

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Diagramas de Crescimento e Combinatória de Quadros de Young

Filipe Jorge Matos Dias Gomes

Dissertação

Mestrado em Matemática

2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Diagramas de Crescimento e Combinatória de Quadros de Young

Filipe Jorge Matos Dias Gomes

Dissertação orientada pela Prof. Doutora Maria Manuel Correia Torres

Dissertação

Mestrado em Matemática

2014

Resumo

O estudo dos quadros de Young, durante o século XX, levou ao desenvolvimento de vários algoritmos combinatórios, como a correspondência de Robinson-Schensted e o *jeu de taquin* de Schützenberger. Algumas propriedades destes algoritmos, especialmente aquelas que dizem respeito a aspectos de simetria, tornam-se mais claras quando os algoritmos são reformulados noutro contexto. No final do século XX, Fomin desenvolveu a noção de diagrama de crescimento, com o intuito de estudar estes algoritmos combinatórios, tornando mais transparentes as suas propriedades fundamentais. No estudo de diagramas de crescimento, os resultados de Greene e Kleitman sobre conjuntos parcialmente ordenados assumem um papel central; o teorema da dualidade de Greene para conjuntos parcialmente ordenados finitos é especialmente relevante neste contexto.

O principal objectivo desta dissertação é a utilização de diagramas de crescimento para estudar as principais propriedades de alguns algoritmos combinatórios, bem como o desenvolvimento das ferramentas necessárias para este fim.

Nesta dissertação, após uma apresentação sumária das noções básicas sobre conjuntos parcialmente ordenados, partições e quadros de Young, são apresentados em detalhe os resultados de Greene e Kleitman sobre famílias de cadeias e anticadeias em conjuntos parcialmente ordenados finitos. Demonstramos o teorema da dualidade de Greene e examinamos algumas das suas consequências mais relevantes, com o objectivo de relacionar diagramas de Young com ideais de ordem de conjuntos parcialmente ordenados.

Em seguida, apresentamos as versões clássicas de alguns algoritmos combinatórios envolvendo quadros de Young: a correspondência de Robinson-Schensted, a correspondência RSK, o *jeu de taquin* de Schützenberger e a evacuação. Estes algoritmos são posteriormente reformulados recorrendo a diagramas de crescimento, tirando partido das ferramentas desenvolvidas com o auxílio do teorema da dualidade de Greene. As propriedades fundamentais destes algoritmos são demonstradas no último capítulo, particularmente as suas propriedades de simetria e o efeito de transformações de uma permutação nos quadros de Young que lhe correspondem pelo algoritmo de Robinson-Schensted.

Palavras-chave

Partições; Quadros de Young; Conjuntos parcialmente ordenados; Algoritmos combinatórios; Permutações; Diagramas de Crescimento.

Abstract

The study of Young tableaux, during the twentieth century, has led to the development of several combinatorial algorithms, such as the Robinson-Schensted correspondence and Schützenberger’s *jeu de taquin*. Some properties of these algorithms, especially those that concern symmetry, become clearer when the algorithms are reformulated in another context. At the end of the twentieth century, Fomin has developed the notion of growth diagram, with the purpose of studying these combinatorial algorithms, making their fundamental properties more transparent. In the study of growth diagrams, Greene and Kleitman’s results on finite posets play a central part; Greene’s duality theorem for finite posets is especially relevant in this context.

Our main goal with this thesis is the study of properties of combinatorial algorithms using growth diagrams, as well as the development of the necessary tools for the accomplishment of this end.

In this thesis, after a brief presentation of the basic notions concerning posets, partitions and Young tableaux, we present in detail Greene and Kleitman’s results on antichain and chain families in finite posets. We prove Greene’s duality theorem and examine some of its most important consequences, with the purpose of connecting Young diagrams with order ideals of finite posets.

Afterwards, we present the classical versions of some combinatorial algorithms involving Young tableaux: the Robinson-Schensted correspondence, the RSK correspondence, Schützenberger’s *jeu de taquin* and evacuation. These algorithms are then recast in the context of growth diagrams, taking advantage of the tools developed using Greene’s duality theorem. The fundamental properties of these algorithms are proved in the last chapter, especially their symmetry properties and those that concern the effect of transformations of a permutation on the Young tableaux that Robinson-Schensted’s algorithm associates with it.

Keywords

Partitions; Young tableaux; Partially ordered sets; Combinatorial algorithms; Permutations; Growth diagrams.

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer à professora Maria Manuel Torres, por me ter dado a conhecer o (interessante) assunto desta dissertação e pelo apoio prestado durante a sua elaboração.

Agradeço aos meus pais, pelo grande apoio dado ao longo dos últimos anos.

Deixo um agradecimento especial ao Grupo-4 de Klein, que nunca poderia deixar de ser mencionado.

Finalmente, agradeço à Sílvia, por muito mais do que poderia aqui dizer.

PREFÁCIO

O estudo dos quadros de Young começou no início do século XX, tendo este conceito sido introduzido pelo matemático britânico Alfred Young e posteriormente aplicado ao estudo das representações do grupo simétrico por Frobenius. Ao longo do século XX, vários matemáticos estudaram algoritmos combinatórios envolvendo quadros de Young, sendo um dos exemplos mais importantes a correspondência de Robinson-Schensted, estudada inicialmente por Robinson em 1938 e reformulada mais de vinte anos depois por Schensted. O objetivo de Schensted era o estudo de subsequências crescentes e decrescentes de permutações, tendo para isso desenvolvido um algoritmo que permite associar bijectivamente um par de quadros de Young standard a uma permutação.

Mais desenvolvimentos ocorreram nos anos 60 e 70, levados a cabo por Schützenberger, que estudou o algoritmo que viria a ser designado por *jeu de taquin* e o algoritmo de evacuação. Estes algoritmos conduziram à descoberta de algumas propriedades da correspondência de Robinson-Schensted, em particular as que dizem respeito ao efeito de uma transformação da permutação nos quadros de Young que lhe correspondem.

Também nos anos 70, Knuth generalizou a correspondência de Robinson-Schensted para o contexto dos quadros de Young semistandard, obtendo uma bijecção entre pares de quadros semistandard e certas palavras – permutações generalizadas – das quais as permutações são um caso especial. Esta bijecção viria a ser conhecida por correspondência de Robinson-Schensted-Knuth (ou simplesmente correspondência RSK).

Estes algoritmos envolvendo quadros de Young apresentam diversas propriedades de “simetria”, a mais surpreendente das quais é o resultado de Schützenberger que relaciona os quadros de Young correspondentes a uma permutação e à sua inversa. Estes resultados têm em comum o facto de não serem evidentes a partir da descrição original dos algoritmos. De facto, o teorema de simetria de Schützenberger é mais facilmente demonstrado se o algoritmo original da correspondência de Robinson-Schensted for quase inteiramente reformulado de

um modo que ponha em evidência a relação geométrica existente entre uma permutação e sua inversa.

Nas últimas décadas do século XX, Sergey Fomin desenvolveu a teoria dos diagramas de crescimento, uma elegante ferramenta unificadora que permitiu lançar uma nova luz sobre os algoritmos combinatórios acima referidos. Um diagrama de crescimento é, em termos informais, uma forma de dispor diagramas de Young de modo a que certas cadeias saturadas de diagramas de Young se possam obter recursivamente, recorrendo a regras locais de crescimento. A reformulação dos algoritmos combinatórios mencionados anteriormente utilizando diagramas de crescimento permite tornar transparentes as suas propriedades, incluindo as propriedades de simetria mencionadas acima.

A teoria dos diagramas de crescimento encontra-se intimamente relacionada com os resultados obtidos por Curtis Greene e Daniel Kleitman sobre famílias de cadeias e anticadeias em conjuntos parcialmente ordenados finitos. Estes resultados estabelecem uma ponte entre a teoria dos conjuntos parcialmente ordenados e a teoria das partições, sendo o mais importante exemplo disso o teorema da dualidade de Greene para conjuntos parcialmente ordenados finitos. A interpretação das técnicas de diagramas de crescimento em termos de conjuntos parcialmente ordenados permite unificar vários conceitos combinatórios de um modo elegante.

Esta dissertação é uma súpula dos resultados mais importantes sobre diagramas de crescimento e algoritmos combinatórios, pretendendo estabelecer ligações entre diversos conceitos da Combinatória (conjuntos parcialmente ordenados, partições, quadros de Young) e unificando os diversos trabalhos de Fomin na área dos diagramas de crescimento. O objectivo deste trabalho é descrever os principais algoritmos combinatórios envolvendo quadros de Young recorrendo a diagramas de crescimento, nunca perdendo de vista a relação com a teoria dos conjuntos parcialmente ordenados e, em especial, com o teorema da dualidade de Greene. Tanto quanto sabemos, não existem referências que tratem este assunto de um modo completo, apresentando todos os algoritmos que aqui analisamos e desenvolvendo em detalhe as ferramentas necessárias para a sua reformulação usando diagramas de crescimento.

Concluimos com uma descrição sumária do conteúdo dos quatro capítulos desta dissertação:

- O capítulo 1 é um repositório de noções e resultados básicos da teoria dos conjuntos parcialmente ordenados e das partições e quadros de Young, servindo de apoio aos restantes capítulos. Chamamos a atenção para a ligação íntima entre estes dois assuntos, que é particularmente evidente na caracterização dos diagramas de Young como ideais de ordem finitos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e na correspondência entre quadros de Young e cadeias saturadas de diagramas de Young.
- O capítulo 2 desenvolve os resultados de Greene e Kleitman sobre famílias

de anticadeias e de cadeias em conjuntos parcialmente ordenados finitos, essenciais para a demonstração do teorema da dualidade de Greene. Posteriormente, apresentam-se alguns resultados de Fomin sobre ideais de ordem de conjuntos parcialmente ordenados e diagramas de Young que serão importantes no desenvolvimento da teoria dos diagramas de crescimento.

- O capítulo 3 apresenta a descrição clássica dos algoritmos fundamentais envolvendo quadros de Young: a correspondência de Robinson-Schensted, a correspondência RSK, o *jeu de taquin* e a evacuação de Schützenberger. A descrição original dos algoritmos é apresentada de modo a que possa ser confrontada com a descrição feita posteriormente, recorrendo a diagramas de crescimento.
- O capítulo 4 é o capítulo fundamental da dissertação, no qual se apresentam as reformulações dos algoritmos combinatórios clássicos em termos de diagramas de crescimento. São apresentados dois conjuntos fundamentais de regras locais de crescimento – as regras locais de crescimento para a correspondência de Robinson-Schensted e as regras locais de crescimento para o *jeu de taquin*. As primeiras são utilizadas seguidamente para generalizar a descrição da correspondência de Robinson-Schensted com diagramas de crescimento ao contexto dos quadros semistandard, obtendo-se uma descrição da correspondência RSK. A reformulação da correspondência RSK não se encontrava explicitamente descrita em qualquer referência da qual tenhamos conhecimento; nesta dissertação optámos por uma abordagem que permite reduzir eficazmente o estudo da correspondência RSK aos resultados obtidos por Fomin para a correspondência de Robinson-Schensted. O capítulo termina com o estudo da evacuação, baseado nas regras locais de crescimento para o *jeu de taquin*.

CONTEÚDO

Agradecimentos	iv
Prefácio	vi
1 Conceitos Introdutórios	1
1.1 Conjuntos parcialmente ordenados	1
1.2 Partições e quadros de Young	13
2 Conjuntos Parcialmente Ordenados e Partições	25
2.1 Teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos	25
2.1.1 O reticulado das k -famílias	27
2.1.2 Partições k -saturadas em cadeias	36
2.1.3 Demonstração do teorema da dualidade de Greene	42
2.2 Ideais de ordem e partições	46
2.3 Localização de caixas em diagramas de Young de conjuntos parcialmente ordenados	54
3 Quadros de Young: Algoritmos Combinatórios	57
3.1 A correspondência de Robinson-Schensted	58
3.1.1 Algoritmo de inserção de Schensted	58
3.1.2 A correspondência de Robinson-Schensted	61
3.1.3 Subsequências crescentes e decrescentes	65
3.2 A correspondência RSK	66
3.3 Deslizamento: o <i>jeu de taquin</i> de Schützenberger	71
3.4 Evacuação: a involução de Schützenberger	77

4 Diagramas de Crescimento	81
4.1 A correspondência de Robinson-Schensted	82
4.1.1 Descrição usando diagramas de crescimento	82
4.1.2 Propriedades da correspondência de Robinson-Schensted	93
4.2 A correspondência RSK	95
4.3 O <i>jeu de taquin</i> de Schützenberger	106
4.4 A involução de Schützenberger	113
Bibliografia	121

CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Neste capítulo apresentamos conceitos básicos que serão necessários ao longo do texto.

Na primeira secção são apresentadas noções básicas sobre conjuntos parcialmente ordenados, com especial atenção às noções que serão posteriormente utilizadas, nomeadamente cadeias saturadas, extensões lineares e ideais de ordem. Alguns resultados são enunciados e demonstrados apenas no caso dos conjuntos parcialmente ordenados finitos, por ser este o caso em que estamos mais interessados em capítulos posteriores.

Na segunda secção sintetizam-se alguns aspectos elementares de combinatoria de partições de inteiros e quadros de Young. Nesta secção encontram-se maioritariamente as definições dos conceitos que utilizaremos posteriormente, deixando-se para o capítulo seguinte a descrição de algoritmos combinatórios envolvendo quadros de Young standard e semistandard.

1.1 Conjuntos parcialmente ordenados

Nesta secção apresentamos os conceitos básicos sobre conjuntos parcialmente ordenados que utilizaremos no que se segue.

Definição 1.1. Um *conjunto parcialmente ordenado* (abreviadamente, *cpo*) é um par (P, \leq) em que P é um conjunto e \leq é uma relação binária em P que satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in P$:

- (i) $x \leq x$ (*reflexividade*);
- (ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (*anti-simetria*);
- (iii) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (*transitividade*).

Nestas condições, \leq diz-se uma *relação de ordem parcial* em P .

Diremos simplesmente que P é um cpo, omitindo a referência à relação de ordem parcial, sempre que o contexto torne claro que relação estamos a considerar.

Se (P, \leq) é um cpo e $x, y \in P$, escreveremos: $x \geq y$ se $y \leq x$; $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$; e $x > y$ se $x \geq y$ e $x \neq y$. Se $x \leq y$ ou $y \leq x$, dizemos que x e y são *comparáveis*; caso contrário, dizemos que x e y são *incomparáveis* (neste último caso, escrevemos $x \parallel y$). Uma relação de ordem parcial para a qual quaisquer dois elementos são comparáveis diz-se uma *relação de ordem total* e o cpo correspondente diz-se um *conjunto totalmente ordenado*.

Se (P, \leq) é um cpo e $Q \subseteq P$, então Q é um cpo, considerando a restrição da relação \leq a Q ; isto é, dados $x, y \in Q$, tem-se $x \leq y$ em Q se e só se $x \leq y$ em P . Dizemos que (Q, \leq) é um *subconjunto parcialmente ordenado* de P . Nesta situação, usamos a mesma notação para as relações de ordem parcial de P e de Q .

Seja (P, \leq) um cpo e sejam $x, y \in P$. Dizemos que x *cobre* y , e escrevemos $x \succ y$ (ou $y \prec x$), se $x > y$ e não existe $z \in P$ tal que $x > z > y$.

Um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) finito (isto é, tal que P é um conjunto finito) pode ser representado geometricamente por um *diagrama de Hasse*. Este diagrama é construído do seguinte modo: a cada elemento de P corresponde um ponto (ou vértice) do diagrama, de forma a que, se $x \leq y$, o ponto correspondente a x é desenhado abaixo do ponto correspondente a y ; entre os pontos correspondentes a x e y (com $x \leq y$) existe uma aresta se e só se y cobre x .

Definição 1.2. Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) conjuntos parcialmente ordenados e seja $f : P \rightarrow Q$ uma aplicação.

1. A aplicação f diz-se *isótona* se, para quaisquer $x, y \in P$, $x \leq_P y$ implica $f(x) \leq_Q f(y)$.
2. A aplicação f diz-se um *mergulho de ordem* se, para quaisquer $x, y \in P$, $x \leq_P y$ se e só se $f(x) \leq_Q f(y)$.
3. A aplicação f diz-se um *isomorfismo de ordem* se for um mergulho de ordem sobrejectivo.

Note-se que um mergulho de ordem $f : P \rightarrow Q$ é necessariamente injectivo: de facto, se $f(x) = f(y)$, então tem-se $f(x) \leq f(y)$ e $f(y) \leq f(x)$, pelo que $x \leq y$ e $y \leq x$, o que permite concluir que $x = y$. Assim, um isomorfismo de ordem é necessariamente bijectivo. Para além disso, a aplicação inversa de um isomorfismo de ordem é também um isomorfismo de ordem.

Se existir um isomorfismo de ordem entre os cpo's (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) , então estes dizem-se *isomorfos* e escrevemos $(P, \leq_P) \simeq (Q, \leq_Q)$, ou simplesmente $P \simeq Q$.

Definição 1.3. Seja (P, \leq) um cpo e seja $X \subseteq P$.

1. Um elemento $a \in P$ diz-se um *majorante* (respectivamente, *minorante*) de X se, para qualquer $x \in X$, se tem $x \leq a$ (respectivamente, $a \leq x$).
2. Um elemento $a \in P$ diz-se um *elemento maximal* (respectivamente, *elemento minimal*) de X se $a \in X$ e não existe $x \in X$ tal que $a < x$ (respectivamente, $x < a$). O conjunto dos elementos maximais (respectivamente, minimais) de X denota-se por $\text{Max}[X]$ (respectivamente, $\text{Min}[X]$).
3. Um elemento $a \in P$ diz-se *máximo* (respectivamente, *mínimo*) de X se $a \in X$ e a é majorante (respectivamente, *minorante*) de X . O máximo (respectivamente, mínimo) de X denota-se por $\text{max}(X)$ (respectivamente, $\text{min}(X)$).
4. Um elemento $a \in P$ diz-se *supremo* de X se for mínimo do conjunto dos majorantes de X ; escrevemos $a = \text{sup}(X)$. Um elemento $b \in P$ diz-se *ínfimo* de X se for máximo do conjunto dos minorantes de X ; escrevemos $b = \text{inf}(X)$.

É fácil ver que o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de um conjunto, quando existem, são únicos. É também simples justificar que um conjunto parcialmente ordenado finito tem máximo se e só se tiver um único elemento maximal (nesse caso, esse elemento maximal é o seu máximo); uma afirmação análoga pode ser feita a respeito do mínimo.

Lema 1.4. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e não vazio.*

- (a) *Para qualquer $x \in P$, existe $y \in \text{Max}[P]$ tal que $x \leq y$. Em particular, $\text{Max}[P] \neq \emptyset$.*
- (b) *Para qualquer $x \in P$, existe $z \in \text{Min}[P]$ tal que $z \leq x$. Em particular, $\text{Min}[P] \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $x \in P$. Definimos recursivamente os seguintes elementos de P :

- $y_0 = x$;
- para cada $n \in \mathbb{N}$, se y_n é maximal em P , então $y_{n+1} = y_n$;

1. Conceitos Introdutórios

- para cada $n \in \mathbb{N}$, se y_n não é maximal em P , então tome-se para y_{n+1} qualquer elemento de P estritamente maior que y_n .

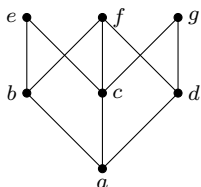
Tem-se então:

$$y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq \dots$$

Uma vez que P é finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$, $y_k = y_m$. Assim, pela forma como os elementos y_n foram construídos, conclui-se que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que y_l é maximal em P . Isto conclui a demonstração de que existe $y \in \text{Max}[P]$ tal que $x \leq y$.

Analogamente se demonstra que existe $z \in \text{Min}[P]$ tal que $z \leq x$. \square

Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



O cpo (P, \leq) tem mínimo igual a a mas não tem máximo; os seus elementos maximais são e , f e g .

O conjunto $\{b, c\}$ tem ínfimo igual a a , mas não tem supremo: o conjunto dos majorantes de $\{b, c\}$ é $\{e, f\}$ e este conjunto não tem mínimo.

Definição 1.5. Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e seja $X \subseteq P$.

1. O conjunto X diz-se uma *cadeia* de P se, para quaisquer $x, y \in X$, se tem $x \leq y$ ou $y \leq x$ (isto é, quaisquer dois elementos de X são comparáveis).
2. O conjunto X diz-se uma *anticadeia* de P se, para quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$, se tem $x \parallel y$ (isto é, quaisquer dois elementos de X são incomparáveis).

É claro que qualquer subconjunto singular de um cpo é uma cadeia e uma anticadeia. Tem-se também que qualquer cadeia finita e não vazia tem máximo e mínimo.

Denotamos por $\mathcal{C}(P)$ o conjunto das cadeias de P e por $\mathcal{A}(P)$ o conjunto das anticadeias de P .

Para cada $S \subseteq P$, os conjuntos $\text{Max}[S]$ e $\text{Min}[S]$ são anticadeias de P , como se pode facilmente verificar.

Definição 1.6. Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. Uma cadeia C em (P, \leq) , com mínimo a e máximo b , diz-se *saturada* se não existir uma cadeia C' de (P, \leq) , com mínimo a e máximo b , que a contenha propriamente.

É fácil ver que uma cadeia finita C é saturada se e só se $C = \{x_1, \dots, x_n\}$, com $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$.

Exemplo. No cpo do exemplo anterior, $\{a, e\}$ é uma cadeia de P e $\{b, c, d\}$ é uma anticadeia de P . A cadeia $\{a, e\}$ não é saturada: está propriamente contida na cadeia $\{a, b, e\}$ (sendo esta última uma cadeia saturada).

Definição 1.7. Um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) diz-se um *reticulado* se, para quaisquer $a, b \in P$, existem $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$ em P .

Pode mostrar-se facilmente por indução que, se (P, \leq) é um reticulado, existem supremo e ínfimo de qualquer subconjunto finito e não vazio de P . Este facto permite mostrar o resultado que se segue.

Lema 1.8. *Seja (P, \leq) um reticulado finito. Então P tem máximo e mínimo.*

Demonstração. O máximo e o mínimo de P são, respectivamente, o supremo e o ínfimo de P , que existem pela finitude de P . \square

Lema 1.9. *Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) conjuntos parcialmente ordenados. Se P é um reticulado e existe um isomorfismo de ordem entre P e Q , então Q é um reticulado.*

Demonstração. Seja $\phi : P \rightarrow Q$ um isomorfismo de ordem. Dados $a, b \in Q$, verifica-se facilmente que

$$\sup\{a, b\} = \phi(\sup\{\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)\}),$$

$$\inf\{a, b\} = \phi(\inf\{\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)\}).$$

Logo, Q é um reticulado. \square

Exemplos.

1. O conjunto parcialmente ordenado referido no exemplo anterior não é um reticulado (porque não existe $\sup(\{b, c\})$, por exemplo).

1. Conceitos Introdutórios

2. Qualquer conjunto totalmente ordenado é um reticulado.
3. Dado um conjunto X , o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um reticulado em que $\sup(\{A, B\}) = A \cup B$ e $\inf(\{A, B\}) = A \cap B$.

Se (P, \leq) é um reticulado, podemos definir duas operações binárias em (P, \leq) , \wedge e \vee , do seguinte modo: dados $x, y \in P$,

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad , \quad x \vee y = \sup\{x, y\}.$$

Estas operações binárias são comutativas e associativas, como se pode verificar facilmente.

Definição 1.10. Seja (P, \leq) um reticulado. Um subconjunto $Q \subseteq P$ diz-se um *sub-reticulado* de P se, para quaisquer $x, y \in Q$, se tem $x \vee y, x \wedge y \in Q$.

O resultado seguinte será ocasionalmente útil.

Lema 1.11. *Seja (P, \leq) um reticulado finito e seja $Q \subseteq P$ tal que:*

- (i) *se $x, y \in Q$, então $x \vee y \in Q$;*
- (ii) *Q tem um elemento mínimo.*

Então (Q, \leq) é um reticulado.

Demonstração. A condição (i) garante que existem supremos em (Q, \leq) . Basta então verificar que existe ínfimo de qualquer par de elementos de Q . Sejam $x, y \in Q$. Seja X o conjunto dos minorantes (em Q) de $\{x, y\}$. X é não vazio porque o elemento mínimo de Q lhe pertence. Como Q é fechado para supremos e X é finito, existe em Q o supremo de X , digamos s . É fácil ver que s é o ínfimo de $\{x, y\}$ em Q . \square

Definição 1.12. Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e seja $Q \subseteq P$.

1. O conjunto Q é um *ideal de ordem* de (P, \leq) se, para quaisquer $x, y \in P$ satisfazendo $x \in Q$ e $y \leq x$, se tem $y \in Q$.
2. O conjunto Q é um *filtro de ordem* de (P, \leq) se, para quaisquer $x, y \in P$ satisfazendo $x \in Q$ e $x \leq y$, se tem $y \in Q$.

Se (P, \leq) , denotamos por $\mathcal{IO}(P)$ o conjunto dos ideais de ordem de (P, \leq) e por $\mathcal{FO}(P)$ o conjunto dos filtros de ordem de (P, \leq) .

Proposição 1.13. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. A interseção e união de dois ideais de ordem (respectivamente, filtros de ordem) de P é um ideal de ordem (respectivamente, filtro de ordem) de P .*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas no caso dos ideais de ordem; o caso dos filtros de ordem é inteiramente análogo. Sejam então I e J ideais de ordem de (P, \leq) . Sejam $x, y \in P$.

Suponhamos que $x \in I \cap J$ e que $y \leq x$. Então, como $x \in I$ e I é um ideal de ordem, $y \in I$. Do mesmo modo se conclui que $y \in J$, pelo que $y \in I \cap J$. Assim, $I \cap J$ é um ideal de ordem.

Suponhamos agora que $x \in I \cup J$ e que $y \leq x$. Se $x \in I$, então vem $y \in I$, pois I é ideal de ordem. Do mesmo modo, se $x \in J$, vem $y \in J$. Assim, tem-se $y \in I \cup J$. Logo, $I \cup J$ é um ideal de ordem. \square

Corolário 1.14. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. Os conjuntos parcialmente ordenados $(\mathcal{IO}(P), \subseteq)$ e $(\mathcal{FO}(P), \subseteq)$ são reticulados. Mais, se $I, J \in \mathcal{IO}(P)$ (ou $I, J \in \mathcal{FO}(P)$), tem-se $I \vee J = I \cup J$ e $I \wedge J = I \cap J$.*

A proposição seguinte, de simples demonstração, apresenta ideais (e filtros) de ordem de tipo particular, que utilizaremos ocasionalmente.

Proposição 1.15. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e seja $S \subseteq P$.*

1. *O conjunto*

$$\downarrow S = \{y \in P : \exists x \in S(y \leq x)\}$$

é um ideal de ordem de P (chamado ideal de ordem gerado por S).

2. *O conjunto*

$$\uparrow S = \{y \in P : \exists x \in S(x \leq y)\}$$

é um filtro de ordem de P (chamado filtro de ordem gerado por S).

Quando $S = \{x\}$, escrevemos $\downarrow x$ em vez de $\downarrow \{x\}$ e $\uparrow x$ em vez de $\uparrow \{x\}$. Tem-se, neste caso:

$$\downarrow x = \{y \in P : y \leq x\},$$

$$\uparrow x = \{y \in P : x \leq y\}.$$

O resultado seguinte caracteriza a relação de cobertura no reticulado dos ideais de ordem de um cpo finito. Este resultado será útil em várias ocasiões posteriores.

Proposição 1.16. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e sejam I e J ideais de ordem de P . As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (a) I cobre J .
- (b) $J = I \setminus \{x\}$, em que $x \in I$.

Demonstração. Suponhamos que I cobre J . Então, tem-se $J \subsetneq I$, pelo que $I \setminus J \neq \emptyset$.

Seja $x \in I \setminus J$ um elemento minimal de $I \setminus J$. Vamos ver que $J \cup \{x\}$ é um ideal de ordem de P . Sejam $a, b \in P$ tais que $a \leq b$ e $b \in J \cup \{x\}$. Se $b \in J$, então $a \in J$, pois J é ideal de ordem. Se $b \notin J$, então $b = x \in I$. Como I é ideal de ordem, vem $a \in I$. Se $a \in J$, o argumento fica concluído. Se $a \in I \setminus J$, tem-se $a \leq b = x$ e a minimalidade de x permite concluir que $a = x = b$. Assim, $a \in J \cup \{x\}$. Conclui-se que $J \cup \{x\}$ é um ideal de ordem de P .

Assim, tem-se $J \subsetneq J \cup \{x\} \subseteq I$. Como I cobre J , vem $I = J \cup \{x\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $J = I \setminus \{x\}$, em que x é um elemento maximal de I . Logo, $J \subseteq I$. Como $|I \setminus J| = 1$, não pode existir um ideal de ordem L tal que $J \subsetneq L \subsetneq I$. Assim, I cobre J . \square

A proposição anterior permite concluir que o reticulado dos ideais de ordem de um conjunto parcialmente ordenado finito admite uma graduação, de acordo com a definição seguinte.

Definição 1.17. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado com mínimo, que denotamos por 0 . Dizemos que (P, \leq) é um *conjunto parcialmente ordenado graduado* se, para cada $x \in P$, todas as cadeias saturadas com mínimo 0 e máximo x têm a mesma cardinalidade. Dado um elemento $x \in P$, a *graduação* ou *nível* de x , que denotamos $r(x)$, é a cardinalidade de uma cadeia saturada de P com mínimo 0 e máximo x . Para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$A_k = \{x \in P : r(x) = k\}$$

diz-se o *conjunto de nível* k .

Proposição 1.18. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito. O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{IO}(P), \subseteq)$ é graduado e tem-se, para cada $I \in \mathcal{IO}(P)$, $r(I) = |I|$.*

Demonstração. Seja I um ideal de ordem de (P, \leq) . Seja C uma cadeia saturada em $\mathcal{IO}(P)$, com mínimo \emptyset e máximo I . Então $C = \{I_0, \dots, I_n\}$, em que

$$\emptyset = I_0 \prec I_1 \prec \dots \prec I_n = I.$$

Pela proposição anterior, tem-se $|I_i| = i$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $|C| = |I| = n$. \square

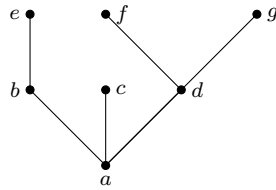
Mais geralmente, prova-se que o conjunto dos ideais de ordem finitos de um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) (não necessariamente finito) é graduado, em que o nível de um ideal de ordem é a sua cardinalidade. A demonstração é uma adaptação simples da demonstração anterior.

Utilizaremos frequentemente a seguinte notação:

$$[n] = \{i \in \mathbb{N} : i \leq n\} = \{1, \dots, n\}.$$

Definição 1.19. Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito tal que $|P| = n$. Uma *extensão linear* de (P, \leq) é uma aplicação isótoma e bijectiva $\varphi : P \rightarrow [n]$.

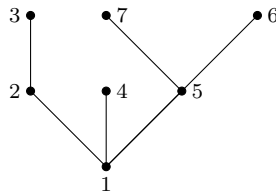
Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



A aplicação $\varphi : P \rightarrow [7]$ definida por

$$a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 4, d \mapsto 5, e \mapsto 3, f \mapsto 7, g \mapsto 6,$$

é uma extensão linear de (P, \leq) . Podemos visualizar esta extensão linear no diagrama de Hasse de (P, \leq) , rotulando os vértices do diagrama com as imagens dos respectivos elementos por φ . Verifica-se assim facilmente que elementos maiores recebem “rótulos” maiores por φ .



O resultado seguinte relaciona a noção de extensão linear com a noção de cadeia saturada (no reticulado dos ideais de ordem).

Proposição 1.20. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito. Existe uma bijecção entre o conjunto das extensões lineares de (P, \leq) e o conjunto das cadeias saturadas de $(\mathcal{I}\mathcal{O}(P), \subseteq)$ com mínimo \emptyset e máximo P .*

Demonstração. Suponhamos que $|P| = n$. Seja $\varphi : P \rightarrow [n]$ uma extensão linear de P . Para cada $k \in [n]$, defina-se $I_k = \varphi^{-1}([k])$; ponha-se ainda $I_0 = \emptyset$. É fácil ver que, para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, I_k é um ideal de ordem de P de cardinalidade k e que

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n.$$

É claro que I_1 cobre I_0 . Seja $k \in [n - 1]$. Tem-se $I_k = I_{k+1} \setminus \{x\}$, em que $\varphi(x) = k + 1$. Pela proposição 1.16, tem-se que

$$I_0 \prec I_1 \prec \dots \prec I_n.$$

Assim, $\{I_k : k \in \{0, \dots, n\}\}$ é uma cadeia saturada de ideais de ordem de P , com mínimo \emptyset e máximo $I_n = P$. Denotemos por C_φ esta cadeia.

Seja agora C uma cadeia saturada de ideais de ordem de P , com mínimo \emptyset e máximo P . Assim, $C = \{I_0, \dots, I_m\}$, em que

$$\emptyset = I_0 \prec I_1 \prec \dots \prec I_m = P.$$

Pela proposição 1.16, tem-se necessariamente $m = n$ e existem elementos $x_1, \dots, x_n \in P$ tais que, para cada $k \in [n]$, $I_k = \{x_1, \dots, x_k\}$ e x_k é um elemento maximal de I_k . Defina-se a aplicação $\varphi_C : P \rightarrow [n]$ como $\varphi_C(x_k) = k$, para qualquer $k \in [n]$. É fácil ver que φ_C é uma extensão linear de P .

Denotemos por \mathcal{E} o conjunto das extensões lineares de P e por \mathcal{C} o conjunto das cadeias saturadas de ideais de ordem de P , com mínimo \emptyset e máximo P . Definam-se as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{C} \\ \varphi &\mapsto C_\varphi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{E} \\ C &\mapsto \varphi_C \end{aligned}$$

É fácil verificar, tendo em conta as construções anteriores, que as aplicações F e G são inversas uma da outra, o que conclui a demonstração. \square

Vamos agora definir uma relação de ordem no produto cartesiano de dois conjuntos parcialmente ordenados. A proposição seguinte demonstra-se facilmente.

