dos números envolvidos nos cálculos e de ter subjacente a propriedade associativa da multiplicação, difícil de compreender numa fase inicial da aprendizagem da multiplicação.
9. Há alunos que manifestam uma preferência clara por determinados procedimentos, associada à confiança e segurança no seu uso.
10. A grande maioria dos alunos evolui de procedimentos aditivos para procedimentos multiplicativos, ao longo da experiência de ensino. Há, no entanto, uma aluna que mostra preferência pelo uso de procedimentos aditivos, mesmo quando os colegas já recorrem a procedimentos mais potentes, relacionados com a multiplicação. Esta sua preferência parece estar associada à falta de segurança na utilização de procedimentos multiplicativos e à sua confiança no uso dos de tipo aditivo. Uma outra aluna tem uma preferência clara por multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência, recorrendo a este procedimento na resolução de tarefas de divisão, mesmo sabendo que é moroso e suscetível de enganos. Isto acontece porque tem confiança no seu uso e sabe que a conduz a uma solução correta.

9.1.2. Evolução dos procedimentos usados pelos alunos

A análise dos registos escritos dos alunos e das suas intervenções orais nas discussões coletivas decorrentes da resolução das tarefas permitiu-me compreender como evoluem os procedimentos usados. Esta evolução está relacionada, naturalmente, com o aprofundar da sua compreensão sobre a multiplicação e ancorada na resolução das tarefas propostas e na sua discussão coletiva. De uma forma geral, inclui a progressão de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos de tipo multiplicativo e tem subjacente a mudança para modos de resolução mais sofisticados que os usados inicialmente, não é linear nem se processa do mesmo modo para todos os alunos.

9.1.2.1. Dos procedimentos de contagem aos procedimentos multiplicativos

No início da experiência de ensino muitos dos alunos recorrem a procedimentos aditivos e alguns a procedimentos de contagem na resolução das tarefas de multiplicação. É-lhes ainda difícil pensar num grupo enquanto unidade, aspeto que Fosnot e Dolk (2001b) consideram essencial ao raciocínio multiplicativo.

Na resolução das primeiras tarefas com números naturais, com contextos que têm subjacente o cálculo de objetos organizados segundo uma disposição retangular, coexistem procedimentos baseados em contagens um a um, na adição e na multiplicação. Nas discussões coletivas à volta da resolução das tarefas, os alunos apresentam e justificam as suas produções, sendo realçados os procedimentos que se apoiam na operação multiplicação, ainda que de modo intuitivo e informal.

Nas discussões centradas nos seus procedimentos, sua apresentação e comparação, os alunos começam a perceber as vantagens da utilização de procedimentos baseados na multiplicação, sobretudo, à medida que os números envolvidos aumentam. Além disso, vão-se habituando a utilizar a linguagem simbólica associada a esta operação. Para esta evolução contribuem, não só as discussões realizadas na sala de aula mas, também, os registos dos procedimentos, recorrendo à simbologia matemática, realizados no quadro.

Os procedimentos de adição vão evoluindo, ou para um maior grau de sofisticação, adicionando as parcelas duas a duas ou para formas de multiplicação, ainda intuitivas e informais. Surgem os procedimentos associados a produtos conhecidos, ao nível das tabuadas que os alunos já dominam e que automatizam e os relacionados com decomposições não decimais de um dos fatores. À medida que os números envolvidos nos cálculos aumentam é identificada uma maior frequência dos procedimentos multiplicativos.

Para além da grandeza dos números envolvidos nos cálculos sugerir a utilização de procedimentos baseados na multiplicação, dada a inadequação de procedimentos aditivos, morosos e suscetíveis ao erro, também os contextos das tarefas, sobretudo, os associados à disposição retangular, parecem ter contribuído para a evolução dos

procedimentos dos alunos. Tal como refere Bobis (2006) a disposição retangular suporta procedimentos de cálculo baseados na partição de números e, ao mesmo tempo, fornece uma representação adequada para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A relação entre disposição retangular e uso de procedimentos de decomposição de um dos fatores vai ao encontro do que é referido por outros autores (Barmby, Bilsborough et al., 2009; Barmby, Harries et al., 2009; Battista et al., 1998; Harries & Barmby, 2007). Estes realçam que o modelo retangular permite visualizar diferentes partições dos cálculos a efetuar, tendo subjacentes a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a propriedade comutativa da multiplicação, suportando, assim, o desenvolvimento do pensamento multiplicativo.

Os resultados deste estudo, associados à evolução dos procedimentos dos alunos, são compatíveis com o mencionado por Baek³⁵ (2006) a propósito da investigação que realizou sobre a multiplicação, em que os alunos, na resolução de tarefas com números naturais, foram capazes de construir procedimentos multiplicativos flexíveis e eficazes baseados nas características dos fatores. Baek³⁶ (1998) refere, ainda, que a possibilidade que os alunos têm de inventar os seus procedimentos contribui para que estes aprofundem a sua compreensão sobre a multiplicação de modo flexível.

A evolução dos procedimentos dos alunos percecionada neste estudo, ainda que não linear nem igual para todos, é orientada por um percurso que é comum ao identificado em outras investigações (Baek, 1998, 2006; Downton, 2010; Mulligan & Watson, 1998) – dos procedimentos de contagem, passando pelos procedimentos aditivos e culminando no uso de procedimentos multiplicativos cada vez mais sofisticados e potentes. Uma das diferenças a destacar é o facto de alguns desses estudos identificarem como procedimentos iniciais os de modelação direta, antes dos de contagem, o que não se passou na investigação que realizei, pois os alunos já tinham alguma experiência com a multiplicação.

³⁵ Baek (2006) usa o termo estratégia e não procedimento.

³⁶ Baek (1998) usa o termo algoritmo inventado e não procedimento.

Os resultados obtidos a partir da análise dos procedimentos usados pelos alunos estão de acordo com os três aspetos que Downton (2010) considera serem comuns aos estudos relacionados com os procedimentos dos alunos na resolução de problemas de multiplicação com números naturais: (i) os procedimentos³⁷ intuitivos dos alunos progredem de acordo com o seu grau de sofisticação, transitando do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo; (ii) o facto de um aluno dominar um procedimento mais sofisticado não significa que o use e (iii) existe um conjunto de fatores, tais como a grandeza dos números, o ser múltiplo de outros e os efeitos do ensino, que influenciam o uso dos procedimentos.

9.1.2.2. Progredindo para procedimentos mais potentes e flexíveis mas não linearmente

Ainda que os resultados deste estudo apontem para uma progressão nos procedimentos usados pelos alunos ao longo da experiência de ensino, esta não se desenvolveu do mesmo modo para todos os alunos da turma nem seguiu um caminho linear. Houve alunos que demoraram mais tempo a evoluir para procedimentos mais potentes e, tal como já foi referido, outros que persistiram no uso de certos procedimentos. Além disso, houve, ainda, aqueles que parecem ter voltado atrás nos procedimentos que usaram em certas tarefas.

A persistência e o retorno a procedimentos menos potentes parecem estar de acordo com o que Bobis (2006) refere sobre o desenvolvimento dos procedimentos³⁸ dos alunos. Segundo esta investigadora, cada novo procedimento vai competir com outros já existentes e familiares dos alunos, durante um longo tempo. Por isso os alunos não usam os procedimentos consistentemente e há alturas em que parecem regressar a procedimentos mais antigos.

³⁷ Downton (2010) usa o termo estratégia e não procedimento, mas no mesmo sentido.

³⁸ Bobis (2006) usa o termo estratégia e não procedimento.

No estudo que realizei houve alguns fatores, tais como os contextos das tarefas e os números usados, que contribuíram para que a progressão dos procedimentos não se efetivasse linearmente e do mesmo modo para todos os alunos.

Evolução não linear e contextos de divisão

Associados à evolução não linear dos procedimentos dos alunos há a destacar as resoluções das tarefas com contexto de divisão, tanto no sentido de medida como de partilha. Inicialmente, estes foram propostos intercalados com contextos de multiplicação e, na resolução dessas tarefas verificaram-se dificuldades que, em alguns casos, corresponderam a um voltar atrás nos procedimentos que os alunos já usavam, nessa altura, em tarefas de multiplicação.

Os resultados associados à análise dos procedimentos evidenciam que as tarefas de divisão se revelaram de uma complexidade maior para a maioria dos alunos, quando comparadas com tarefas de multiplicação, o que contraria outros estudos em que os alunos encaram a divisão de modo semelhante à multiplicação (Ambrose et al., 2003).

Ainda assim, quando os alunos resolveram tarefas com contexto de divisão, inseridas no grupo específico dedicado a esta operação, os seus procedimentos foram evoluindo, desde o uso dos de tipo aditivo e subtrativo até à utilização de procedimentos baseados na relação inversa com a multiplicação. Para esta evolução contribuiu o ambiente de aprendizagem da sala de aula, onde os alunos tinham oportunidade de construir e discutir os seus procedimentos com outros. A importância do ambiente de aprendizagem é referida por Downton (2008), que explicita que os alunos são capazes de resolver problemas mais ou menos complexos de divisão, desde que estejam integrados num ambiente de aprendizagem onde sejam encorajados a construir as suas estratégias intuitivas e a desenvolver o seu conhecimento sobre a multiplicação, interligando as duas operações.

A propósito da resolução de problemas de divisão e realçando a sua relação com a multiplicação a professora da turma introduziu o modelo retangular. A partir daí a análise dos dados mostra que os alunos, progressivamente, recorrem ao seu uso na resolução das tarefas de divisão. Esta utilização do modelo retangular é, manifestamente, um efeito do

seu ensino, também identificado por Heirsfield et al. (1999) nos procedimentos dos alunos, num estudo sobre a multiplicação.

Explicitando diferenças entre os procedimentos dos alunos na resolução de tarefas com contextos de divisão, Ambrose et al. (2003) referem que os que se relacionam com a divisão por medida sugerem mais procedimentos aditivos e subtrativos do que os por partilha. Contudo, no estudo que realizei não existem evidências suficientes que confirmem este facto.

Evolução não linear e números envolvidos nos cálculos

Os números envolvidos nos cálculos são um outro aspeto que influencia os procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas. Esta influência foi identificada de dois modos diferentes – através de dificuldades sentidas ou no uso de estratégias sensíveis aos números.

A influência dos números nos procedimentos de cálculo é referida, também, por diversos autores (Ambrose et al., 2003; Fosnot & Dolk, 2001b; Fuson, 2003a). Em particular, Nickerson e Whitacre (2010) relacionam essa influência com o uso de procedimentos³⁹ sensíveis aos números.

As dificuldades associadas aos números incluídos nas tarefas revelaram-se, sobretudo, quando foi ampliado o universo numérico das tarefas para o conjunto dos números racionais não negativos na sua representação decimal. Uma vez que esta ampliação se deu quase em simultâneo com a introdução destes novos números aos alunos e a construção do seu significado associado a contextos do quotidiano, a análise das suas produções revela algumas dificuldades no cálculo e o retorno a procedimentos aditivos. Relacionado com estas dificuldades está, assim, o conhecimento ainda pouco profundo que os alunos têm sobre os números racionais e as suas representações, em particular, na forma decimal. Este aspeto é consistente com dificuldades ao nível do cálculo com números racionais e das suas diferentes representações identificadas por outros autores como Fosnot e Dolk (2002) e van Galen et al. (2008). Contudo, tal como

³⁹ Nickerson e Whitacre (2010) usam o termo estratégia e não procedimento.

estes autores preconizam, o cálculo com números racionais na representação decimal baseou-se em contextos que permitiram que os alunos lhes dessem significado e privilegiou o recurso a números de referência. Estes “cuidados” parecem ter permitido que os alunos fossem evoluindo no cálculo multiplicativo com números na representação decimal.

A relação entre os números incluídos nas tarefas e os procedimentos dos alunos diz igualmente respeito ao uso de procedimentos sensíveis aos números, ou seja, que refletem a sua influência. Ora nem sempre os alunos usaram procedimentos sensíveis aos números nas resoluções das tarefas que o sugeriam.

Quando os números assim o indicavam, houve alunos que utilizaram um procedimento de compensação, muito sensível aos números, denominado neste estudo por ajustar e compensar, tanto com números naturais como com números racionais na representação decimal. Ainda assim, nem sempre isso aconteceu com todos os alunos, que optaram, na sua maior parte, por procedimentos de decomposição de um dos fatores.

Um outro procedimento muito sensível aos números, mas ao qual os alunos não recorreram sempre que aqueles assim o indicavam, foi o uso de relações de dobro e de metade. Tal como já referi, este foi o procedimento que os alunos menos usaram ao longo da experiência de ensino – mesmo quando os números assim o sugeriam.

A questão do uso de procedimentos sensíveis aos números está associada à proficiência no cálculo (Heirdsfield, 2001, 2003; Heirdsfield et al., 2007) que inclui a flexibilidade no seu uso, de acordo com as diferentes combinações de números que inspiram as opções tomadas pelos alunos. Ora os alunos da turma do 3.º ano revelaram proficiência no cálculo em muitas das situações mas nem todos, em todas as ocasiões, optaram pelos procedimentos que, à partida, poderiam ser sugeridos pelos números envolvidos, usando outros com os quais se sentiam mais à vontade. Este aspeto parece estar relacionado com a proficiência de cálculo de alguns alunos que não lhes permite, ainda, ter flexibilidade no uso de procedimentos. Esta está ligada a um conhecimento de base amplo e em rede sobre os números e as relações numéricas (Heirdsfield, 2001) que alguns alunos ainda não desenvolveram.

Os resultados deste estudo apontam para uma evolução não linear dos procedimentos dos alunos. Esta evolução não linear pode ser justificada pela teoria das ondas sobrepostas de Siegler (2000) sobre a aprendizagem das crianças: (i) os alunos usam uma multiplicidade de procedimentos⁴⁰ e não apenas um, para resolver um dado problema, (ii) procedimentos mais e menos eficazes coexistem durante períodos de tempo prolongados e não apenas durante períodos curtos de transição e (iii) a confiança relativa dos alunos nos procedimentos existentes e mais eficazes pode ser alterada de acordo com experiências apropriadas.

Os resultados deste estudo mostram que, embora não exista linearidade na evolução dos procedimentos usados, houve uma mudança para procedimentos mais sofisticados mesmo no caso dos alunos que revelaram mais dificuldades. Contudo, no decurso da experiência de ensino, nem todos os alunos alcançaram o mesmo nível de desenvolvimento da aprendizagem da multiplicação, havendo alguns que necessitam percorrer um caminho mais longo. Como refere Bobis (2006) o processo através do qual os alunos passam do uso dos seus procedimentos preferidos e habituais para procedimentos mais eficientes não é um processo simples nem linear. Além disso, o recurso a um certo procedimento é modificado de acordo com dois fatores: as exigências do problema matemático e as limitações do conhecimento do aluno (Bobis, 2006).

Sintetizando a evolução dos procedimentos dos alunos dou resposta à segunda questão apresentada no início do estudo – Como evoluem os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?

1. Os procedimentos dos alunos evoluem de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos.
2. A evolução dos procedimentos dos alunos não é linear nem se processa do mesmo modo para todos os alunos.
3. Os contextos ligados à disposição retangular e a crescente grandeza dos números envolvidos nos cálculos contribuem para o uso de procedimentos multiplicativos.

⁴⁰ Siegler (2000) usa o termo estratégia e não procedimento.

4. Há alunos que, perante determinadas tarefas, persistem em certos procedimentos e outros que voltam a usar procedimentos menos potentes.
5. Na resolução de tarefas com contexto de divisão, intercaladas com outras de multiplicação, alguns alunos voltam a usar procedimentos aditivos e evidenciam algumas dificuldades. Contudo, nas sequências de tarefas com contexto de divisão, propostas sistematicamente, as suas resoluções evidenciam uma progressão dos procedimentos de tipo aditivo e subtrativo para os baseados na multiplicação.
6. A evolução dos procedimentos dos alunos não é independente do ambiente de aprendizagem construído, em que os alunos são encorajados a construir os seus próprios procedimentos que apresentam e discutem com os colegas.
7. A não linearidade da evolução dos procedimentos dos alunos está, também, ligada aos números envolvidos nos cálculos. A influência dos números nos procedimentos dos alunos foi identificada ao nível das dificuldades sentidas com os números racionais não negativos na representação decimal. O pouco conhecimento que os alunos possuem, ainda, sobre estes números contribui para que sintam dificuldades e retornem a procedimentos menos potentes, quando comparados com os usados nos cálculos com números naturais.
8. A não linearidade da evolução dos procedimentos dos alunos e a influência dos números foi, também, identificada ao nível do uso de procedimentos sensíveis aos números. Há alunos que manifestam flexibilidade nos procedimentos que usam e os adaptam aos números envolvidos nos cálculos. Contudo, nem sempre isso acontece por parte de todos os alunos, nem em todas as tarefas que o sugerem. São exemplos deste aspeto o procedimento ajustar e compensar, que nem todos os alunos utilizam sempre que se justifica, e o uso de relações de dobro e de metade, que é o procedimento menos frequente, mesmo quando os números o inspiram.

9.1.3. Dificuldades manifestadas pelos alunos

Um dos aspetos associados à diversidade e não linearidade da evolução dos procedimentos dos alunos diz respeito às dificuldades, manifestadas por alguns, na

interpretação e resolução das tarefas, que organizo em quatro tipos: associadas ao contexto das tarefas, relativas aos números incluídos nas tarefas, na realização dos registos escritos e na compreensão dos raciocínios dos colegas.

Este estudo conclui que as dificuldades associadas aos contextos estão relacionadas com a compreensão semântica, a visualização espacial, o lidar com várias características ao mesmo tempo e os contextos de divisão. As dificuldades na compreensão semântica estão ligadas a questões de interpretação e de desconhecimento de alguns significados de palavras ou expressões usados no enunciado das tarefas. As dificuldades dos alunos associadas à compreensão semântica estão de acordo com as relacionadas com a estrutura semântica dos problemas, entendida num sentido mais amplo, identificadas no estudo realizado por Mulligan e Mitchelmore (1997) sobre os modelos intuitivos de multiplicação e divisão. Já os aspetos associados à visualização espacial prendem-se com dificuldades dos alunos relativas à perceção das figuras que acompanham certas tarefas. O facto de terem de lidar com várias características em simultâneo, ou terem de considerar mais do que uma condição restritiva numa mesma tarefa foi um dos aspetos, ligado ao contexto, que provocou, também, dificuldades a alguns alunos.

Identificam-se, igualmente, dificuldades associadas à operação divisão neste estudo. Estas estão de acordo com o que referem Anghileri (2001) e Anghileri et al. (2002) sobre a complexidade desta operação, relativamente a um estudo que caracteriza as estratégias usadas por alunos britânicos e holandeses e a sua evolução na resolução de tarefas de divisão. Nessa investigação, os autores identificam a existência de estratégias informais de baixo nível cognitivo e propícias a erros com taxas de sucesso bastante baixas, embora o recurso ao algoritmo tradicional revelasse níveis de sucesso ainda mais baixos.

Os números utilizados nas tarefas podem, também, criar dificuldades ligadas à grandeza dos números, à sua natureza e, ainda, ao facto de, umas vezes, estarem em contexto de problema e, outras, inseridos em cadeias numéricas, num âmbito puramente matemático. As dificuldades associadas à natureza dos números relacionam-se, sobretudo, com os números racionais não negativos na sua representação decimal. As

dificuldades e os erros cometidos no cálculo com este tipo de números são compatíveis com as mencionadas em diferentes investigações sobre o cálculo com números racionais nas suas diferentes representações (Anghileri, 2001; Fuson, 2003a).

As dificuldades dos alunos associadas aos seus registos escritos e à compreensão dos raciocínios de outros, identificadas neste estudo, estão ligadas, na sua maior parte, ao que Smith (2003) refere por representações idiossincráticas. Tal como este autor explicita, os alunos constroem-nas e misturam-nas com representações convencionais quando resolvem problemas contextualizados, não rotineiros. Além disso, os alunos também usam representações idiossincráticas, não apenas para resolver um problema mas para apresentar e partilhar a sua resolução com os colegas. Ora, embora as representações idiossincráticas possam ser utilizadas pelos alunos durante muito tempo, elas estão relacionadas com problemas particulares, não sendo entendidas como ferramentas de uso geral (Smith, 2003), o que pode causar dificuldades de interpretação e compreensão a outros, tanto ao nível do registo escrito como na apresentação oral dos raciocínios. Como clarifica o mesmo autor, para compreender e comunicar em Matemática, os alunos precisam de estabelecer pontes entre as suas representações idiossincráticas e as representações matemáticas convencionais. É precisamente no estabelecimento destas pontes que alguns alunos revelam certas dificuldades.

Sintetizando as dificuldades manifestadas pelos alunos, dou resposta à seguinte questão apresentada no início do estudo – Que dificuldades manifestam os alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?

1. Os alunos manifestam dificuldades, de natureza diversa, relativas ao contexto das tarefas, aos números incluídos nas tarefas, à realização dos registos escritos e à compreensão dos raciocínios dos colegas.
2. As dificuldades dos alunos relativas ao contexto das tarefas dizem respeito à compreensão semântica, à compreensão associada à visualização espacial, ao ter de lidar com várias características em simultâneo e à compreensão de contextos relativos à divisão.
3. As dificuldades de alguns alunos relativas aos números incluídos nas tarefas estão associadas ao ter de lidar com números “grandes”, com números

racionais não negativos na sua representação decimal e com os mesmos números em contexto *versus* nas cadeias numéricas.

4. As dificuldades dos alunos relativas à realização de registos escritos estão associadas à utilização da simbologia matemática, à apresentação e organização dos registos que efetuam e ao uso de representações idiossincráticas.
5. As dificuldades dos alunos relativas à compreensão dos raciocínios de outros estão associadas tanto à compreensão da explicitação oral dos raciocínios dos colegas como ao entendimento dos seus registos escritos.

9.1.4. Sentido de número dos alunos

A análise das produções escritas dos alunos e de episódios de sala de aula, em articulação com a análise, anteriormente realizada, da evolução dos procedimentos usados permitiu-me concluir sobre os aspetos do sentido de número revelados na resolução das tarefas. Estes estão organizados de acordo com as três componentes globais, propostas por McIntosh et al. (1992): conhecimento e a destreza com os números, conhecimento e a destreza com as operações e aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo.

No que se refere ao conhecimento e à destreza com os números, os alunos manifestam conhecer aprofundadamente os números naturais relativamente à perceção da sua regularidade, às suas múltiplas representações e ao sentido das suas grandezas, absoluta e relativa. O mesmo acontece quanto ao uso de números de referência com os quais os alunos lidam facilmente. Há a registar, ainda, o recurso a números de referência pessoais, tal como aconteceu com o número onze, usado por alguns alunos. O conhecimento e a destreza com números racionais não negativos na representação decimal não são comparáveis com o que acontece, naturalmente, com os números naturais. Os alunos têm um conhecimento recente sobre aqueles números e vão-no aprofundando a par do desenvolvimento da experiência de ensino. Por isso, não passam com facilidade de umas representações para outras nem conseguem comparar a grandeza

dos números relativamente a outros. Ainda assim, são capazes de comparar entre si alguns desses números, em particular, os associados a significados do mundo real, tais como medidas de capacidade ou do sistema monetário. Integrados nesses contextos os alunos recorrem a números de referência ligados às grandezas referidas.

O pouco conhecimento que os alunos têm sobre os números racionais na representação decimal deve-se à sua, ainda, reduzida experiência e à maior complexidade deste tipo de números. Este aspeto está de acordo com as conclusões de um estudo para avaliar o sentido de número, referido por McIntosh e Dole (2000), que aponta para um sentido de número fraco no que se refere à compreensão dos conceitos associados aos números na representação decimal.

Relativamente ao conhecimento e à destreza com as operações, os alunos têm, desde o início da experiência de ensino, um conhecimento bastante sólido sobre as operações adição e subtração com números naturais, que vão aprofundando à medida que resolvem problemas com números cada vez maiores. Compreendem o efeito de cada uma destas operações e são capazes de usar as suas propriedades em situações de cálculo. Esta sua prática relativamente à adição e subtração com números naturais não é comparável com a associada aos números racionais não negativos na sua representação decimal numa fase inicial, ainda que possa contribuir para o seu aprofundamento.

O desenvolvimento do conhecimento sobre a operação multiplicação e a destreza no cálculo associado estão ligados, naturalmente, ao progresso da experiência de ensino. Os alunos têm diversas oportunidades de aprofundar a sua compreensão sobre os efeitos da multiplicação com números naturais ou no caso em que está envolvido o produto de um número natural por um número racional não negativo na sua representação decimal. O mesmo se passa relativamente à compreensão sobre as propriedades da multiplicação que vai sendo aprofundada a partir da resolução e discussão das tarefas propostas, que fazem emergir procedimentos baseados na sua utilização, ainda que de modo informal. Para além dos problemas cujos procedimentos de resolução se baseiam em propriedades da multiplicação há a destacar, também, o papel desempenhado pelas cadeias de cálculo, cuja realização faz realçar relações numéricas baseadas nas propriedades dos números e da multiplicação.

O conhecimento e a destreza com a operação divisão manifestam-se no cálculo com números naturais, na exploração, quase sempre, de situações de divisão exata e no aprofundamento da sua relação com a multiplicação. Por isso, o conhecimento e a destreza com esta operação necessitam, ainda, de ser aprofundados e complementados.

A compreensão das relações entre as operações é evidenciada, na análise dos procedimentos dos alunos, sobretudo, entre a adição e a multiplicação, entre esta e a divisão e, também, entre a subtração e a divisão.

O trabalho desenvolvido e os resultados obtidos, no sentido de uma maior compreensão dos alunos sobre a multiplicação e a divisão parecem ser consistentes com o referido por alguns autores, como Downton (2008). Esta autora menciona que os alunos precisam de experienciar uma variedade de situações, com contextos e estruturas semânticas diversas para compreenderem de uma forma profunda as operações multiplicação e divisão. Ainda relacionado com estas duas operações, Anghileri (2003) refere que deve ser realizado um trabalho em conjunto em torno da multiplicação e da divisão, e que este possibilita o desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

Os aspetos do sentido de número relacionados com o conhecimento e a destreza com os números e as operações manifestados pelos alunos da turma do 3.º ano são semelhantes aos identificados por Yang, Li e Li (2008) num estudo realizado com alunos do mesmo ano de escolaridade, em que são reveladas as seguintes componentes: a compreensão sobre o significado dos números e das operações, o uso de múltiplas representações dos números e operações, o reconhecimento da grandeza relativa dos números, o reconhecimento da razoabilidade dos resultados calculados e a capacidade para compor ou decompor números.

No que se refere à aplicação do conhecimento e da destreza com as operações em situações de cálculo, no início da experiência de ensino, os alunos não revelam dificuldades associadas à utilização das operações adição e subtração na resolução de problemas, dada a sua experiência anterior. No que respeita à aplicação do conhecimento e destreza com as operações multiplicação e divisão esta vai-se desenvolvendo à medida que se desenrola a experiência de ensino, de acordo com os seus propósitos. Assim, os

alunos evidenciam que têm consciência da existência de múltiplas estratégias para realizar um mesmo cálculo, tanto nos seus registros escritos como nas discussões orais, em que se apercebem que há colegas que recorrem a um procedimento diferente do seu para resolver o mesmo problema.

A inclinação para utilizar representações e procedimentos eficazes é evidenciada pelos alunos e é, também, incentivada por todo o trabalho desenvolvido em torno da resolução das tarefas e da partilha dos diferentes procedimentos usados em cada uma. Em particular, a realização de cadeias numéricas nas quais são realçados procedimentos eficazes baseados em propriedades das operações e a utilização de números cujas características podem fazer emergir certos procedimentos contribuem para que os alunos usem, mais frequentemente, procedimentos eficazes. Ainda assim, a inclinação para utilizar procedimentos eficazes não se manifesta do mesmo modo para todos os alunos da turma. Além disso revelam inclinação para rever os dados e o resultado de um problema, que vai sendo desenvolvida à medida que os alunos resolvem as tarefas ao longo da experiência de ensino e que se habitua a apresentar e justificar as suas resoluções.