Proposição 1.21. *Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) conjuntos parcialmente ordenados. Defina-se em $P \times Q$ a relação binária \leq do seguinte modo: dados $(a, b), (c, d) \in P \times Q$,*

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq_P c \text{ e } b \leq_Q d.$$

Então, $(P \times Q, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 1.22. *Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) conjuntos parcialmente ordenados. O produto de (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) é o conjunto parcialmente ordenado $(P \times Q, \leq)$, em que a relação de ordem parcial é a introduzida na proposição anterior. A esta relação de ordem parcial em $P \times Q$ chamamos *ordem parcial produto* das relações de ordem parcial \leq_P e \leq_Q .*

Proposição 1.23. *Sejam (P, \leq_P) e (Q, \leq_Q) reticulados. Então, o produto de P e Q , $(P \times Q, \leq)$, é um reticulado, no qual*

$$(a, b) \vee (c, d) = (a \vee c, b \vee d),$$

$$(a, b) \wedge (c, d) = (a \wedge c, b \wedge d).$$

Uma outra construção que nos será ocasionalmente útil é a do conjunto parcialmente ordenado dual de um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) . O lema seguinte é de muito fácil demonstração.

Lema 1.24. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. A relação binária \leq^* em P definida por, para quaisquer $a, b \in P$,*

$$a \leq^* b \text{ se e só se } b \leq a$$

é uma relação de ordem parcial em P .

Definição 1.25. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. O conjunto parcialmente ordenado dual de (P, \leq) é o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq^*) , em que a relação \leq^* é a definida no lema anterior.*

O seguinte resultado ser-nos-á útil no capítulo 4; a sua demonstração é uma verificação simples.

Proposição 1.26. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e seja (P, \leq^*) o seu conjunto parcialmente ordenado dual. Seja $X \subseteq P$. Então, X é uma cadeia (respectivamente, anticadeia) de (P, \leq) se e só se X é uma cadeia (respectivamente, anticadeia) de (P, \leq^*) .*

Para concluir esta secção, vamos apresentar uma construção que utilizaremos no último capítulo.

Proposição 1.27. *Seja (P, \leq_P) um conjunto parcialmente ordenado, seja $x \in P$ e seja (C, \leq_C) um conjunto totalmente ordenado tal que $P \cap C = \emptyset$. Defina-se a seguinte relação binária \leq em $(P \setminus \{x\}) \cup C$: dados $a, b \in (P \setminus \{x\}) \cup C$,*

- (i) *se $a, b \in P$, então $a \leq b$ se e só se $a \leq_P b$;*
- (ii) *se $a, b \in C$, então $a \leq b$ se e só se $a \leq_C b$;*
- (iii) *se $a \in P$ e $b \in C$, então:*

- *$a \leq b$ se e só se $a \leq x$;*
- *$b \leq a$ se e só se $x \leq a$.*

A relação \leq é uma relação de ordem parcial em $(P \setminus \{x\}) \cup C$.

Demonstração. É claro que a relação \leq é reflexiva.

Sejam $a, b \in (P \setminus \{x\}) \cup C$ tais que $a \leq b$ e $b \leq a$. Se $a, b \in P$ ou $a, b \in C$, é claro que $a = b$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a \in P$ e $b \in C$. Neste caso, tem-se $a \leq x$ e $x \leq a$, pelo que $a = x$, o que é absurdo. Assim, \leq é anti-simétrica.

Sejam $a, b, c \in (P \setminus \{x\}) \cup C$ tais que $a \leq b$ e $b \leq c$. Se $a, b, c \in P$ ou $a, b, c \in C$, então é claro que $a \leq c$. Os casos em que dois dos elementos a, b e c estão em P e o outro está em C são todos bastante semelhantes entre si, por isso analisaremos apenas o caso em que $a, c \in P$ e $b \in C$. Neste caso, $a \leq x$ e $x \leq c$, pelo que $a \leq c$.

Resta ver o caso em que dois dos elementos a, b e c estão em C e o outro está em P . Aqui há vários casos a considerar. Se $a \in P$ ou $c \in P$, é fácil concluir que $a \leq c$. No caso em que $b \in P$, tem-se $x \leq b$ e $b \leq x$, pelo que $b = x$, o que é absurdo. Isto conclui a demonstração. \square

Definição 1.28. *Seja (P, \leq_P) um conjunto parcialmente ordenado finito, seja $x \in P$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos a *expansão de P em x por n elementos*, $(E_{x,n}(P), \leq)$, do seguinte modo:*

- (i) *$E_{x,n}(P) = (P \setminus \{x\}) \cup C$, em que (C, \leq_C) é um conjunto totalmente ordenado com n elementos tal que $C \cap P = \emptyset$.*

(ii) A relação \leq é a definida na proposição anterior.

Note-se que a expansão de P em x por n elementos não está completamente bem definida, na medida em que a definição depende da cadeia C escolhida. No entanto, é fácil verificar que a expansão de P em x por n elementos está bem definida a menos de isomorfismo de ordem, pelo que não nos iremos preocupar com este detalhe.

Tem-se o seguinte resultado, cuja demonstração é bastante simples.

Proposição 1.29. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito, sejam $x, y \in P$ tais que $x \neq y$ e sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Tem-se que*

$$E_{x,n}(E_{y,m}(P)) \simeq E_{y,m}(E_{x,n}(P)).$$

1.2 Partições e quadros de Young

Nesta secção apresentamos alguns conceitos básicos sobre partições de inteiros e quadros de Young.

Definição 1.30. Seja $n \in \mathbb{N}_0$. Uma *partição* de n é uma sucessão $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ de números inteiros não negativos que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) para qualquer $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$;
- (ii) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, se $i \geq k$, então $\lambda_i = 0$;
- (iii) $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i = n$.

Se λ é uma partição de n , escrevemos $\lambda \vdash n$.

Se $\lambda \vdash n$ e k é um número natural tal que $\lambda_i = 0$ se $i > k$, também denotamos a partição λ pela sequência finita $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Aos termos não nulos de λ chamamos *partes*; o número de partes de uma partição diz-se o seu *comprimento*, que denotamos por $l(\lambda)$.

Existe uma única partição de 0, que denotamos por \emptyset e designamos *partição vazia*.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por \mathcal{P}_n o conjunto das partições de n , que é claramente um conjunto finito. Denotamos por \mathcal{P} o conjunto de todas as partições, ou seja,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}_n.$$

Lema 1.31. *Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. As sucessões*

$$\lambda \cap \mu = (\min\{\lambda_i, \mu_i\})_{i \in \mathbb{N}}, \lambda \cup \mu = (\max\{\lambda_i, \mu_i\})_{i \in \mathbb{N}}$$

são partições.

Demonstração. É claro que $\lambda \cap \mu$ e $\lambda \cup \mu$ são sucessões de inteiros não negativos.

Tem-se, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq \min\{\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}\}, \mu_i \geq \mu_{i+1} \geq \min\{\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}\}.$$

Logo, $\min\{\lambda_i, \mu_i\} \geq \min\{\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}\}$.

Tem-se também, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\lambda_i, \mu_i\} \geq \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \max\{\lambda_i, \mu_i\} \geq \mu_i \geq \mu_{i+1}.$$

Logo, $\max\{\lambda_i, \mu_i\} \geq \min\{\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}\}$.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\lambda_i = 0$ para $i \geq m$ e $\mu_i = 0$ para $i \geq n$. Assim, se $i \geq \max\{m, n\}$, tem-se

$$\min\{\lambda_i, \mu_i\} = \max\{\lambda_i, \mu_i\} = 0.$$

Assim, $\lambda \cap \mu, \lambda \cup \mu \in \mathcal{P}$. □

Definição 1.32. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ uma partição de n , com $\lambda_k \neq 0$. O *diagrama de Young* de λ é o subconjunto $Y(\lambda)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido por:

$$Y(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq \lambda_j\}.$$

Temos $|Y(\lambda)| = n$.

O resultado seguinte caracteriza os subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que são diagramas de Young. Consideramos em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a ordem parcial produto da ordem usual em \mathbb{N} .

Proposição 1.33. *Um subconjunto Y de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um diagrama de Young se e só se Y é um ideal de ordem finito do conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$.*

Demonstração. Seja λ uma partição. É claro que o conjunto $Y(\lambda)$ é finito e verifica-se facilmente que se trata de um ideal de ordem de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$.

Seja agora Y um ideal de ordem finito de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, defina-se o seguinte subconjunto de Y :

$$L_i = Y \cap \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : l = i\}.$$

Tem-se $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$. Uma vez que Y é ideal de ordem, conclui-se facilmente que, para cada i ,

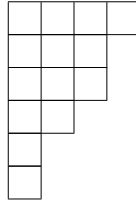
$$L_i = \{(1, i), \dots, (k_i, i)\} \text{ ou } L_i = \emptyset$$

para algum $k_i \in \mathbb{N}$. Defina-se então, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i = |L_i|$. Tem-se, portanto, $\lambda_i = k_i$, no caso de $L_i \neq \emptyset$ e $\lambda_i = 0$, no caso de $L_i = \emptyset$. Vejamos que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ é uma partição.

Seja $i \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\lambda_i < \lambda_{i+1}$. Então, tendo em conta a discussão anterior, tem-se $(\lambda_{i+1}, i+1) \in Y$. Como Y é ideal de ordem, $(\lambda_{i+1}, i) \in Y$, o que é absurdo. Assim, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Uma vez que Y é finito, é claro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k = 0$ para qualquer $k \geq m$. Assim, λ é uma partição.

Do exposto anteriormente é fácil concluir que se tem $Y = Y(\lambda)$, pelo que Y é um diagrama de Young, o que conclui a demonstração. \square

O diagrama de Young de λ pode ser representado geometricamente por um arranjo de quadrículas alinhadas à esquerda, dispostas em linhas e colunas, tal que na linha i existam λ_i caixas. Por exemplo, o diagrama de Young da partição $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1, 1) \vdash 14$ encontra-se representado na figura seguinte¹:



Nesta representação, a caixa (i, j) encontra-se na linha i e coluna j .

Se λ é uma partição de n , definimos a linha i de $Y(\lambda)$ como sendo o conjunto

$$L_i(\lambda) = Y(\lambda) \cap \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : l = i\};$$

do mesmo modo, definimos a coluna j de $Y(\lambda)$ como sendo o conjunto

$$C_j(\lambda) = Y(\lambda) \cap \{(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k = j\}.$$

É claro que o conjunto das linhas de $Y(\lambda)$ forma uma partição de $Y(\lambda)$, bem como o seu conjunto das colunas. Tem-se ainda que:

$$|L_i(\lambda)| = \lambda_i, |C_j(\lambda)| = |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq j\}|.$$

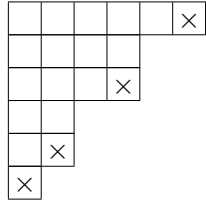
Aos elementos do diagrama de Young de uma partição chamamos usualmente caixas, tendo em conta a representação gráfica descrita anteriormente.

¹Tendo em conta a nossa definição de diagrama de Young, o diagrama apresentado na figura deveria ter as linhas dispostas na ordem inversa, ficando a linha com mais caixas em baixo. Apesar de esta não ser a representação pictórica mais fiel da definição dada, vamos utilizá-la por questões de conveniência.

Definição 1.34. Seja λ uma partição.

1. Um *canto interior* de $Y(\lambda)$ é um elemento $(i, j) \in Y(\lambda)$ tal que $Y(\lambda) \setminus \{(i, j)\}$ é um diagrama de Young.
2. Um *canto exterior* de $Y(\lambda)$ é um elemento $(i, j) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus Y(\lambda)$ tal que $Y(\lambda) \cup \{(i, j)\}$ é um diagrama de Young.

Por exemplo, se $\lambda = (6, 4, 4, 2, 2, 1)$, os cantos interiores de $Y(\lambda)$ são as caixas assinaladas com \times na figura seguinte:



Lema 1.35. *Seja λ uma partição. As afirmações seguintes são equivalentes:*

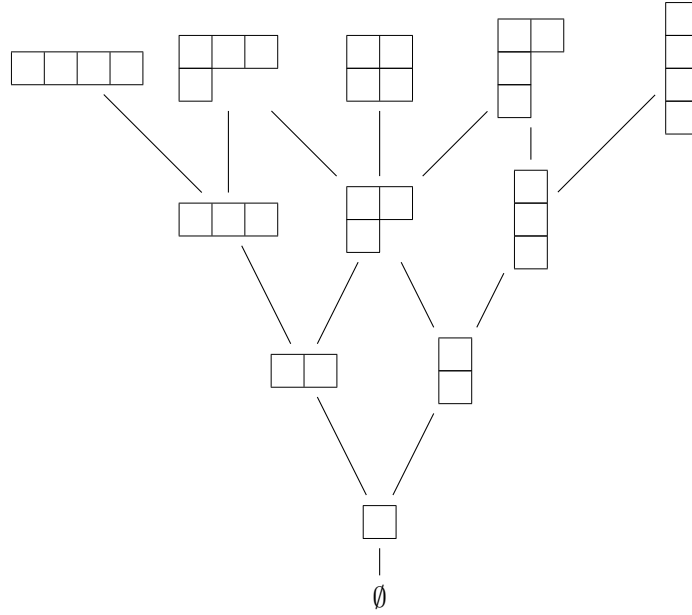
- (a) (i, j) é um canto interior (respectivamente, exterior) de $Y(\lambda)$.
- (b) (i, j) é um elemento maximal (respectivamente, minimal) de $(Y(\lambda), \leq)$ (respectivamente, $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus Y(\lambda)$).

Demonstração. Este resultado é consequência da proposição 1.16 e da proposição 1.33. □

Denotamos por \mathbb{Y} o conjunto de todos os diagramas de Young:

$$\mathbb{Y} = \{Y(\lambda) : \lambda \in \mathcal{P}\}.$$

Com a relação de inclusão de conjuntos, \mathbb{Y} é um conjunto parcialmente ordenado. A figura seguinte representa parte do diagrama de Hasse de \mathbb{Y} .



Proposição 1.36. *O conjunto parcialmente ordenado (\mathbb{Y}, \subseteq) é um reticulado.*

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. Tem-se

$$\begin{aligned} Y(\lambda) \cap Y(\mu) &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq \lambda_j \text{ e } i \leq \mu_j\} \\ &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq \min\{\lambda_j, \mu_j\}\} \\ &= Y(\lambda \cap \mu) \end{aligned}$$

Analogamente, $Y(\lambda) \cup Y(\mu) = Y(\lambda \cup \mu)$.

Assim, (\mathbb{Y}, \subseteq) é um reticulado com intersecções e uniões como ínfimos e supremos, respectivamente. \square

Ao reticulado (\mathbb{Y}, \subseteq) chamamos *reticulado de Young*.

Tal como o reticulado dos ideais de ordem de um conjunto parcialmente ordenado finito, o reticulado (\mathbb{Y}, \subseteq) é graduado.

Proposição 1.37. *O conjunto parcialmente ordenado finito (\mathbb{Y}, \subseteq) é graduado. Mais, tem-se, para cada $Y \in \mathbb{Y}$, $r(Y) = |Y|$.*

Demonstração. Este resultado é consequência da proposição 1.33 e da observação feita após a proposição 1.18. \square

1. Conceitos Introdutórios

Lema 1.38. *Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja λ uma partição de n . Defina-se, para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mu_k = |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}|.$$

Então $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ é uma partição de n .

Demonstração. É claro que $\mu_k \in \mathbb{N}_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k + 1\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}.$$

Assim,

$$\mu_{k+1} = |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k + 1\}| \leq |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}| = \mu_k.$$

Tem-se que, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \leq \lambda_1$. Seja $m = \lambda_1 + 1$. Então, se $k \geq m$,

$$\mu_k = |\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i \geq k\}| = |\emptyset| = 0.$$

Isto mostra que μ é uma partição do inteiro $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j$. Resta ver que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j = n$. Mas $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j$ é simplesmente a soma das cardinalidades das colunas do diagrama de Young de λ , ou seja, a cardinalidade de $Y(\lambda)$. Logo,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j = n.$$

Conclui-se que μ é uma partição de n . □

No lema anterior, note-se que μ_k é a igual ao número de caixas na coluna k do diagrama de Young de λ .

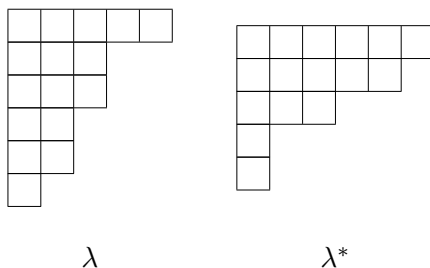
A partição definida no lema anterior diz-se a *partição conjugada* de λ , e denota-se λ^* .

O diagrama de Young de λ^* pode ser obtido por “transposição” do diagrama de Young de λ :

$$Y(\lambda^*) = \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (i, j) \in Y(\lambda)\}.$$

É claro que $(\lambda^*)^* = \lambda$.

Por exemplo, a partição conjugada da partição $\lambda = (5, 3, 3, 2, 2, 1) \vdash 14$ é $\lambda^* = (6, 5, 3, 1, 1)$; os respectivos diagramas de Young encontram-se representados na figura seguinte:



O resultado que se segue será útil no capítulo 3. Uma análise cuidada do diagrama de Young das partições envolvidas permite justificá-lo.

Lema 1.39. *Seja λ uma partição. Para qualquer $h \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{i=1}^h \lambda_i^* = h\lambda_h^* + \sum_{j \geq \lambda_h^* + 1} \lambda_j.$$

Mais à frente ser-nos-á útil uma generalização da noção de diagrama de Young que passamos agora a definir.

Definição 1.40. *Sejam λ e μ partições tais que $Y(\mu) \subseteq Y(\lambda)$. O *diagrama de Young enviesado* correspondente a λ e μ é o seguinte subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:*

$$Y(\lambda \setminus \mu) = Y(\lambda) \setminus Y(\mu).$$

É claro que um diagrama de Young enviesado é um diagrama de Young se e só se $Y(\mu) = \emptyset$ ou $\mu = \lambda$ (neste último caso, $Y(\lambda \setminus \mu) = \emptyset$).

Definição 1.41. *Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja $\lambda \vdash n$. Um *quadro de Young* de forma λ é uma aplicação de $Y(\lambda)$ em \mathbb{N} .*

Um quadro de Young P de forma λ pode ser visualizado preenchendo as caixas do diagrama de Young de λ com números. Por exemplo, o seguinte é um quadro de Young com forma $\lambda = (4, 3, 3, 1)$:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 8 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 5 & \\ \hline 9 & 3 & 2 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} .$$

Tendo em conta esta representação, referir-nos-emos muitas vezes ao número $P(i, j)$ como a entrada (i, j) de P , motivados pela terminologia usada para matrizes.

Denotamos o conjunto dos quadros de Young de forma λ por Q_λ . Se P é um quadro de Young de forma λ , escrevemos $\text{sh}(P) = \lambda$.

A definição de quadro de Young pode ser facilmente adaptada para o caso dos quadros de Young enviesados: se λ e μ são partições com $Y(\mu) \subseteq Y(\lambda)$, então um *quadro de Young enviesado* de forma $\lambda \setminus \mu$ é uma aplicação de $Y(\lambda \setminus \mu)$

em \mathbb{N} . Denotamos o conjunto dos quadros de Young enviesados de forma $\lambda \setminus \mu$ por $Q_{\lambda \setminus \mu}$.

Nos próximos capítulos, consideraremos apenas os tipos de quadros de Young apresentados na definição seguinte.

Definição 1.42. Seja λ uma partição de n e seja P um quadro de Young de forma λ .

1. P diz-se *crescente nas linhas* se

$$\forall (i, j), (i, k) \in Y(\lambda) (j < k \Rightarrow P(i, j) \leq P(i, k)).$$

2. P diz-se *crescente nas colunas* se

$$\forall (i, j), (k, j) \in Y(\lambda) (i < k \Rightarrow P(i, j) \leq P(k, j)).$$

3. P diz-se *estritamente crescente nas linhas* se

$$\forall (i, j), (i, k) \in Y(\lambda) (j < k \Rightarrow P(i, j) < P(i, k)).$$

4. P diz-se *estritamente crescente nas colunas* se

$$\forall (i, j), (k, j) \in Y(\lambda) (i < k \Rightarrow P(i, j) < P(k, j)).$$

5. P diz-se um *quadro de Young semistandard* se for crescente nas linhas e estritamente crescente nas colunas.

6. P diz-se um *quadro de Young standard* se

- (a) P é estritamente crescente nas linhas e nas colunas;
- (b) As entradas de P são os elementos do conjunto $[n]$.

É claro que um quadro de Young standard é semistandard.

Denotamos por:

- QS_λ o conjunto dos quadros de Young standard de forma λ ;
- $t_\lambda = |QS_\lambda|$;
- QSS_λ o conjunto dos quadros de Young semistandard de forma λ .

As definições anteriores podem ser facilmente adaptadas para o caso dos quadros de Young enviesados.

Exemplos.

1. Os quadros de Young seguintes são semistandard (mas não standard):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & & & \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & 4 & 5 & & \\ \hline \end{array}.$$

2. Os quadros de Young seguintes são standard:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & 8 & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}.$$

3. Os quadros de Young standard de forma $\lambda = (3, 2)$ são:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

4. O seguinte quadro de Young enviesado é standard:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Dado um quadro de Young de forma λ , podemos obter um quadro de Young de forma λ^* por “transposição”. A definição seguinte formaliza esta ideia.

Definição 1.43. Seja λ uma partição de n e seja P um quadro de Young de forma λ . O *quadro de Young transposto de P* é o quadro de Young P^\top de forma λ^* definido por: para qualquer $(i, j) \in Y(\lambda^*)$, $P^\top(i, j) = P(j, i)$.

Por exemplo, o quadro de Young transposto do seguinte quadro de Young P

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 9 & 4 & & \\ \hline 8 & 9 & & & \\ \hline \end{array}$$

é o quadro de Young

$$P^\top = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 9 & 9 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 1 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}.$$

É fácil ver que o transposto de um quadro de Young standard é um quadro de Young standard, mas o mesmo não acontece, em geral, com os quadros de Young semistandard.

Para concluir esta secção, apresentamos dois resultados que relacionam quadros de Young standard e cadeias saturadas no reticulado de Young.

Proposição 1.44. *Seja λ uma partição. Existe uma bijecção entre o conjunto dos quadros de Young standard de forma λ e o conjunto das cadeias saturadas de diagramas de Young, com mínimo \emptyset e máximo λ .*

Demonstração. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado $(Y(\lambda), \leq)$, em que a relação de ordem \leq é a restrição da ordem parcial produto em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. É fácil ver que os ideais de ordem de $(Y(\lambda), \leq)$ são os ideais de ordem de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contidos em $Y(\lambda)$, necessariamente finitos. Portanto, pela proposição 1.33, os ideais de ordem de $(Y(\lambda), \leq)$ são os diagramas de Young contidos em $Y(\lambda)$. Assim, o reticulado dos ideais de ordem de $(Y(\lambda), \leq)$ é o ideal de ordem de (\mathbb{Y}, \subseteq) gerado por $Y(\lambda)$.

A definição de quadro de Young standard implica que um quadro de Young standard P de forma λ é uma extensão linear de $(Y(\lambda), \leq)$. Esta observação, juntamente com as observações anteriores, permite concluir, pela proposição 1.20 que existe uma bijecção entre o conjunto dos quadros de Young standard de forma λ e o conjunto das cadeias saturadas de ideais de ordem de $(Y(\lambda), \leq)$. Isto é, existe uma bijecção entre o conjunto dos quadros de Young standard de forma λ e o conjunto das cadeias saturadas de diagramas de Young, com mínimo \emptyset e máximo λ . \square

Proposição 1.45. *Sejam λ e μ partições, com $\mu \subseteq \lambda$. Existe uma bijecção entre o conjunto dos quadros de Young enviesados standard de forma $\lambda \setminus \mu$ e o conjunto das cadeias saturadas de diagramas de Young, com mínimo μ e máximo λ .*

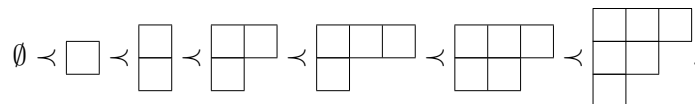
Demonstração. Para demonstrar este resultado basta adaptar o argumento utilizado na demonstração da proposição anterior, considerando os ideais de ordem finitos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ contidos em $Y(\lambda)$ e que contêm $Y(\mu)$. \square

Exemplo.

1. Consideremos o quadro de Young standard

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}.$$

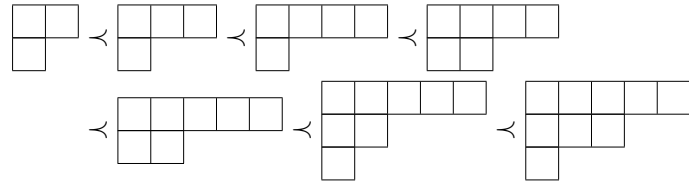
O quadro P corresponde à seguinte cadeia saturada de diagramas de Young:



2. Consideremos o quadro de Young enviesado standard

$$Q = \begin{array}{cccc} & & 1 & 2 & 4 \\ & & 3 & 6 & \\ 5 & & & & \end{array} .$$

O quadro Q corresponde à seguinte cadeia saturada de diagramas de Young:



CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS E PARTIÇÕES

O objectivo fundamental deste capítulo é a demonstração do teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos, de C. Greene ([13]). Este teorema relaciona as cardinalidades de certas uniões de cadeias e certas uniões de anticadeias de um conjunto parcialmente ordenado finito (P, \leq) de um modo surpreendente, associando a (P, \leq) um diagrama de Young.

Para além da demonstração do teorema da dualidade, iremos também analisar as suas consequências mais relevantes para o estudo dos diagramas de crescimento, levado a cabo no próximo capítulo. Entre estas consequências encontra-se uma forma de determinar o diagrama de Young de um conjunto parcialmente ordenado finito de um modo recursivo, determinando sucessivamente os diagramas de Young dos seus ideais de ordem. Iremos também apresentar dois resultados importantes sobre localização de caixas em diagramas de Young de conjuntos parcialmente ordenados, que serão utilizados no último capítulo.

Ao longo deste capítulo, P denotará sempre um conjunto parcialmente ordenado finito.

2.1 Teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos

O teorema de Dilworth ([7]) estabelece uma relação entre as anticadeias de P com cardinalidade máxima e as partições de P num número mínimo de cadeias. O seu dual foi demonstrado por Mirsky em 1971 ([18]).

Teorema 2.1 (Dilworth, [7]). *A cardinalidade máxima de uma anticadeia de P é igual ao número mínimo de cadeias em que P se pode particionar.*

Teorema 2.2 (Mirsky, [18]). *A cardinalidade máxima de uma cadeia de P é igual ao número mínimo de anticadeias em que P se pode particionar.*

O teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos, que enunciaremos de seguida, baseia-se em resultados que generalizam os teoremas de Dilworth e Mirsky.

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, denotamos por:

- $d_k(P)$ a cardinalidade máxima de uma união de k anticadeias de P ;
- $\hat{d}_k(P)$ a cardinalidade máxima de uma união de k cadeias de P .

É claro que $d_0(P) = \hat{d}_0(P) = 0$ e que $d_1(P)$ (respectivamente, $\hat{d}_1(P)$) é apenas a cardinalidade máxima de uma anticadeia (respectivamente, cadeia) do conjunto parcialmente ordenado P . É também fácil ver que as sucessões $(d_k(P))_{k \in \mathbb{N}_0}$ e $(\hat{d}_k(P))_{k \in \mathbb{N}_0}$ são crescentes e que, se $|P| = n$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$, $d_k(P) = \hat{d}_k(P) = n$.

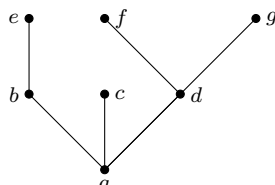
Defina-se agora, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = \hat{d}_k(P) - \hat{d}_{k-1}(P) \text{ e } \tilde{\lambda}_k = d_k(P) - d_{k-1}(P).$$

Teorema 2.3 (Teorema da dualidade para cpo's finitos, Greene, [13]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito de cardinalidade n . As sucessões $\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ são partições de n e $\tilde{\lambda} = \lambda^*$.*

Tendo em conta o teorema da dualidade, designamos a sucessão λ por *partição das cadeias de P* e a sucessão $\tilde{\lambda}$ por *partição das anticadeias de P* ; denotamo-las também, respectivamente, por $\lambda(P)$ e $\tilde{\lambda}(P)$. Ao diagrama de Young $Y(\lambda(P))$ (respectivamente, $Y(\tilde{\lambda}(P))$) chamamos *diagrama de Young das cadeias de P* (respectivamente, *diagrama de Young das anticadeias de P*). Sempre que nos referirmos ao *diagrama de Young de P* , estamos a referir-nos ao diagrama de Young das cadeias de P , salvo menção em contrário.

Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Tem-se, para este conjunto parcialmente ordenado:

$$\begin{array}{ll}
 \hat{d}_0(P) = 0 & d_0(P) = 0 \\
 \hat{d}_1(P) = 3 & d_1(P) = 4 \\
 \hat{d}_2(P) = 5 & d_2(P) = 6 \\
 \hat{d}_3(P) = 6 & d_3(P) = 7 \\
 \hat{d}_4(P) = 7 & d_4(P) = 7 \\
 \hat{d}_5(P) = 7 & d_5(P) = 7 \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Portanto, $\lambda(P) = (3, 2, 1, 1)$ e $\tilde{\lambda}(P) = (4, 2, 1)$. Os diagramas de Young destas partições são

$$Y(\lambda(P)) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad Y(\tilde{\lambda}(P)) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}.$$

O resto da secção é dedicado à demonstração do teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos. Baseamo-nos, ao longo da secção, nos artigos [13] e [14] de Greene e Kleitman.

2.1.1 O reticulado das k -famílias

Comecemos por definir uma relação de ordem parcial no conjunto das anticadeias de um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) . Verificaremos que esta estrutura é de facto uma estrutura de reticulado, que será posteriormente generalizada para o contexto das k -famílias de P , subconjuntos de P que generalizam o conceito de anticadeia.

Recordemos que $\mathcal{A}(P)$ denota o conjunto das anticadeias de P .

Definição 2.4. Definimos em $\mathcal{A}(P)$ a seguinte relação binária \leq : dados $A, B \in \mathcal{A}(P)$, $A \leq B$ se e só se, para qualquer $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $a \leq b$.

É fácil verificar que a relação definida anteriormente é uma relação de ordem parcial. Para verificar que $(\mathcal{A}(P), \leq)$ é um reticulado, basta, pelo lema 1.9, encontrar um isomorfismo de ordem entre este conjunto parcialmente ordenado e um reticulado. O resultado seguinte estabelece um tal isomorfismo de ordem, entre $(\mathcal{A}(P), \leq)$ e $(\mathcal{IO}(P), \subseteq)$, o conjunto dos ideais de ordem de P .

Proposição 2.5. *Consideremos os cpo's $(\mathcal{A}(P), \leq)$ e $(\mathcal{IO}(P), \subseteq)$. As aplicações seguintes são isomorfismos de ordem inversos um do outro entre estes conjuntos parcialmente ordenados:*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}(P) &\rightarrow \mathcal{IO}(P) \\ A &\mapsto \downarrow A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{IO}(P) &\rightarrow \mathcal{A}(P) \\ I &\mapsto \text{Max}[I] \end{aligned}$$

Demonstração. É fácil provar que φ é um mergulho de ordem. De facto, dados $A, B \in \mathcal{A}(P)$, temos que $A \leq B$ se e só se $\downarrow A \subseteq \downarrow B$.

Provemos que ψ é um mergulho de ordem. Sejam $I, J \in \mathcal{IO}(P)$. Suponhamos que $I \subseteq J$. Seja $x \in \text{Max}[I]$ e seja $y \in J$ tal que $x \leq y$. Pelo lema 1.4, existe $z \in \text{Max}[J]$ tal que $y \leq z$. Assim, $x \leq z$. Portanto, $\text{Max}[I] \leq \text{Max}[J]$. Suponhamos agora que $\text{Max}[I] \leq \text{Max}[J]$. Seja $x \in I$. Pelo lema 1.4, existe $y \in \text{Max}[I]$ tal que $x \leq y$. Como $\text{Max}[I] \leq \text{Max}[J]$, existe $z \in \text{Max}[J]$ tal que $y \leq z$. Assim, $x \leq z$. Como J é ideal de ordem, $x \in J$. Assim, $I \subseteq J$. Provámos que $I \subseteq J$ se e só se $\text{Max}[I] \leq \text{Max}[J]$. Logo, ψ é um mergulho de ordem.

Basta agora provar que as aplicações φ e ψ são inversas uma da outra.

Começemos por ver que $\text{Max}[\downarrow A] = A$, para qualquer anticadeia A de P . Seja então A uma anticadeia de P . Seja $x \in A$ e seja $y \in \downarrow A$ tal que $x \leq y$. Existe $z \in A$ tal que $y \leq z$. Assim, $x \leq z$. Como A é anticadeia, vem $x = y = z$. Logo, x é elemento maximal de $\downarrow A$. Seja agora x um elemento maximal de $\downarrow A$. Existe $y \in A$ tal que $x \leq y$. Pela maximalidade de x , $x = y$, pelo que $x \in A$. Assim, $A = \text{Max}[\downarrow A]$.

Resta ver que $\downarrow \text{Max}[I] = I$, para qualquer ideal de ordem I de P . Seja I um ideal de ordem de P . Se $x \in I$, pelo lema 1.4, existe $y \in \text{Max}[I]$ tal que $x \leq y$. Assim, $x \in \downarrow \text{Max}[I]$. Seja agora $x \in \downarrow \text{Max}[I]$. Então existe $y \in \text{Max}[I] \subseteq I$ tal que $x \leq y$. Como I é ideal de ordem, $x \in I$. Logo, $\downarrow \text{Max}[I] = I$.

Assim, φ e ψ são isomorfismos de ordem inversos um do outro. \square

Corolário 2.6. *O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{A}(P), \leq)$ é um reticulado, no qual*

$$A \vee B = \text{Max}[\downarrow A \cup \downarrow B],$$

$$A \wedge B = \text{Max}[\downarrow A \cap \downarrow B].$$

Proposição 2.7. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Tem-se $A \vee B = \text{Max}[A \cup B]$.*

2.1. Teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos

Demonstração. A inclusão $A \vee B \subseteq \text{Max}[A \cup B]$ é óbvia.

Seja $x \in \text{Max}[A \cup B]$. Seja $y \in \downarrow A \cup \downarrow B$ tal que $x \leq y$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $y \in \downarrow A$. Então existe $z \in A$ tal que $y \leq z$. Assim, $x \leq z$. Pela maximalidade de x , $x = y = z$. Logo, x é maximal em $\downarrow A \cup \downarrow B$, o que conclui a demonstração. \square

Lema 2.8. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Tem-se $A \cap B \subseteq A \vee B$.*

Demonstração. Seja $x \in A \cap B$ e seja $y \in A \cup B$ tal que $x \leq y$. Como A e B são anticadeias, tem-se $x = y$. Assim, $x \in \text{Max}[A \cup B] = A \vee B$. Logo, $A \cap B \subseteq A \vee B$. \square

O lema seguinte permitirá definir uma operação binária em $\mathcal{A}(P)$, que será útil no que se segue.

Lema 2.9. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Então*

$$((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)$$

é uma anticadeia de P .

Demonstração. Sejam $x, y \in ((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)$, com $x \neq y$. Há vários casos a considerar:

- (i) $x, y \in A \cap B$. Neste caso, é claro que x e y são incomparáveis.
- (ii) $x, y \in (A \cup B) \setminus (A \vee B)$. Suponhamos que x e y são comparáveis; sem perda de generalidade, podemos supor que $x < y$. Existe $z \in \text{Max}[A \cup B] = A \vee B$ tal que $y < z$. Logo, $x < y < z$. Assim, z é comparável com x e com y , pelo que x e y pertencem ambos a A ou a B , o que é absurdo, pois A e B são anticadeias. Logo, x e y são incomparáveis.
- (iii) $x \in (A \cup B) \setminus (A \vee B), y \in A \cap B$. Neste caso, é fácil ver que x e y são incomparáveis.
- (iv) $y \in (A \cup B) \setminus (A \vee B), x \in A \cap B$. Este caso é análogo ao anterior.

Assim, concluímos que $((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)$ é uma anticadeia. \square

Definição 2.10. Definimos em $\mathcal{A}(P)$ a seguinte operação binária Δ : dados $A, B \in \mathcal{A}(P)$,

$$A \Delta B = ((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B).$$

O resultado seguinte apresenta uma relação entre as cardinalidades de A , B , $A \vee B$ e $A \Delta B$, que será importante no texto.

Lema 2.11. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}(P)$. Tem-se*

$$|A| + |B| = |A \vee B| + |A \Delta B|.$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} |A \Delta B| &= |((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cup (A \cap B)| \\ &= |(A \cup B) \setminus (A \vee B)| + |A \cap B| - |((A \cup B) \setminus (A \vee B)) \cap (A \cap B)| \\ &= |(A \cup B) \setminus (A \vee B)| + |A \cap B| - |(A \cap B) \setminus (A \vee B)| \\ &= |A \cup B| - |A \vee B| + |A \cap B| - |\emptyset| \\ &= |A \cup B| - |A \vee B| + |A \cap B|, \end{aligned}$$

em que a penúltima desigualdade é consequência do lema 2.8. Assim, tem-se

$$|A \Delta B| + |A \vee B| = |A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

□

A noção de k -família, que definimos em seguida, generaliza a noção de anticadeia. Posteriormente, demonstraremos que o conjunto das k -famílias de P tem a estrutura de um reticulado, cujas propriedades serão úteis no que se segue.

Definição 2.12. Seja $k \in \mathbb{N}$. Um subconjunto $A \subseteq P$ diz-se uma k -família se A não contém cadeias de cardinalidade $k + 1$.

Assim, uma anticadeia é simplesmente uma 1-família. É claro que, se A é uma k -família e $l > k$, então A é uma l -família. Denotamos o conjunto das k -famílias de P por $\mathcal{A}_k(P)$.

Demonstra-se facilmente que qualquer união de k anticadeias é uma k -família. Como veremos de seguida, a recíproca também é verdadeira.

Definição 2.13. Seja $A \in \mathcal{A}_k(P)$ e seja $x \in A$. A *profundidade* de x em A é a cardinalidade máxima de uma cadeia de A cujo mínimo seja x . Denota-se por $\delta_A(x)$. Defina-se, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$A_i = \{x \in A : \delta_A(x) = i\}.$$

À família $\{A_1, \dots, A_n\}$ chamamos *partição canónica de A* . (É fácil ver que se trata de facto de uma partição¹ de A .)

É fácil ver que A_1, \dots, A_k são anticadeias.

Vejamus que, dado $l \in \{1, \dots, k-1\}$, se tem $A_{l+1} \leq A_l$. Seja $x \in A_{l+1}$. Assim, existem elementos $x_1, \dots, x_{l+1} \in A$ tais que

$$x = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{l+1},$$

e não existe nenhuma cadeia de cardinalidade superior a $l+1$ que tenha mínimo x . Assim, x_2 tem profundidade l , pelo que $x_2 \in A_l$. Logo, $A_{l+1} \leq A_l$.

Lema 2.14. *Seja $A \in \mathcal{A}_k(P)$ e seja $\{A_1, \dots, A_k\}$ a partição canónica de A . Se $\{B_1, \dots, B_k\}$ é uma partição de A em k anticadeias tal que*

$$B_k \leq B_{k-1} \leq \dots \leq B_1,$$

então, para cada $i \in [k]$, $B_i = A_i$.

Demonstração. Seja $\{B_1, \dots, B_k\}$ uma partição de A em anticadeias tal que $B_k \leq \dots \leq B_1$. Vamos provar por indução em i que, para qualquer $i \in [k]$, $A_i = B_i$.

Seja $x \in A_1$. Então x tem profundidade 1 em A , pelo que não existe $y \in A$ tal que $x < y$. Assim, tem-se forçosamente $x \in B_1$. Seja agora $x \in B_1$. Se x não tivesse profundidade 1 em A , existiria $y \in A$ tal que $x < y$. Como B_1 é uma anticadeia, $y \notin B_1$. Seja $j \in [k]$ tal que $y \in B_j$. Como $B_j \leq B_1$, existe $z \in B_1$ tal que $y \leq z$. Assim, tem-se $x < y \leq z$, o que é absurdo, uma vez que B_1 é uma anticadeia. Conclui-se que x tem profundidade 1 em A . Logo, $A_1 = B_1$.

Seja agora $i \in [k]$ e suponhamos que, para qualquer $l < i$, $A_l = B_l$. Seja $x \in A_i$. Então x tem profundidade i em A . Seja j o único elemento de $[k]$ tal que $x \in B_j$. Tem-se, necessariamente, $j \leq i$. Mas, pela hipótese de indução, tem-se $j \geq i$. Logo, $j = i$. Assim, $A_i \subseteq B_i$. Seja agora $x \in B_i$. Uma vez que $B_i \leq \dots \leq B_1$, existe uma cadeia em A , com cardinalidade i , cujo mínimo é x . Vejamus que não podem existir cadeias de cardinalidade superior nestas circunstâncias. Se existissem elementos $x_1, \dots, x_{i+1} \in A$ tais que

$$x = x_1 < x_2 < \dots < x_{i+1},$$

teríamos necessariamente, por um argumento semelhante ao do caso base, $x_2, \dots, x_{i+1} \in B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$. Pelo princípio do pombo, existem dois elementos x_l , com $l \in \{2, \dots, i+1\}$ no mesmo conjunto B_j , o que é absurdo, uma

¹Quando falamos em partição, neste contexto, não exigimos que as partes da partição sejam não vazias. Seguiremos esta convenção ao longo de todo este capítulo.

vez que os conjuntos B_j são anticadeias. Logo, x tem profundidade i , pelo que $B_i \subseteq A_i$.

Concluimos que, para qualquer $i \in [k]$, $A_i = B_i$. □

Se $\{A_1, \dots, A_k\}$ é a partição canónica de $A \in \mathcal{A}_k(P)$ e $A_k \leq \dots \leq A_1$, chamamos a (A_1, \dots, A_k) a *partição canónica ordenada de A* .

Note-se que, se A é uma k -família e (A_1, \dots, A_k) é a sua partição canónica ordenada, então $A_1 = \text{Max}[A]$.

Tendo em conta o resultado anterior e a observação que antecede a definição da partição canónica de uma k -família, conclui-se que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(P) &\rightarrow (\mathcal{A}(P))^k \\ A &\mapsto (A_1, \dots, A_k) \end{aligned}$$

é injectiva, e a sua imagem é o conjunto das sequências $(A_1, \dots, A_k) \in (\mathcal{A}(P))^k$ que satisfazem

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$;
- $A_k \leq \dots \leq A_1$.

Assim, a aplicação anterior induz uma bijecção entre $\mathcal{A}_k(P)$ e o subconjunto de $(\mathcal{A}(P))^k$ com as propriedades mencionadas.

Esta bijecção permite definir em $\mathcal{A}_k(P)$ uma relação de ordem parcial.

Definição 2.15. Define-se em $\mathcal{A}_k(P)$ a seguinte relação de ordem parcial \leq : dados $A, B \in \mathcal{A}(P)$,

$$A \leq B \text{ se e só se, para qualquer } i \in \{1, \dots, k\}, A_i \leq B_i,$$

em que (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) são as partições canónicas ordenadas de A e B , respectivamente.

Em seguida, demonstramos que o cpo $(\mathcal{A}_k(P), \leq)$ é de facto um reticulado.

Comecemos por observar que, pela proposição 1.23, $((\mathcal{A}(P))^k, \leq)$ é um reticulado, em que

$$(A_1, \dots, A_k) \vee (B_1, \dots, B_k) = (A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k).$$

Lema 2.16. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ e sejam (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) as partições canónicas ordenadas de A e B , respectivamente. Então, tem-se*

$$(a) \quad A_k \vee B_k \leq \dots \leq A_1 \vee B_1.$$

(b) Se $i \neq j$, $(A_i \vee B_i) \cap (A_j \vee B_j) = \emptyset$.

Demonstração. A alínea (a) é evidente, tendo em conta a definição de partição canónica ordenada.

Sejam $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tais que $i \neq j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $j < i$. Suponhamos, com vista a um absurdo que existe $x \in (A_i \vee B_i) \cap (A_j \vee B_j)$. Então x é um elemento maximal de $A_i \cup B_i$ e de $A_j \cup B_j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \in A_i$. Como $i > j$, tem-se $A_i \leq A_j$, pelo que existe $y \in A_j$ tal que $x \leq y$. Pela maximalidade de x em $A_j \cup B_j$, $x = y$. Mas então $x \in A_j \cap A_i = \emptyset$, o que é absurdo. Assim, concluímos que $(A_i \vee B_i) \cap (A_j \vee B_j) = \emptyset$. \square

O seguinte resultado é uma consequência directa do lema anterior.

Corolário 2.17. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ e sejam (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) as partições canónicas ordenadas de A e B , respectivamente. Então*

$$(A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k)$$

é a partição canónica ordenada de $A \vee B$.

Os resultados anteriores mostram que o conjunto das sequências de $(\mathcal{A}(P))^k$ que satisfazem

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$;
- $A_k \leq \dots \leq A_1$.

é fechado para supremos. Uma vez que este conjunto tem mínimo, a sequência em que $A_i = \emptyset$ para $i \in [k]$, o lema 1.11 permite concluir que este conjunto é um reticulado. Assim, a correspondência entre este conjunto de sequências de anticadeias e o conjunto $\mathcal{A}_k(P)$ permite concluir o resultado seguinte.

Teorema 2.18. *O conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{A}_k(P), \leq)$ é um reticulado, no qual*

$$A \vee B = \bigcup_{i=1}^k (A_i \vee B_i),$$

sendo (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) as partições canónicas ordenadas de A e B , respectivamente.

Note-se que $A \vee B$ é uma k -família, pois é união de k anticadeias.

Podemos estender a $\mathcal{A}_k(P)$ a operação binária Δ : dados $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$, definimos

$$A \Delta B = \bigcup_{i=1}^k (A_i \Delta B_i),$$

onde (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) são as partições canônicas ordenadas de A e B , respectivamente. É claro que $A \Delta B$ é uma k -família.

Lema 2.19. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$ e sejam (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) as partições canônicas ordenadas de A e B , respectivamente. Então, tem-se, se $i \neq j$,*

$$(A_i \Delta B_i) \cap (A_j \Delta B_j) = \emptyset.$$

Demonstração. Sejam $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tais que $i \neq j$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i > j$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe $x \in (A_i \Delta B_i) \cap (A_j \Delta B_j)$. Em particular, tem-se

$$x \in A_i \Delta B_i = ((A_i \cup B_i) \setminus (A_i \vee B_i)) \cup (A_i \cap B_i).$$

Uma vez que $x \in A_j \Delta B_j$ e (A_1, \dots, A_k) e (B_1, \dots, B_k) são partições, $x \notin A_i \cap B_i$. Assim, $x \in A_i \cup B_i$, pelo que existe $y \in B_i$ tal que $x < y$ (pois x não é maximal em $A_i \cup B_i$). Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x \in A_j$. Então $x \in B_j$. Mas isto é absurdo, pois $x < y \in B_i$ e $B_i \leq B_j$. \square

O resultado seguinte é análogo ao lema 2.11 e é consequência imediata de $\{A_1, \dots, A_k\}$, $\{B_1, \dots, B_k\}$, $\{A_1 \vee B_1, \dots, A_k \vee B_k\}$ e $\{A_1 \Delta B_1, \dots, A_k \Delta B_k\}$ serem partições de A , B , $A \vee B$ e $A \Delta B$, respectivamente.

Lema 2.20. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}_k(P)$. Tem-se*

$$|A| + |B| = |A \vee B| + |A \Delta B|.$$

Relembremos que $d_k(P)$ é a cardinalidade máxima de uma união de k anticadeias de P , isto é, a cardinalidade máxima de uma k -família de P . Relembremos ainda que, para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, se tem

$$d_k(P) \leq d_{k+1}(P)$$

e que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$,

$$d_k(P) = |P|.$$

Chamamos *k-família de Sperner* a uma *k*-família de *P* de cardinalidade $d_k(P)$. Denotamos por $\mathcal{S}_k(P)$ o conjunto das *k*-famílias de Sperner de *P*. Este conjunto terá um papel fundamental na demonstração do teorema da dualidade.

Os seguintes resultados são consequência directa do lema anterior.

Corolário 2.21. *Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e seja $B \in \mathcal{A}_k(P)$. Então*

$$|A \vee B| \geq |B| \quad , \quad |A \Delta B| \geq |B|.$$

Demonstração. Temos $|A| = d_k(P) \geq |A \Delta B|$ e $|A| = d_k(P) \geq |A \vee B|$. Assim, pelo lema anterior,

$$d_k(P) = |A \Delta B| + |A \vee B| - |B|.$$

Logo,

$$|A \Delta B| - |B| \geq 0 \quad \text{e} \quad |A \vee B| - |B| \geq 0.$$

Assim,

$$|A \vee B| \geq |B| \quad \text{e} \quad |A \Delta B| \geq |B|.$$

□

Corolário 2.22. *Se $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e $B \in \mathcal{S}_l(P)$, com $l \geq k$, então $A \vee B \in \mathcal{S}_l(P)$ e $A \Delta B \in \mathcal{S}_k(P)$. Em particular, se $A, B \in \mathcal{S}_k(P)$, então $A \vee B, A \Delta B \in \mathcal{S}_k(P)$.*

Demonstração. Suponhamos que $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e $B \in \mathcal{S}_l(P)$, com $l \geq k$. Tem-se $|A| = d_k(P)$ e $|B| = d_l(P)$.

Consideremos a *l*-família $A' = \bigcup_{i=1}^l A_i$, em que (A_1, \dots, A_k) é a partição canónica ordenada de *A* e $A_j = \emptyset$ para $j > k$. Seja (B_1, \dots, B_l) a partição canónica ordenada de *B*. Então, pelo corolário anterior, $|A \Delta B| \geq |A| = d_k(P)$. Por outro lado,

$$A \Delta B = \bigcup_{i=1}^k (A_i \Delta B_i) \cup \bigcup_{i=k+1}^l (\emptyset \Delta B_i) = \bigcup_{i=1}^k (A_i \Delta B_i) \in \mathcal{A}_k(P),$$

pelo que $|A \Delta B| \leq d_k(P)$. Assim, $|A \Delta B| = d_k(P)$. Logo, pelo lema 2.20,

$$d_k(P) + |A \vee B| = |A \Delta B| + |A \vee B| = |A| + |B| = d_k(P) + d_l(P).$$

Assim, $|A \vee B| = d_l(P)$, o que conclui a demonstração. □

Concluimos a secção com um resultado de Greene e Kleitman, que enunciaremos sem demonstração.

Teorema 2.23 (Greene, Kleitman, [14]). *$\mathcal{S}_k(P)$ é um sub-reticulado de $\mathcal{A}_k(P)$.*

2.1.2 Partições k -saturadas em cadeias

O teorema de Dilworth relaciona a cardinalidade máxima de uma anticadeia de P com partições de P em cadeias. Ora, a cardinalidade máxima de uma anticadeia de P é simplesmente o número $d_1(P)$, definido anteriormente. Nesta secção, generalizaremos o teorema de Dilworth, relacionando os números $d_k(P)$ com partições de P em cadeias.

Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma partição em cadeias de P . Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se

$$\beta_k(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{k, |C_i|\}.$$

Dada uma k -família A , tem-se $|A \cap C_i| \leq |C_i|$, por um lado, e $|A \cap C_i| \leq k$, por outro. Assim,

$$|A \cap C_i| \leq \min\{k, |C_i|\}.$$

Uma vez que $A = (A \cap C_1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (A \cap C_n)$, tem-se

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A \cap C_i| \leq \sum_{i=1}^n \min\{k, |C_i|\} = \beta_k(\mathcal{C}).$$

Em particular, se $A \in \mathcal{S}_k(P)$, concluímos que $d_k(P) \leq \beta_k(\mathcal{C})$, para cada partição \mathcal{C} de P em cadeias.

Definição 2.24. Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma partição de P em cadeias. Dizemos que \mathcal{C} é uma *partição k -saturada em cadeias* se

$$d_k(P) = \beta_k(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{k, |C_i|\}.$$

Observemos que uma partição $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ de P em cadeias é k -saturada se e só se, dada uma k -família de Sperner A ,

$$|A \cap C_i| = \begin{cases} k, & \text{se } |C_i| \geq k; \\ |C_i|, & \text{se } |C_i| < k. \end{cases}, i \in [n].$$

Em particular, uma partição \mathcal{C} é 1-saturada se e só se

$$d_1(P) = \sum_{i=1}^n \min\{1, |C_i|\} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

O teorema de Dilworth pode então ser reformulado do modo que se segue.

Teorema 2.25 (Dilworth, 2.^a versão). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito. Existe uma partição 1-saturada de P em cadeias.*

Finalizaremos esta secção com a demonstração do resultado de Greene e Kleitman, que generaliza o teorema de Dilworth; para isso, vamos estabelecer a existência de partições k -saturadas de P em cadeias, para $k \geq 1$.

Começemos por observar que, dada uma partição \mathcal{C} de P em cadeias que seja k -saturada, podemos obter uma nova partição \mathcal{C}' do seguinte modo

$$\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : |C| \geq k\} \cup \{\{x\} : x \in C, C \in \mathcal{C}, |C| < k\}.$$

Intuitivamente, as cadeias de cardinalidade menor que k são “divididas”. Tendo em conta a observação feita após a definição de partição k -saturada, concluímos que, se \mathcal{C} é k -saturada, então \mathcal{C}' também o é.

Destas observações podemos concluir o resultado seguinte.

Lema 2.26. *Seja \mathcal{C} uma partição de P em cadeias, seja α_k o número de cadeias de \mathcal{C} de cardinalidade maior ou igual a k e seja T_k o conjunto dos elementos que pertencem a cadeias de \mathcal{C} com comprimento menor do que k . Então \mathcal{C} é k -saturada se e só se $d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k$.*

No resto desta secção, denotaremos¹, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P)$. Temos, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$d_k(P) = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_k(P).$$

Temos ainda que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$,

$$\Delta_k(P) = 0.$$

Lema 2.27. *Seja $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ uma partição k -saturada de P em cadeias e seja α_k o número de cadeias de \mathcal{C} com cardinalidade maior ou igual a k . Então, $\Delta_{k+1}(P) \leq \alpha_k \leq \Delta_k(P)$.*

Demonstração. Pelo lema 2.26, tem-se $d_k(P) = |T_k| + k\alpha_k$, em que T_k é o conjunto dos elementos que pertencem a cadeias de \mathcal{C} com comprimento menor do que k . Tem-se ainda:

$$d_{k+1}(P) \leq \beta_{k+1}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{k+1, |C_i|\} \leq |T_k| + (k+1)\alpha_k,$$

¹Esta é apenas outra notação para a partição das anticadeias de P , $\tilde{\lambda}(P)$. Usamos esta notação alternativa ao longo do resto da secção, em conformidade com a notação introduzida originalmente por Greene e Kleitman em [14].

$$d_{k-1}(P) \leq \beta_{k-1}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n \min\{k-1, |C_i|\} \leq |T_k| + (k-1)\alpha_k.$$

Logo,

$$\Delta_{k+1}(P) = d_{k+1}(P) - d_k(P) \leq |T_k| + (k+1)\alpha_k - |T_k| - k\alpha_k = \alpha_k,$$

$$\Delta_k(P) = d_k(P) - d_{k-1}(P) \geq |T_k| + k\alpha_k - |T_k| - (k-1)\alpha_k = \alpha_k,$$

como pretendido. \square

Como consequência deste lema, se mostrarmos que de facto existem partições k -saturadas, obtemos

$$\Delta_1(P) \geq \Delta_2(P) \geq \dots \geq \Delta_k(P) \geq \dots$$

Lema 2.28. *Seja \mathcal{C} uma partição k -saturada de P em cadeias. Se $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P)$, então \mathcal{C} é $(k+1)$ -saturada.*

Demonstração. Pelo lema 2.27, tem-se $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P) = \alpha_k$, em que α_k é o número de cadeias de \mathcal{C} de cardinalidade maior ou igual a k . Uma vez que \mathcal{C} é k -saturada, tem-se, pelo lema 2.26,

$$d_k(P) = k\alpha_k + |T_k|,$$

em que T_k é o conjunto dos elementos de cadeias de \mathcal{C} com cardinalidade menor que k . Assim,

$$d_{k+1}(P) = d_k(P) + \Delta_{k+1}(P) = d_k(P) + \alpha_k = (k+1)\alpha_k + |T_k|.$$

Mas

$$\beta_{k+1}(\mathcal{C}) \leq (k+1)\alpha_k + |T_k| = d_{k+1}(P),$$

o que implica que $d_{k+1}(P) = \beta_{k+1}(\mathcal{C})$. Assim, \mathcal{C} é k -saturada. \square

Lema 2.29. *Seja $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e seja (A_1, \dots, A_k) a sua partição canónica ordenada. Para qualquer $i \in [k]$, temos*

$$|A_i| \geq \Delta_k(P).$$

Demonstração. Basta observar que $A \setminus A_i$ é uma $(k-1)$ -família, pelo que

$$d_k(P) = |A| \leq |A \setminus A_i| + |A_i| \leq d_{k-1}(P) + |A_i|.$$

\square

O resultado que se segue é fundamental para a demonstração da existência de partições k -saturadas; na sua demonstração é utilizado o facto de $\mathcal{S}_k(P)$ ser um reticulado.

Teorema 2.30. *Se $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$, então existe um elemento $x \in P$ tal que x é elemento maximal de qualquer k -família de Sperner.*

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{S}_k(P)$ é um reticulado finito, tem máximo e mínimo; denotemo-los, respectivamente, por A^+ e A^- e sejam (A_1^+, \dots, A_k^+) e (A_1^-, \dots, A_k^-) as suas partições canónicas ordenadas. Começemos por ver que $A_1^+ \cap A_1^- \neq \emptyset$.

Suponhamos, com vista a um absurdo que $A_1^+ \cap A_1^- = \emptyset$. Assim, $A^- \cup A_1^+$ é uma $(k+1)$ -família de P , e, pelo lema anterior, temos

$$|A^- \cup A_1^+| = d_k(P) + |A_1^+| \geq d_k(P) + \Delta_k(P) > d_k(P) + \Delta_{k+1}(P) = d_{k+1}(P),$$

o que é absurdo. Assim, $A_1^+ \cap A_1^- \neq \emptyset$.

Assim sendo, existe $x \in A_1^+ \cap A_1^-$. Vejamos que x é maximal em qualquer k -família de Sperner. Seja A uma k -família de Sperner e seja (A_1, \dots, A_k) a sua partição canónica ordenada. Temos $A_1^- \leq A_1 \leq A_1^+$. Logo, existe $z \in A_1$ tal que $x \leq z$ e existe $w \in A_1^+$ tal que $z \leq w$. Logo, $x \leq w$. Mas, uma vez que $x \in A_1^+$ e A_1^+ é anticadeia, $x = z = w$. Portanto, $x \in A_1 = \text{Max}[A]$. \square

O teorema anterior pode ser reforçado.

Teorema 2.31 (Greene, Kleitman, [14]). *Se $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$, então existe um elemento $x \in P$ tal que*

- (i) *x é um elemento maximal de qualquer k -família de Sperner;*
- (ii) *x pertence a qualquer $(k+1)$ -família de Sperner (tendo profundidade menor ou igual a 2).*

Demonstração. Denotemos, tal como na demonstração do teorema anterior, A^+ e A^- o máximo e mínimo, respectivamente, do reticulado $\mathcal{S}_k(P)$. Vimos, na demonstração do teorema anterior, que $A_1^+ \cap A_1^- = C \neq \emptyset$, que $C \subseteq A_1$, para qualquer $A \in \mathcal{S}_k(P)$ e que qualquer elemento de C é maximal em qualquer k -família de Sperner.

Para concluir a demonstração, vamos ver que $C \subseteq B$, para qualquer $(k+1)$ -família de Sperner B . Seja então B uma $(k+1)$ -família de Sperner e seja (B_1, \dots, B_{k+1}) a sua partição canónica ordenada.

Começemos por ver que $C \subseteq B_1$. Denotemos por \hat{B} a k -família $B \setminus B_{k+1}$. Pelo corolário 2.21, tem-se $|A^+ \vee \hat{B}| \geq |\hat{B}|$. Suponhamos que $|A^+ \vee \hat{B}| > |\hat{B}|$;

então, como $(A^* \vee \hat{B}) \cap B_{k+1} = \emptyset$, tem-se $|(A^+ \vee \hat{B}) \cup B_{k+1}| > |B|$, o que é absurdo, uma vez que $(A^+ \vee \hat{B}) \cup B_{k+1}$ é uma $(k+1)$ -família e B é uma $(k+1)$ -família de Sperner. Assim, $|A^+ \vee \hat{B}| = |\hat{B}|$. Pelo lema 2.20, $|A^+ \Delta \hat{B}| = |A^+|$, pelo que $A^+ \Delta \hat{B}$ é uma k -família de Sperner. Assim, $C \subseteq (A^+ \Delta \hat{B})_1$, o que implica que $C \leq B_1$.

Vejam agora que, se $A^+ \leq B$ e $C \cap B_1 = \emptyset$, então $B \setminus B_1 \in \mathcal{S}_k(P)$. Suponhamos que $A^+ \leq B$. Então temos $A_1^- \leq A_1^+ \leq B_1$. Assim, $A_1^- \cap B_1 = \emptyset$. Pelo lema 2.29, $|B_1| \geq \Delta_{k+1}(P)$. Como $|A^-| = d_k(P)$, temos $|A^- \cup B_1| = |A^-| + |B_1| \geq d_{k+1}(P)$. Logo, $|A^- \cup B_1| = d_{k+1}(P)$ e $|B_1| = \Delta_{k+1}(P)$. Assim, $|B \setminus B_1| = d_k(P)$, pelo que $B \setminus B_1 \in \mathcal{S}_k(P)$, como pretendido. Consequentemente, $C \subseteq B_2$.

Temos agora dois casos a considerar.

- (i) $C \cap B_1 = \emptyset$, para qualquer $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Neste caso, vamos provar que $C \subseteq B_2$, para qualquer $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Seja então $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$ e seja $B' = B \vee A^+$. Pelo corolário 2.22, $B' \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Uma vez que $A^+ \leq B'$ e $C \cap B'_1 = \emptyset$, o argumento do parágrafo anterior permite concluir que $C \subseteq B'_2$. Uma vez que $B'_2 = A_2^+ \vee B_2$ e $C \cap A_2^+ = \emptyset$ (pois $C \subseteq A_1^+$), vem que $C \subseteq B_2$.
- (ii) $C \cap B_1 \neq \emptyset$, para algum $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Neste caso, seja B^* uma $(k+1)$ -família maximal no conjunto das $(k+1)$ -famílias B tais que $C \cap B_1 \neq \emptyset$. Seja $C_0 = C \cap B_1^*$. Pelo corolário 2.22, $A^+ \vee B^* \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. Como $C_0 \subseteq A_1^+$ e $C_0 \subseteq B_1^*$, tem-se $C_0 \subseteq A_1^+ \cap B_1^* \subseteq (A^+ \vee B^*)_1$. A maximalidade de B^* implica que $B^* = A^+ \vee B^*$. Logo, $A^+ \leq B^*$.

Seja agora B uma $(k+1)$ -família arbitrária. Se $B \leq B^*$, então, pela primeira parte desta demonstração, $C \leq B_1 \leq B_1^*$. Como $C_0 \subseteq C \cap B_1^*$, temos $C_0 \subseteq B_1$. Assim, $C_0 \subseteq B$.

Por outro lado, se $B \not\leq B^*$, então $B \vee B^* > B^*$. Pela maximalidade de B^* , $(B \vee B^*) \cap C = \emptyset$. Concluimos, por um argumento anterior, que $C \subseteq (B \vee B^*)_2 = B_2 \vee B_2^*$. Como $C_0 \subseteq B_1^*$, tem-se $C_0 \cap B_2^* = \emptyset$, pelo que $C_0 \subseteq B_2$. Assim, $C_0 \subseteq B$.

Em qualquer dos casos anteriores se conclui que $C \subseteq B$ (e os argumentos anteriores mostram que qualquer elemento de C tem profundidade menor ou igual a 2 em B), para qualquer $B \in \mathcal{S}_{k+1}(P)$. \square

Finalmente, tendo em conta os resultados anteriores, podemos demonstrar a existência de partições k -saturadas de P em cadeias, para qualquer k . De facto, demonstraremos um resultado um pouco mais forte.

Teorema 2.32 (Greene, Kleitman, [14]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Existe uma partição de P em cadeias que é simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada.*

Demonstração. Procedemos por indução em k . O caso $k = 1$ é o teorema de Dilworth. Basta provar que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, se existir uma partição k -saturada de P em cadeias, então existe uma partição de P em cadeias que é simultaneamente k -saturada e $(k + 1)$ -saturada.

Seja então $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos que existe uma partição k -saturada \mathcal{C} de P em cadeias. Pelo lema 2.27, tem-se $\Delta_k(P) \geq \Delta_{k+1}(P)$. Se $\Delta_k(P) = \Delta_{k+1}(P)$, então, pelo lema 2.28, \mathcal{C} é $(k + 1)$ -saturada e não há mais nada a demonstrar. Suponhamos então que $\Delta_k(P) > \Delta_{k+1}(P)$. Vamos provar, por indução na cardinalidade de P , que existe uma partição de P em cadeias que é simultaneamente k -saturada e $(k + 1)$ -saturada. O caso em que P tem cardinalidade 1 é trivial.

Pelo teorema anterior, existe $x \in P$ tal que x pertence a qualquer k -família de Sperner e a qualquer $(k + 1)$ -família de Sperner. Assim, temos $d_k(P \setminus \{x\}) = d_k(P) - 1$ e $d_{k+1}(P \setminus \{x\}) = d_{k+1}(P) - 1$. Por hipótese de indução, existe uma partição $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ de $P \setminus \{x\}$ em cadeias que é k -saturada e $(k + 1)$ -saturada. Assim,

$$d_k(P) - 1 = \sum_{i=1}^n \min\{k, |D_i|\}$$

e

$$d_{k+1}(P) - 1 = \sum_{i=1}^n \min\{k + 1, |D_i|\}.$$

Então é fácil ver que $\{D_1, \dots, D_n, \{x\}\}$ é uma partição de P em cadeias que é k -saturada e $(k + 1)$ -saturada, o que conclui a demonstração. \square

Uma consequência importante do teorema anterior e do lema 2.27 é o facto de a sucessão $(\Delta_i(P))_{i \in \mathbb{N}}$ ser decrescente.

Teorema 2.33. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito. Para qualquer $i \in \mathbb{N}$,*

$$\Delta_i(P) \geq \Delta_{i+1}(P).$$

Proposição 2.34. *A sucessão $\Delta(P) = (\Delta_i(P))_{i \in \mathbb{N}}$ é uma partição de $|P|$.*

Demonstração. Tendo em conta o teorema anterior e as observações feitas após a definição da sucessão $\Delta(P)$, resta apenas ver que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k(P) = |P|.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$, $d_k(P) = |P|$. Então, a igualdade anterior é simplesmente consequência do facto de

$$d_m(P) = \Delta_1(P) + \dots + \Delta_m(P)$$

e $\Delta_k(P) = 0$ para $k \geq m$. □

2.1.3 Demonstração do teorema da dualidade de Greene

Até aqui incidimos a nossa atenção na noção de k -família (que generaliza a noção de anticadeia) e em partições de um conjunto parcialmente ordenado em cadeias. Vamos agora introduzir conceitos e resultados duais, com o objectivo de demonstrar o teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos.

Começamos por introduzir a noção de k -cofamília, dual da noção de k -família.

Definição 2.35. Seja $k \in \mathbb{N}$. Um subconjunto $C \subseteq P$ diz-se uma k -cofamília se C não contém anticadeias de cardinalidade $k + 1$.

Assim, uma cadeia é simplesmente uma 1-família. Como no caso das k -famílias, se C é uma k -cofamília e $l > k$, então C é uma l -cofamília. Denotamos o conjunto das k -cofamílias de P por $\mathcal{C}_k(P)$.