As características da experiência de ensino e, em particular do ambiente de sala de aula construído, em que os alunos inventam os seus procedimentos de resolução dos problemas propostos contribuem para o desenvolvimento do seu sentido de número. Tal como refere Heirdsfield (2000) a partir de uma investigação que realizou, os alunos que inventam os seus próprios procedimentos são mais precisos e mostram maior sentido de número do que aqueles que aprendem e usam os procedimentos ensinados pelo professor. A relação entre a possibilidade de inventar os seus próprios procedimentos de cálculo e o desenvolvimento do sentido de número é uma ideia mencionada também por Baek (1998, 2006), baseada nos estudos que desenvolveu sobre a multiplicação e a divisão.

O ambiente de sala de aula, que se caracteriza pela existência de uma certa cultura de inquirição, parece ter contribuído, também, para o desenvolvimento do sentido de número, tal como referem Nickerson e Whitacre (2010) e Reys (1994). A preparação e a realização de congressos matemáticos (Fosnot & Dolk, 2001a, 2001b) em torno da resolução de algumas tarefas têm subjacente, também, uma cultura de sala de aula que, pelas suas características, permite que os alunos desenvolvam o seu sentido de número.

Em suma, dou resposta à seguinte questão apresentada no início do estudo – Quais os aspetos do sentido de número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?

1. Os alunos revelam conhecer e ter destreza com os números naturais, identificando as suas regularidades, as suas múltiplas representações, as suas grandezas, absoluta e relativa, e lidando com números de referência.
2. Relativamente ao conhecimento e destreza com os números racionais não negativos na sua representação decimal, este é ainda muito recente e vai sendo aprofundado a par do desenvolvimento da experiência de ensino. Ainda assim são capazes de lidar com alguns desses números, em particular, com os cujo significado pode ser ligado a medidas de capacidade ou do sistema monetário.
3. No início da experiência de ensino os alunos têm um conhecimento sólido relacionado com as operações adição e subtração que, ainda assim, aprofundam durante todo o trabalho desenvolvido no âmbito deste estudo, e ampliam para o caso dos números racionais não negativos na sua representação decimal.
4. Os alunos foram progredindo e aprofundando o seu conhecimento e destreza com a operação multiplicação com números naturais e, posteriormente, no caso em que um dos fatores é um número racional não negativo na sua representação decimal.
5. O conhecimento e a destreza com a operação divisão parecem estar associados ao cálculo com números naturais e a situações de divisão inteira, quase sempre exata.
6. Ao longo da experiência de ensino, os alunos aprofundam a sua compreensão sobre os efeitos da multiplicação com números naturais ou no caso em que um dos fatores é um número racional não negativo na sua representação decimal.
7. Os alunos desenvolvem e aprofundam a sua compreensão sobre as propriedades da multiplicação, ainda que de modo intuitivo e informal, na resolução de tarefas que sugerem procedimentos baseados no seu uso. Além disso, a realização de cadeias numéricas faz emergir o uso das várias propriedades da multiplicação.

8. Os alunos relacionam, sobretudo, a adição com a multiplicação, a multiplicação com a divisão e, ainda, a subtração com a divisão nos procedimentos que utilizam na resolução das tarefas. A relação entre as operações multiplicação e divisão é realçada, também, nas discussões associadas à resolução das tarefas.
9. Os alunos aplicam o conhecimento e a destreza com os números e as operações na resolução das tarefas que lhes são propostas. Relativamente à aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações adição e subtração os alunos não revelam dificuldades, dada a sua experiência com estas operações. No que respeita à aplicação do conhecimento e da destreza com as operações multiplicação e divisão, esta vai-se desenvolvendo à medida que se desenrola a experiência de ensino.
10. Os alunos têm consciência da existência de múltiplas estratégias para realizar um mesmo cálculo, tanto a partir dos seus registos escritos como nas discussões orais, em que se apercebem que há colegas que recorrem a procedimentos diferentes dos seus. Também a realização de cadeias numéricas contribui para esta consciencialização, uma vez que os alunos partilham com os colegas os diferentes raciocínios que efetuam para realizar um mesmo cálculo.
11. A inclinação para utilizar representações e procedimentos eficazes é desenvolvida, sobretudo, na partilha e análise dos diferentes procedimentos usados pelos alunos numa mesma tarefa. A realização das cadeias numéricas, nas quais são destacados procedimentos eficazes, baseados nas propriedades das operações também parece contribuir para desenvolver a apetência para utilizar representações e procedimentos eficazes.
12. As características da experiência de ensino e, em particular, a construção de uma certa cultura de inquirição parecem ter contribuído para desenvolver o sentido de número dos alunos.

9.1.5. Potencialidades das tarefas e sequências de tarefas

A análise dos procedimentos dos alunos na última sequência de tarefas de cada grupo de tarefas e a sua inter-relação com as características das tarefas e a articulação entre elas permitiu-me concluir sobre as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação. Relativamente às características das tarefas foco-me nos seus contextos e nos números aí incluídos.

Os contextos das tarefas e, em particular, os baseados na disposição retangular parecem ter contribuído para consolidar os procedimentos multiplicativos, sobretudo os baseados em decomposições de um dos fatores, decimal ou outras. Também as figuras que acompanham algumas tarefas auxiliam os cálculos de alguns dos alunos, suportando diferentes procedimentos multiplicativos. Além disso, os números de referência incluídos nas tarefas, com os quais os alunos já lidaram em várias ocasiões, também parecem facilitar os cálculos efetuados, baseados em relações numéricas.

A articulação entre as tarefas, sobretudo da mesma sequência, permite que alguns alunos estabeleçam relações entre os contextos e os números, de umas para as outras, e as usem nos procedimentos que constroem. Pelo contrário, os alunos que não conseguem estabelecer relações entre as várias tarefas de uma mesma sequência, ou com tarefas anteriores, têm mais dificuldades na resolução de algumas tarefas.

Os contextos das tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal contribuem para dar significado a este tipo de números e para suportar alguns cálculos multiplicativos. Contudo, nas tarefas cujo contexto apela a situações que envolvem o sistema monetário os alunos revelam dificuldades nas várias representações das quantias e na passagem de umas representações para outras. Efetivamente, nos enunciados, as quantias estão quase sempre expressas em cêntimos mas sugere-se um determinado cálculo considerando os valores em euros. Este facto tem como consequência que há alunos que calculam com números naturais, expressando só o valor final em euros e outros que realizam os cálculos em euros, com números na representação decimal, por vezes com dificuldades.

Os alunos não tiraram partido das conexões numéricas que poderiam ser estabelecidas num conjunto de tarefas com números racionais não negativos na representação decimal, o que as tornou complexas. Estas estavam ligadas entre si por relações de dobro e de metade entre os números envolvidos, relações essas que não são utilizadas por nenhum aluno da turma. Tal como referem Fosnot e Dolk (2001b), é plausível que um contexto particular influencie de determinada maneira os procedimentos dos alunos mas, ainda assim, não é apenas porque se planeia um certo contexto com determinadas características que os alunos o vão interpretar dessa forma. No caso das tarefas referidas, apesar de ter sido planeado que os alunos iriam recorrer a relações de dobro e de metade tal não aconteceu.

Os contextos de divisão e os números envolvidos contribuem para que os alunos que começaram por usar procedimentos aditivos e subtrativos nas primeiras tarefas do grupo sobre divisão passem a recorrer a procedimentos de tipo multiplicativo. No entanto, os contextos de divisão em que era preciso pensar em termos de grupos de grupos revelaram-se difíceis para os alunos.

Os contextos de multiplicação no seu sentido proporcional, ligados a preços e apresentados sobre a forma de tabela parecem ter auxiliado os alunos nos cálculos que realizam. De acordo com o cálculo que é preciso efetuar, os alunos adequam os procedimentos que usam, que são, por isso, muito diversificados. Destacam-se procedimentos associados a relações de dobro, veiculados pelo contexto, que sugere o cálculo de um número par de produtos, ligados a valores incluídos em tabelas previamente preenchidas.

Os procedimentos multiplicativos que surgem a partir da exploração dos contextos e números apropriados reforçam a ideia sobre a importância dos contextos e dos números, veiculada por diversos autores (Fosnot & Dolk, 2001b; Fraivillig, 2001; Reys, 1994; Treffers & Buys, 2008), tanto ao nível do desenvolvimento do sentido de número em geral, como no aprofundamento dos aspetos relacionados com a multiplicação. No caso específico da multiplicação (e divisão) essa importância é justificada na medida em que os contextos e os modelos associados revelam aspetos fundamentais das estruturas multiplicativas e permitem uma primeira abordagem às

propriedades desta operação, facilitando o cálculo (Fosnot & Dolk, 2001b; Mendes & Delgado, 2008; Treffers & Buys, 2008).

Há, também, alguns procedimentos sugeridos pelos números incluídos nas tarefas, como acontece com o procedimento de ajustar e compensar, a que alguns dos alunos recorrem para calcular com números na representação decimal próximos de múltiplos da unidade. Aqueles que não optam por este procedimento sensível aos números têm algumas dificuldades na realização dos cálculos e cometem algumas incorreções.

As tarefas de cálculo em cadeia são realizadas facilmente pelos alunos que compreendem que é necessário procurar regularidades que auxiliam os cálculos a realizar. Esta facilidade decorre do modo como os cálculos propostos estão interligados e dos números utilizados, escolhidos de forma a tornar evidentes relações numéricas baseadas nas propriedades da multiplicação e divisão. De facto, a estrutura da cadeia influencia os procedimentos dos alunos e ajuda a promover um cálculo mental eficiente, baseado em propriedades dos números e das operações (Fosnot & Dolk, 2001b; Treffers & Buys, 2008).

Em tarefas subsequentes à realização das cadeias numéricas, no contexto da resolução de problemas, ainda assim, há alunos que não potenciam as relações e propriedades evidenciadas anteriormente. Efetivamente a resolução de problemas, pelas características inerentes a este tipo de tarefa matemática, reveste-se de uma complexidade diferente da realização do cálculo em cadeia.

Em suma, dou resposta à seguinte questão apresentada no início do estudo – Quais as potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número?

1. Os contextos das tarefas de multiplicação, sobretudo os baseados na disposição retangular, contribuem para consolidar o uso de procedimentos multiplicativos.
2. Os números de referência incluídos nas tarefas facilitam os cálculos efetuados, baseados em relações numéricas.

3. A articulação entre as tarefas de uma mesma sequência de tarefas permite que alguns alunos estabeleçam relações entre os seus contextos e números, tirando daí partido para procedimentos que constroem.
4. Os contextos das tarefas de multiplicação com números racionais não negativos na representação decimal contribuem para dar significado aos números e suportar cálculos multiplicativos.
5. As sequências de tarefas com contexto de divisão e os números aí envolvidos contribuem para o uso de procedimentos multiplicativos e para reforçar a relação entre a multiplicação e a divisão.
6. Há um contexto de divisão não exata que implica raciocinar em termos de grupos de grupos que se revela complexo para os alunos.
7. Os contextos de multiplicação no seu sentido proporcional e que apresentam os dados sob a forma de tabela sugerem aos alunos o uso de procedimentos diversificados e adequados aos cálculos a realizar.
8. Os alunos que estabelecem ligações entre os contextos e os números de tarefas sequenciais constroem procedimentos baseados nessas relações. Pelo contrário, os alunos que não conseguem estabelecer essas ligações tendem a ter algumas dificuldades na resolução das tarefas.
9. Há procedimentos usados pelos alunos, como o uso de relações de dobro ou ajustar e compensar, que são veiculados pelos números incluídos nas tarefas. Os alunos que optam, em particular, pelo procedimento de ajustar e compensar no caso de números racionais na representação decimal próximos de múltiplos da unidade, revelam facilidade na realização dos cálculos.
10. Há relações numéricas entre os números incluídos em sequências de tarefas que não são potenciadas pelos alunos nos procedimentos que usam, como acontece no caso de relações de dobro e de metade com números racionais não negativos na representação decimal. Contudo, os alunos resolvem essas mesmas tarefas usando relações de dobro estabelecidas com tarefas anteriores.
11. Os números usados nas tarefas com contexto de problema e nas cadeias numéricas de uma mesma sequência de tarefas são, muitas vezes, os mesmos o que contribui para que os alunos potenciem, de umas para as outras, os procedimentos que utilizam.

12. Os números usados nas tarefas de cálculo em cadeia e o modo como estas são construídas propiciam o uso de relações numéricas baseadas nas propriedades da multiplicação. Ainda assim, há alunos que, no contexto dos problemas, não rentabilizam relações numéricas realçadas no decurso do cálculo em cadeia realizado anteriormente.

9.2. A concluir

Ao terminar este estudo considero importante fazer uma reflexão sobre a sua realização e as opções tomadas, identificando algumas questões e implicações que sintetizo nesta secção.

No início deste trabalho foram essenciais a procura de literatura sobre as temáticas em estudo e as leituras daí decorrentes, que se traduziram num aprofundamento da compreensão sobre questões fundamentais relativas ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos e à aprendizagem das operações. Uma vez que o meu interesse era realizar uma investigação cujo foco fossem as aprendizagens dos alunos, foi importante perceber como, na sala de aula, seria possível aceder aos seus raciocínios e, a partir daí, criar condições para o seu desenvolvimento.

Destes aspetos resultou a minha evolução em termos profissionais, uma vez que proporcionaram o desenvolvimento do meu conhecimento profissional. A realização de todo este trabalho, nas suas distintas vertentes, constituiu para mim um momento de grande e profunda aprendizagem. Um dos seus contributos relaciona-se com o desenvolvimento da minha capacidade de refletir, de modo permanente e organizado, sobre as aprendizagens dos alunos e sobre o trabalho do professor para proporcionar essas aprendizagens. Conhecer e refletir sobre estes aspetos contribui para uma melhoria da minha prática enquanto professora de futuros professores e educadores e enquanto formadora de professores. Esta minha incursão na Escola e na sala de aula do 1.º ciclo permite-me fazer uma melhor ligação teoria-prática que, certamente, possibilitará um enriquecimento no exercício da minha profissão enquanto professora. O facto de ter vivenciado a experiência numa sala de aula do 3.º ano contribuiu para melhorar a minha

compreensão sobre o que lá se passa, atendendo aos múltiplos aspetos em jogo: a cultura de sala de aula, as práticas do professor e as aprendizagens dos alunos.