Lema 2.36. *Seja $C \subseteq P$. Então C é uma k -cofamília se e só se C é união de k cadeias de P . Mais, essas k cadeias podem ser tomadas disjuntas duas a duas.*

Demonstração. É fácil ver que a união de k cadeias de P é uma k -cofamília. Reciprocamente, seja C uma k -cofamília de P e seja l a cardinalidade máxima de uma anticadeia de C . Então, $l \leq k$ e, pelo teorema de Dilworth, C pode ser particionada em l cadeias C_1, \dots, C_l , disjuntas duas a duas. Assim,

$$C = \bigcup_{i=1}^k C_i,$$

em que $C_i = \emptyset$ se $i > l$. □

Relembremos que $\hat{d}_k(P)$ denota a cardinalidade máxima de uma união de k cadeias de P , ou seja, a cardinalidade máxima de uma k -cofamília de P . Relembremos ainda que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, se tem

$$\hat{d}_k(P) \leq \hat{d}_{k+1}(P)$$

e que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$,

$$\hat{d}_k(P) = |P|.$$

2.1. Teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos

Convencionamos que $\hat{d}_0(P) = 0$.

No resto desta secção, denotaremos¹, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\hat{\Delta}_k(P) = \hat{d}_k(P) - \hat{d}_{k-1}(P)$. Temos que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$,

$$\hat{d}_k(P) = \hat{\Delta}_1(P) + \cdots + \hat{\Delta}_k(P).$$

Temos ainda que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $k \geq m$,

$$\hat{\Delta}_k(P) = 0.$$

Seja $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ uma partição em anticadeias de P . Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina-se

$$\hat{\beta}_k(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \min\{k, |A_i|\}.$$

Dada uma k -cofamília C , temos, por um argumento análogo ao usado no caso das k -famílias,

$$|C| = \hat{\beta}_k(\mathcal{A}).$$

Em particular, se C for uma k -cofamília de cardinalidade máxima, concluímos que $\hat{d}_k(P) \leq \hat{\beta}_k(\mathcal{A})$, para cada partição \mathcal{A} de P em anticadeias.

Relembremos que $\Delta^*(P)$ denota a partição conjugada da partição $\Delta(P)$.

Lema 2.37. *Para qualquer $h \in \mathbb{N}$, temos*

$$\hat{d}_h(P) \leq \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P).$$

Demonstração. Seja C uma h -cofamília de P ; temos $C = C_1 \cup \cdots \cup C_h$, onde C_1, \dots, C_h são cadeias disjuntas de P . Seja $T = P \setminus C$. Seja $k = \Delta_h^*(P)$ e seja $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_h\} \cup \{\{x\} : x \in S\}$. Temos

$$d_k(P) \leq \beta_k(\mathcal{C}) \leq hk + |T| = hk + |P| - |C|.$$

Logo,

$$|C| \leq |P| - d_k(P) + hk = |P| - (\Delta_1(P) + \cdots + \Delta_k(P)) + hk = hk + \sum_{i>k} \Delta_i(P).$$

Pelo lema 1.39, a última expressão é igual a $\Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P)$. Assim, concluímos que

$$\hat{d}_h(P) \leq \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P).$$

□

¹Esta é outra notação para a partição das cadeias de P , $\lambda(P)$. Usaremos esta notação alternativa apenas no resto desta secção, em conformidade com a notação introduzida por Greene em [13].

Lema 2.38. *Seja \mathcal{C} uma partição k -saturada de P em cadeias e sejam C_1, \dots, C_h as cadeias de \mathcal{C} com cardinalidade maior ou igual a k . Seja T o conjunto dos elementos de cadeias de \mathcal{C} de cardinalidade menor que k . Seja $C = C_1 \cup \dots \cup C_h$. Temos que*

- (a) C é uma h -cofamília de cardinalidade máxima.
- (b) $|C| = \Delta_1^*(P) + \dots + \Delta_h^*(P)$.

Demonstração.

- (a) Seja C' uma h -cofamília tal que $|C'| > |C|$. Suponhamos que $C' = C'_1 \cup \dots \cup C'_h$, em que C'_1, \dots, C'_h são cadeias disjuntas. Seja $T' = P \setminus C'$. Temos então $|T'| < |T|$. Logo, se

$$C' = \{C'_1, \dots, C'_h\} \cup \{\{x\} : x \in T'\},$$

então

$$\beta_k(C') \leq hk + |T'| < hk + |T| = \beta_k(C),$$

o que é absurdo, visto que \mathcal{C} é k -saturada.

- (b) Temos que $|T| = d_k(P) - hk$, pelo que

$$\begin{aligned} |C| &= |P| - |T| = |P| - d_k(P) + hk = |P| - (\Delta_1(P) + \dots + \Delta_k(P)) + hk \\ &= hk + \sum_{i>k} \Delta_i(P) = \Delta_1^*(P) + \dots + \Delta_h^*(P), \end{aligned}$$

em que a última igualdade é consequência do lema 1.39.

□

Corolário 2.39. *Se $h = \Delta_k(P)$ para algum k , então*

$$\hat{d}_h(P) = \Delta_1^*(P) + \dots + \Delta_h^*(P).$$

Demonstração. Pelo lema anterior, temos

$$\hat{d}_h(P) = \Delta_1^*(P) + \dots + \Delta_h^*(P)$$

sempre que exista uma partição k -saturada de P em cadeias com h cadeias de cardinalidade maior ou igual a k . Pelo teorema de Greene-Kleitman, existe uma partição \mathcal{C} de P em cadeias que é simultaneamente k -saturada e $(k+1)$ -saturada. Seja α_k o número de cadeias de \mathcal{C} de cardinalidade maior ou igual a k . Assim, pelo lema 2.27, temos $\alpha_k = \Delta_k(P) = h$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 2.40. *Para qualquer $h \in \mathbb{N}$, temos*

$$\hat{d}_h(P) = \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P).$$

Demonstração. Procedemos por indução na cardinalidade de P . O resultado é trivial se $|P| = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que o resultado é verdadeiro no caso em que $|P| = n - 1$. Se $h = \Delta_k(P)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então o resultado é verdadeiro, pelo lema anterior. Se $h > \Delta_1(P)$, então o teorema de Dilworth implica que P é uma h -cofamília, pelo que

$$\Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P) \leq |P| = \hat{d}_h(P) \leq \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P),$$

o que mostra o pretendido.

Suponhamos então que $\Delta_k(P) > h > \Delta_{k+1}(P)$, para algum $k \geq 1$. Pelo teorema 2.31, existe $x \in P$ tal que x pertence a toda a k -família de Sperner e a toda a $(k+1)$ -família de Sperner. Seja $P' = P \setminus x$. Tem-se $d_k(P') = d_k(P) - 1$ e $d_{k+1}(P') = d_{k+1}(P) = d_k(P) - 1$, pelo que $\Delta_{k+1}(P') = \Delta_{k+1}(P)$ e $\Delta_k(P') \in \{\Delta_k(P), \Delta_k(P) - 1\}$.

Vamos ver que

$$\Delta_1^*(P') + \cdots + \Delta_h^*(P') = \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P).$$

De facto, como $h > \Delta_{k+1}(P) = \Delta_{k+1}(P')$ e $\Delta_k(P') \geq \Delta_k(P) - 1 \geq h$, temos

$$\Delta_i(P) \geq h \Leftrightarrow i \geq k \Leftrightarrow \Delta_i(P') \geq h.$$

Logo,

$$\Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P) = \sum_{i=1}^l \min\{h, \Delta_i(P)\} = \sum_{i=1}^l \min\{h, \Delta_i(P')\} = \Delta_1^*(P') + \cdots + \Delta_h^*(P'),$$

em que a segunda igualdade é consequência do facto de as sucessões $\Delta(P)$ e $\Delta^*(P)$ serem partições de $|P|$.

Pela hipótese de indução,

$$\hat{d}_h(P') = \Delta_1^*(P') + \cdots + \Delta_h^*(P'),$$

pelo que existe uma h -cofamília C de P' de cardinalidade $\Delta_1^*(P') + \cdots + \Delta_h^*(P') = \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P)$. Mas C é também h -cofamília de P , pelo que $\hat{d}_h(P) \geq \Delta_1^*(P) + \cdots + \Delta_h^*(P)$. O lema 2.37 implica que se tem de facto uma igualdade, o que conclui a demonstração. \square

Podemos agora demonstrar o teorema da dualidade de Greene, que voltamos a enunciar.

Teorema 2.41 (Teorema da dualidade para cpo's finitos, Greene, [13]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito, com $|P| = n$. Temos que $\Delta(P)$ e $\hat{\Delta}(P)$ são partições de n e*

$$\hat{\Delta}(P) = \Delta^*(P),$$

onde $\Delta^*(P)$ denota a partição conjugada de $\Delta(P)$.

Demonstração. O facto de $\Delta(P)$ ser uma partição de n é o teorema 2.34.

Da proposição anterior se conclui que, para cada $h \in \mathbb{N}$,

$$\hat{\Delta}_h(P) = \hat{d}_h(P) - \hat{d}_{h-1}(P) = \Delta_h^*(P).$$

Assim, $\hat{\Delta}(P)$ é a partição conjugada de $\Delta(P)$, o que conclui a demonstração. \square

2.2 Ideais de ordem e partições

Nesta secção vamos apresentar uma forma de determinar o diagrama de Young das cadeias de um conjunto parcialmente ordenado finito, através de um algoritmo recursivo baseado nos seus ideais de ordem. Ao longo desta secção e da seguinte seguimos maioritariamente [4].

Recordemos que $Y(\lambda(P))$ denota o diagrama de Young das cadeias de P , ou simplesmente diagrama de Young de P .

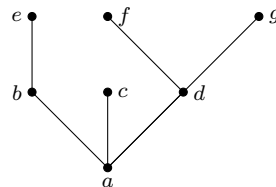
Um dos resultados mais importantes da secção é o teorema que se segue.

Teorema 2.42 (Fomin, [4]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e seja x um elemento extremal de P . Então*

$$Y(\lambda(P \setminus \{x\})) \subset Y(\lambda(P)).$$

Antes da demonstração do teorema, apresentam-se abaixo alguns exemplos de aplicação do mesmo.

Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) do exemplo do início do capítulo, representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Os cálculos efectuados anteriormente mostram que:

$$Y(\lambda(P)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

O elemento f é maximal em P e vê-se facilmente que:

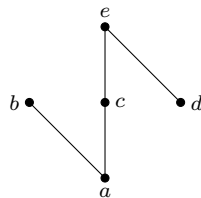
$$Y(\lambda(P \setminus \{f\})) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

Tem-se

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \subsetneq \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

O teorema anterior não é válido, em geral, se x não for um elemento extremo de P , como o exemplo seguinte mostra.

Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Temos

$$Y(\lambda(P)) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} .$$

Por outro lado, se removermos o elemento (não maximal) c , obtemos

$$Y(\lambda(P \setminus \{c\})) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} .$$

Vamos agora demonstrar o teorema 2.42. Tendo em conta a proposição 1.26, basta demonstrar o teorema no caso em que x é um elemento maximal de P . Começamos com um resultado preliminar.

Proposição 2.43. *Seja x um elemento maximal de P . Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $x \in A$, para qualquer k -família de Sperner A . Então x pertence a qualquer l -família de Sperner B , com $l \geq k$.*

Demonstração. Seja $l \geq k$ e seja B uma l -família de Sperner. Seja (B_1, \dots, B_l) a sua partição canónica ordenada. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $x \notin B$. Seja A uma k -família de Sperner. Uma vez que $x \in A$ e x é maximal em P , temos necessariamente que $x \in A_1$. Logo, $x \in A_1 \vee B_1$, pela maximalidade de x . Como $x \notin B_1$, temos que $x \notin A_1 \triangle B_1$. Logo, $x \notin A \triangle B$, o que é absurdo porque, pelo lema 2.22, $A \triangle B$ é uma k -família de Sperner.

Logo, x pertence a qualquer l -família de Sperner. □

Podemos agora demonstrar o teorema 2.42.

Demonstração. (do teorema 2.42) Uma vez mais, basta considerar o caso em que x é maximal. Seja então x um elemento maximal de P . Seja k o menor natural m tal que x pertence a qualquer m -família de P . Assim, para $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $d_i(P \setminus \{x\}) = d_i(P)$ e, para $i \geq k$, $d_i(P \setminus \{x\}) = d_i(P) - 1$, pela proposição anterior.

Assim, temos

$$\tilde{\lambda}_k(P \setminus \{x\}) = d_k(P \setminus \{x\}) - d_{k-1}(P \setminus \{x\}) = d_k(P) - d_{k-1}(P) - 1 = \tilde{\lambda}_k(P),$$

enquanto que, para $i \neq k$,

$$\tilde{\lambda}_i(P \setminus \{x\}) = \tilde{\lambda}_i(P).$$

Logo, $Y(\lambda(P \setminus \{x\}))$ difere de $Y(\lambda(P))$ apenas na coluna k , que tem menos uma caixa. Assim,

$$Y(\lambda(P \setminus \{x\})) \subset Y(\lambda(P)),$$

como pretendido. □

O teorema 2.42 tem várias consequências importantes. A primeira delas é o seguinte resultado, que constitui um primeiro passo na direcção da obtenção de um algoritmo recursivo para a determinação de $\lambda(P)$.

Corolário 2.44. *Sejam I e J ideais de ordem de P . Se I cobre J , então $Y(\lambda(I))$ cobre $Y(\lambda(J))$.*

Demonstração. Este resultado é uma consequência directa do teorema 2.42 e da proposição 1.16. □

O resultado anterior permite concluir que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{IO}(P) &\rightarrow \mathbb{Y} \\ I &\mapsto Y(\lambda(I)) \end{aligned}$$

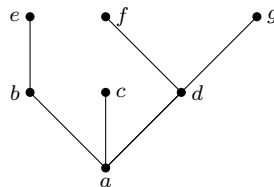
é isótona.

O corolário anterior, juntamente com as proposições 1.20 e 1.44, permite determinar uma bijecção entre o conjunto das extensões lineares de (P, \leq) e o conjunto dos quadros de Young standard de forma $\lambda(P)$.

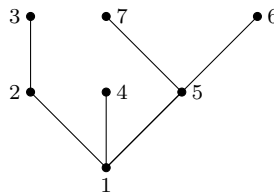
De facto, pela proposição 1.20, a uma extensão linear de P corresponde uma cadeia saturada de ideais de ordem de P , com mínimo \emptyset e máximo P . A esta cadeia saturada, pelo resultado anterior, corresponde uma cadeia saturada de diagramas de Young, com mínimo \emptyset e máximo $Y(\lambda(P))$. Pela proposição 1.44, a esta cadeia saturada de diagramas corresponde um quadro de Young standard.

Analisando as construções feitas nas proposições 1.20 e 1.44, podemos verificar que, dada uma extensão linear $\varphi : P \rightarrow [n]$, em que $|P| = n$, o quadro de Young standard P que lhe corresponde é definido pela seguinte condição: para cada $k \in [n]$, as entradas $1, \dots, k$ de P ocupam o diagrama de Young da partição $\lambda(\varphi^{-1}([k]))$. Denotamos este quadro de Young standard por $P(\varphi)$.

Exemplo. Consideremos uma vez mais o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Consideremos a extensão linear de P dada pelo seguinte diagrama¹:



¹Tal como foi descrito no exemplo do capítulo 1 que segue a definição de extensão linear.

Então, o quadro de Young correspondente a esta extensão linear é:

1	2	3
4	6	
5		
7		

Como anunciado no início da secção, vamos agora descrever um algoritmo que permite calcular recursivamente o diagrama de Young $Y(\lambda(P))$, a partir do reticulado dos ideais de ordem de (P, \leq) .

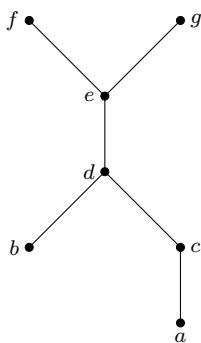
Teorema 2.45 (Fomin, [4]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e sejam x_1, \dots, x_k os elementos maximais de P . Seja $\lambda = \lambda(P)$. Então:*

- (i) *se $\lambda(P \setminus \{x_1\}) = \dots = \lambda(P \setminus \{x_k\}) = \lambda'$, então $Y(\lambda)$ obtém-se de $Y(\lambda')$ acrescentando uma caixa à linha k de $Y(\lambda')$;*
- (ii) *caso contrário, $Y(\lambda) = \bigcup_{i=1}^k Y(\lambda(P \setminus \{x_i\}))$.*

Uma vez que a relação de cobertura no reticulado dos ideais de ordem é caracterizada do modo descrito na proposição 1.16, o teorema anterior permite determinar os diagramas de Young dos ideais de ordem de cardinalidade k a partir dos diagramas de Young dos ideais de ordem de cardinalidade $k - 1$.

O exemplo que se segue ilustra este processo.

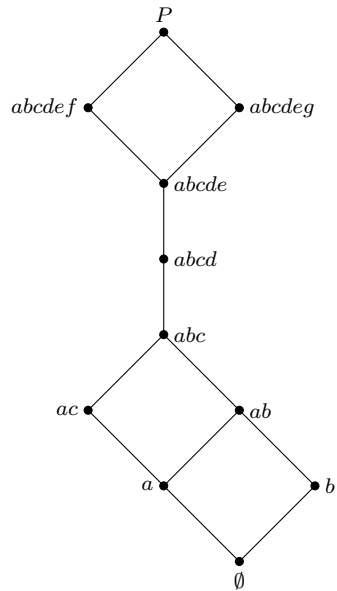
Exemplo. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



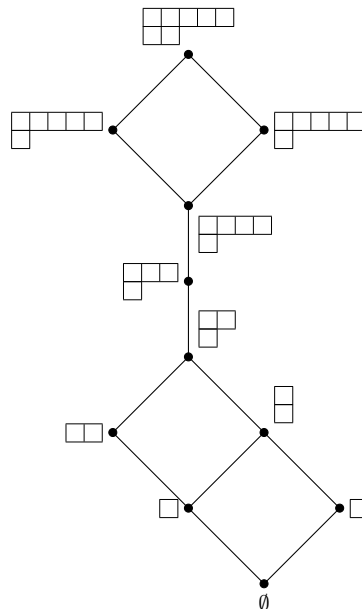
Temos que o diagrama de Young de P é

$$Y(\lambda(P)) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

O reticulado dos ideais de ordem de (P, \leq) tem o seguinte diagrama de Hasse (por uma questão de simplicidade, omitimos chavetas e vírgulas; o ideal de ordem $\{a, b, c\}$, por exemplo, denota-se abc):



Representando no diagrama de Hasse anterior os diagramas de Young dos ideais de ordem de (P, \leq) , podemos usar as regras recursivas do teorema 2.45 para obter estes diagramas.



Por exemplo, o diagrama de Young de abc obtém-se dos diagramas de Young de ab e ac por união, pois estes últimos são distintos. Por outro lado, o ideal de ordem P cobre dois ideais de ordem com o mesmo diagrama de Young, pelo que o seu diagrama se obtém acrescentando a um destes últimos uma caixa na segunda linha.

Para demonstrar o teorema 2.45, precisamos de definir o conceito de ortogonalidade de uma k -família e uma h -cofamília.

Definição 2.46. Sejam C uma h -cofamília e A uma k -família de P . Suponhamos que $C = C_1 \cup \dots \cup C_h$ e que $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, em que C_1, \dots, C_h são cadeias disjuntas e A_1, \dots, A_k são anticadeias disjuntas. Dizemos que C e A são *ortogonais* se

- (i) $P = C \cup A$;
- (ii) Para qualquer $i \in [h]$ e qualquer $j \in [k]$, $C_i \cap A_j \neq \emptyset$.

Os lemas seguintes apresentam caracterizações alternativas do conceito de ortogonalidade.

Lema 2.47. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito de cardinalidade n . Sejam C uma h -cofamília e A uma k -família de P .*

- (a) *C e A são ortogonais se e só se*

$$|C| + |A| = n + hk.$$

- (b) *Se C e A são ortogonais, então C é uma h -cofamília de cardinalidade máxima e A é uma k -família de cardinalidade máxima.*

Demonstração.

- (a) Temos que

$$n = |P| = |C \cup A| = |C| + |A| - |C \cap A|.$$

Suponhamos que $C = C_1 \cup \dots \cup C_h$ e que $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, em que C_1, \dots, C_h são cadeias disjuntas e A_1, \dots, A_k são anticadeias disjuntas. Então, temos

$$C \cap A = \left(\bigcup_{i=1}^h C_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) = \bigcup_{i=1}^h \bigcup_{j=1}^k (C_i \cap A_j).$$

Uma vez que uma cadeia e uma anticadeia se intersectam no máximo num elemento e uma vez que C e A são ortogonais, temos que $C_i \cap A_j = \{x_{ij}\}$, para cada $i \in [h]$ e cada $j \in [k]$, onde x_{ij} é um elemento de P . Visto que as cadeias C_i e as anticadeias A_j são disjuntas, os elementos x_{ij} são todos distintos. Logo,

$$|C \cap A| = hk.$$

Daqui se conclui que

$$n = |C| + |A| - hk,$$

ou seja,

$$|C| + |A| = n + hk.$$

- (b) Analisando o argumento usado para demonstrar a alínea (a), podemos concluir que, se C e A são uma h -cofamília e uma k -família, respectivamente, então

$$|C| + |A| \leq n + hk,$$

mesmo que C e A não sejam ortogonais. Suponhamos agora que C e A são ortogonais e C não tem cardinalidade máxima. Então, se C' é uma h -cofamília de cardinalidade máxima, vem,

$$|C'| + |A| > |C| + |A| = n + hk,$$

o que contradiz a observação anterior. Assim, C tem de ter cardinalidade máxima. Do mesmo modo se conclui que A tem de ter cardinalidade máxima.

□

Lema 2.48. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito de cardinalidade n . Sejam C uma h -cofamília de cardinalidade máxima e A uma k -família de cardinalidade máxima de P . Se (k, h) é um canto exterior de $Y(\lambda(P))$, então C e A são ortogonais.*

Demonstração. Tem-se que

$$|C| = \lambda_1(P) + \cdots + \lambda_h(P),$$

$$|A| = \lambda_1^*(P) + \cdots + \lambda_k^*(P).$$

Uma vez que (k, h) é um canto exterior de $Y(\lambda(P))$, vê-se facilmente, examinando o diagrama de Young, que

$$|C| + |A| = n + hk.$$

Pelo lema anterior, A e C são ortogonais.

□

Podemos agora demonstrar o teorema 2.45.

Demonstração. Suponhamos que $\lambda(P \setminus \{x_1\}) = \dots = \lambda(P \setminus \{x_k\}) = \lambda'$. O diagrama de Young $Y(\lambda(P))$ obtém-se acrescentando uma caixa ao diagrama $Y(\lambda')$. Suponhamos que a caixa acrescentada é a caixa (r, c) . Pelo lema 1.35, (r, c) é um canto exterior de $Y(\lambda)$.

Tem-se $\hat{d}_r(P \setminus \{x_i\}) = \hat{d}_r(P) - 1$, para qualquer $i \in [k]$. Assim, qualquer r -cofamília de cardinalidade máxima contém $\{x_1, \dots, x_k\}$. Uma vez que os elementos x_1, \dots, x_k são incomparáveis, tem-se $r \geq k$.

Seja A uma c -família de cardinalidade máxima. Como $d_c(P \setminus \{x_i\}) = d_c(P) - 1$, temos $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq A$. Pela maximalidade dos elementos x_i , tem-se $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq A_1$. Uma vez que todo o elemento de P é menor ou igual a um elemento x_i , para algum i , a anticadeia A_1 tem apenas estes elementos. Logo, $|A_1| = k$. Por outro lado, pelo lema anterior, A é ortogonal a qualquer r -família de cardinalidade máxima. Logo, A_1 tem pelo menos r elementos. Assim, $r \leq k$.

Concluimos que $r = k$, pelo que $Y(\lambda(P))$ se obtém de $Y(\lambda')$ acrescentando uma caixa à linha k . O segundo caso do enunciado é consequência do teorema 2.42. \square

2.3 Localização de caixas em diagramas de Young de conjuntos parcialmente ordenados

Nesta secção vamos apresentar dois teoremas que dão informação adicional sobre a localização das caixas que são removidas do diagrama de Young de um conjunto parcialmente ordenado quando deste se removem elementos extremais. Estes teoremas serão essenciais no capítulo seguinte.

Por ser bastante extensa e técnica, não apresentaremos aqui uma demonstração do resultado que se segue, que pode ser encontrada em [4].

Teorema 2.49 (Fomin, [4]). *Sejam p_1 e p_2 elementos extremais de um conjunto parcialmente ordenado finito P . Suponhamos que $\lambda(P \setminus \{p_1\}) = \lambda(P \setminus \{p_2\})$. Definamos caixas a e b de modo que:*

- $Y(\lambda(P \setminus \{p_1\})) = Y(\lambda(P \setminus \{p_2\})) = Y(\lambda(P)) \setminus \{b\}$;
- $Y(\lambda(P \setminus \{p_1, p_2\})) = Y(\lambda(P)) \setminus \{a, b\}$.

Então temos que:

- (i) *Se p_1 e p_2 forem ambos mínimos ou ambos máximos, então a está na mesma coluna de b ou numa coluna à direita de b ;*

2.3. Localização de caixas em diagramas de Young de conjuntos parcialmente ordenados

(ii) Se p_1 for maximal e p_2 for minimal (ou vice-versa), então a está na mesma coluna de b ou na coluna imediatamente à esquerda de b .

As conclusões do teorema 2.49 não podem ser melhoradas, isto é, dado um diagrama de Young Y e caixas a e b de Y numa das posições relativas permitidas pelo teorema 2.49, é possível encontrar um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) e elementos extremais p_1 e p_2 de P nas condições descritas nas hipóteses do teorema. Uma vez que não faremos uso deste facto no resto do texto, não o demonstramos aqui. A demonstração pode ser encontrada em [4].

Concluimos esta secção com o seguinte teorema de Gansner.

Teorema 2.50 (Gansner, [12]). *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito. Seja p_1 um elemento maximal de P e seja p_2 um elemento maximal de $P \setminus \{p_1\}$ tal que p_1 cobre p_2 . Definamos caixas a e b de modo que:*

- $Y(\lambda(P \setminus \{p_1\})) = Y(\lambda(P)) \setminus \{b\}$;
- $Y(\lambda(P \setminus \{p_1, p_2\})) = Y(\lambda(P)) \setminus \{a, b\}$.

Então a está estritamente à esquerda de b .

Demonstração. Suponhamos que $a = (x_a, y_a)$ e que $b = (x_b, y_b)$. Queremos mostrar que $y_a < y_b$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $y_a \geq y_b$. Então temos $x_a < x_b$ e, portanto, $\hat{d}_{x_a}(P) = \hat{d}_{x_a}(P \setminus \{p_1\})$. Temos ainda que $\hat{d}_{x_a}(P \setminus \{p_1\}) = \hat{d}_{x_a}(P \setminus \{p_1, p_2\}) + 1$, pelo que existe uma x_a -cofamília de cardinalidade máxima C tal que $p_2 \in C$. Como $p_2 < p_1$, $C \cup \{p_1\}$ é uma x_a -cofamília de P que tem mais elementos do que C , o que é absurdo. Logo, $y_a < y_b$. \square

QUADROS DE YOUNG: ALGORITMOS COMBINATÓRIOS

Neste capítulo, vamos apresentar alguns algoritmos combinatórios clássicos envolvendo quadros de Young standard.

Iniciaremos o capítulo com a apresentação da correspondência de Robinson-Schensted, que se baseia num algoritmo de inserção de caixas em quadros de Young, devido a Schensted. A correspondência de Robinson-Schensted estabelece uma bijecção entre o conjunto das permutações¹ de $[n]$ e o conjunto dos pares de quadros de Young standard com a mesma forma. Este algoritmo foi estudado por Schensted em [21] com o objectivo de demonstrar resultados sobre subsequências crescentes e decrescentes em permutações; apresentaremos um dos resultados centrais de Schensted a este respeito neste capítulo.

A correspondência de Robinson-Schensted pode ser generalizada para o contexto dos quadros de Young semistandard, dando origem à correspondência de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), que será o segundo algoritmo abordado neste capítulo.

O terceiro algoritmo que estudaremos neste capítulo é o *jeu de taquin*, de Schützenberger, que se baseia em algoritmos de “deslizamento” de caixas em quadros de Young enviesados. Utilizando deslizamentos, é possível obter um quadro de Young standard a partir de um quadro de Young enviesado standard; a unicidade deste quadro de Young, para cada quadro de Young enviesado standard dado, é o teorema fundamental da terceira secção deste capítulo.

Finalmente, apresentaremos o algoritmo de evacuação, que se baseia igualmente em deslizamentos.

Os algoritmos clássicos descritos neste capítulo serão abordados novamente

¹Denotamos por S_n o conjunto de todas as bijecções de $[n]$ em $[n]$, às quais chamamos *permutações*.

no capítulo 4, utilizando a noção de diagrama de crescimento e recorrendo a resultados apresentados no capítulo 2. Assim sendo, as propriedades fundamentais destes algoritmos serão demonstradas no capítulo 4, de modo simples e transparente.

As referências que seguimos ao longo deste capítulo são essencialmente [1], [2], [11], [20], [21] e [25].

3.1 A correspondência de Robinson-Schensted

Nesta secção, vamos apresentar uma bijecção entre permutações e pares de quadros de Young standard. Esta bijecção, conhecida como correspondência de Robinson-Schensted, baseia-se no algoritmo de inserção de Schensted em quadros de Young standard. Enunciaremos algumas propriedades desta bijecção, que serão demonstradas no capítulo 4, após termos desenvolvido uma versão da correspondência de Robinson-Schensted que envolve diagramas de crescimento. Veremos ainda algumas aplicações da correspondência de Robinson-Schensted à determinação de subsequências crescentes e decrescentes de comprimento máximo numa permutação.

Ao longo deste capítulo, iremos utilizar livremente expressões como “acrescentar uma caixa” a um quadro de Young ou “remover uma caixa” de um quadro de Young. Estas expressões devem ser entendidas como estando a referir-se a operações em que se altera a forma do quadro de Young. Por exemplo, se P tiver forma λ , acrescentar uma caixa à terceira linha de P significa que se considera um novo quadro de Young cuja forma é a partição

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 + 1, \lambda_4, \dots).$$

Na maioria dos casos, a terminologia usada é largamente auto-explicativa e não vimos necessidade de sobrecarregar o texto com definições formais que a clarificassem.

Ao longo deste capítulo, utilizaremos sistematicamente a letra P para designar quadros de Young, ao contrário do capítulo anterior, em que P designava um conjunto parcialmente ordenado. Não haverá, à partida, qualquer motivo de confusão, uma vez que o contexto esclarecerá a que conceito nos referimos em cada situação.

3.1.1 Algoritmo de inserção de Schensted

Começamos por apresentar o algoritmo de inserção de Schensted nas linhas. Este algoritmo foi desenvolvido por Schensted ([21]), inicialmente para quadros de Young standard e posteriormente para o caso dos quadros de Young semistandard. Começamos por apresentar o algoritmo de inserção no caso dos quadros de Young standard; a sua generalização ao caso semistandard será feita na secção seguinte.

Neste capítulo, será útil considerar a seguinte terminologia: um quadro de Young diz-se um *quadro de Young standard parcial* se for estritamente crescente nas linhas e nas colunas e as suas entradas forem todas distintas. Assim, a única diferença entre um quadro de Young standard e um quadro de Young standard parcial é o facto de, num quadro de Young standard parcial, as entradas não serem necessariamente todos os elementos do conjunto $[n]$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Algoritmo 3.1 (Inserção de Schensted nas linhas). Seja P um quadro de Young standard parcial e seja x um número natural que não ocorra nas entradas de P . Ponha-se $l = 1$ e $a = x$. O quadro de Young $r_x(P)$ obtém-se do quadro de Young P aplicando a P o seguinte algoritmo:

1. Se a for maior do que todas as entradas da linha l do quadro (ou se não houver caixas na linha l), acrescente-se uma caixa no final da linha l com entrada a e o algoritmo termina. Caso contrário, siga-se para o passo 2.
2. Seja y a entrada mais à esquerda na linha l que é maior do que a . Substitua-se y por a nessa linha. Aumente-se o valor de l uma unidade, ponha-se $a = y$ e prossiga-se com o passo 1.

Diz-se que $r_x(P)$ se obteve de P por *inserção de x nas linhas de P* .

É claro que o algoritmo anterior tem de terminar: uma vez que P tem um número finito de linhas, se o algoritmo não terminar na última linha do quadro, terminará certamente no passo seguinte, criando-se uma nova linha com uma única caixa.

Exemplo. Consideremos o quadro de Young standard parcial seguinte:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}.$$

Determinemos $r_8(P)$. Uma vez que 8 é maior que todas as entradas da primeira linha de P , temos

$$r_8(P) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Consideremos agora o quadro de Young standard parcial seguinte:

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Determinemos $r_2(Q)$. Como 2 não é maior que todas as entradas da primeira linha, o número 2 “desloca” o número 3 da primeira linha, que deve ser inserido na linha seguinte. O número 3 desloca, por sua vez, a entrada 5 da segunda linha, e o número 5 desloca a entrada 6 da última linha, sendo o número 6 acrescentado à quarta linha de Q . Portanto,

$$r_2(Q) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline 3 & 7 & & \\ \hline 5 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} .$$

O resultado seguinte estabelece que o algoritmo de inserção de Schensted transforma quadros standard parciais em quadros standard parciais.

Teorema 3.2 (Schensted, [21]). *Seja P um quadro de Young standard parcial e seja x um número natural que não ocorra nas entradas de P . O quadro de Young $r_x(P)$ é um quadro standard parcial.*

Demonstração. Em primeiro lugar, vamos ver que a inserção de uma caixa num quadro de Young produz um arranjo de caixas que é o diagrama de Young de uma partição. Para isso, basta ver que o algoritmo de inserção não faz com que uma linha de $r_x(P)$ tenha mais caixas que a anterior. Se uma linha i de P tiver um número menor de caixas que a linha anterior, então a linha i de $r_x(P)$ tem no máximo mais uma caixa que a linha i de P . Logo, a linha i de $r_x(P)$ não tem mais caixas que a linha anterior. No caso em que uma linha i de P tem o mesmo número de caixas que a linha anterior, se uma entrada a for deslocada da linha $i - 1$, então essa entrada irá deslocar uma entrada da linha i que esteja imediatamente abaixo dela ou mais à esquerda, uma vez que P é crescente nas linhas e colunas. Portanto, a não será acrescentada no final da linha i , e a linha i não ficará com mais caixas que a linha $i - 1$.

É fácil ver que $r_x(P)$ é crescente nas linhas. Resta então ver que é crescente nas colunas. Consideremos então duas entradas a e b de $r_x(P)$ que estejam na mesma coluna, com b imediatamente abaixo de a . Se ambas estas entradas estiverem nas suas posições originais, tem-se $a < b$. Caso contrário, consideremos os dois casos seguintes:

- (i) a é uma entrada nova ou deslocada. Neste caso, b é a entrada deslocada por a ou era a entrada que estava por baixo da entrada deslocada por a . Em qualquer caso, $a < b$.
- (ii) b é uma entrada deslocada. Qualquer entrada deslocada acaba numa posição imediatamente abaixo da entrada que a deslocou ou então mais à esquerda. Em qualquer dos casos se conclui que $a < b$.

Assim, concluímos que $r_x(P)$ é crescente nas colunas. □

De modo análogo podemos descrever um algoritmo de inserção nas colunas de um quadro de Young standard, obtendo-se um resultado semelhante ao anterior.

Algoritmo 3.3 (Inserção de Schensted nas colunas). Seja P um quadro de Young standard parcial e seja x um número natural que não ocorra nas entradas de P . Ponha-se $c = 1$ e $b = x$. O quadro de Young $c_x(P)$ obtém-se do quadro de Young P aplicando a P o seguinte algoritmo:

1. Se a for maior do que todas as entradas da coluna c do quadro (ou se não houver caixas na coluna c), acrescente-se uma caixa no final da coluna c com entrada b e o algoritmo termina. Caso contrário, siga-se para o passo 2.
2. Caso contrário, seja y a entrada mais acima na coluna c que é maior do que b . Substitua-se y por b nessa coluna. Aumente-se o valor de c uma unidade, ponha-se $b = y$ e prossiga-se com o passo 1.

Diz-se que $c_x(P)$ se obteve de P por *inserção de x nas colunas de P* .

Tendo em conta os algoritmos descritos e a definição de quadro de Young transposto, é fácil concluir o resultado que se segue.

Lema 3.4. *Seja P um quadro de Young standard parcial e seja x um número natural que não ocorra nas entradas de P . Então*

$$c_x(P) = \left(r_x \left(P^\top \right) \right)^\top.$$

O teorema seguinte pode demonstrar-se de modo análogo ao teorema 3.2 ou fazendo uso do lema anterior.

Teorema 3.5. *Seja P um quadro de Young standard parcial e seja x um número natural que não ocorra nas entradas de P . O quadro de Young $c_x(P)$ é um quadro de Young standard parcial.*

3.1.2 A correspondência de Robinson-Schensted

O algoritmo de inserção de Schensted é o ingrediente fundamental para a definição da correspondência de Robinson-Schensted. Esta correspondência é um algoritmo, inicialmente estudado por G. B. Robinson ([19]) e posteriormente reformulado por Schensted ([21]), que a cada permutação $\sigma \in S_n$ faz

corresponder, de forma bijectiva, um par de quadros de Young standard com a mesma forma.

Passamos agora a descrever a correspondência de Robinson-Schensted.

Algoritmo 3.6 (Correspondência de Robinson-Schensted). Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $\sigma \in S_n$. Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, definimos um par de quadros de Young (P_k, Q_k) , com a mesma forma, do seguinte modo:

- $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$;
- Para $k \geq 1$:
 - $P_k = r_{\sigma(k)}(P_{k-1})$;
 - Q_k obtém-se de Q_{k-1} acrescentando-lhe uma caixa com entrada k , de tal modo que se tenha $\text{sh}(Q_k) = \text{sh}(P_k)$.

Ao quadro P_n chamamos *quadro de inserção* de σ e ao quadro Q_n chamamos *quadro de registo* de σ . Representamos também estes quadros por $P(\sigma)$ e $Q(\sigma)$, respectivamente. Escrevemos

$$\sigma \xrightarrow{\text{R-S}} (P(\sigma), Q(\sigma)).$$

Tendo em conta o teorema 3.2, a análise do algoritmo anterior permite obter facilmente o resultado que se segue.

Proposição 3.7. *Seja $\sigma \in S_n$. Os quadros $P(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ são quadros de Young standard com a mesma forma λ , em que $\lambda \vdash n$.*

Exemplo. Consideremos a permutação¹ $\sigma = 613542 \in S_6$. Os quadros P_k e Q_k ($k \in \{0, \dots, n\}$) são os seguintes:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$P_6 = P(\sigma)$
\emptyset	$\boxed{6}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$
Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	$Q_6 = Q(\sigma)$
\emptyset	$\boxed{1}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$

¹Usaremos frequentemente a seguinte notação para permutações: representamos uma permutação $\sigma \in S_n$ pela sequência, escrita sem parênteses ou vírgulas, $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$.

Assim,

$$\sigma \xrightarrow{\text{R-S}} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

A correspondência de Robinson-Schensted é, de facto, uma bijecção entre os elementos de S_n e os pares de quadros de Young standard com a mesma forma. Para demonstrar este facto, é possível descrever explicitamente uma bijecção inversa, que se baseia num algoritmo inverso do algoritmo de inserção de Schensted – o algoritmo de remoção de Schensted.

Algoritmo 3.8 (Remoção de Schensted nas linhas). Seja P um quadro de Young standard parcial e seja c um canto interior de P . Suponhamos que c está na linha k . Ponha-se $l = k$ e $a = x$, em que x é a entrada da caixa c . Aplicamos a P o seguinte algoritmo:

1. Remova-se a caixa c se encontra do quadro P .
2. Se $l = 1$, o algoritmo termina. Caso contrário, siga-se para o passo 3.
3. Seja y a maior entrada da linha $l - 1$ menor do que x . Substitua-se y por x em P . Diminua-se o valor de l uma unidade, ponha-se $x = y$ e siga-se para o passo 2.

Seja z o número natural que deixa de ser entrada de P após aplicação do algoritmo anterior. Denotamos o quadro que se obtém de P por aplicação do algoritmo anterior por $r_z^{-1}(P)$; dizemos que $r_x^{-1}(P)$ se obteve de P por *remoção nas linhas de P* .

É evidente que o algoritmo anterior tem de terminar. É também fácil ver, com uma análise cuidada do algoritmo, que $r_z^{-1}(P)$ é um quadro de Young parcial.

Exemplo. Consideremos o quadro de Young standard parcial seguinte:

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Vamos aplicar o algoritmo de remoção de Schented à caixa $(3, 1)$ do quadro anterior. Uma vez que a caixa não se encontra na primeira linha, o número 6 substitui o número 5 na linha anterior, que, por sua vez, substitui o número 4

na primeira linha. Logo, o algoritmo de remoção produz o seguinte quadro de Young:

$$r_4^{-1}(P) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & & \\ \hline \end{array}.$$

Temos o seguinte resultado.

Lema 3.9. *Seja P um quadro de Young standard parcial e seja $x \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Suponhamos que x não ocorre nas entradas de P . A inserção nas linhas de x em P origina uma nova caixa c , que é canto interior, e a aplicação do algoritmo de remoção a essa caixa c remove a entrada x de $r_x(P)$, tendo-se*

$$r_x^{-1}(r_x(P)) = P.$$

- (b) *Suponhamos que x ocorre nas entradas de P e se encontra situado num canto interior de P . Suponhamos ainda que a remoção da caixa onde x se encontra produz um quadro de Young standard parcial $r_y^{-1}(P)$. Temos*

$$r_y(r_y^{-1}(P)) = P.$$

É agora simples descrever a correspondência inversa da correspondência de Robinson-Schensted.

Algoritmo 3.10 (Correspondência de Robinson-Schensted inversa). Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja (P, Q) um par de quadros de Young standard de forma $\lambda \vdash n$. Para cada $k \in 0, \dots, n$, definimos um par de quadros de Young standard parciais (P_k, Q_k) , com a mesma forma, e uma permutação $\sigma \in S_n$, do seguinte modo:

- $(P_n, Q_n) = (P, Q)$;
- Para $k < n$:
 - Q_k obtém-se de Q_{k+1} eliminando a caixa com a entrada $k+1$;
 - P_k obtém-se de P_{k+1} aplicando o algoritmo de remoção de Schensted ao canto interior correspondente à caixa de Q_{k+1} com entrada $k+1$.
- Para cada $k \in [n]$, $\sigma(k) = x_k$, em que x_k é o número que é entrada de P_k mas não de P_{k-1} .

O teorema seguinte demonstra-se agora facilmente, analisando cuidadosamente os algoritmos anteriores.

Teorema 3.11. *A aplicação que a cada $\sigma \in S_n$ faz corresponder o par de quadros de Young $(P(\sigma), Q(\sigma))$ é uma bijecção entre S_n e o conjunto dos pares de quadros de Young standard com n caixas e com a mesma forma.*

Corolário 3.12 (Identidade de Robinson-Schensted). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$n! = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} (t_\lambda)^2.$$

No capítulo 4 demonstraremos que a correspondência de Robinson-Schensted é uma bijecção, recorrendo a diagramas de crescimento.

O teorema seguinte não é evidente, tendo apenas em conta a definição da correspondência de Robinson-Schensted. Este teorema será demonstrado no capítulo 4.

Teorema 3.13 (Schützeberger, [22]). *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$, então*

$$\sigma^{-1} \xrightarrow{R-S} (Q, P).$$

Dada uma permutação $\sigma \in S_n$, definimos a *permutação reversa* de σ , σ^r , do seguinte modo: para cada $i \in [n]$, $\sigma^r(i) = \sigma(n+1-i)$. Se $\sigma = \sigma(1) \cdots \sigma(n)$, então $\sigma^r = \sigma(n) \cdots \sigma(1)$.

O resultado seguinte relaciona a noção de permutação reversa com a transposição de quadros de Young e será demonstrado no capítulo 4.

Proposição 3.14 (Schensted, [21]). *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se $P(\sigma^r) = (P(\sigma))^T$.*

Esta proposição apenas nos dá informação acerca do quadro de inserção da permutação reversa; a determinação do seu quadro de registo será feita mais à frente neste capítulo.

3.1.3 Subsequências crescentes e decrescentes

Em [21], Schensted utilizou a correspondência de Robinson-Schensted para obter resultados acerca de subsequências crescentes e decrescentes de permutações. Iremos agora enunciar os resultados mais importantes de Schensted acerca deste assunto. Estes resultados serão demonstrados no capítulo 4.

Começemos com uma definição.

Definição 3.15. Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $\sigma \in S_n$. Uma *subsequência crescente* (respectivamente, *subsequência decrescente*) de σ é uma sequência

$$(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)),$$

em que $i_1 < \dots < i_k$ e $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$ (respectivamente, $\sigma(i_1) > \dots > \sigma(i_k)$). Ao número natural k chamamos *comprimento* da sequência.

Exemplo. Consideremos a permutação $\sigma = 24317658 \in S_8$. A sequência 2478 é uma subsequência crescente de comprimento máximo de σ , enquanto que as sequências 765 e 431 são subsequências decrescentes de comprimento máximo de σ .

O resultado fundamental de Schensted sobre subsequências crescentes e decrescentes de permutações é o seguinte.

Teorema 3.16 (Schensted, [21]). *Seja $\sigma \in S_n$. O comprimento máximo de uma subsequência crescente (respectivamente, decrescente) de σ é igual ao número de caixas na primeira linha (respectivamente, coluna) de $P(\sigma)$.*

3.2 A correspondência RSK

Nesta secção, generalizaremos a correspondência de Robinson-Schensted para quadros de Young semistandard. Tal generalização consiste essencialmente numa modificação apropriada do algoritmo de inserção de Schensted. Alguns dos resultados apresentados nesta secção são generalizações naturais dos resultados da secção anterior; as suas demonstrações são adaptações dos argumentos usados na secção anterior e serão, na sua maioria omitidas.

Começemos por apresentar o algoritmo de inserção de Schensted; este é essencialmente o mesmo algoritmo que foi apresentado no caso dos quadros de Young standard.

Algoritmo 3.17 (Inserção de Schensted nas linhas em quadros semistandard). Seja P um quadro de Young semistandard e seja x um número natural. Ponha-se $l = 1$ e $a = x$. O quadro de Young $r_x(P)$ obtém-se do quadro de Young P aplicando o seguinte algoritmo:

1. Se a for maior ou igual do que todas as entradas da linha l do quadro (ou se não houver caixas na linha l), acrescente-se uma caixa no final da linha l com entrada a e o algoritmo termina. Caso contrário, siga-se para o passo 2.

2. Seja y a entrada mais à esquerda na linha l que é maior do que a . Substitua-se y por a nessa linha. Aumente-se o valor de l uma unidade, ponha-se $a = y$ e prossiga-se com o passo 1.

Diz-se que $r_x(P)$ se obteve de P por *inserção de x nas linhas de P* .

Tal como no caso dos quadros de Young standard, o algoritmo anterior tem necessariamente de terminar.

Exemplo. Consideremos o quadro de Young semistandard seguinte:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 4 & 5 & 6 & & \\ \hline \end{array} .$$

Determinemos $r_1(P)$. O número 1 “desloca” a entrada 2 da primeira linha, que deve ser inserida na linha seguinte. O número 2 desloca, por sua vez, a entrada 3 da segunda linha, e o número 3 desloca a entrada 4 da terceira linha, sendo o número 4 acrescentado no fim da primeira coluna, na quarta linha. Portanto,

$$r_1(P) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 3 & 5 & 6 & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} .$$

O resultado seguinte é análogo ao teorema 3.2 e demonstra-se de modo semelhante.

Teorema 3.18 (Schensted, [21]). *Seja P um quadro de Young semistandard e seja x um número natural. O quadro de Young $r_x(P)$ é um quadro semistandard.*

É possível descrever um algoritmo de inserção nas colunas em quadros semistandard, análogo ao descrito para quadros de Young standard. Não o faremos aqui; uma descrição deste algoritmo pode ser encontrada em [1].

Para descrever a correspondência de Robinson-Schensted-Knuth, precisamos de uma definição.

Definição 3.19. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *permutação generalizada* α de comprimento n é um par de seqüências (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) , satisfazendo, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

- (i) $x_i \leq x_{i+1}$;

(ii) se $x_i = x_{i+1}$, então $y_i \leq y_{i+1}$.

Denotamos a permutação generalizada α por

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Chamamos ao conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ o x -conteúdo de α e a $\{y_1, \dots, y_n\}$ o y -conteúdo de α .

É claro que uma permutação S_n é uma permutação generalizada de comprimento n cujo x -conteúdo e y -conteúdo são ambos iguais a $[n]$.

Podemos agora descrever a correspondência de Robinson-Schensted-Knuth (RSK).

Algoritmo 3.20 (Correspondência de Robinson-Schensted-Knuth, [15]). Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

uma permutação generalizada de comprimento n . Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$, definimos um par de quadros de Young (P_k, Q_k) , com a mesma forma, do seguinte modo:

- $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$;
- Para $k \geq 1$:
 - $P_k = r_{y_k}(P_{k-1})$;
 - Q_k obtém-se de Q_{k-1} acrescentando-lhe uma caixa com entrada x_k , de tal modo que se tenha $\text{sh}(Q_k) = \text{sh}(P_k)$.

Ao quadro P_n chamamos *quadro de inserção* de α e ao quadro Q_n chamamos *quadro de registo* de α . Representamos também estes quadros por $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$, respectivamente. Escrevemos

$$\alpha \xrightarrow{\text{R-S-K}} (P(\alpha), Q(\alpha)).$$

As notações descritas no final do algoritmo anterior introduzem uma aparente ambiguidade. Tendo em conta que uma permutação σ é uma permutação generalizada, $P(\sigma)$ e $Q(\sigma)$ podem denotar os quadros de inserção e registo que correspondem a σ pela correspondência de Robinson-Schensted ou pela correspondência RSK. No entanto, é fácil ver que a restrição do algoritmo anterior a permutações coincide com a correspondência de Robinson-Schensted descrita na secção anterior.

Tem-se o seguinte resultado, análogo à proposição 3.7

Proposição 3.21. *Seja α uma permutação generalizada de comprimento n . Temos que $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ são quadros de Young semistandard com a mesma forma λ , em que $\lambda \vdash n$.*

Exemplo. Consideremos a permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os quadros P_k e Q_k ($k \in \{0, \dots, n\}$) são os seguintes:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$P_6 = P(\sigma)$
\emptyset	$\boxed{1}$	$\boxed{1 \ 1}$	$\boxed{1 \ 1 \ 3}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & & \end{array}$
Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	$Q_6 = Q(\sigma)$
\emptyset	$\boxed{1}$	$\boxed{1 \ 2}$	$\boxed{1 \ 2 \ 2}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & \end{array}$

Assim,

$$\alpha \xrightarrow{\text{R-S-K}} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & \end{array} \right).$$

O teorema que se segue é análogo ao teorema 3.11 e será demonstrado no último capítulo¹.

Teorema 3.22. *A aplicação que a cada permutação generalizada α , de comprimento n , faz corresponder o par $(P(\alpha), Q(\alpha))$ é uma bijecção entre o conjunto das permutações generalizadas de comprimento n e o conjunto dos pares de quadros de Young semistandard com n caixas e com a mesma forma.*

Para concluir esta secção, vamos enunciar a generalização do teorema 3.13 para a correspondência RSK. Para isso, será necessária uma representação alternativa das permutações generalizadas.

Definição 3.23. Seja α uma permutação generalizada de comprimento n e sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Definimos a *multiplicidade de (i, j) em α* , e denotamo-la por $m_{ij}(\alpha)$, como sendo a cardinalidade do conjunto

$$\{s \in [n] : x_s = i, y_s = j\}.$$

¹É possível descrever um algoritmo de remoção para quadros semistandard, que dá origem a uma inversa da correspondência RSK. A correspondência RSK inversa é semelhante à correspondência de Robinson-Schensted inversa, mas com algumas modificações decorrentes, essencialmente, do facto de os quadros semistandard poderem ter entradas repetidas. Não faremos a descrição desse algoritmo aqui; ela pode ser encontrada em [1].

Consideremos uma permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Seja $k = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ e seja $l = \max\{y_1, \dots, y_l\}$. À permutação generalizada α podemos fazer corresponder a matriz de tipo $k \times l$ com entradas em \mathbb{N} cuja entrada (i, j) é igual a $m_{ij}(\alpha)$. A última linha e a última coluna desta matriz são não nulas.

Dada uma matriz M com entradas em \mathbb{N} , tal que a sua última linha e última coluna não sejam nulas, é possível definir uma única permutação generalizada α tal que $M_\alpha = M$. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 3.24. *Existe uma bijecção entre o conjunto das permutações generalizadas e o conjunto das matrizes de entradas em \mathbb{N} cuja última linha e última coluna são não nulas.*

Dada uma permutação α , denotamos por α^{-1} a permutação generalizada tal que

$$M_{\alpha^{-1}} = (M_\alpha)^\top.$$

Se α for uma permutação, pode verificar-se facilmente que α^{-1} é a permutação inversa de α usual.

Exemplo. Consideremos a permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, tem-se

$$M_{\alpha^{-1}} = (M_\alpha)^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

O resultado que se segue é análogo ao teorema 3.13.

Teorema 3.25 (Knuth, [15]). *Seja α uma permutação generalizada. Se $\alpha \xrightarrow{R-S-K} (P, Q)$, então*

$$\alpha^{-1} \xrightarrow{R-S} (Q, P).$$

3.3 Deslizamento: o *jeu de taquin* de Schützenberger

Nesta secção, apresentaremos um outro algoritmo combinatório envolvendo quadros de Young, o *jeu de taquin* de Schützenberger. Este algoritmo permite obter, a partir de um quadro de Young enviesado standard, um quadro de Young standard (não enviesado). Este algoritmo, desenvolvido por Schützenberger [23], baseia-se nos algoritmos de deslizamento que passamos a descrever.

Algoritmo 3.26 (Deslizamento para a frente). *Seja P um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ . Seja c um canto interior de μ . Ponha-se $b = c$. O quadro de Young enviesado $j^c(P)$ obtém-se de P aplicando-lhe o seguinte algoritmo:*

1. Se b for um canto interior de λ , o algoritmo termina. Caso contrário, prossiga-se para o passo 2.
2. Se $b = (i, j)$, seja $x = \min\{P(i+1, j), P(i, j+1)\}$ (caso um dos elementos $P(i+1, j)$ ou $P(i, j+1)$ não esteja definido, seja x igual ao outro elemento). Acrescente-se a caixa b a $Y(\lambda/\mu)$, com entrada x , elimine-se a caixa cuja entrada era originalmente x e ponha-se b igual a essa caixa. Prossiga-se para o passo 1.

Diz-se que $j^c(P)$ se obteve de P por um *deslizamento para a frente*.

Note-se que o algoritmo anterior acrescenta uma caixa ao quadro P (o canto interior de μ de que se parte) e remove-lhe outra caixa (um canto interior de λ), pelo que o número de caixas de $j^c(P)$ é igual ao número de caixas de P .

Algoritmo 3.27 (Deslizamento para trás). *Seja P um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ . Seja c um canto exterior de λ . Ponha-se $b = c$. O quadro de Young enviesado $j_c(P)$ obtém-se de P aplicando-lhe o seguinte algoritmo:*

1. Se b for um canto exterior de μ , o algoritmo termina. Caso contrário, prossiga-se para o passo 2.

2. Se $b = (i, j)$, seja $x = \max\{P(i-1, j), P(i, j-1)\}$ (caso um dos elementos $P(i-1, j)$ ou $P(i, j-1)$ não esteja definido, seja x igual ao outro elemento). Acrescente-se a caixa b a $Y(\lambda/\mu)$, com entrada x , elimine-se a caixa cuja entrada era originalmente x e ponha-se b igual a essa caixa. Prossiga-se para o passo 1.

Diz-se que $j_c(P)$ se obteve de P por um *deslizamento para trás*.

Tal como observado para o algoritmo de deslizamento para a frente, o algoritmo anterior acrescenta um canto exterior de λ ao quadro P e remove um canto exterior de μ .

Exemplo. Consideremos o quadro de Young enviesado standard de forma $(5, 5, 3)/(3, 1)$ seguinte:

$$P = \begin{array}{cccc} & & & 4 & 7 \\ & & 2 & 3 & 5 & 9 \\ & 1 & 6 & 8 & & \end{array}$$

Consideremos o canto interior $c = (1, 3)$ de $\mu = (3, 1)$. O quadro de Young $j^c(P)$ obtém-se através da seguinte sequência de passos:

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 4 & 7 \\ & 2 & & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & 3 & 4 & 7 \\ & 2 & 5 & & 9 \\ 1 & 6 & 8 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & 3 & 4 & 7 \\ & 2 & 5 & 9 & \\ 1 & 6 & 8 & & \end{array} = j^c(P).$$

No final deste deslizamento, é removida a caixa $(2, 5)$ de P .

Consideremos agora o canto exterior $d = (3, 4)$ de $\lambda = (5, 5, 3)$. O quadro de Young $j_d(P)$ obtém-se através da seguinte sequência de passos:

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 7 \\ & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & & 8 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & 4 & 7 \\ & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & & 6 & 8 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & 4 & 7 \\ & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & \end{array} = j_d(P).$$

No final deste deslizamento, é removida a caixa $(2, 2)$ de P .

Tal como para o algoritmo de inserção de Schensted, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.28. *Seja P um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ . Seja c um canto interior de μ e seja d um canto exterior de λ . Os quadros de Young enviesados $j^c(P)$ e $j_d(P)$ são quadros de Young enviesados standard.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso dos deslizamentos para a frente (a demonstração é inteiramente análoga no outro caso). Basta verificar que cada mudança de posição de uma entrada para outra caixa não altera o facto de o quadro de Young enviesado ser crescente nas linhas e colunas.

Consideremos então uma caixa (i, j) que desempenhe o papel de caixa a do segundo passo do algoritmo de deslizamento para a frente e seja z a entrada da caixa a . Seja $x = \min\{P(i+1, j), P(i, j+1)\}$ e seja $y = \max\{P(i+1, j), P(i, j+1)\}$. Há dois casos a considerar:

1. $x = P(i+1, j)$. Neste caso, a entrada x passará a ocupar a caixa (i, j) . É claro que as entradas continuarão por ordem crescente na coluna j . Uma vez que $z < x < y$, as entradas da linha i também estarão por ordem crescente.
2. $x = P(i, j+1)$. Este caso é análogo ao anterior.

Assim, cada mudança de posição de uma entrada no algoritmo de deslizamento não altera a ordem crescente das entradas nas linhas e colunas, o que conclui a demonstração. \square

Definição 3.29. Sejam P e Q quadros de Young enviesados standard. P e Q dizem-se *equivalentes*, e escrevemos $P \simeq Q$, se P se pode obter de Q através de uma sequência finita de deslizamentos (para a frente ou para trás).

A relação definida anteriormente é de facto uma relação de equivalência. Para o demonstrar, precisamos do lema que se segue.

Lema 3.30. *Seja P um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ .*

- (a) *Seja c um canto interior de μ e seja d o canto interior de λ que não ocorre em $j^c(P)$. Então*

$$j_d(j^c(P)) = P.$$

- (b) *Seja d um canto exterior de λ e seja c o canto exterior de μ que não ocorre em $j_d(P)$. Então*

$$j^c(j_d(P)) = P.$$

Demonstração. Para provar a alínea (a), basta ter em consideração que as entradas que mudam de posição no deslizamento para a frente retornam à sua posição inicial no deslizamento para trás seguinte, tendo em conta que o canto d é aquele que é removido na passagem para $j^c(P)$. A alínea (b) prova-se de forma análoga. \square

Podemos agora demonstrar o resultado que se segue.

Proposição 3.31. *A relação \simeq entre quadros de Young enviesados standard é uma relação de equivalência.*

Demonstração. A reflexividade e simetria são consequência do lema anterior. A transitividade é consequência imediata da definição da relação \simeq . \square

Consideremos um quadro de Young enviesado standard P , de forma λ/μ e seja c um canto interior de μ . Ao efectuarmos um deslizamento para a frente, obtemos o quadro de Young enviesado standard $j^c(P)$, de forma λ'/μ' . Podemos agora escolher um canto interior de μ' e efectuar outro deslizamento para a frente, obtendo um novo quadro de Young enviesado standard. Este processo pode ser continuado até à obtenção de um quadro de Young standard (não enviesado). O algoritmo de Schützenberger conhecido por *jeu de taquin* consiste na obtenção de um quadro de Young standard a partir de um quadro de Young enviesado standard, através de uma sequência finita de deslizamentos para a frente.

Podem parecer que o quadro de Young standard produzido pelo *jeu de taquin* depende da sequência de cantos interiores escolhida; vamos demonstrar de seguida que tal não acontece.

Exemplo. Consideremos o quadro de Young enviesado standard de forma $(3, 3, 1)/(2, 1)$ seguinte:

$$P = \begin{array}{ccc} & & \boxed{3} \\ & \boxed{1} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & & \end{array}.$$

Consideremos agora os seguintes quadros de Young enviesados standard obtidos a partir de P a partir de deslizamentos para a frente:

$$j^{(2,1)}(P) = \begin{array}{ccc} & & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \\ \boxed{2} & & \end{array} = P_1, j^{(1,2)}(P_1) = \begin{array}{ccc} & & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \\ \boxed{2} & & \end{array} = P_2, j^{(1,1)}(P_2) = \begin{array}{cc} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{4} \end{array} = P_3.$$

O quadro P_3 é um quadro de Young standard equivalente a P .

De modo a demonstrar que existe um único quadro de Young standard equivalente a um dado quadro de Young enviesado standard, vamos introduzir a noção de palavra das linhas de um quadro de Young.

Definição 3.32. Seja P um quadro de Young (enviesado ou não) com k linhas e n_i entradas na linha i , para cada $i \in [k]$. A *palavra das linhas* de P é a sequência

$$r(P) = (P(k, 1), \dots, P(k, n_k), \dots, P(1, 1), \dots, P(1, n_1)),$$

que escreveremos daqui em diante sem parênteses nem vírgulas. Assim, a palavra das linhas de P obtém-se concatenando as sequências de entradas de cada linha, de baixo para cima.

Por exemplo, a palavra das linhas de

2	5	3	5	4
4	5	8	7	
2	8	2		

é 282458725354.

Note-se que, se T é um quadro de Young standard (ou enviesado standard), $r(T)$ é uma permutação. O resultado seguinte estabelece uma relação entre a palavra das linhas de um quadro de Young standard e o quadro de inserção da mesma.

Lema 3.33. *Seja T um quadro de Young standard. Então T é o quadro de inserção da permutação $r(T)$.*

Demonstração. Suponhamos que T tem k linhas e que, para cada $i \in [k]$, a linha i tem n_i caixas. A palavra das linhas de T tem um segmento inicial igual a

$$T(k, 1) \cdots T(k, n_k).$$

O processo de inserção começa então com a inserção destas entradas na primeira linha do quadro de inserção, por esta ordem, uma vez que este segmento inicial é uma subsequência crescente de $r(T)$. A inserção do segmento seguinte de $r(T)$,

$$T(k-1, 1) \cdots T(k-1, n_{k-1}),$$

faz com que as caixas da primeira linha mudem para a segunda linha, ficando este segmento na primeira linha, por esta ordem. O processo de inserção continua deste modo, e é fácil ver que o quadro de inserção de $r(T)$ é igual a T . \square

A definição seguinte será importante no resto da secção. Recordemos que, para uma permutação σ , $P(\sigma)$ é o quadro de inserção de σ .

Definição 3.34. Duas permutações $\sigma, \pi \in S_n$ dizem-se P -equivalentes, e escreve-se $\sigma \simeq_P \pi$, se $P(\sigma) = P(\pi)$.

É claro que a relação de P -equivalência é uma relação de equivalência. Podemos agora enunciar o resultado seguinte.

Lema 3.35. *Seja T um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ .*

(a) *Seja c um canto interior de μ . Então*

$$r(j^c(T)) \simeq_P r(T).$$

(b) *Seja d um canto exterior de λ . Então*

$$r(j_d(T)) \simeq_P r(T).$$

Demonstração. Demonstraremos apenas a alínea (a), pois a demonstração da alínea (b) é análoga. Basta verificar que cada mudança de posição de uma entrada para outra caixa transforma a palavra das linhas do quadro de Young numa palavra P -equivalente.

No algoritmo de deslizamento para a frente, uma mudança de posição de uma entrada para outra caixa pode ser de dois tipos: a entrada passa para a caixa à sua esquerda (deslizamento horizontal) ou para a caixa abaixo (deslizamento vertical). Os deslizamentos horizontais não alteram a palavra das linhas.

Suponhamos agora que ocorre uma mudança de posição de uma entrada através de um deslizamento vertical. Basta considerar o caso em que T tem duas linhas, uma vez que, em qualquer caso, serão apenas duas as linhas a sofrer modificações quando se efectua um deslizamento. Suponhamos então que T é da forma

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & \cdots & b & & c & \cdots \cdots & d \\ \hline e & \cdots & f & x & g & \cdots & h \\ \hline \end{array}$$

e que, portanto, $j^c(T)$ tem a forma

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & \cdots & b & x & c & \cdots \cdots & d \\ \hline e & \cdots & f & & g & \cdots & h \\ \hline \end{array}.$$

Então, tem-se

$$r(T) = e \cdots f x g \cdots h a \cdots b c \cdots d, r(j^c(T)) = e \cdots f g \cdots h a \cdots b x c \cdots d.$$

Verifica-se facilmente que o quadro de inserção de cada uma destas palavras (que são permutações) é

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a & \cdots & b & x & c & \cdots \cdots & d \\ \hline e & \cdots & f & g & \cdots & h & \\ \hline \end{array}.$$

Logo, $r(j^c(T)) \simeq_P r(T)$. □

Corolário 3.36. *Sejam T e S quadros de Young enviesados standard. Se $T \simeq S$, então $r(T) \simeq_P r(S)$.*

Podemos agora demonstrar o resultado central desta secção, muitas vezes designado por “teorema fundamental do *jeu de taquin*”.

Teorema 3.37 (Schützenberger, [23]). *Seja T um quadro de Young enviesado standard. Existe um único quadro de Young standard equivalente a T .*

Demonstração. Sejam S_1 e S_2 quadros de Young standard equivalentes a T . Então $r(T) \simeq_P r(S_1) \simeq_P r(S_2)$, pelo corolário 3.36. Logo, $P(r(S_1)) = P(r(S_2))$. Pelo lema 3.33, tem-se

$$S_1 = P(r(S_1)) = P(r(S_2)) = S_2,$$

o que conclui a demonstração. \square

Tendo em conta o teorema anterior, denotamos o único quadro de Young standard equivalente a um quadro de Young enviesado standard T por $jdt(T)$.

Corolário 3.38. *Sejam T e S quadros de Young enviesados standard. Então $T \simeq S$ se e só se $r(T) \simeq_P r(S)$.*

Demonstração. A implicação directa é o corolário 3.36. Suponhamos, reciprocamente, que $r(T) \simeq_P r(S)$. Então, pelo lema 3.35,

$$r(jdt(T)) \simeq_P r(jdt(S)).$$

Uma vez que $jdt(T)$ e $jdt(S)$ são quadros de Young standard, o lema 3.33 implica que $jdt(T) = jdt(S)$. Logo, $T \simeq S$. \square

3.4 Evacuação: a involução de Schützenberger

Nesta secção, vamos apresentar um algoritmo que permite dar resposta a uma questão levantada na primeira secção deste capítulo: qual é o quadro de registo da permutação reversa de uma permutação σ ? Vimos, na proposição 3.14, que $P(\sigma^r) = (P(\sigma))^T$. Nesta secção, vamos ver que é possível obter $Q(\sigma^r)$ apenas a partir de $Q(\sigma)$, sem passar pelo algoritmo de Robinson-Schensted.

Começemos por definir o operador Δ .