Refletindo sobre as opções tomadas ao longo do estudo há alguns aspetos que se destacam, sobretudo relativamente à metodologia adotada. A opção por uma experiência de ensino constituiu um grande desafio, uma vez que este tipo de metodologia, num quadro de *design research*, é relativamente recente, não havendo tradição da sua adoção, sobretudo no nosso país. Além disso, nem sempre foi fácil articular a metodologia de estudo com o planeamento e desenvolvimento de todo o trabalho na sala de aula, bem como a conceção dos materiais de apoio à atividade dos alunos. De facto, apesar de a investigação ser centrada nas aprendizagens dos alunos houve um grande investimento, meu e de Isabel, no planeamento e implementação do trabalho na sala de aula que proporcionasse essas aprendizagens.

Desenvolver uma experiência de ensino de acordo com determinados pressupostos sobre o ensino e a aprendizagem, não sendo eu a professora da turma, só foi possível porque contei com Isabel e com a sua disponibilidade para organizarmos e pensarmos sobre todo o trabalho realizado na sua aula. De facto, tão ou mais importante que o trabalho na sala de aula, foi aquele que desenvolvemos nas reuniões semanais, em que analisamos as aulas anteriores e, a partir daí, planeámos as seguintes.

Esta minha vivência de trabalho em colaboração ao longo de um ano letivo e a análise das suas consequências faz-me refletir sobre as suas características e potencialidades. Cada uma de nós obteve benefícios desta relação. Isabel teve oportunidade de conhecer abordagens com que estava pouco familiarizada, participar na construção de tarefas e planear as suas aulas considerando horizontes de aprendizagem e tendo em conta o que os alunos fazem e dizem e, finalmente, de debater tudo isso com outra pessoa que também conhece os alunos e os seus modo de agir na aula. Pessoalmente, tive oportunidade de discutir as propostas que esboçava com uma professora experiente e que conhece em profundidade os seus alunos. Ambas tivemos a possibilidade de analisar os contextos de aprendizagem proporcionados pelas propostas desenvolvidas em colaboração e de refletir sobre os ajustes a fazer a partir da sua exploração naquela aula, com aqueles alunos do 3.º ano.

A nossa experiência de colaboração fez-me pensar sobre a importância do desenvolvimento de relações colaborativas entre professores e investigadores no âmbito do desenvolvimento curricular, tendo no horizonte a melhoria das aprendizagens dos alunos. Encarar o desenvolvimento do currículo numa perspectiva de melhoramento e adaptação constantes, tal como o fizemos no decorrer da experiência de ensino, pode ser uma tarefa demasiado exigente para um professor ou um grupo de professores. Daí a relevância de se organizarem relações de colaboração entre professores e investigadores, prolongadas no tempo e em que cada um desempenhe papéis diferenciados, mas com um interesse comum – a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos.

Interessa, também, refletir sobre a turma do 3.º ano, os seus alunos e as suas aprendizagens. Todos os alunos desta turma mostraram gosto em aprender, em resolver problemas, em envolver-se em discussões sobre resoluções de tarefas e em explicitar e justificar os seus raciocínios perante outros. A este gosto não será alheio o ambiente de sala de aula que foi sendo construído e negociado ao longo do ano, pela professora em conjunto com os seus alunos. Daí a importância do ambiente da sala de aula quando se perspetiva a aprendizagem da Matemática numa cultura de inquirição. É particularmente gratificante analisar as últimas aulas gravadas no âmbito deste estudo e analisar as discussões em que os alunos se envolviam a propósito das resoluções das tarefas, sendo possível perceber o nível de profundidade de algumas das suas afirmações e justificações.

As aprendizagens dos alunos no âmbito desta experiência de ensino foram associadas, sobretudo, à multiplicação mas considerando como pano de fundo o desenvolvimento do sentido de número. Tendo este como horizonte, parece ser possível envolver os alunos em atividades que, gradual e progressivamente, contribuam para o seu desenvolvimento. Se a voz dos alunos for ouvida, dando conta dos seus raciocínios e justificações, surgem inúmeras oportunidades para aprofundar o seu conhecimento sobre os números e as operações e as relações entre eles. É, pois, fundamental o papel do professor, tanto na orquestração de discussões como na identificação de potenciais situações que sejam favoráveis ao desenvolvimento do sentido de número.

Embora mencione apenas aspetos e contributos positivos do estudo que realizei, é importante referir que, por vezes, me assaltaram dúvidas e incertezas e houve momentos

em que a sobrecarga de trabalho, sobretudo durante a recolha de dados, me impediu de aprofundar algumas reflexões e de selecionar outras tarefas, eventualmente mais promissoras do que aquelas que acabei por escolher. Ainda assim, e pensando retrospectivamente, sobressai a experiência muito positiva e enriquecedora, que vivi com a professora Isabel e os alunos daquela turma de 3.º ano, e que contribuiu para me fazer crescer, tanto em termos pessoais como profissionais.

Embora o estudo que realizei não tenha como propósito qualquer generalização, parece-me ser possível, tomando-o como ponto de partida, desenvolver outras experiências de ensino sobre a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Ainda que a experiência de ensino tenha sido realizada num contexto muito específico, com aqueles alunos e aquela professora, considero-a passível de ser usada como referência para organizar a aprendizagem da multiplicação noutros contextos, ajustando-a, naturalmente, às características particulares dos seus participantes. Além disso, tenho a expectativa de ter contribuído, também, para um acréscimo e aprofundamento do conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos do 1.º ciclo, no que se refere à multiplicação e ao desenvolvimento do sentido de número. Um aspeto que sobressai do estudo realizado é a importância da seleção das tarefas, dos seus contextos e dos números utilizados, pois é a partir daí que se desenvolvem os raciocínios dos alunos e que é possível orquestrar discussões produtivas e ricas em conhecimento matemático.

A terminar, uma última reflexão que fui fazendo ao longo do processo de análise dos dados sobre o quadro de referência proposto por McIntosh et al. (1992) para a análise do sentido de número dos alunos no qual me baseei para dar resposta a uma das questões deste estudo, tal como muitos outros investigadores. Os seus autores consideram-no como um ponto de partida para uma reflexão profunda sobre o sentido de número e a sua análise, embora o assumam como uma construção imperfeita e incompleta. Encarando-o nessa perspetiva, considero que, na faixa etária dos alunos participantes neste estudo, é possível definir um quadro de referência mais adequado para a análise do sentido de número.

O quadro de referência proposto por McIntosh et al. (1992) diferencia três áreas, Conhecimento e destreza com os números, Conhecimento e destreza com as operações e Aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo que, por sua vez, se subdividem em subcomponentes mais específicas (ver tabela 9.2). Esta organização que, em termos teóricos, parece completa e sem sobreposições, quando aplicada a situações concretas revela-se, por vezes, complexa e repetitiva. Além disso, a diferenciação destas três áreas provoca a subdivisão de componentes que se interrelacionam naturalmente. De facto, no estudo que realizei, a análise dos aspetos do sentido de número revelados pelos alunos a partir do trabalho que desenvolveram na sala de aula mostrou-se uma tarefa difícil de realizar por ser necessário dissociar componentes que, pela sua natureza intrínseca, se interligam. A reflexão sobre esta análise deu origem à proposta que passo a apresentar e justificar.

Uma primeira alteração que considero pertinente é associar a primeira área do quadro de referência de McIntosh et al. (1992) – Conhecimento e destreza com os números – com a segunda área – Conhecimento e destreza com as operações. Efetivamente, neste nível de escolaridade, o conhecimento e uso das operações aritméticas estão intimamente relacionados com os números e, além disso, o conhecimento e destreza com os números é evidenciado quando estes são manipulados no contexto das operações. Conhecer e usar as operações aritméticas numa perspetiva de sentido de número significa, também, conhecer e saber usar os números com os quais operamos. Deste modo, parece-me que o conhecimento e a destreza com os números não só estão relacionados com o conhecimento e a destreza com as operações como as suas componentes aí estão incluídas. Por exemplo, se pensarmos na componente Compreensão do efeito das operações (incluída no Conhecimento e destreza com as operações), esta só é possível ser analisada se nela se incluírem as componentes relativas ao conhecimento e destreza com os números.

Uma segunda alteração decorre da estreita ligação entre as duas áreas – Aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações – e – Conhecimento e destreza com as operações. Em particular, as componentes Consciencialização que existem múltiplas estratégias e Inclinação para usar uma representação e/ou um método

eficaz, estão relacionadas com a compreensão do efeito das operações, das propriedades das operações e das relações entre as operações, que se incluem na área sobre o Conhecimento e destreza com as operações. Por exemplo, quando se analisa a componente Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz é difícil fazê-lo sem ter em conta a componente relativa à compreensão das propriedades das operações, uma vez que o uso de cálculos eficazes está sempre ligado às propriedades das operações.

Considerando as conexões entre as componentes do sentido de número referidas, e, para mim, evidentes na análise dos aspetos do sentido de número dos alunos revelados durante a resolução das tarefas, proponho algumas alterações/ajustes ao quadro de referência de McIntosh et al. (1992). De modo a perceber-se o modo como proponho reorganizar o quadro de referência proposto por estes autores, apresento o original com duas zonas sombreadas, uma mais clara e outra mais escura (tabela 9.2). As componentes do sentido de número aí incluídas são deslocadas para outras posições na tabela seguinte (tabela 9.3), que corresponde à minha proposta, mas mantêm o mesmo sombreado, para melhor se compreender o “deslocamento” sofrido por cada uma delas. Assim, esta última tabela corresponde à reorganização que proponho. É de referir que uma parte da terceira coluna (relativa às áreas Conhecimento e destreza com os números e Conhecimento e destreza com as operações) da proposta original de McIntosh et al. (1992) não está aqui explicitada, mas é tida em conta na análise das componentes a ela associadas.

Sintetizando, a análise do sentido de número de alunos de nível de escolaridade semelhante ao dos alunos deste estudo realiza-se em situações de cálculo, ou seja, tem como ponto de partida a área Aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo. Esta, por sua vez, desdobra-se nas quatro componentes respetivas, propostas por McIntosh et al. (1992) e cada uma delas é, ainda, subdividida nas componentes correspondentes. A quarta coluna da tabela inclui as componentes tanto do Conhecimento e destreza com os números como do Conhecimento e destreza com as operações, reorganizadas e interligadas entre si, e associadas às componentes anteriores, de acordo com as suas especificidades.

Tabela 9.2 – Quadro de referência para examinar o sentido de número (McIntosh et al., 1992)

Conhecimento e destreza com os números	Sentido da ordenação dos números	Valor de posição Relação entre tipos de números Ordenação de números do mesmo tipo ou entre tipos de números
	Múltiplas representações dos números	Gráficas/simbólicas Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição) Comparação com números de referência
	Sentido das grandezas, relativa e absoluta dos números	Comparação com referenciais físicos Comparação com referenciais matemáticos
	Sistemas de valores de referência	Matemáticos Pessoais
Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão do efeito das operações	Operações com números naturais Operações com frações/decimais
	Compreensão das propriedades matemáticas	Comutativa Associativa Distributiva Identidades Inversos
	Compreensão das relações entre as operações	Adição/Multiplicação Subtração/divisão Adição/subtração Multiplicação/divisão
Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecimento de dados como exatos ou aproximados Conscientização que as soluções podem ser exatas ou aproximadas
	Conscientização da existência de múltiplas estratégias	Capacidade para criar e/ou inventar estratégias Capacidade para aplicar estratégias diferentes Capacidade para selecionar uma estratégia eficaz
	Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz	Facilidade com vários métodos (mentais, calculadoras, papel e lápis) Facilidade em escolher números eficazes
	Inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados	Reconhecer a razoabilidade dos dados Reconhecer a razoabilidade dos cálculos

Tabela 9.3 – Proposta de quadro de referência para examinar o sentido de número reajustando o de McIntosh et al. (1992)

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecer dados como exatos e aproximados Noção que as soluções podem ser exatas ou aproximadas	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência
	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias	Capacidade de inventar estratégias Capacidade de aplicar estratégias diferentes Capacidade de selecionar uma estratégia eficaz	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreensão do efeito das operações Compreensão das propriedades das operações Compreensão das relações entre as operações
	Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz	Facilidade com vários métodos Facilidade em escolher números eficazes	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreensão do efeito das operações Compreensão das propriedades das operações Compreensão da relação entre as operações
	Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado	Reconhecer a razoabilidade dos dados Reconhecer a razoabilidade do resultado	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreender o efeito das operações

Esta proposta de reorganização das componentes do sentido de número, apresentadas originalmente por McIntosh et al. (1992), pretende ser um contributo para a reflexão sobre os diferentes aspetos que caracterizam o sentido de número e o modo de operacionalizar a sua análise na sala de aula. Pode constituir, também, um quadro de referência para o professor promover o sentido de número dos seus alunos, criando, simultaneamente, um ambiente que encoraje a comunicação, a exploração, a discussão e o raciocínio matemático.

Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME/DEB.
- Academia das Ciências de Lisboa. (2001). *Dicionário da língua portuguesa contemporânea* (Vol. I). Lisboa: Editorial Verbo.
- ACARA. (2010). *The Australian Curriculum. Mathematics*. Obtido em 31 de julho de 2011, de ACARA Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority: <http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Curriculum/F-10>
- Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 367-385.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27(1), 85-103.
- Anghileri, J. (Ed.). (2002). *Principles and practices in arithmetic teaching*. Buckingham: Open University Press.
- Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184-194). Buckingham: Open University Press.
- Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense*. London, Great Britain: Continuum International Publishing Group.