Definição 3.39. Seja P um quadro de Young standard parcial. Definimos o quadro $\Delta(P)$ como sendo

$$\Delta(P) = j^c(P'),$$

em que c é a caixa $(1, 1)$ e P' é o quadro de Young enviesado que se obtém de P removendo a caixa c .

Tendo em conta o teorema 3.28, $\Delta(P)$ é um quadro de Young standard parcial.

Note-se que $\Delta(P)$ tem menos uma caixa do que P . O operador delta pode ser iterado, produzindo quadros de Young standard parciais com cada vez menos caixas. Se partirmos de um quadro P com n caixas, a iteração sucessiva do operador delta produz a seguinte sequência de quadros de Young standard parciais:

$$P, \Delta(P), \Delta(\Delta(P)) = \Delta^2(P), \Delta^3(P), \dots, \Delta^n(P) = \emptyset.$$

Em cada iteração, há uma caixa removida do quadro anterior. As caixas removidas podem ser registadas num quadro de Young Q , com a mesma forma do quadro P , do seguinte modo: para cada $i \in 0, \dots, n-1$, a caixa com a entrada $n-i$ em Q é a que se encontra na posição da caixa removida na passagem de $\Delta^i(P)$ para $\Delta^{i+1}(P)$.

É fácil ver que o quadro de Young Q é um quadro de Young standard; denotamo-lo por $ev(P)$ e chamamos-lhe *quadro evacuado de P* .

Exemplo. Consideremos o quadro de Young standard

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

Os quadros que se obtêm de P por iteração sucessiva do operador delta são:

$$\Delta(P) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}, \Delta^2(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 6 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \Delta^3(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline & & \\ \hline \end{array},$$

$$\Delta^4(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \Delta^5(P) = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \Delta^6(P) = \emptyset.$$

Assim, tem-se

$$ev(P) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & & \\ \hline \end{array}.$$

Em seguida apresentamos as principais propriedades do algoritmo de evacuação, que serão demonstradas no capítulo 4.

Teorema 3.40 (Schützenberger, [22]). *A aplicação que a cada quadro de Young standard P faz corresponder $ev(P)$ é uma involução. Isto é, para cada quadro de Young standard P ,*

$$ev(ev(P)) = P.$$

O teorema anterior justifica o facto de a aplicação $P \mapsto ev(P)$ ser muitas vezes designada por *involução de Schützenberger*.

Para concluir esta secção, vamos apresentar dois resultados que relacionam a involução de Schützenberger com a correspondência de Robinson-Schensted. Para o primeiro, precisamos de uma definição. Dada uma permutação $\sigma \in S_n$, definimos σ' do seguinte modo: para cada $i \in [n]$,

$$\sigma'(i) = n + 1 - \sigma(n + 1 - i).$$

Por exemplo, se $\sigma = 435621 \in S_6$, então

$$\sigma' = 651243.$$

Teorema 3.41 (Schützenberger, [22]). *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$, então*

$$\sigma' \xrightarrow{R-S} (ev(P), ev(Q)).$$

Teorema 3.42 (Schützenberger, [22]). *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$, então*

$$\sigma^r \xrightarrow{R-S} (P^\top, (ev(Q))^\top).$$

DIAGRAMAS DE CRESCIMENTO

Neste capítulo vamos apresentar novamente os algoritmos combinatórios descritos no capítulo anterior, reformulando-os com recurso à noção de diagrama de crescimento. Um diagrama de crescimento é uma forma de organizar diagramas de Young numa grelha, de tal modo que o conhecimento de alguns dos diagramas de Young permita determinar os restantes, através de regras recursivas – as regras locais de crescimento.

Na primeira secção, abordaremos a versão da correspondência de Robinson-Schensted baseada em diagramas de crescimento. Para tal, iremos recorrer a resultados sobre conjuntos parcialmente ordenados presentes no capítulo 2 para associar, por meio de uma bijecção, a cada permutação um par de quadros de Young standard. Estes quadros de Young standard serão obtidos a partir de extensões lineares de um conjunto parcialmente ordenado, mas veremos que esta bijecção é, de facto, a bijecção descrita pelo algoritmo de Robinson-Schensted. Assim, não só demonstraremos as propriedades da correspondência de Robinson-Schensted descritas no capítulo anterior, como também as tornaremos mais transparentes. A descrição usando diagramas de crescimento da correspondência de Robinson-Schensted será generalizada na segunda secção de forma a obter uma descrição com diagramas de crescimento da correspondência RSK.

Na terceira secção utilizaremos diagramas de crescimento para reformular o *jeu de taquin*, deduzindo uma sua propriedade de simetria, não aparente a partir da descrição clássica.

Finalmente, na última secção, baseando-nos na descrição com diagramas de crescimento do *jeu de taquin*, faremos uma abordagem do algoritmo de evacuação com diagramas de crescimento, que será depois relacionada com a correspondência de Robinson-Schensted, o que permitirá demonstrar os teoremas enunciados no final do capítulo 3.

4.1 A correspondência de Robinson-Schensted

Nesta secção vamos apresentar um algoritmo alternativo para a correspondência de Robinson-Schensted, descrita no capítulo anterior. Este algoritmo baseia-se no conceito de diagrama de crescimento, desenvolvido por S. Fomin ([8], [9]). Faremos uso das ferramentas desenvolvidas no capítulo 2, em especial o teorema da dualidade para conjuntos parcialmente ordenados finitos, a relação entre o diagrama de Young de um conjunto parcialmente ordenado e os diagramas dos seus ideais de ordem e o teorema sobre localização de caixas.

Ao longo desta secção, seguimos essencialmente [4].

4.1.1 Descrição usando diagramas de crescimento

Uma vez que a correspondência de Robinson-Schensted associa a cada permutação um par de quadros de Young standard, vamos começar por associar a cada permutação um conjunto parcialmente ordenado, de modo a tirar partido do teorema da dualidade de Greene.

Definição 4.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in S_n$. O conjunto parcialmente ordenado de permutação associado a σ é (P_σ, \leq) , em que

$$P_\sigma = \{(i, \sigma(i)) : i \in [n]\}$$

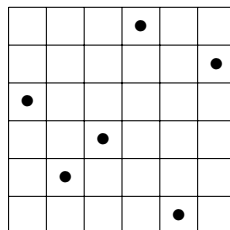
e \leq é a ordem parcial produto em $[n] \times [n]$. Isto é, dados $i, j \in [n]$,

$$(i, \sigma(i)) \leq (j, \sigma(j)) \text{ se e só se } i \leq j \text{ e } \sigma(i) \leq \sigma(j).$$

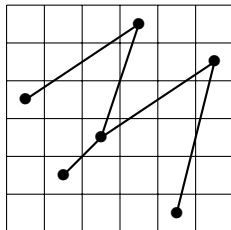
Exemplo. Consideremos a permutação $\sigma = 423615 \in S_6$; assim, temos

$$P_\sigma = \{(1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 6), (5, 1), (6, 5)\}.$$

Podemos representar graficamente esta permutação pelo seguinte diagrama, que corresponde ao gráfico da aplicação σ num referencial cartesiano, sob a forma de grelha.



O diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado de permutação (P_σ, \leq) pode ser representado directamente na grelha anterior, do seguinte modo:



Podemos considerar duas extensões lineares de um conjunto parcialmente ordenado de permutação (P_σ, \leq) naturais. Tendo em conta a representação do diagrama de Hasse de P_σ numa grelha, podemos “rotular” os elementos de P_σ com os elementos de $[n]$ correspondentes às suas projecções em cada um dos eixos. Esta ideia é formalizada pelo lema seguinte, que é uma consequência directa da definição da relação de ordem num conjunto parcialmente ordenado de permutação.

Lema 4.2. *Seja $\sigma \in S_n$. As aplicações*

$$\begin{aligned} p_\sigma : P_\sigma &\rightarrow [n] \\ (i, \sigma(i)) &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

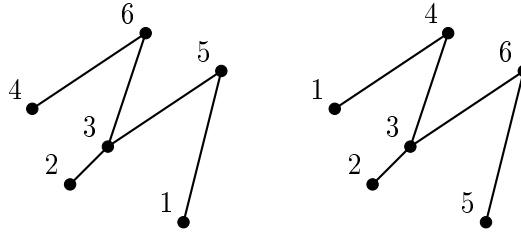
e

$$\begin{aligned} q_\sigma : P_\sigma &\rightarrow [n] \\ (i, \sigma(i)) &\mapsto i \end{aligned}$$

são extensões lineares de (P_σ, \leq) .

De acordo com as observações feitas no capítulo 2, após o corolário 2.44, a cada uma das extensões lineares definidas anteriormente corresponde um quadro de Young standard. Obtemos assim quadros de Young standard $P(p_\sigma)$ e $P(q_\sigma)$.

Exemplo. Consideremos a permutação $\sigma = 423615 \in S_6$ do exemplo anterior. As extensões lineares p_σ e q_σ de P_σ podem representar-se do seguinte modo:



Os quadros de Young standard correspondentes a estas extensões lineares são:

$$P(p_\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad P(q_\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}.$$

Teorema 4.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. A aplicação que a cada permutação $\sigma \in S_n$ faz corresponder o par de quadros de Young standard com a mesma forma $(P(p_\sigma), Q(q_\sigma))$ é uma bijecção.*

Para demonstrar este teorema vamos começar por apresentar um modo recursivo de determinar os quadros de Young $P(p_\sigma)$ e $P(q_\sigma)$, utilizando um diagrama de crescimento.

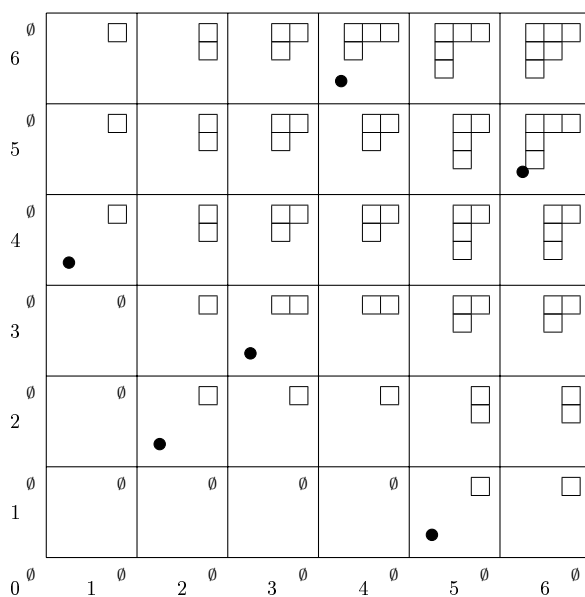
Seja $\sigma \in S_n$ e definamos, para cada $(i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\}$, o seguinte conjunto:

$$P_\sigma(i, j) = P_\sigma \cap ([i] \times [j]).$$

É fácil verificar que estes conjuntos são ideais de ordem de P_σ . Denotamos a partição das cadeias de $P_\sigma(i, j)$ por λ_{ij} .

Os diagramas de Young $Y(\lambda_{ij})$ podem ser dispostos num *diagrama de crescimento*, que se constrói a partir da grelha que representa a permutação σ , colocando em cada célula (i, j) o diagrama de Young $Y(\lambda_{ij})$.

Exemplo. Consideremos a permutação $\sigma = 423615 \in S_6$ do exemplo anterior. O diagrama de crescimento dos diagramas de Young $Y(\lambda_{ij})$ é



Observemos que, em cada linha e em cada coluna de um diagrama de crescimento, existe um e um só elemento de P_σ (representado por um ponto).

Os diagramas de Young que se encontram no diagrama de crescimento do exemplo anterior podem ser obtidos através de um processo recursivo, governado por regras locais de crescimento. Mais concretamente, dada uma subgrelha 2×2 de um diagrama de crescimento,

$$\begin{array}{cc} Y(\lambda_{i-1,j}) & Y(\lambda_{ij}) \\ Y(\lambda_{i-1,j-1}) & Y(\lambda_{i,j-1}) \end{array}$$

podemos obter o diagrama de Young $Y(\lambda_{ij})$ a partir dos três restantes e a partir do conhecimento da permutação σ . Este procedimento recursivo é descrito pelo teorema que se segue.

Teorema 4.4 (Regras Locais de Crescimento, Fomin, [4]). *Seja $\sigma \in S_n$. O diagrama de Young de λ_{ij} pode ser determinado a partir dos diagramas de $\lambda_{i-1,j}, \lambda_{i-1,j-1}$ e $\lambda_{i,j-1}$ e da permutação σ , do seguinte modo:*

- (i) *Se $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{i-1,j}$, então $Y(\lambda_{ij}) = Y(\lambda_{i,j-1}) \cup Y(\lambda_{i-1,j})$.*
- (ii) *Se $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j} = \lambda_{i-1,j-1}$ e $\sigma(i) \neq j$, então $Y(\lambda_{ij}) = Y(\lambda_{i-1,j-1})$.*
- (iii) *Se $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j} = \lambda_{i-1,j-1}$ e $\sigma(i) = j$, então $Y(\lambda_{ij})$ obtém-se acrescentando uma caixa à primeira linha de $Y(\lambda_{i-1,j-1})$.*

- (iv) Se $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j}$ e $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{i-1,j-1}$, então $Y(\lambda_{ij})$ obtém-se de $Y(\lambda_{i,j-1})$ acrescentando-lhe uma caixa na linha imediatamente abaixo da caixa que está em $Y(\lambda_{i-1,j})$ mas não em $Y(\lambda_{i-1,j-1})$.

Demonstração.

- (i) Suponhamos que $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{i-1,j}$. Consideremos os seguintes subcasos:

- $\lambda_{i-1,j-1} = \lambda_{i-1,j}$ e $\lambda_{i-1,j-1} \neq \lambda_{i,j-1}$. Neste caso, existe um elemento de P_σ estritamente abaixo da célula (i, j) (em particular, $(i, j) \notin P_\sigma$). Tem-se ainda que não existe um elemento de P_σ à esquerda de (i, j) . Logo, $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{ij}$. Uma vez que, neste caso,

$$Y(\lambda_{i-1,j}) = Y(\lambda_{i-1,j-1}) \subset Y(\lambda_{i,j-1}),$$

vem

$$Y(\lambda_{ij}) = Y(\lambda_{i,j-1}) = Y(\lambda_{i,j-1}) \cup Y(\lambda_{i-1,j}).$$

- $\lambda_{i-1,j-1} \neq \lambda_{i-1,j}$ e $\lambda_{i-1,j-1} = \lambda_{i,j-1}$. Este caso é análogo ao anterior.
- $\lambda_{i-1,j-1} \neq \lambda_{i-1,j}$ e $\lambda_{i-1,j-1} \neq \lambda_{i,j-1}$. Neste caso, $Y(\lambda_{i-1,j})$ obtém-se acrescentando a $Y(\lambda_{i-1,j-1})$ uma caixa A e $Y(\lambda_{i,j-1})$ obtém-se acrescentando a $Y(\lambda_{i-1,j-1})$ uma caixa B ; as caixas A e B são distintas. Portanto, existem elementos de P_σ estritamente à esquerda e abaixo de (i, j) . Uma vez que $Y(\lambda_{i-1,j}), Y(\lambda_{i,j-1}) \subseteq Y(\lambda_{ij})$, tem-se

$$Y(\lambda_{i-1,j-1}) \cup \{A, B\} = Y(\lambda_{i,j-1}) \cup Y(\lambda_{i-1,j}) \subseteq Y(\lambda_{ij}).$$

Uma vez que $Y(\lambda_{ij})$ tem mais duas caixas que $Y(\lambda_{i-1,j-1})$, a inclusão anterior pode substituir-se por uma igualdade.

- (ii) Suponhamos que $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j} = \lambda_{i-1,j-1}$ e $\sigma(i) \neq j$. Neste caso, não existem elementos de P_σ na coluna i nem na linha j do diagrama de crescimento. Uma vez que $\sigma(i) \neq j$, tem-se $P_\sigma(i, j) = P_\sigma(i-1, j-1)$, pelo que $Y(\lambda_{ij}) = Y(\lambda_{i-1,j-1})$.
- (iii) Suponhamos que $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j} = \lambda_{i-1,j-1}$ e $\sigma(i) = j$. Neste caso, $(i, j) \in P_\sigma$ e este elemento de P_σ é maior do que todos os elementos de $P_\sigma(i-1, j-1)$. Assim, sendo c a cardinalidade máxima de uma cadeia de $P_\sigma(i-1, j-1)$, a cardinalidade máxima de uma cadeia de $P_\sigma(i, j)$ é igual a $c+1$. Logo, $Y(\lambda_{ij})$ obtém-se acrescentando uma caixa à primeira linha de $Y(\lambda_{i-1,j-1})$.
- (iv) Suponhamos que $\lambda_{i,j-1} = \lambda_{i-1,j}$ e $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{i-1,j-1}$. Neste caso, existem um elemento x_1 de P_σ estritamente à esquerda de (i, j) e um elemento x_2

de P_σ estritamente abaixo de (i, j) . Os elementos x_1 e x_2 são elementos maximais de $P_\sigma(i, j)$. Definam-se as caixas A e B do seguinte modo:

$$\{A\} = Y(\lambda_{i-1,j}) \setminus Y(\lambda_{i-1,j-1}) \quad \text{e} \quad \{B\} = Y(\lambda_{i,j}) \setminus Y(\lambda_{i-1,j}).$$

O teorema 2.49 diz-nos que A está na mesma coluna de B ou à direita de B . Logo, B está na mesma coluna de A ou à esquerda de A . Consideremos agora o conjunto parcialmente ordenado $P'_\sigma(i, j) = (P_\sigma(i, j), \leq')$, em que, dados $k, l \in [n]$, se tem

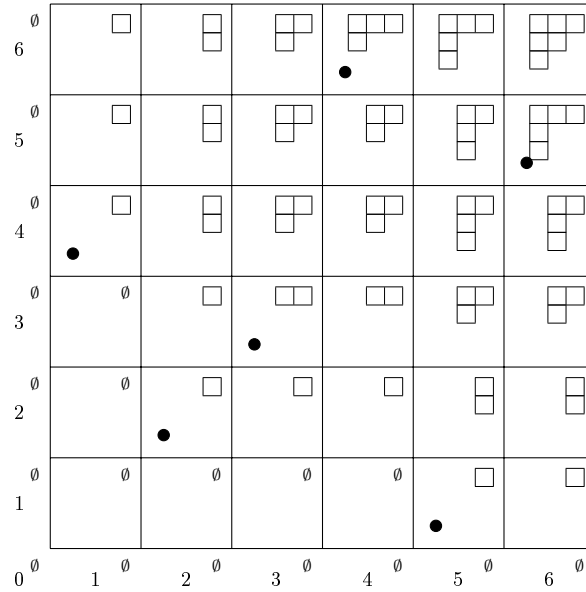
$$(k, \sigma(k)) \leq' (l, \sigma(l)) \quad \text{se e só se} \quad k \geq l \quad \text{e} \quad \sigma(k) \leq \sigma(l).$$

É fácil ver que \leq' é uma relação de ordem parcial e que um subconjunto de $P'_\sigma(i, j)$ é uma cadeia (respectivamente, anticadeia) em relação à ordem \leq' se e só se for uma anticadeia (respectivamente, cadeia) em relação à ordem \leq . Assim, a partição $\lambda'_{ij} = \lambda(P'_\sigma(i, j))$ é a conjugada da partição λ_{ij} . No conjunto parcialmente ordenado $P'_\sigma(i, j)$, x_1 é maximal e x_2 é minimal. Assim, o teorema 2.49 diz-nos que A está na mesma coluna de B ou na coluna imediatamente à esquerda da de B (em $Y(\lambda'_{ij})$). Logo, A está na mesma linha de B ou na linha imediatamente acima da de B (em $Y(\lambda_{ij})$). Portanto, no diagrama $Y(\lambda_{ij})$, B está na mesma linha de A ou na linha imediatamente abaixo da de A . Juntando as duas informações que temos acerca da posição de B em relação a A , concluímos que B tem de estar na linha imediatamente abaixo da de A .

□

Um diagrama de crescimento para uma permutação σ pode agora ser construído facilmente, preenchendo as margens esquerda e inferior do diagrama com diagramas de Young vazios e aplicando as regras locais de crescimento até obter um diagrama de crescimento totalmente preenchido. Uma vez concluído este processo, os diagramas de Young da margem superior (respectivamente, direita) formarão uma cadeia saturada de diagramas de Young, com mínimo \emptyset e máximo $Y(\lambda_{nn}) = Y(P_\sigma)$. A estas cadeias saturadas correspondem quadros de Young standard, e é fácil ver que o quadro de Young standard correspondente à cadeia saturada de diagramas de Young da margem direita (respectivamente, superior) do diagrama de crescimento é igual a $P(p_\sigma)$ (respectivamente, $P(q_\sigma)$).

Exemplo. Consideremos uma vez mais a permutação $\sigma = 423615 \in S_6$. Como visto anteriormente, o seu diagrama de crescimento é



Às cadeias saturadas das margens direita e superior deste diagrama de crescimento correspondem, respectivamente, os quadros de Young standard

$$(P(p_\sigma), P(q_\sigma)) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Para demonstrar o teorema 4.3, vamos começar por “inverter” as regras locais do teorema anterior: dada uma subgrealha 2×2 de um diagrama de crescimento,

$$Y(\lambda_{i-1,j}) \quad Y(\lambda_{ij})$$

$$Y(\lambda_{i-1,j-1}) \quad Y(\lambda_{i,j-1})$$

podemos obter a permutação σ e o diagrama de Young $Y(\lambda_{i-1,j-1})$ a partir dos três diagramas de Young restantes.

Teorema 4.5 (Inversão das regras locais de crescimento). *Seja $\sigma \in S_n$. O diagrama de Young de $\lambda_{i-1,j-1}$ e a permutação σ podem ser determinados a partir dos diagramas de $\lambda_{i-1,j}, \lambda_{ij}$ e $\lambda_{i,j-1}$, do seguinte modo:*

- (i) Se $\lambda_{i-1,j} \neq \lambda_{i,j-1}$, então $Y(\lambda_{i-1,j-1}) = Y(\lambda_{i-1,j}) \cap Y(\lambda_{i,j-1})$ e $\sigma(i) \neq j$.
- (ii) Se $\lambda_{i-1,j} = \lambda_{i,j-1} = \lambda_{ij}$, então $Y(\lambda_{i-1,j-1}) = Y(\lambda_{ij})$ e $\sigma(i) \neq j$.
- (iii) Se $\lambda_{i-1,j} = \lambda_{i,j-1}$, $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{ij}$ e $Y(\lambda_{ij})$ se obtém de $Y(\lambda_{i-1,j})$ acrescentando-lhe uma caixa na primeira linha, então $Y(\lambda_{i-1,j-1}) = Y(\lambda_{i-1,j})$ e $\sigma(i) = j$.

(iv) Se $\lambda_{i-1,j} = \lambda_{i,j-1}$, $\lambda_{i,j-1} \neq \lambda_{ij}$ e $Y(\lambda_{ij})$ se obtém de $Y(\lambda_{i-1,j})$ acrescentando-lhe uma caixa na linha k , com $k > 1$, então $Y(\lambda_{i-1,j-1})$ obtém-se de $Y(\lambda_{i-1,j})$ removendo-lhe a caixa do final da linha $k-1$ e $\sigma(i) \neq j$.

Demonstração. Este resultado é consequência das regras locais de crescimento enunciadas atrás. A demonstração pode ser feita de modo dual ou analisando cuidadosamente os possíveis resultados finais de aplicação das regras locais. \square

Tendo em conta o teorema anterior, podemos descrever um processo recursivo, inverso do descrito anteriormente, que permita obter a permutação σ a partir de um par de quadros de Young standard (P, Q) com a mesma forma: escrevem-se as cadeias saturadas de diagramas de Young correspondentes a P e a Q na margem direita e superior, respectivamente, de um diagrama de crescimento. Usando as regras locais inversas do teorema anterior, obtêm-se agora todos os outros diagramas de Young do diagrama de crescimento, bem como a permutação σ .

Tendo em conta o exposto, podemos afirmar que a aplicação

$$\sigma \mapsto (P(p_\sigma), P(q_\sigma))$$

é uma bijecção, ficando assim demonstrado o teorema 4.3. De facto, esta aplicação é a mesma que a definida pela correspondência de Robinson-Schensted. Para o demonstrar, precisamos de algumas definições e resultados adicionais.

Defina-se uma *permutação parcial* como uma bijecção entre dois conjuntos finitos de números naturais. Uma permutação parcial pode ser representada, tal como uma permutação, usando uma notação em duas linhas. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

denota a bijecção de $\{1, 3, 5\}$ para $\{1, 2, 4\}$ definida por: $1 \mapsto 2$, $3 \mapsto 4$, $5 \mapsto 1$. Convencionamos que a linha superior de uma permutação parcial é sempre escrita por ordem crescente. É claro que a correspondência de Robinson-Schensted pode ser aplicada a permutações parciais (com a primeira linha escrita por ordem crescente), produzindo quadros de Young standard parciais.

Se considerarmos o diagrama de crescimento de uma permutação $\sigma \in S_n$, então o conjunto $P_\sigma(i, j)$ define uma permutação parcial¹, que se pode representar por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_k) \end{pmatrix},$$

¹Caso $P_\sigma(i, j)$ seja vazio, a permutação parcial definida é a aplicação vazia. Convencionamos que o quadro de inserção da aplicação vazia é o (único) quadro de Young cuja forma tem diagrama de Young vazio.

4. Diagramas de Crescimento

onde i_1, \dots, i_k são as primeiras coordenadas de elementos de $P_\sigma(i, j)$, escritas por ordem crescente. Chamamos a esta permutação parcial a *permutação parcial definida por $P_\sigma(i, j)$* .

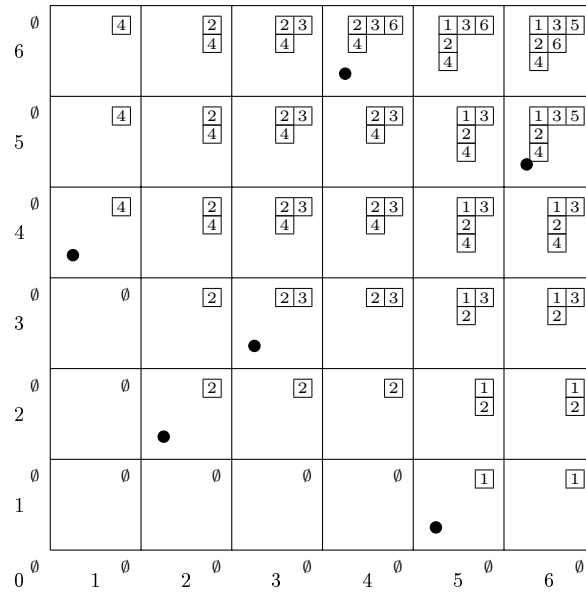
Vamos agora associar a cada par (i, j) , com $i, j \in \{0, \dots, n\}$, uma permutação parcial σ_{ij} e um quadro de Young standard parcial P_{ij} , do seguinte modo:

- σ_{ij} é a permutação parcial definida por $P_\sigma(i, j)$.
- Consideremos a cadeia de diagramas de Young

$$Y(\lambda_{i_0}) \subseteq Y(\lambda_{i_1}) \subseteq \dots \subseteq Y(\lambda_{i_j}).$$

Se $Y(\lambda_{i_k}) \neq Y(\lambda_{i_{k-1}})$, então $Y(\lambda_{i_k})$ obtém-se acrescentando a $Y(\lambda_{i_{k-1}})$ uma caixa; escreva-se o número k na caixa correspondente do diagrama de Young $Y(\lambda_{i_j})$. Este preenchimento de caixas de $Y(\lambda_{i_j})$ produz o quadro de Young standard parcial P_{ij} .

Exemplo. Consideremos novamente a permutação $\sigma = 423615$. O processo descrito acima produz os seguintes quadros de Young standard parciais, que podem ser dispostos no diagrama de crescimento de σ :



É claro que $\sigma_{nn} = \sigma$. É claro que $P_{nn} = P(p_\sigma)$, pelo que basta mostrar que $P_{nn} = P(\sigma)$. Este facto é um caso particular do lema que se segue.

Lema 4.6. *Seja $\sigma \in S_n$. Para quaisquer $i, j \in \{0, \dots, n\}$, P_{ij} é o quadro de inserção da permutação parcial σ_{ij} .*

Demonstração. O resultado é claro se $i = 0$ ou $j = 0$. Procedemos indutivamente, tomando $i, j \in [n]$ e supondo que o resultado é verdadeiro para $s < i$ e $t < j$. Suponhamos que o elemento de P_σ na linha j tem coordenadas (k, j) e que o elemento de P_σ na coluna i tem coordenadas (i, l) . Temos três casos a considerar.

1. Suponhamos em primeiro lugar que $l > j$. Neste caso, $\lambda_{i-1,j} = \lambda_{ij}$, pelo que $P_{i-1,j} = P_{ij}$. Temos ainda que $\sigma_{i-1,j} = \sigma_{ij}$. Assim, usando a hipótese de indução, temos

$$P_{ij} = P_{i-1,j} = P(\sigma_{i-1,j}) = P(\sigma_{ij}).$$

2. Suponhamos agora que $l = j$. Neste caso, a segunda linha de σ_{ij} é igual à segunda linha de $\sigma_{i,j-1}$ concatenada com o número j . Logo, o quadro de inserção de σ_{ij} obtém-se acrescentando uma caixa com entrada j no final da primeira linha de $P(\sigma_{i,j-1}) = P_{i,j-1}$, uma vez que j é maior que todas as outras entradas de $P_{i,j-1}$. Por outro lado, o elemento (i, j) é, neste caso, o máximo de $P_\sigma(i, j)$, pelo que P_{ij} se obtém de $P_{i,j-1}$ acrescentando-lhe uma caixa com entrada j no final da primeira linha. Logo, o processo de inserção de Schensted e o processo de obtenção dos quadros P_{st} descrito anteriormente produzem o mesmo resultado. Assim, $P_{ij} = P(\sigma_{ij})$.
3. Suponhamos, finalmente, que $l < j$. Se $k > i$, um argumento análogo ao do primeiro caso permite concluir o pretendido. Suponhamos então que $k < i$. Neste caso, temos

$$Y(\lambda_{i-1,j}) = Y(\lambda_{i-1,j-1}) \cup \{c\},$$

$$Y(\lambda_{i,j-1}) = Y(\lambda_{i-1,j-1}) \cup \{d\}.$$

Se $c \neq d$, então $Y(\lambda_{ij}) = Y(\lambda_{i,j-1}) \cup \{c\}$ e o quadro P_{ij} obtém-se de $P_{i,j-1}$ acrescentando-lhe a caixa c com entrada j . Se $c = d$, então, tendo em conta a alínea (iv) do teorema 4.4, P_{ij} obtém-se de $P_{i,j-1}$ acrescentando-lhe uma caixa com entrada j na linha imediatamente abaixo da linha onde se encontra a caixa c . Observemos que a caixa d tem entrada l em P_{ij} .

Por outro lado, temos que existem sequências de números naturais α e β tais que:

- A segunda linha da permutação parcial $\sigma_{i-1,j-1}$ é igual a $\alpha\beta$;
- A segunda linha da permutação parcial $\sigma_{i-1,j}$ é igual a $\alpha j\beta$;

- A segunda linha da permutação parcial $\sigma_{i,j-1}$ é igual a $\alpha\beta l$;
- A segunda linha da permutação parcial σ_{ij} é igual a $\alpha j\beta l$.

A hipótese de indução implica que $P_{i-1,j} = P(\sigma_{i-1,j})$. Portanto, a aplicação do algoritmo de inserção de Schensted a σ_{ij} produz o quadro de Young $r_l(P_{i-1,j})$. Logo, se $c \neq d$, o quadro $P(\sigma)$ obtém-se de $P_{i-1,j-1}$ acrescentando a caixa c com entrada j e a caixa d com entrada l ; se $c = d$, a inserção de l em $P_{i-1,j}$ desloca j para a linha imediatamente abaixo da caixa c , uma vez que j é maior que todas as outras entradas dessa linha.

Logo, o processo de inserção de Schensted e o processo de obtenção dos quadros P_{st} descrito anteriormente produzem o mesmo resultado. Assim, $P_{ij} = P(\sigma_{ij})$.

□

Corolário 4.7. *Seja $\sigma \in S_n$. Temos*

$$P(\sigma) = P(p_\sigma).$$

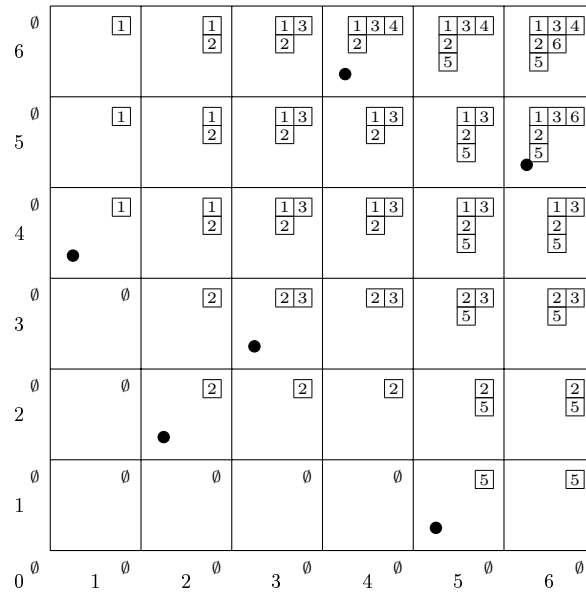
Para provar que $Q(\sigma) = P(q_\sigma)$, vamos associar a cada par (i, j) , com $i, j \in \{0, \dots, n\}$, uma permutação parcial σ_{ij} e um quadro de Young standard parcial Q_{ij} , do seguinte modo:

- σ_{ij} é a permutação parcial definida por $P_\sigma(i, j)$.
- Consideremos a cadeia de diagramas de Young

$$Y(\lambda_{0j}) \subseteq Y(\lambda_{1j}) \subseteq \dots \subseteq Y(\lambda_{ij}).$$

Se $Y(\lambda_{kj}) \neq Y(\lambda_{k-1,j})$, então $Y(\lambda_{kj})$ obtém-se acrescentando a $Y(\lambda_{k-1,j})$ uma caixa; escreva-se o número k na caixa correspondente do diagrama de Young $Y(\lambda_{ij})$. Este preenchimento de caixas de $Y(\lambda_{ij})$ produz o quadro de Young standard parcial Q_{ij} .