-
- Anghileri, J., Beishuizen, M., & van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149-170.
- Baek, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. Morrows, & M. Kenney (Edits.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 151-160). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics*, 12(5), 242-247.
- Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, Fall, 14-22, 43-46.
- Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T., & Higgins, S. (2009). *Primary mathematics. Teaching for understanding*. Berkshire, England: Open University Press.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 217-241.
- Baroody, A. J. (1999). The roles of estimation and the commutativity principle in the development of third graders' mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology*, 74, 157-193.
- Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M.-l., & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 227-260.
- Bass, H. (2003). Computational fluency, algorithms, and mathematical proficiency: One mathematician's perspective. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 322-327.
- Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
- Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Edits.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht, The Netherlands.
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38 (4), 333-339.
- Beswick, K., Muir, T., & McIntosh, A. (2004). Developing an instrument to assess the number sense of young children. *AARE 2004. International Education Research Conference Paper Abstracts*. Melbourne, Australia.
-

-
- Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de doutoramento. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Grupo de Trabalho de Investigação.
- Bobis, J. (2006). From here to there: The path to computational fluency with multi-digit multiplication. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(4), 22-26.
- Bokhove, J., & Noteboom, A. (2008). Glossary Part II. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 243-246). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam a prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.
- Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J.-M. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.
- Brocardo, J., Serrazina, L., Rocha, I., Mendes, F., Menino, H., & Ferreira, E. (2008). Um projecto centrado no sentido do número. In L. R. González, G. B. Alfonso, & B. L. Nieto (Eds.), *Investigación en educación Matemática XII* (pp. 495-504). Badajoz.
- Buys, K. (2008). Mental arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Callingham, R. (2005). Primary students' mental computation: Strategies and achievement. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Ed.), *Building connections: Research, theory and practice - MERGA 28* (pp. 193-200). Melbourne: MERGA.
- Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.
- Carpenter, T., Franke, M., Jacobs, V., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 3-20.
-

-
- Case, R. (1989). Fostering the development of children's number sense. In J. Sowder, & B. Schappelle (Ed.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 57-64). San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics Education.
- Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados*. Lisboa: Ministério da Educação. DGIDC.
- Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: SEM-SPCE.
- Clarke, D. M. (2005). Written algorithms in the primary years: Undoing the 'good work'? In M. Coupland, J. Anderson, & T. Spencer (Ed.), *Making Mathematics Vital, Proceedings of the 20th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, (pp. 93-98). Sydney.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 81-89.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cobb, P., Gravemeijer, K., & Yackel, E. (2011). Symbolizing and instructional design - developing instructional sequences to support students' mathematical learning - introduction. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 75-84). New York: Springer.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, 10 (1&2), 113-163.
- Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: a reflection from the field. *Journal of the Learning Sciences*, 18(2), 165-199.
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
- Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of*

-
- research design in mathematics and science education (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction*, 6 (3), 219-242.
- Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & Language*, 16(1), 16-36.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2008). Introduction - The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (3^a ed., pp. 1-43). USA: Sage Publications.
- Department for Children Schools and Families. (2009). *Primary framework for mathematics: Learning objectives*. Obtido em 5 de outubro de 2009, de The National Strategies: <http://nationalstrategies.standards.dcsf.gov.uk/node/110240>
- DfEE. (1999). *Mathematics - Key Stages 1&2 - National Curriculum*. Obtido em 31 de julho de 2011, de National Curriculum website: <http://curriculum.qcda.gov.uk/key-stages-1-and-2/subjects/mathematics/keystage2/index.aspx>
- diSessa, A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 77-103.
- Doerr, H. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 62(1), 3-24.
- Dolk, M. (2008). Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35-53). Lisboa: Escolar Editora.
- Downton, A. (2008). Links between children's understanding of multiplication and solution strategies for division. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Ed.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 171-178). MERGA.
- Downton, A. (2010). Challenging multiplicative problems can elicit sophisticated. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Ed.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 169-176). Fremantle: MERGA.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167-180.
- Ell, F. (2001). *Strategies and thinking about number in children aged 9-11*. Technical Report 17, University of Auckland, Auckland, NZ.
-

-
- Equipa do projecto DSN. (2006). *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares. Materiais para professores e educadores*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Equipa do projecto DSN. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número. Perspectivas e exigências curriculares* (Vol. II). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ferreira, E., & Serrazina, L. (2010). A importância da discussão colectiva no desenvolvimento do sentido de número. *XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Ferreira, N. (2002). *Caracterização do sentido do número: estudos de caso com alunos do 8.º ano de escolaridade. (Tese de mestrado não publicada)*. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3-17.
- Fosnot, C. T. (2007). *Investigating multiplication and division. Grades 3-5*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001a). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001b). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 41-69.
- Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics*, 7, 454-459.
- Fuson, K. C. (1992a). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In R. P. Leinhardt, *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 53-187). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Fuson, K. C. (1992b). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
- Fuson, K. C. (2003a). Developing mathematical power in whole number operations. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Edits.), *A research companion to*
-

-
- principles and standards for schools mathematics* (pp. 68-94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fuson, K. C. (2003b). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 300-305.
- Fuson, K. C., & Smith, S. T. (1997). Supporting multiple 2-digit conceptual structures and calculation methods in the classroom: issues of conceptual supports, instructional design, and language. In M. Beishuizen, K. E. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Edits.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 163-198). Utrecht, The Netherlands: CD-B Press/Freudenthal Institute.
- Fuson, K. C., Smith, S. T., & Cicero, L. A. (1997b). Supporting latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (6), 738-766.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P., Olivier, A., . . . Fennema, E. (1997a). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.
- Gilmore, C. K., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1), 25-40.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
- Gravemeijer, K. (2004a). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. *International Congress on Mathematics Education (ICME 10)*, (pp. 1-17). Copenhagen, Denmark.
- Gravemeijer, K. (2004b). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 105-128.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Edits.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.
-

-
- Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, 109(5), 510-524.
- Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 551-574.
- Greeno, J. G. (1989). Some conjectures about number sense. In J. T. Sowder, & B. Schappelle (Ed.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 43-56). San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (3), 170-218.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.
- Harries, A., & Barmby, P. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 33-46.
- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30). I*, pp. 345-352. Hobart: MERGA.
- Hartnett, J. (2008). Capturing students' thinking about strategies used to solve mental computations by giving students access to a pedagogical framework. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Ed.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 251-257). MERGA.
- Heirdsfield, A. (2000). *Mental computation: Is it more than mental architecture?* Obtido em 12 de setembro de 2011, de Queensland University of Technology: <http://eprints.qut.edu.au/1432/>
- Heirdsfield, A. (2001). Integration and compensation in accurate mental computation. *24th Annual MERGA Conference* (pp. 292-299). Sidney: Merga.
- Heirdsfield, A. (2003). "Spontaneous" mental computation strategies. In N. A. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilloux (Ed.), *Proceedings of the International Group for Psychology of Mathematics Education conference*, (pp. 55-62). Honolulu, USA.
- Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 443-463.
-

-
- Heirdsfield, A., & Lamb, J. (2007). *Year 2 inaccurate but flexible mental computers: teacher actions supporting growth*. Obtido em 4 de julho de 2010, de <http://en.scientificcommons.org/22233969>
- Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 89-96). Haifa, Israel.
- Heirdsfield, A., Dole, S., & Beswick, K. (2007). Instruction to support mental computation development in young children of diverse ability. In P. Jeffery (Ed.), *Proceedings Australian Association for Research in Education Conference*, (pp. 1-8). Adelaide, Australia.
- Hersch, S., Fosnot, C., & Cameron, A. (2005). *Fostering children's mathematical development. Grades 3-5*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Jensen, M., & Fosnot, C. (2007). *The box factory: extending multiplication with the array*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Edits.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. *Mathematics Education Research Journal*, 14 (2), 133-149.
- Kelly, A. (2003). Research as design. *Educational Researcher*, 32(1), 3-4.
- Kelly, A. (2006). Quality criteria for design research: evidence and commitments. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Edits.), *Educational design research* (pp. 166-184). London: Routledge.
- Kelly, A., & Lesh, R. (2000). Part III: Teaching experiments. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 191-196). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kraemer, J.-M. (2007). A introdução dos números decimais. In Equipa do Projecto DSN, *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares* (pp. 23-26). Lisboa: APM.
- Kraemer, J.-M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Edits.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.
-

-
- Lesh, R., & Kelly, R. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in Mathematics and Science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar Matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 44-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- McIntosh, A. (2006). Mental computation of school-aged students: Assessment, performance levels and common errors. In C. Bergsten (Ed.), *Developing and researching quality* (pp. 1-10). Malmö, Sweden: Swedish Society for Research in Mathematics Education.
- McIntosh, A., & Dole, S. (2000). Number sense and mental computation: Implications for numeracy. *ACER Research Conference 2000: Improving Numeracy Learning*, (pp. 34-37). Brisbane.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 & 44.
- McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics. Student performance in four countries*. Perth: MASTE.
- McKenney, S., Nieveen, N., & van den Akker, J. (2006). Design research from a curriculum perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research* (pp. 110-143). London: Routledge.
- Mendes, F., & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido do número. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 159-182). Lisboa: Escolar Editora.
- Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalves, F. (2009). *Números e operações - 3.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. [http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_NumeroseOperacoes_NPMEB_1c3\(actualizado22Jun2010\).pdf](http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_NumeroseOperacoes_NPMEB_1c3(actualizado22Jun2010).pdf).
- Merriam, S. B. (1991). *Case study research in education. A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.
-

-
- Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de outubro de 2009, de <http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- Ministério da Educação. (2010). *Metas de aprendizagem. Ensino básico-1.º ciclo/Matemática*. Obtido em 8 de junho de 2011, de <http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/ensino-basico/metas-de-aprendizagem/metas/?area=7&level=2>
- Ministério da Educação. DEB (Ed.). (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico. Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação. DGEBS. (1990). *Programa de Matemática. Ensino Básico. 1.º Ciclo*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. PhD Dissertation*. Granada: University of Granada.
- Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, 2(4), 435-440.
- Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330.
- Mulligan, J. T., & Watson, J. (1998). A developmental multimodal model for multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, 10 (2), 61-86.
- Natale, C., & Fosnot, C. T. (2007). *The teachers' lounge. Place value and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- National Curriculum Board. (2008). *National Mathematics Curriculum: Initial advice*. Obtido em 5 de outubro de 2009, de Mathematics in Australia: http://www.ncb.org.au/verve/_resources/Mathematics_Initial_Advice_Paper.pdf
- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert, & M. Behr (Edits.), *Number concepts and*
-

-
- operations in the middle grades* (Vol. II, pp. 19-41). NJ, Lawrence Erlbaum Association.
- Nickerson, S. D., & Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(3), 227-252.
- Nickerson, S. D., & Whitacre, I. (2011). Extending a local instruction theory for the development of number sense. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Ed.), *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (pp. 235-238). California.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. California: Sage Publications, Lda.
- Plomp, T. (2006). Educational design research: an introduction. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *An introduction to educational design research* (pp. 9-36).
- Ponte, J. P. (2008). Aprender Matemática. In A. P. Canavarro (Ed.), *20 Anos de temas na EeM* (pp. 2-13). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.
- Resnick, L. (1989). Defining, assessing and teaching number sense. In J. Sowder, & B. Schappelle (Ed.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Reys, B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1(2), 114-120.
- Reys, R., & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), 225-237.
- Rodrigues, M. (2010). *El sentido del número: una experiencia de aprendizaje y desarrollo en educación infantil*. Tesis doctoral, Universidad de Extremadura. Facultad de Educación.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-487). Mahwah NJ: Erlbaum.
- Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2006). *Ministério da Educação. DGIDC*. Obtido em 5 de outubro de 2009, de Programa de
-

Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo:
http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Prog_Mat_2ciclo.pdf

- Serrazina, L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Saramago, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo*. Obtido em 5 de outubro de 2009, de Ministério da Educação.DGIDC: http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa%20FC%20_1C_Mat.pdf
- Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 347-395.
- Siegler, R. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117(3), 258-275.
- Siegler, R. (2000). The rebirth of children's learning. *Child Development*, 71(1), 26-35.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. (2008). Thinking through a lesson: Successfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(3), 132-138.
- Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 549-556.
- Smith, S. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 263-303). Reston, VA: NCTM.
- Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp. 371-389). New York: MacMillan.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A*

-
- project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. I, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.
- Sowder, J., & Schappelle, B. P. (Edits.). (1989). Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference. *Establishing foundations for research on number sense and related topics*. San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.
- Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction*. Reston: NCTM.
- Stephan, M., & Cobb, P. (2003). The methodological approach to classroom-based research. In M. Stephan, J. Bowers, & P. Cobb (Edits.), *Supporting students' development of measuring conception: Analyzing students' learning in social context. Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 12* (pp. 36-50). Reston, VA, USA: NCTM.
- Straker, A. (2003). The National Numeracy Project: 1996-1999. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 39-48). Buckingham: Open University Press.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in School*, 28(5), 2-4.
- Thompson, I. (Ed.). (2003a). *Issues in teaching numeracy in primary schools*. Buckingham: Open University Press.
-

-
- Thompson, I. (2003b). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Buckingham, U. K.: Open University Press.
- Thompson, I. (2003c). Getting your head around mental computation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 145-156). Buckingham: Open University Press.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 541-555.
- Torbeyns, J., de Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 1-17.
- Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction*, 19(1), 1-12.
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-56). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Treffers, A. (2008). Numbers and number relationships. In van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 101-120). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61-88). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Treffers, A., Nootboom, A., & Goeij, E. d. (2008). Column calculation and algorithms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- van de Walle, J. (2003). *Elementary & middle school mathematics. Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.
- van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.). (2006). *Educational design research*. London: Routledge.
-

-
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2008). *Children learn mathematics*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- van Galen, F., & Fosnot, C. (2007). *Groceries, stamps, and measuring strips: early multiplication*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, 35(1), 89-94.
- Verschaffel, L., & de Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 97-137). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. II, pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.
- Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 51-82). The Netherlands: Sense Publishers.
- Verschaffel, L., Torbeyns, J., de Smedt, B., Luwel, K., & van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational & Child Psychology*, 24(2), 16-27.
- Walls, F. (2005). Challenging task-driven pedagogies of mathematics. In P. Clarkson, A. Dowton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Ed.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research*, (pp. 751-758). Melbourne, Australia.
- Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3-4), 205-215.
- Whitacre, I., & Nickerson, S. (2006). Pedagogy that makes (number) sense: A classroom teaching experiment around mental math. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Ed.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. II*, pp. 736-743. Mérida, México: Universidade Pedagógica Nacional.

-
- Wittmann, E. (1998). Mathematics education as a design science. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick, *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 87–106). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Wittmann, E. (2000). *Report of the PME 25 research forum designing, researching and implementing mathematical learning environments - the research group Mathe 2000*. IEEM: University of Dortmund, Germany.
- Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(3), 222-255.
- Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, pp. 9-24. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Yang, D. C. (2001). Developing number sense. *APMC*, 6(3), 20-24.
- Yang, D. C. (2003a). Teaching and learning number sense - an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(1), 115-134.
- Yang, D. C. (2003b). Developing number sense through realistic settings. *APMC*, 8(3), 12-17.
- Yang, D. C. (2005a). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31(3), 317-333.
- Yang, D. C. (2005b). Developing number sense through mathematical diary writing. *APMC*, 10(4), 9-14.
- Yang, D. C., & Reys, R. (2001). Developing number sense. *Mathematics Teaching*, 176(1), 39-41.
- Yang, D. C., Hsu, C., & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(3), 407-430.
- Yang, D. C., Li, M. F., & Li, W. (2008a). Development of a computerized number sense scale for 3rd graders: Reability and validity analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 3(2), 110-124.
- Yang, D. C., Li, M. N., & Lin, C. (2008b). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(4), 789-807.
-

-
- Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2008c). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), 383-403.
- Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.
- Young-Loveridge, J. (2005). The impact of mathematics education reform in New Zealand: Taking children's views into account. In P. Clarkson (Ed.), *MERGA 28 - 2005. Building connections: Theory, research and practice*, (pp. 18-31). Wellington, Australia.

Anexos

Anexo 1

Quadro de referência para examinar o sentido de número (McIntosh et al., 1992)

Conhecimento e destreza com os números	Sentido da ordenação dos números	Valor de posição
		Relações entre tipos de números
		Ordenação de números do mesmo tipo ou entre tipos de números
	Múltiplas representações dos números	Gráficas/simbólicas
		Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição/recomposição)
		Comparação com números de referência
	Sentido das grandezas, relativa e absoluta dos números	Comparação com referenciais físicos
		Comparação com referenciais matemáticos
	Sistemas de valores de referência	Matemáticos
		Pessoais
Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão do efeito das operações	Operações com números inteiros
		Operações com frações/decimais
	Compreensão das propriedades matemáticas	Comutativa
		Associativa
		Distributiva
		Identidades
		Inversas
	Compreensão das relações entre as operações	Adição/Multiplicação
		Subtração/divisão
		Adição/subtração
		Multiplicação/divisão
Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecimento de dados como exatos ou aproximados
		Consciencialização que as soluções podem ser exatas ou aproximadas
	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias	Capacidade para criar e/ou inventar estratégias
		Capacidade para reconhecer estratégias diferentes
		Capacidade para seleccionar uma estratégia eficaz
	Inclinação para usar representações e/ou métodos eficazes	Facilidade com vários métodos (mentais, calculadoras, papel e lápis)
		Facilidade para escolher números eficazes
	Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado	Reconhecer a razoabilidade dos dados
		Reconhecer a razoabilidade dos cálculos

Anexo 2

Autorizações necessárias à realização do estudo

Exma. Sr.ª Presidente do Conselho Executivo do
Agrupamento [Redacted]
C/conhecimento da Directora
da Escola EB1 [Redacted]

Venho por este meio informar que estou a desenvolver um estudo de investigação, relacionado com o meu trabalho de doutoramento sob o título *Multiplicação no contexto do desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º Ciclo*, que tem por objectivo aprofundar a temática relacionada com o desenvolvimento do sentido do número, nos aspectos relacionados com a operação multiplicação.

O objectivo da investigação é compreender que tipo de tarefas e de sequências de tarefas (trajectórias de aprendizagem) potenciam o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico e descrever os diferentes modos de resolução usados pelos alunos em tarefas de multiplicação, recorrendo, para o efeito, a uma metodologia qualitativa e interpretativa, do tipo estudo de caso.

Assim, contactei, de modo informal, a professora Isabel [Redacted], da EB1 n.º 2 da [Redacted], que se disponibilizou a trabalhar comigo nas seguintes condições:

- Elaborar/adaptar e discutir, em conjunto comigo, um conjunto de tarefas sobre multiplicação, a serem implementadas ao longo do Ano lectivo;
- Implementar as tarefas elaboradas na sua turma de 3.º Ano;
- Discutir e reflectir sobre essas aulas, em conjunto comigo, no sentido da planificação das mesmas ir sendo adaptada à realidade da turma.

Neste sentido, venho por este meio solicitar a V.ª Ex.ª autorização para que eu, Maria de Fátima Pista Calado Mendes, possa estar presente, neste Ano lectivo, em algumas das aulas da referida professora, sobretudo à 5.ª feira, para proceder aos registos áudio e vídeo das mesmas, com vista a recolher dados que sejam objecto de análise no âmbito da investigação que me proponho fazer.

Mais declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins. Também e após a vossa resposta, enviarei informação aos encarregados de educação da turma, através da professora Isabel, solicitando autorização para os registos áudio e vídeo das aulas referidas.

Com os melhores cumprimentos

1 de Outubro de 2008

Maria de Fátima Mendes

Professora de Matemática da Escola Superior de Educação de Setúbal

Autorização

Exmo. Encarregado de Educação do aluno _____
do 3.º Ano, da turma da Professora Isabel _____

Em continuação do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido nas aulas, na área da Matemática, propus-me realizar, nesta turma, a recolha de dados para a minha tese de doutoramento, no âmbito do desenvolvimento da multiplicação no 1.º Ciclo. Assim, solicito a V. Ex.ª autorização para recolher dados usando meios áudio e vídeo, sobre a forma como os alunos resolvem um conjunto de tarefas, construídas em conjunto com a professora Isabel, contribuindo, deste modo, para um melhor conhecimento sobre a temática em estudo.

Mais declaro que as imagens ou som daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos, com os meus melhores cumprimentos.

_____, 1 de Outubro de 2008

A professora da Escola Superior de Educação de Setúbal

Fátima Mendes

.....

Declaro que autorizo o meu filho _____

a participar na investigação desenvolvida pela professora Fátima Mendes no âmbito da sua tese de doutoramento.

_____/_____/_____ (data)

O Encarregado de Educação

Anexo 3

Guião de observação e do relatório da aula¹

1. Estrutura da aula

- 1.1. Início, principais fases de desenvolvimento e sua sequência, conclusão
- 1.2. Relações com a aula anterior observada ou com outras aulas de Matemática

2. Tarefas propostas aos alunos

- 2.1. Apresentação da tarefa feita pela professora e materiais de apoio
- 2.2. Metodologias de trabalho adotadas para exploração das tarefas (trabalho individual, trabalho em pares, trabalho com toda a turma)
- 2.3. Dificuldades manifestadas pelos alunos durante a apresentação da tarefa (associada ao seu enunciado, aos números, etc.)
- 2.4. Dificuldades manifestadas pelos alunos durante a exploração da tarefa e como são ultrapassadas
- 2.5. Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da tarefa (as usadas pela maioria, as inesperadas)
- 2.6. Confronto entre as estratégias previstas e as utilizadas
- 2.7. Modelos usados/construídos pelos alunos
- 2.8. Duração da realização da tarefa
- 2.9. Conclusão da tarefa (todos/apenas alguns alunos)
- 2.10. Confronto entre os objetivos da tarefa previstos e os atingidos
- 2.11. Apresentação da exploração e síntese da tarefa feita em conjunto pela professora e todos os alunos
 - 2.11.1. Papel do professor
 - 2.11.2. Papel dos alunos
- 2.12. Aspetos que evidenciam o sentido de número dos alunos na exploração e síntese da tarefa feita pelo grupo turma e a professora

3. Ambiente da sala de aula

- 3.1. Ritmo da aula: tempo adequado, excessivo ou insuficiente para os alunos realizarem as tarefas propostas.
- 3.2. Grau de envolvimento dos alunos nas tarefas: empenhamento; interesse; persistência.
- 3.3. Relação do professor com os alunos: valoriza as ideias dos alunos; desafia intelectualmente os alunos; dá-lhes reforços positivos; incentiva-os.
- 3.4. Relação dos alunos entre si: conflitos relacionais; entreajuda; respeito por opiniões diferentes

¹Adaptado de Boavida (2005)

Anexo 4

Uma trajetória de aprendizagem da multiplicação

Proposta de trabalho de 19-10-08

Grandes ideias relacionadas com a multiplicação

A ideia de grupo como unidade (*unitizing*)

As adições repetidas podem ser reagrupadas

A propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração

A propriedade comutativa da multiplicação

Padrões associados ao valor de posição quando se multiplica por 10

A propriedade associativa da multiplicação

Estratégias que podem ser usadas pelos alunos

Adições repetidas

Contagem por saltos

Usar dobros

Usar produtos parciais

Usar múltiplos de 5 e de 10

Usar dobros e metades

Usar a disposição rectangular

Modelação matemática: Três estádios de desenvolvimento

Modelar a situação

Modelar as estratégias dos alunos (os alunos beneficiam ao ver o professor modelar a situação)

Modelos como ferramentas para pensar

Modelos/estratégias

Contextos sugestivos do uso de determinadas estratégias (arranjar imagens e situações para problemas)

Usar **tabelas de razão**

Usar a **disposição rectangular**

Relacionar a multiplicação com a divisão

Plano de trabalho na sala de aula

Tarefa	Grandes ideias	Estratégias que podem ser usadas	Contextos/Números
Mercearia da Piedade 1	A ideia de grupo como unidade A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Adições repetidas Contar por saltos Usar dobros Usar produtos parciais Usar múltiplos de 5 e de 10 Usar a disposição rectangular	Contextos sugestivos do uso de determinadas estratégias Disposição rectangular
Mercearia da Piedade 2 (3 cadeias relacionadas com os problemas da Mercearia da Piedade)	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar dobros Usar produtos parciais	Números que sugerem o uso das estratégias identificadas Múltiplos de 5, 3 e 6
Comprar carteiras de cromos	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar dobros	
Comprar carteiras de cromos (cadeias)	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar dobros 4x2 8x2 2x4 4x4 8x4	4x3 8x3 4x6 2x12 6x4
Cortinas novas	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição A propriedade comutativa da multiplicação	Usar dobros 3x4 e 4x3 2x3x4 8x4=2x4x4 ou 4x4+4x4 2x7+2x7=4x8 Usar produtos parciais	
Pastelaria Ou caixas de bombons	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Usar 5x e 10x Usar produtos parciais Usar dobros e metades	
Preparar um congresso	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Observar os pósteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos	
Pastelaria 2 cadeia	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Usar 5x e 10x Usar produtos parciais 5x4 e 10x4 10x4-4=9x4 9x4=5x4+4x4 Usar dobros e metades	

Tarefa	Grandes ideias	Estratégias que podem ser usadas	Contextos/Números
Pátio do João	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Usar 5x e 10x Usar produtos parciais 5x5 $5 \times 4 + 5 \times 5 = 5 \times 9$ $5 \times 10 - 5 = 5 \times 9$	Disposição rectangular
Inventar contexto de compras	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	24x1,5 ou 24x1,25? ou 2,5?	Tabela de razões, ... 24 são os alunos e a professora
Preparar um congresso	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação	Observar os pósteres todos Escolher 2 ou 3 para serem discutidos	
Cadeia com dobros e metades e distributiva			
Tabelas de preços Completar e usar	Preço de 1, 2, 5, 6, 10, 9	Preço das maçãs é 1,6 para $5 \times 1,6 = 8$ Preço das cenouras é 1,1 para identificar regularidade	Tabela de razões
Cadeia associada a preços			
Tarefa com preço como 0,99 € ou 1, 99€			Tabela de razões
Caixas para empacotar diferentes quantidades de bombons	A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração A propriedade comutativa da multiplicação A propriedade associativa da multiplicação	Diferentes tipos de caixas	

Anexo 5

MERCERIA DA PIEDADE

SEQUÊNCIA 1

TAREFA 1 – MERCEARIA DA PIEDADE 1



Adaptado dos materiais do projeto “Contexts for Learning Mathematics” (van Galen & Fosnot, 2007).

subtarefas 1 e 2

SEQUÊNCIA 1

TAREFA 2 – MERCEARIA DA PIEDADE 2

MERCEARIA DA PIEDADE

Sacos de maçãs <i>1 saco de maçãs custa 5 €</i>	Caixas de morangos <i>1 caixa de morangos custa 3 €</i>	Embalagens de água <i>Cada embalagem tem 6 garrafas</i>
Perguntas	Perguntas	Perguntas
Quanto custam 3 sacos?	Quanto custam 2 caixas?	Quantas garrafas têm 4 embalagens?
Quanto custam 5 sacos?	Quanto custam 4 caixas?	Quantas garrafas têm 8 embalagens?
Quanto custam 8 sacos?	Quanto custam 8 caixas?	
Quanto custam 10 sacos?		
Quanto custam 15 sacos?		

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 1

TAREFA 3 – CALCULAR EM CADEIA I

CALCULAR EM CADEIA I

$4 \times 5 =$	$5 \times 6 =$
$5 \times 5 =$	$30 \times 6 =$
$9 \times 5 =$	$35 \times 6 =$
$10 \times 5 =$	$2 \times 7 =$
$14 \times 5 =$	$40 \times 7 =$
$20 \times 5 =$	$42 \times 7 =$
$19 \times 5 =$	
$4 \times 6 =$	$10 \times 5 =$
$10 \times 6 =$	$20 \times 5 =$
$14 \times 6 =$	$4 \times 5 =$
$20 \times 6 =$	$24 \times 5 =$
$24 \times 6 =$	$23 \times 5 =$
$6 \times 4 =$	$3 \times 8 =$
$10 \times 4 =$	$10 \times 8 =$
$16 \times 4 =$	$13 \times 8 =$
$17 \times 4 =$	$20 \times 8 =$
$8 \times 4 =$	$23 \times 8 =$
$18 \times 4 =$	

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 2

TAREFA 4 – CARTEIRAS DE CROMOS

CARTEIRAS DE CROMOS

A Eva, o Luís e a Leandra fazem coleção de cromos.

Os cromos vendem-se em carteiras com 4, 6 e 12 cromos.



1. Quem tem razão? A Eva, o Luís ou a Leandra? Explica como pensaste

subtarefa 1

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 2

TAREFA 4 – CARTEIRAS DE CROMOS

CARTEIRAS DE CROMOS

A Eva, o Luís e a Leandra fazem coleção de cromos.