Exemplo. Consideremos novamente a permutação $\sigma = 423615$. O processo descrito acima produz os seguintes quadros de Young standard parciais, que podem ser dispostos no diagrama de crescimento, do seguinte modo:



É claro que $Q_{nm} = P(q_\sigma)$, pelo que basta mostrar que $Q_{nn} = Q(\sigma)$. Este facto é um caso particular do lema que se segue.

Lema 4.8. *Seja $\sigma \in S_n$. Para quaisquer $i, j \in \{0, \dots, n\}$, Q_{ij} é o quadro de registo da permutação parcial σ_{ij} .*

Demonstração. A demonstração deste lema segue um argumento análogo ao da demonstração do lema 4.6. Basta ter em conta que, se pretende comparar o processo de obtenção de quadros de Young descrito acima com o processo de registo da correspondência de Robinson-Schensted, e não com a inserção; os detalhes do argumento são semelhantes aos do lema 4.6. \square

Corolário 4.9. *Seja $\sigma \in S_n$. Temos*

$$Q(\sigma) = P(q_\sigma).$$

Fica assim demonstrado o principal resultado desta secção.

Teorema 4.10. *Seja $\sigma \in S_n$. Temos que*

$$(P(\sigma), Q(\sigma)) = (P(p_\sigma), P(q_\sigma)).$$

4.1.2 Propriedades da correspondência de Robinson-Schensted

Tendo em conta o teorema 4.10, podemos agora demonstrar várias propriedades da correspondência de Robinson-Schensted enunciadas no capítulo 3. Começamos com uma demonstração do teorema de Schützenberger (teorema 3.13), que enunciamos aqui novamente.

Teorema 4.11 (Schützenberger, [22]). *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P(\sigma), Q(\sigma))$, então*

$$\sigma^{-1} \xrightarrow{R-S} (Q(\sigma), P(\sigma)).$$

Demonstração. Tendo em conta que o gráfico da permutação σ^{-1} se obtém a partir do gráfico de σ por uma reflexão pela recta $y = x$ num referencial cartesiano, o diagrama de crescimento de σ^{-1} obtém-se do de σ por uma reflexão pela diagonal correspondente. Assim, as margens superior e direita do diagrama de crescimento de σ^{-1} correspondem às margens direita e superior, respectivamente, do diagrama de crescimento de σ . Logo, $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$ e $Q(\sigma^{-1}) = P(\sigma)$. \square

Para demonstrar o teorema de Schensted sobre subsequências crescentes e decrescentes de permutações (teorema 3.16), necessitamos do lema seguinte.

Lema 4.12. *Seja $\sigma \in S_n$. A sequência $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ é uma subsequência crescente (respectivamente, decrescente) de σ se e só se*

$$\{(i_j, \sigma(i_j)) : j \in \{1, \dots, k\}\}$$

é uma cadeia (respectivamente, anticadeia) de P_σ .

O teorema de Schensted segue directamente do lema anterior e do teorema da dualidade de Greene. De facto, cada subsequência crescente (respectivamente, decrescente) de comprimento máximo de σ corresponde a uma cadeia (respectivamente, anticadeia) de cardinalidade máxima de P_σ . Assim, o número de caixas da primeira linha (respectivamente, coluna) de $Y(\lambda(P_\sigma))$ é o comprimento máximo de uma subsequência crescente (respectivamente, decrescente) de σ .

O lema seguinte será necessário para demonstrar mais um resultado de Schensted – a proposição 3.14, sobre o quadro de inserção da permutação σ^r .

Lema 4.13. *Seja $\sigma \in S_n$. Consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : P_\sigma &\rightarrow P_{\sigma^r} \\ (i, \sigma(i)) &\mapsto (n - i + 1, \sigma^r(n - i + 1)) \end{aligned}$$

Então:

- (a) A aplicação ψ é uma bijecção.
- (b) Um subconjunto X de P_σ é uma cadeia (respectivamente, anticadeia) se e só se $\psi(X)$ é uma anticadeia (respectivamente, cadeia) de P_{σ^r} .
- (c) $p_\sigma = p_{\sigma^r} \circ \psi$.

Demonstração.

- (a) A justificação desta alínea é uma verificação simples, tendo em conta que $\sigma^r(n - i + 1) = \sigma(i)$.
- (b) Basta observar que $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ é uma subsequência crescente (respectivamente, decrescente) de σ se e só se $(\sigma^r(i_k), \dots, \sigma^r(i_1))$ é uma subsequência decrescente (respectivamente, crescente) de σ^r e utilizar o lema 4.12.
- (c) Temos, para cada $i \in [n]$,

$$\begin{aligned} (p_{\sigma^r} \circ \psi)((i, \sigma(i))) &= p_{\sigma^r}(n - i + 1, \sigma^r(n - i + 1)) \\ &= \sigma^r(n - i + 1) \\ &= \sigma(i) = p_\sigma((i, \sigma(i))). \end{aligned}$$

□

Concluimos esta secção com a demonstração da proposição 3.14, que voltamos a enunciar.

Proposição 4.14 (Schensted, [21]). *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se $P(\sigma^r) = (P(\sigma))^\top$.*

Demonstração. Para cada $\pi \in S_n$ e cada $i \in [n]$, seja

$$P_{\pi,i} = P_\pi \cap \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b \leq i\}.$$

Definimos ainda $P_i(\pi)$ como sendo o quadro de Young standard correspondente à extensão linear $p_\pi|_{P_{\pi,i}}$.

Basta mostrar que, para cada $i \in [n]$, se tem

$$\text{sh}(P_i(\sigma^r)) = (\text{sh}(P_i(\sigma)))^*.$$

Mas isto é consequência da alínea (b) do lema anterior. A demonstração fica assim concluída. □

4.2 A correspondência RSK

Nesta secção vamos generalizar as ideias da secção anterior para o contexto dos quadros de Young semistandard, obtendo uma descrição da correspondência RSK, usando diagramas de crescimento.

Em primeiro lugar, precisamos de associar a cada permutação generalizada um conjunto parcialmente ordenado, tal como foi feito no caso nas permutações, no início da secção anterior. Para isso precisaremos de recorrer à noção de expansão de um conjunto parcialmente ordenado num elemento, apresentada no final da primeira secção do capítulo 1.

Definição 4.15. Seja

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

uma permutação generalizada. Considere-se o conjunto parcialmente ordenado (\hat{P}_α, \leq) , em que

$$\hat{P}_\alpha = \{(x_i, y_i) : i \in [n]\},$$

e \leq é a relação de ordem produto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sejam $p_1 = (x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, p_k = (x_{i_k}, y_{i_k})$ os elementos de \hat{P}_α cuja multiplicidade em α é maior que 1; para cada $i \in [k]$, seja m_i a multiplicidade de p_i em α .

Definimos o *conjunto parcialmente ordenado de α* como sendo

$$P_\alpha = E_{p_1, m_1} E_{p_2, m_2} \cdots E_{p_k, m_k}(\hat{P}_\alpha),$$

munido da relação de ordem definida no capítulo 1 (1.28).

Tal como no caso das permutações, o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado de uma permutação generalizada pode ser obtido dispondo os seus elementos numa grelha; no entanto, no caso das permutações generalizadas, este processo é um pouco mais complexo.

Exemplo. Consideremos a permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vamos representar os elementos de \hat{P}_α numa grelha; por conveniência, cada elemento será para já representado não por um ponto, como no caso das permutações, mas por um número correspondente à sua multiplicidade em α .

	(1)		
(2)			(1)
	(1)		
(1)		(2)	

Vamos agora substituir os números da grelha por uma quantidade de pontos correspondente a cada multiplicidade. De modo a não haver mais do que um ponto em cada célula, cada célula que tenha um número $m > 1$ vai dar origem a m^2 células, em que os pontos vão estar dispostos do seguinte modo:

		•
	•••	
•		

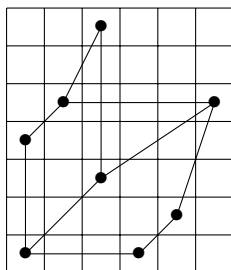
Consequentemente, se uma célula tiver um número $m > 1$, a linha e coluna dessa célula darão origem a m novas linhas e colunas. Se existirem mais pontos na linha da célula a expandir, os que estiverem à esquerda da célula “expandida” ficarão na linha mais abaixo das novas linhas criadas e os que estiverem à direita ficarão na linha mais acima. Se existirem mais pontos na coluna da célula a expandir, os que estiverem abaixo da célula expandida ficarão na coluna mais à esquerda das novas colunas criadas e os que estiverem à direita ficarão na coluna mais à direita.

Este processo de expansão de células corresponde, evidentemente, à expansão do conjunto parcialmente ordenado; o posicionamento dos restantes pontos é feito de um modo que seja coerente com a relação de ordem que definimos numa expansão de um conjunto parcialmente ordenado. Se existirem várias células que necessitem de expansão, este processo é efectuado em uma de cada vez; a proposição 1.29 garante que se obtêm conjuntos parcialmente ordenados isomorfos independentemente da ordem escolhida para efectuar a expansão das células.

Assim, no presente exemplo, obtemos a seguinte grelha.

		•			
	•				•
•					
		•			
				•	
•			•		

O diagrama de Hasse de P_α pode ser representado directamente na grelha anterior.



No caso das permutações, analisado na secção anterior, os quadros de Young standard correspondentes a uma permutação σ eram obtidos a partir de extensões lineares do respectivo conjunto parcialmente ordenado de permutação P_σ . No caso presente, as aplicações que darão origem a quadros de Young semistandard não serão extensões lineares, mas apenas aplicações isótonas. O resultado seguinte generaliza o facto mencionado de que extensões lineares de um conjunto parcialmente ordenado finito P dão origem a quadros de Young standard de forma $\lambda(P)$.

Proposição 4.16. *Seja (P, \leq) um conjunto parcialmente ordenado finito e seja $f : P \rightarrow [n]$ uma aplicação isótona, com $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que, para cada $i \in [n]$, $f^{-1}(\{i\})$ é uma cadeia. Definimos recursivamente, para cada $i \in [n]$, quadros de Young P_i do seguinte modo:*

- P_1 é o quadro de forma $\lambda(f^{-1}([1]))$ cujas entradas são todas iguais a 1;
- para $i > 1$, P_i tem forma $\lambda(f^{-1}([i]))$ e
 - as entradas de P_i em caixas que ocorram em P_{i-1} são as mesmas que as entradas correspondentes de P_{i-1} ;
 - as entradas de P_i em caixas que não ocorram em P_{i-1} são todas iguais a i .

Então, o quadro de Young P_n é um quadro de Young semistandard de forma $\lambda(P)$, que denotamos por $P(f)$.

Demonstração. Como f é isótona, para cada $i \in [n]$, $f^{-1}([i])$ é um ideal de ordem de P e temos que, se $i < j$, $f^{-1}([i]) \subseteq f^{-1}([j])$. Assim, o teorema 2.42 garante que o quadro de Young P_n é crescente nas linhas e colunas.

Resta ver que P_n é estritamente crescente nas colunas. Para isso, basta ver que, para cada $i \in [n]$, não existem duas caixas de entrada i em P_n na mesma coluna. Seja $i \in [n]$ e sejam $x_1 \leq \dots \leq x_k$ os elementos de $f^{-1}(\{i\})$. Para cada $j \in [k]$, seja a_j a caixa que é acrescentada ao diagrama de Young de $f^{-1}([i]) \setminus \{x_1, \dots, x_{j+1}\}$ para obter $f^{-1}([i]) \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$.

É fácil ver que x_k é maximal em $f^{-1}([i])$ e que, para cada $j \in [k]$, temos que x_j é maximal em $f^{-1}([i]) \setminus \{x_{j+1}, \dots, x_k\}$ e que x_{j+1} cobre x_j . Assim, o teorema de Gansner (teorema 2.50) permite concluir que, para cada $j \in [k-1]$, a_j está à esquerda de a_{j+1} . Assim, não existem duas caixas de entrada i em P_n na mesma coluna. \square

No caso em que a aplicação f da proposição anterior é uma extensão linear, o quadro de Young $P(f)$ coincide com o quadro de Young standard que corresponde a f pelo processo descrito no capítulo 2, após o corolário 2.44.

Consideremos agora uma permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

e sejam $k = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ e $l = \max\{y_1, \dots, y_n\}$.

Vamos determinar duas aplicações isótonas nas condições do lema anterior

$$p_\alpha : P_\alpha \rightarrow [l] \quad \text{e} \quad q_\alpha : P_\alpha \rightarrow [k]$$

que darão origem a um par de quadros de Young semistandard $(P(p_\alpha), P(q_\alpha))$. Como veremos, este par de quadros de Young semistandard será igual ao par que corresponde a α pela correspondência RSK.

Começemos por considerar as aplicações:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\alpha : \hat{P}_\alpha &\rightarrow [l] \\ (x_i, y_i) &\mapsto y_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{q}_\alpha : \hat{P}_\alpha &\rightarrow [k] \\ (x_i, y_i) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Sejam $p_1 = (x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, p_t = (x_{i_t}, y_{i_t})$ os elementos de \hat{P}_α cuja multiplicidade em α é maior que 1; para cada $i \in [t]$, seja m_i a multiplicidade de p_i em α . Sejam C_1, \dots, C_t as cadeias que substituem os elementos p_1, \dots, p_t quando se efectuam as expansões de \hat{P}_α em cada um destes elementos; note-se que estas cadeias são disjuntas duas a duas.

A aplicação p_α é definida do seguinte modo: para cada $x \in P_\alpha$,

- se $x = (x_i, y_i) \in \hat{P}_\alpha$, então $p_\alpha(x) = y_i$;
- para cada $j \in [t]$, se $x \in C_j$, então $p_\alpha(x) = \hat{p}_\alpha(p_j)$.

Analogamente se define a aplicação q_α .

No caso em que α é uma permutação, as aplicações p_α e q_α coincidem com as extensões lineares do conjunto parcialmente ordenado de permutação P_α definidas na secção anterior.

O resultado que se segue é consequência da definição da relação de ordem na expansão de um conjunto parcialmente ordenado.

Lema 4.17. *Seja α uma permutação generalizada. As aplicações p_α e q_α são isótonas e a imagem inversa de um conjunto singular por qualquer uma das duas aplicações é uma cadeia.*

Exemplo. Consideremos novamente a permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos representar as aplicações p_α e q_α rotulando as linhas e colunas da grelha onde representámos anteriormente o diagrama de Hasse de P_α ; os rótulos das linhas corresponderão à aplicação p_α e os das colunas corresponderão à aplicação q_α .

Procedemos do seguinte modo: começamos por rotular consecutivamente as linhas e colunas da grelha onde dispomos as multiplicidades dos elementos de \hat{P}_α .

5		(1)		
4				
3	(2)			(1)
2		(1)		
1	(1)		(2)	
	1	2	3	4

Quando se expandem células da grelha anterior, as novas colunas e linhas criadas terão o mesmo rótulo que a coluna e linha original. Obtém-se assim a seguinte grelha.

5						
4						
3		●				
3	●					●
2			●			
1					●	
1	●					
	1	1	2	3	3	4

Dado um ponto da grelha anterior, a sua imagem por p_α é o rótulo da sua linha e a sua imagem por q_α é o rótulo da sua coluna.

Os quadros semistandard correspondentes a estas aplicações isótonas são:

$$P(p_\alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad P(q_\alpha) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Analogamente ao teorema 4.3, tem-se o resultado seguinte.

Teorema 4.18. *A aplicação que a cada permutação generalizada α , de comprimento n , faz corresponder o par $(P(p_\alpha), P(q_\alpha))$ é uma bijecção entre o conjunto das permutações generalizadas de comprimento n e o conjunto dos pares de quadros de Young semistandard com n caixas e com a mesma forma.*

A demonstração do teorema anterior seguirá uma estratégia análoga à utilizada na demonstração do teorema 4.3: em primeiro lugar descreveremos uma forma recursiva de obter os quadros de Young semistandard $P(p_\alpha)$ e $P(q_\alpha)$ e em segundo lugar provaremos que esse procedimento pode ser invertido.

De modo a tirar partido do que foi exposto na secção anterior, vamos começar por obter, a partir da grelha onde se dispõem os pontos de P_α , uma nova grelha onde exista apenas um ponto em cada linha e em cada coluna.

Exemplo. Consideremos novamente a permutação generalizada

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os pontos de P_α encontram-se na seguinte grelha.

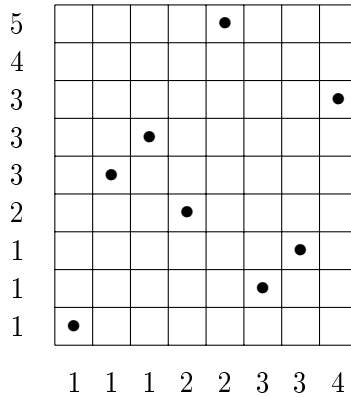
5			•				
4							
3		•					•
3	•						
2			•				
1					•		
1	•			•			
	1	1	2	3	3	4	

De modo a que haja no máximo um ponto em cada linha e coluna, precisamos de multiplicar as linhas e colunas onde ocorra mais do que um ponto.

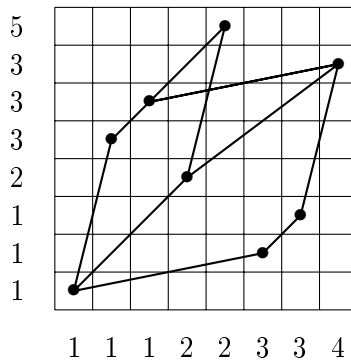
4. *Diagramas de Crescimento*

Se uma linha de coordenada i tiver m pontos, ela dá origem a m novas linhas, e os pontos nessas linhas são dispostos de forma a que, da esquerda para a direita, o primeiro ponto esteja na linha de baixo e na sua coluna original, o segundo esteja na linha seguinte, e assim sucessivamente. Analogamente se multiplicam as colunas com mais do que um ponto.

No nosso exemplo, ficamos com o seguinte diagrama.



A linha da grelha anterior com rótulo 4 pode ser eliminada, visto que não existem pontos do conjunto P_α nessa linha. Deste modo, obtemos uma grelha com exactamente um ponto em cada linha e coluna, na qual podemos desenhar o seguinte diagrama de Hasse.



Observemos que as coordenadas das colunas correspondem ao x -conteúdo de α e as coordenadas das linhas correspondem ao y -conteúdo de α .

Na última grelha do exemplo anterior, o conjunto parcialmente ordenado representado não é exactamente P_α , mas sim um conjunto parcialmente ordenado isomorfo a P_α , que denotaremos por \bar{P}_α . Os rótulos nas linhas e colunas da grelha representam assim aplicações isótonas \bar{p}_α e \bar{q}_α ; é fácil ver que $P(\bar{p}_\alpha) = P(p_\alpha)$ e $P(\bar{q}_\alpha) = P(q_\alpha)$.

À grelha anterior chamaremos *grelha normal de α* . Por uma questão de conveniência, iremos atribuir as coordenadas usuais de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ às células da grelha. De modo a que estas coordenadas não se confundam com os números que atribuímos às linhas e colunas no exemplo anterior, chamaremos a estes últimos *rótulos* das linhas e colunas e reservaremos o termo “coordenadas” para as coordenadas usuais.

Podemos assim pensar no conjunto parcialmente ordenado \bar{P}_α como um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sendo os rótulos das linhas e colunas uma forma de representar as aplicações isótonas \bar{p}_α e \bar{q}_α , como indicado anteriormente.

Vamos agora definir subconjuntos $P_\alpha(i, j)$ de \bar{P}_α , exactamente do mesmo modo que fizemos na secção anterior: para quaisquer $i, j \in \{0, \dots, n\}$, sendo n o comprimento de α , definimos

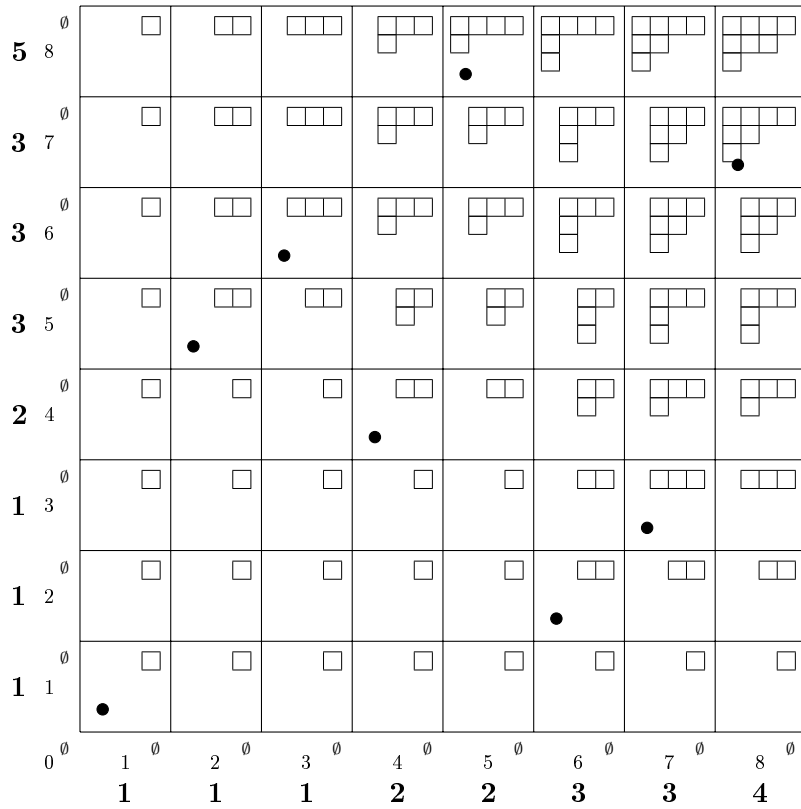
$$P_\alpha(i, j) = \bar{P}_\alpha \cap ([i] \times [j]).$$

Tal como no caso dos conjuntos parcialmente ordenados de permutação, os conjuntos $P_\alpha(i, j)$ são ideais de ordem de P_α . Denotamos a partição das cadeias de $P_\alpha(i, j)$ por λ_{ij} .

Podemos dispor os diagramas de Young λ_{ij} na grelha normal de α , obtendo um diagrama de crescimento.

Exemplo. Regressando ao exemplo anterior, obtemos o seguinte diagrama de crescimento:

4. Diagramas de Crescimento



Os números em tipo de letra maior nas margens do diagrama representam as extensões lineares \bar{p}_α e \bar{q}_α .

Neste momento podemos afirmar que os diagramas de Young do diagrama de crescimento anterior podem ser obtidos recursivamente recorrendo às regras de crescimento expostas no teorema 4.4. De facto, o conjunto parcialmente ordenado \bar{P}_α é um conjunto parcialmente ordenado de permutação, para uma certa permutação σ , pelo que os resultados da secção anterior se aplicam a esta situação.

No caso dos conjuntos parcialmente ordenados de permutação, a margem direita do diagrama de crescimento apresentava uma cadeia saturada de diagramas de Young. Percorrendo as linhas de baixo para cima, era acrescentada uma nova caixa a cada diagrama; escrevendo em cada nova caixa o número da linha em que esta era acrescentada obtinha-se o quadro de Young standard correspondente à cadeia saturada dessa margem do diagrama de crescimento. Um processo análogo era seguido no caso da margem superior do diagrama de crescimento.

Neste caso, o processo de obtenção dos quadros semistandard correspondentes a \bar{p}_α é o seguinte: percorrendo as células da margem direita do diagrama de crescimento, de baixo para cima, tem-se uma cadeia saturada de diagramas

de Young; na caixa que é acrescentada na linha i escreve-se o rótulo dessa linha. É fácil ver que este processo está de acordo com o descrito no enunciado da proposição 4.16.

Para demonstrar que este processo é invertível, precisamos de ver que, dado um par de quadros de Young semistandard, é possível recuperar a permutação generalizada α . Ora, as regras locais inversas (teorema 4.5) permitem, a partir de duas cadeias saturadas de diagramas de Young, recuperar os diagramas de Young do diagrama de crescimento, bem como os pontos da grelha. Para inverter completamente o processo de crescimento, precisamos do lema que se segue.

Lema 4.19. *Seja α uma permutação generalizada de comprimento n .*

- (a) *Seja $i \in [n - 1]$ tal que a coluna i do diagrama de crescimento de α tem o mesmo rótulo que a coluna $i + 1$. Então, a caixa $Y(\lambda_{i+1,n}) \setminus Y(\lambda_{in})$ está à direita da caixa $Y(\lambda_{in}) \setminus Y(\lambda_{i-1,n})$.*
- (b) *Seja $j \in [n - 1]$ tal que a linha j do diagrama de crescimento de α tem o mesmo rótulo que a linha $j + 1$. Então, a caixa $Y(\lambda_{n,j+1}) \setminus Y(\lambda_{jn})$ está à direita da caixa $Y(\lambda_{jn}) \setminus Y(\lambda_{n,j-1})$.*

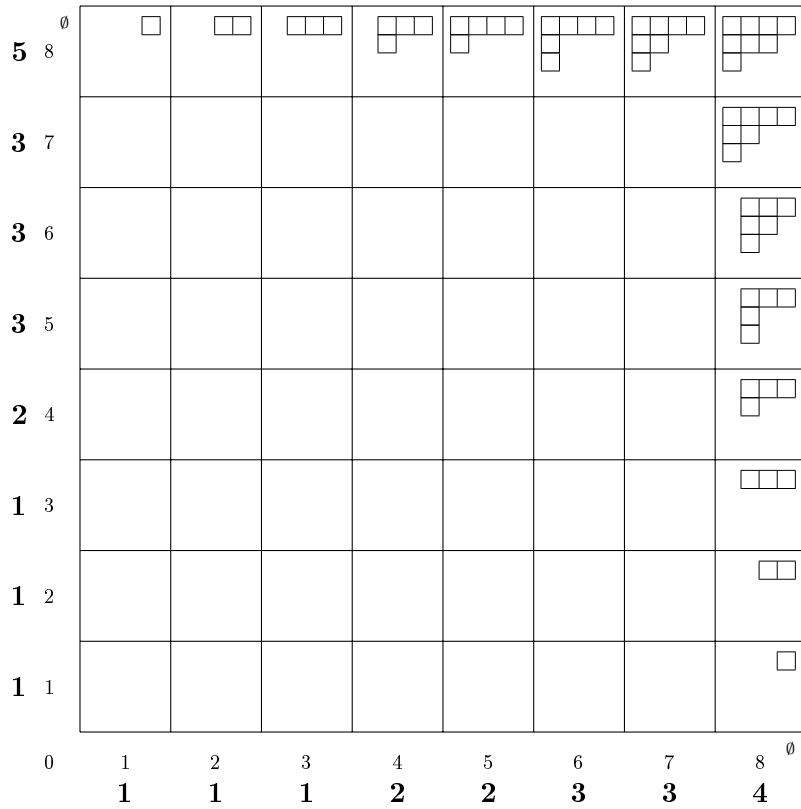
Demonstração. Faremos apenas a demonstração da alínea (a). Seja $i \in [n - 1]$ tal que a coluna i do diagrama de crescimento de α tem o mesmo rótulo que a coluna $i + 1$.

Seja p_1 o elemento de \bar{P}_α na coluna $i + 1$ e seja p_2 o elemento de \bar{P}_α na coluna i . Denotemos por P' o conjunto parcialmente ordenado $P_\alpha(i + 1, n)$. Então, temos que p_1 é elemento maximal de P' , p_2 é elemento maximal de $P' \setminus \{p_1\}$ e p_1 cobre p_2 . Assim, o resultado é consequência do teorema de Gansner (2.50). \square

Exemplo. Consideremos os quadros de Young semistandard seguintes:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Podemos dispor, nas margens superior e direita de um diagrama de crescimento, cadeias saturadas de diagramas de Young correspondentes a estes quadros de Young, do seguinte modo:



A cadeia saturada da margem direita do diagrama de crescimento anterior foi obtida do seguinte modo: de baixo para cima, vão sendo acrescentadas caixas ao diagrama de Young da linha anterior seguindo a ordem crescente das entradas de P ; de entre as caixas com a mesma entrada, são acrescentadas primeiro aquelas que estão mais à direita, tendo em conta o lema anterior.

De um modo análogo se dispõem os diagramas de Young da cadeia saturada da margem superior do diagrama, correspondentes ao quadro Q .

Os rótulos das linhas e colunas obtêm-se a partir das entradas dos quadros P e Q : os rótulos das linhas são as entradas de P , por ordem crescente, de baixo para cima; os rótulos das colunas são as entradas de Q , por ordem crescente, da esquerda para a direita.

Seguindo o processo ilustrado no exemplo anterior, obtêm-se cadeias saturadas nas margens superior e direita do diagrama de crescimento. Os restantes diagramas de Young do diagrama de crescimento e os pontos do conjunto parcialmente ordenado \bar{P}_α podem agora obter-se recorrendo às regras locais de crescimento inversas (teorema 4.5). Os rótulos das linhas e colunas, obtidos a partir dos quadros de Young semistandard, permitem então recuperar totalmente a permutação generalizada α .

Provâmos assim o teorema 4.18.

O teorema seguinte estabelece que este algoritmo envolvendo diagramas de crescimento corresponde ao algoritmo original da correspondência RSK. A demonstração do teorema segue uma estratégia inteiramente análoga, com as adaptações naturais, ao que foi feito na secção anterior para demonstrar o teorema 4.10, pelo que não a faremos aqui.

Teorema 4.20. *Seja α uma permutação generalizada. Então*

$$(P(\alpha), Q(\alpha)) = (P(\bar{p}_\alpha), P(\bar{q}_\alpha)).$$

Finalmente, para concluir a secção, vamos demonstrar o teorema 3.25, que voltamos a enunciar.

Teorema 4.21 (Knuth, [15]). *Seja α uma permutação generalizada. Se $\alpha \xrightarrow{R-S-K} (P, Q)$, então*

$$\alpha^{-1} \xrightarrow{R-S-K} (Q, P).$$

Demonstração. A demonstração é inteiramente análoga à do teorema 4.11. Basta observar que, tal como no caso das permutações, o diagrama de crescimento de α^{-1} se obtém do de α por uma reflexão pela diagonal que liga as células $(1, 1)$ e (n, n) . Assim, as margens superior e direita do diagrama de crescimento de α^{-1} correspondem às margens direita e superior, respectivamente, do diagrama de crescimento de α . Logo,

$$\alpha^{-1} \xrightarrow{R-S-K} (Q(\alpha), P(\alpha)).$$

□

4.3 O *jeu de taquin* de Schützenberger

Nesta secção vamos apresentar uma versão do *jeu de taquin* recorrendo a diagramas de crescimento, tal como fizemos para a correspondência de Robinson-Schensted na secção anterior. Usando esta abordagem, demonstraremos uma propriedade de simetria deste algoritmo que não é clara a partir da sua descrição clássica, apresentada no capítulo anterior.

Ao longo desta secção, seguimos maioritariamente [10].

Em primeiro lugar, observemos que uma sequência de deslizamentos num quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ , tal como descrito no capítulo anterior, é determinada por um quadro de Young standard de forma μ . De facto, se Q é um quadro de Young standard de forma μ , podemos associar-lhe a sequência de deslizamentos que conduz ao quadro

$$j^{c_1} j^{c_2} \dots j^{c_k}(P),$$

em que $\mu \vdash k$ e, para cada $i \in [k]$, c_i é a caixa de μ que tem entrada k . Esta é uma sequência de deslizamentos admissível (isto é, em cada passo, o deslizamento é efectuado em relação a uma caixa que é canto exterior).

Reciprocamente, qualquer sequência de deslizamentos que conduza a um quadro de Young standard determina, de modo natural, um quadro de Young standard de forma μ .

Exemplo. Consideremos o quadro de Young enviesado standard de forma $(3, 3, 1)/(2, 1)$ seguinte:

$$P = \begin{array}{|c|c|} \hline & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Consideremos ainda o quadro de Young standard de forma $(2, 1)$:

$$Q = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

O quadro Q codifica uma sequência de deslizamentos que dá origem aos seguintes quadros de Young enviesados standard:

$$j^{(2,1)}(P) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} = P_1, \quad j^{(1,2)}(P_1) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array} = P_2, \quad j^{(1,1)}(P_2) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} = P_3.$$

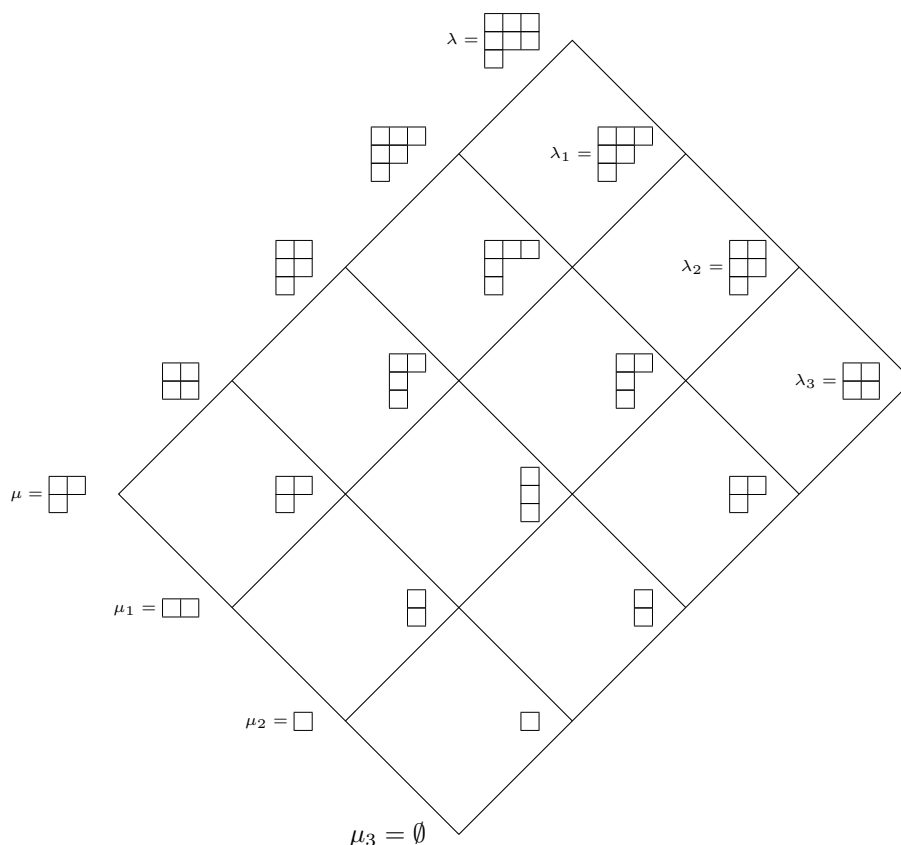
Tem-se que $P_3 = jdt(P)$.