Os cromos vendem-se em carteiras com 4, 6 e 12 cromos.



2. O Tiago tem 24 cromos no total. Que carteiras de cromos pode ter comprado? Explica como pensaste.

subtarefa 2

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 2

TAREFA 4 – CARTEIRAS DE CROMOS

CARTEIRAS DE CROMOS

A Eva, o Luís e a Leandra fazem coleção de cromos.

Os cromos vendem-se em carteiras com 4, 6 e 12 cromos.



3. Esgotaram-se as carteiras com 12 cromos. A Raquel foi comprar cromos e ficou com 48. Que carteiras de cromos pode ter comprado? Explica como pensaste.

subtarefa 3

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 2

TAREFA 6 – CALCULAR EM CADEIA II

CALCULAR EM CADEIA II

Depois da tarefa *Carteiras de Cromos* calcular com os números envolvidos

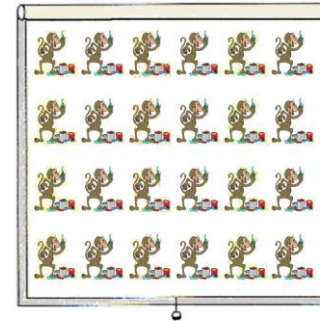
$4 \times 6 =$	$6 \times 8 =$
$4 \times 12 =$	$12 \times 4 =$
$8 \times 12 =$	$12 \times 2 =$
$8 \times 6 =$	$24 \times 2 =$
$16 \times 6 =$	

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 3

TAREFA 7 – CORTINAS

CORTINAS



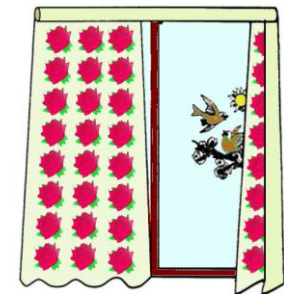
O João tem duas irmãs, a Ana e a Rita. Na figura temos as cortinas do quarto dele, das irmãs e da cozinha.

Quantos macacos estão na cortina do quarto do João? Como pensaste?

subtarefa 1

A cortina do quarto da Ana, irmã do João não está corrida, mas és capaz de dizer quantas flores tem a cortina? Como pensaste?

subtarefa 2

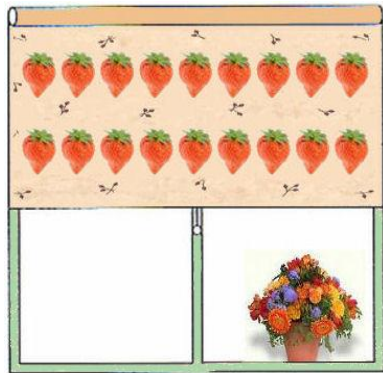


ADAPTADA DOS MATERIAIS DO PROJETO DSN (EQUIPA DO PROJETO DSN, 2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 3
TAREFA 7 – CORTINAS

CORTINAS

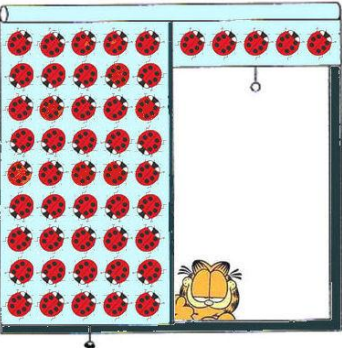


Os morangos da cortina da cozinha não estão todos à vista, mas consegues descobrir quantos são? Como pensaste?

subtarefa 3

E como consegues saber quantas joaninhas tem a cortina da Rita, a outra irmã do João?

subtarefa 4

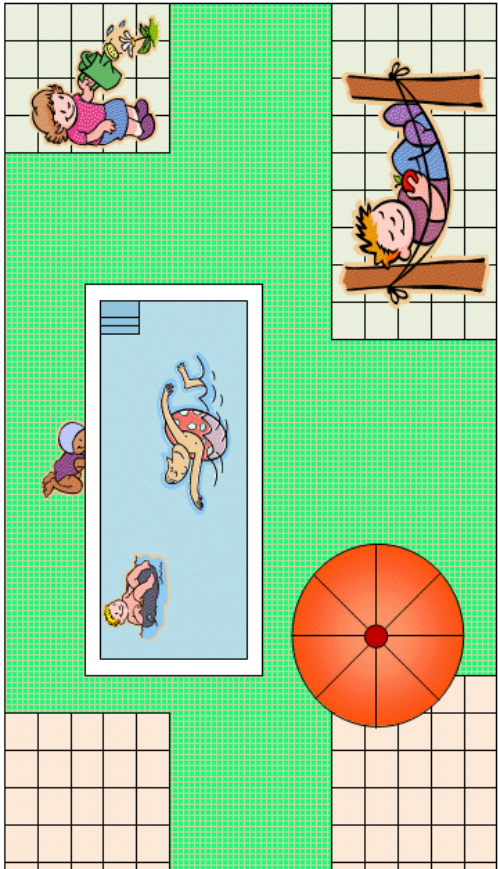


Nomes: Data:

O PÁTIO DO JOÃO

SEQUÊNCIA 3
TAREFA 8 – PÁTIO DO JOÃO

O pátio do João tem quatro zonas com empedrado quadrangular.



SEQUÊNCIA 3

TAREFA 8 – PÁTIO DO JOÃO

O PÁTIO DO JOÃO

Vais calcular o número de pedras em cada uma daquelas zonas e explicar como o fizeste.

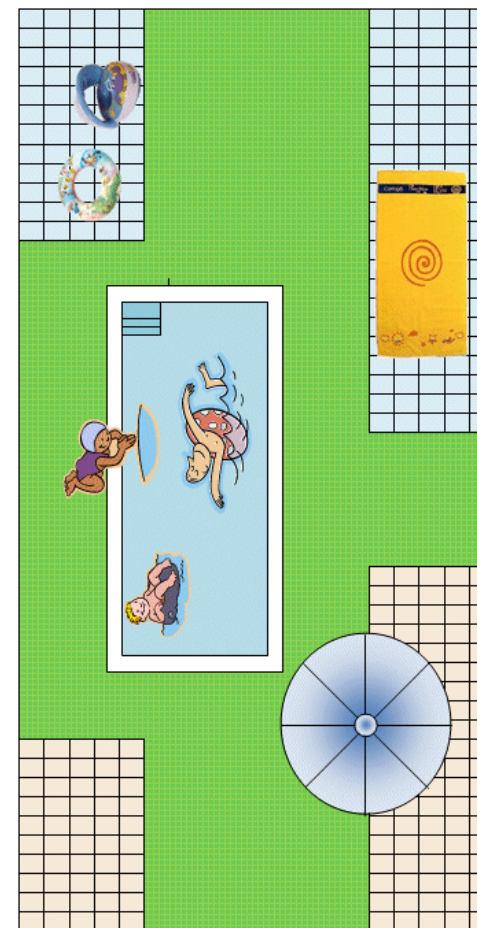
Zona do empedrado vazio	subtarefa 1
Zona do chapéu-de-sol	subtarefa 2
Zona da menina a regar	subtarefa 3
Zona do menino da rede	subtarefa 4

Adaptada dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 3

TAREFA 8 – PÁTIO DO CRISTÓVÃO



O pátio do Cristóvão tem quatro zonas com empedrado rectangular.

O PÁTIO DO CRISTÓVÃO

SEQUÊNCIA 3

TAREFA 8 – PÁTIO DO CRISTÓVÃO

O PÁTIO DO CRISTÓVÃO

Vais calcular o número de pedras em cada uma daquelas zonas e explicar como o fizeste.

Zona do empedrado vazio	subtarefa 1
Zona do chapéu-de-sol	subtarefa 2
Zona das boias	subtarefa 3
Zona da toalha	subtarefa 4

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 3

TAREFA 9 – CALCULAR EM CADEIA III

CALCULAR EM CADEIA III

Depois das tarefas *Cortinas* e *Pátios do João e do Cristóvão* calcular em cadeia

12 × 5 =	10 × 5 =	10 × 13 = 130
19 × 5 =	14 × 5 =	11 × 13 = 143
22 × 5 =	14 × 10 =	10 × 45 = 450
29 × 5 =	14 × 9 =	11 × 45 = 495
	14 × 19 =	20 × 27 = 540
		21 × 27 = 567
16 × 10 =	16 × 2 =	
16 × 2 =	16 × 10 =	
16 × 12 =	16 × 20 =	
26 × 12 =	16 × 4 =	
14 × 10 =	16 × 40 =	
14 × 20 =		
14 × 19 =		

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 4

TAREFA 10 – PILHAS DE CAIXAS

PILHAS DE CAIXAS

1. Na mercearia da Piedade chegaram caixas de 24 maçãs cada, embaladas como mostra a imagem.



As 25 caixas que chegaram foram arrumadas em pilhas como é indicado na figura.

No total das caixas, quantas maçãs há?

subtarefa 1



Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 4

TAREFA 10 – PILHAS DE CAIXAS

PILHAS DE CAIXAS

2. No supermercado do Bairro também há uma pilha de 25 caixas de maçãs. Estas caixas são maiores, cada uma tem 48 maçãs.

Neste supermercado, quantas maçãs estão guardadas nas caixas?

subtarefa 2



3. No supermercado Girassol há, no total, o mesmo número de maçãs que no supermercado do Bairro, mas em cada caixa estão embaladas apenas 24 maçãs.



No total, quantas caixas de 24 maçãs há no supermercado Girassol?

subtarefa 3

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 4

TAREFA 12 – CADEIAS NUMÉRICAS IV

CALCULAR EM CADEIA IV

Depois das tarefas *Pilhas de caixas*, calcular em cadeia.

$50 \times 10 =$	$10 \times 60 =$	$12 \times 50 =$
$25 \times 20 =$	$20 \times 30 =$	$24 \times 50 =$
$25 \times 4 =$	$40 \times 15 =$	$50 \times 24 =$
$25 \times 24 =$	$40 \times 30 =$	$25 \times 48 =$
$50 \times 12 =$	$20 \times 60 =$	$50 \times 48 =$

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 5

TAREFA 13 – GARRAFAS E MAIS GARRAFAS

GARRAFAS E MAIS GARRAFAS

Na figura estão várias garrafas e cada uma delas tem 1 litro de água.



Descobre uma maneira prática de responder às seguintes questões.

1. Ao todo, quantos litros de água há na figura? **subtarefa 1**
2. Imagina que queres comprar 30 litros de água em garrafas de 2 litros. Mostra como consegues saber quantas garrafas tens de comprar. **subtarefa 2**
3. Na loja só há garrafas de 0,5 litros mas queres comprar a mesma quantidade de água. Mostra como consegues saber o número de garrafas que tens de comprar. **subtarefa 3**
4. Na loja só há garrafas de 1,5 litros mas queres comprar a mesma quantidade de água. Mostra como consegues saber o número de garrafas que tens de comprar.

subtarefa 4

Adaptada dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 5

TAREFA 14 – EXPERIMENTAR COM GARRAFAS

EXPERIMENTAR COM GARRAFAS

Objetivo da Tarefa - Relacionar algumas capacidades entre si, dando sentido aos números decimais e às relações entre eles. São propostas algumas experiências usando, para o efeito, garrafas de água vazias que vão sendo cheias de acordo com os desafios propostos.

Material disponível - garrafas de água com diferentes capacidades: 0,5 l; 1 l; 1,5 l; 2 l; e 2,5 l.

Nota: Estas experiências poderão ser retomadas um outro dia com outras capacidades, nomeadamente usando uma garrafa com capacidade igual a 0,25 litros e um garrafão de 5 l

Procedimento geral – Primeiro coloca-se o desafio e pergunta-se a alguns alunos, antes de experimentar, qual a sua conjectura e, posteriormente, um deles experimenta, para confirmar a resposta ou não. Em seguida é registado no quadro e no caderno (?) a relação identificada.

Desafio 1 – Se eu tentar encher com água uma garrafa de 1 litro, usando garrafas de 0,5 litros, de quantas preciso? **Ou** Vou encher uma garrafa de 1 litro de água enchendo e despejando lá para dentro, repetidamente, uma garrafa de 0,5 l. Quantas vezes preciso de despejar a água da garrafa de 0,5 litros de modo a encher a garrafa de 1l?

Desafio 2 – Se eu tentar encher com água uma garrafa de 1,5 litros, usando garrafas de 0,5 litros, de quantas preciso? **Ou** Vou encher uma garrafa de 1,5 litros de água enchendo e despejando, repetidamente, uma garrafa de 0,5 l. Quantas vezes preciso de despejar a água da garrafa de 0,5 litros de modo a encher a garrafa de 1,5 l?

Desafio 3 – Se eu tentar encher com água uma garrafa de 2 litros, usando 3 vezes a garrafa de 0,5 litros, o que acontece? Quanto ficava por encher? Porquê?

Desafio 4 – Se eu tentar encher com água uma garrafa de 2 litros, usando uma garrafa de 0,5 litros, quantas vezes preciso de a encher e despejar?

Desafio 5 – Se eu tentar usar a água de quatro garrafas de 0,5 litros, que outras garrafas, iguais às que estão na bancada, consigo encher?

Desafio 6 – Se eu tentar encher com água uma garrafa de 2,5 litros, usando uma garrafa de 0,5 litros, quantas vezes preciso de a encher e despejar?

SEQUÊNCIA 5

TAREFA 15 – CALCULAR EM CADEIA V

CALCULAR EM CADEIA V

Depois da tarefa *Garrafas e mais garrafas*, calcular em cadeia.