Vamos agora ver como este processo pode ser efectuado usando um diagrama de crescimento.

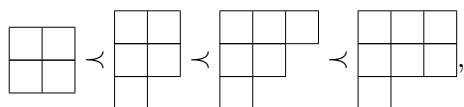
Exemplo. Consideremos os quadros de Young P e Q do exemplo anterior. Ao quadro P podemos associar, tendo em conta a proposição 1.45, uma cadeia saturada de diagramas de Young. Do mesmo modo, ao quadro Q corresponde uma cadeia saturada de diagramas de Young.

Estas cadeias podem ser dispostas num diagrama de crescimento rectangular que, por conveniência, dispomos de modo inclinado. Note-se que a cadeia saturada correspondente a P se encontra na margem superior esquerda do diagrama e a cadeia saturada correspondente a Q se encontra na margem inferior esquerda, sendo que esta última começa com $(2, 1)$ e termina com \emptyset .

Dispondo as cadeias saturadas correspondentes aos quadros P_1 , P_2 e P_3 , do exemplo anterior, paralelamente à cadeia saturada que corresponde P , obtém-se o diagrama de crescimento:



A cadeia saturada da margem superior direita do diagrama de crescimento corresponde a um quadro de Young enviesado standard P' . No exemplo anterior, a cadeia saturada é



que corresponde ao quadro de Young enviesado standard

$$P' = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

O objectivo desta secção é demonstrar que $Q = jdt(P')$. Assim, o diagrama de crescimento ilustra uma propriedade de simetria do *jeu de taquin* que não é clara a partir da definição original do algoritmo. Esta simetria vem expressa no teorema que se segue.

Teorema 4.22 (Simetria do *jeu de taquin*). *Seja P um quadro de Young enviesado standard de forma λ/μ e seja Q um quadro de Young standard de forma μ . Sejam*

$$P_1, \dots, P_k$$

os quadros de Young enviesados standard que se obtém de P pelos sucessivos deslizamentos codificados pelo quadro de Young Q . Suponhamos que, para cada $i \in [k]$, P_i é da forma λ_i/μ_i .

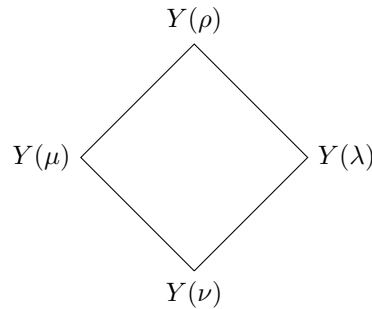
Seja P' o quadro de Young enviesado standard que corresponde à cadeia saturada de diagramas de Young

$$Y(\lambda_k) \prec Y(\lambda_{k-1}) \prec \dots \prec Y(\lambda_1) \prec Y(\lambda).$$

Então, $Q = jdt(P')$.

Para demonstrar o teorema anterior, vamos apresentar, tal como fizemos para a correspondência de Robinson-Schensted, regras locais de crescimento que permitem obter os diagramas de Young de um diagrama de crescimento como o do exemplo anterior apenas a partir dos diagramas de Young das margens esquerdas.

Consideremos então um subquadrado de um diagrama de crescimento para o *jeu de taquin*:



Precisamos do lema que se segue.

Lema 4.23. *Temos as seguintes relações de cobertura entre os diagramas de Young representados anteriormente:*

$$Y(\nu) \prec Y(\mu) \prec Y(\rho) \quad e \quad Y(\nu) \prec Y(\lambda) \prec Y(\rho).$$

Demonstração. É claro que $Y(\mu) \prec Y(\rho)$ e $Y(\nu) \prec Y(\lambda)$, pela construção do diagrama de crescimento.

Existem um quadro de Young enviesado standard P de forma γ/δ , um canto interior c de δ e um número natural k tais que:

- $Y(\mu)$ é igual a $Y(\delta)$ juntamente com as caixas de P com entradas de 1 a k ;
- $Y(\rho)$ é igual a $Y(\delta)$ juntamente com as caixas de P com entradas de 1 a $k + 1$;
- $Y(\nu)$ é igual a $Y(\delta) \setminus \{c\}$ juntamente com as caixas de $j^c(P)$ com entradas de 1 a k ;
- $Y(\nu)$ é igual a $Y(\delta) \setminus \{c\}$ juntamente com as caixas de $j^c(P)$ com entradas de 1 a $k + 1$.

De facto, qualquer subquadrado de um diagrama de crescimento do *jeu de taquin* se encontra nestas circunstâncias, como se pode ver pela construção do diagrama de crescimento descrita anteriormente.

Procedemos por indução em k . Se $k = 1$, então $Y(\mu)$ e $Y(\nu)$ estão na margem inferior esquerda do diagrama de crescimento e, pela construção do diagrama de crescimento, temos $Y(\nu) \prec Y(\mu)$. Para além disso, temos que:

- A caixa acrescentada a $Y(\mu)$ para obter $Y(\rho)$ é a caixa de P com entrada 1.
- A caixa acrescentada a $Y(\nu)$ para obter $Y(\lambda)$ é a caixa de $j^c(P)$ com entrada 1.

Se a entrada 1 foi movida na passagem de P para $j^c(P)$, então a caixa de $j^c(P)$ com entrada 1 é uma caixa de δ . Se a entrada 1 não foi movida na passagem de P para $j^c(P)$, então a caixa de $j^c(P)$ com entrada 1 é a caixa de P com entrada 1. Em qualquer caso, temos $Y(\lambda) \subseteq Y(\rho)$. Uma vez que a diferença entre $Y(\lambda)$ e $Y(\rho)$ é apenas de uma caixa, temos $Y(\lambda) \prec Y(\rho)$.

Basta agora provar que, para k arbitrário, se $Y(\nu) \prec Y(\mu)$, então $Y(\lambda) \prec Y(\rho)$. Temos que

- A caixa acrescentada a $Y(\mu)$ para obter $Y(\rho)$ é a caixa de P com entrada $k + 1$.
- A caixa acrescentada a $Y(\nu)$ para obter $Y(\lambda)$ é a caixa de $j^c(P)$ com entrada $k + 1$.

Se a entrada $k + 1$ foi movida na passagem de P para $j^c(P)$, então a caixa de $j^c(P)$ com entrada $k + 1$ é uma caixa de δ ou uma caixa de P com entrada menor que $k + 1$. Se a entrada $k + 1$ não foi movida na passagem de P para $j^c(P)$, então a caixa de $j^c(P)$ com entrada $k + 1$ é a caixa de P com entrada $k + 1$. Em qualquer caso, temos $Y(\lambda) \subseteq Y(\rho)$. Uma vez que a diferença entre $Y(\lambda)$ e $Y(\rho)$ é apenas de uma caixa, temos $Y(\lambda) \prec Y(\rho)$. A demonstração fica assim concluída. \square

O teorema seguinte diz-nos como se pode obter o diagrama de λ à custa dos outros três.

Teorema 4.24 (Regras locais de crescimento (*jeu de taquin*), Fomin, [10]). *O diagrama de Young $Y(\lambda)$ obtém-se dos diagramas de Young das partições ν , μ e ρ do seguinte modo:*

- (i) *Se $Y(\mu)$ é o único diagrama de Young que contém $Y(\nu)$ e está contido em $Y(\rho)$, então $Y(\lambda) = Y(\mu)$.*
- (ii) *Caso contrário, existe apenas um diagrama de Young diferente de $Y(\mu)$ que contém $Y(\nu)$ e está contido em $Y(\rho)$; $Y(\lambda)$ é esse diagrama de Young.*

Demonstração. Tal como na demonstração do lema anterior, existem um quadro de Young enviesado standard P de forma γ/δ , um canto interior c de δ e um número natural k tais que:

- $Y(\mu)$ é igual a $Y(\delta)$ juntamente com as caixas de P com entradas de 1 a k ;
- $Y(\rho)$ é igual a $Y(\delta)$ juntamente com as caixas de P com entradas de 1 a $k + 1$;
- $Y(\nu)$ é igual a $Y(\delta) \setminus \{c\}$ juntamente com as caixas de $j^c(P)$ com entradas de 1 a k ;
- $Y(\nu)$ é igual a $Y(\delta) \setminus \{c\}$ juntamente com as caixas de $j^c(P)$ com entradas de 1 a $k + 1$.

Comecemos por observar que, uma vez que $Y(\rho)$ se obtém de $Y(\nu)$ acrescentando-lhe duas caixas, temos que existem no máximo dois diagramas de Young entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$.

Consideremos os seguintes casos:

1. A entrada $k + 1$ muda de posição na passagem de P para $j^c(P)$. Temos que:
 - A caixa acrescentada a $Y(\mu)$ para obter $Y(\rho)$ é a caixa de P com entrada $k + 1$.
 - A caixa acrescentada a $Y(\nu)$ para obter $Y(\lambda)$ é a caixa de $j^c(P)$ com entrada $k + 1$.
 - $Y(\lambda)$ tem uma caixa a menos que $Y(\rho)$, pelo lema anterior. A caixa de P com entrada $k + 1$ tem uma entrada maior em $j^c(P)$ ou então não existe em $j^c(P)$. De qualquer modo, a caixa de P com entrada $k + 1$ não existe em $Y(\lambda)$, pelo que é esta a caixa que se acrescenta a $Y(\lambda)$ para obter $Y(\rho)$.

As observações anteriores permitem concluir que a diferença entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$ consiste na caixa de $j^c(P)$ com entrada $k+1$ e na caixa de P com entrada $k+1$. Só uma destas caixas é um canto exterior de $Y(\rho)$, pelo que existe um único diagrama de Young entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$. Para além disso, neste caso, temos $Y(\mu) = Y(\lambda)$.

2. A entrada $k+1$ não muda de posição na passagem de P para $j^c(P)$. Temos que:

- A caixa acrescentada a $Y(\mu)$ para obter $Y(\rho)$ é a caixa de P com entrada $k+1$.
- A caixa acrescentada a $Y(\nu)$ para obter $Y(\lambda)$ é a caixa de $j^c(P)$ com entrada $k+1$.
- $Y(\lambda)$ tem uma caixa a menos que $Y(\rho)$, pelo lema anterior. Como a caixa de P com entrada $k+1$ é igual à caixa de $j^c(P)$ com entrada $k+1$, temos que esta caixa existe em $Y(\lambda)$. Assim, a caixa acrescentada a $Y(\lambda)$ para obter $Y(\rho)$ é diferente desta.

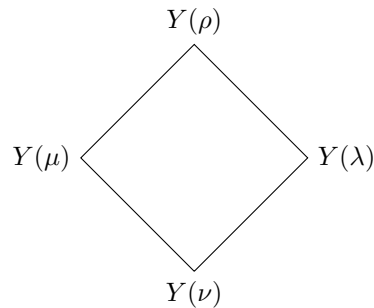
As observações anteriores permitem concluir que existem dois diagramas de Young diferentes entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$: $Y(\mu)$ e $Y(\lambda)$.

A discussão dos casos anteriores permite concluir o seguinte:

- (a) Existe um único diagrama de Young entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$ se e só se $k+1$ muda de posição na passagem de P para $j^c(P)$. Neste caso, $Y(\mu) = Y(\lambda)$.
- (b) Existem dois diagramas de Young entre $Y(\nu)$ e $Y(\rho)$ se e só se $k+1$ não muda de posição na passagem de P para $j^c(P)$. Neste caso, $Y(\mu) \neq Y(\lambda)$.

As conclusões anteriores implicam o enunciado do teorema, pelo que a demonstração está concluída. \square

Podemos agora demonstrar o teorema 4.22. Consideremos novamente um subquadrado de um diagrama de crescimento do *jeu de taquin*:



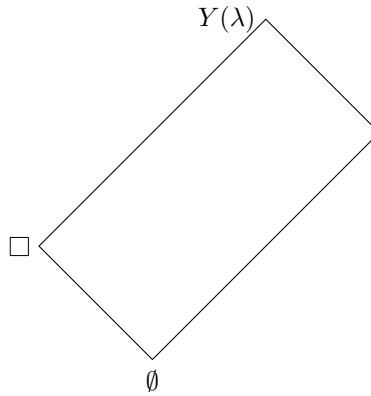
O diagrama de Young $Y(\mu)$ pode também ser obtido a partir dos três restantes, seguindo regras locais duais das apresentadas anteriormente: basta trocar os papéis de μ e λ no enunciado dessas regras. Assim, conclui-se que o quadro standard de Young que corresponde à cadeia saturada da margem inferior esquerda do diagrama de crescimento é igual a $jdt(P')$, em que P' é o quadro de Young enviesado standard que corresponde à cadeia saturada da margem superior direita.

Fica assim demonstrado o teorema 4.22.

4.4 A involução de Schützenberger

Nesta secção, vamos descrever o algoritmo de evacuação usando diagramas de crescimento. Uma vez que a evacuação se baseia nos algoritmos de deslizamento que também se encontram na base do *jeu de taquin*, iremos começar por abordar a evacuação do ponto de vista dos diagramas de crescimento estudados na secção anterior. Posteriormente, iremos relacionar esta abordagem com os conjuntos parcialmente ordenados de permutação, introduzidos no início do capítulo.

Consideremos então um quadro de Young standard P de forma λ . O operador Δ , definido na última secção do capítulo 3, consiste em aplicar um deslizamento para a frente ao quadro P' , que se obtém de P removendo-lhe a caixa $(1, 1)$. Assim, um diagrama de crescimento do *jeu de taquin* para o operador Δ tem a forma:

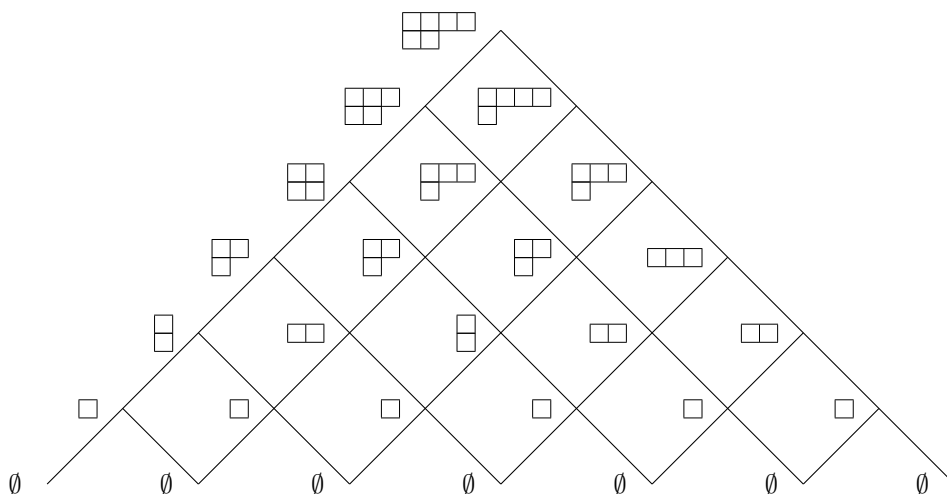


Sucessivas iterações do operador Δ produzem diagramas de crescimento que podem ser dispostos num outro tipo de diagrama de crescimento, de forma triangular, como ilustrado no exemplo seguinte.

Exemplo. Consideremos o quadro de Young standard

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

Os quadros que se obtêm de P por sucessiva iteração do operador Δ podem ser dispostos no seguinte diagrama de crescimento triangular:



A margem esquerda do diagrama corresponde ao quadro P ; as margens paralelas à margem esquerda correspondem aos quadros que se obtêm de P por aplicação sucessiva do operador delta. Notemos que estes não são quadros de Young standard, mas sim quadros de Young standard parciais: as entradas de $\Delta^k(P)$ são os elementos do conjunto $\{k + 1, \dots, n\}$.

Tendo em conta a definição do processo de evacuação, a margem direita do diagrama tem uma cadeia saturada de diagramas de Young que corresponde a $ev(P)$.

A simetria das regras locais nos diagrama de crescimento do *jeu de taquin* permite agora concluir que a aplicação $P \mapsto ev(P)$ é uma involução. De facto, se preenchermos a margem esquerda de um diagrama de crescimento da evacuação com a cadeia saturada correspondente a $ev(P)$ e aplicarmos as regras de crescimento, obtemos na margem direita o quadro P original. Assim, $ev(ev(P)) = P$. Fica então demonstrado o teorema 3.40.

Vamos agora relacionar os diagramas de crescimento para a evacuação com a correspondência de Robinson-Schensted e, particularmente, com a noção de conjunto parcialmente ordenado de permutação definida no início do capítulo.

Começemos por definir, dada uma permutação $\sigma \in S_n$ e dados $i, j \in [n]$, com $i \leq j$, o seguinte subconjunto de P_σ :

$$P_\sigma[i; j] = \{(k, \sigma(k)) : i \leq k \leq j\}.$$

Definimos também, dados $i, j \in [n]$, com $i \leq j$, $\lambda_{[i; j]} = \lambda(P_\sigma[i; j])$.

Temos o seguinte resultado.

Lema 4.25. *Seja $\sigma \in S_n$.*

(a) *Para qualquer $i \in [n]$ e qualquer $j \in [n - 1]$,*

$$Y(\lambda_{[i;j]}) \prec Y(\lambda_{[i;j+1]}).$$

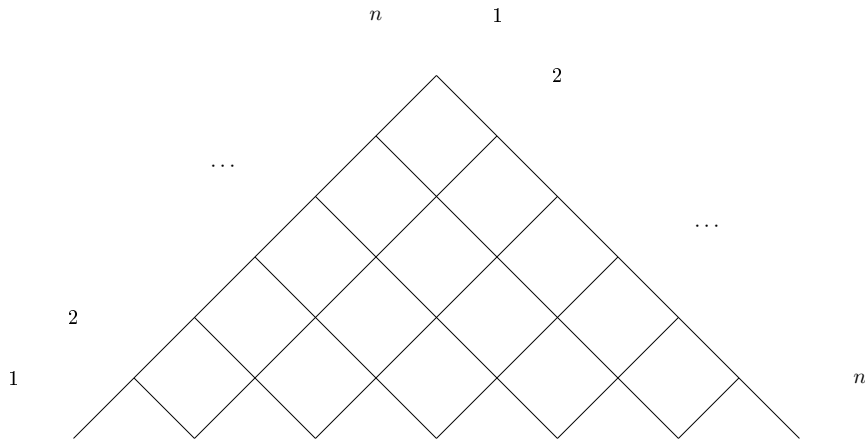
(b) *Para qualquer $i \in [n - 1]$ e qualquer $j \in [n]$,*

$$Y(\lambda_{[i;j]}) \prec Y(\lambda_{[i+1;j]}).$$

Demonstração. Demonstramos apenas a alínea (a); a demonstração da alínea (b) é análoga. Sejam $i \in [n]$ e $j \in [n - 1]$.

É fácil ver que $P_\sigma[i; j + 1] = P_\sigma[i; j] \dot{\cup} \{(j + 1, \sigma(j + 1))\}$ e que $(j + 1, \sigma(j + 1))$ é um elemento maximal de $P_\sigma[i; j + 1]$. Assim, o teorema 2.42 implica que $Y(\lambda_{[i;j]}) \prec Y(\lambda_{[i;j+1]})$. \square

Consideremos um diagrama de crescimento para a evacuação e numeremos as filas do diagrama, de modo a atribuir coordenadas aos diagramas de Young que nele figurem:



Referir-nos-emos às filas paralelas à margem esquerda do diagrama como filas crescentes e às filas paralelas à margem direita como filas decrescentes. Assim, um diagrama de crescimento para a evacuação que esteja totalmente preenchido terá um diagrama de Young em cada intersecção de uma fila crescente com uma fila decrescente.

O resultado que se segue relaciona os diagramas de Young $Y(\lambda_{[i;j]})$ com os diagramas de Young de um diagrama de crescimento para a evacuação.

Teorema 4.26. *Seja $\sigma \in S_n$ e seja Q o quadro de registo de σ . Preencha-se a margem esquerda de um diagrama de crescimento para a evacuação com a cadeia saturada de diagramas de Young que corresponde a Q e complete-se o diagrama de crescimento aplicando as regras locais de crescimento.*

Tem-se que, para cada $i, j \in [n]$, com $i \leq j$, o diagrama de Young na fila decrescente i e fila crescente j é $Y(\lambda_{[i;j]})$.

Demonstração. A margem esquerda do diagrama de crescimento é a fila crescente 1. Para qualquer $j \in [n]$, temos

$$P_\sigma[1; j] = \{(k, \sigma(k)) : 1 \leq k \leq j\} = P_\sigma \cap ([j] \times [n]) = P_\sigma(j, n).$$

Assim, temos, para cada $j \in [n]$,

$$Y(\lambda(P_\sigma[1; j])) = Y(\lambda_{[1;j]}) = Y(\lambda_{jn}),$$

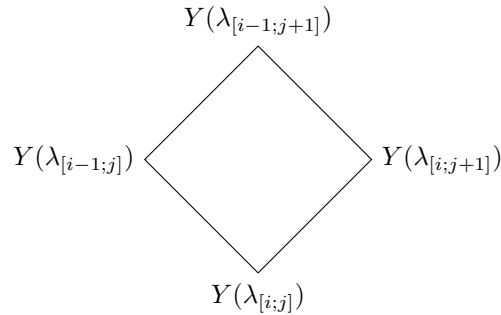
e a cadeia saturada de diagramas de Young

$$Y(\lambda_{j1}) \prec \cdots \prec Y(\lambda_{jn})$$

corresponde precisamente a $Q(\sigma) = Q$. Portanto, os diagramas de Young da fila crescente 1 são precisamente os diagramas de Young $Y(\lambda_{[i;j]})$.

Vamos agora mostrar que, aplicando as regras de crescimento locais à margem esquerda do diagrama, preenchida com os diagramas de Young $Y(\lambda_{[1;j]})$, se obtêm os restantes diagramas $Y(\lambda_{[i;j]})$. Isto, juntamente com a discussão anterior, conclui a demonstração.

Sejam $i, j \in [n]$ e consideremos os seguintes diagramas de Young numa posição genérica no diagrama de crescimento da evacuação:



Assim, precisamos de provar que:

- Se $Y(\lambda_{[i-1;j]})$ é o único diagrama de Young que contém $Y(\lambda_{[i;j]})$ e está contido em $Y(\lambda_{[i-1;j+1]})$, então $Y(\lambda_{[i;j+1]}) = Y(\lambda_{[i-1;j]})$.
- Caso contrário, existe apenas um diagrama de Young diferente de $Y(\lambda_{[i-1;j]})$ que contém $Y(\lambda_{[i;j]})$ e está contido em $Y(\lambda_{[i-1;j+1]})$; $Y(\lambda_{[i;j+1]})$ é esse diagrama de Young.

A primeira parte é consequência do lema 4.25.

Suponhamos agora que existe uma partição μ , diferente de $\lambda_{[i-1;j]}$, tal que $Y(\mu)$ contém $Y(\lambda_{[i;j]})$ e está contido em $Y(\lambda_{[i-1;j+1]})$. Uma vez que esta partição é única, tem-se necessariamente $\lambda_{[i;j+1]} = \lambda_{[i-1;j]}$ ou $\lambda_{[i;j+1]} = \mu$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\lambda_{[i;j+1]} = \lambda_{[i-1;j]}$.

Definamos caixas a e b do seguinte modo:

$$Y(\lambda_{[i;j]}) = Y(\lambda_{[i-1;j]}) \setminus \{a\},$$

$$Y(\lambda_{[i-1;j]}) = Y(\lambda_{[i-1;j+1]}) \setminus \{b\}.$$

Denotemos $\tilde{P} = P_\sigma[i-1; j+1]$, $x_1 = (i-1, \sigma(i-1))$ e $x_2 = (j+1, \sigma(j+1))$. Então, x_1 é elemento minimal de \tilde{P} , x_2 é elemento maximal de \tilde{P} , e temos

$$Y(\lambda(\tilde{P} \setminus \{x_1\})) = Y(\lambda(\tilde{P} \setminus \{x_2\})) = Y(\lambda_{[i-1;j+1]} \setminus \{b\}),$$

$$Y(\lambda(\tilde{P} \setminus \{x_1, x_2\})) = Y(\lambda_{[i-1;j+1]} \setminus \{a, b\}).$$

O teorema 2.49 implica que a está na mesma coluna de b ou na coluna imediatamente à esquerda da de b , isto é, b está na mesma coluna de a ou na coluna imediatamente à direita.

Consideremos agora o conjunto parcialmente ordenado (\tilde{P}, \leq') , em que, dados $k, l \in [n]$, se tem

$$(k, \sigma(k)) \leq' (l, \sigma(l)) \text{ se e só se } k \geq l \text{ e } \sigma(k) \leq \sigma(l).$$

Esta ordem parcial já foi considerada, na demonstração do teorema 4.4. Relembramos que um subconjunto de \tilde{P} é uma cadeia de (\tilde{P}, \leq) se e só se for uma anticadeia de (\tilde{P}, \leq') , e vice-versa. Portanto, os diagramas de Young considerados nesta demonstração são transpostos ao considerarmos esta ordem parcial. Em relação à ordem parcial \leq' , x_1 é maximal e x_2 é minimal. O teorema 2.49 implica então que b está na mesma linha de $Y(\lambda_{[i-1;j+1]})$ que a , ou na linha imediatamente abaixo.

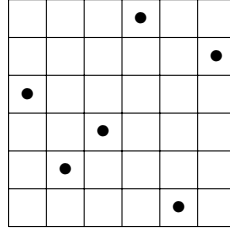
Esta última conclusão, juntamente com o que já sabemos sobre as posições relativas de a e b , permite concluir que a e b são adjacentes, estando b abaixo ou à direita de a . Mas isto implica que $Y(\lambda_{[i;j]}) \cap \{a\}$ é o único diagrama de Young que contém $Y(\lambda_{[i;j]})$ e está contido em $Y(\lambda_{[i-1;j+1]})$, o que é absurdo. A demonstração fica então concluída. \square

Consideremos uma permutação $\sigma \in S_n$. No capítulo 3, definimos a permutação σ' do seguinte modo: para cada $i \in [n]$,

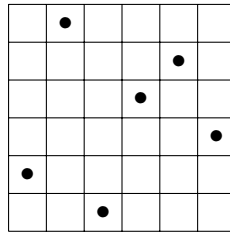
$$\sigma'(i) = n + 1 - \sigma(n + 1 - i).$$

Não é difícil verificar que, se representarmos o gráfico da permutação σ numa grelha, como descrito na primeira secção deste capítulo, então o gráfico de σ' pode ser obtido por uma rotação de 180 graus do gráfico de σ .

Exemplo. Consideremos a permutação $\sigma = 423615 \in S_6$. O gráfico de σ pode ser representado do seguinte modo:



Tem-se que $\sigma' = 261453$. O gráfico de σ' pode ser representado do seguinte modo:



Seja $\sigma \in S_n$ e considere-se a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \psi : P_\sigma &\rightarrow P_{\sigma'} \\ (i, \sigma(i)) &\mapsto (n - i + 1, \sigma'(n - i + 1)) \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que ψ é bijetiva e que, para quaisquer $i, j \in [n]$, se $(i, \sigma(i)) \leq (j, \sigma(j))$, então $\psi(i, \sigma(i)) \geq \psi(j, \sigma(j))$. Assim, concluímos que o conjunto parcialmente ordenado $P_{\sigma'}$ é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado dual de P_σ . Assim, a proposição 1.26 implica que

$$Y(\lambda(P_\sigma)) = Y(\lambda(P_{\sigma'})).$$

Tendo em conta que o conjunto parcialmente ordenado $P_{\sigma'}$ é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado dual de P_σ , podemos dar uma interpretação geométrica à extensão linear $q_{\sigma'}$, à custa da extensão linear q_σ . Sabemos que a extensão linear q_σ corresponde a numerar os elementos de P_σ de acordo com a sua segunda coordenada, isto é, numerá-los “de baixo para cima”. Assim, como a extensão linear $q_{\sigma'}$ corresponde a numerar os elementos de $P_{\sigma'}$ “de baixo para cima”, podemos interpretar esta extensão linear como uma numeração dos elementos de P_σ “de cima para baixo”.

Tendo em conta o exposto, podemos concluir o seguinte: do mesmo modo que os diagramas de Young $Y(\lambda_{[1;j]})$ formam a cadeia saturada correspondente ao quadro de Young $P(q_\sigma) = Q(\sigma)$, os diagramas de Young $Y(\lambda_{[i;1]})$ formam a

cadeia saturada correspondente ao quadro de Young $P(q_{\sigma'}) = Q(\sigma')$. Uma vez que os diagramas de Young $Y(\lambda_{[i;1]})$ formam a cadeia saturada que corresponde a $ev(Q(\sigma))$, podemos concluir o teorema que se segue.

Proposição 4.27. *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se que*

$$Q(\sigma') = ev(Q(\sigma)).$$

A proposição anterior é apenas uma parte do teorema 3.41; para concluir a outra parte precisamos de um lema.

Lema 4.28. *Seja $\sigma \in S_n$. Tem-se*

$$(\sigma')^{-1} = (\sigma^{-1})'.$$

Demonstração. Note-se que $\sigma' = \theta\sigma\theta$, em que θ é definida por: para cada $i \in [n]$,

$$\theta(i) = n - i + 1.$$

Uma vez que $\theta^{-1} = \theta$, tem-se

$$(\sigma')^{-1} = (\theta\sigma\theta)^{-1} = \theta^{-1}\sigma^{-1}\theta^{-1} = \theta\sigma^{-1}\theta = (\sigma^{-1})'.$$

□

Podemos agora demonstrar o teorema 3.41, que voltamos a enunciar.

Teorema 4.29. *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$, então*

$$\sigma' \xrightarrow{R-S} (ev(P), ev(Q)).$$

Demonstração. Resta-nos apenas ver que $P(\sigma') = ev(P(\sigma))$. Tem-se, pelo lema anterior e pelo teorema 3.13,

$$P(\sigma') = Q((\sigma')^{-1}) = Q((\sigma^{-1})') = ev(Q(\sigma^{-1})) = ev(P(\sigma)).$$

□

Finalmente, vamos demonstrar o teorema 3.42, que também enunciamos de novo.

Teorema 4.30. *Seja $\sigma \in S_n$. Se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$, então*

$$\sigma^r \xrightarrow{R-S} (P^\top, (ev(Q))^\top).$$

Demonstração. Tendo em conta a proposição 3.14, resta-nos ver que $Q(\sigma^r) = (ev(Q))^\top$. Notemos, em primeiro lugar, que $\sigma^r = \sigma\theta$, em que θ é a permutação definida no início da demonstração do lema 4.28. Assim,

$$\begin{aligned} Q(\sigma^r) &= Q(\sigma\theta) \\ &= P(\theta\sigma^{-1}) \\ &= (P(\theta\sigma^{-1}\theta))^\top \\ &= (P((\sigma^{-1})'))^\top \\ &= (P((\sigma')^{-1}))^\top \\ &= (Q(\sigma'))^\top \\ &= (ev(Q))^\top. \end{aligned}$$

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BARNABEI, Lecture notes of the course “Combinatorial Aspects of Permutations and Words”, Lisboa, 2009.
- [2] F. BERGERON, *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces*, A K Peters/CRC Press, 2009.
- [3] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 3rd revised ed., American Mathematical Society, 1940.
- [4] T. BRITZ, S. FOMIN, Finite Posets and Ferrers Shapes, *Advances in Mathematics* **158** (2001), 86-127.
- [5] P. CAMERON, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1995.
- [6] B. DAVEY, H. PRIESTLEY, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 2002.
- [7] R. DILWORTH, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* **51** (1950), 161-166.
- [8] S. FOMIN, Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, *Journal of Soviet Mathematics* **41** (1988), 979-991.
- [9] S. FOMIN, Schensted algorithms for dual graded graphs, *Journal of Algebraic Combinatorics* **4** (1995), 5-45.
- [10] S. FOMIN, Knuth Equivalence, Jeu de Taquin, and the Littlewood-Richardson Rule (Appendix 1 to Chapter 7 in: R. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 2*, Cambridge University Press, 2001).
- [11] W. FULTON, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, 1996.

- [12] E. R. GANSNER, Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* **2** (1981), 429-440.
- [13] C. GREENE, Some Partitions Associated with a Partially Ordered Set, *Journal of Combinatorial Theory* **20** (1976), 69-79.
- [14] C. GREENE, D. KLEITMAN, The Structure of Sperner k -Families, *Journal of Combinatorial Theory* **20** (1976), 41-68.
- [15] D. KNUTH, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, *Pacific Journal of Mathematics* **34** (1970), 709-727.
- [16] M. VAN LEEUWEN, The Robinson-Schensted and Schützenberger algorithms, an elementary approach, *Electronic Journal of Combinatorics*, Foata Festschrift, Vol. 3 (1996).
- [17] I. MARTINS, *Partições de Inteiros e Dualidade em Estruturas Combinatórias*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2007.
- [18] L. MIRSKY, A dual of Dilworth's decomposition theorem, *The American Mathematical Monthly* **78** (1971), 876-877.
- [19] G. DE B. ROBINSON, On representations of the symmetric group, *American Journal of Mathematics* **60** (1938), 745-760.
- [20] B. SAGAN, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nd ed., Springer, 2001.
- [21] C. SCHENSTED, Longest Increasing and Decreasing Subsequences, *Canadian Journal of Mathematics* **13** (1961), 179-191.
- [22] M. SCHÜTZENBERGER, Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Mathematica Scandinavica* **12** (1963), 117-128.
- [23] M. SCHÜTZENBERGER, La correspondance de Robinson (in D. Foata (ed.), *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 579, Springer-Verlag, 1977).
- [24] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics: Volume 1*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2011.
- [25] R. STANLEY, *Enumerative Combinatorics: Volume 2*, Cambridge University Press, 2001.