$2 \times 0,5 =$	$2 \times 1,5 =$
$3 \times 0,5 =$	$3 \times 1,5 =$
$4 \times 0,5 =$	$4 \times 1,5 =$
$6 \times 0,5 =$	$6 \times 1,5 =$
$5 \times 0,5 =$	$8 \times 1,5 =$
$10 \times 0,5 =$	
$8 \times 0,5 =$	

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 6

TAREFA 16 – CONTAR MOEDAS 1



Adaptada dos materiais do projeto DSN (Equipa do Projeto DSN, 2007)

SEQUÊNCIA 6

TAREFA 16 – CONTAR MOEDAS 1

CONTAR MOEDAS 1

1. O Bernardo tem por hábito guardar, numa caixa, as moedas “pequenas” que a mãe lhe dá. Hoje pretende saber se tem dinheiro suficiente para comprar uma carteira de cromos. Para contar o dinheiro, colocou as moedas em cima da mesa e organizou-as, como se vê na imagem.
- Conseguirá comprar a carteira de cromos com o dinheiro que tem?
 - Conseguirá comprar uma carteira que tem mais cromos e que custa 2,5 euros? Quanto precisa ainda de juntar para a poder comprar?
2. Em cada um dos casos seguintes quantas moedas são necessárias para obter 1 Euro?

Moedas	Número de moedas necessárias para obter 1€
	
	
	

Moedas	Número de moedas necessárias para obter 1€
	
	
	

3. Preenche a tabela

Moedas	Número de moedas necessárias para obter 1€	Total 1€	Número de moedas necessárias para obter 2€	Total 2€
50 Cêntimos ou 0,50 €	2	2x0,50=1€		
20 Cêntimos ou 0,20 €				
10 Cêntimos ou 0,10 €				
5 Cêntimos ou 0,05 €				
2 Cêntimos ou 0,02 €				
1 Cêntimo ou 0,01 €				

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 6

TAREFA 17 – CONTAR MOEDAS 2

CONTAR MOEDAS 2

1. O Duarte contou as moedas do seu mealheiro e tem 2 € em moedas de 10 e 50 cêntimos. Que moedas pode ter?

subtarefa 4

2. A Mariana também contou as moedas do seu mealheiro e tem 3 €, em moedas de 20 e 50 cêntimos. Que moedas pode ter?

subtarefa 5

3. A Joana também junta moedas, esteve a contá-las e tem um total de 4 €. Como só tem moedas de 20 cêntimos, quantas moedas tem no mealheiro?

subtarefa 6

Quantas moedas teria a Joana no mealheiro se tivesse apenas moedas de 10 cêntimos?

E se tivesse apenas moedas de 5 cêntimos?

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 6

TAREFA 18 – CALCULAR EM CADEIA VI

CALCULAR EM CADEIA VI

Depois da tarefa *Contar moedas*, calcular em cadeia.

$2 \times 0,5 =$	$5 \times 0,20 =$	$5 \times 0,20 =$
$4 \times 0,5 =$	$10 \times 0,20 =$	$20 \times 0,20 =$
$3 \times 0,5 =$	$20 \times 0,20 =$	$40 \times 0,10 =$
$6 \times 0,5 =$	$20 \times 0,10 =$	$80 \times 0,05 =$
$5 \times 0,5 =$	$20 \times 0,05 =$	$40 \times 0,05 =$
$10 \times 0,5 =$		

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 7

TAREFA 19 – COLECIONAR CARTAS

COLECIONAR CARTAS

1. O Francisco faz coleção de cartas Yu-Gi-Oh! e ao organizá-las encontrou 48 repetidas. Resolveu distribuí-las igualmente pelos amigos Tiago, Guilherme, Enzo, Miguel, Hugo e David. Com quantas cartas ficou cada um dos amigos? Explica como pensaste.



subtarefa 1

2. O Duarte também coleciona cartas Yu-Gi-Oh! e tem 96 cartas que vai colocar numa caderneta. Cada folha da caderneta tem espaço para guardar 8 cartas, como mostra a imagem. Quantas folhas são necessárias para colocar todas as cartas? Explica como pensaste.



subtarefa 2

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 7

TAREFA 20 – MÁQUINAS DE BEBIDAS

MÁQUINAS DE BEBIDAS

1. A Raquel viu uma senhora encher uma máquina de venda de garrafas de água e resolveu conversar com ela. Ficou a saber que a máquina leva 156 garrafas.

- A Raquel sabe que, no supermercado, as embalagens trazem 6 garrafas de água. Então interrogou-se sobre quantas embalagens precisaria para encher a máquina. Queres ajudar a Raquel?



subtarefa 1

2. A Raquel descobriu que há outra máquina de venda de sumos que também leva 156 garrafas. Nesta máquina há 6 tipos diferentes de sumo: maçã, pêra, pêssago, uva, laranja e ananás, havendo a mesma quantidade de garrafas de cada um. Quando está cheia, quantas garrafas de sumo de cada sabor leva a máquina?

subtarefa 2



Adaptado de Fosnot e Dolk (2001b) e de Natale e Fosnot (2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 7

TAREFA 22 – CALCULAR EM CADEIA VII

CALCULAR EM CADEIA

Depois das tarefas *Colecionar cartas e Máquinas de bebidas*, calcular em cadeia.

$4 \times 6 =$	$6 \times 10 =$	$20 \times 5 =$
$24 : 6 =$	$60 : 10 =$	$100 : 5 =$
$24 : 4 =$	$60 : 6 =$	$100 : 20 =$
$48 : 6 =$	$120 : 10 =$	$20 \times 10 =$
$48 : 8 =$	$120 : 12 =$	$200 : 10 =$
$48 : 4 =$	$120 : 6 =$	$200 : 20 =$
		$200 : 5 =$

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 8

TAREFA 23 – REGULARIDADES, PARES, MÚLTIPLOS DE 5 E 10

REGULARIDADES, NÚMEROS PARES E MÚLTIPLOS DE 5 E DE 10

Observa com atenção a tabela.

- O que podes afirmar sobre os números da tabela?
- Discute as tuas descobertas com os teus colegas de grupo.
- Descreve numa folha de papel as descobertas que fizeram e as regularidades que descobriram.

Usa lápis de cores diferentes e

- Pinta da mesma cor todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, começa no 5 e vai pintando todos os números de 5 em 5.
- Pinta de cor diferente da primeira, todos os números que são múltiplos de 10, ou seja, começa no 10 e vai pintando todos os números de 10 em 10.
- Há números que ficaram pintados com duas cores. Quais são? Consegues explicar porquê?
- O que descobriste sobre os múltiplos de 10 e de 5?
- Usa uma cor diferente das anteriores.
- Pinta todos os números pares (múltiplos de 2) da tabela.
- O que descobriste?
- Há números que ficaram pintados com três cores. Quais são? Consegues explicar porquê?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Adaptada de Mendes, Brocardo, Delgado, & Torres (2010)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 8

TAREFA 24 – REGULARIDADES NAS TABUADAS

REGULARIDADES NAS TABUADAS

1. Observa a tabuada do 3 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades...e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 3, calculando 11×3 , 12×3 , 13×3 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

0x3=00	Escreve aqui as tuas descobertas
1x3=03	
2x3=06	
3x3=09	
4x3=12	
5x3=15	
6x3=18	
7x3=21	
8x3=24	
9x3=27	
10x3=30	
11x3=	
12x3=	
13x3=	
14x3=	
15x3=	
16x3=	
17x3=	
18x3=	
19x3=	
20x3=	
21x3=	

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 8

TAREFA 24 – REGULARIDADES NAS TABUADAS

REGULARIDADES NAS TABUADAS

1. Observa a tabuada do 5 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades...e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 5, calculando 11×5 , 12×5 , 13×5 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

1. Observa a tabuada do 11 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 11, calculando 11×11 , 12×11 , 13×11 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

1. Observa a tabuada do 9 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 9, calculando 11×9 , 12×9 , 13×9 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

1. Observa a tabuada do 6 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 6, calculando 11×6 , 12×6 , 13×6 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

1. Observa a tabuada do 2 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 2, calculando 11×2 , 12×2 , 13×2 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

1. Observa a tabuada do 4 (os primeiros dez produtos).
2. O que há de curioso nesta tabuada? Descobre algumas regularidades e escreve-as na tua folha.
3. Continua a tabuada do 4, calculando 11×4 , 12×4 , 13×4 , ...
4. As regularidades que descobriste mantêm-se? Explica porquê.

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 9

TAREFA 25 – OUTRA MÁQUINA DE BEBIDAS

OUTRA MÁQUINA DE BEBIDAS

No Pavilhão da Ciência a Raquel encontrou uma máquina nova de venda de água que estava a ser cheia.



A máquina leva, no total, 132 garrafas.

A água é entregue no Pavilhão em caixas com 10 embalagens de 6 garrafas cada.

subtarefa 1

1. Quantas embalagens de 6 garrafas de água são necessárias para a encher?
2. Quantas caixas cheias são necessárias?

subtarefa 2

Adaptado de Fosnot e Dolk (2001) e de Natale e Fosnot (2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 9

TAREFA 26 – MINIATURAS DE ANIMAIS

MINIATURAS DE ANIMAIS

Para a visita ao Jardim Zoológico, organizada pelo ATL, os alunos foram divididos por grupos, tendo cada grupo um monitor responsável.

O grupo do Guilherme ficou com oito alunos e o do Francisco com sete alunos.

À porta do Jardim Zoológico cada monitor recebeu um saco com miniaturas de animais para distribuir pelos alunos do seu grupo.

O saco do grupo do Guilherme tinha 256 miniaturas e o do grupo do Francisco tinha 224.



Guilherme

Francisco

No intervalo para o lanche cada monitor distribuiu, igualmente, as miniaturas do seu saco pelos alunos do respetivo grupo.

Achas que é justa esta partilha das miniaturas de animais?

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 9

TAREFA 28 – CALCULAR EM CADEIA VIII

CALCULAR EM CADEIA VIII

Depois das tarefas *Outra máquina de bebidas e Miniaturas de animais*, calcular em cadeia.

24:4=	130:13=	21:3=	140:14=
40:4=	143:13=	30:3=	154:14=
64:4=	260:13=	51:3=	280:14=
104:4=	273:13=	60:3=	294:14=
	247:13=	81:3=	266:14=

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 10

TAREFA 29 – IDA AO TEATRO

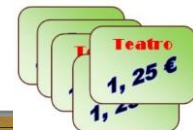
IDA AO TEATRO

Os alunos do 3º B vão outra vez ao teatro com a professora Isabel.

Para facilitar o pagamento, ao lado da bilheteira está um quadro com uma tabela de valores.

1. Alguém apagou partes da tabela. Podem completá-la? Expliquem como pensaram.

subtarefa 1



Número de bilhetes	Custo (Euros)
1	1,25 €
2	
6	
	10 €
10	
20	

2. Se os 23 alunos da turma forem ao teatro com a professora Isabel qual o preço total dos bilhetes? Expliquem como pensaram.

subtarefa 2



Número de bilhetes	Custo (Euros)
1	1,25 €
2	2,50 €
6	7,50 €
8	10,00 €
10	12,50 €
20	25,00 €

3. A lotação do teatro é de 250 lugares. Se todos os lugares estiverem ocupados, qual será o montante total da venda dos bilhetes? Expliquem como.

subtarefa 3

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 10

TAREFA 30 – IDA À MERCEARIA DA PIEDADE

IDA À MERCEARIA DA PIEDADE

1. Na mercearia da Piedade, um saco de laranjas custa um euro e sessenta cêntimos.
- 1.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada à entrada da mercearia. Expliquem como pensaram.

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,60 €
2	
5	
6	
10	
9	
20	



subtarefa 1.1

- 1.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 4 sacos de laranjas?
- 12 sacos de laranjas?
- 24 sacos de laranjas?

Expliquem como pensaram.

subtarefa 1.2

Adaptado de Fosnot (2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 10

TAREFA 30 – IDA À MERCEARIA PIEDADE

IDA À MERCEARIA DA PIEDADE

2. Na mercearia da Piedade as maçãs estão a ser vendidas, em sacos de 1kg, por um euro e dez cêntimos.
- 2.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada na mercearia. Expliquem como pensaram.



subtarefa 2.1

Número de sacos	Custo (Euros)
1	1,10 €
2	
10	
5	
3	
4	
20	

- 2.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 6 sacos de maçãs?
- 8 sacos de maçãs?
- 40 sacos de maçãs?

Expliquem como pensaram.

subtarefa 2.2

Adaptado de Fosnot (2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 10

TAREFA 30 – IDA À MERCEARIA PIEDADE

IDA À MERCEARIA DA PIEDADE

3. Na mercearia da Piedade, uma embalagem de sumo de pêssgo custa 99 cêntimos.

- 3.1. Preencham o resto da tabela para ser afixada na mercearia. Expliquem como pensaram.

Número de embalagens de sumo	Custo (Euros)
1	0,99 €
2	
3	
5	
10	
9	
20	

subtarefa 3.1



- 3.2. Quanto gastamos se comprarmos:

- 6 embalagens de sumo?
- 8 embalagens de sumo?

Expliquem como pensaram.

subtarefa 3.2

Adaptado de Fosnot (2007)

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 10

TAREFA 31 – CALCULAR EM CADEIA IX

CALCULAR EM CADEIA IX

Depois das tarefas *Ida ao teatro* e *Ida à Mercearia da Piedade*, calcular em cadeia.

$2 \times 0,50 =$	$10 \times 0,25 =$	$2 \times 0,99 =$	$2 \times 1,60 =$
$4 \times 0,25 =$	$9 \times 0,25 =$	$4 \times 0,99 =$	$4 \times 1,60 =$
$8 \times 0,25 =$	$100 \times 0,25 =$	$5 \times 0,99 =$	$5 \times 1,60 =$
$4 \times 1,25 =$	$99 \times 0,25 =$	$50 \times 0,99 =$	$20 \times 1,60 =$
$8 \times 1,25 =$	$20 \times 0,25 =$	$500 \times 0,99 =$	
$80 \times 1,25 =$			

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 11

TAREFA 32 – ORGANIZAR MENUS

ORGANIZAR MENUS



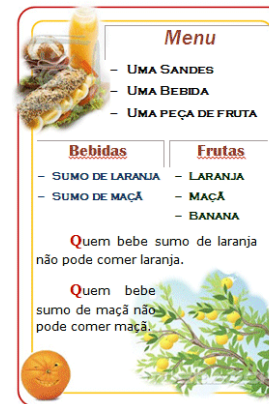
Quantos tipos de sandes?

Nomes: Data:

SEQUÊNCIA 11

TAREFA 32 – ORGANIZAR MENUS

ORGANIZAR MENUS



Quantos Menus?

Adaptada de Mendes, Brocardo, Delgado & Gonçalves (2010)

Nomes: Data: